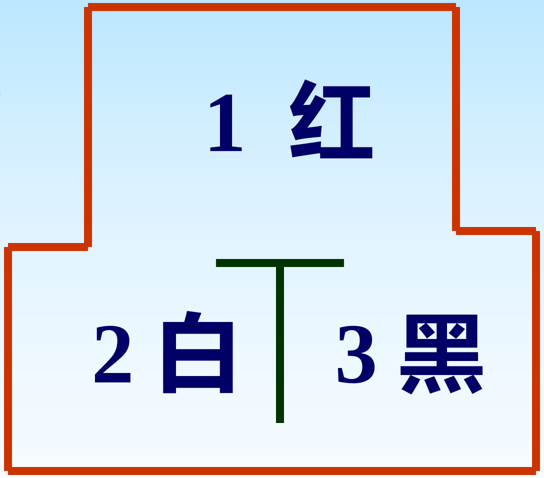
§6.2 马氏链序列(二)

四、遍历性与平稳性

将老鼠迷宫涂上不同颜色，对老鼠运动进行足够多次的观察，以了解，

1）哪一种颜色的吸引力最大？

2）初始状态对结果有何种影响？



数学问题:

关注当$n\to\infty$，$p_{ij}^{(n)}$ 的极限分布（j =1,2,3）是否与 i 有关?

定义6.2.6 设$\{X(n),n=0，1,2,\ldots\}$是齐次马氏链，若对 $\forall i, j \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0, \quad (i, j \in E)$$

且极限与 i 无关，称此马氏链具有**遍历性**.

问:$\{\pi_j，j \in E\}$是概率向量吗?

若 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \geq 0, (\forall i, j \in E)$ 且 $\sum\limits_{j\in E} \pi_j = 1,$

是概率向量

称$\{\pi_j, \ j \in E\}$ **为齐次马氏链的极限分布.**

记 $\Pi = \{\pi_j, \ j \in E\},$

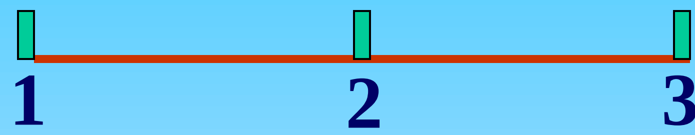
齐次遍历马氏链的n 步转移矩阵满足

$$P^{(n)} \to \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

当$n \to \infty$

EX.10 直线上的随机游动

状态空间 $E=\{1, 2, 3\}$



一步概率转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

讨论 $\{X(n), n\geq 1\}$ **是否遍历?**

解 $\{X(n), n\geq 1\}$ **是齐次马氏链.**

2步 概 率 转 移 矩 阵 为 $P^2 = PP = \begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}$

3步 概 率 转 移 矩 阵 为

$$P^3 = P^2 P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

一般有 $P^{2n-1} = P,$

$$P^{2n} = \begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}$$

对 $\forall i, j \in E$， $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 都不存在，

故$\{X(n), n\geq 1\}$不是遍历马氏链.

定理6.2.4（遍历性定理）

设有限齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,,\ldots\}$的状空间为 $E=\{1, 2,\ldots, s\}$. 若存在正整数n_0，对任意的 $i, j \in E$ 有 $p_{ij}^{(n_0)} > 0$，则此马氏链是遍历的，

且极限分布Π是方程组

证明

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{ij}, \quad (j = 1,2,\cdots s), \qquad (1)$$

在满足条件 $\pi_j > 0, \ \sum_{j=1}^{s} \pi_j = 1,$ 下的唯一解.

是概率向量

注一 对于齐次马氏链, 由C - K方程, 有

记 $P = (p_{ij}), \quad P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) = P^n,$

定理6.2.4 条件可叙述为：存在正整数n_0，使n_0步转移矩阵P^{n_0}的每一元素都为正数.

定义6.2.7 称齐次马氏链的转移矩阵P是**正则**的，若存在正整数k，使P^k的每一个元素均为正数.

推论1 若**有限**齐次马氏链的转移矩阵P是正则阵，则此马氏链是遍历的.

注二 记 $\Pi=\{\pi_1, \ \pi_2, \cdots, \pi_s\}$,

定理6.2.4中(1)式可改写为

$$\Pi = \Pi P \qquad (1')$$

$$\Pi P = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{i1} \quad \sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{i2} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{is} \right]$$

$$= [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots \quad \pi_s] = \Pi.$$

定义6.2.8 若行向量$U=(u_1, u_2,\dots,u_s)$与s阶方阵R满足

$$UR=U$$

称U是R的**不动点向量**.

定理6.2.5

若有限齐次马氏链的转移矩阵P是正则阵, 则

1) P有唯一的不动点向量Π, 其分量均为正数;

2) $P^n\ (n\geq 1)$随n的增大而趋于矩阵W, W的每一行向量等于不动点向量Π.

EX.11 迷宫问题 老鼠运动是齐次马氏链.

设老鼠运动的转移矩阵P为

$$P=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7 & 0.2\\0.3 & 0.4 & 0.3\\0.5 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

正则阵

设 初 始 分 布 为 $\pi(0)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$或$(1,0,0)$

由于P是正则阵,则 $n\to\infty$时，有

$$P^{(n)} = P^n \to W = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \Pi \end{bmatrix}, \quad \text{其中} \quad \Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3).$$

第n步绝对分布为

$$\pi(n) = \pi(0)P^{(n)} = \pi(0)P^n,$$

$$\pi(0)P^n \to \pi(0)W \qquad (as\ n \to \infty)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) = \Pi$$

同理 $$(1\quad 0\quad 0)\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{bmatrix}=\left(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\right)=\Pi$$

一般, 对任意初始概率向量$\pi(0)=(p_1\ \ p_2\ \ p_3)$

均有 $\pi(0)\,W=\Pi$

Π是不动点向量

定义6.2.9 设 $\{X(n), n\geq 0\}$ 为齐次马氏链, 转移矩阵为 P, 若存在**分布** $\Pi=\{\pi_j, j\in E\}$ 满足

$$\Pi = \Pi P$$

称 Π 是马氏链的**平稳分布**.

P196
定义4

注 若马氏链的初始分布是平稳分布 Π, 则绝对分布满足

$$\pi(n) = \Pi P^n = \Pi P P^{n-1} = \Pi P^{n-1} = \cdots = \Pi$$

且该马氏链是**强平稳**过程。

证明： 对任意时刻 $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，

状态集 $i_1, i_2, \cdots, i_k$，

$$P\{X(n_1) = i_1, X(n_2) = i_2, \cdots, X(n_k) = i_k\}$$

$$= \sum_{i \in E} P\{X(n_l) = i_l, l = 1, 2, \cdots k \mid X(0) = i\} P\{X(0) = i\}$$

$$= \sum_{i \in E} \pi_i P\{X(n_1) = i_1 \mid X(0) = i\} \cdot$$

$$P\{X(n_l) = i_l, l = 2, \cdots k \mid X(n_1) = i_1, X(0) = i\}$$

$$= P\{X(n_1) = i_1\}\, p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}$$

马氏性

$$= \pi_{i_1} p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})} = P\{X(n_l + \tau) = i_l, l = 1, 2, \cdots, k\}$$

定理6.2.5之推论　遍历马氏链的极限分布是平稳分布.

证 明

EX.12 考虑经多级传送后, 数字传输的准确可靠程度如何? (P109例3)

$X(0)$—进入系统第一级的数字;

$X(n)$—表示第n级传出的数字,

$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$是齐次马氏链, 状态空间为$E=\{0,1\}$.

假设每一级的误码率为p ($0<p<1$), 则转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

设初始分布为$\pi(0)$.

经第n 级传送后, 其概率分布(绝对分布)为

$$\pi(n)=\pi(0)P^n,\ n=1,2,\cdots$$

需求极限分布.

因P 是正则阵, 故此马氏链是遍历的, 极限分布即平稳分布.

由遍历性定理知问题转化为求P的不动点概率向量

$$W=(w_1 \ \ w_2)$$

W应满足:

$$\begin{cases} 1) \ w_1+w_2=1, \ w_i>0; \\ 2) \ WP=W. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad WP=(w_1 \ w_2)\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$= [(1-p)w_1 + pw_2 \quad pw_1 + (1-p)w_2] = (w_1 \; w_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-p)w_1 + w_2 = w_1 \\ pw_1 + (1-p)w_2 = w_2 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad W = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$$

$$P^n \to \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ 当 } n \to \infty,$$

故极限分布为 $(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$，从而有

$$\pi(n) = \pi(0) P^{(n)} = \pi(0) P^n$$

最坏结果

$$\to (p \quad 1-p) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$$

EX.13 (上节EX.7)天气预报问题

可验证转移阵是正则阵,

1）由定理4之推论1 知马氏链是遍历的；

2）由定理5之推论1 知正则(遍历)马氏链的极限分布是平稳分布；

假设$n_0>1$，则根据C-K方程，

$$p_{ii}^{(n_0)}=\sum_{r\in E}p_{ir}^{(1)}p_{rj}^{(n_0-1)}$$

存在某个状态r´使得 $p_{ir'}^{(1)}>0.$

再由C-K方程，可知

$$p_{ii}^{(n_0+1)}=\sum_{r\in E}p_{ir}^{(1)}p_{rj}^{(n_0)}>p_{ir'}^{(1)}p_{r'j}^{(n_0)}>0$$

这说明状态i是非周期的。

有限不可约非周期马氏链是遍历的。

极限分布是平稳分布

证明： 令$E=\{0,1,2,\ldots\}$，由C-K方程

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in E}p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}\geq\sum_{k=0}^{M}p_{ik}^{(n-1)}p_{kj},\quad(\forall M)$$

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}\geq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{M}p_{ik}^{(n-1)}p_{kj}=\sum_{k=0}^{M}\pi_k p_{kj}$$

令$M\to\infty$，$\quad\pi_j\geq\sum_{k\in E}\pi_k p_{kj},\quad\forall j\in E$

$$1=\sum_{j\in E}\pi_j\geq\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}\pi_k p_{kj}=\sum_{k\in E}\pi_k\sum_{j\in E}p_{kj}=1$$