

2023-2024 学年秋季学期组合数学考试

18th December 2023 整理

1. 求证：

$$C(2n, n) = \sum_{k=0}^n C(n, k)^2$$

2. 证明：

(a) 证明：一个年级 367 人，一年 365 天，证明至少有两人生日相同。

(b) 证明：32 个同学，身高都是整数，范围 160 至 190 之间，至少有两个同学身高相同。

3. 集合 S 是小于 10000 且是 7 的倍数的集合，求这个集合中能被 2, 3, 5 任意一个整除的元素个数。

4. 求：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 300 \\ 2 \leq x_1 \leq 10, x_3 \leq 6 \end{cases}$$

正整数解的个数。

5. 求递归关系式：

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-3} + 3 \times 2^n \\ a_0 = 4, a_1 = 5, a_2 = 39 \end{cases}$$

6. 某个会议只办 5 届，每个洲只能办一届，北美洲、南美洲、亚洲、欧洲、澳洲，其中北美洲只能办第一届、第二或第三届，南美洲不能办第二届，欧洲不能办第四届，澳洲只能办第一届、第三或第四届。求上述条件下有多少种办会议的方案。

7. 一个 m 位的十进制数, 求不包含 1, 3, 5, 且 6, 8 至少出现一次, 有多少个 m 位十进制数。(在 2014, 2017-2018 年的卷子出现原题)
8. 重集 $B = \{k_1 \cdot b_1, k_2 \cdot b_2, k_3 \cdot b_3, \dots, k_m \cdot b_m\}$, 其中 b_i 至少出现 3 的倍数次, 给出一个算法求解。