# § 2.2 随机过程的分布

## 一、分布函数

定义2.2.1 随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$，对 $\forall t\in T$，随机变量$X(t)$的分布函数

$$F(t;x)=P\{X(t)\le x\},\qquad x\in R,$$

称为过程$X_T$的一维分布函数.

注 一维分布函数描述了随机过程在各个孤立时间点处的统计特性, 未给出过程的整体统计特性.

**定义2.2.2** 随机过程$\{X(t), t\in T\}$，对任给的$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，随机向量

$$\big(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)\big)$$

的联合分布函数

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2, \cdots, X(t_n)\le x_n\}$$

称为过程的$n$ **维分布函数**.

记 $\mathbf{F} \triangleq \{F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n):$

$$t_i \in T, x_i \in R, i = 1,2,\cdots,n, n \geq 1\}$$

称$F$为$X_T$的有限维分布函数族.

$X_T$的任意有限维分布函数的全体构成的集合

**定义2.2.3** 过程$\{X(t), t \in T\}$的$n$维特征函数定义为

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) =$$

$$= E\{e^{j[\theta_1 X(t_1)+\cdots+\theta_n X(t_n)]}\}$$

称 $\{\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n):$

$$t_1,t_2,\cdots,t_n \in T, n \geq 1\}$$

为$X_T$的有限维特征函数族.

特征函数和分布函数是相互唯一确定.

## 2. 随机过程存在定理

随机过程的$n$维分布函数能近似地描述过程的统计特性, $n$越大则描述越趋于完善.

需研究随机过程与有限维分布函数的关系.

随机过程的有限维分布函数有以下性质:

1) **对称性**:对1, 2, …, $n$的任一排列$j_1, j_2, \dots, j_n$, 均有

$$F(t_{j_1}, \cdots, t_{j_n}; x_{j_1}, \cdots, x_{j_n}) = F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

注 因事件乘积满足交换律.

2) **相容性**:对任意固定的自然数$m<n$, 均有

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_m; x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$= F(t_1, t_2, \cdots, t_m, \cdots, t_n; x_1, x_2, \ldots, x_m, \infty \cdots \infty)$$

$$= \lim_{x_{m+1}, \cdots, x_n \to \infty} F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, \ldots, x_m, \cdots x_n)$$

**注** 联合分布函数能完全确定边缘分布函数.

类似地, 随机过程的有限维特征函数满足:

1) 对1,2,…,$n$的任一排列$j_1, j_2, \ldots, j_n$有

$$\varphi(t_{j_1}, \cdots, t_{j_n}; \theta_{j_1}, \cdots, \theta_{j_n}) = \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$$

2) 对任意固定的自然数$m<n$, 均有

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_m;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$

$$=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_m,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,0,\cdots,0)$$

**定理2.2.1 (柯尔莫哥罗夫存在定理)**

如果有限分布函数族

$$\mathrm{F}=\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$$

满足相容性和对称性, 则存在一个概率空间上的一个随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 以F 为有限维分布函数族, 即

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_n) \le x_n\}.$$

**Ex1.** 设随机过程 $\{X(t,\omega), t \in R\}$ 只有两条样本函数

$$X(t,\omega_1) = 2\cos t, \quad X(t,\omega_2) = -2\cos t, t \in R$$

且 $$P\{\omega_1\} = \frac{2}{3}, P\{\omega_2\} = \frac{1}{3}$$

求 1) 一维分布函数 $F(0; x)$ 和 $F(\pi/4; x)$;

2) 二维分布函数 $F(0, \pi/4; x, y)$.

解 1) 对任意实数$t\in R$,有

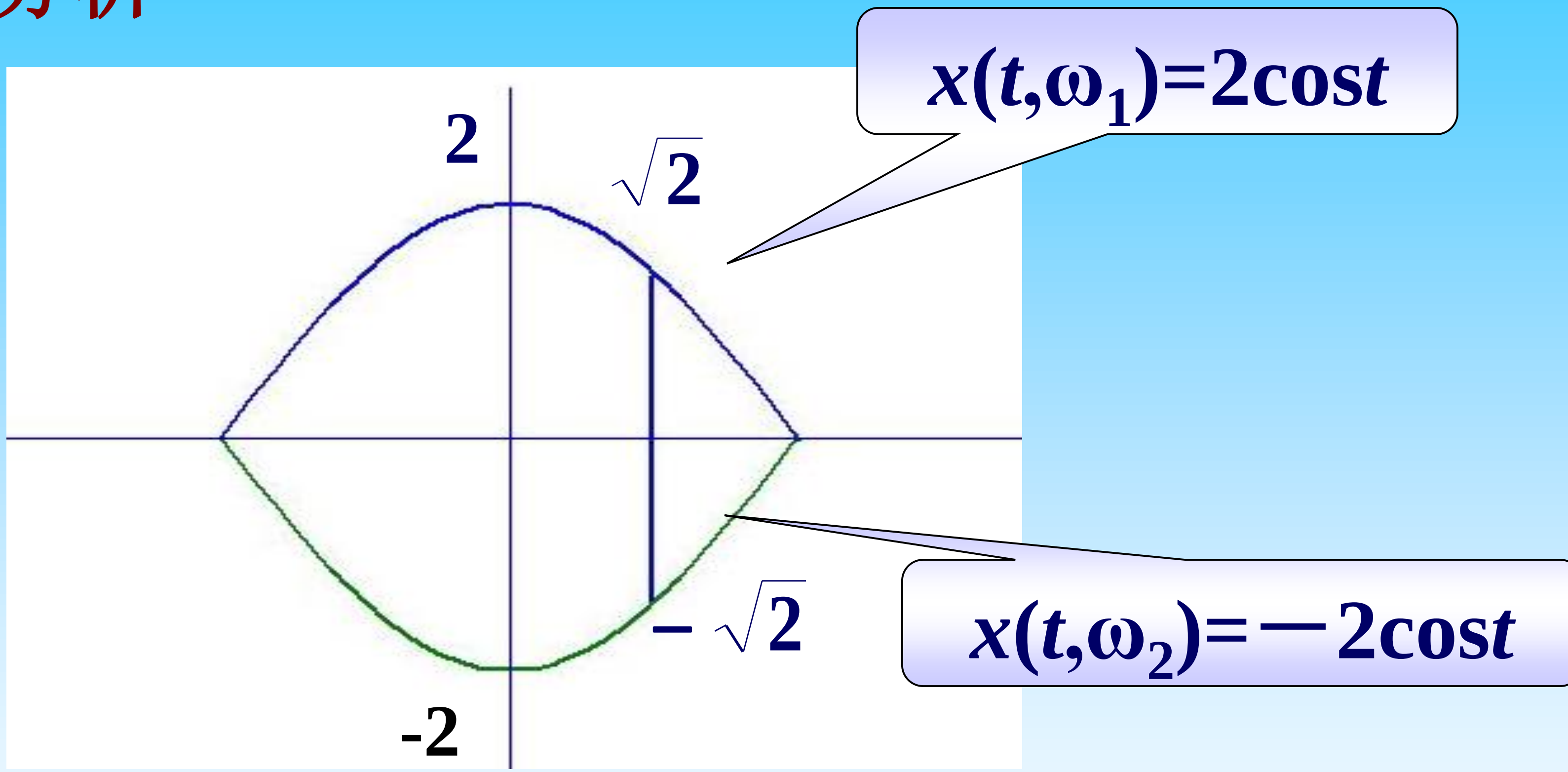
| $X(t)$ | $-2\cos t$ | $2\cos t$ |
|---|---|---|
| $p$ | 1/3 | 2/3 |

特别

| $X(0)$ | $-2$ | $2$ |
|---|---|---|
| $p$ | 1/3 | 2/3 |

| $X(\frac{\pi}{4})$ | $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|
| $p$ | 1/3 | 2/3 |

## 2) 分析




有

| $(X(0), X(\pi/4))$ | $(-2,-\sqrt{2})$ | $(2,\sqrt{2})$ |
|---|---|---|
| $p$ | 1/3 | 2/3 |

服从二维两点分布，其余自解.

**问题** 随机变量$X(0)$和$X(\pi/4)$是否相互独立?

**Ex. 2**（脉冲位置调制信号） P13例14

1)每隔$T$秒输出宽度为$T/6$,幅度为$A$的脉冲;

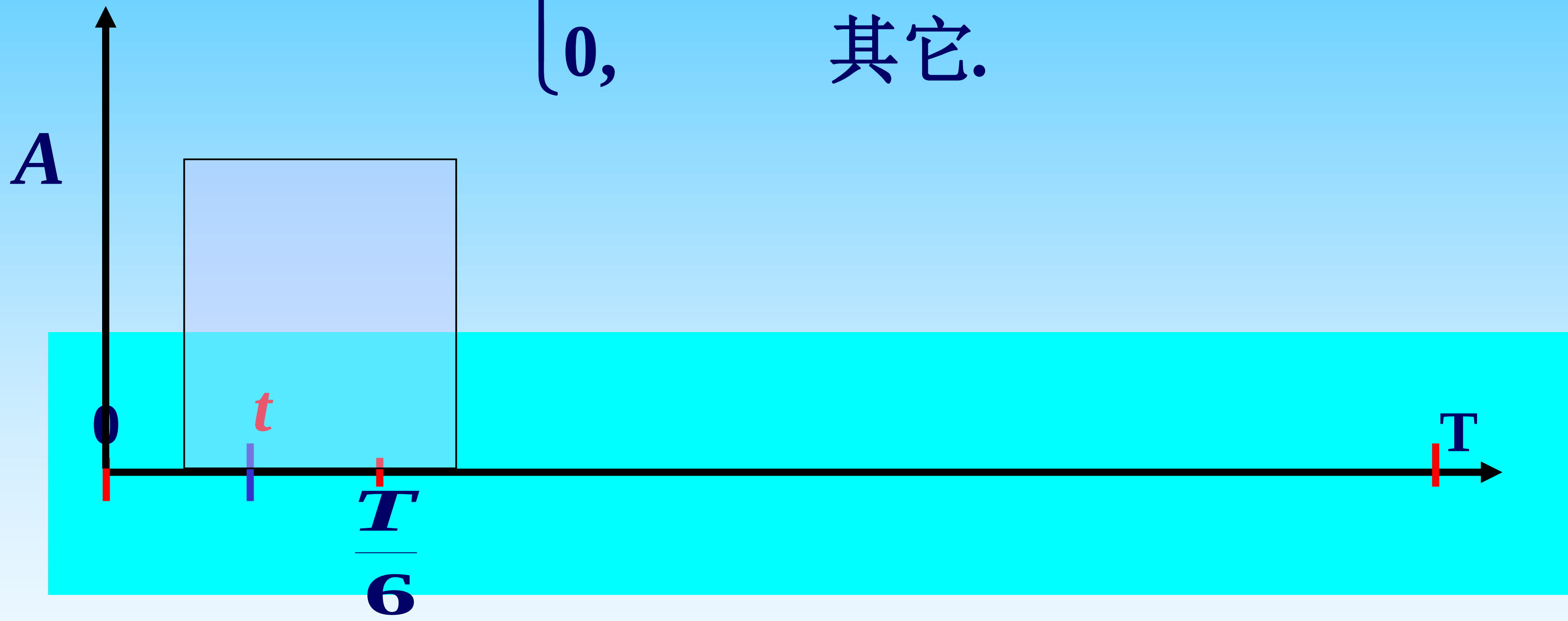
2)各脉冲开始时间为$X_j$, $j$=1,2, …, $n$,相互独立.

3) $X_j \sim U(0,5/6T)$.

**解** $X_j$的概率密度为

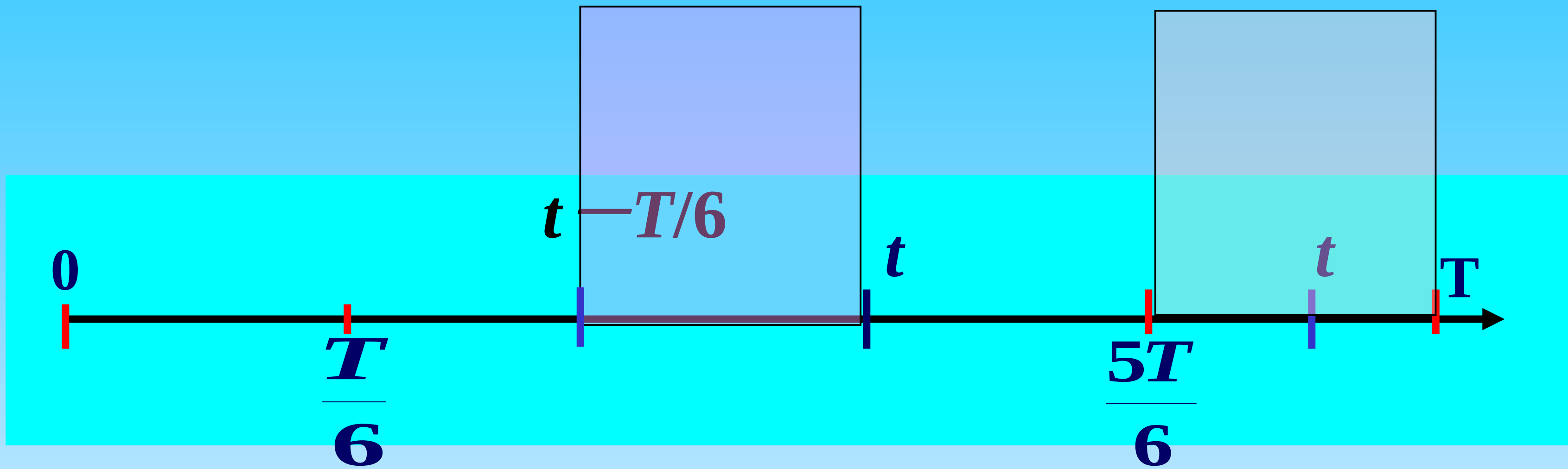
# 随机过程的分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{5T}, & 0\le x\le \dfrac{5}{6}T;\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$




当$0\le t<T/6$, $P\{Y(t,\omega)=A\}=P\{0\le X<t\}=\dfrac{6t}{5T}$;

# 随机过程的分布




当$T/6 \le t < 5T/6$,

$$P\{Y(t,\omega)=A\}=P\{t-\frac{T}{6}\le X<t\}=\frac{1}{5};$$

当$5T/6 \le t < T$,

$$P\{Y(t,\omega)=A\}=P\{t-\frac{T}{6}< X<\frac{5T}{6}\}=\frac{6}{5T}(T-t).$$

**Ex.3** 设随机过程

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Theta), \qquad t \in R,$$

其中ω是正常数, 随机变量$A$ 与Θ相互独立, $A \sim U(0,1)$, $\Theta \sim U(-\pi, \pi)$, 试求过程的一维概率密度.

解 1) 首先设 $Y(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$

其中$a$ 是常数,易求得$Y(t)$的一维概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - y^2}}, & |y| < a; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

?

2) 因 $Y(t)=X(t|A=a)$,有 $f_{X|A}(x|a)=f_Y(x)$

独立性

用全数学期望公式

$$f_X(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|A}(x|a)dF_A(a)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|A}(x|a)f_A(a)da$$

$$=\int_0^1 f_{X|A}(x|a)da$$

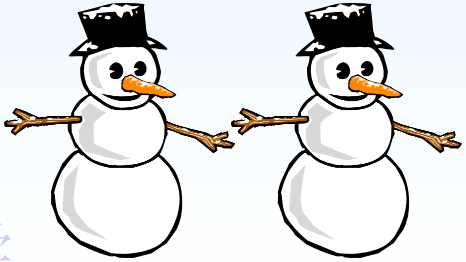
$$=\begin{cases}\int_{|x|}^{1}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}da, & |x|<1;\\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$

?

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right), & |x|<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

**思考题:**

为什么可以用有限维分布函数族描述随机过程的统计特性?



## 求Y的特征函数

$$\varphi_Y(\lambda) = E[e^{i\lambda a\cos(\omega t+\Theta)}] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda a\cos(\omega t+\theta)} \frac{1}{2\pi} d\theta$$

周期性 $$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda a\cos\theta} \frac{1}{2\pi} d\theta$$

偶函数 $$= \int_{0}^{\pi} e^{i\lambda a\cos\theta} \frac{1}{\pi} d\theta$$

$$u = a\cos\theta, \qquad du = -a\sin\theta d\theta = -\sqrt{a^2-u^2}\, d\theta$$

$$\varphi_Y(\lambda) = \int_{-a}^{a} e^{i\lambda u} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du$$

$$P\{X(t)\in\Delta x\}=E\{P\{X(t)\in\Delta x\mid A\}\}$$

全期望

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{X(t)\in\Delta x\mid A=a\}dF_A(a)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|A}(x|a)dF_A(a)\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow\quad f_X(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|A}(x|a)dF_A(a)$$