§ 3.2 维纳过程

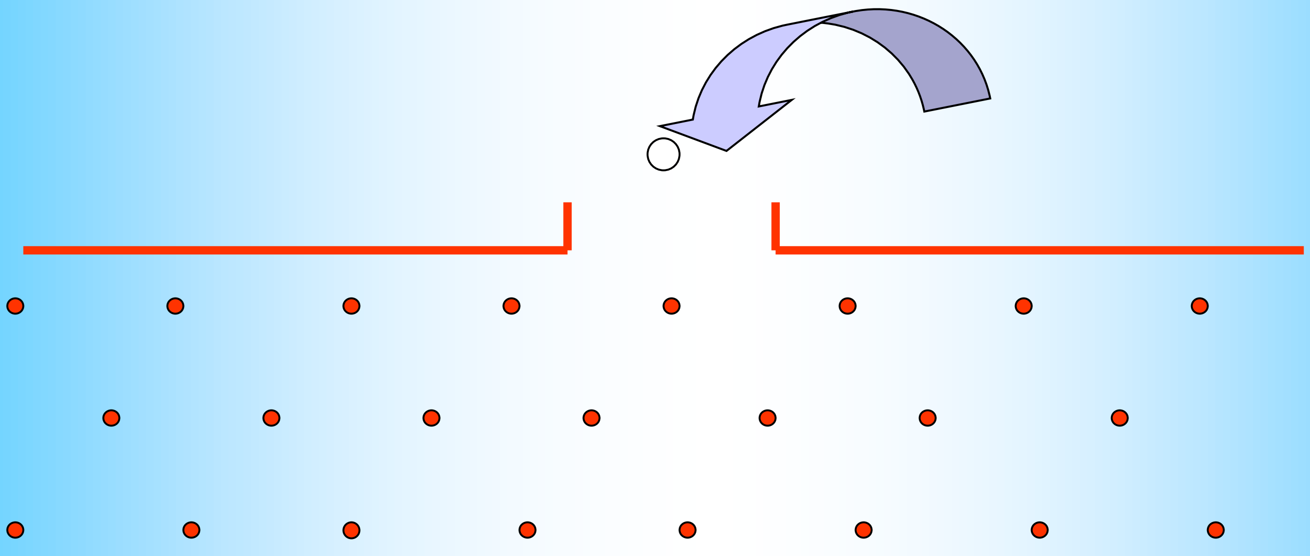
一、维纳过程的数学模型

维纳过程是英国植物学家罗伯特.布朗在观察漂浮在液面的花粉运动—布朗运动规律时建立的随机游动数学模型.

EX.1 （高尔顿钉板模拟试验）

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内, 小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.

§ 3.3 维纳过程



$$X(k)=\begin{cases}1, & \text{在第}k\text{层向右位移一格;}\\ -1, & \text{在第}k\text{层向左位移一格.}\end{cases}$$

$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

§ 3.3 维纳过程

$\{X(k),\ k\in N^{+}\}$ 是一个独立随机过程, 令

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k),$$

小球在第n 次碰撞后所处位置

$\{Y(n),n\in N^{+}\}$是一个平稳独立增量过程.

均值函数为 $$E[Y(n)]=E\left(\sum_{k=1}^{n}X(k)\right)=0,$$

方差函数为 $$D[Y(n)]=\sum_{k=1}^{n}D(X(k))=n,$$

§ 3.3 维纳过程

由独立同分布中心极限定理知 $as \quad n \to \infty$

$$P\left\{\frac{Y(n)}{\sqrt{n}} \le y\right\} = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X(k)}{\sqrt{n}} \le y\right\} \to \Phi(y)$$

即 $Y^*(n) = \dfrac{Y(n)}{\sqrt{n}}, n = 1,2,\cdots$ 依分布收敛于标准正态分布随机变量.

参见教材P41花粉微粒的一维运动

$W(r), r\in[0,1]$满足：

- （1） $W(0)=0$;
- （2） $E\{W(r)\}=0$;
- （3） $W(r)\sim N(0,\sigma^2 r)$，$(\sigma>0)$.
- （4） 具有平稳独立增量;

$D[W(r)]$随时间的推移而增大

二、维纳过程的定义

定义3.2.1若随机过程$\{W(t), t\geq 0\}$满足上条件(1)~(4)称$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程（或布朗运动）.

§ 3.3 维纳过程

维纳过程应用广泛：电路理论、通信和控制、生物、经济管理等.

维纳过程的研究成果应用于计量经济学，使其方法论产生了一次飞跃，成功地应用于非平稳的经济过程，如激烈变化的金融商品价格的研究。

三、维纳过程的分布

1.一维分布： $W(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$;

2. 增量分布： $W(t) - W(s) \sim N(0,\sigma^2|t-s|)$;

设$t>s$，因$W(0)=0$，且$W(t)$是平稳独立增量过程，故

$$W(t)-W(s)=W(t-s+s)-W(s)$$

与 $$W(t-s)-W(0)=W(t-s)$$

有相同分布$N(0,\sigma^2(t-s))$.

3. 维纳过程是正态过程.

证 设维纳过程$\{W(t), t\geq 0\}$的参数是σ^2,

任取n及$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$X_k \triangleq W(t_k) - W(t_{k-1}),$$

则 $X_k \sim N(0, \sigma^2(t_k - t_{k-1})), \quad t_0 = 0, k = 1,2,\cdots,n$

相互独立，且有

$$W(t_k) = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

§ 3.3 维纳过程

$$\begin{bmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

正态随机向量的线性变换服从正态分布。

四、维纳过程的数字特征

1. $E[W(t)]=0;\ D[W(t)]=\sigma^2 t$

2. $C(s, t)=R(s,t)=\sigma^2 \min(s,t)$

维纳过程是平稳独立增量过程

EX.2 设$\{W(t),\ t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，求下列过程的均值函数和相关函数.

1) $X(t)=W^2(t),\ t\geq 0$；

2) $X(t)=tW(\frac{1}{t}),\quad t>0.$

解 1） $m_X(t)=E[X(t)]=E[W^2(t)]$

$$=D[W(t)]+\{E[W(t)]\}^2=\sigma^2 t.$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[W^2(s)W^2(t)]$$

$$=E\{W^2(s)[W(t)-W(s)+W(s)]^2\}\quad (s<t)$$

$$= E\{W^2(s)[W(t)-W(s)]^2\} + E[W^4(s)]$$

$$+ 2E\{W^3(s)[W(t)-W(s)]\}$$

独立增量

$$= E[W^2(s)]E\{[W(t)-W(s)]^2\} + E[W^4(s)]$$

$$= \sigma^2 s \sigma^2 (t-s) + 3\sigma^4 s^2 = \sigma^4 (st + 2s^2)$$

故 $R_X(s,t) = \sigma^4 (st + 2\min^2(s,t))$

其中因 $W(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$;

$W(t) - W(s) \sim N(0,\sigma^2|t-s|)$

另因　若$X \sim N(0,\sigma^2)$, 有

$$E(X^n)=\begin{cases}0, & n=1,3,5,\cdots\\ \sigma^n(n-1)(n-3)\cdots 1, & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

2)　$$m_X(t)=E[X(t)]=tE[W(\frac{1}{t})]=0,\qquad t>0.$$

$$R_X(s,t)=E[sW(\frac{1}{s})tW(\frac{1}{t})]=stE[W(\frac{1}{s})W(\frac{1}{t})]$$

$$=st\sigma^2\min(\frac{1}{s},\frac{1}{t})=\sigma^2\min(s,t).$$

§ 3.3 维纳过程

定理3.2.1 设$\{W(t), t\geq 0\}$是正态过程，若$W(0)=0$，对任意$s, t>0$, 有$E[W_t]=0$, $E[W_s W_t]=C^2\min(s,t)$, $C>0$, 且轨道连续，则$\{W(t), t\geq 0\}$是维纳过程，反之亦然。

§ 3.3 维纳过程

推论： 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，则

1) 对任意的$\tau\geq 0, \{W(t+\tau)-W(\tau), t\geq 0\}$;

2) 对常数$\lambda\geq 0, \{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}W(\lambda t), t\geq 0\}$;

3) $\{tW(\frac{1}{t}), t\geq 0\}$; 其中$tW(\frac{1}{t})|_{t=0}=0$;

仍为维纳过程。