§1.5 特征函数

一、特征函数的定义及例

设X, Y是实随机变量,复随机变量

$$Z=X+jY,$$

的数学期望定义为

$$E(Z)=E(X)+j\,E(Y),\qquad j=\sqrt{-1}$$

特别

特征函数

$$E(e^{jtX}) = E(\cos tX) + jE(\sin tX)$$

X是实随机变量

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF(x) + j\int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

求随机变量X的函数的数学期望

注 1) $\forall t \in R$, $\cos tx$ 和 $\sin tx$ 均为有界函数, 故

$E(e^{jtX})$ 总存在.

2) $E(e^{jtX})$ 是实变量 t 的复值函数.

定义1.5.1 设X是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,称

$$\varphi(t)=E(e^{jtX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}dF(x),\quad t\in R$$

为X的**特征函数**.

关于X的分布函数的Fourier-Stieltjes变换

当X是连续型随机变量

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx;$$

当X是离散型随机变量

$$\varphi(t)=\sum_{k}e^{jtx_k}p_k.$$

Ex.1 单点分布 $P\{X=c\}=1,$

$$\varphi(t)=E(e^{jtc})=e^{jtc},\ t\in \mathrm{R}.$$

Ex.2 两点分布

$$\varphi(t)=e^{jt\cdot 0}(1-p)+e^{jt\cdot 1}p$$

$$=1-p+pe^{jt}=q+pe^{jt},\ t\in R.$$

Ex.3 二项分布 $\varphi(t)=(q+pe^{jt})^n,\ t\in R$

Ex.4 泊松分布 $\varphi(t)=e^{\lambda(e^{jt}-1)},\ t\in R$

Ex.5 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty}\lambda e^{jtx}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cos tx dx+j\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\sin tx dx$$

$$=\lambda\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}+j\lambda\frac{t}{\lambda^2+t^2}=\left(1-\frac{jt}{\lambda}\right)^{-1}, t\in R$$

Ex.6 **均匀分布** $U[-a, a]$,

$$\varphi(t) = \frac{\sin at}{at}, t \in R$$

Ex.7 **正态分布** $N(\mu, \sigma^2)$

$$\varphi(t) = e^{j\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in R$$

特别正态分布 $N(0,1)$，**则**

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in R$$

证明

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\xlongequal{u=\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jt(\mu+\sigma u)}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-jt\sigma)^2}{2}}du=e^{j\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2},\ t\in R$$

二、特征函数性质

性质1.5.1 随机变量X的特征函数满足:

1) $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1;$

2) $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t).$

证 1) $|\varphi(t)|^2 = |E(\cos tX) + jE(\sin tX)|^2$

$$= [E(\cos tX)]^2 + [E(\sin tX)]^2$$

$$\le E[(\cos tX)^2] + E[(\sin tX)^2]$$

$$= E[(\cos tX)^2 + (\sin tX)^2] = 1 = \varphi(0)$$

司蒂阶积分性质或矩的性质

2) $\overline{\varphi(t)} = \overline{E(e^{jtX})} = \overline{E(\cos tX) + jE(\sin tX)}$

$$= E(\cos tX) - jE(\sin tX)$$

$$= E[\cos(-tX)] + jE[\sin(-tX)]$$

$$= E[e^{j(-t)X}] = \varphi(-t)$$

性质1.5.2 随机变量X的特征函数为$\varphi_X(t)$, 则$Y= aX+b$的特征函数是

$$\varphi_Y(t) = e^{jbt}\varphi_X(at)$$

a, b是常数.

证 $\varphi_Y(t) = E[e^{j(aX+b)t}]$

$$= E[e^{jbt}e^{j(at)X}] = e^{jbt}\varphi_X(at)$$

Ex.8 设 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求其特征函数.

解 设 $X \sim N(0, 1)$, 有 $Y = \sigma X + \mu$, 且

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in R.$$

$$\varphi_Y(t) = e^{j\mu t}\varphi_X(\sigma t) = e^{j\mu t}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in R.$$

性质1.5.3 随机变量X的特征函数$\varphi(t)$在R上一致连续.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使 $|h| < \delta$时,对t一致地有

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| < \varepsilon$$

一般，$\delta = \delta(\varepsilon, t)$

性质1.5.4 特征函数是非负定的函数，即对任意正整数n, 任意复数$z_1, z_2, \ldots, z_n$,及 $t_r \in R$, $r = 1,2,\cdots,n$,有

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\varphi(t_r - t_s) z_r \overline{z_s} \geq 0.$$

特征函数

证

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\varphi(t_r-t_s)z_r\bar{z}_s=\sum_{r,s=1}^{n}z_r\bar{z}_s\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(t_r-t_s)}dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{r,s=1}^{n}z_r\bar{z}_s e^{jt_r x}e^{-jt_s x}]dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{r=1}^{n}z_r e^{jt_r x}\right|^2 dF(x)\geq 0.$$

注 以上性质中$\varphi(0)=1$,一致连续性，非负定性是本质性的.

定理1.5.1 (波赫纳—辛钦) 函数$\varphi(t)$为特征函数的充分必要条件是在R上一致连续，非负定且$\varphi(0)=1.$

三、特征函数与矩的关系

定理1.5.2 若随机变量X 的n阶矩存在,则X的特征函数$\varphi(t)$的k 阶导数 $\varphi^{k}(t)$存在,且

$$E(X^{k})=j^{(-k)}\varphi^{k}(0),\qquad (k\leq n)$$

注 逆不真.

证 仅证连续型情形

设X的概率密度为$f(x)$，有

$$\frac{d^k[e^{jtx}f(x)]}{dt^k}=j^k x^k e^{jtx}f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{jtx}x^k f(x)\right|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^k f(x)\right|dx=E[|X|^k]<\infty$$

对 $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx$两边求导，得

$$\varphi^{(k)}(t)=j^k\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}x^k f(x)dx=j^k E(X^k e^{jtX})$$

令$t=0$，得 $\varphi^{(k)}(0)=j^k E(X^k)$

故 $E(X^k)=j^{-k}\varphi^{(k)}(0)$

Ex.9 随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 $\varphi(t)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\cos tx\,dx \qquad (\because f(x)=f(-x))$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(t+1)x+\cos(t-1)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t+1}\sin[(t+1)\frac{\pi}{2}]+\frac{1}{t-1}[\sin(t-1)\frac{\pi}{2}]\right\},\quad t\in R.$$

因 $\varphi'(0)=0,\quad \varphi''(0)=2-\frac{1}{4}\pi^2.$

故 $E(X)=j^{-1}\varphi'(0)=0$

$$D(X)=E(X^2)=j^{-2}\varphi''(0)=-\left(2-\frac{1}{4}\pi^2\right)=\frac{1}{4}\pi^2-2.$$

三、反演公式及唯一性定理

由随机变量X的分布函数可惟一确定其特征函数:

$$F(x) \Rightarrow \varphi(t)$$

问题

能否由X的特征函数唯一确定其分布函数?

$$\varphi(t) \Rightarrow F(x)$$

从而 $$\varphi(t) \overset{?}{\Leftrightarrow} F(x)$$

定理1.5.3（反演公式） 设随机变量X 的分布函数和特征函数分别为$F(x)$和 $\varphi(t)$, 则对$F(x)$的任意连续点x_1, x_2,（$x_1 < x_2$）,有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt.$$

推论1(唯一性定理) 分布函数$F_1(x)$和$F_2(x)$恒等的充要条件是它们的特征函数$\varphi_1(t)$和 $\varphi_2(t)$恒等.

推论2 若随机变量X的特征函数$\varphi(t)$在R上绝对可积，则X为连续型随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$$

反演公式

注 对于连续型随机变量X，概率密度与特征函数互为富氏变换(仅差一个负号).

推论3 随机变量X 是离散型的,其分布律为

$$p_k=P\{X=k\},\qquad k=0,\pm1,\pm2.\cdots$$

其特征函数为

特征函数

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k e^{ikt},\qquad t\in R.$$

且 $$p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-itk}\varphi(t)dt$$ 反演公式

证 设 $k\in N$, 有

$$\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-itk}\varphi(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty}p_s e^{ist}e^{-itk}dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}p_k dt+\sum_{\substack{s=-\infty\\ s\neq k}}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p_s e^{it(s-k)}dt=2\pi p_k+0$$

其中，当 $s \neq k$ 时 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-s)} dt = 0.$

$$\Rightarrow \quad p_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk}\varphi(t)dt.$$

Ex.9 随机变量 X 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上服从均匀分布，$Y=\cos X$，利用特征函数求 Y 的概率密度.

解 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

Y的特征函数为

偶函数

$$\varphi_Y(t)=E(e^{itY})=E(e^{it\cos X})$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it\cos x}\frac{1}{\pi}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it\cos x}\frac{1}{\pi}dx$$

令

$$u=\cos x,\qquad du=-\sin x dx=-\sqrt{1-u^2}\,dx$$

$$\varphi_Y(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 e^{itu}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

根据特征函数与分布函数一一对应的惟一性定理，知随机变量Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1;\\ 0. & \text{其它.}\end{cases}$$

Ex.10 已知随机变量X 的特征函数为

$$\varphi(t)=\cos^2 t, t\in R$$

试求X 的概率分布.

解 $\varphi(t)=\cos^2 t=(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2})^2$

$$=\frac{1}{4}e^{2jt}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2jt}$$

$$=e^{2jt}P\{X=2\}+e^{0jt}P\{X=0\}+e^{-2jt}P\{X=-2\}$$

根据特征函数与分布函数一一对应的惟一性定理，知随机变量X的分布律为

X	-2	0	2
p	1/4	1/2	1/4

四、独立随机变量和的特征函数

定理1.5.4 随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，令

$$Y=\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{则} \quad \varphi_Y(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)$$

Ex.11 随机变量$Y \sim B(n, p)$，写出其特征函数.

解 二项分布随机变量Y可表示为$Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$，且$X_k \sim B(1, p), k=1,2,\ldots,n$，相互独立，故$Y$的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)=(q+pe^{it})^n$$

Ex.12 若$X_1,X_2,\dots,X_n$相互独立,且$X_k\sim N(0,1)$,

证明 $Y=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 也服从$N(0,1)$分布.

证 X_k的特征函数为 $\varphi_k(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$, 则

$$\varphi_{\sum_{k=1}^{n}X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)=e^{-\frac{nt^2}{2}},\qquad t\in R$$

从而

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{\sum_{k=1}^{n}X_k}\left(t/\sqrt{n}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}},\qquad t\in R$$

由唯一性定理知,$Y\sim N(0,1)$.

五、多维随机变量的特征函数

定义1.5. 2 二维随机变量(X, Y)的特征函数定义为

$$\varphi(t_1,t_2)=E[\mathrm{e}^{j(t_1X+t_2Y)}]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x+t_2y)}dF(x,y)$$

连续型

$$\varphi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x+t_2y)}f(x,y)dxdy$$

离散型

$$\varphi(t_1,t_2)=E[\mathrm{e}^{j(t_1X+t_2Y)}]=\sum_r\sum_s e^{j(t_1x_r+t_2y_s)}p_{r,s}\cdot$$

定义1.5.3 n维随机向量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,则它的特征函数为

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E[e^{j(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left(t_1x_1+\cdots+t_nx_n\right)}dF(x_1,\cdots,x_n)$$

性质1.5.5

1) 随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立的充要条件是

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k)$$

与独立和 $Y=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的特征函数性质有什么

差别？

2) 二维随机变量(X, Y)的特征函数为 $\varphi(t_1,t_2)$，

则$Z=aX+bY+c$ 的特征函数为

$$\varphi_Z(t)=e^{itc}\varphi(at,bt),\qquad t\in R.$$

特别有

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi(t,t)$$

证

$$\varphi_Z(t)=E[e^{jt(aX+bY+c)}]=e^{jtc}E[e^{jt(aX+bY)}]$$

$$=e^{jtc}[e^{jatX+jbtY}]$$

$$=E^{jtc}\varphi(at,bt).$$

Ex.13 设(X_1,X_2)服从二维正态分布,且$E(X_k)=k$, $k=1,2$,记.

$$K_{ij}=\mathrm{Cov}(X_k,X_j)=k+j,\quad k,j,=1,2.$$

求$Y=X_1+X_2$的特征函数.

解 $\varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=$

$$= e^{i(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2)-\frac{1}{2}[\sigma_1^2 t_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2+\sigma_2^2 t_2^2]}$$

$$= e^{i(t_1+2t_2)-\frac{1}{2}(2t_1^2+2\times 3t_1 t_2+4t_2^2)}$$

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{X_1,X_2}(t,t)= e^{i3\mathrm{t}-6t^2}$$

特征函数

$$= e^{i3t} e^{\frac{1}{2}\times 12t^2}, \quad t \in R.$$

故 $Y = X_1 + X_2 \sim N(3, 12)$.