

1. Методом наименьших квадратов найти аппроксимирующий полином первой и второй степени:

x	F(x)
3.0	4.0
3.2	2.0
3.4	6.0
3.6	6.0
3.8	3.0
4.0	5.0

Решение: Для полинома первой степени ответ будем искать в виде $\varphi(x) = ax + b$. В этом случае $\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 1$. Получаем такую систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^5 (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^5 (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a(9 + 10.24 + 11.56 + 12.96 + 14.44 + 16) + \\ + b(3.0 + 3.2 + 3.4 + 3.6 + 3.8 + 4.0) - \\ - (12 + 6.4 + 20.4 + 21.6 + 11.4 + 20) = 0 \\ a(3.0 + 3.2 + 3.4 + 3.6 + 3.8 + 4.0) + 5b - \\ - (4.0 + 2.0 + 6.0 + 6.0 + 3.0 + 5.0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 74.2a + 21b - 91.8 = 0 \\ 21a + 5b - 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 74.2a + 21b = 91.8 \\ 21a + 5b = 26 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 74.2 & 21 \\ 21 & 5 \end{vmatrix} = 74.2 \cdot 5 - 21 \cdot 21 = 371 - 441 = -70.$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 91.8 & 21 \\ 26 & 5 \end{vmatrix} = 91.8 \cdot 5 - 21 \cdot 26 = 459 - 546 = -87.$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 74.2 & 91.8 \\ 21 & 26 \end{vmatrix} = 74.2 \cdot 26 - 91.8 \cdot 21 = 1929.2 - 1927.8 = 1.4;$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{-87}{-70} \approx 1.24;$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{1.4}{-70} \approx -0.02;$$

Ответ: $\varphi(x) = 1.24x - 0.02$.

Теперь найдём аппроксимирующий полином второй степени. Ответ будем искать в виде $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^5 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=0}^5 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^5 (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 951.96a + 264.6b + 74.2c = 326.92 \\ 264.6a + 74.2b + 21c = 91.8 \\ 74.2a + 21b + 5c = 26 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 951.96 & 264.6 & 74.2 \\ 264.6 & 74.2 & 21 \\ 74.2 & 21 & 5 \end{vmatrix} = -622.05;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 326.92 & 264.6 & 74.2 \\ 91.8 & 74.2 & 21 \\ 26 & 21 & 5 \end{vmatrix} = 31.92;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 951.96 & 326.92 & 74.2 \\ 264.6 & 91.8 & 21 \\ 74.2 & 26 & 5 \end{vmatrix} = -880.37;$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 951.96 & 264.6 & 326.92 \\ 264.6 & 74.2 & 91.8 \\ 74.2 & 21 & 26 \end{vmatrix} = -10.8;$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{31.92}{-622.05} \approx -0.05;$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-880.37}{-622.05} \approx 1.42;$$

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{-10.8}{-622.05} \approx 0.02;$$

Ответ: $\varphi(x) = -0.05x^2 + 1.42x + 0.02$.

2. Вычислить определённый интеграл аналитически и численно:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx. \quad (1)$$

Для численного интегрирования использовать формулу прямоугольников, трапеций и формулу Симпсона. Сравнить результаты.

Решение: В начале решим задачу аналитически. Найдём первообразную методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4} \int \ln x dx^4 = \\ \frac{1}{4} \left(x^4 \ln x - \int x^4 d(\ln x) \right) &= \frac{1}{4} \left(x^4 \ln x - \int x^3 dx \right) = \\ \frac{1}{4} \left(x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} \right). \end{aligned}$$

Теперь вычислим точное значение интеграла:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 \ln x dx &= \frac{1}{4} \left(x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \left(16 \ln 2 - 4 - 1 \cdot 0 + \frac{1}{4} \right) = \\ \frac{1}{4} \left(16 \ln 2 - \frac{15}{4} \right) &= 4 \ln 2 - \frac{15}{16} \approx 4 \cdot 0.69 - 0.94 = 1.83. \end{aligned}$$

Ответ: $\int_1^2 x^3 \ln x dx \approx 1.83$.

Теперь подсчитаем значение интеграла (1) с помощью формулы прямоугольников.

Формула прямоугольников имеет вид:

$$I \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

где I — вычисляемый интеграл, ξ_i — некоторое значение между x_i и x_{i-1} , $i = 0, 1, \dots, n$.

Разобьём отрезок $[1, 2]$ на 4 части, получаем такую таблицу:

n	x_i	ξ_i
0	1	
1	1.25	1.125
2	1.5	1.375
3	1.75	1.625
4	2	1.875

Тогда

$$\begin{aligned} I &\approx \sum_{i=1}^4 f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 0.25 \sum_{i=1}^4 f(\xi_i) = \\ &= 0.25(1.125^3 \ln 1.125 + 1.375^3 \ln 1.375 + 1.625^3 \ln 1.625 + \\ &\quad + 1.875^3 \ln 1.875) \approx 1.81. \end{aligned}$$

Ответ: вычисление интеграла (1) с помощью формулы прямоугольников даёт значение 1.81.

Теперь применяем формулу трапеций:

$$I \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right);$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, здесь a, b — начальные и конечные точки отрезка, n — количество разбиений, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$.
Получаем:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx \approx 0.25 \left(\frac{0 + 5.52}{2} + 1.31 + 1.39 + 3 \right) \approx 2.12.$$

Ответ: вычисление определённого интеграла (1) с помощью формулы трапеций даёт значение 2.12.

Теперь нахождение значения определённого интеграла с помощью формулы Симпсона.

Формула Симпсона:

$$I \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2);$$

где $\sigma_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}$, $\sigma_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}$. Получаем:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx \approx \frac{0.25}{3} (0 + 5.52 + 4 \cdot (1.31 + 3) + 2 \cdot (1.39)) \approx 2.04.$$

Ответ: вычисление определённого интеграла (1) с помощью формулы Симпсона даёт значение 2.04.

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения:

$y' = 0,1(x + y^2)$, $y(0) = 1$, на отрезке $[0; 0,3]$, $h = 0,1$ методом Эйлера, методом Рунге-Кутты четвёртого порядка. Данные представить в таблице.

Решение:

Метод Эйлера:

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Данные представлены в таблице:

x_0	x_1	x_2	x_3
0	0,1	0,2	0,3
y_0	y_1	y_2	y_3
1	1,01	1,02	1,03

Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка:

$$\begin{cases} \eta_1^i = f(x_i, y_i), \\ \eta_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\eta_1^i\right), \\ \eta_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\eta_2^i\right), \\ \eta_4^i = f\left(x_i + h, y_i + h\eta_3^i\right), \\ \Delta y_i = \frac{h}{6}(\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i), \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \end{cases}$$

Полученные результаты:

x_0	x_1	x_2	x_3
0	0,1	0,2	0,3
y_0	y_1	y_2	y_3
1	1,011	1,023	1,036

4. Задана матрица переходных вероятностей $||p||$. В начальный момент ($t_0 = 0$) система находится в состоянии s_1 . Построить граф переходов. Найти распределение вероятностей состояний для первых четырёх шагов ($k = 1, 2, 3, 4$).

$$||p_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: После первого шага $t_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

После второго шага $t_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,25 & 0,17 & 0,18 \end{pmatrix}$$

После третьего шага $t_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,25 & 0,17 & 0,18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,21 \quad 0,06 \quad 0,17 \quad 0,24 \quad 0,33) .$$

После четвёртого шага $t_4 = 4$:

$$\begin{aligned} (0,21 \quad 0,06 \quad 0,17 \quad 0,24 \quad 0,33) & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = (0,16 \quad 0,04 \quad 0,1 \quad 0,16 \quad 0,55) . \end{aligned}$$