Nombre: ______________________________

Instrucciones: Resuelva los ejercicios de manera detallada, clara y completa. Entregue los programas solicitados vía github.

Para estimar el valor de la integral:

$$I = \int_a^b g(x)dx \tag{1}$$

podemos usar el estimador:

$$\hat{p} = \frac{N_H}{N}, \tag{2}$$

donde N_H es el número de veces en que $g(X_i) \geq Y_i$, para $i = 1, 2, ..., N$, es decir, el número de "aciertos" y por ende $N - N_H$ es el número de "fallos": $g(X_i) < Y_i$, para $i = 1, ..., N$.

De (1) y (2) se deduce que la integral I puede aproximarse mediante el estimador θ_1:

$$I \approx \theta_1 = c(b-a)\frac{N_H}{N}. \tag{3}$$

1. (a) Calcule el valor esperado de θ_1 y muestre que es un estimador insesgado.
   (b) Calcule la varianza del estimador θ_1.
2. (a) Calcule la desviación estándar e interprete el resultado en términos de la precisión del estimador.
   (b) ¿Cuál debe ser el valor de N para que la precisión de la estimación θ_1 sea de 0.01 y 0.001?
3. Escriba un programa en Python que implemente el siguiente algoritmo.

Algoritmo del Método Monte Carlo de Acierto y Error

Paso 1: Genere una secuencia $\{U_j\}_{j=1}^{2N}$ de $2N$ números aleatorios.

Paso 2: Organice los números aleatorios en N pares $(U_1, U_1'), (U_2, U_2'), ..., (U_N, U_N')$ de cualquier forma tal que cada número aleatorio U_j se use exactamente una vez.

Paso 3: Calcule $X_i = a + U_i(b-a) \quad y \quad g(X_i), \quad i = 1, 2, ..., N.$

Paso 4: Cuente el número de casos N_H para los cuales $g(X_i) > cU_i'$.

Paso 5: Estime la integral I por $\theta_1 = c(b-a)\frac{N_H}{N}$.

---

4. Retome el ejemplo de la estimación del número π y grafique el estimador versus N para identificar el estado estable y el estado transitorio de la simulación.

5. Use el método de Acierto y Error para estimar las integrales:
   (a) $\int_0^1 exp(e^x)dx$
   (b) $\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}dx$

6. Los coeficientes p y q de la ecuación cuadrática

$$x^2 + px + q = 0$$

   son tomados aleatoriamente en el intervalo $(0, 2)$. ¿Cuál es la probabilidad de que las raices de esta ecuación sean números reales?
   (a) Resuelva este problema por simulación.
   (b) Resuélvalo teóricamente.
   (c) Compare ambas soluciones y escriba sus observaciones.