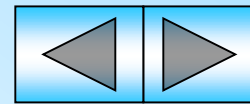


§ 4.5 随机过程的均方积分（一）

本节主要介绍黎曼意义下的均方积分概念

一、均方积分概念

定义4.5.1 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是二阶矩过程,
 $f(t), t \in [a, b]$ 是普通函数,任意取分点 $a=t_0 <$
 $t_1 \cdots < t_n = b$,将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,做和



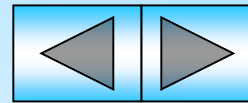
$$\sum_{k=1}^n f(t_k^*) X(t_k^*) (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(t_k^*) X(t_k^*) \Delta t_k$$

其中 $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, n$.

记
$$\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$$

若均方极限
$$\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k^*) X(t_k^*) \Delta t_k$$

存在, 且与区间 $[a, b]$ 的分法及 t^* 的取法无关,
称为二阶矩过程 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼均方
积分, 记为



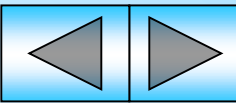
$$\int_a^b f(t) X(t) dt$$

特别当 $f(t) \equiv 1, t \in [a, b]$ 则

$$\int_a^b X(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(t_k^*) (t_k - t_{k-1})$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 在 $[a, b]$ 上的**均方积分**.

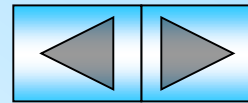
定义4.5.2 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是二阶矩过程,
 $f(t), t \in [a, b]$ 是普通函数,任意取分点 $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b$,将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,若均方极限



$$\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k^*) [X(t_k) - X(t_{k-1})]$$

存在, 且与区间 $[a, b]$ 的分法及 t^* 的取法无关,
称为 $f(t)$ 对二阶矩过程 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼—
斯蒂阶均方积分, 记为

$$\int_a^b f(t) dX(t)$$

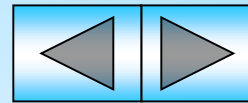


定义4.5.3 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是二阶矩过程,
 $W(t)$ 是维纳过程, 任意取分点 $a=t_0 < t_1 \cdots < t_n=b$,
将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 若均方极限

$$\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(t_{k-1})[W(t_k) - W(t_{k-1})]$$

存在, 且与区间 $[a, b]$ 的分法无关. 则称此均方为
 $X(t)$ 关于维纳过程的伊藤积分. 记为

$$\int_a^b X(t) dW(t)$$

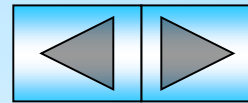


二、均方积分准则

定理4.5.1 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是二阶矩过程,
 $f(t)$ 是普通函数, $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积
的充分必要条件是二重积分

$$\int_a^b \int_a^b f(s) \overline{f(t)} R(s, t) ds dt$$

存在, 其中 $R(s, t)$ 是 $X(t)$ 的自相关函数..



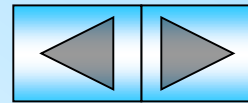
证 充分性 若 $f(s)\overline{f(t)}R(s,t)$ 的二重积分存在,
对 $[a, b] \times [a, b]$ 的任意分割

$a=t_0 < t_1 \cdots < t_n=b, a=s_0 < s_1 \cdots < s_m=b$ 及任意

$(s_k^*, t_j^*) \in (s_{k-1}, s_k] \times (t_{j-1}, t_j], (k=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n)$

有
$$\int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f(s_k^*)\overline{f(t_j^*)}R(s_k^*, t_j^*)\Delta s_k \Delta t_j$$

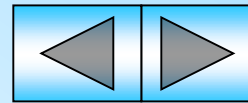


存在,其中

$$\Delta s = \max_{1 \leq k \leq m} \Delta S_k, \quad \Delta S_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\Delta t = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1},$$

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n E[f(s_k^*) X(s_k^*) \overline{f(t_j^*) X(t_j^*)}] \Delta s_k \Delta t_j \\ &= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n E[f(s_k^*) X(s_k^*) \Delta s_k \overline{f(t_j^*) X(t_j^*) \Delta t_j}] \end{aligned}$$



$$= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} E \left[\sum_{k=1}^m f(s_k^*) X(s_k^*) \Delta s_k \sum_{j=1}^n f(t_j^*) X(t_j^*) \Delta t_j \right]$$

由均方收敛准则知

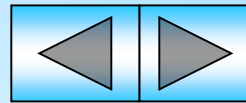
$$\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k^*) X(t_k^*) \Delta t_k$$

存在，即 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积。

必要性 由洛易夫判别准则, 若均方积分

$$\int_a^b f(t) X(t) dt$$

存在, 则下列极限存在, 且



$$\lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} E \left[\sum_{k=1}^m f(s_k^*) X(s_k^*) \Delta s_k \overline{\sum_{j=1}^n f(t_j^*) X(t_j^*) \Delta t_j} \right]$$

$$= E \left[\int_a^b f(s) X(s) ds \overline{\int_a^b f(t) X(t) dt} \right]$$

$$(\quad = E \left[\left| \int_a^b f(t) X(t) dt \right|^2 \right])$$

$$= \int_a^b \int_a^b f(s) \overline{f(t)} E[X(s) \overline{X(t)}] ds dt$$

$$= \int_a^b \int_a^b f(s) \overline{f(t)} R(s, t) ds dt$$

注1 有书认为必要性不成立，但未举出反例.

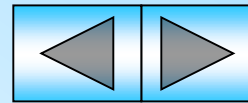
注2 实际推出重要公式

$$E\left[\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2\right] = \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

推论1 若 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 的自相关函数 $R(s, t)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上可积, 则 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积

$$E\left[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2\right] = \int_a^b \int_a^b R(s, t)dsdt$$

重要
公式



推论2 若 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 则 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积.

证 根据均方连续性准则,

$\{X(t), t \in [a, b]\}$ 均方连续, **定理4.3.1之推论**

$X(t)$ 的自相关函数 $R(s, t)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续,

$\Rightarrow R(s, t)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上可积,

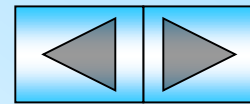
推论1 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积.

EX.1 设 $X(t)=A\cos at+B\sin at, t\geq 0$, a 为常数
 $a\neq 0$, A 与 B 相互独立, 均服从 $N(0, \sigma^2)$, 判断 $X(t)$
是否均方可积.

解 $m_X(t) = E(A)\cos at + E(B)\sin at = 0,$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= E[A^2 \cos as \cos at + B^2 \sin as \sin at] \\ &= \sigma^2 \cos a(t-s). \end{aligned}$$

在 $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$ 上连续, 故 $X(t)$ 对所有
 $t\geq 0$ 均方连续, 从而均方可积(仅在有限区间
上).



定义4.5.3 广义黎曼均方积分定义为

$$\int_a^\infty f(t)X(t)dt \triangleq \text{l.i.m}_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)X(t)dt$$

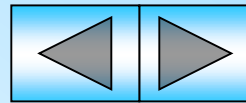
推论3 广义均方积分 $\int_a^\infty f(t)X(t)dt$

存在的充分必要条件是广义二重积分

$$\int_a^\infty \int_a^\infty f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

存在且有限.

三、均方积分性质



定理4.5.2 均方积分具有以下性质

1) 均方积分唯一性

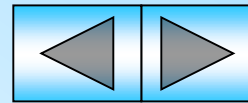
若 $\int_a^b f(t)X(t)dt = Y_1, \int_a^b f(t)X(t)dt = Y_2$

则 $Y_1 = Y_2 \quad (a.e.).$

2) 线性性质

若 $X(t), Y(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积, 则对 $\forall \alpha, \beta \in C$

$$\begin{aligned} & \int_a^b [\alpha f(t)X(t) + \beta g(t)Y(t)]dt \\ &= \alpha \int_a^b f(t)X(t)dt + \beta \int_a^b g(t)Y(t)dt \end{aligned}$$



特别有

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dt = \alpha \int_a^b X(t) dt + \beta \int_a^b Y(t) dt$$

3) 可加性

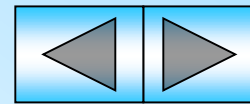
设 $a < c < b$, 若 $\int_a^c f(t)X(t)dt$ 及 $\int_c^b f(t)X(t)dt$ 存在,

则
$$\int_a^b f(t)X(t)dt = \int_a^c f(t)X(t)dt + \int_c^b f(t)X(t)dt$$

以上各条性质类似于普通黎曼积分.

4) 设 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 均方连续, 则

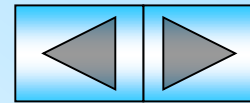
$$\left\| \int_a^b X(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|X(t)\| dt;$$



证 由定理4.5.1之推论1

$$\begin{aligned} E\left[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2\right] &= \int_a^b \int_a^b R(s,t)dsdt \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |R(s,t)|dsdt = \int_a^b \int_a^b |E[X(s)\overline{X(t)}]|dsdt \\ &\leq \int_a^b \int_a^b [E(|X(s)|^2)E(|X(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}dsdt \\ &= \left\{\int_a^b [E(|X(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}dt\right\}^2 = \left\{\int_a^b \|X(t)\|dt\right\}^2 \end{aligned}$$

许瓦兹
不等式



定理4.5.3 均方积分的矩

若 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积, 则有

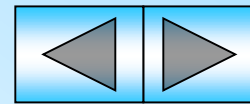
$$1) \quad E\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\right] = \int_a^b f(t)m_X(t)dt$$

$$2) \quad E\left[\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2\right] = \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

定理4.5.1
之注2

证 1)

$$\begin{aligned} E\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\right] &= E\left[\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k\right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} E\left[\sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k\right] \end{aligned}$$



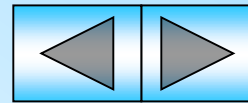
$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_k f(t_k^*) E[X(t_k^*)] \Delta t_k = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_k f(t_k^*) m_X(t_k^*) \Delta t_k \\
 &= \int_a^b f(t) m_X(t) dt
 \end{aligned}$$

续EX.1 设 $X(t) = A \cos at + B \sin at, t \geq 0$, a 为常数 $a \neq 0$, A 与 B 相互独立, 均服从 $N(0, \sigma^2)$, 令

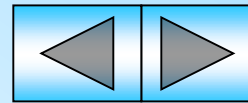
$$Y = \int_0^2 X(s) ds,$$

计算 $E(Y)$ 和 $D(Y)$.

解 $E(Y) = \int_0^2 E[X(s)] ds = 0,$



$$\begin{aligned} D(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= E(Y^2) \\ &= \int_0^2 \int_0^2 R_X(u, v) du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^2 \sigma^2 \cos a(u - v) du dv \\ &= \frac{2\sigma^2}{a^2} (1 - \cos 2a) \end{aligned}$$



EX.2 设 A, B 相互独立同分布于 $N(0, \sigma^2)$,
 $X(t) = At + B$, $t \in [0, 1]$, 试求下列随机变量的数学期望.

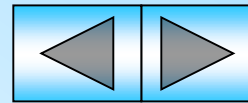
$$Z = \int_0^1 X(t) dt, \quad Y = \int_0^1 X^2(t) dt,$$

解 $\because E[X(t)] = E(A)t + E(B) = 0,$

$$E[X^2(t)] = E[A^2 t^2 + 2AB + B^2]$$

$$= E(A^2)t^2 + E(B^2) + 2E(A)E(B) = \sigma^2(1 + t^2)$$

$$\therefore E[Z] = \int_0^1 E[X(t)] dt = 0,$$



$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^1 E[X^2(t)] dt \\ &= \int_0^1 \sigma^2(1+t^2) dt = \frac{4}{3} \sigma^2. \end{aligned}$$

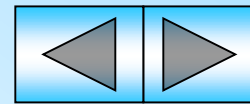
EX.3 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数为.

$$C_X(t_1, t_2) = (1 + t_1 t_2) \sigma^2$$

试求 $Y(s) = \int_0^s X(t) dt$ 的协方差函数与方差函数

解

$$\begin{aligned} C_Y(s_1, s_2) &= E\{[Y(s_1) - E(Y(s_1))][Y(s_2) - E(Y(s_2))]\} \\ &= E\{[Y(s_1)Y(s_2)] - E[(Y(s_1))]E[(Y(s_2))]\} \end{aligned}$$



$$= R_Y(s_1, s_2) - m_Y(s_1)m_Y(s_2)$$

$$= \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} R_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \int_0^{s_1} m_X(t_1) dt_1 \int_0^{s_2} m_X(t_2) dt_2$$

$$= \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} [R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)] dt_1 dt_2$$

$$= \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} C_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (= C_Y(s_1, s_2))$$

积分过
程的协
方差计
算公式

$$= \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} (1 + t_1 t_2) \sigma^2 dt_1 dt_2 = \sigma^2 s_1 s_2 (1 + \frac{1}{4} s_1 s_2)$$

$$D_Y(s) = C_Y(s, s) = \sigma^2 s^2 (1 + \frac{1}{4} s^2)$$

