第二章 随机过程的基本概念

§2.1 随机过程的定义及分类

一、实际背景

在许多实际问题中,不仅需要对随机现象做特定时间点上的一次观察,且需要做多次的连续不断的观察,以观察研究对象随时间推移的演变过程.

Ex.1 对某城市的气温进行n年的连续观察,记录得

$$\{X(t), a \le t \le b\},$$

研究该城市气温有无以年为周期的变化规律?

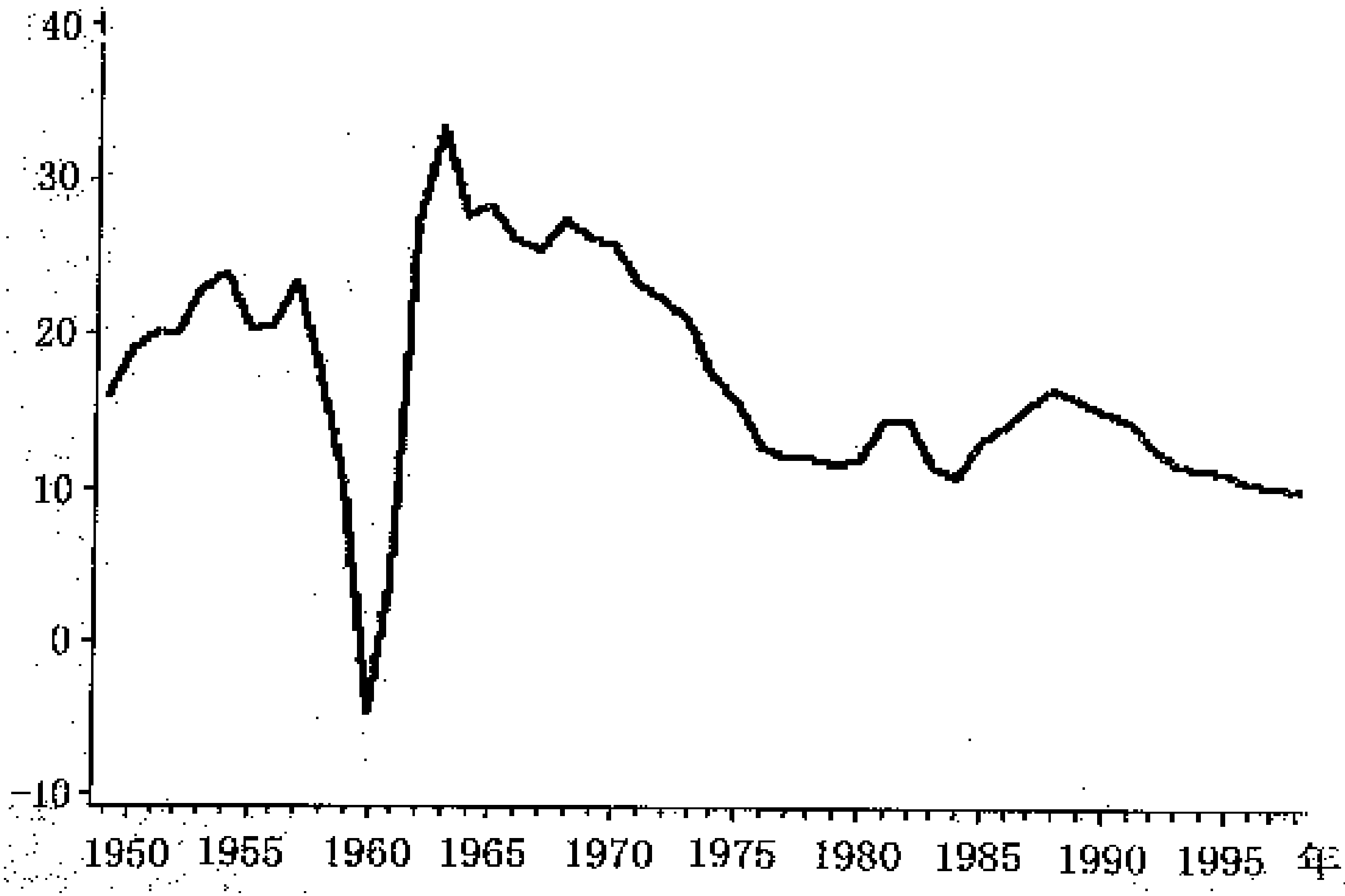
随机过程的谱分析问题

Ex.2 从杂乱电讯号的一段观察$\{Y(t),0< t< T\}$中,研究是否存在某种确定或随机信号$S(t)$?

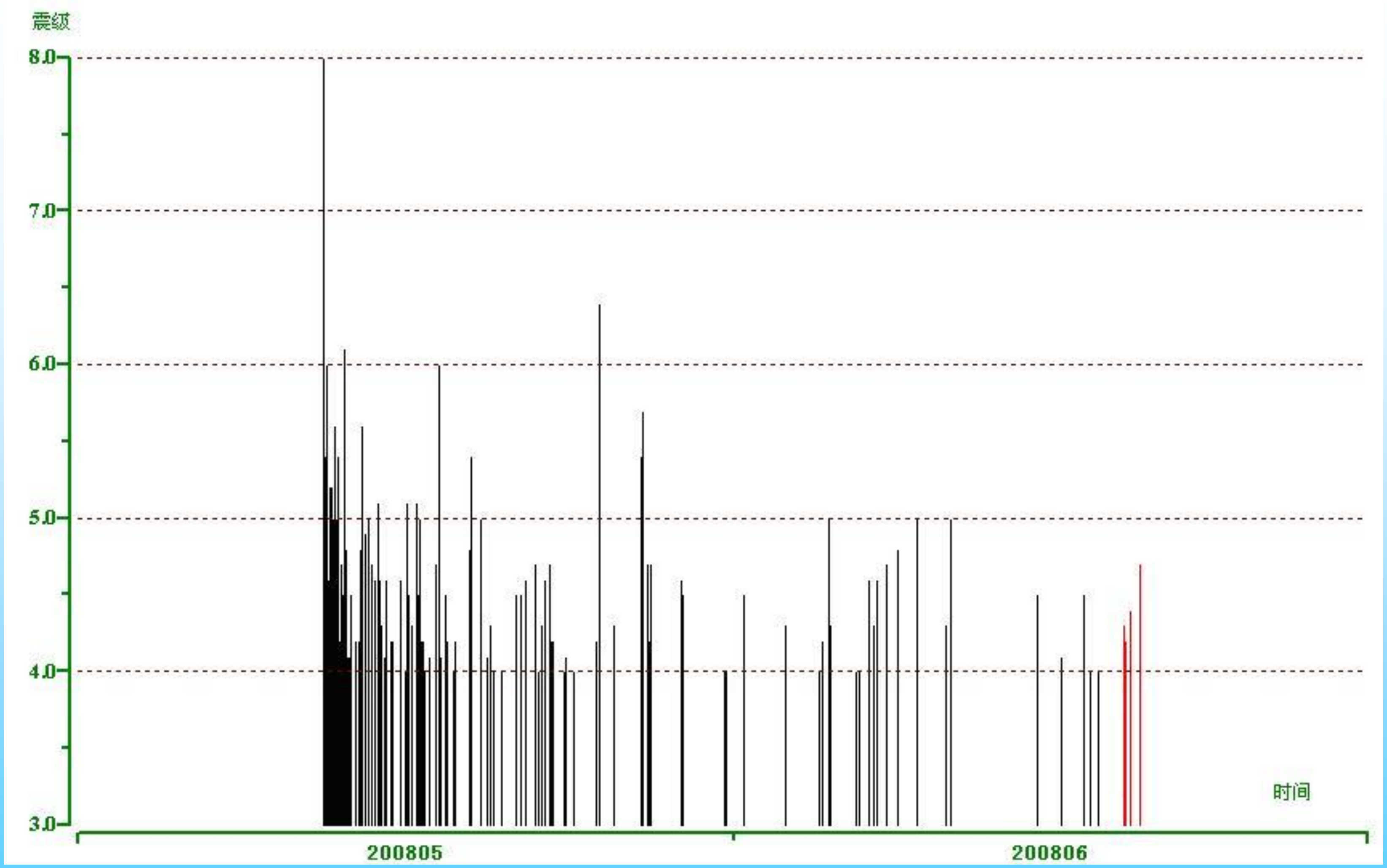
过程检测

Ex.3 监听器上收到某人的话音记录$\{Z(t),\alpha<t<\beta\}$ 试问他是否确实是追踪对象?

过程识别



我国人口自然增长率数据图



汶川余震序列图2008.5.12(2:28)~2008.7.8(8:00)

1. 关注对象是一族随时间或地点变化的随机变量;

2. 需要研究这一族随机变量的整体或局部统计规律性;

二、随机过程定义

定义2.1.1 设(Ω, F, P)是概率空间，$T \subset R$，若对每个$t \in T$，$X(t, \omega)$是概率空间(Ω, F, P)上的随机变量，则称随机变量族

$$\{X(t, \omega), t \in T\}$$

为(Ω, F, P)上的一个随机过程.

注 称T是**参数集**(或**指标集**、**参数空间**)

当$T=\{1,2, \ldots, n\}$,

$$\{X(t,\omega), t \in T\} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

随机向量

当T={1,2, … , n,…},

$$\{X(t,\omega), t \in T\} = (X_1, X_2, \cdots)$$

时间序列

当T={(x, y):a<x<b, c<y<d),

$$\{X(t,\omega), t \in T\}$$

平面随机场，或
多维指标集随机过程

随机过程是n维随机变量，随机变量序列的一般化,是随机变量$X(t)$，$t \in T$ 的集合.

用E表示随机过程 $X_T = \{X_t\}$ 的值域,称E为过程的状态空间.

Ex.4 质点布朗运动 设质点在直线上随机游动, 经随机碰撞后各以1/2的概率向左或向右移动.

若经无穷多次碰撞

记 $\{\omega_1^{(t)}\} = \{$第t次向左$\}$,

$\{\omega_2^{(t)}\} = \{$第t次向右$\}$,

随机变量序列

$$X(t,\omega)=\begin{cases}-1, & \omega=\omega_1^{(t)};\\ 1, & \omega=\omega_2^{(t)}.\end{cases} \qquad (t=1,2,\cdots)$$

则$\{X(t,\omega):t=,1,2,\cdots\}$描述了随机质点的运动.

其参数集$T=\{1,2,\ldots\}$，状态空间$E=\{-1, 1\}$.

随机过程的理解

称 $$T\times\Omega=\{(t,\omega):t\in T,\omega\in\Omega\}$$

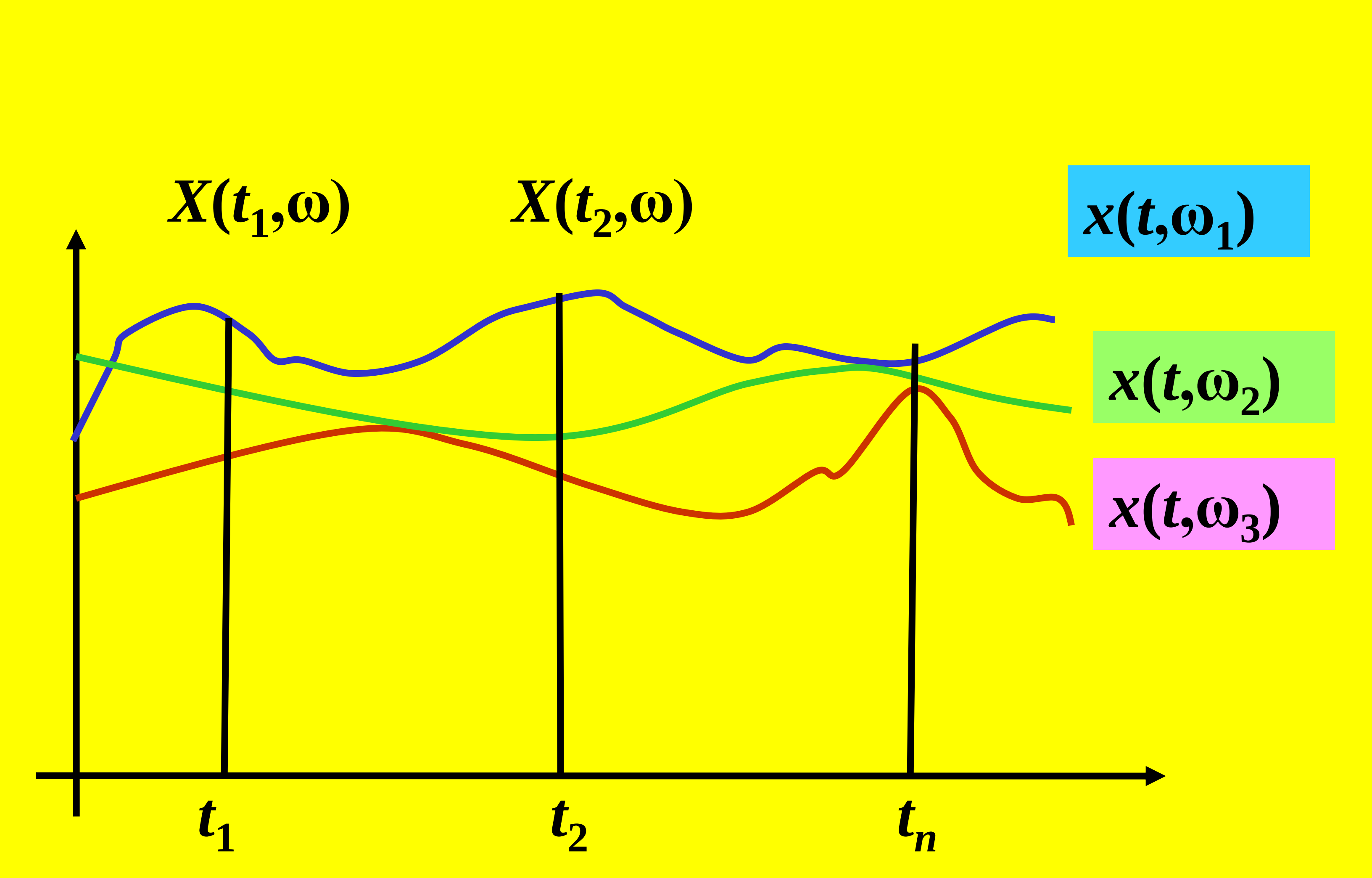
为集合T与Ω的**积集**.

随机过程 $X(t,\omega)$ 可看成定义在积集 $T\times\Omega$ 上的二元函数：

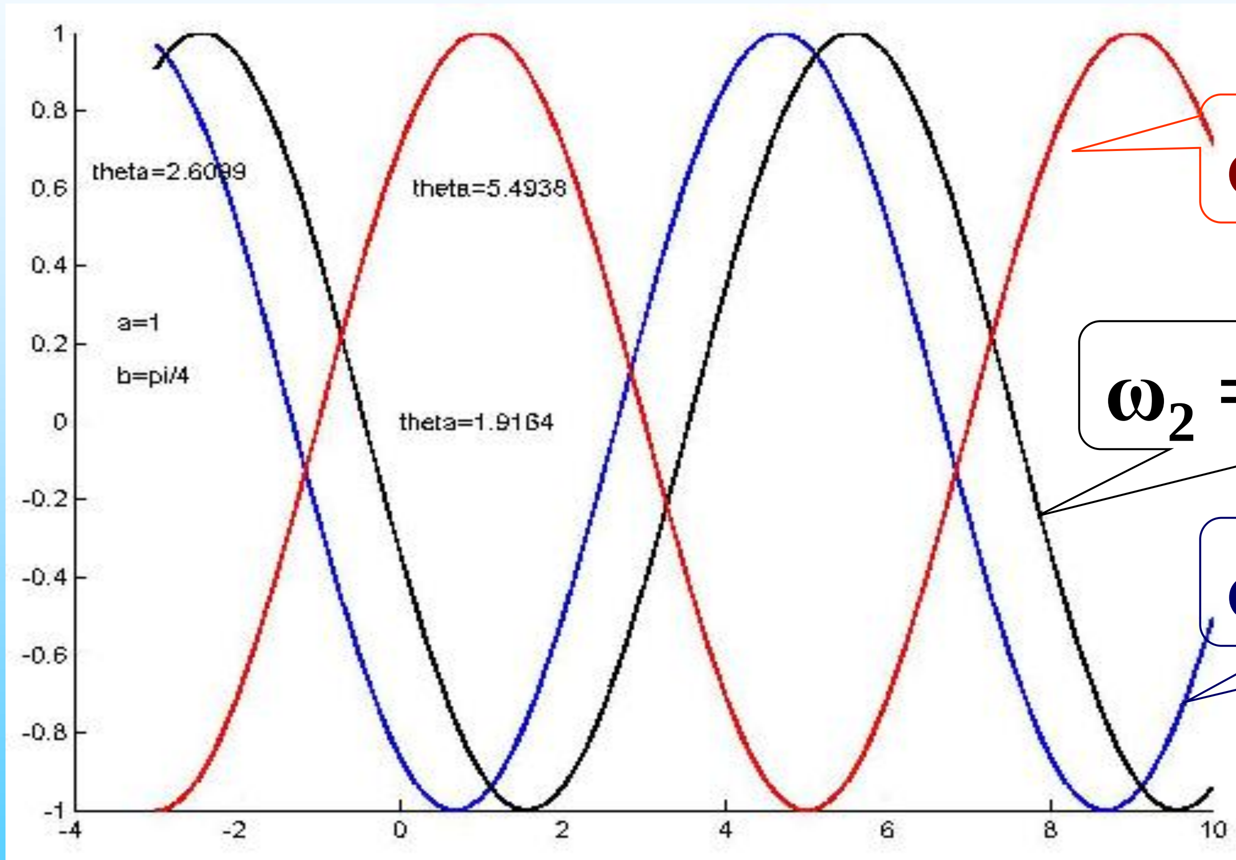
1)当固定 $t\in T$，$X_t(\omega)=X(t,\omega)$ 是一个定义在（Ω, F, P）随机变量；

2)当固定 $\omega_0\in\Omega$ (对于特定的试验结果),作为 $t\in T$ 的函数，$x(t,\omega_0)$ 是一个定义在 T 上的普通函数.

随机过程的定义



Ex.5 $X(t,\omega) = a\cos(bt+\Theta),\ \Theta \sim U(0,\ 2\pi)$



随机相位正弦波

$\omega_1 = 5.4938$

$\omega_2 = 1.9164$

$\omega_3 = 2.6099$

定义2.1.2 对每一固定 $\omega \in \Omega$，称 $X_t(\omega)$ 是随机过程 $\{X(t,\omega), t \in T\}$ 的一个**样本函数**.

也称轨道，路径，现实.

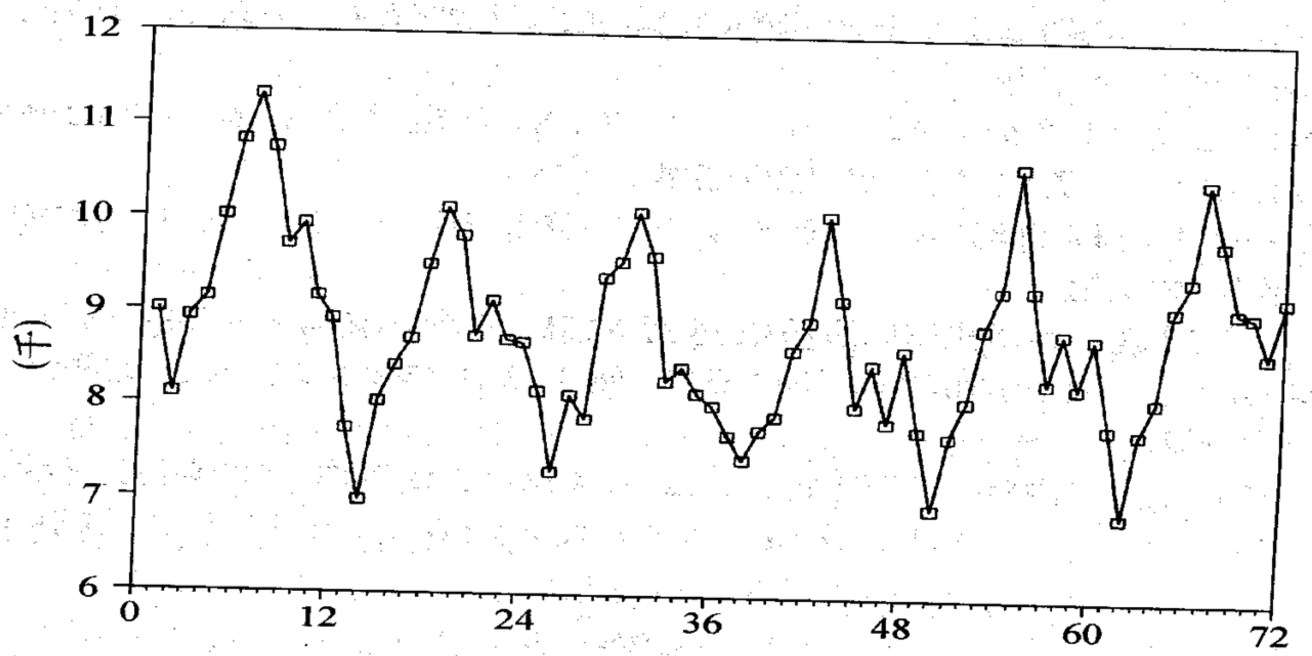


图 1.6　美国月事故死亡数据，1973 – 1978(国家安全委员会).

Ex.6 抛一次硬币定义一个随机过程如下

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{出现正面;}\\ 2t, & \text{出现反面.}\end{cases}\quad t\in R.$$

设出现正反面的概率相同，写出 $X(t)$ 的所有样本函数.

解 记 $\omega_1=\{$出现正面$\}$, $\omega_2=\{$出现反面$\}$,

则$X(t)$的所有样本函数为两条

$x(\omega_1, t)=\cos\pi t$, 和 $x(\omega_2, t)=2t$.

Ex.7 独立重复抛一个均匀硬币，定义一个随机过程如下

$$X(n) = \begin{cases} 1, & \text{第}n\text{次出现正面;} \\ -1, & \text{第}n\text{次出现反面.} \end{cases}$$

即有如下定义

$$X(n,\omega)=\begin{cases}1, & \omega(n)=\omega_1^{(n)};\\ -1, & \omega(n)=\omega_2^{(n)}.\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

其中 $\{\omega_1^{(n)}\}=\{$第n次出现正面$\}$,

$\{\omega_2^{(n)}\}=\{$第n次出现反面$\}$,

均为随机变量

1) 对所有 $n=1,2,\cdots,$ 有

$X(n)$	-1	1
p	$1/2$	$1/2$

2) 该过程有无穷条样本函数.

将抛第n 次硬币的试验记为E_n, 则对应的样本空间为

$$\Omega_n = \{\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}\}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

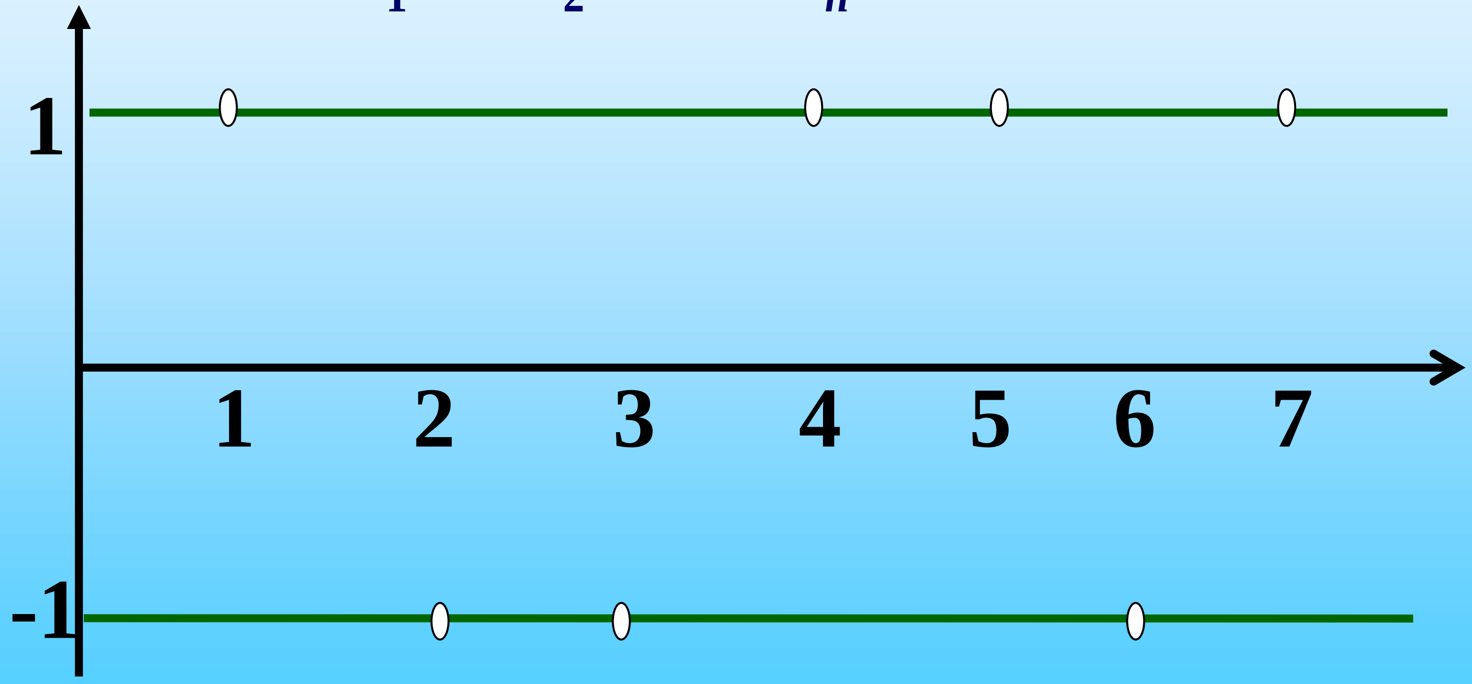
其中 $\{\omega_1^{(n)}\} = \{$第n次出现正面$\}$,

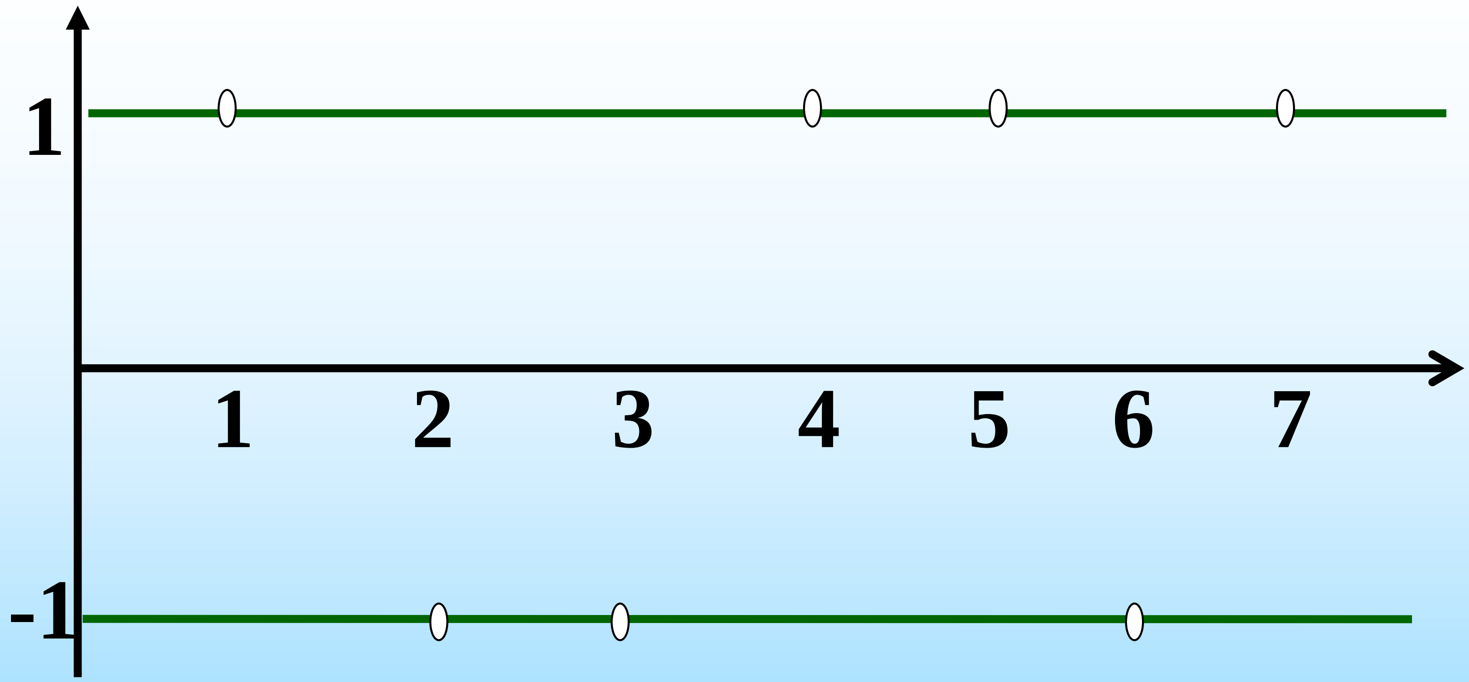
$\{\omega_2^{(n)}\} = \{$第n次出现反面$\}$,

过程样本空间为无穷积集：

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \times \cdots$$

$$= \{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, \cdots \omega_{i_n}^{(n)} \cdots) : i_n = 1,2\}$$





是对应Ω的样本点

$$\omega=(\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)},\cdots\omega_{i_n}^{(n)}\cdots)=(\text{正},\text{反},\text{反},\text{正},\text{正},\text{反},\text{正},\cdots)$$

的一条样本函数.

三、随机过程的分类

$$X_T = \{X(t), t \in T\}$$

1. 按状态空间和参数集进行分类

1) T, E 均为可列集;

2) T 是可列集, E 不可列;

3) T 不可列, E 为可列集;

4) T, E 均不可列.

当T为可列集,称为**离散参数随机过程**, 随机序列, **时间序列**.

当E 为可列(或有限)集,称为**离散状态随机过程**.

思考题:

1.随机过程可以描述哪些工程技术中的随机现象，试举例.