§3.4 泊 松 过 程(二)

三、更新计数过程

定义3.4.1 设$\{N(t), t\geq 0\}$是一个计数过程，如果它的时间间隔序列$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$相互独立同分布，称为**更新计数过程**.

例 同类型设备的更新，如

一个元件；一个灯泡；一个系统…

假定每个更换对象的寿命具有相同的概率密度，则相继两次损坏之间的更新时间$T_1,T_2,\ldots$相互独立同分布.

定理3.4.1 更新计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$是泊松过程的充要条件是时间间隔T具有指数分布.

注 等价于时间间隔序列$T_1,T_2,\ldots,T_n,\ldots$相互独立同服从相同指数分布.

证 由定理3.3.2 知必要性,仅需证充分性。

验证等价定义1（定义3.3.2），即

（1）N(0)=0;

（2）普通性;

$$P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h),\ \lambda>0;$$

$$P\{N(h)\geq 2\}=o(h).$$

（3）平稳独立增量，即

$$P\{N(s)=k, N(t)-N(s)=n\}$$
$$=P\{N(s)=k\}P\{N(t-s)=n\}$$

一般地，设$\{N(t), t\geq 0\}$为更新计数过程,有:

1) 等待时间 $W_k=\sum_{i=1}^{k} T_i$ 的特征函数为,

$$\varphi_{W_k}(u)=[\varphi_T(u)]^k$$

2) 因 $\{W_k\leq t\}=\{N(t)\geq k\}$, 有

$$F_{W_k}(t)=1-F_{N(t)}(k-1).$$

3) $m(t)=E[N(t)]=\sum_{k=0}^{\infty} kP\{N(t)=k\}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} k[F_{W_k}(t)-F_{W_{k+1}}(t)]=\sum_{k=1}^{\infty} F_{W_k}(t)$$

思考题

如何模拟一个参数为λ的Poisson过程$\{N(t), t\geq 0\}$?

提示

1. **结合定理3.4.1，并查找相关资料.**
2. **给出算法步骤，并说明算法原理.**

四、复合泊松过程

EX. 5 调查城市人员流动情况,可在关键路口观察公交车的载客情况，设$[0, t)$内通过的公交车数$N(t)$是一个poisson过程，而每辆车的载客人数为ξ_n，则经公交车通过此路口的人数为：

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n$$

EX.6 若将股票交易次数$N(t)$看作一个Poisson过程,ξ_n表示第n 次与第n - 1次易手前后股票价格差,则$X(t)$ 就代表直到t 时刻股票的价格变化.

定义3.4.2 设$\{N(t), t\geq 0\}$是强度为λ的齐次Poisson过程, $\{\xi_n, n\geq 1\}$是相互独立同分布的随机变量序列，并与$N(t)$相互独立,称

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n$$

为**复合Poisson过程**..

定理3.4.2 设$\{X(t),t\geq 0\}$是复合泊松过程

证明见 P65

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n,\qquad t\geq 0$$

其中$\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，$\xi_n, n=1,2,\ldots$相互独立与ξ同分布，有

1）ξ的特征函数为$\phi_\xi(u)$，则$X(t)$的特征函数为

$$\phi_X(t,u)=e^{\lambda t[\phi_\xi(u)-1]},\qquad t\geq 0.$$

证明

2）$\{X(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程。

3）均值函数为

See section 1.4

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[N(t)]E(\xi)=\lambda tE(\xi).$$

4）方差函数为 $D_X(t)=D(N(t))E(\xi^2)=\lambda tE(\xi^2).$

EX.7保险公司赔偿金储备问题

设寿险投保人的死亡数$N(t)$是强度为λ的poisson过程,ξ_n表示第n 个死亡者的赔偿金额,ξ_n, n=1, 2, …相互独立同分布,ξ_n服从参数为α的指数分布。

$Y(t)$是保险公司在[0, t)时间段内的总赔付金额, 试求平均赔付金额和$D[Y(t)]$.

解

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n,\qquad t\geq 0$$

是一个复合泊松过程, 有

$$E[Y(t)]=E[N(t)]E(\xi_1)=\lambda tE(\xi_1).$$

$$E(\xi_1)=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\alpha}$$

保险公司在[0, t)时间内平均支付的赔偿金为

$$E[Y(t)]=\lambda tE(\xi_1)=\lambda t\frac{1}{\alpha}.$$

$$D[Y(t)]=\lambda tE(\xi_1^2)=\lambda t\frac{2}{\alpha^2}=\frac{2\lambda t}{\alpha^2}.$$

EX.8 设某仪器受到震动而引起损伤，若震动次数$N(t)$按强度为λ的Possion过程发生，第k次震动时引起的损伤为D_k，且$D_1, D_2, \dots$相互独立同分布，与$\{N(t), t\geq 0\}$相互独立.

又假设仪器受到震动而引起损伤将随时间按指数衰减。需考虑总损伤的平均程度.

分析 1）设初始损伤为D_k，经时间t后衰减为

$$D_k e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (\alpha > 0);$$

2）假设各次震动而引起损伤是可叠加的，则在t 时刻的总损伤可表示为

$$D(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha\left(t-W_k\right)}$$

其中W_k是第k 次受震动的时刻，需求$E[D(t)]$.

解 由全期望公式

$$E[D(t)]=E\{E[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \mid N(t)]\}$$

对任意正整数n, 有

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \middle| N(t)=n\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n} E\left[D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \middle| N(t)=n\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n} E(D_1)E\left[e^{-\alpha(t-W_k)} \middle| N(t)=n\right]$$

$$=e^{-\alpha t}E(D_1)E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha W_k} \middle| N(t)=n\right]$$

定理1.4.4（5）

根据定理3.3.4可得

$$E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha W_k} \mid N(t)=n]$$

$$= E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_{(k)}}] = E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k}] = nE(e^{\alpha U_1})$$

$$= n\frac{1}{t}\int_0^t e^{\alpha x}dx = \frac{n}{\alpha t}(e^{\alpha t}-1)$$

$$\Rightarrow \quad E[D(t) \mid N(t)] = \frac{N(t)}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})E(D_1)$$

$$\Rightarrow \quad E[D(t)] = \frac{\lambda}{\alpha}E(D_1)(1-e^{-\alpha t}), \ t \ge 0.$$

五、泊松过程的叠加与分解

EX.9 设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别是强度为λ_1和λ_2的相互独立的泊松过程,

1) 令$Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$，$t>0$,求$Y(t)$的均值函数和相关函数.

2) 证明 $X(t)=N_1(t)+N_2(t)$, $t>0$，是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

3) 证明 $Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$，$t>0$,不是泊松过程.

解　1)　$m_Y(t)=E[N_1(t)]-E[N_2(t)]=(\lambda_1-\lambda_2)t,$

$R_Y(s,t)=E\{[N_1(s)-N_2(s)][N_1(t)-N_2(t)]\}$

$$=E[N_1(s)N_1(t)]+E[N_2(s)N_2(t)]$$

$$-E[N_1(s)N_2(t)]-E[N_2(s)N_1(t)]$$

$$=R_{N_1}(s,t)+R_{N_2}(s,t)-E[N_1(s)]E[N_2(t)]$$

$$-E[N_2(s)]E[N_1(t)]$$

$$=\lambda_1\min(s,t)+\lambda_1^2st+\lambda_2\min(s,t)+\lambda_2^2st-2\lambda_1\lambda_2st$$

$$=(\lambda_1+\lambda_2)\min(s,t)+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)st-2\lambda_1\lambda_2st.$$

2) 根据泊松分布的可加性知

$$X(t)=N_1(t)+N_2(t),\ \ t>0,$$

服从参数为$(\lambda_1+\lambda_2)t$ 的泊松分布.

问题:如何证明?

独立和的特征函数

3) $Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$的特征函数为

$$\varphi_Y(u)=\exp\{\lambda_1 te^{iu}-\lambda_2 te^{-iu}-(\lambda_1-\lambda_2)t\}$$

由分布函数与特征函数的一一对应的惟一性定理知$Y(t)$不是泊松过程.

1.泊松过程的叠加

定理3.4.3 设$\{N_1(t), t\geq 0\}$和$\{N_2(t), t\geq 0\}$是相互独立的强度分别为λ_1和λ_2的泊松过程, 则$\{N(t)=N_1(t)+N_2(t), t>0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

证 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 是计数过程, 而且满足

1）零初值性

$$N(0)=N_1(0)+N_2(0)=0;$$

2）独立增量性　对任意 $0 < t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$

$$N(t_k) - N(t_{k-1}) = N_1(t_k) - N_1(t_{k-1}) + N_2(t_k) - N_2(t_{k-1})$$

相互独立.

3) 增量平稳性

需证 对一切 $0 \le t_1 < t_2$, $N(t_2) - N(t_1) \sim P[(\lambda_1 + \lambda_2)(t_2 - t_1)]$.

$$\varphi_{N(t_2)-N(t_1)}(u) = E[e^{iu[N(t_2)-N(t_1)]}]$$

$$= E[e^{iu(N_1(t_2)-N_1(t_1))}]E[e^{iu(N_2(t_2)-N_2(t_1))}]$$

两个过程的独立性

$$= \exp\{\lambda_1(t_2 - t_1)(e^{iu-1})\}\exp\{\lambda_2(t_2 - t_1)(e^{iu-1})\}$$

$$= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(t_2 - t_1)(e^{iu-1})\}$$

两个均为泊松过程

即对一切$0 \le t_1 < t_2$, 增量

$$N(t_2) - N(t_1) \sim P[(\lambda_1 + \lambda_2)(t_2 - t_1)]$$

根据定义3.4.2 ′知$\{N(t)=N_1(t)+N_2(t),\ t>0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

注 定理可以推广到任意有限个过程的情形.

条件分布：$N_1(t) \mid N(t)=n \sim B(n, \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$

证 对任意的k=0,1,…,n

$$P\{N_1(t)=k \mid N(t)=n\}=\frac{P\{N_1(t)=k, N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}$$

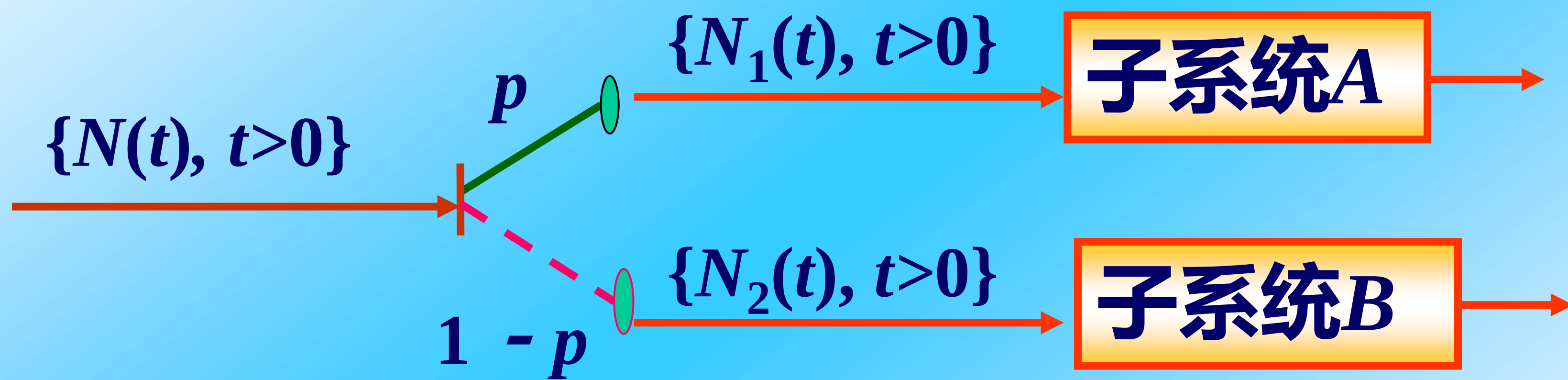
$$=\frac{P\{N_1(t)=k, N_2(t)=n-k\}}{P\{N(t)=n\}}$$

$$=\frac{\dfrac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{-\lambda_1 t} * \dfrac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2 t}}{\dfrac{(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^k}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}$$

$$=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

2.泊松过程的分解

分解模型— 随机并联系统



若输入 $\{N(t), t>0\}$是强度为λ的泊松过程，子系统A与B的输入过程$\{N_1(t), t>0\}$、 $\{N_2(t), t>0\}$有什么关系?

设进入系统的质点数$\{N(t), t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，每个质点进入子系统A或B与$\{N(t), t\geq 0\}$相互独立.

$N_1(t)$是以概率p进入子系统A的质点数，$N_2(t)$是以概率$1-p$进入子系统B的质点数.

有 1）对任意$t\in T$，$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$；

2）$N_1(t)$与$N_2(t)$分别是强度为λp和$\lambda(1-p)$的泊松过程；

3）对任意固定$t\in T$，$N_1(t)$与$N_2(t)$相互独立.

定理 3.4.4 $0 < p_i < 1, i = 1,2,\cdots,r, \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.

则强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t \ge 0\}$ 可分解为 r 个相互独立的泊松过程之和,各泊松过程的参数分 λp_i, $i=1,2,\ldots,r$.

证：仅证r=2情形.

$$N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

$\{Y_i, i \ge 1\}$ 独立同分布,

且与 $\{N(t), t \ge 0\}$ 相互独立,

$P\{Y_1=1\}=p=1-P\{Y_1=0\}$.

由定理3.4.2，$\{N_1(t), t \ge 0\}$ 是复合泊松过程.

(平稳独立增量过程, $N_1(t) \sim Poi(\lambda pt)$), $t \ge 0$)

(1) 因 0= $N(0)=N_1(t)+N_2(t)$,推知 $N_1(0)=0, N_2(0)=0$,

(2) 对任意的 $0\le t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$,泊松过程 $\{N(t),t\ge 0\}$ 的增量

$$N(t_i)-N(t_{i-1}),\ i=1,2,\cdots,n$$

相互独立.

在时间间隔 $[t_{i-1},t_i)$ 内 $N(t)$ 出现的事件以概率 p_1 为第 1 类事件, 故在时间间隔 $[t_{i-1},t_i)$ 内 $N_1(t)$ 出现的事件数, 即 $\{N_1(t),t\ge 0\}$ 的增量

$$N_1(t_i)-N_1(t_{i-1}),\ i=1,2,\cdots,n$$

也相互独立

(3) 对任意 $0\le s<t$，用 $N(s,t)=N(t)-N(s)$ 表示过程的增量，则 $\{N_1(t),t\ge 0\}$ 增量分布为

$$P\{N_1(s,t)=k\}=\sum_{m=k}^{\infty}P\{N_1(s,t)=k\,|\,N(s,t)=m\}P\{N(s,t)=m\}$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}C_m^k p^k(1-p)^{m-k}\frac{[\lambda(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}$$

$$=\frac{[\lambda p(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)(t-s)]^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$=\frac{[\lambda p(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda p(t-s)},\ k=0,1,2\cdots$$

$\{N_1(t),t\ge 0\}$ 具有平稳增量过程

同上理，类似可证明过程$\{N_2(t), t \geq 0\}$有相同结论成立，且$\{N_2(t), t \geq 0\}$是强度为$\lambda(1-p)$的泊松过程.

(4) 证$\{N_1(t), t \geq 0\}$和$\{N_2(t), t \geq 0\}$的相互独立性.

参见讲义 P72

需证：

$(N_1(s_1), N_1(s_2), \ldots, N_1(s_m))$与$(N_2(t_1), N_2(t_2), \ldots, N_2(t_n))$相互独立。

六、非齐次泊松过程

齐次泊松过程中有“**增量平稳**”的假定条件, 假定到达率λ是常数.

当过程的到达率随时间**缓慢变化**, 此假设合理.

若过程的增量平稳条件不满足，到达率随时间改变，设到达率为时间函数$\lambda(\,t\,)$,则引入非齐次泊松过程概念：

定义3.3.5 如果计数过程满足下列条件

1） $N(0)=0$；

2）$\{N(t),t\geq 0\}$是一个独立增量过程；

3） $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$;

4） $P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t)$.

称$\{N(t), t\geq 0\}$是具有速率函数为$\lambda(t)$的**非齐次poisson过程.**

定理3.4.8 若$\{N(t), t\geq 0\}$是非齐次泊松过程，且达到率$\lambda(t)$是连续函数，则在$[t_0, t_0+t]$时间内事件A出现k次的概率为

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k\}$$

$$=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}\exp\{-[m(t_0+t)-m(t_0)]\}$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

式中 $m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds.$

$$\phi_X(t,u) = E\left\{\exp\left(ju\sum_{k=1}^{N(t)}\xi_k\right)\right\} = E\left\{E\left\{\exp\left(ju\sum_{k=1}^{N(t)}\xi_k\right)\middle| N(t)\right\}\right\}$$

$$E\left\{\exp\left(ju\sum_{k=1}^{N(t)}\xi_k\right)\middle| N(t)=\mathrm{n}\right\}$$

$$= E\left\{\exp\left(ju\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\middle| N(t)=\mathrm{n}\right\}$$

$$= \phi_\xi^n(u)$$

$$= E\left\{\phi_\xi^{N(t)}(u)\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\phi_\xi^n(u)\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t[\phi_\xi(u)-1]}$$

$$E\left\{\exp\left(ju_1X(s)+ju_2\left(X(s+t)-X(s)\right)\right)\right\}$$

$$=E\left\{E\left\{\exp\left(ju_1\sum_{k=1}^{N(s)}\xi_k+ju_2\sum_{k=N(s)+1}^{N(s+t)}\xi_{k,}\right)\middle|N(s)\right\}\right\} = E\left\{\phi_\xi^{N(s)}(u_1)\phi_X(t,u_2)\right\}$$

$$=\phi_X(s,u_1)\phi_X(t,u_2)$$

$$E\left\{\exp\left(ju_1\sum_{k=1}^{N(s)}\xi_k+ju_2\sum_{k=N(s)+1}^{N(s+t)}\xi_{k,}\right)\middle|N(s)=n\right\}$$

$$=E\left\{\exp\left(ju_1\sum_{k=1}^{n}\xi_k+ju_2\sum_{k=n+1}^{N(s+t)-N(s)+n}\xi_k\right)\middle|N(s)=n\right\}$$

$$=E\left\{\exp\left(ju_1\sum_{k=1}^{n}\xi_k+ju_2\sum_{k=n+1}^{N(s+t)-N(s)+n}\xi_k\right)\right\}$$

$$=E\left\{\exp\left(ju_1\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\right\}E\left\{\exp\left(ju_2\sum_{k=n+1}^{N(t)+n}\xi_{k,}\right)\right\}=\phi_\xi^n(u_1)\phi_X(t,u_2)$$