§5.4 平稳过程的谱分析简介

付氏变换在应用和理论中是一种有效的分析方法, 特别在电路分析中用付氏变换确立了时域和频域间的关系.

现用付氏变换来研究平稳过程.

一、确定函数的功率谱密度

设$x(t)$是定义在时间轴上的确定函数(信号), 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty,$$

则$x(t)$的付氏变换存在, 或称$x(t)$具有频谱:

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (1)$$

一般$F_x(\omega)$是复函数，有

$$F_x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \overline{F_x(\omega)},$$

$F_x(\omega)$的逆变换为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(\omega)e^{j\omega t}dt \qquad (2)$$

Parseval(巴塞瓦尔)公式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega \qquad (3)$$

$x(t)$在R上的总能量

称$|F(\omega)|^2$为能谱密度,

(3)式为信号的总能量的谱表示.

若令 $x_T(t)=\begin{cases} x(t), & |t|\le T; \\ 0, & |t|>T. \end{cases}$ （$T>0$）

$x_T(t)$的付氏变换记为

$$F(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

且巴塞瓦尔公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x_T(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega,T)|^2d\omega$$

二、平稳过程的功率谱密度

设过程$\{X(t), t\in R\}$均方连续,均方积分

$$F_X(\omega,T)=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-j\omega t}dt$$

存在, 且有巴塞瓦尔等式

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2d\omega \qquad (3')$$

成立.

上式两边求均值再取极限, 左端为

$$\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2dt\right\} \qquad (4)$$

称为平稳过程$X(t)$ 的平均功率.

若(4)中的积分与求均值可交换顺序, 则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}E\{|X(t)|^2\}dt = E[|X(t)|^2] = R_X(0) = \Psi_X^2$$

(3′) 式右端为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\{\frac{1}{2T}E[|F(\omega,T)|^2\}d\omega$$

记 $S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|F_X(\omega,T)|^2]$,

平均功率等于过程的均方值

称为平稳过程$X(t)$的**功率谱密度**(功率谱，谱密度).

注 从频率角度描述平稳过程统计规律的主要数字特征.

巴塞瓦尔等式可表示为

$$\psi_X^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)\,d\omega \qquad (5)$$

称为平稳过程的**平均功率谱表示式**.

三、平稳过程相关函数的谱分解

研究平稳过程的相关函数与功率谱密度间的关系.

定理5.4.1 (**维纳—辛钦**)设$\{X(t), t\in T\}$是均方连续平稳过程，$E[X(t)]=0$, 当其相关函数$R(\tau)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R(\tau)|d\tau<\infty,$$

有

$$
\begin{cases}
S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, & (5)\\
R(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega, & (6)
\end{cases}
$$

平稳过程的相关函数与功率谱密度构成一对Fourier变换.

注 (6) 式称为**相关函数的谱分解式**.

推论1 $\{X(t),\ t\in R\}$是平稳过程, 则其谱密度$S(\omega)$ 满足

1) $S(\omega)$为实值非负函数，即

$$\overline{S(\omega)} = S(\omega) \geq 0.$$

2)又若$\{X(t), t\in R\}$是实过程, 则$S(\omega)$是偶函数.

证 1) $\overline{S(\omega)} = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|F(\omega,T)|^2] = S(\omega) \geq 0;$

2) 实平稳过程的相关函数是偶函数, 由(5)式可得

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(u) e^{j\omega u} du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(u) e^{-j(-\omega)u} du = S(-\omega).$$

推论2 若$\{X(t), t \in R\}$为实平稳过程,则

$$\begin{cases} S(\omega) = 2\int_0^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau & (5') \\ R_X(\tau) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\tau, & (6') \end{cases}$$

因$R(\tau)$与$S(\omega)$均为偶函数.

注 由付氏变换性质,可得谱密度及相关函数的关系及性质,参见 P151~P152.

EX.1 设平稳过程的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\delta(\omega),$$

求相关函数$R_X(\tau)$.

其中 $\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0;\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$

解 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1,$

和 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0),$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{-j0\tau}=\frac{1}{2\pi}.$$

EX.2 设平稳过程的相关函数为

$$R_X(\tau)=\sigma^2\cos a\tau,$$

求其功率谱密度.

解　将$R_X(\tau)$改写为

$$R_X(\tau)=\frac{\sigma^2}{2}(e^{ia\tau}+e^{-ia\tau}),$$

因$S_X(\omega)$与$R_X(\tau)$互为付氏变换对的关系, 有

$$R_X(\tau)=\frac{\sigma^2}{2}(e^{ia\tau}+e^{-ia\tau})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}S_X(\omega)d\omega,$$

故 $S_X(\omega)=\pi\sigma^2[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)].$

四、谱密度的数学讨论

以上是从工程的角度，将确定函数的谱密度概念引入平稳过程,得到了相关函数的谱展式, 现从数学的角度进一步讨论.

引理（波赫纳Bochner-辛钦Khintchine定理）函数$\psi(t)$为特征函数的充分必要条件是$\psi(t)$在R是一致连续，非负定且$\psi(0)=1$.

定理5.4.2 (维纳—辛钦)均方连续平稳过程 $\{X(t), t\in T\}$的相关函数$R_X(\tau)$可表示为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dF_X(\omega), \tau\in R \quad (7)$$

其中$F(\omega)$是R 上的非负有界, 单调不减, 右连续函数, 且

$$F_X(-\infty)=0, \quad F_X(+\infty)=2\pi R_X(0).$$

证 若$R_X(0)=0$, 则$R_X(\tau)\equiv 0$，取$F_X(\omega)\equiv 0$ 即可.

若$R_X(0)>0$，令 $f(\tau)=\dfrac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$

由过程的均方连续性及平稳性推知.

有 $$f(0)=\frac{R_X(0)}{R_X(0)}=1,$$

$f(\tau)$是非负定函数,(因$R(\tau)$非负定),

且在R上一致连续.

根据由波赫纳－辛钦定理，$f(\tau)$一定是某一随机变量(或分布函数)的特征函数，

存在分布函数$G(\omega)$,使

$$f(\tau)=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dG(\omega)$$

令 $F_X(\omega)=2\pi R_X(0)G(\omega)$即为定理所求.

注 $$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dF_X(\omega),\qquad \tau\in R$$

称为平稳过程相关函数的**谱展式**.

定义5.4.1 称$F_X(\omega)$为过程$\{X(t),t\in T\}$的**谱函数**，若存在$S_X(\omega)$，使

$$F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\omega_1)d\omega_1,\quad \omega\in R$$

称$S_X(\omega)$为过程的**谱密度**.

利用特征函数和分布函数之间的关系,可证得定理5.4.1 (维纳—辛钦).

定理5.4.3 设$\{X(t), t\in R\}$是均方连续的平稳过程, $E[X(t)]=m$, 相关函数为$R_X(\tau)$,谱函数为$F(\omega)$, 则以下**三个命题等价**:

1) $\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} X(t)dt = m$; (均值各态历经)

2) $F(\omega)$在ω处连续;

3) $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}C_X(\tau)d\tau=0.$$