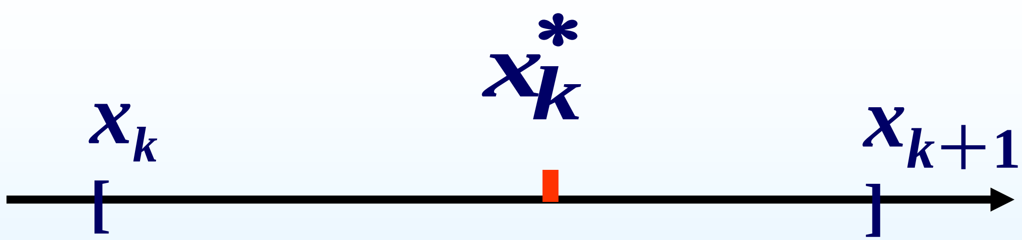
一、R-S(黎曼-斯蒂阶)积分简介

定义1.4.1 设$f(x)$, $g(x)$为定义在$[a, b]$上的实值函数，做一剖分:$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$,并任取点 $x_k^* \in [x_k, x_{k+1}], k = 0,1,2,\cdots,n-1.$



做和式

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

若存在实数I,使对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$**,只要**

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} (x_{k+1} - x_k) < \delta$$

对任意分点及任意x_k^***的取法均有**

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

记 为 $(R) \int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \mathrm{I}$$

称I为$f(x)$关于$g(x)$在$[a, b]$上的R-S积分,简记为

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dg(x).$$

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) \triangleq \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dg(x)$

存在,称为广义R-S积分.

注 **黎曼积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是R-S积分的特例.**

R-S积分性质:

1) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dg(x) =$

$$\int_a^b f_1(x)dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

2) $\int_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] =$

$$\int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

3) 设α,β是任意常数，则

$$\int_a^b \alpha f(x)d[\beta g(x)] = \alpha\beta\int_a^b f(x)d[g(x)].$$

以上三个等式成立的意义是: 当等号右边存在时, 左边也存在并相等.

4) 若$a < c < b$,且c点为g的连续点时, 则有

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

$$=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)$$

5) $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$$

注 以上1～5条性质可全部推广到广义R-S积分. 如

5′) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x)$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,df(x) + \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} [f(x)g(x)]_a^b$$

定理1.4.1（广义R-S积分定理） 若$f(x)$在R上连续且有界, $g(x)$在R上单调有界,则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x)$$

存在，并且

1) 若 $g'(x)$ 在R上存在,在任意有限区间[*a*, b]上黎曼可积,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)dx$$

2) **若存在实数列** C_k, $k=0, \pm 1, \cdots$,**使**

$$\cdots < C_{-1} < C_0 < C_1 < \cdots$$

且 $g(x)$ **在** $[C_k, C_{k-1})$ **上取常数，则**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(C_k)\left[g(C_k+0) - g(C_k-0)\right].$$

推论 若存在实数列C_k，$k=0, \pm 1, \cdots$，

$$\cdots < C_{-1} < C_0 < C_1 < \cdots$$

使得g(x)在C_k有增量，即

$$g(C_k+0)-g(C_k-0)\neq 0,$$

且g(x)在(C_{k-1}, C_k)上连续可微，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(C_k)\left[g(C_k+0)-g(C_k-0)\right]$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{C_{k-1}}^{C_k} f(x)g'(x)dx$$

问题1 若$F(x)$是离散型随机变量的分布函数，$f(x)$关于$F(x)$ 的广义R-S积分形式？

设X 是离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,3\ldots.$$

其分布函数是有界、单调不降的阶梯函数，有

$$\cdots<x_{k-1}<x_k<x_{k+1}<\cdots$$

$$F(x+0)-F(x-0)=\begin{cases}0, & x\neq x_k;\\ p_k, & x=x_k\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k)\left[F(x_k+0) - F(x_k-0)\right].$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k)p_k$$

特别当 $f(x)=x$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k p_k$$

为离散型随机变量X的数学期望。

问题2 若$F(x)$是连续型随机变量的分布函数，$g(x)$关于$F(x)$ 的广义R-S积分形式？

因连续型随机变量的分布函数<u>绝对连续</u>，有

$$\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)=p(x)\geq 0,$$

?

若R-S积分存在则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$$

二、二元R-S积分简介

假定二元函数$F(x,y)$满足下述条件:

1) 对于平面上任意矩形$a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2$,有

$$\Delta F(a_1,b_1;a_2,b_2) = F(a_2,b_2) - F(a_1,b_2) - F(a_2,b_1) + F(a_1,b_1) \ge 0$$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$, 且对任意 x 与 y,

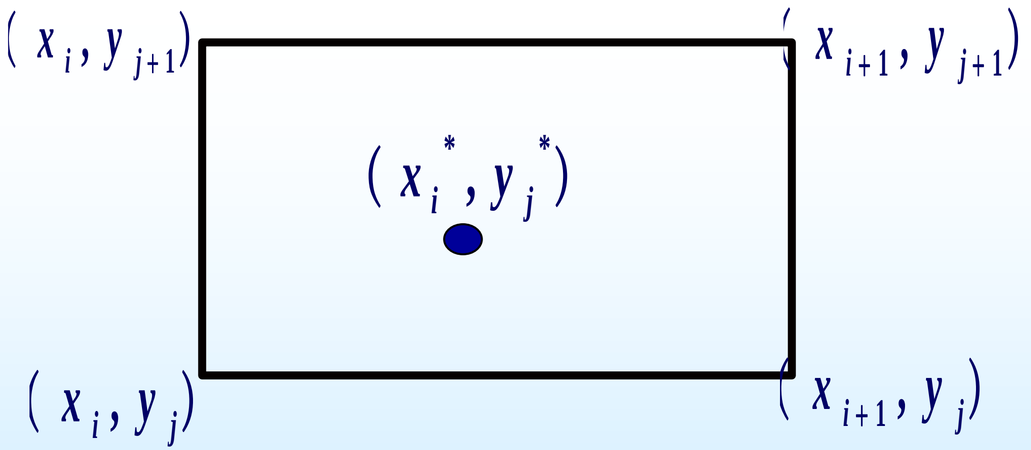
$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0.$$

定义 1.4.2 设 $f(x,y)$ 为定义在整个平面上的实值函数在矩形 $a \le x \le b, c \le y \le d$ 上任意做剖分:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

并任取点 $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,1,2,\cdots,n-1,$

$y_j^* \in [y_j, y_{j+1}], j = 0,1,2,m-1.$



做和式

$$\sigma=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*,y_j^*)\cdot \Delta F(x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1})$$

若存在实数 I，使对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要

$$\lambda=\max_{\substack{0\le i\le n-1\\ 0\le j\le m-1}}\{(x_{i+1}-x_i),(y_{j+1}-y_j)\}<\delta$$

时，对任意分点及 $(x_i^*,\ y_j^*)$ 的任意取法，不等式

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

均成立.

则记

$$\iint\limits_{\substack{a\le x\le b\\ c\le y\le d}} f(x,y)dF(x,y)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*,y_j^*)\cdot \Delta F(x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1})=I$$

称积分 I 为 $f(x,y)$ 关于 $F(x,y)$ 在

矩形 $\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$ 上的 R-S 积分.

若

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b.d\to+\infty}} \iint\limits_{\substack{a\le x\le b\\ c\le y\le d}} f(x,y)dF(x,y)$$

存在，称 $f(x,y)$ 关于 $F(x,y)$ 在整个平面上的 R-S 积分存在。

记为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dF(x,y)$$

若$F(x,y)$是二维随机向量的联合分布函数

i) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dF(x,y) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dF_{X|Y}(x \mid y)dF_Y(y)$$

ii)若 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, **则**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dF(x,y) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dF_X(x)dF_Y(y)$$

iii)若 $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{\infty}^{y} g(u,v)dudv$, **则**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dF(x,y) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dxdy$$

二、数学期望与方差

定义1.4.2 随机变量X的分布函数为$F(x)$, 若

$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|dF(x)<+\infty$, 则

$$E(X)\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF(x).$$

注 若X是连续型随机变量,则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

若X是离散型随机变量,则

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP\{X=x_i\}$$

例:若随机变量X的分布函数满足

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1+x}{3}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$$

求$E(X)$?

解：$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)=\left(\int_{-\infty}^{1-\Delta x}+\int_{1-\Delta x}^{1+\Delta x}+\int_{1+\Delta x}^{2-\Delta x}+\int_{2-\Delta x}^{+\infty}\right)xdF(x)$$

$$\int_{-\infty}^{1-\Delta x}xdF(x)=\int_{2+\Delta x}^{+\infty}xdF(x)=0$$

$$\int_{1-\Delta x}^{1+\Delta x}xdF(x)=(1-\theta\Delta x)\big(F(1+\Delta x+0)-F(1-\Delta x-0)\big)\to F(1+)-F(1-)$$

$$\int_{1+\Delta x}^{2-\Delta x}xdF(x)=\int_{1+\Delta x}^{2-\Delta x}\frac{x}{3}dx\to\frac{1}{2}$$

定理1.4.2 设$F(x)$是随机变量X的分布函数, $g(x)$在R上连续, 若$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dF(x)<\infty$,

则$Y=g(X)$的数学期望存在,且

重要公式

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x)$$

定义1.4.3 随机变量X的分布函数为$F(x)$, 则其方差

$$D(X)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2dF(x)$$

定理1.4.3 柯西-许瓦兹不等式 对任意的随机变量X,Y。若$E(X^2)$,$E(Y^2)$有限, 则有

$$\{E[|XY|]\}^2 \le E[X^2] \cdot E[Y^2]$$

等式当且仅当$P\{Y=aX\}=1$时成立, $a \in R$.

对随机变量X, 若有$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) < \infty$, 则$E(X)$与$D(X)$存在, 且

$$0 \le D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\Rightarrow \quad [\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)]^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$$

三、条件数学期望

1.条件数学期望概念

定义1.4.4 设(X, Y)是二维随机变量，条件分布函数$F_{Y|X}(y|x)$存在，又若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \, dF_{Y|X}(y|x) < \infty$$

称

$$E(Y|x) = E(Y|X=x) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y \, dF_{Y|X}(y|x)$$

为在$X=x$的条件下,随机变量Y的**条件数学期望**.

若(X, Y)是连续型随机变量,则

$$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,dy,$$

EX.1 **若** $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho),(-1<\rho<1),$

在$X=x$ 的条件下,$Y\sim$ $N(\rho x,1-\rho^2)$;

因 $$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2},x\in R.$$

则 $$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

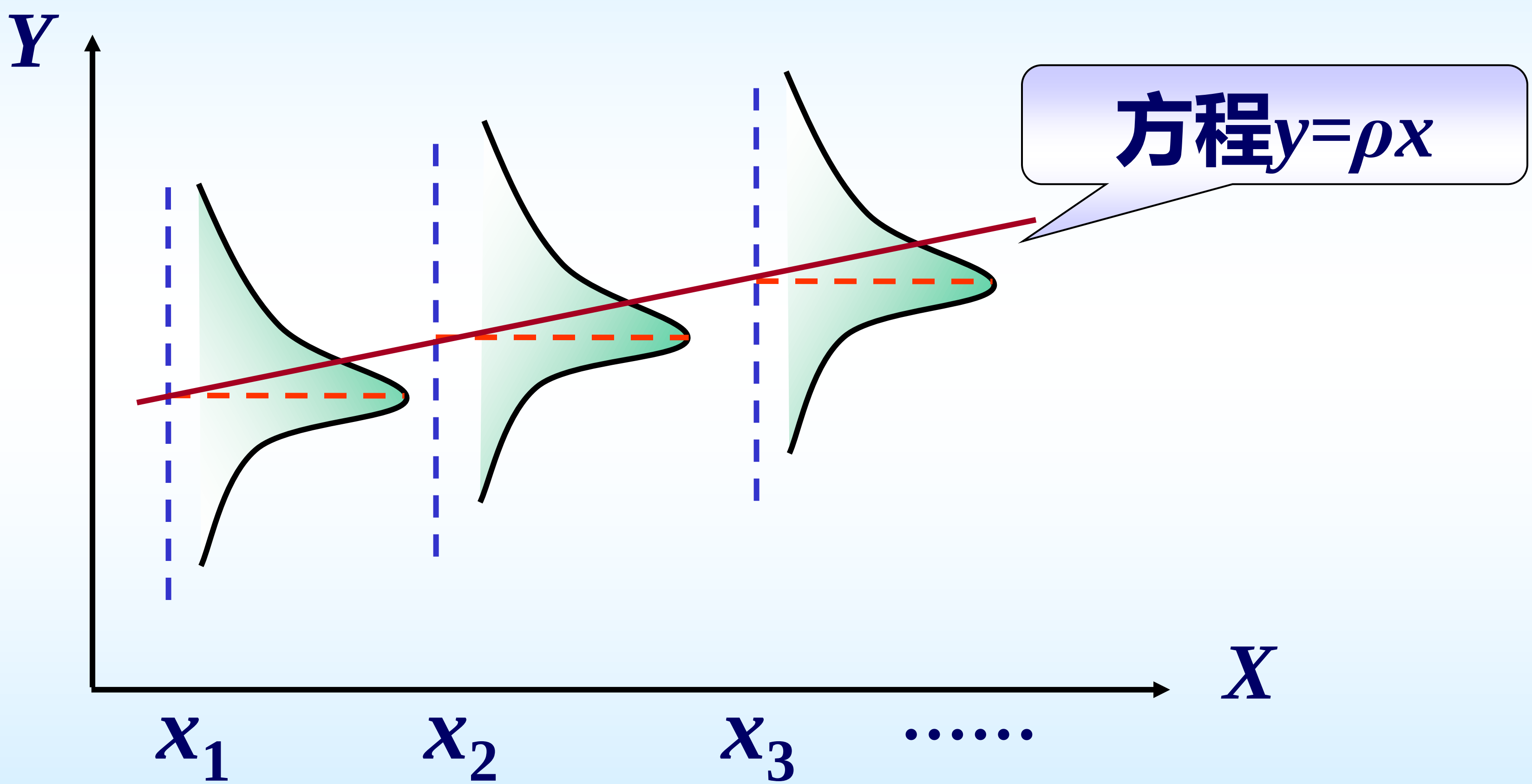
因 $$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}[\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}]^2},\quad x\in R.$$

则 $$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|x)dy=\rho x$$

同理 $$E(X|Y=y)=\rho y.$$

都是实值函数.

对于X的不同取值x_1，x_2，…，x_n



Ex. 2 设随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y}, & y>|x|, -\infty<x<\infty;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求$E(Y \mid X=x)$.

解 $$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x\in R;$$

在"$X=x$"的条件下，有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{-y+|x|}, & y>|x|;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$$

$$=\int_{|x|}^{\infty} y e^{-y+|x|}dy = 1+|x|$$

同ex.1
也是实
值函数.

注 一般有

$$E(Y|X=x)=\mu(x),\qquad E(X|Y=y)=\delta(y).$$

X关于Y的
回归函数

定理1.4.4 设函数$g(x)$在R上连续,若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dF_{X|Y}(x|y) < +\infty$$

则随机变量$g(X)$在"$Y=y$"条件下的条件数期望为

$$E[g(X)|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_{X|Y}(x|y)$$

定义1.4.4 称

$$D(X|Y=y) = E[\left(X - E(X|Y=y)\right)^2 | Y=y]$$

为"$Y=y$"的条件下,随机变量X的**条件方差**.

注 条件方差为随机变量X相对于条件数学期望 $E(X|Y=y)$ 的偏离程度的衡量指标.

2.条件数学期望性质

一般 $E(Y|X=x)=\mu(x)$, $E(X|Y=y)=\delta(y)$.

是实值函数,可以证明随机变量的函数

$$\mu(X)=E(Y|X),\quad \delta(Y)=E(X|Y)$$

仍是随机变量.

定理1.4.4 设X,Y,Z是(Ω,F,P)上的随机变量，$g(\cdot)$和$h(\cdot)$为R上连续函数，且各数学期望存在，有

1) $E(c|Y)=c$，c是常数;

证：1) 对$\forall y$， $E(c|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} c\,dF_{X|Y}(x|y)=c$，

$\therefore\ E(c|Y)=c.$

2) $E[aX+bY|Z]=aE(X|Z)+bE(Y|Z)$，$a, b$是常数.

证明

3) 如果X与Y相互独立,则 $E(X|Y)=E(X).$

证 X与Y独立, $\Rightarrow F_{X|Y}(x|y)=F_X(x), \quad \forall y\in R.$

对 $\forall y\in R$, $E(X|y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_{X|Y}(x|y)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_X(x)=E(X),$$

$\Rightarrow E(X|Y)=E(X).$

4) $E[g(X)h(Y)|X]=g(X)E[h(Y)|X];$

$E[g(X)h(Y)|Y]=h(Y)E[g(X)|Y].$ **自证.**

5) 如果X与(Y, Z)相互独立,则

$$E\left(g(X)h(Y)\middle|Z\right)=E(g(X))E(h(Y)\mid Z).$$

证 **X与(Y, Z)相互独立,**

$$\Rightarrow F_{(X,Y)|Z}(x,y\mid z)=F_X(x)F_{Y|Z}(y\mid z)$$

对任意$z\in R$,

$$E\left(g(X)h(Y)\middle|Z=z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(y)dF_{(X,Y)|Z}(x,y\mid z)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF_X(x)]h(y)dF_{Y|Z}(y\mid z)$$

$$=E(g(X))E(h(Y)\mid Z=z)$$

6) $E\{E[g(X,Y)|Y]\}=E[g(X,Y)]$

证 $\because$ $E[g(X,Y)|Y]=S(Y)$

且 $S(y)=E[g(X,Y)|Y=y]=E[g(X,y)|y]$

$\therefore$ $E\{E[g(X,Y)|Y]\}=E[S(Y)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}S(y)\mathrm{d}F_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}E[g(X,y)|y]\mathrm{d}F_Y(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)[dF_{X|Y}(x|y)dF_Y(y)]$$

$$\overset{?}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dF(x,y)=E[g(X,Y)].$$

7) $E\left[X-E(X|Y)\right]^2 \le E\left[X-g(Y)\right]^2$.

证： 由$E\left[XE(X|Y)\right]=E\left[E^2(X|Y)\right]$和

$E\left[Xg(Y)\right]=E\left[g(Y)E(X|Y)\right]$可得

$X-E(X|Y)$与$E(X|Y)-g(Y)$互不相关。

3.全数学期望公式

1) $E(X)=E[E(X|Y)]$.

2) $E\left[g(X)\right]=E\left\{E[g(X)|Y]\right\}$.

性质6)之特例

特别有全概率公式

对随机事件A，定义示性函数

$$I_A=\begin{cases}1, & 若A发生;\\ 0, & 若A不发生.\end{cases}$$

两点分布随机变量

$$\because \quad E[I_A|Y=y]=P(A|Y=y)$$

$$\therefore \quad P(A)=E(I_A)=E\{E[I_A|Y]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[I_A|Y=y]dF_Y(y)$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{y}P(A|Y=y)P(Y=y), & Y是离散型\\ \int_{-\infty}^{+\infty}P(A|Y=y)f_Y(y)dy, & Y是连续型\end{cases}$$

Ex.3 常用全数学期望公式 若

$$P\{Y=y_k\}=p_k,(k=1,2,\cdots),\quad \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1,$$

记 $A_k=\{Y=y_k\},\quad E(X|A_k)=E(X|Y=y_k),$

则有 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}E(X|A_k)P(A_k).$

Ex.4 设某段时间内到达商场的顾客人数N服从参数为λ的泊松分布.每位顾客在该商场的消费额X 服从$[a,b]$上的均匀分布.各位顾客之间消费是相互独立的且与N 独立.求顾客在该商场总的消费额.

解 设第i个顾客消费额为X_i，全体顾客在该商场总消费额为

$$S=\sum_{i=1}^{N}X_i$$

根据全数学期望公式得

$$E(S)=E[E(S|N)]=E[E(\sum_{i=1}^{N}X_i|N)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E[\sum_{i=1}^{n}X_i|N=n]P\{N=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i)P\{N=n\}]$$

X_i与N相互独立

$$= E(X)\sum_{n=0}^{\infty} nP\{N=n\}$$

X_i同分布

$$= E(X)E(N) = \frac{a+b}{2}\lambda.$$

参见教材
p239例2.5

Ex.5 已知随机变量X服从$[0, a]$上的均匀分布,随机变量Y服从$[X, a]$上的均匀分布, 试求

1) $E(Y|X=x)$, $0< x< a$; 2) $E(Y)$.

解 1) **由条件知对**$x>0$, **有**

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-x}, & x<y<a;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对任意的$0<x<a$ **有**

$$E(Y|X=x)=\int_x^a \frac{y}{a-x}dy=\frac{a+x}{2},$$

$$2)\quad E(Y)=E[E(Y|X)]=E\left(\frac{a+X}{2}\right)=\frac{a+\dfrac{a}{2}}{2}=\frac{3}{4}a.$$

例：

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

其中 $X_i, i = 1,2,3,\cdots$ 相互独立且与随机变量 X 同分布，又与随机变量 N 相互独立。设 X 和 N 二阶矩存在，求 E[S]，D(S)?

解：由全数学期望公式，我们有

$$E[S] = E\left[E[S \mid N]\right] =: E[g(N)]$$

其中 $g(n) = E[S \mid N = n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N = n\right] = nE[X]$

因此，$E[S] = E[NE[X]] = E[N]E[X].$

由条件方差公式，

$$D(S \mid N) = E[S^2 \mid N] - E^2[S \mid N].$$

对上式两端取期望得，

$$E[S^2] = E\left[D(S \mid N)\right] + E\left[E^2[S \mid N]\right] \qquad (1)$$

其中， $D(S \mid N = n) = nD(X),\ E(S \mid n) = nE[X]$

带入(1)式得， $E[S^2] = E[N]D(X) + E^2[X]E[N^2]$

因而， $D(S) = E[S^2] - E^2[S]$

$$= E[N]D(X) + E^2[X]D(N).$$

特别地，当N服从参数为λ的泊松分布时，

$$D(S) = \lambda E[X^2].$$

随机变量的数字特征

$$E(aX+bY\mid Z)=aE(X\mid Z)+bE(Y\mid Z)$$

$$E(aX+bY\mid Z=z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+by)dF_{(X,Y)|Z}(x,y\mid z)$$

由于 $F_{(X,Y)|Z}(x,y\mid z)=\int_{-\infty}^{x}F_{Y|(X,Z)}(y\mid x,z)dF_{X|Z}(x\mid z)$

因而 $=\int_{-\infty}^{y}F_{X|(Y,Z)}(x\mid y,z)dF_{Y|Z}(y\mid z)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xdF_{(X,Y)|Z}(x,y\mid z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xdF_{Y|(X,Z)}(y\mid x,z)dF_{X|Z}(x\mid z)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF_{X|Z}(x\mid z)=E(X\mid Z=z)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ydF_{(X,Y)|Z}(x,y\mid z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ydF_{X|(Y,Z)}(x\mid y,z)dF_{Y|Z}(y\mid z)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}ydF_{Y|Z}(y\mid z)=E(Y\mid Z=z)$$