

9.2 Осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим систему Ван дер Поля, описывающую движение осциллятора с нелинейным затуханием под действием внешней силы

$$\begin{cases} y' = a \cdot \left(-\left(\frac{y^3}{3} - y\right) + x\right), \\ x' = -y + A \cdot \cos wx. \end{cases}$$

Построим неявный метод Эйлера:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h \cdot a \cdot \left(-\left(\frac{y_{k+1}^3}{3} - y_{k+1}\right) + x_{k+1}\right), \\ x_{k+1} = x_k - y_{k+1} + A \cdot \cos wx. \end{cases}$$

Решим полученную нелинейную систему методом Ньютона:

$$\begin{cases} F_1 = y_k + h \cdot a \cdot \left(-\left(\frac{y_{k+1}^3}{3} - y_{k+1}\right) + x_{k+1}\right) - y_{k+1} = 0 \\ F_2 = x_k - y_{k+1} + A \cdot \cos wx - x_{k+1} = 0 \end{cases}$$

Матрица Якоби для этой системы

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_{k+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_{k+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - a \cdot h \cdot (y_{k+1}^2 - 1) & -h \\ ah & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = W^{-1} = \frac{W^T}{\det W} = \frac{1}{\det W} \cdot \begin{pmatrix} -1 - a \cdot h \cdot (y_{k+1}^2 - 1) & ah \\ -h & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Получим итерационный процесс:

$$\begin{cases} y_{k+1}^{n+1} = y_k^n - a_{11} \cdot F_1 - a_{12} \cdot F_2 \\ x_{k+1}^{n+1} = x_k^n - a_{21} \cdot F_1 - a_{22} \cdot F_2 \end{cases}$$

Реализация алгоритма представлена в app.py