9.2 Осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим систему Ван дер Поля, описывающую движение осциллятора с нелинейным затуханием под действием внешней силы

$$\begin{cases} y' = a \cdot (-(\frac{y^3}{3} - y) + x), \\ x' = -y + A \cdot coswx. \end{cases}$$

Построим неявный метод Эйлера:

$$\begin{cases} y_{\mathrm{k+1}} = y_{\mathrm{k}} + h \cdot a \cdot (-(\frac{y_{\mathrm{k+1}}^3}{3} - y_{\mathrm{k+1}}) + x_{\mathrm{k+1}}), \\ x_{\mathrm{k+1}} = x_{\mathrm{k}} - y_{\mathrm{k+1}} + A \cdot coswx. \end{cases}$$

Решим полученную нелинейную систему методом Ньютона:

$$\begin{cases} F_1 = y_{\mathrm{k}} + h \cdot a \cdot (-(\frac{y_{\mathrm{k+1}}^3}{3} - y_{\mathrm{k+1}}) + x_{\mathrm{k+1}}) - y_{\mathrm{k+1}}, \\ F_2 = x_{\mathrm{k}} - y_{\mathrm{k+1}} + A \cdot coswx - x_{\mathrm{k+1}}. \end{cases}$$

Матрица Якоби для этой системы

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_{\mathrm{k+1}}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{\mathrm{k+1}}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{\mathrm{k+1}}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{\mathrm{k+1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - a \cdot h \cdot (y_{\mathrm{k+1}}^2 - 1) & -h \\ ah & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = W^{-1} = \frac{W^T}{detW} = \frac{W^T}{detW} \cdot \begin{pmatrix} -1 - a \cdot h \cdot (y_{\mathrm{k+1}}^2 - 1) & ah \\ -h & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Получим итерационный процесс:

$$\begin{cases} y_{\mathrm{k+1}}^{n+1} = y_{\mathrm{k}}^n - a_{11}^{-1} \cdot F_1 - a_{12}^{-1} \cdot F_2, \\ x_{\mathrm{k+1}}^{n+1} = x_{\mathrm{k}}^n - a_{21}^{-1} \cdot F_1 - a_{22}^{-1} \cdot F_2. \end{cases}$$

Реализация алгоритма предтавлена в app.py