

随机过程总结

目次

1 序言	1
1.1 简介	1
1.2 版权	1
2 公共基础知识	2
2.1 不定积分	2
2.2 定积分	3
2.3 Gamma 函数	4
2.4 级数	5
2.5 排列组合	5
2.6 三角函数	5
3 电容电感的压流关系	8
3.1 电容	8
3.2 电感	8
4 几个分布	9
5 简答题	11
5.1 随机变量、过程定义	11
5.2 随机过程统计特征	11
5.3 随机过程分类	12
5.3.1 二阶矩过程	12
5.3.2 独立过程	13
5.3.3 正交增量过程	13
5.3.4 独立增量过程（可加过程）	13
5.3.5 平稳过程	13
5.3.6 平稳增量过程	13
5.3.7 平稳独立增量过程	14
5.3.8 马尔科夫过程（马氏过程）	14
5.4 二阶矩过程均方微积分	14
5.4.1 均方收敛性	14

5.4.2 均方连续	14
5.4.3 均方可导	14
5.4.4 均方可积	15
5.4.4.1 定积分	15
5.4.4.2 不定积分	15
5.5 平稳过程均方遍历性（各态历经性）	15
5.6 平稳信号的 PSD 与功率	16
5.7 马尔科夫过程特性	16
5.7.1 马尔科夫性	16
5.7.2 离散参数马氏链定义	17
5.7.3 齐次马氏链	17
5.7.3.1 定义与分布	17
5.7.3.2 齐次马氏链状态特征量	18
6 证明题	19
6.1 正态过程	19
6.2 维纳过程	20
6.2.1 维纳过程定义	20
6.2.2 维纳过程判别	20
6.3 泊松过程	21
6.3.1 泊松过程定义	21
6.3.2 泊松过程的等价定义	21
6.3.3 泊松过程的几个概念	23
6.4 均方微积分	26
6.5 平稳信号通过 LTI 系统	29
6.6 马尔科夫过程	30
6.6.1 C-K 方程	30
6.6.2 齐次马氏链状态分类	31
6.6.3 齐次马氏链状态周期	32
7 计算题	35
7.1 马氏链状态空间	35

7.2 C-K 方程的矩阵形式	38
7.3 概率分布的矩阵形式.....	39
7.4 概率转移矩阵	39
7.4.1 理论基础	39
7.4.2 例题	41
7.5 齐马链遍历性与极限分布	42
7.6 齐马链遍历性定理	43
7.7 平稳信号通过 LTI 系统	45
7.7.1 结论总结	45
7.7.2 例题	45
7.8 参数随机的正余弦信号	46
7.8.1 类型 1.....	47
7.8.2 类型 2.....	47
7.8.3 种类 3.....	47
7.8.4 种类 4.....	47
7.9 时间相关、平均及遍历性定理	48
7.9.1 一般过程	48
7.9.2 各态历经充要充分条件	48
7.10 平稳过程均方微积分与充要条件	50
7.10.1 充要条件	50
7.10.2 例题	50
7.11 二阶矩过程均方微积分与充要充分条件	57
7.11.1 充要条件与定义	57
7.11.2 例题.....	59

随机过程总结

1 序言

1.1 简介

本文档是根据电子科技大学（成都）2016 年博士生入学考试《随机过程》大纲所总结的知识点。针对每个知识点，都以若干道题目作出解释。本文档不仅给欲求学成电的同学一个参考，也可作为考取其他目标院校同学的一份参考资料。此外，本文档也是所有教学《随机过程》这门课的老师 and 学生的参考资料。

本文档没有非常正式的格式和排版，内容上也难免出现纰漏甚至不当，欢迎广大师生和专家给作者指出，谢谢！

1.2 版权

严格来讲，这个世界上任何作品都没有版权，所谓的版权也只有一个有限的空间和时间，表面上属于某个人或某个团体。所以本文档也没有永久的版权。

作者在上传该作品后，会给下载者设置一定的障碍，如果您觉得本文档对您的帮助很大，想进一步给予作者酬劳，或其他任何疑问和需要，请致信作者。

联系方式：doudouamtf@qq.com

作者：怪味豆

2018 年 10 月于四川成都

2 公共基础知识

这一部分内容可直接背诵，因为当时作者在同时复习《信号与系统》和《随机过程》这 2 门课，发现这部分内容 2 门课均会常常涉及到，直接背诵能省很多事，所以命名为：“公共基础知识”。

2.1 不定积分

$$\begin{cases} f(x) = \frac{h(x)}{[g(x)]^n}, \forall n \geq 0 \in \mathbb{R} \\ f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - nh(x)g'(x)}{[g(x)]^{n+1}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \left\{ e^{[g(x)]} f(x) \right\}' = e^{[g(x)]} \cdot [f'(x) + g'(x)f(x)] \\ \left[e^{ax} f(x) \right]' = e^{ax} \cdot [f'(x) + af(x)], \forall a \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \int (\cos^2 x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \\ \int (\sin^2 x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int (x \cos x) dx &= \cos x + x \sin x \\ \int (x \sin x) dx &= \sin x - x \cos x \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \int (xe^{ax}) dx = e^{ax} \left(\frac{1}{a}x - \frac{1}{a^2} \right), \forall a \neq 0 \in \mathbb{R} \\ \int (x^2 e^{ax}) dx = e^{ax} \left(\frac{1}{a}x^2 - \frac{2}{a^2}x + \frac{2}{a^3} \right), \forall a \neq 0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \left[\frac{a}{b} \sin(bx) - \cos(bx) \right] (b \neq 0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}) \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \left[\frac{a}{b} \cos(bx) + \sin(bx) \right] (b \neq 0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \quad (7)$$

2.2 定积分

$$\int_0^{\pi} (\sin \theta) d\theta = 2 \tag{8}$$

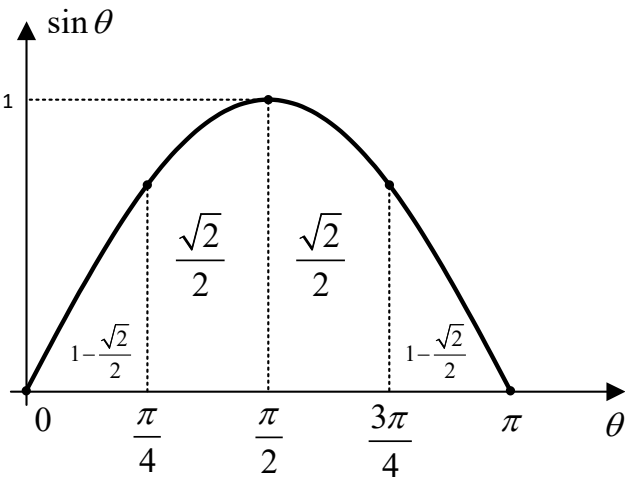


图 1

$$\int_0^{\pi} (\sin^2 \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

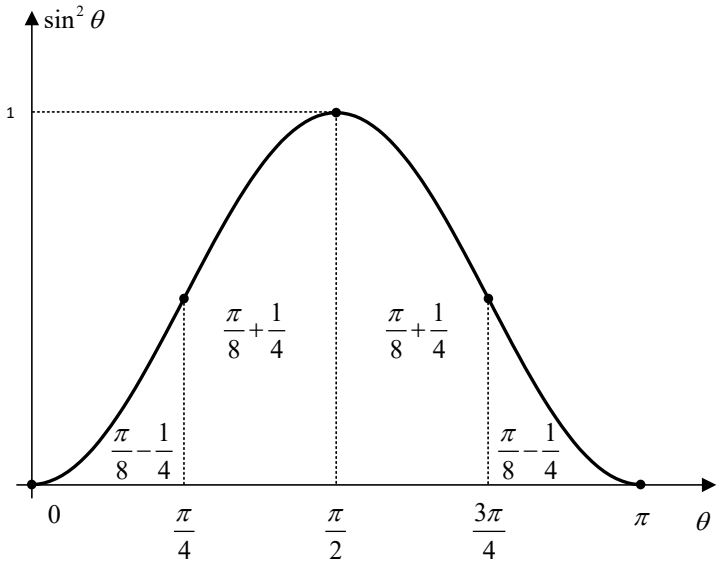


图 2

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx &= \frac{1}{a} \\
\int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx &= \frac{1}{a^2} \\
(a > 0)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^\beta \cdot e^{-\alpha t} dt &= \frac{\beta!}{\alpha^{\beta+1}} \\
(\alpha > 0, \beta \in \mathbb{Z}^+)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt &= \sqrt{\pi} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi} \frac{\sin(kt)}{kt} dt = 1 (k > 0) \tag{14}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) = \delta(t) \tag{15}$$

2.3 Gama 函数

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\alpha-1} dt = (\alpha-1)! \\
(\alpha \geq 1 \in \mathbb{Z})
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \sqrt{t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{n-1/2} dt = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{4^n \cdot n!} \\
(n \geq 0 \in \mathbb{Z})
\end{aligned} \tag{18}$$

2.4 级数

$$\begin{cases} e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ \sum_{k \geq 0 \text{ 偶数}} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) \\ \sum_{k \geq 0 \text{ 奇数}} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{2}(e^{\lambda} - e^{-\lambda}) \end{cases} \quad (19)$$

$$\lambda \in (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n &= \frac{1}{1-\alpha} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha^n &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\alpha^n &= \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^3} \\ |\alpha| &< 1 \end{aligned} \quad (20)$$

2.5 排列组合

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (21)$$

2.6 三角函数

常用三角函数表

Fun \ Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	0	

表 1

常用正余弦切换公式

$$\begin{cases} \sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \end{cases} \quad (22)$$

$\frac{\pi}{2}$ 整数倍正余弦切换公式

$$\left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} n \right) \right| = |\sin \theta| (n = 2k, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (23)$$

$$\left| \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} n \right) \right| = |\cos \theta| (n = 2k + 1, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

$$\left| \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} n \right) \right| = |\cos \theta| (n = 2k, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (24)$$

$$\left| \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} n \right) \right| = |\sin \theta| (n = 2k + 1, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

这是我们高中学过的三角函数性质，但它直到博士毕业都能用得上（个人愚见：数学世界的灵魂就是三角函数）。

式 (23) 和 (24) 所要表达的信息是，当 n 为**偶数**时，正余弦类型不会切换；当 n 为**奇数**时，正余弦类型切换。

变换后的函数的正负号取决于 $\theta + \frac{\pi}{2}n$ 所在象限，这里必须要把 θ 当成锐角。如下图所示：

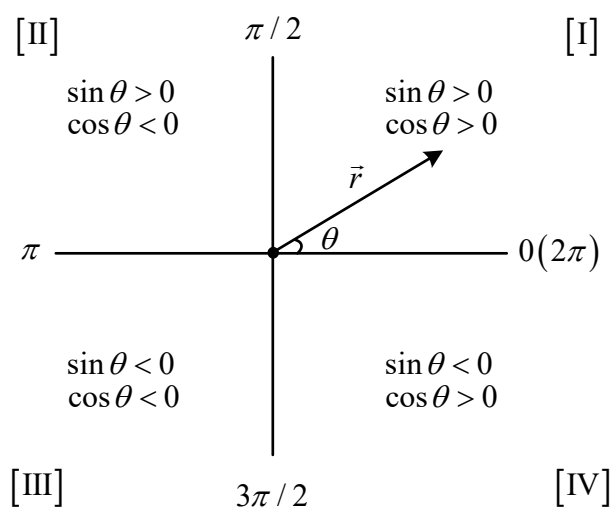


图 3

就是要明确将向量 \vec{r} 从锐角 θ 逆时针旋至 $\theta + \frac{\pi}{2}n$ 时, \vec{r} 所处的象限。现将式 (23) 和 (24)

进一步完善为

$$\begin{cases} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = \sin\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{I}], [\text{II}] \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = -\sin\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{III}], [\text{IV}] \\ (n = 2k, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = \cos\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{I}], [\text{II}] \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = -\cos\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{III}], [\text{IV}] \\ (n = 2k + 1, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = \cos\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{I}], [\text{IV}] \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = -\cos\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{II}], [\text{III}] \\ (n = 2k, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = \sin\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{I}], [\text{IV}] \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}n\right) = -\sin\theta, \theta + \frac{\pi}{2}n \in [\text{II}], [\text{III}] \\ (n = 2k + 1, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \end{cases} \quad (28)$$

【例】 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}。$

3 电容电感的压流关系

3.1 电容

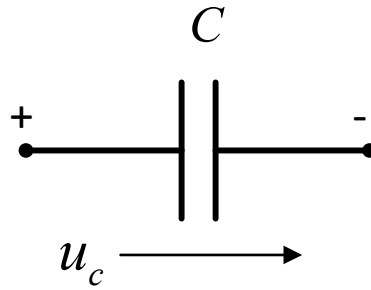


图 4

电容 C 上的电流为：

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad (29)$$

3.2 电感

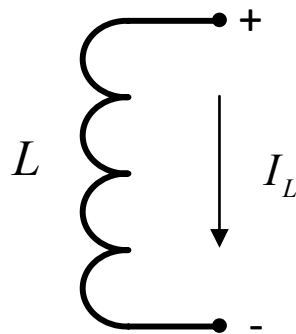


图 5

电感 L 间的电压为：

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (30)$$

4 几个分布

序号	名称	概率（概率密度）	均值 EX	方差 DX	特征函数 $\Phi(\omega)$
1	0-1 分布	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$	p	$p(1-p)$	$pe^{j\omega} + q$
2	二项分布	$p\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(pe^{j\omega} + q)^n$
3	几何分布	$p\{X=k\} = pq^{k-1}, k \geq 1$	$1/p$	q/p^2	$p/(e^{j\omega} - q)$
4	泊松分布	$p\{X=k\} = \lambda^k e^{-\lambda} / k!, k \geq 0$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^{j\omega} - 1)]$
5	均匀分布	$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a, b] \\ 0, & \text{others} \end{cases}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$\frac{e^{jb\omega} - e^{ja\omega}}{j\omega(b-a)}$
6	指数分布	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$
7	正态分布	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right]$	μ	σ^2	$\exp\left(j\mu\omega - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)$
8	埃尔朗分布 (Erlang)	$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	k/λ	k/λ^2	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)^k$
9	瑞利分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-x^2/(2\sigma^2)\right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$	$\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$	$(1 + j\mu\omega) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)$

表 2

注：（1）均匀分布中，当 $a = -c, b = c$ 时，特征函数 $\Phi(\omega) = \frac{\sin(c\omega)}{c\omega}$ ；

（2）标准正太分布 $X \sim N(0,1)$ ，特征函数为 $\Phi(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)$ ；

（3）埃尔朗（Erlang）分布定义： k 个独立指数分布随机变量之和， $X = \sum_{i=1}^k X_i$ ， X_i 服从

指数分布。

5 简答题

5.1 随机变量、过程定义

(1) 随机变量

设 (Ω, Σ, P) 是概率空间， $X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数，若对 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，有 $\{\omega: X(\omega) \leq x\} \in \Sigma$ ，称 $X(\omega)$ 是定义在 (Ω, Σ, P) 上的随机变量。

(2) 随机过程

给定概率空间 (Ω, Σ, P) 和指标集 T ，若对每个 $t \in T$ ，有定义在 (Ω, Σ, P) 上的随机变量 $X_t(\omega), \omega \in \Omega$ 与之对应。称依赖于 t 的随机变量族 X_t 为随机过程，记为 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 或 $\{X_t, t \in T\}$ 或 $\{X(t), t \in T\}$ 。

5.2 随机过程统计特征

1、均值

(实信号)

$$m_x(t) = E[X_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} x d[F_t(x)], t \in T \quad (31)$$

(复信号)

$$m_z(t) = E[X_t] + jE[Y_t] \quad (32)$$

均值函数表现了随机过程在各时间点上的平均特征。

2、方差：

(实信号)

$$D_x(t) = D[X_t] = E[X_t - m_x(t)]^2, t \in T \quad (33)$$

(复信号)

$$D_z(t) = E[|Z_t - m_z(t)|^2] \quad (34)$$

方差函数描述了随机过程在各时间点处的波动程度。

3、协方差

(自协方差)

$$C_X(s, t) = E\{[X(s) - m(s)][X(t) - m(t)]\} \quad (35)$$

(互协方差)

$$C_{XY}(s, t) = E\{[X(s) - m_X(s)][Y(t) - m_Y(t)]\} \quad (36)$$

4、相关函数

(自相关)

$$R_X(s, t) = E\{[X(s)X(t)]\} \quad (37)$$

(互相关)

$$R_{XY}(s, t) = E\{[X(s)Y(t)]\} \quad (38)$$

相关函数与协方差的关系:

$$R_X(s, t) = C_X(s, t) + m_X(s)m_X(t) \quad (39)$$

$$R_{XY}(s, t) = C_{XY}(s, t) + m_X(s)m_Y(t) \quad (40)$$

5、相关系数

$$\begin{aligned} \rho_X(s, t) &= \frac{C_X(s, t)}{\sqrt{D_X(s)D_X(t)}} \\ \rho_{XY}(s, t) &= \frac{C_{XY}(s, t)}{\sqrt{D_X(s)D_Y(t)}} \end{aligned} \quad (41)$$

协方差函数、相关函数及其系数描述的是随机过程在不同时间点处的状态之间的关联程度。

5.3 随机过程分类

(按概率结构特征)

5.3.1 二阶矩过程

设已给实或复过程 $\{X(t), t \in T\}$, 若对 $\forall t \in T$, 均有 $E\{|X_t|^2\} < +\infty$, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程。

5.3.2 独立过程

设过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对 $\forall n > 1 \in \mathbb{Z}^+$ 及任意随机变量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 相互独立，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为独立过程。

5.3.3 正交增量过程

设 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程，若对 $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \in T$ ，有 $E[(X_{t_2} - X_{t_1})(\overline{X_{t_4} - X_{t_3}})] = 0$ ，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为正交增量过程。

5.3.4 独立增量过程（可加过程）

设过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对 $\forall n \geq 2 \in \mathbb{Z}^+$ ，及 $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ ，其增量 $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为独立增量过程（也称为可加过程）。

5.3.5 平稳过程

严平稳过程：对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若对 $\forall n \geq 1$ ， $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 及 $\forall \tau \in \mathbb{R}$ ，当 $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T$ 时， $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 与 $(X_{t_1 + \tau}, X_{t_2 + \tau}, \dots, X_{t_n + \tau})$ 有相同的分布函数，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是严平稳过程。

宽平稳过程：对二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若满足条件：

$$\begin{cases} m_X(t) = E[X(t)] = m_X, \forall t \in T \\ R_X(s, t) = R_X(t - s) = R_X(\tau), \tau = t - s, \forall s, t \in T \end{cases} \quad (42)$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是宽平稳过程。

5.3.6 平稳增量过程

设过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对 $\forall s > t \in T$ 及 $\forall \tau \in \mathbb{R}$ ，随机变量 $X_s - X_t$ 与 $X_{s+\tau} - X_{t+\tau}$ 具有相同的概率分布，称 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个具有平稳增量的过程，简称平稳增量过程。

5.3.7 平稳独立增量过程

既是平稳增量过程，又是独立增量过程。

5.3.8 马尔科夫过程（马氏过程）

给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若其条件分布函数存在，且对 $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ 的 n 个时刻，有

$$P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1\} = P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \quad (43)$$

称 $\{X(t), t \in T\}$ 为马尔科夫过程，简称马氏过程。

5.4 二阶矩过程均方微积分

5.4.1 均方收敛性

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程，有随机变量 $Y \in H$ ， H 为二阶矩空间。若

$$\lim_{t \rightarrow t_0} d[X(t), Y] = \lim_{t \rightarrow t_0} \|X(t) - Y\| = 0 \quad (44)$$

称 $\{X(t), t \in T\}$ 均方收敛于 Y ，记为 $\text{l.i.m}_{t \rightarrow t_0} X(t) = Y$ 。其中， $d[X(t), Y] = \left[E(|X(t) - Y|^2) \right]^{1/2}$

定义为空间 H 上的距离。

5.4.2 均方连续

若二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 满足：

$$\text{l.i.m}_{t \rightarrow t_0} X(t) = X(t_0) \quad (45)$$

称 $\{X(t), t \in T\}$ 在 $t_0 \in T$ 处连续；若对 $\forall t \in T$ 连续，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 均方连续。

5.4.3 均方可导

对二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，对确定的 $t_0 \in T$ ，若 $\exists Y \in H$ 使得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = Y \quad (46)$$

称 $X(t)$ 在 t_0 处可微，称 Y 为 $X(t)$ 在 t_0 处的均方导数，记为 $X'(t_0)$ ，若对 $\forall t \in T$ ， $X(t)$ 都均方可微，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为均方可微过程。

5.4.4 均方可积

5.4.4.1 定积分

设 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程， $f(t), t \in [a, b]$ 为普通函数，任意取分点 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ ， $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ，令 $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta t_k$ ，任意取 $u_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ，若积分

$$\int_a^b f(t) X(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(u_k) X(u_k) \Delta t_k \quad (47)$$

均方极限存在，称均方极限 $\int_a^b f(t) X(t) dt$ 为 $f(t) X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼均方积分。

5.4.4.2 不定积分

设 $\{X(t), t \in T\}$ 在 $[a, b]$ 上均方连续，且有 $Y(t) = \int_a^t X(\tau) d\tau$ ， $t \in [a, b]$ ，称 $\{Y(t), t \in T\}$ 为 $\{X(t), t \in T\}$ 的均方不定积分。

5.5 平稳过程均方遍历性（各态历经性）

设 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为平稳过程，均值为 m_X ，相关函数为 $R_X(\tau)$ ，定义

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) dt \quad (48)$$

称为 $X(t)$ 在 \mathbb{R} 上的时间平均。

$$\langle X(t) \overline{X(t+\tau)} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) \overline{X(t+\tau)} dt \quad (49)$$

称为 $X(t)$ 在 \mathbb{R} 上的时间相关函数。

若 $P\{\langle X(t) \rangle = m_X\} = 1$ ，则称 $X(t)$ 的均值具有均方遍历性；

若 $P\left\{\left\langle X(t)\overline{X(t+\tau)}\right\rangle=R_X(\tau)\right\}=1$ ，则称 $X(t)$ 的相关函数具有各态历经性。

5.6 平稳信号的 PSD 与功率

设 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为均方连续的平稳过程，其在 $[-T, T]$ 上的均方积分为：

$$F_X(\omega, T) = \int_{-T}^{+T} X(t) e^{j\omega t} dt \quad (50)$$

由帕塞瓦尔公式：

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |X(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega \quad (51)$$

两边取均值，并令 $T \rightarrow \infty$ ，则

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E[|X(t)|^2] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} E[|F_X(\omega, T)|^2] \right\} d\omega \quad (52)$$

式 (52) 等号左端为：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E[|X(t)|^2] dt = E[|X(t)|^2] = R_X(0) \quad (53)$$

记式 (52) 等号右端的被积分部分为：

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} E[|F_X(\omega, T)|^2] \right\} \quad (54)$$

$S_X(\omega)$ 被称为平稳信号 $X(t)$ 的功率谱密度 (Power Spectrum Density, PSD)。

所以平稳随机信号 $X(t)$ 的平均功率为

$$E[|X(t)|^2] = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (55)$$

5.7 马尔科夫过程特性

5.7.1 马尔科夫性

马尔科夫性：给定过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若其条件分布函数存在，且对 $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ 的 n 个时刻，有式 (43) 成立。即过程将来的状态只与现在的状态有关，与过去无关。

5.7.2 离散参数马氏链定义

离散参数马氏链：状态空间 E 和参数集 T 均为离散值的马氏过程称为离散参数马氏链。

等价定义（1）

若随机变量序列（序列含义： T 离散， E 非离散） $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,\dots\}$ 离散，若对 $\forall n \geq 0 \in \mathbb{Z}$ 及 $i_0, i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1} \in E$ ，有 $P\{X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n\} > 0$ ，且满足式

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1} | X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n\} = P\{X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n\} \quad (56)$$

称 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 为离散参数马氏链。

等价定义（2）

随机变量序列 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,\dots\}$ 离散，若对任意非负整数 k, l ， $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_l < m$ 以及 $i_{n_1}, i_{n_2}, \dots, i_{n_l}, i_m, i_{m+k} \in E$ ，有：

$$\begin{aligned} P\{X_{m+k}=i_{m+k} | X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \dots, X_{n_l}=i_l, X_m=i_m\} \\ = P\{X_{m+k}=i_{m+k} | X_m=i_m\} \end{aligned} \quad (57)$$

成立。称 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 为离散参数马氏链，简称马氏链。

5.7.3 齐次马氏链

5.7.3.1 定义与分布

（1）定义

若马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 的一步转移概率 $P_{ij}(m)$ 与初始时刻 m 无关，即

$$P_{ij}(m) = P\{X_{m+1}=j | X_m=i\} = P_{ij} \quad (58)$$

称 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 为齐次马氏链。记 $\pi_i(n) = P\{X_n=i\}, i=0,1,2,\dots$ （过程在 n 时刻取值 i 的概率）。

（2）绝对分布与初始分布

称向量 $\pi(n) = [\pi_0(n), \pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_i(n), \dots]$ 为绝对分布；向量 $\pi(n) = [\pi_0(0), \pi_1(0), \pi_2(0), \dots, \pi_i(0), \dots]$ 为初始分布。

（3）遍历性

对齐次马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ ，若它的 n 步转移概率满足： $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \alpha_j, i, j \in E$ ，则称此齐次马氏链具有遍历性。

(4) 极限分布

若对 $\forall j \in E$ ，概率向量 $\Pi = \{\alpha_j, j \in E\}$ 满足： $\alpha_j > 0$ 且 $\sum_{j \in E} \alpha_j = 1$ ，称概率向量 $\Pi = \{\alpha_j, j \in E\}$ 为齐次马氏链的极限分布（最终分布）。

意义：无论从哪一个状态出发，当转移步数 n 充分大后，到达状态 j 的概率都接近于 α_j 。

(5) 平稳分布：

对齐次马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ ，若存在概率向量 $\{v_j, j \in E\}$ 满足条件：

① $v_j \geq 0$ ；② $\sum_{j \in E} v_j = 1$ ；③ $v_j = \sum_{i \in E} v_i P_{ij}$ ，称 $\{v_j, j \in E\}$ 为该马氏链的平稳分布。

5.7.3.2 齐次马氏链状态特征量

(1) 首达概率

自状态 i 出发，经过 n 步，首次到达状态 j 的概率： $f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k < n | X_0 = i\}$ ；

(2) 首返概率

$f_{ii}^{(n)}$ 称为状态 i 的首返概率。

(3) 首达时间

从状态 i 出发，首次到达状态 j 的时间： $T_{ij} = \min\{X_0 = i, X_n = j, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 。

(4) 首返时间

T_{ii} 表示从状态 i 出发，首次返回 i 的时间。

(5) 最终概率

6 证明题

6.1 正态过程

定义：给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若 $\forall n \geq 1 \in \mathbb{Z}^+$ 及 $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ，随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 服从 n 维联合正态分布，即

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n; \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right] \quad (59)$$

其中， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{m} = (m_{t_1}, m_{t_2}, \dots, m_{t_n})^T$ ， $m(t) = EX_t$ ， $\mathbf{C} = (C_{ij})$ ， $i, j = 1, 2, \dots, n$ 为协方差矩阵， $C_{ij} = \text{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j})$ ，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为正态过程。

若 $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ ，对 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ， n 维随机变量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 的协方差阵 $\tilde{\mathbf{C}}$ 的行列式 $|\tilde{\mathbf{C}}| = 0$ ，则称 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ 服从退化正态分布，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为退化（奇异）正态过程。

【例】 随机过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为正态过程，证明 $\forall \tau \geq 0$ ，过程 $\{X(t+\tau) - X(\tau), t \geq 0\}$ 为正态过程。

证明：由 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是正态过程，对 $\forall n \geq 1 \in \mathbb{Z}^+$ ，及 $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ ， $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}, X_\tau)$ 构成 $n+1$ 维正态分布向量，且：

$$\begin{bmatrix} X(t_1+\tau) - X(\tau) \\ X(t_2+\tau) - X(\tau) \\ \vdots \\ X(t_n+\tau) - X(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t_1+\tau) \\ X(t_2+\tau) \\ \vdots \\ X(t_n+\tau) \\ X(\tau) \end{bmatrix} \quad (60)$$

由正态分布的线性变换不变性，得随机向量 $[X(t_1+\tau) - X(\tau) \quad X(t_2+\tau) - X(\tau) \quad \cdots \quad X(t_n+\tau) - X(\tau)]$ 服从 n 维正态分布，故 $\{X(t+\tau) - X(\tau), t \geq 0\}$ 是正态过程。

6.2 维纳过程

6.2.1 维纳过程定义

定义：若过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 满足：

- (1) 是独立增量过程；
- (2) 对 $\forall s, t \geq 0, W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2 |t - s|)$ ($\sigma > 0$)，即增量正态性，平稳性；
- (3) $P\{W_0 = 0\} = 1$ ，零初值性。

称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，当 $\sigma = 1$ 时，称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为标准维纳过程。

【例 1】 证明参数为 σ^2 的维纳过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 均值为 0，方差为 $\sigma^2 |t|$ 。

证明：均值 $m_w(t) = E[W(t)] = E[W(t)] - 0 = E[W(t)] - E[W(0)] = E[W(t) - W(0)] = 0$ ；

方差： $D_w(t) = \sigma^2 |t|$ 。

【例 2】 求证：参数为 σ^2 的维纳过程，协方差函数 $C(s, t)$ 为 $\sigma^2 \min(s, t)$ 。

证明：不妨设 $s > t \geq 0$

$$\begin{aligned} C(s, t) &= R(s, t) = E\{[W(s) - W(t) + W(t)]W(t)\} \\ C(s, t) &= E\{[W(s) - W(t) + W(t)]W(t)\} \\ &= E\{[W(s) - W(t)]W(t) + [W(t)]^2\} \\ &= E\{[W(s) - W(t)][W(t) - W(0)]\} + E\{[W(t)]^2\} \\ &= E\{[W(t)]^2\} = \sigma^2 t \end{aligned}$$

同理，当 $t > s \geq 0$ 时， $C(s, t) = \sigma^2 s$ ，所以维纳过程的协方差函数为

$$C(s, t) = \sigma^2 \min(s, t) \quad (61)$$

6.2.2 维纳过程判别

具备以下条件的随机过程 $\{Y_t, t \geq 0\}$ ，是维纳过程。

- (1) 零初值性， $P\{Y_0 = 0\} = 1$ ；
- (2) 是正态过程；

$$(3) \quad \forall s, t > 0, EY_t = 0, R_Y(s, t) = \sigma^2 \min(s, t) (\sigma > 0)$$

(4) 轨道连续性。

【例】已知 $\{W_t, t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，证明过程 $\{W(t+\tau) - W(\tau), t \geq 0\}$ 对 $\forall \tau \geq 0$ ，是维纳过程。

证明：令 $Y(t) = W(t+\tau) - W(\tau)$ ，由 $\{W_t, t \geq 0\}$ 是维纳过程，则 $P\{W_0 = 0\} = 1$ ，则 $P\{Y_0 = 0\} = 1$ ，且 $\{Y_t, t \geq 0\}$ 是正态过程（维纳过程是正态过程）， $\forall s, t > 0, EY_t = 0$ 。 $\{Y_t, t \geq 0\}$ 的相关函数为：

$$R_Y(s, t) = E\{[W(s+\tau) - W(\tau)][W(t+\tau) - W(\tau)]\} \quad (62)$$

不妨设， $s > t > 0$ ，那么

$$R_Y(s, t) = E\{[W(s+\tau)W(t+\tau)]\} - E\{W(s+\tau)W(\tau)\} - E\{W(t+\tau)W(\tau)\} + E\{[W(\tau)]^2\}, \text{ 所以}$$

$$R_Y(s, t) = \sigma^2(t + \tau - \tau - \tau + \tau) = \sigma^2 t;$$

同理，当 $t > s > 0$ 时， $R_Y(s, t) = \sigma^2 s$ ，即 $R_Y(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$ ，又过程 $\{Y_t, t \geq 0\}$ 轨道连续，所以过程 $\{W(t+\tau) - W(\tau), t \geq 0\}$ 是维纳过程。

6.3 泊松过程

6.3.1 泊松过程定义

设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足：

(1) 是独立增量过程；

(2) 对 $\forall 0 \leq s < t, N(t) - N(s) \sim P[\lambda(t-s)]$ ，即 $P\{N(t) - N(s) = k\} = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$ ；

(3) 零初值性 $P\{N(0) = 0\} = 1$ 。

则称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的齐次泊松过程。

6.3.2 泊松过程的等价定义

泊松随机点发生的稀有性：在极短的时间 Δt 内，以下等式成立：

$$(1) \quad P\{N(\Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + O(\Delta t);$$

$$(2) P\{N(\Delta t) \geq 2\} = O(\Delta t);$$

$$(3) \text{ 显然, } P\{N(\Delta t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t - O(\Delta t)$$

【例】试证明满足以下条件的计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，在时间间隔 $(t_0, t_0 + t]$ 内，事件出现 n 次

的概率为： $P\{N(t_0 + t) - N(t_0) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ 。

(1) 是平稳独立增量过程；

$$(2) P\{N(h) = 1\} = \lambda h + O(h), \lambda > 0;$$

$$(3) P\{N(h) \geq 2\} = O(h)$$

证明：记 $P_n(t) = P\{N(t) = n\} = P\{N(t) - N(0) = n\} = P\{N(t+h) - N(h) = n\}$ （增量平稳性）。

由条件 (1) ~ (3)，过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 在 $t+h$ 内计数为 0 的概率：

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\} P\{N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &\quad (\text{增量独立性, 零初值性}) \end{aligned}$$

则

$$P_0(t+h) = P_0(t)[1 - \lambda h - O(h)] \quad (63)$$

式 (63) 等号两边同时除以 h ，使 $h \rightarrow 0$ ，并取极限得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -\lambda P_0(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} P_0(t) \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{d[P_0(t)]}{dt} &= -\lambda P_0(t) \\ P_0(0) &= 1 \end{aligned} \right. \quad (64) \end{aligned}$$

解式 (64) 中的微分方程，得到

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0 \quad (65)$$

当 $n \geq 1$ 时，根据全概率公式，有

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) &= P\{N(t+h)=n\} \\
&= P\{N(t+h)=n, N(h)=0\} + P\{N(t+h)=n, N(h)=1\} + \dots + P\{N(t+h)=n, N(h)=n\} \\
&= P\{N(t+h)-N(h)=n-0, N(h)=0\} + P\{N(t+h)-N(h)=n-1, N(h)=1\} \\
&\quad + \dots + P\{N(t+h)-N(h)=n-n, N(h)=n\} \\
&= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + \dots + P_0(t)P_n(h) \\
&= (1-\lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + O(h)
\end{aligned}$$

则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} P_0(t)$, 即

$$\frac{d[P_n(t)]}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad (66)$$

式 (66) 两边同时乘以 $e^{\lambda t}$ 可得

$$\frac{d[e^{\lambda t} P_n(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad (67)$$

当 $n=1$ 时, 有 $\begin{cases} \frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_1(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$, 则 $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$;

运用数学归纳法可以证明

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n \geq 0 \quad (68)$$

即 $P\{N(t_0+t)-N(t_0)=n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ 得证。

6.3.3 泊松过程的几个概念

(1) 等待时间 (到达时间); (2) 时间间隔;

概念解释可借助下图:

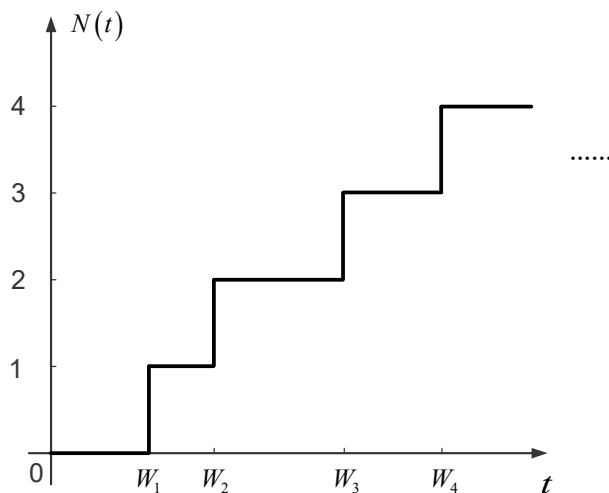


图 6

W_n 为事件 A 第 n 次出现需等待的时间, T_n 是事件 A 第 $n-1$ 次出现与第 n 次出现的时间间隔。

【例 1】 设 $N_1(t)$ 、 $N_2(t)$ 分别是参数为 λ_1 、 λ_2 的相互独立的泊松过程, 令 $X(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0$; $Y(t) = N_1(t) - N_2(t), t \geq 0$ 。讨论 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 是否为泊松过程, 并说明理由。

答: $X(t)$ 是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程, $Y(t)$ 不是泊松过程。

证明: (1) 因为 $N_1(t)$ 、 $N_2(t)$ 分别是参数为 λ_1 、 λ_2 的独立泊松过程, 由泊松分布的可加性可知, $X(t)$ 是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程;

(2) 过程 $Y(t) = N_1(t) - N_2(t), t \geq 0$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}\Phi_Y(t, \omega) &= E\left\{e^{j\omega Y(t)}\right\} = E\left\{e^{j\omega[N_1(t) - N_2(t)]}\right\} = E\left\{e^{j\omega N_1(t)} \cdot e^{-j\omega N_2(t)}\right\} = E\left[\left[e^{j\omega N_1(t)}\right]\right] \cdot E\left[\left[e^{-j\omega N_2(t)}\right]\right] \\ &= \exp\left[\lambda_1 t (e^{j\omega} - 1)\right] \cdot \exp\left[\lambda_2 t (e^{-j\omega} - 1)\right] \\ &= \exp\left[\lambda_1 t e^{j\omega} + \lambda_2 t e^{-j\omega} - (\lambda_1 + \lambda_2)t\right]\end{aligned}$$

根据特征函数的反演公式及唯一性定理知, 对 $\forall t \geq 0$, $Y(t)$ 不服从泊松分布, 故 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 不是泊松过程, 事实上, $\{Y(t), t \geq 0\}$ 可能取到负整数值, 不是计数过程, 自然不是泊松过程。

【例 2】 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, 事件 A 在 $(0, \tau)$ 时间内出现 n 次, 证明:

(1) 条件概率 $P\{N(s)=k|N(\tau)=n\}=C_n^k\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}$, 其中 $0 < k < n, 0 < s < \tau$;

(2) 条件概率 $P\{N(\tau)=n|N(s)=k\}=\frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(\tau-s)}$

证明: (1)

$$\begin{aligned} P\{N(s)=k|N(\tau)=n\} &= \frac{P\{N(s)=k, N(\tau)=n\}}{P\{N(\tau)=n\}} = \frac{P\{N(s)=k, N(\tau-s)=n-k\}}{P\{N(\tau)=n\}} \\ &= \frac{P\{N(s)=k\}P\{N(\tau-s)=n-k\}}{P\{N(\tau)=n\}} = \frac{n!}{k!} \frac{(\lambda s)^k}{(\lambda \tau)^n} e^{\lambda(\tau-s)} \cdot \frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(\tau-s)} \\ &= C_n^k \left(\frac{s}{\tau}\right)^k \left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

(2) $P\{N(\tau)=n|N(s)=k\}=P\{N(\tau)-N(s)=n-k|N(s)=k\}$, 由泊松过程的增量独立性

$$P\{N(\tau)=n|N(s)=k\}=P\{N(\tau)-N(s)=n-k\}=\frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(\tau-s)}$$

【例 3】设 $N_1(t) \sim P(\lambda_1 t)$, $N_2(t) \sim P(\lambda_2 t)$, 且 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 相互独立。

(1) 试证明: $P\{N_2(t)=k|N_1(t)+N_2(t)=n\}=C_n^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$;

(2) 计算均值 $E\{N_2(t)=k|N_1(t)+N_2(t)=n\}$ 。

$$\begin{aligned} P\{N_2(t)=k|N_1(t)+N_2(t)=n\} &= \frac{P\{N_2(t)=k, N_1(t)+N_2(t)=n\}}{P\{N_1(t)+N_2(t)=n\}} \\ &= \frac{P\{N_2(t)=k, N_1(t)=n-k\}}{P\{N_1(t)+N_2(t)=n\}} = \frac{P\{N_2(t)=k\}P\{N_1(t)=n-k\}}{P\{N_1(t)+N_2(t)=n\}} \\ \text{证明: } &= \frac{(\lambda_1 t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_1 t} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t} \cdot \frac{n!}{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n} \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(\lambda_2 t)^k (\lambda_1 t)^{n-k}}{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n} \\ &= C_n^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

由上所述, $P\{N_2(t)=k|N_1(t)+N_2(t)=n\}$ 满足二项分布, 所以

$$E\{N_2(t)=k|N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{n\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}。$$

6.4 均方微积分

【例 1】 已知 $\{X(t), t \in T\}$ 是均方连续的实平稳过程，定义随机变量 $Y = \int_a^b X(t) dt$ ($b \geq a$)，证明 Y 的二阶矩 EY^2 存在，且为 $2 \int_0^{b-a} [(b-a)-\tau] R_X(\tau) d\tau$ ，其中 $R_X(\tau)$ 是 $\{X(t), t \in T\}$ 的相关函数。

证明：

$$\begin{aligned} EY^2 &= E \left\{ \int_a^b X(t) dt \int_a^b X(s) ds \right\} = E \left\{ \int_a^b \int_a^b X(s) X(t) ds dt \right\} \\ &= \int_a^b \int_a^b E[X(s) X(t)] ds dt = \int_a^b \int_a^b R_X(s-t) ds dt \end{aligned} \quad (69)$$

令 $\begin{cases} t = \tau_1 \\ s - t = \tau_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \tau_1 \\ s = \tau_1 + \tau_2 \end{cases}$ ，则雅克比行列式 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial \tau_1} & \frac{\partial t}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial s}{\partial \tau_1} & \frac{\partial s}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ 。积分区域由

$D = \{(t, s) | a \leq t \leq b, a \leq s \leq b\}$ 变为 $G = \{(\tau_1, \tau_2) | a \leq \tau_1 \leq b, a \leq \tau_1 + \tau_2 \leq b\}$ ，则式 (69) 变为

$$EY^2 = \iint_G |J| R_X(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \iint_G R_X(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (70)$$

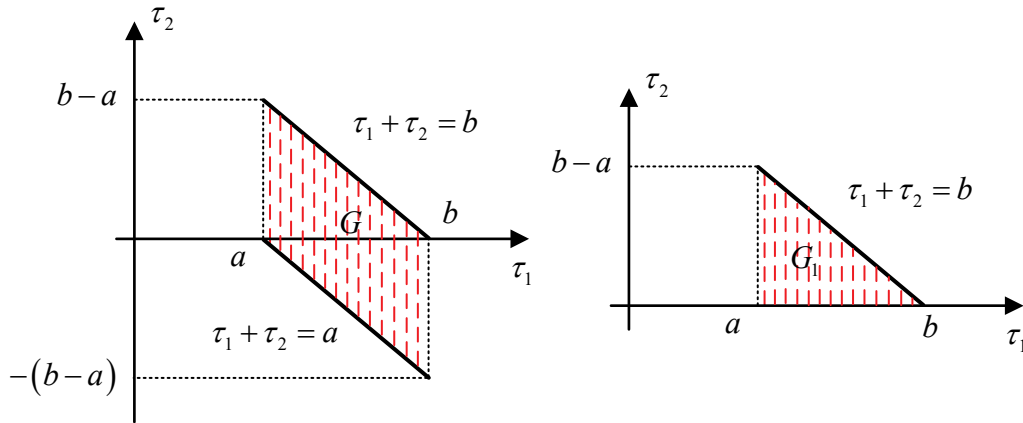


图 7

由于 $\{X(t), t \in T\}$ 是实过程，所以 $R_X(\tau_2)$ 为偶对称且只与 τ_2 有关，所以在区域 G 的积分可以变换到 G_2 ，故式 (70) 变为

$$EY^2 = 2 \iint_{G_1} R_X(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (71)$$

式 (71) 计算如下

$$\begin{aligned}
EY^2 &= 2 \iint_{G_1} R_X(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = 2 \int_0^{b-a} R_X(\tau_2) d\tau_2 \left[\int_a^{b-\tau_2} d\tau_1 \right] \\
&= 2 \int_0^{b-a} (b-a-\tau_2) R_X(\tau_2) d\tau_2 = 2 \int_0^{b-a} (b-a-\tau) R_X(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

证毕。

【例 2】已知 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是均方连续的平稳过程，其自相关函数 $R_X(\tau)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < +\infty$ ，试证明其功率谱密度 $S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} E \left[|F_X(\omega, T)|^2 \right] \right\}$ 是 $R_X(\tau)$ 的傅里叶

变换，即 $S_X(\omega)$ 满足：

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\
R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega
\end{aligned} \tag{72}$$

其中， $F_X(\omega, T) = \int_{-T}^{+T} X(t) e^{j\omega t} dt$ 。

证明：仅需证前式。由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < +\infty$ ，故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$ 存在。令

$$S_X(T, \omega) = \frac{1}{2T} E \left\{ \left| \int_{-T}^{+T} X(t) e^{j\omega t} dt \right|^2 \right\}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
S_X(T, \omega) &= \frac{1}{2T} E \left\{ \left[\int_{-T}^{+T} X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \right] \left[\int_{-T}^{+T} \overline{X(t_2)} e^{j\omega t_2} dt_2 \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} E \left[X(t_1) \overline{X(t_2)} \right] e^{j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

令自相关函数 $R_X(\tau) = E \left\{ X(t_1) \overline{X(t_2)} \right\} = R(t_1 - t_2)$ ，那么

$$S_X(T, \omega) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} R(t_1 - t_2) e^{j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2, \quad \text{令} \quad \begin{cases} t_1 - t_2 = \tau_1 \\ t_1 + t_2 = \tau_2 \end{cases}, \quad \text{则} \quad \begin{cases} t_1 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \\ t_2 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \end{cases}, \quad \text{有}$$

$$S_X(T, \omega) = \frac{1}{2T} \iint_G |J| R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 d\tau_2, \quad \text{其中行列式 } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial t_1}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial t_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial t_2}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2, \quad \text{积分区}$$

域如下图所示：

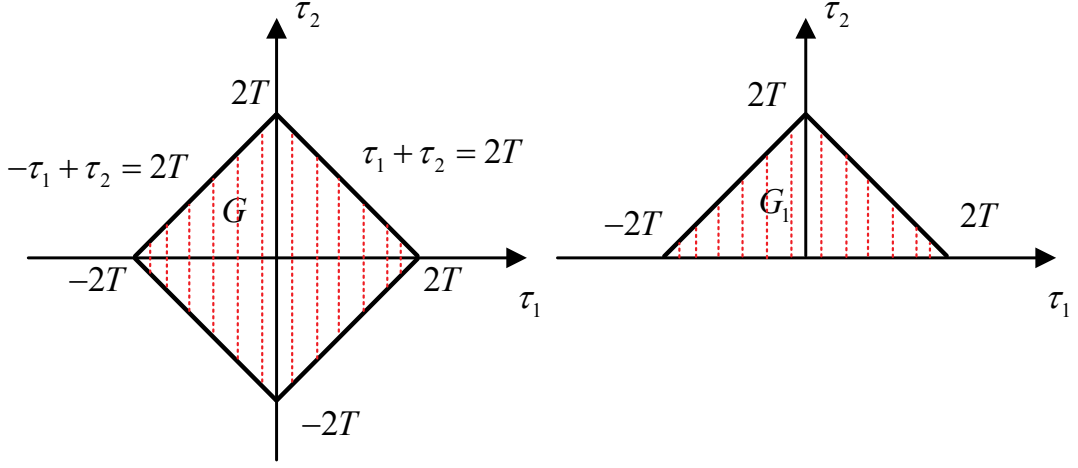


图 8

所以

$$\begin{aligned}
 S_X(T, \omega) &= \frac{1}{2T} \frac{1}{2} \iint_G R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \frac{1}{2T} \iint_{G_1} R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{+2T} \left(\int_0^{|\tau_1|+2T} d\tau_2 \right) R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \\
 &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{+2T} (|\tau_1| + 2T) R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \\
 &= \int_{-2T}^{+2T} R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 + Z(T, \omega)
 \end{aligned}$$

其中 $Z(T, \omega) = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{+2T} |\tau_1| R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1$ ，可以证明 $\lim_{T \rightarrow +\infty} Z(T, \omega) = 0$ ，解释如下：

$$\begin{aligned}
 Z(T, \omega) &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{+2T} |\tau_1| R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \\
 &= \frac{1}{2T} \left[\int_{-2T}^0 (-\tau_1) R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 + \int_0^{2T} \tau_1 R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \right] \\
 &= \frac{1}{2T} \left[\int_0^{2T} \tau_1 R_X(-\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 + \int_0^{2T} \tau_1 R_X(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \right] \\
 &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} [\tau R_X(-\tau) e^{j\omega\tau} + \tau R_X(\tau) e^{j\omega\tau}] d\tau
 \end{aligned}$$

由平稳过程相关函数的性质 $R_X(-\tau) = \overline{R_X(\tau)}$ ，所以 $Z(T, \omega)$ 进一步简化为

$$Z(T, \omega) = \frac{1}{T} \int_0^{2T} \tau \cdot \text{Re}[R_X(\tau) e^{j\omega\tau}] d\tau$$

由 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < +\infty$ 可知, 函数 $|R_X(\tau)|$ 在 $\tau \rightarrow \infty$ 时, 积分收敛, 且 $R_X(0)$ 为有限值, 则 $|R_X(\tau)|$ 含有负指数表达式, 那么 $\lim_{T \rightarrow +\infty} Z(T, \omega) = 0$ 。

故 $S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} S_X(T, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$, 即 $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$, 证毕。

6.5 平稳信号通过 LTI 系统

【例】 假设系统 **S** 为线性时不变 (LTI) 系统, 单位冲激响应为 $h(t)$, 输入一平稳过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, 均值为 m_X , 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < +\infty$ 。试证明如下结论:

- (1) 输出 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为平稳过程;
- (2) $Y(t)$ 的 PSD (功率谱密度) 为 $S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega)$;
- (3) $X(t), Y(t)$ 联合平稳。

证明:

(1) 由 **S** 为 LTI 系统, 则 $Y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau$, $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值 $m_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E[h(\tau) X(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) E[X(t-\tau)] d\tau = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$; 定义 $X(t), Y(t)$ 的自相关函数分别为: $R_X(\tau) = E[X(t+\tau) \overline{X(t)}]$, $R_Y(t+\tau, t) = E[Y(t+\tau) \overline{Y(t)}]$, 则 (下面的变换中作了一个关于 v 的换元)

$$\begin{aligned}
 R_Y(t+\tau, t) &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) X(t+\tau-u) du \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(v) X(t-v)} dv \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(v)} E[X(t+\tau-u) \overline{X(t-v)}] dudv \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \overline{h(-v)} R_X(\tau-v-u) dudv \\
 &= h(\tau) * \overline{h(-\tau)} * R_X(\tau) \\
 &= R_Y(\tau)
 \end{aligned}$$

因此, 输出信号 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是平稳过程。

- (2) 由 $R_Y(\tau) = h(\tau) * \overline{h(-\tau)} * R_X(\tau)$, $S_Y(\omega) = S_X(\omega) \overline{H(j\omega)} H(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega)$;
- (3) $X(t), Y(t)$ 的互相关函数

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t+\tau, t) &= E[X(t+\tau)\overline{Y(t)}] = E\left[X(t+\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)X(t-v)}dv\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}E[X(t+\tau)]\overline{X(t-v)}dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}R_X(\tau+v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(-v)}R_X(\tau-v)dv \\
&= R_X(\tau)*\overline{h(-\tau)} = R_{XY}(\tau)
\end{aligned}$$

所以 $X(t), Y(t)$ 联合平稳, 且互谱密度 $S_{XY}(\omega) = S_X(\omega)\overline{H(j\omega)}$ 。

6.6 马尔科夫过程

6.6.1 C-K 方程

【例】简述齐次马氏链 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 的转移概率 $P_{ij}(m)$ 所满足的 **C-K** 方程并证明之。

答：离散参数马氏链满足的 **C-K** 方程为：对 $\forall k, l \geq 0 \in \mathbb{Z}^+$ ，有以下概率关系成立：

$$P_{ij}^{(k+l)}(m) = \sum_{r \in E} P_{ir}^{(k)}(m) P_{rj}^{(l)}(m+k) \quad (73)$$

且 $P_{ij}^{(k+l)}(m) = P\{X(m+k+l)=j | X(m)=i\}$ 。 **C-K** 方程证明如下：

由全概率公式

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(k+l)}(m) &= P\{X(m+k+l)=j, \Omega | X(m)=i\} \\
&= \sum_{r \in E} P\{X(m+k+l)=j, X(m+k)=r | X(m)=i\} \\
&= \sum_{r \in E} \frac{P\{X(m+k+l)=j, X(m+k)=r, X(m)=i\}}{P\{X(m)=i\}} \\
&= \sum_{r \in E} P\{X(m+k+l)=j | X(m+k)=r, X(m)=i\} \cdot P\{X(m+k)=r | X(m)=i\}
\end{aligned}$$

根据马尔科夫性，则

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(k+l)}(m) &= P\{X(m+k+l)=j, \Omega | X(m)=i\} \\
&= \sum_{r \in E} P\{X(m+k+l)=j, X(m+k)=r | X(m)=i\} \\
&= \sum_{r \in E} \frac{P\{X(m+k+l)=j, X(m+k)=r, X(m)=i\}}{P\{X(m)=i\}} \\
&= \sum_{r \in E} P\{X(m+k+l)=j | X(m+k)=r\} \cdot P\{X(m+k)=r | X(m)=i\} \\
&= \sum_{r \in E} P_{ir}^{(k)}(m) P_{rj}^{(l)}(m+k)
\end{aligned}$$

证毕。

6.6.2 齐次马氏链状态分类

一些概念：

(1-1) n 步首达概率 ($n \geq 1$)

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k < n | X_0 = i\}$$

当 $n=0$ 时, $f_{ij}^{(0)}$ 无定义, 可以补充定义为 $f_{ij}^{(0)} = 0$;

(1-2) n 步首返概率 ($n \geq 1$)

$$f_{ii}^{(n)} = P\{X_n = i, X_k \neq i, 1 \leq k < n | X_0 = i\}$$

当 $n=0$ 时, $f_{ii}^{(0)}$ 无定义, 可以补充定义为 $f_{ii}^{(0)} = 0$;

(2-1) 最终 (迟早) 到达概率

$$f_{ij} = \sum_{1 \leq n < \infty} f_{ij}^{(n)};$$

(2-1) 最终 (迟早) 返回概率

$$f_{ii} = \sum_{1 \leq n < \infty} f_{ii}^{(n)};$$

当 $f_{ii} = 1$ 时, 称 i 为常反态; 当 $f_{ii} < 1$ 时, 称 i 为非常反态。

(3-1) 首达时间

$$T_{ij} = \min\{X_0 = i, X_n = j, n \geq 1 \in \mathbb{Z}^+\}$$

(3-2) 首返时间

$$T_{ii} = \min\{X_0 = i, X_n = i, n \geq 1 \in \mathbb{Z}^+\}$$

【例 1】 证明对 $\forall i, j \in E$ 及 $\forall n \geq 1$, n 步转移概率 $P_{ij}^{(n)}$ 与 n 步首达概率 $f_{ij}^{(n)}$ 有如下关系成立:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} P_{ij}^{(n-m)} \quad (74)$$

证明:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= P\{X(n)=j|X(0)=i\} \\
&= \frac{1}{P\{X(0)=i\}} P\{X(n)=j, X(0)=i\} \\
&= \frac{1}{P\{X(0)=i\}} P\left\{X(n)=j, X(0)=i, \bigcup_{m=1}^{\infty} T_{ij}=m\right\} \\
&= \frac{1}{P\{X(0)=i\}} \left[P\left\{X(n)=j, X(0)=i, \bigcup_{m=1}^n T_{ij}=m\right\} + P\left\{X(n)=j, X(0)=i, \bigcup_{m=n+1}^{\infty} T_{ij}=m\right\} \right] \\
&= \frac{1}{P\{X(0)=i\}} P\left\{X(n)=j, X(0)=i, \bigcup_{m=1}^n T_{ij}=m\right\} \\
&= \frac{1}{P\{X(0)=i\}} \sum_{m=1}^n P\{X(n)=j, X(0)=i, T_{ij}=m\}
\end{aligned}$$

由 $f_{ij}^{(n)}$ 的定义 $f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij}=n|X(0)=i\}$, 则

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{P\{X(0)=i\}} \sum_{m=1}^n P\{T_{ij}=m, X(0)=i\} P\{X(n)=j|T_{ij}=m, X(0)=i\} \\
&= \sum_{m=1}^n P\{T_{ij}=m|X(0)=i\} P\{X(n)=j|X(0)=i, X(m)=j, X(k) \neq j, 1 \leq k < m \leq n\} \\
&= \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} \cdot P\{X(n)=j|X(m)=j, m \leq n\} \\
&= \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} P_{jj}^{(n-m)}
\end{aligned}$$

即 $P_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} P_{jj}^{(n-m)}$, 证毕。

6.6.3 齐次马氏链状态周期

状态周期定义:

最大公约数 (GCD) 为状态 i 的周期, 记为 d_i : $d_i = \text{GCD}\{n: n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$, 并且有如下概念:

- (1) $d_i \geq 2$, 称状态 i 是周期的;
- (2) $d_i = 1$, 称 i 非周期;
- (3) 若为空集, 则无周期定义。

【例 1】 已知齐次马氏链的状态 i 周期定义为 $d_i = \text{GCD}\{n: P_{ii}^{(n)} > 0\}$, 试证明可等价定义为

$$d_i = \text{GCD}\{n: f_{ii}^{(n)} > 0\}。$$

证明：只要证明定义 $\text{GCD}\{n: n \geq 1, f_{ii}^{(n)} > 0\}$ 是定义 $\text{GCD}\{n: n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的充分条件即可。

$$\text{根据 } P_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} P_{jj}^{(n-m)} = f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)} P_{jj}^{(n-2)} + \dots + f_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(0)}, \text{ 则 } P_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n)} P_{jj}^{(0)} = f_{ij}^{(n)}。$$

当 $i = j$ 时， $P_{ii}^{(n)} \geq f_{ii}^{(n)}$ ，所以 $\forall n \geq 1$ ，当 $f_{ii}^{(n)} > 0$ 时，必定有 $P_{ii}^{(n)} \geq f_{ii}^{(n)} > 0$ 成立。即 $f_{ii}^{(n)} > 0 \Rightarrow P_{ii}^{(n)} > 0$ 。故 $d_i = \text{GCD}\{n: f_{ii}^{(n)} > 0\}$ 是 $d_i = \text{GCD}\{n: P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的一个等价定义。

【例 2】 试证明以下结论成立：

(1) 对于齐次马氏链状态 i ，定义关系式 $Y(n) = \begin{cases} 1, X(n) = i \\ 0, X(n) \neq i \end{cases}$ ，即当返回状态 i 时， $Y(n)$

计 1，否则计 0。证明状态 i 的平均返回次数为 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ ；

(2) 利用矩母函数这一理论工具，证明返回次数 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ 与终返概率的关系为

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} + 1 = \frac{1}{1 - f_{ii}} \quad (75)$$

证明：状态 i 的返回次数记为 Y ，则 $Y = \sum_{n=1}^{+\infty} Y(n)$ ，平均值

$$\begin{aligned} EY &= E\left[\sum_{n=1}^{+\infty} Y(n) \mid X(0) = i\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} E[Y(n) \mid X(0) = i] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\{Y(n) = 1 \mid X(0) = i\} = \sum_{n=1}^{+\infty} P\{X(n) = i \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} \end{aligned}$$

所以齐次马氏链状态 i 的平均返回次数为 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ 。

$\{P_{ij}^{(n)}, n \geq 1\}$ 的母函数为： $P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} s^n$ ， $\{f_{ij}^{(n)}, n \geq 1\}$ 的母函数为：

$$F_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{ij}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_{ij}^{(n)} s^n，\text{ 将式 (74) 代入 } P_{ij}(s) \text{ 得： } P_{ij}(s) = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} P_{jj}^{(n-m)} s^n，\text{ 那么}$$

(下图阴影部分是求和区域)

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s) &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} s^m P_{jj}^{(n-m)} s^{n-m} \\
&= \delta_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f_{ij}^{(m)} s^m P_{jj}^{(n-m)} s^{n-m} \\
&= \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s)
\end{aligned}$$

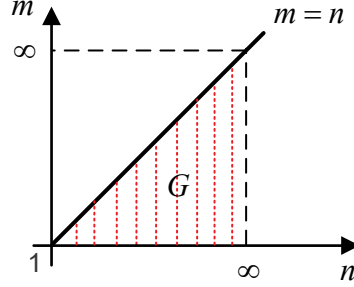


图 9

当 $j=i$ 时, $P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s)P_{ii}(s)$, 那么 $P_{ii}(1) = 1 + F_{ii}(1)P_{ii}(1)$, 又 $P_{ii}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$,

$F_{ii}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = 1 + f_{ii} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$, 状态 i 的返回次数

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} + 1 = \frac{1}{1-f_{ii}}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} - 1 \quad (76)$$

当 $f_{ii}=1$ 时, 常返态的返回次数 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$; 当 $f_{ii} < 1$ 时, 非常返态的返回次数

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} - 1 > 0$ 且有限。

证毕。

7 计算题

(当涉及马氏链状态时, 均为有限)

7.1 马氏链状态空间

一个状态空间为有限集合的马氏链 (有限马氏链), 其性质如下:

(1) 所有非常返态组成的集合不可能是闭集;

(2) 无零常返态;

(3) 必有正常返态;

(4) 状态空间可分解为: $E = N + C_1 + C_2 + \dots + C_k$, 其中 N 为非常返态集, $C_i (1 \leq i \leq k)$ 为互不相交的不可约正常返闭集。

【例 1】有限状态马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 的状态转移图如下:

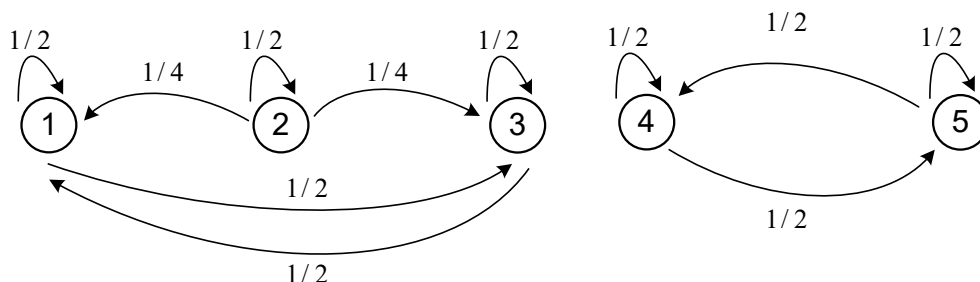


图 10

(1) 对状态进行分类, 确定各状态的类型及周期;

(2) 写出概率转移矩阵 P ;

解: (1) 状态空间可分解为 $E = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}$, 所有状态均为正常返态; 由 $f_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0$, 状态

1, 2, 3 的周期均为 1; 由 $f_{44}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0$, 状态 4, 5 的周期均为 1.

$$(2) P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

【例 2】设有限状态马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 状态空间为 $S = \{1, 2, \dots, 6\}$, 转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(1) 画出状态转移图；(2) 试分解此链并指出各状态类型及周期。

解：(1)

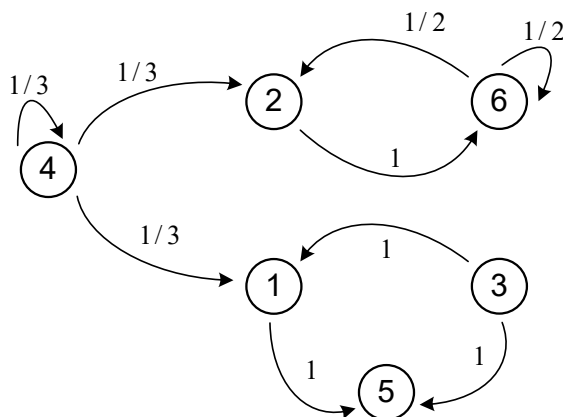


图 11

(2) 1 为正常返态，周期为 3，含 1 的基本常返闭集为 $C_1 = \{1, 3, 5\}$ ；2 为正常返态，周期为 1，含 2 的基本常返闭集为 $C_2 = \{2, 6\}$ ；4 为非常返态，周期为 1。于是状态空间可分解为 $S = \{4\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{2, 6\}$ 。

【例 3】设齐次马氏链的状态空间 $E = \{1, 2, \dots, 6\}$ ，转移矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ，

画出状态转移图并讨论状态空间的分解。

解：由上图可得， $f_{11}^{(3)} = 1$ ， $f_{11}^{(n)} = 0, n \neq 3$ ，所以 $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 1$ ， $\mu_{11} = 3$ ，故状态 1 为正常返

态，周期为 3，含 1 的基本常返闭集 $C_1 = \{1, 3, 5\}$ ；同理状态 6 也为正常返态， $f_{66}^{(1)} = \frac{1}{2}$ ，故为

非周期的，即遍历态，含 6 的基本常返闭集 $C_2 = \{2, 6\}$ ；且 $f_{44}^{(n)} = \begin{cases} 0, n \neq 1 \\ 1/3, n=1 \end{cases}$ ，故

$f_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{44}^{(n)} = 1/3 < 1$ ，所以状态 4 为非常返态，且不是周期的。

【例 4】 已知齐次马氏链状态转移图如下：

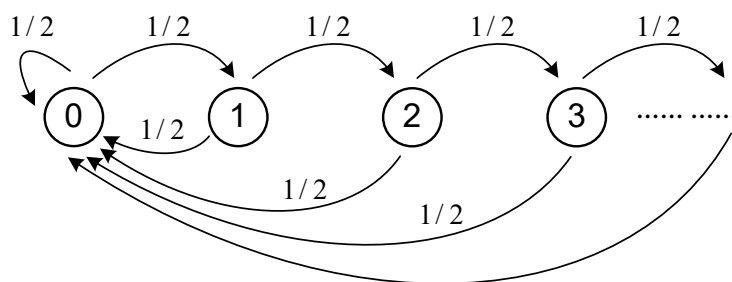


图 12

(1) 写出转移概率矩阵 P ；(2) 讨论状态性质并分类；

解：(1)

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \\ 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ & & & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

(2) 根据状态转移图可以得出，此链所有状态均是互通的，仅考虑状态 0。 $f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}$ ， $f_{00}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ，

$f_{00}^{(3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ，... $f_{00}^{(4)} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ ，所以终返概率为 $f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ 。因此，此链所有状态均是非周

期正常返态，即遍历态，该马氏链为不可约遍历的齐次马氏链。

【例 5】 设齐次马氏链 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ 的状态空间为 $E = \{1, 2, \dots, 6\}$ ，状态转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 画出状态转移图；(2) 讨论各状态性质；(3) 分解状态空间。

解：(1)

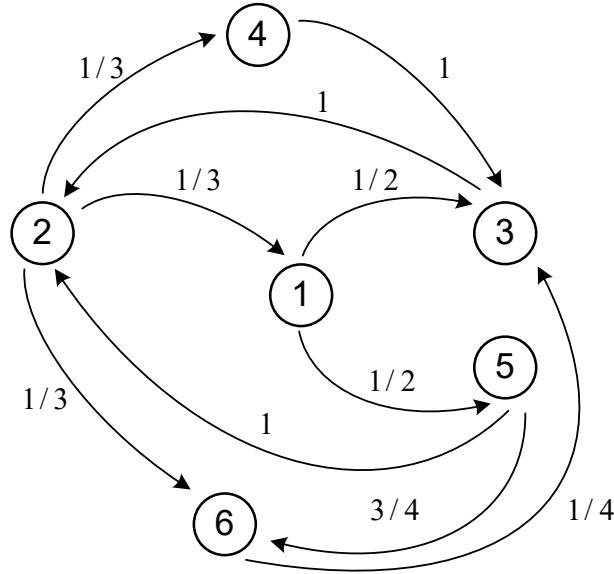


图 13

(2) 由状态转移图可以看出，此链所有状态都是互通的，仅讨论状态 4.

$f_{44}^{(1)} = f_{44}^{(2)} = 0$, $f_{44}^{(3)} = 1/3$; $f_{44}^{(4)} = f_{44}^{(5)} = 0$, $f_{44}^{(6)} \neq 0$; $f_{44}^{(7)} = f_{44}^{(8)} = 0$, $f_{44}^{(9)} \neq 0$, 即 $f_{44}^{(3n)} \neq 0, n \geq 1$ 。

所有状态均是周期为 3 的正常返态。

(3) 整个状态空间是一个正常返态构成的不可约闭集。

7.2 C-K 方程的矩阵形式

齐次马氏链的转移概率与初始时刻 m 无关，式 (73) 所述 C-K 方程简化为

$$P_{ij}^{(k+l)} = \sum_{r \in E} P_{ir}^{(k)} P_{rj}^{(l)} \quad (77)$$

那么 $P_{ij}^{(k+l)} = P_{i1}^{(k)} P_{1j}^{(l)} + P_{i2}^{(k)} P_{2j}^{(l)} + \dots + P_{in}^{(k)} P_{nj}^{(l)} = \begin{bmatrix} P_{i1}^{(k)} & P_{i2}^{(k)} & \dots & P_{in}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1j}^{(l)} & P_{2j}^{(l)} & \dots & P_{nj}^{(l)} \end{bmatrix}^T$

假设状态空间为 $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，则概率转移矩阵为 $P^{(k+l)} = [P_{ij}^{(k+l)}], 1 \leq i, j \leq n$ ，且

$$\mathbf{P}^{(k+l)} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(k)} & P_{12}^{(k)} & \cdots & P_{1n}^{(k)} \\ P_{21}^{(k)} & P_{22}^{(k)} & \cdots & P_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}^{(k)} & P_{n2}^{(k)} & \cdots & P_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11}^{(l)} & P_{12}^{(l)} & \cdots & P_{1n}^{(l)} \\ P_{21}^{(l)} & P_{22}^{(l)} & \cdots & P_{2n}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}^{(l)} & P_{n2}^{(l)} & \cdots & P_{nn}^{(l)} \end{pmatrix}$$

即矩阵形式的 C-K 方程为

$$\mathbf{P}^{(k+l)} = \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{P}^{(l)}, k, l \in \mathbb{Z}^+ \quad (78)$$

7.3 概率分布的矩阵形式

如之前所述，假设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间为 $E = \{1,2,3,\dots,N\}$ ，称向量 $\pi(n) = [\pi_0(n), \pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_N(n), \dots]$ 为绝对分布；称向量 $\pi(n) = [\pi_0(0), \pi_1(0), \pi_2(0), \dots, \pi_N(0), \dots]$ 为初始分布。绝对分布与转移概率有如下关系：

$$\pi_j(n) = \sum_{r \in E} \pi_r(0) P_{rj}^{(n)} \quad (79)$$

证明如下：

$$\begin{aligned} \pi_j(n) &= P\{X(n) = j\} \\ &= P\{X(n) = j, X(0) = 1\} + P\{X(n) = j, X(0) = 2\} + \dots + P\{X(n) = j, X(0) = N\} \\ &= P\{X(n) = j | X(0) = 1\} P\{X(0) = 1\} + P\{X(n) = j | X(0) = 2\} P\{X(0) = 2\} \\ &\quad + \dots + P\{X(n) = j | X(0) = N\} P\{X(0) = N\} \\ &= \sum_{r \in E} \pi_r(0) P_{rj}^{(n)} \end{aligned}$$

式 (79) 的等效矩阵形式为

$$\vec{\pi}(n) = \vec{\pi}(0) \mathbf{P}^{(n)} \quad (80)$$

其中 $\vec{\pi}(n) = [\pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_N(n)]^T$ ； $\vec{\pi}(0) = [\pi_1(0), \pi_2(0), \dots, \pi_N(0)]^T$ ； $\mathbf{P}^{(n)}$ 为 n 阶概率转移矩阵。

7.4 概率转移矩阵

7.4.1 理论基础

（这一节涉及矩阵的特征值，特征向量，先阐述相关的代数理论基础）

假设一有 3 个未定元的二次型函数为：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (81)$$

其中矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵。

考虑将二次型函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 转化为 $f(y_1, y_2, y_3)$ ，使得

$$f(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{O} & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (82)$$

将式 (81) 演变成式 (82) 的理论分析：

对任意矩阵 \mathbf{A} ，若 \exists 可逆阵 \mathbf{D} ，使 $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{A}}$ ，称 \mathbf{A} 相似于 $\tilde{\mathbf{A}}$ ，记为 $\mathbf{A} \sim \tilde{\mathbf{A}}$ ，假设矩阵 $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ ， $\mathbf{d}_i \neq \mathbf{0}, i=1,2,3$ 为列向量，由 $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{A}}$ ， $\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{A}}$ ，即

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{O} & & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{d}_i = \lambda_i \mathbf{d}_i, i=1,2,3$$

故 $(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{d}_i = \mathbf{0}$ ，则

$$|(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A})| = 0 \quad (83)$$

式 (83) 的三个解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 称为 \mathbf{A} 的特征值， $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ 称为 \mathbf{A} 的特征向量，且 $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ 。

即

$$(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (84)$$

$\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ 线性无关。

7.4.2 例题

【例 1】一通信系统，传送数字 0 和 1，每级传对概率为 p ，传错为 $q=1-p$ ， X_0 表示第一级数字， X_n 为输出，如下图所示：

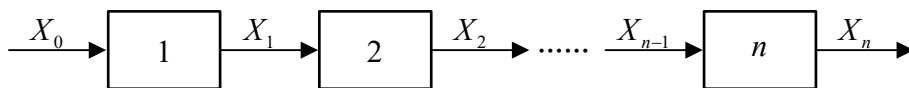


图 14

求：

(1) 经过二级传输后的传真率，误码率；

(2) 若初始分布 $\pi(0) = [P(X_0=0), P(X_0=1)] = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ，求经 n 级传输后输出数字为 1 的概率。

解：(1) 易验证， $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 是状态空间为 $E=\{0,1\}$ 的一个齐次马氏链，且

$P_{ij} = P\{X_{n+1}=j|X_n=i\} = \begin{cases} p, i=j \\ q, i \neq j \end{cases}$ ，一步转移矩阵为 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ ， $0 < p < 1$ ，两步转移矩阵为

$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} p^2 + q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2 + q^2 \end{pmatrix}$ ，所以经两级传输后，传真率为 $P_{00}^{(2)} = P_{11}^{(2)} = p^2 + q^2$ ，误码率为

$P_{01}^{(2)} = P_{10}^{(2)} = 2pq$ 。

(2) 令 P 的特征多项式 $|\lambda E - P| = \begin{vmatrix} \lambda - p & -q \\ -q & \lambda - p \end{vmatrix} = 0$ ，解得特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=p-q$ ；特征向量

$d_1 = (1 \ 1)^T, d_2 = (-1 \ 1)^T$ ，知 $d_1 \perp d_2$ ，将 d_1, d_2 单位化为 $\tilde{d}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \tilde{d}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ 。

构造正交阵 $D = (d_1, d_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ， $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ，使得 $D^{-1}PD = \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{pmatrix}$ 。

$P = D\tilde{P}D^{-1}$ ， $P^n = D\tilde{P}^nD^{-1}$ ，即

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{bmatrix} \quad (85)$$

n 级传输后系统状态概率分布为

$$\begin{aligned} \pi(n) &= \pi(0) \mathbf{P}^n = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \mathbf{P}^n \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(p-q)^n, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(p-q)^n \right] \\ &= [P(X_n=0), P(X_n=1)] \end{aligned}$$

即， n 级传输后输出 1 的概率为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(p-q)^n$ 。

【例 2】 设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间为 $S=\{0,1\}$ ，一步转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \text{ 求 } n \text{ 步转移矩阵 } \mathbf{P}^n.$$

解： \mathbf{P} 的特征多项式 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{P}| = \begin{vmatrix} \lambda - (1-a) & -a \\ -b & \lambda - (1-b) \end{vmatrix} = 0$ ，解得特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=1-a-b$ ；特

征向量 $\mathbf{d}_1 = (1 \ 1)^T, \mathbf{d}_2 = \left(-\frac{a}{b} \ 1\right)^T$ ，故可逆阵 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}^{-1} = \frac{b}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，由于 \mathbf{P} 不是

实对称的，故 \mathbf{D} 不可正交化，由 $\mathbf{P}^n = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}^n \mathbf{D}^{-1}$ ，

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n \end{bmatrix}$$

7.5 齐马链遍历性与极限分布

对齐次马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ ，若它的 n 步转移概率满足： $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \alpha_j, i, j \in E$ ，则称此齐次马氏链具有遍历性。

若对 $\forall j \in E$ ，概率向量 $\Pi = \{\alpha_j, j \in E\}$ 满足： $\alpha_j > 0$ 且 $\sum_{j \in E} \alpha_j = 1$ ，称概率向量 $\Pi = \{\alpha_j, j \in E\}$

为齐次马氏链的极限分布（最终分布）。

若对 n 步转移矩阵 $\mathbf{P}^{(n)}$ 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}^{(n)} = (\Lambda^T \quad \Lambda^T \quad \Lambda^T \quad \cdots)^T$, 其中 $\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots)$ 为极限分布。

设齐次马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 具有遍历性, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \alpha_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}, j \in E$, 即马氏链在 $n \rightarrow \infty$ 时绝对分布就为极限步转移概率 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$ 。下面给出证明。

证明: 绝对分布向量 $\pi(n)$ 由初始分布向量 $\pi(0)$ 与转移矩阵 \mathbf{P} 决定。 $\pi(n) = \pi(0) \mathbf{P}^n$, 设 $\pi(n) = [\pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_N(n)]$, 那么

$$[\pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_N(n)] = [\pi_1(0), \pi_2(0), \dots, \pi_N(0)] \begin{bmatrix} P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} & \cdots & P_{1N}^{(n)} \\ P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} & \cdots & P_{2N}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}^{(n)} & P_{N2}^{(n)} & \cdots & P_{NN}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (86)$$

式 (86) 两端取极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_N(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^N \pi_i(0) P_{i1}^{(n)} \quad \sum_{i=1}^N \pi_i(0) P_{i2}^{(n)} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^N \pi_i(0) P_{iN}^{(n)} \right]$$

故对 $\forall j \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \pi_i(0) P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} [P_{ij}^{(n)}] \sum_{i=1}^N \pi_i(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P_{ij}^{(n)}] = \alpha_j$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \alpha_j, i, j \in E \quad (87)$$

证毕。

极限分布就是遍历马氏链的平稳分布, 极限分布是平稳分布的一个真子集, 即

$$\text{极限分布} \subseteq \text{平稳分布}$$

7.6 齐马链遍历性定理

设齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 状态空间有限, 若 $\exists n_0 > 0$, 对 $\forall i, j \in E$, 有 $P_{ij}^{(n_0)} > 0$, 则此马氏链遍历。且极限分布 $\Pi = \{\pi_j, j \in E\}$ 是方程组 $\Pi = \Pi \mathbf{P}$ 即

$$\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{pmatrix} \quad (88)$$

满足条件 $\pi_j > 0, \sum_{j \in E} \pi_j = 1$ 的唯一解。

【例 1】具有两个弹性壁的随机游动，状态空间 $E = \{1, 2, 3\}$ ，转移矩阵为 $P = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}$,

$0 < p < 1, p + q = 1$ ，状态转移图如下：

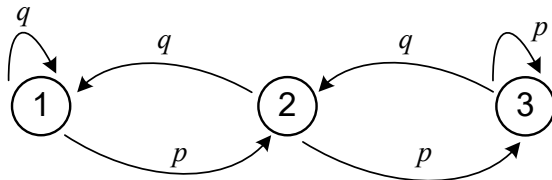


图 15

判断平稳分布是否存在，若存在，求出其 $p = 2/3, q = 1/3$ 时的平稳分布。

解：有两个弹性壁的游动是齐次马氏链，二步转移矩阵 $P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} q^2 + pq & pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & q^2 + pq \end{pmatrix}$

有 $P_{ij}^{(2)} > 0, \forall i, j \in E$ ，因此该马氏链遍历，极限分布即为平稳分布 (π_1, π_2, π_3) ，有以下方程组

$$\begin{cases} (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)P \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 > 0 \end{cases}$$

解得 $\pi_j = \frac{1 - p/q}{1 - (p/q)^3} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}, j = 1, 2, 3$ ，当 $p = 2/3, q = 1/3$ 时，平稳分布 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$ 。

【例 2】设齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ，状态转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(1) 此马氏链是否具有遍历性？

(2) 求该马氏链的平稳分布。

解：(1) $P^{(3)} = P^3 = \begin{pmatrix} 25/72 & 29/72 & 7/36 & 1/18 \\ 29/108 & 37/108 & 7/27 & 7/54 \\ 7/54 & 7/27 & 37/108 & 29/108 \\ 1/18 & 7/36 & 29/72 & 25/72 \end{pmatrix}$ ，有 $[P_{ij}^{(3)}] > 0$ ，所以此马氏链遍历。

(2) 极限分布就是平稳分布 $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$, 满足方程组

$$\begin{cases} (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \mathbf{P} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 > 0 \end{cases}$$

得 $\pi_j = \frac{1}{4}, 1 \leq j \leq 4$, 所以平稳分布为 $\Pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ 。

7.7 平稳信号通过 LTI 系统

7.7.1 结论总结

定义平稳过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = E\{X(t)\overline{X(t+\tau)}\}$, 功率谱为 $S_X(\omega)$; $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 与 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的互相关函数为 $R_{XY}(\tau) = E\{X(t)\overline{Y(t+\tau)}\}$ 。 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 通过单位冲击响应为 $h(t) \in \mathbb{R}$ 的 LTI 系统, 且 $R_X(\tau)$ 和 $h(t)$ 分别满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$, 系统输出为 $Y(t) = X(t) * h(t)$ 。有以下结论成立:

- (1) $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值为 $m_Y = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$;
- (2) $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的相关函数 $R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * \overline{h(-\tau)}$;
- (3) 互相关函数 $R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau), R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$;
- (4) 自功率谱 $S_Y(\omega) = S_X(\omega) |H(j\omega)|^2$;
- (5) 互谱 $S_{XY}(\omega) = S_X(\omega) H(j\omega), S_{YX}(\omega) = S_X(\omega) H(-j\omega)$ 。

(以上结论可以自证)。

7.7.2 例题

【例 1】 给定如下图所示 R-C 电路系统, 若输入平稳信号 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值 $m_X = 0$, 相关

函数 $R_X(\tau) = \alpha^2 e^{-\beta|\tau|}, \beta > 0, \beta \neq \alpha = \frac{1}{RC}$, 试求:

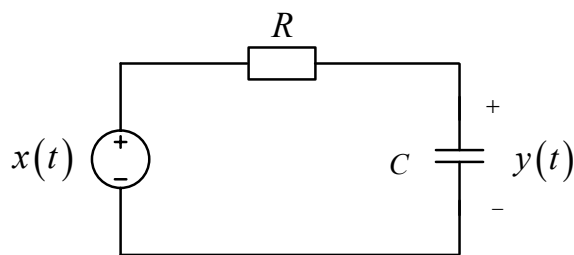


图 16

- (1) 输出过程 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值 $m_Y(t)$;
- (2) $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的自相关函数为 $R_Y(\tau)$;
- (3) $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的自谱密度 $S_Y(\omega)$, 输入输出的互谱密度 $S_{XY}(\omega)$ 。

解: $m_Y(t) = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0$; 由系统微分方程 $\frac{dY(t)}{dt} + \alpha Y(t) = \alpha X(t)$, 则系统函数

$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}, \quad S_Y(\omega) = S_X(\omega) |H(j\omega)|^2 = \frac{2\beta\alpha^4}{(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + \beta^2)},$$

$$R_Y(\tau) = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}); \quad S_{XY}(\omega) = S_X(\omega) H(j\omega) = \frac{2\beta\alpha^3}{(j\omega + \alpha)(\omega^2 + \beta^2)}.$$

【例 2】 给定 R-C 电路系统, 令 $\alpha = \frac{1}{RC}$, 输入白噪声电压 $\{X(t), t \geq 0\}$, 已知 $m_X = 0$,

$R_X(\tau) = s_0 \delta(\tau)$, 输出为 $\{Y(t), t \geq 0\}$, 系统微分方程为 $\frac{dY(t)}{dt} + \alpha Y(t) = \alpha X(t)$, 试求:

- (1) $R_Y(\tau)$; (2) $S_X(\omega)$; (3) $S_{XY}(\omega)$; (4) $R_{XY}(\tau)$; (5) $R_{YX}(\tau)$ 。

解: $S_X(\omega) = s_0$; 系统频率响应为 $H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}$, $S_Y(\omega) = S_X(\omega) |H(j\omega)|^2 = \frac{s_0 \alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2}$, 故

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} s_0 \alpha e^{-\alpha|\tau|}; \quad S_{XY}(\omega) = s_0 \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}; \quad R_{XY}(\tau) = s_0 \alpha e^{-\alpha\tau} u(\tau);$$

$$R_{YX}(\tau) = \overline{R_{XY}(-\tau)} = R_{XY}(-\tau) = s_0 \alpha e^{\alpha\tau} u(-\tau)。$$

7.8 参数随机的正余弦信号

该节只给出结论, 请自行证明。

7.8.1 类型 1

有以下随机过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为

$$X(t) = \xi \cos(\beta t) + \eta \sin(\beta t) \quad (89)$$

其中, ξ, η 互不相关 (独立), 且两者的二阶矩相等, 有 $E\xi^2 = E\eta^2 = \sigma^2$, 在均值满足一定条件下, $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 平稳, 且 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma^2 \cos(\beta \tau) \quad (90)$$

7.8.2 类型 2

有过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 与 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为

$$\begin{aligned} X(t) &= a \cos(\omega_0 t + \xi) \\ Y(t) &= b \sin(\omega_0 t + \xi) \end{aligned} \quad (91)$$

其中, a, b, ω_0 为常数, ξ 在 $(0, 2\pi)$ 或 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布, EX_t, EY_t 满足一定条件时, 有

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2} a^2 \cos(\omega_0 \tau) \\ R_Y(\tau) &= \frac{1}{2} b^2 \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned} \quad (92)$$

7.8.3 种类 3

过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为

$$X(t) = \xi \cos(\omega_0 t + \eta) \quad (93)$$

其中, ω_0 为常数, ξ, η 相互独立, $\eta \sim U(0, 2\pi)$, ξ 的二阶矩为 $E\xi^2$, 则相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2} (E\xi^2) \cos(\omega_0 \tau) \quad (94)$$

7.8.4 种类 4

过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为

$$X(t) = A \cos(\omega t + \eta) \quad (95)$$

其中, A, ω, η 为相互独立的随机变量, 且幅度 A 的二阶矩为 EA^2 , 相位 η 满足均匀分布 $\eta \sim U(-\pi, \pi)$, 频率 $\omega \sim U(-\omega_0, \omega_0), \omega_0 > 0$ 。则相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2}(EA^2) \text{Sa}(\omega_0 \tau) \quad (96)$$

其中, 抽样函数 $\text{Sa}(\omega_0 \tau) = \sin(\omega_0 \tau) / (\omega_0 \tau)$ 。

7.9 时间相关、平均及遍历性定理

7.9.1 一般过程

设随机过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ (并不一定是平稳过程)。相关概念及定义如下

(1) 时间平均

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) dt \quad (97)$$

(2) 时间相关

$$\langle X(t) \overline{X(t+\tau)} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) \overline{X(t+\tau)} dt \quad (98)$$

(3) 均值的均方遍历

称均值具有均方遍历性, 若

$$P\{\langle X(t) \rangle = E[X(t)]\} = 1 \quad (99)$$

即均值的时间平均 (为一随机变量) 以概率 1 等于其统计平均。

(4) 相关函数的均方遍历性

称相关函数具有均方遍历性, 若

$$P\{\langle X(t) \overline{X(t+\tau)} \rangle = E[X(t) \overline{X(t+\tau)}]\} = 1 \quad (100)$$

7.9.2 各态历经充要充分条件

平稳过程均值各态历经性的充要条件与充分条件。

(1) 充要条件

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{+2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) C_X(\tau) d\tau = 0 \quad (101)$$

(2-1) 充分条件 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C_X(\tau)| d\tau < +\infty \quad (102)$$

(2-2) 充分条件 2

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = m_X^2 \quad (103)$$

【例题】

假设过程 $X_1(t), X_2(t), t \in \mathbb{R}$ 均平稳, 已知 $X_1(t) = \cos(t + \varphi)$, $\varphi \sim U[0, 2\pi]$; $X_2(t) = Y$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$ 。试讨论:

(1) $X_1(t)$ 的均值各态历经性与相关函数?

(2) $X_2(t)$ 的均值各态历经性与相关函数?

解: (1) $\langle X_1(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos(t + \varphi) dt = 0$;

$$\begin{aligned} E[X_1(t)] &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(t + \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t + \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

故 $P\{\langle X_1(t) \rangle = E[X_1(t)]\} = 1$, 即 $X_1(t)$ 均值是各态历经的;

$$\begin{aligned} \langle X_1(t) \overline{X_1(t + \tau)} \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos(t + \varphi) \cos(t + \tau + \varphi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} [\cos(\tau) + \cos(2t + \tau + 2\varphi)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} [\cos(\tau) \cos(2t + \tau + 2\varphi)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{1}{T} [2T \cos(\tau)] \\ &= \frac{1}{2} \cos(\tau) \end{aligned}$$

且 $R_{X_1}(\tau) = E[X_1(t)X_1(t + \tau)] = \frac{1}{2} \cos(\tau)$, 故 $P\{\langle X_1(t) \overline{X_1(t + \tau)} \rangle = E[X_1(t) \overline{X_1(t + \tau)}]\} = 1$, 即

$X_1(t)$ 的相关函数是各态历经的。

$$(2) \quad \langle X_2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y dt = Y, \quad E[X_2(t)] = 0, \quad \text{则}$$

$$\langle X_2(t) \rangle \neq E[X_2(t)], \text{ 均值不是均方遍历的; } \langle X_2(t) \overline{X_2(t+\tau)} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y^2 dt = Y^2; \text{ 相关函}$$

数 $R_{X_2}(t, t+\tau) = E[X_2(t) \overline{X_2(t+\tau)}] = E[Y^2] = \sigma^2$, 所以 $E[X_1(t) \overline{X_1(t+\tau)}]$ 与 $\langle X_1(t) \overline{X_1(t+\tau)} \rangle$ 相等的概率不为 1, 故相关函数不是均方遍历的。

7.10 平稳过程均方微积分与充要条件

过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 平稳, 相关函数为 $R_X(\tau)$, 均方连续, 可导的充要条件分别论述如下。

7.10.1 充要条件

(1) 均方连续

$$R_X(\tau) \text{ 在 } \tau=0 \text{ 处连续} \Leftrightarrow \{X(t), t \in \mathbb{R}\} \text{ 均方连续}$$

$$(R_X(\tau) \text{ 处处连续})$$

(2) 均方可微

$$R_X(\tau) \text{ 在 } \tau=0 \text{ 处二次可导}[R_X''(0) \text{ 存在}] \Leftrightarrow \{X(t), t \in \mathbb{R}\} \text{ 均方可微}$$

7.10.2 例题

【例 1】 已知平稳过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值函数 $m(t) = 0$, 相关函数 $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$, 讨论其均方连续性, 可积性及可导性; 均值的均方遍历性。

解: $R_X(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau}, & \tau \geq 0 \\ e^{\tau}, & \tau < 0 \end{cases}$, $\lim_{\tau \rightarrow 0} R_X(\tau) = R_X(0) = 1$, 所以 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 均方连续, 均方可积;

$R_X'(\tau) = \begin{cases} -e^{-\tau}, & \tau \geq 0 \\ e^{\tau}, & \tau < 0 \end{cases}$, 相关函数一阶导数 $R_X'(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处不连续, 所以 $R_X''(\tau)$ 不存在, 所以

$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 不是均方可微的;

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0 = m_X^2$, 故 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值是均方遍历的。

【例 2】已知平稳过程 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}$, 讨论其均分连续性、可积性、可微性; 假设其导数过程 $X'(t)$ 存在, 求其相关函数 $R_{X'}(\tau)$, 互相关函数 $R_{XX'}(\tau)$ 与 $R_{XX}(\tau)$ 。

解: $\lim_{\tau \rightarrow 0} R_X(\tau) = R_X(0) = 1$, 对 $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $R_X(\tau)$ 均连续, 所以 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 均方连续, 均方可积;

二阶导数 $R_X''(\tau) = \frac{6\tau^2 - 2}{(1+\tau^2)^3}$, 故 $R_X''(0) = -2$ 存在, 故 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 均方可微;

$$R_{X'}(\tau) = -R_X''(\tau) = \frac{2-6\tau^2}{(1+\tau^2)^3}; \quad R_{XX'}(\tau) = R_{X'}(\tau) = -\frac{2\tau}{(1+\tau^2)^2}; \quad R_{XX}(\tau) = -R_{X'}(\tau) = \frac{2\tau}{(1+\tau^2)^2}。$$

【例 3】探讨随机二元传输 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是否为平稳过程, 若是, 探讨其均方连续性、可积性、可微性; 均值各态历经性; 谱密度函数 $S_Y(\omega)$ 。波形如图 17 所示。

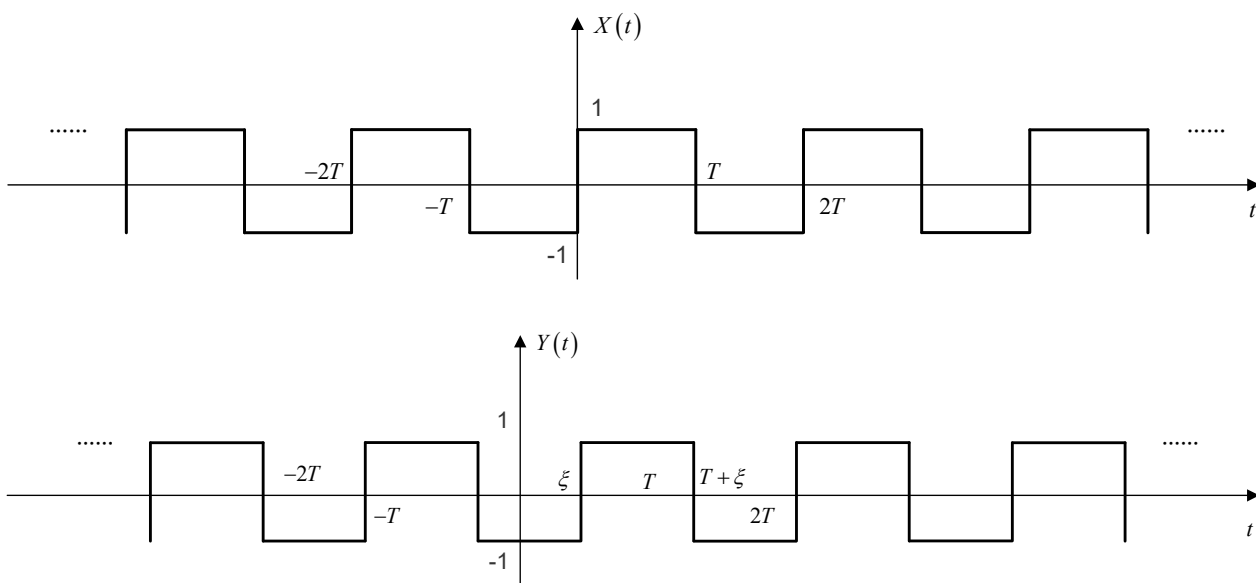


图 17

其中, $\xi \sim U(0, T)$, ξ 与 $X(t)$ 独立, $Y(t) = X(t - \xi)$, $t \in \mathbb{R}$ 。

解: (1) 对 $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $E[Y(t)] = E[X(t - \xi)] = 0$; 相关函数为 $R_Y(s, t) = E[Y(s)Y(t)]$ 。

① 当 $|t - s| > T$ 时, $R_Y(s, t) = E[Y(s)] \cdot E[Y(t)] = 0$;

② 当 $|t - s| < T$ 时, 定义时间 A: s, t 在同一周期内, \bar{A} : s, t 不在同一周期内;

且 $P(\bar{A}) = \frac{|t - s|}{T}$, $P(A) = 1 - \frac{|t - s|}{T}$, 根据全期望公式

$$E[Y(s)Y(t)] = E[Y(s)Y(t)|A]P(A) + E[Y(s)Y(t)|\bar{A}]P(\bar{A}) = 1 - \frac{|t-s|}{T}$$

即 $R_Y(s, t) = R_Y(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$ ，如图 18 所示。故随机二元传输是平稳过程。

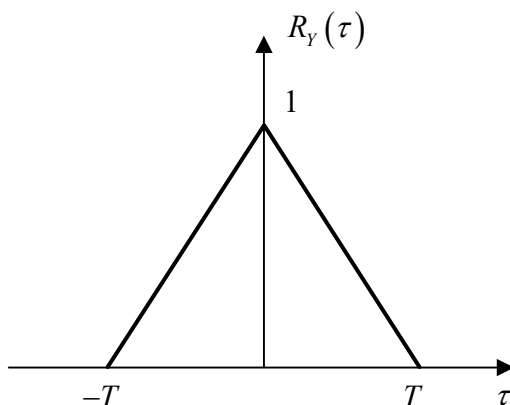


图 18

(2) 由 $\lim_{\tau \rightarrow 0} R_Y(\tau) = R_Y(0)$ ，则 $Y(t)$ 均方连续可积；在 $\tau = 0$ 处， $R_Y'(\tau)$ 不连续，故 $R_Y''(0)$ 不存在，所以不是均方可微的。

(3) 由 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_Y(\tau) = 0 = m_X^2$ ，所以均值是均方遍历的。

(4) 谱密度函数和相关函数是一对 Fourier 变换，有 $S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ ，则

$$S_Y(\omega) = T \left[\text{Sa} \left(\frac{T}{2} \omega \right) \right]^2 \quad (104)$$

(三角波的频谱计算可以参考《信号与系统总结》)。

【例 4】 随机电报信号 $\{X(t), t \geq 0\}$ 在传输过程中有不同的电流信号 $+C, -C (C > 0)$ ，设 $X(t)$ 在 $[0, t]$ 内变号次数是强度 λ 的泊松过程。且有 $X(t) = X_0(-1)^{N(t)}, t \geq 0$ ， X_0 与 $N(t)$ 独立，

$X_0 \sim \begin{pmatrix} C & -C \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ，图 19 为一典型样本函数。考察随机电报信号是否平稳，若是，考察其均

方连续性、可积性、可微性，均值各态历经性，并求谱密度函数？

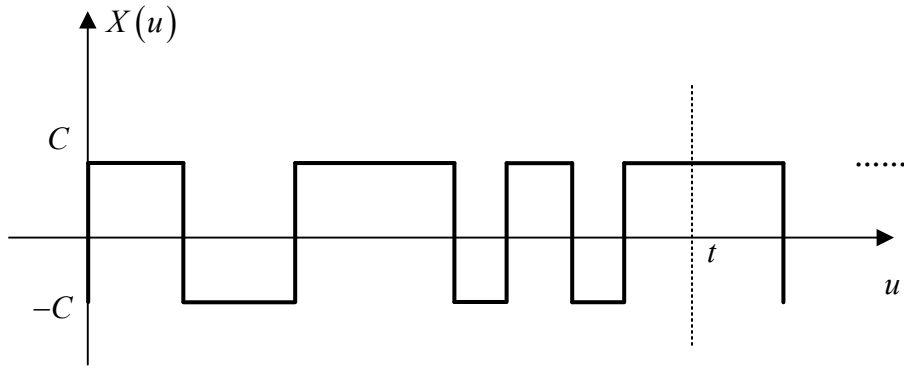


图 19

解： $m_X(t) = E[X(t)] = E[X_0(-1)^{N(t)}] = (EX_0)E[(-1)^{N(t)}] = 0$ ；相关函数 $R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$ ($\tau \in \mathbb{R}, t+\tau \geq 0$)， $X(t)X(t+\tau)$ 的分布如表 3 所示。

$X(t)X(t+\tau)$	$-C^2$	C^2
P	p_1	p_2

表 3

$$\begin{aligned}
 p_1 &= P\{X(t)X(t+\tau) = -C^2\} = P\{N(|\tau|) = 2k+1\} = \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^n}{n!} e^{-\lambda|\tau|}, k \geq 0 \in \mathbb{Z}^+ \\
 &= e^{-\lambda|\tau|} \left[\frac{1}{2} (e^{\lambda|\tau|} - e^{-\lambda|\tau|}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda|\tau|})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_2 &= P\{X(t)X(t+\tau) = C^2\} = P\{N(|\tau|) = 2k\} = \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^n}{n!} e^{-\lambda|\tau|}, k \geq 0 \in \mathbb{Z}^+ \\
 &= e^{-\lambda|\tau|} \left[\frac{1}{2} (e^{\lambda|\tau|} + e^{-\lambda|\tau|}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (1 + e^{-2\lambda|\tau|})
 \end{aligned}$$

则 $R_X(t, t+\tau) = C^2(p_2 - p_1) = C^2 e^{-2\lambda|\tau|}$, $\tau \in \mathbb{R}$ ，所以随机电报信号是平稳过程。

相关函数示意图如图 20。

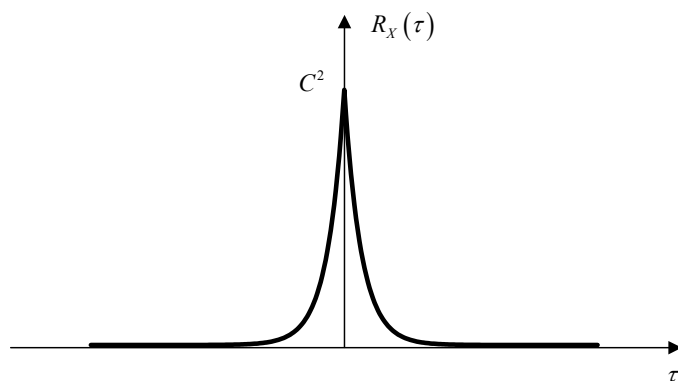


图 20

$R'_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处不连续, 所以 $\{X(t), t \geq 0\}$ 不是均方可导的。

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0 = m_X^2$, 故均值是各态历经的。

谱密度 $S_X(\omega) = \frac{4\lambda C^2}{\omega^2 + 4\lambda^2}, \omega \in \mathbb{R}$ 。

【例 5】已知 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程, 讨论过程 $X(t) = W(t+a) - W(t), t \geq 0, a > 0$ 是否为平稳过程, 若是, 求出谱密度函数, 并分析是否均方连续、可积、可导; 若不是, 请说明理由。

解: 因 $W(t+a) - W(t) \sim N(0, a\sigma^2)$, 所以 $E[X(t)] = 0$ 。相关函数

$$\begin{aligned}
 R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E\{[W(t+a) - W(t)][W(t+\tau+a) - W(t+\tau)]\} \\
 &= R_W(t+a, t+a+\tau) - R_W(t+a, t+\tau) - R_W(t, t+a+\tau) + R_W(t, t+\tau) \\
 &= \sigma^2 \{t+a + \min(0, \tau) - [t + \min(a, \tau)] - [t + \min(0, a+\tau)] + t + \min(0, \tau)\} \\
 &= \sigma^2 [a + 2\min(0, \tau) - \min(a, \tau) - \min(0, a+\tau)] \\
 &= \begin{cases} \sigma^2(a - |\tau|), & |\tau| < a \\ 0, & |\tau| \geq a \end{cases}
 \end{aligned}$$

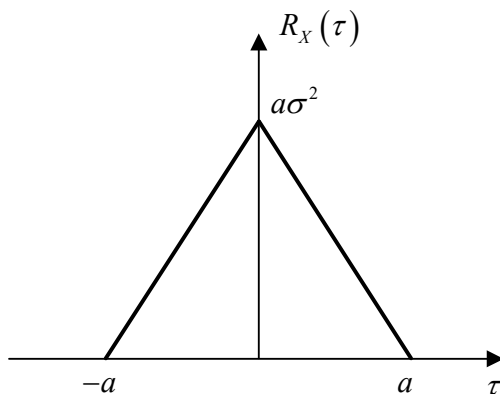


图 21

过程 $X(t)$ 均方连续可积, 均方不可微, 均值具足各态历经性; 谱密度为

$$S_X(\omega) = (a\sigma)^2 [\text{Sa}(a\omega/2)]^2$$

【例 6】 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, 讨论过程 $X(t) = N(t+a) - N(t), t \geq 0, a > 0$ 是否为平稳过程, 若是, 求出谱密度函数, 并分析是否均方连续、可积、可导; 若不是, 请说明理由。

解: 均值 $m_X(t) = E[N(t+a)] - E[N(t)] = \lambda a$; $X(t)$ 的协方差函数

$$\begin{aligned} C_X(t, t+\tau) &= E\{[X(t) - m_X][X(t+\tau) - m_X]\} \\ &= E\{[N(t+a) - N(t) - \lambda a][N(t+a+\tau) - N(t+\tau) - \lambda a]\} \\ &= C_N(t+a, t+a+\tau) - C_N(t+a, t+\tau) - C_N(t, t+a+\tau) + C_N(t, t+\tau) \\ &= \lambda[a + 2\min(0, \tau) - \min(a, \tau) - \min(0, a+\tau)] \\ &= \begin{cases} \lambda(a - |\tau|), & |\tau| < a \\ 0, & |\tau| \geq a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{所以相关函数 } R_X(\tau) = C_X(\tau) + m_X^2 = \begin{cases} \lambda(a - |\tau|) + \lambda^2 a^2, & |\tau| < a \\ \lambda^2 a^2, & |\tau| \geq a \end{cases}$$

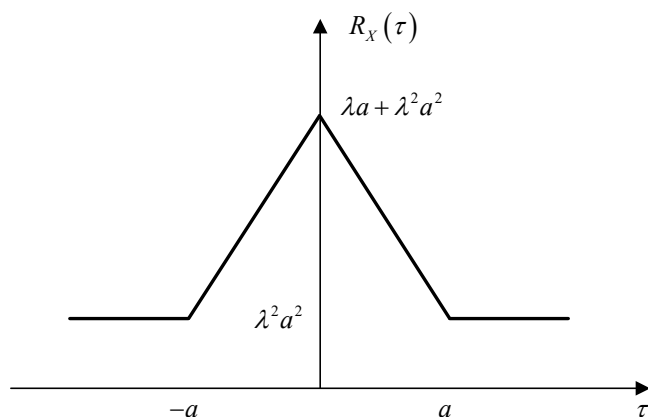


图 22

故过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 平稳, 均方连续可积, 均方不可微; 均值各态历经; 谱密度为

$$S_X(\omega) = \lambda \left[a \text{Sa}\left(\frac{a\omega}{2}\right) \right]^2 + 2\pi\lambda^2 a^2 \delta(\omega).$$

【例 7】 已知 $\{S(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是周期为 T 的连续函数, 定义过程 $X(t) = S(t+\phi)$, $\phi \sim U(0, T)$, 讨论 $X(t)$ 的平稳性, 并求出谱密度函数。(图 23 是 $X(t)$ 的一个样本函数)。

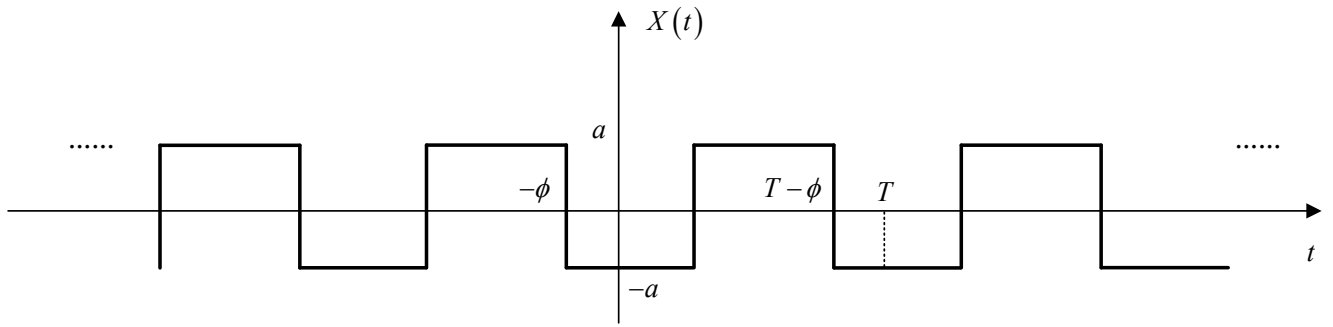


图 23

解：均值

$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= E[S(t+\phi)] = \frac{1}{T} \int_0^T S(t+\phi) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T S(t+\phi) d(t+\phi) \\
 &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} S(u) du \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T S(u) du \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

相关函数

$$\begin{aligned}
 R_X(t, t+\tau) &= E[X(t) \overline{X(t+\tau)}] \\
 &= E[S(t+\phi) S(t+\tau+\phi)] \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T S(u) S(u+\tau) du
 \end{aligned}$$

在以 T 为周期的一个周期内， $R_X(\tau)$ 为

$$R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) = a^2 \left(1 - \frac{4|\tau|}{T} \right), |\tau| \leq \frac{T}{2}$$

$R_X(\tau)$ 是一个周期为 T 的周期函数，即 $R_X(\tau) = R_X(\tau+T)$ ，如图 24 所示。所以 $X(t)$ 是平稳过程。 $R_X(\tau)$ 的傅里叶级数为

$$a_k = \begin{cases} [a \text{Sa}(k\pi/2)]^2, & k \neq 0, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & k = 0 \end{cases} \quad (105)$$

（周期三角波的傅氏级数可以参考《信号与系统总结》）。

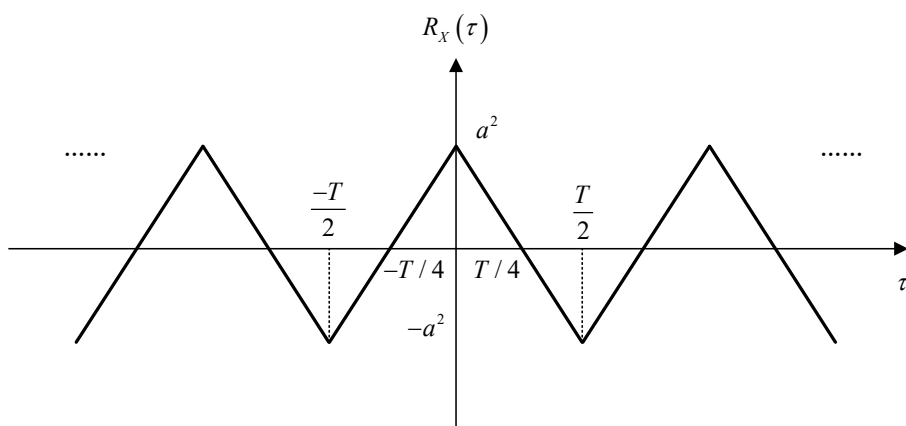


图 24

故 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) \quad (106)$$

7.11 二阶矩过程均方微积分与充要充分条件

本节阐述二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的均方连续性、可导性、可积性与收敛性问题。

7.11.1 充要条件与定义

(1) 均方收敛

$\{X(t), t \in T\}$ 在 $t = t_0$ 处收敛

\Leftrightarrow

极限 $\lim_{s, t \rightarrow t_0} R(s, t)$ 存在

(2) t_0 处均方连续

$\{X(t), t \in T\}$ 在 $t = t_0$ 处连续

\Leftrightarrow

$\lim_{s, t \rightarrow t_0} R(s, t) = R(t_0, t_0)$

(3) $\forall t \in T$ 处均方连续

$\{X(t), t \in T\}$ 在 $\forall t \in T$ 处连续

\Leftrightarrow

$R(s, t)$ 在区域 $\{\sigma: T \times T\}$ 的对角线 $s = t$ 上连续

(4) 均方导数定义

假设在 $t = t_0$ 处可导, 均方导数定义为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = Y$$

(5) 广义二阶导数定义

若 $\lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{f(s + \Delta s, t + \Delta t) - f(s, t + \Delta t) - f(s + \Delta s, t) + f(s, t)}{\Delta s \Delta t}$ 存在, 称 $f(s, t)$ 在 (s, t) 处广义二

阶可微。

(6) 广义二阶可微充分条件

$$\frac{\partial f(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} \text{ 存在, 且 } \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 f(s, t)}{\partial t \partial s} \text{ 存在并连续}$$

$$\Rightarrow$$

$$f(s, t) \text{ 广义二阶可微, 且 } f''_{st}(s, t) = f''_{ts}(s, t)$$

(7) 充要条件

$$X(t) \text{ 在 } t_0 \in T \text{ 处均方可微}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R(s, t) \text{ 在 } (t_0, t_0) \text{ 处广义二阶可微}$$

(8) 充要条件

$$X(t) \text{ 在 } \forall t \in T \text{ 处均方可微}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$R_X(s, t) \text{ 在 } T \times T \text{ 平面内的对角线 } s = t \text{ 上广义二阶可微}$$

假设 $X(t)$ 在 $\forall t \in T$ 处均方可微, 则以下结论成立 (必要条件):

$$(1) \quad E[X'(t)] = E\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = \frac{dE[X(t)]}{dt} = \frac{d[m_X(t)]}{dt};$$

$$(2) \quad X'(t) \text{ 自相关函数}$$

$$R_{X'}(s, t) = E \left[X'(s) \overline{X'(t)} \right] = R_{st}''(s, t) = R_{ts}''(s, t);$$

(3) 互相关函数

$$R_{XX'}(s, t) = \frac{\partial R_X(s, t)}{\partial s}, R_{X'X}(s, t) = \frac{\partial R_X(s, t)}{\partial t}$$

(4) $R'_s(s, t), R'_t(s, t), R''_{st}(s, t), R''_{ts}(s, t)$ 均存在。

7.11.2 例题

【例 1】 设随机变量 ξ 满足 $E\xi = 0$, $D\xi = \sigma^2$, 令 $X(t) = \xi t, t \in T$, 试判断 $X(t)$ 是否均方可微。

解:

$$\begin{aligned} X'(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t_0 + \Delta t) - \xi t_0}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi \Delta t}{\Delta t} \\ &= \xi \end{aligned}$$

【例 2】 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数 σ^2 的维纳过程, 探讨 $X(t) = W^2(t)$ 是否均方可微。

解: 容易计算过程 $X(t)$ 的相关函数为 $R_X(s, t) = \sigma^4 [st + 2 \min^2(s, t)]$, 则对 $\forall t_0 \in T$, 有

$$\begin{aligned} R'_{X, s^+}(t_0, t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{R_X(t_0 + \Delta t, t_0) - R_X(t_0, t_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\sigma^4 [(t_0 + \Delta t)t_0 + 2t_0^2 - 3t_0^2]}{\Delta t} \\ &= \sigma^4 t_0 \end{aligned}$$

$$R'_{X, s^-}(t_0, t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{R_X(t_0 + \Delta t, t_0) - R_X(t_0, t_0)}{\Delta t} = 5\sigma^4 t_0$$

故 $R'_{X, s^+}(t_0, t_0) \neq R'_{X, s^-}(t_0, t_0)$, 所以 $R'_{X, s}(t_0, t_0), \forall t_0 \in T$ 不存在, 则 $X(t)$ 不是均方可微的。

【例 3】 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程, 求积分过程 $X(t) = \int_0^t W(u) du (t \geq 0)$ 的均值, 相关函数, 并讨论 $X(t)$ 的均方连续性、可积性、可微性。

解: $m_X(t) = E[X(t)] = \int_0^t E[W(u)] du = 0;$

$$R_X(s, t) = E\{X(s)\overline{X(t)}\} = \int_0^s \int_0^t R_W(u, v) du dv$$

则（计算过程略）

$$R_X(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{6}\sigma^2 s^2(3t-s), & 0 \leq s \leq t \\ \frac{1}{6}\sigma^2 t^2(3s-t), & 0 \leq t < s \end{cases}$$

对 $\forall t_0 \in T$, 有 $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ s \rightarrow t_0}} R_X(s, t) = R_X(t_0, t_0) = \frac{1}{3}\sigma^2 t_0^3$, 所以 $X(t)$ 均方连续可积。

$$\text{又 } \frac{\partial R_X(s, t)}{\partial s} = \begin{cases} \sigma^2 s \left(t - \frac{1}{2}s\right), & 0 < s \leq t \\ \frac{1}{2}\sigma^2 t^2, & 0 \leq t < s \end{cases}, \quad \frac{\partial R_X(s, t)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2, & 0 < s \leq t \\ \sigma^2 t \left(s - \frac{1}{2}t\right), & 0 \leq t < s \end{cases};$$

$$\frac{\partial^2 R_X(s, t)}{\partial s \partial t} = \begin{cases} \sigma^2 s, & 0 < s \leq t \\ \sigma^2 t, & 0 \leq t < s \end{cases}, \quad \frac{\partial^2 R_X(s, t)}{\partial t \partial s} = \begin{cases} \sigma^2 s, & 0 < s \leq t \\ \sigma^2 t, & 0 \leq t < s \end{cases}$$

考察 $R''_{X, st}(s, t)$ 的连续性。

- (1) $R''_{X, st}(s, t)$ 在对角线 $s = t$ 上连续;
- (2) 当 $0 < s \leq t$ 时, $R''_{X, st}(s, t) = \sigma^2 s$, 连续;
- (3) 当 $0 \leq t < s$ 时, $R''_{X, st}(s, t) = \sigma^2 t$, 连续;

故 $R''_{X, st}(s, t)$ 在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, 同理 $R''_{X, ts}(s, t)$ 也在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 连续, 所以 $R''_X(s, t)$

广义二阶可导, 则 $X(t)$ 均方可微。

【例 4】 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, $X(t) = \int_0^t N(u) du (t \geq 0)$, 求积分过程 $X(t) = \int_0^t N(u) du (t \geq 0)$ 的均值, 相关函数, 并讨论 $X(t)$ 的均方连续性、可积性、可微性。

解: 此例同例 4.

【例 5】 如图 25 所示周期为 T 的周期性锯齿波, 样本函数图中 $T_0 \sim U(0, T)$, 求 $X(t)$ 的一维概率密度函数 $f(t; x)$ 。

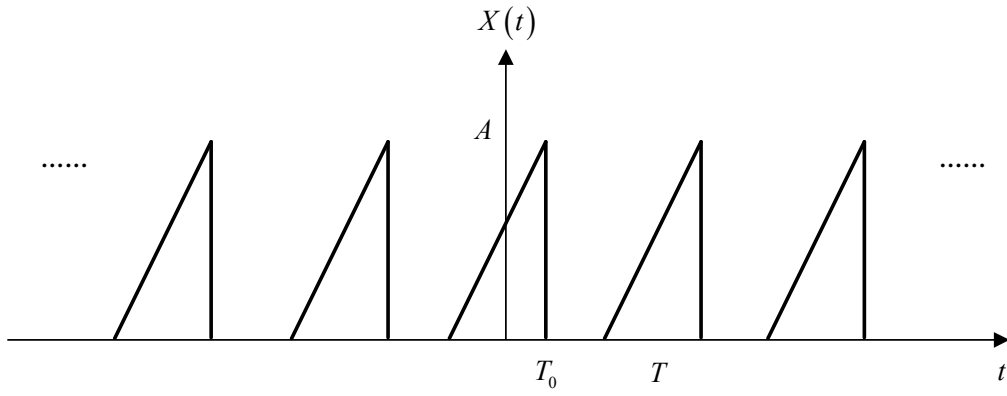


图 25

解：（1）当 $0 < t \leq T_0$ 时

$$\begin{aligned} F(t; x) &= P\{X(t) \leq x\} = P\left\{\frac{A(T - T_0 + t)}{T} \leq x\right\} = P\left\{T_0 \geq T + t - \frac{T}{A}x\right\} \\ &= \int_{T+t-\frac{T}{A}x}^T \frac{1}{T} du = \frac{1}{A}x - \frac{t}{T} \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(t; x) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & 0 \leq x < A \\ 0, & \text{others} \end{cases};$$

（2）当 $T_0 < t < T$ 时

$$\begin{aligned} F(t; x) &= P\{X(t) \leq x\} = P\left\{\frac{A(t - T_0)}{T} \leq x\right\} = P\left\{T_0 \geq t - \frac{T}{A}x\right\} \\ &= \int_{t-\frac{T}{A}x}^T \frac{1}{T} du = \frac{1}{T} \left(T + \frac{T}{A}x - t\right) \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(t; x) = \begin{cases} \frac{1}{A}; & 0 \leq x < A \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

最终 $f_x(x) = \frac{1}{A}, x \in [0, A)$ 。