

§ 2.3 随机过程的数字特征

在实际应用中, 很难确定出随机过程的有限维分布函数族, 过程的数字特征能反映其局部统计性质.

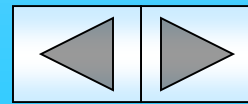
需确定各类数字特征随时间的变化规律.

一、均值函数、方差函数及相关函数

定义2.3.1 给定随机过程 $X_T = \{X(t), t \in T\}$, 称

$$m(t) \triangleq E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(t; x), \quad t \in T$$

为过程 X_T 的均值函数.



定义2.3.2 给定随机过程 $X_T = \{X(t), t \in T\}$, 称

$$D(t) \triangleq D[X(t)] = E[X(t) - m(t)]^2$$

为过程 X_T 的**方差函数**.

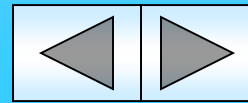
称 $\sqrt{D(t)}$ 为过程 X_T 的**均方差函数**.

为描述不同时刻过程状态的关联关系.

定义2.3.3 给定随机过程 $X_T = \{X(t), t \in T\}$, 称

$$C(s, t) \triangleq \text{Cov}(X(s), X(t)) = E\{[X(s) - m(s)][X(t) - m(t)]\}$$

为过程 X_T 的**协方差函数**.



有 $C(s, t) = E(X(t)X(s)) - m(s)m(t)$

$$D(t) = C(t, t) = E[X(t) - m(t)]^2$$

定义2.3.4 给定随机过程 $X_T = \{X(t), t \in T\}$, 称

$$R(s, t) \triangleq E[X(s)X(t)]$$

为过程 X_T 的自相关函数.

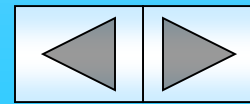
重点研究内容

有 $C(s, t) = R(s, t) - m(s)m(t)$

特别当 $m(t) \equiv 0$ 时

X_T 是零均值过程

$$C(s, t) = R(s, t)$$



称

$$\rho(s, t) \triangleq \frac{C(s, t)}{\sigma(s)\sigma(t)}$$

为过程 X_T 的自相关系数函数.

Ex.1 设 p, q 是两个随机变量, 构成随机过程

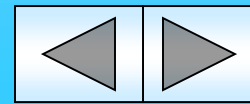
$$X(t) = p + qt, \quad t \in T = R$$

均值函数为

$$m(t) = E[X(t)] = E(p) + E(q)t,$$

自相关函数为

见P17例1.



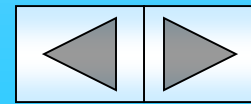
$$\begin{aligned} R(s, t) &= E\{(p + qs)(p + qt)\} \\ &= E[p^2] + E[pq](s + t) + E[q^2]st, \quad (s, t) \in R_2. \end{aligned}$$

Ex.2 利用抛硬币的试验定义一个随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{出现正面 } \omega = \omega_1; \\ 2t & \text{出现反面 } \omega = \omega_2. \end{cases} \quad t \in R.$$

求该过程的均值函数, 方差函数, 相关函数, 协方差函数.

解 因对任意实数 $t \in R$, 有



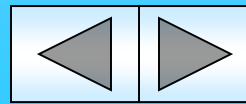
$X(t)$	$\cos\pi t$	$2t$
p	$1/2$	$1/2$

$$m_X(t) = E(X(t)) = \frac{1}{2}\cos\pi t + t;$$

$$E(X^2(t)) = \frac{1}{2}\cos^2\pi t + 2t^2;$$

$$D_X(t) = E[X^2(t)] - [m_X(t)]^2 = \left(\frac{1}{2}\cos\pi t - t\right)^2;$$

注意 $X(s)$ 与 $X(t)$ 不相互独立, 联合分布律为



$(X(t), X(s))$	$(\cos \pi t, \cos \pi s)$	$(2t, 2s)$
p	$1/2$	$1/2$

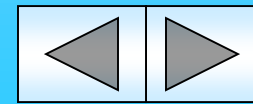
$$R_X(s, t) = E[X(s)X(t)]$$

$$= \frac{1}{2} \cos \pi t \cos \pi s + \frac{1}{2} \times 2t \times 2s$$

$$= \frac{1}{2} \cos \pi t \cos \pi s + 2ts.$$

Ex.3 设随机过程

$$X(t) = A \cos(\beta t + \Theta)$$

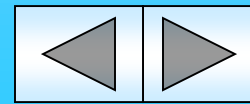


其中 β 是正常数, 随机变量 A 与 Θ 相互独立,
 $A \sim N(0,1)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$. 试求过程的均值函数和相关函数.

解

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(X(t)) = E[A \cos(\beta t + \Theta)] \\ &= E(A)E[\cos(\beta t + \Theta)] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= E[A^2 \cos(\beta t + \Theta) \cos(\beta s + \Theta)] \end{aligned}$$



随机过程的数字特征

$$= E(A^2)E[\cos(\beta t + \Theta)\cos(\beta s + \Theta)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\beta t + \theta)\cos(\beta s + \theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos\beta(t-s) + \cos(\beta(t+s) + 2\theta)]d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cos\beta(t-s).$$

随机变量函数的
数学期望公式

思考题：

为什么说随机过程的均值函数和自相关函数在研究过程的概率与统计特性尤其重要？

二、复随机过程

定义2.3.5 设 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 为两个实随机过程，称

$$Z(t) \triangleq X(t) + iY(t), \quad t \in T, \quad i = \sqrt{-1}$$

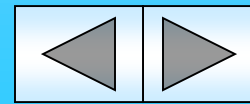
为复随机过程.

复随机过程 $\{Z(t), t \in T\}$ 的均值函数为

$$m_Z(t) \triangleq E[X(t)] + iE[Y(t)], \quad t \in T;$$

方差函数为

$$D_Z(t) \triangleq E\{|Z(t) - m_Z(t)|^2\} = D_X(t) + D_Y(t),$$

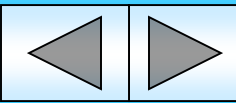


$$\begin{aligned}\because |Z(t) - m_Z(t)|^2 &= [X(t) - m_X(t)] + i[Y(t) - m_Y(t)]^2 \\ &= [X(t) - m_X(t)]^2 + [Y(t) - m_Y(t)]^2\end{aligned}$$

自相关函数为 $R_Z(s, t) \triangleq E[Z(s)\overline{Z(t)}];$

自协方差函数为

$$\begin{aligned}C_Z(s, t) &= \text{Cov}(Z(s), \overline{Z(t)}) \\ &= E\{[Z(s) - m_Z(s)][\overline{Z(t) - m_Z(t)}]\}.\end{aligned}$$



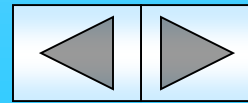
Ex.4 设复随机过程

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\omega_k t},$$

其中 $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ 为相互独立服从正态 $N(0, \sigma_k^2)$ 的实随机变量, ω_k 为常数, 试求 $m_Z(t), R_Z(t_1, t_2)$.

解

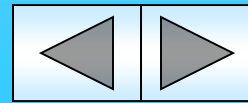
$$\begin{aligned} \because Z(t) &= \sum_{k=1}^n A_k e^{i\omega_k t} = \sum_{k=1}^n A_k (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \cos \omega_k t + i \sum_{k=1}^n A_k \sin \omega_k t \end{aligned}$$



$$\therefore E(Z(t)) = \sum_{k=1}^n E[A_k \cos \omega_k t] + i \sum_{k=1}^n E[A_k \sin \omega_k t] = 0$$

因 $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ 相互独立, 且 $E(A_k^2) = \sigma_k^2$

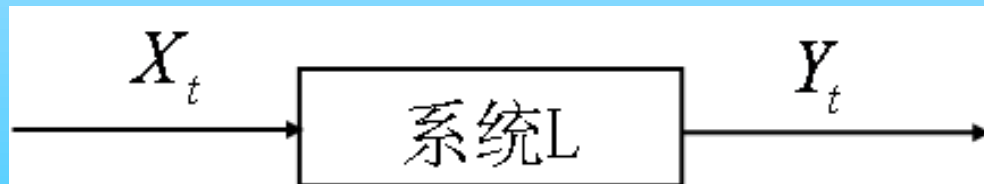
$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= E[Z(t_1) \overline{Z(t_2)}] = E\left[\left(\sum_{k=1}^n A_k e^{i\omega_k t_1}\right) \left(\sum_{k=1}^n A_k \overline{e^{i\omega_k t_2}}\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_k A_l e^{i(\omega_k t_1 - \omega_l t_2)}\right] \\ &= \sum_{k=1}^n E(A_k^2) e^{i\omega_k (t_1 - t_2)} = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 e^{i\omega_k (t_1 - t_2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 (\cos \omega_k (t_1 - t_2) + i \sin \omega_k (t_1 - t_2)) \end{aligned}$$



三、多维随机过程的互相关函数

类似于多维随机向量的概念，实际问题中常需要研究多维随机过程。

在自动控制、通信工程、机械振动、无线电等各电子工程领域的各类系统中，需要研究输入过程与输出过程间的相互关系，分析其整体统计特性。

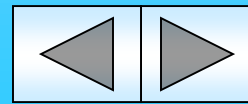


定义2.3.6 设给定概率空间 (Ω, F, P) 和指标集 T , 若对每个 $t \in T$, 有定义在 (Ω, F, P) 上的随机向量 $(X_t^{(1)}(\omega), X_t^{(2)}(\omega), \dots, X_t^{(n)}(\omega))$ $\omega \in \Omega$ 与之对应. 称 $\{(X_t^{(1)}(\omega), X_t^{(2)}(\omega), \dots, X_t^{(n)}(\omega)), t \in T\}$ 为 n 维随机过程.

定义2.3.7 设 $\{X_t, t \in T\}$ 和 $\{Y_t, t \in T\}$ 是两个随机过程.对任意 $t_i, s_j \in T, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.将 $n+m$ 维随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}, Y_{s_1}, Y_{s_2}, \dots, Y_{s_m})$ 的联合分函数

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_m}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ = P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n, Y_{s_1} \leq y_1, Y_{s_2} \leq y_2, \dots, Y_{s_n} \leq y_n\}$$

称为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 和 $\{Y_t, t \in T\}$ 的 $n+m$ 维联合分布函数。



定义2.3.8 设 $\{Z_1(t), t \in T\}$ 和 $\{Z_2(t), t \in T\}$ 是两个复随机过程, 它们的**互相关函数**定义为

$$R_{Z_1 Z_2}(s, t) = E[Z_1(s) \overline{Z_2(t)}]$$

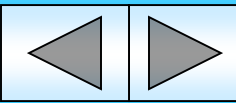
互协方差函数为

$$\begin{aligned} C_{Z_1 Z_2}(s, t) &= \text{Cov}[Z_1(s), \overline{Z_2(t)}] \\ &= E\{[Z_1(s) - m_{Z_1}(s)][\overline{Z_2(t) - m_{Z_2}(t)}]\} \end{aligned}$$

Ex.4 已知实随机过程 $X(t)$ 具有自相关函数 $R(s, t)$, 令

$$Y(t) = X(t+a) - X(t)$$

求 $R_{YY}(s, t)$.



解 先求出 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互相关函数

$$\begin{aligned} R_{XY}(s, t) &= E[X(s)Y(t)] = E\{X(s)[X(t+a) - X(t)]\} \\ &= R(s, t+a) - R(s, t) \end{aligned} \quad (1)$$

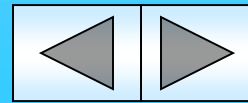
$$\begin{aligned} R_{YY}(s, t) &= E\{[X(s+a) - X(s)]Y(t)\} \\ &= R_{XY}(s+a, t) - R_{XY}(s, t) \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 得

$$R_{YY}(s, t) = R(s+a, t+a) - R(s+a, t) - R(s, t+a) + R(s, t)$$

取 $s=t$, 则有

$$R_{YY}(t, t) = E\{[X(t+a) - X(t)]^2\}$$



Ex.5 已知两个随机相位过程

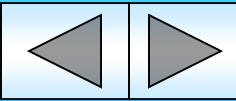
$$X_t^{(i)} = \cos(\omega_i t + \Theta), t \geq 0, i = 1, 2$$

其中随机变量 $\Theta \sim U[0, 2\pi]$ ，求它们的互相关函数。

解：

$$\begin{aligned} R(s, t) &= E[\cos(\omega_1 s + \Theta) \cos(\omega_2 t + \Theta)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_1 s + u) \cos(\omega_2 t + u) du \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_1 s - \omega_2 t) + \cos(\omega_1 s + \omega_2 t + 2u) du \\ &= \frac{1}{2} \cos(\omega_1 s - \omega_2 t) \end{aligned}$$

电子科技大学



四、随机过程的分类

$$X_T = \{X(t), t \in T\}$$

1. 按状态空间和参数集进行分类

- 1) T, E 均为可列集;
- 2) T 是可列集, E 不可列;
- 3) T 不可列, E 为可列集;
- 4) T, E 均不可列.

当 T 为可列集, 称为离散参数随机过程, 随机序列, 时间序列.

当 E 为可列(或有限)集, 称为离散状态随机过程.

2. 按概率结构进行分类

1) 二阶矩过程

若过程 $X_t = \{X(t), t \in T\}$ 对每一个 $t \in T$, $X(t)$ 的二阶矩都存在.

2) 独立过程

对任意整数 n 及任意 n 个不同的 $t_i \in T$, 随机变量 X_{t_1}, \dots, X_{t_n} 相互独立.

3) 独立增量过程

对任一正整数 n 及任意 $t_i \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 随机变量

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

相互独立.

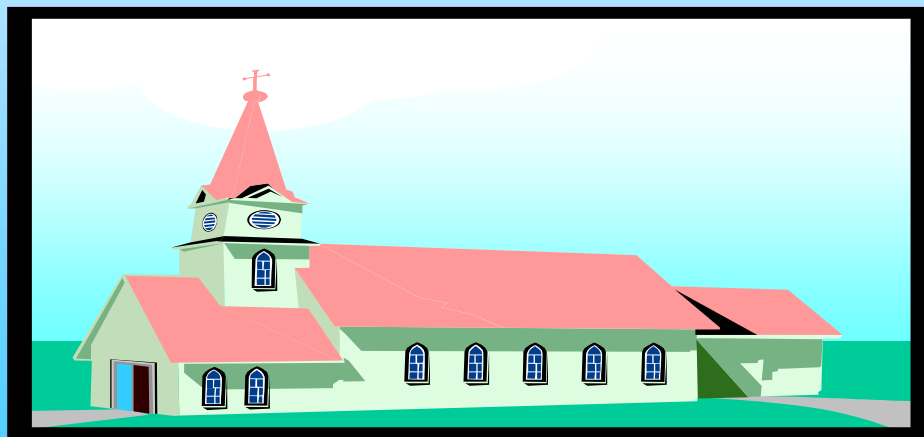
重要子类有泊松过程, 维纳过程.

过程
增量

随机过程的分类

4) 马尔科夫过程.

5) 正态过程.....



电子科技大学

