§4.4 随机过程的均方导数

一、均方导数概念

定义4.4.1 $\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程, 对于确定的 $t\in T$，若存在 $Y\in H$, 使得

$$\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=Y$$

称$X(t)$在t 处**均方可微(可导)**，称Y为$X(t)$在 t 处的**均方导数**, 记为 $\dfrac{dX(t)}{dt}$或$X'(t)$.

$$\frac{dX(t)}{dt} \text{ 或 } X'(t).$$

若对$t \in T$, $X(t)$都均方可微, 称$\{X(t), t \in T\}$为**均方可微过程.**

可证明均方导数过程

$$\{X'(t), t \in T\}$$

仍是二阶矩过程．可定义其均方导数过程

$$\{X''(t), t \in T\},$$

其余各高阶导数依此余推.

$$X''(t), X'''(t), \cdots X^{(n)}(t), \quad t \in T.$$

EX.1 试求随机过程

$$X(t) = At + B$$

的均方导数, 其中A、B是相互独立的随机变量.

解

$$X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m}} \frac{A(t+\Delta t) + B - (At + B)}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m}}\, A = A$$

而

$$E\left|\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} - A\right|^2 = E|A - A|^2 = 0$$

在一般情况下，直接判断随机过程的可微性并求出导数过程是极其困难的.

为将随机过程的均方导数研究问题转移到实数域进行讨论分析，引进**广义二阶导数概念**：

定义4.4.2 称二元函数 $f(s,t)$ 在 (s, t) 处**广义二阶可微**，若极限

$$\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{f(s+\Delta s, t+\Delta t) - f(s+\Delta s, t) - f(s, t+\Delta t) + f(s,t)}{\Delta t \Delta s}$$

存在，称此极限为 $f(s, t)$ 在 (s, t) 处的**广义二阶导数**.

注 广义二阶导数是二重极限,而二阶混合偏导是二次极限, 一般情况下二者不相等.

参见 P91

引理4.4.1 若二元函数$f(s,t)$关于s, t 的一阶偏导存在, 二阶混合偏导存在并连续,则$f(s,t)$一定是广义二阶可微的. 且广义二阶导数为

$$f''_{st}(s,t) = f''_{ts}(s,t)$$

二、均方可微准则

定理4.4.1 (均方可微准则)

二阶矩过程$\{X(t), t\in T\}$在$t_0\in T$处均方可微的充要条件是其相关函数$R(s, t)$在(t_0, t_0)处广义二阶可微.

证 由均方收敛定义及收敛准则可知,

$\{X(t), t\in T\}$在t_0处均方可微

$$\Longleftrightarrow \quad \underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}} \frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t} \text{ 存在}$$

洛易夫准则

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}} E\left\{\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}\,\overline{\frac{X(t_0+\Delta s)-X(t_0)}{\Delta s}}\right\}\text{存在}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}} \frac{1}{\Delta t\Delta s}[R(t_0+\Delta t,t_0+\Delta s)-R(t_0+\Delta t,t_0)$$

$$-R(t_0,t_0+\Delta s)+R(t_0,t_0)]\quad \text{存在,}$$

即，$R(s, t)$在(t_0 ,t_0)处广义二阶可微.

EX.2 设随机变量ξ满足$E(\xi)=0$，$D(\xi)=\sigma^2$，

令 $$X(t)=\xi t,\quad t\in T$$

证明 $\{X(t),t\in T\}$ 是均方可微过程.

证 $\{X(t),t\in R\}$是二阶矩过程，

$$E[X(t)]=0,\quad D[X(t)]=t^2\sigma^2,$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)\overline{X(t)}]$$

$$=E[\xi s\overline{\xi t}]=stE(\xi\overline{\xi})=st\sigma^2$$

其广义二阶导数为

$$\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{1}{\Delta s\Delta t}[R_X(s+\Delta s, t+\Delta t) - R_X(s+\Delta s, t)$$

$$- R_X(s, t+\Delta t) + R_X(s,t)]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{\sigma^2}{\Delta s\Delta t}[(s+\Delta s)(t+\Delta t)-(s+\Delta s)t-s(t+\Delta t)+st]$$

$$= \sigma^2 < \infty$$

故$\{X(t), t\in T\}$是一个均方可微过程.

推论4.4.1 二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数$R(s,t)$在$T\times T$的对角线上广义二阶可微，

则$R_s'(s,t),R_t'(s,t),R_{st}''(s,t),R_{ts}''(s,t)$在$T\times T$上均存在.

而且

(1) 导数过程$\{X'(t),t\in T\}$的均值函数为

$$m_{X'}(t)=E[X'(t)]=\frac{d}{dt}E[X(t)]=m_X'(t)$$

(2) 导数过程$\{X'(t),t\in T\}$的自相关函数为

$$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)\overline{X'(t)}]=R_{st}''(s,t)=R_{ts}''(s,t)$$

(3)　导数过程$\{X'(t), t\in T\}$与$\{X(t), t\in T\}$的互相关函数为

$$R_{X'X}(s,t)=E[X'(s)\overline{X(t)}]=R'_s(s,t)$$

$$R_{XX'}(s,t)=E[X(s)\overline{X'(t)}]=R'_t(s,t)$$

证

(1)　$$m_{X'}(t)=E[X'(t)]=E\left[\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}E\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{m_X(t+\Delta t)-m_X(t)}{\Delta t}\right]=m'_x(t)$$

(3) $$R_{X'X}(s,t)=E[X'(s)\overline{X(t)}]$$

$$=E[l\cdot i\cdot m_{\Delta s\to 0}\frac{X(s+\Delta s)-X(s)}{\Delta s}\cdot\overline{X(t)}]$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{E[X(s+\Delta s)\overline{X(t)}-X(s)\overline{X(t)}]}{\Delta s}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{R(s+\Delta s,t)-R(s,t)}{\Delta s}=R_s^{'}(s,t)$$

(2) $R_{X'}(s,t) = E[X'(s)\overline{X'(t)}]$

$$= E[\underset{\Delta s \to 0}{\mathrm{l.i.m}} \frac{X(s+\Delta s) - X(s)}{\Delta s} \cdot \overline{X'(t)}]$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{E[X(s+\Delta s)\overline{X'(t)} - X(s)\overline{X'(t)}]}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{R'_t(s+\Delta s, t) - R'_t(s,t)}{\Delta s} = R''_{ts}(s,t)$$

由(3)可得

EX.3 参数为σ^2的Wiener过程$\{W(t), t\geq 0\}$在$t=t_0$否是均方可微的?

解

因 $R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$,

$$R_W(t_0+\Delta t,t_0)-R_W(t_0,t_0)=\sigma^2[\min(t_0+\Delta t,t_0)-t_0]$$

$$=\begin{cases}0, & \Delta t>0;\\ \sigma^2\Delta t, & \Delta t<0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R'_{s+}(t_0,t_0)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{0}{\Delta t}=0,$$

$$R'_{s-}(t_0,t_0)=\lim_{\Delta t\to 0^-}\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta t}=\sigma^2.$$

$R'_s(t_0,t_0)$不存在，**因此$\{W(t),\ t\geq 0\}$不是均方可微的.**

注 可通过引进Dirac-δ函数,定义Wiener过程的导数过程(参见P93).

EX.4 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，讨论随机过程 $X(t)=W^2(t),\ t\geq 0$是否均方可微?

解 自相关函数为

$$R(s,t)=\sigma^4(st+2\min{}^2(s,t))$$

$$R'_{s+}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{R(t+\Delta t,t)-R(t,t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\sigma^4[(t+\Delta t)t+2t^2-3t^2]}{\Delta t}=\sigma^4 t,$$

$$R'_{s-}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0-}\frac{R(t+\Delta t,t)-R(t,t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0-}\frac{\sigma^5[(t+\Delta t)t+2(t+\Delta t)^2-3t^2]}{\Delta t}=5\sigma^4 t,$$

$R'_{s+}(t,t)\neq R'_{s-}(t,t)$, 所以 $R'_s(t,t)$ 不存在,

⇒ $R(s,t)$ 不是广义二阶可导的

⇒ $X(t)=W^2(t)$, $t\geq 0$ 不是均方可微的.

三、均方导数基本性质

性质4.4.1 均方可导必均方连续, $\{X(t), t\in T\}$ 在t处均方可微, 则$X(t)$在t处均方连续.

证　$X'(t)\in H$, 故

$$\lim_{\Delta t\to 0} E[|X(t+\Delta t)-X(t)|^2]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0} E\left[\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right|^2\right]\cdot(\Delta t)^2=E[|X'(t)|^2]\cdot 0=0$$

注　性质的逆不真.

性质4.4.2 均方导数在概率为1 的意义下惟一.

若 $X'(t)=Y_1(t),\ X'(t)=Y_2(t),$

则 $Y_1(t)=Y_2(t)\quad(a.e)$

证 由均方极限的惟一性可得.

性质4.4.3 均方导数具有线性性

$X(t),Y(t)$均方可微, 则$\{aX(t)+bY(t),t\in T\}$, a, $b\in C$, 也均方可微, 且

$$[aX(t)+bY(t)]' = aX'(t)+bY'(t)$$

证 记

$$\frac{\Delta(aX+bY)}{\Delta t}=\frac{\left[aX(t+\Delta t)+bY(t+\Delta t)\right]-\left[aX(t)+bY(t)\right]}{\Delta t}$$

$$\frac{d[aX+bY]}{dt}=\left[aX'(t)+bY'(t)\right]$$

则 $$\left\|\frac{\Delta(aX+bY)}{\Delta t}-\frac{d(aX+bY)}{dt}\right\|$$

$$=\left\|\frac{\Delta(aX+bY)}{\Delta t}-[aX'(t)+bY'(t)]\right\|$$

$$\leq |a|\left\|\frac{[X(t+\Delta t)-X(t)]}{\Delta t}-X'(t)\right\|$$

$$+|b|\cdot\left\|\frac{[Y(t+\Delta t)-Y(t)]}{\Delta t}-Y'(t)\right\|\to 0,$$

$$as\quad \Delta t\to 0.$$

性质4.4.4 设$f(t)$是定义在T上的普通可微函数, $\{X(t), t\in T\}$是均方可微过程,则 $\{f(t)X(t), t\in T\}$也是可微过程,有

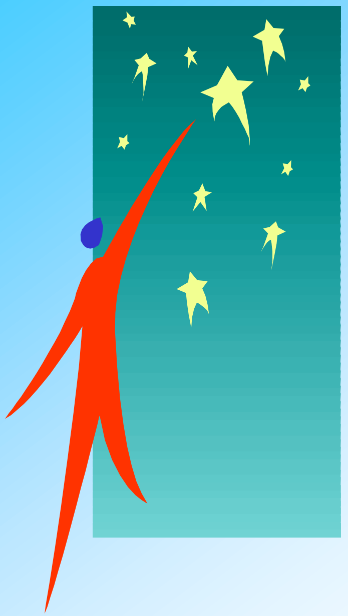
$$[f(t)X(t)]' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$$

性质4.4.5 设$\{X(t), t\in T\}$是均方可微过程,且$X'(t)=0$, 则$X(t)$是一个常随机变量(即与指标t无关的随机变量).

等价于

具有相等均方导数的两个随机过程，它们最多仅相差一个随机变量，即

$$[X(t)+X]' = X'(t)$$



二阶矩过程均方可微的判别准则：

1.按**定义**找出均方导数；如例3.4.1，例3.4.2.

2.(**充要条件**) $R(s,t)$在对角线广义二阶可微；如例3.4.3.

3.(**充分条件**) $R(s,t)$二阶混合偏导存在且连续；

4.(**必要条件**) $R(s,t)$一阶偏导存在；如例3.4.4，例3.4.5.