§6.3 齐次马氏链状态的分类(二)

三、状态间的关系

定义6.3.8 对 $\forall i, j \in E$，若存在 $n \ge 1$，使 $p_{ij}^{(n)} > 0$，**称自状态 i 可达状态 j，记为 $i \to j$.**

若 $i \to j$，$j \to i$ 同时成立，**称状态 i 与状态 j 互通，**记为 $i \leftrightarrow j$.

注 自 i 可达 j 表示从节点 i 出发，存在一条路径可到达节点 j.

引理2 可达具有传递性

若 $i \to j$, 且 $j \to k$, 则 $i \to k$.

证 $i \to j$, 则 $\exists\, r \ge 1$, 使 $p_{ij}^{(r)} > 0$;

$j \to k$, 则 $\exists\, n \ge 1$, 使 $p_{jk}^{(n)} > 0$;

由 C - K 方程

$$p_{ik}^{(r+n)} = \sum_{m \in E} p_{im}^{(r)} p_{mk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(r)} p_{jk}^{(n)} > 0.$$

即有 $i \to k$.

引理3 若补充定义

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

则互通关系是状态空间E上的一个等价关系，即满足

1) **自反性(律)** $i \to i;$

2) **对称性** $i \leftrightarrow j$, **当且仅当** $j \leftrightarrow i;$

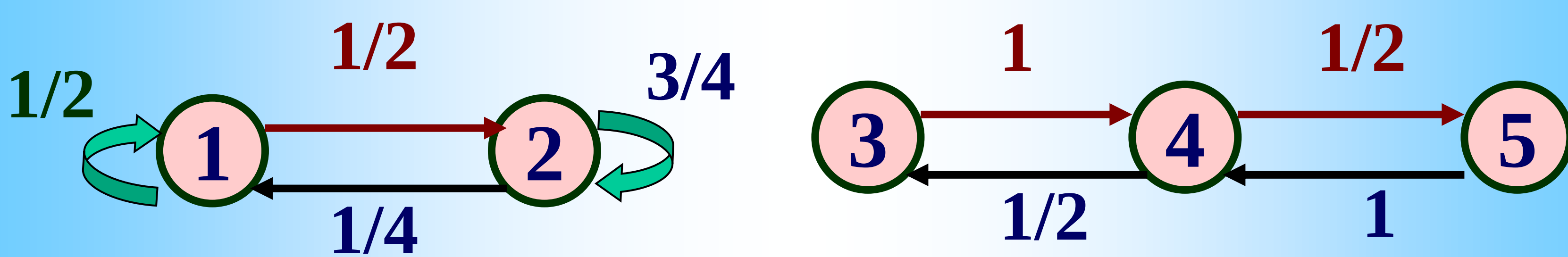
3) 传递性 $i \leftrightarrow k$ 且 $k \leftrightarrow j$, 则 $i \leftrightarrow j$.

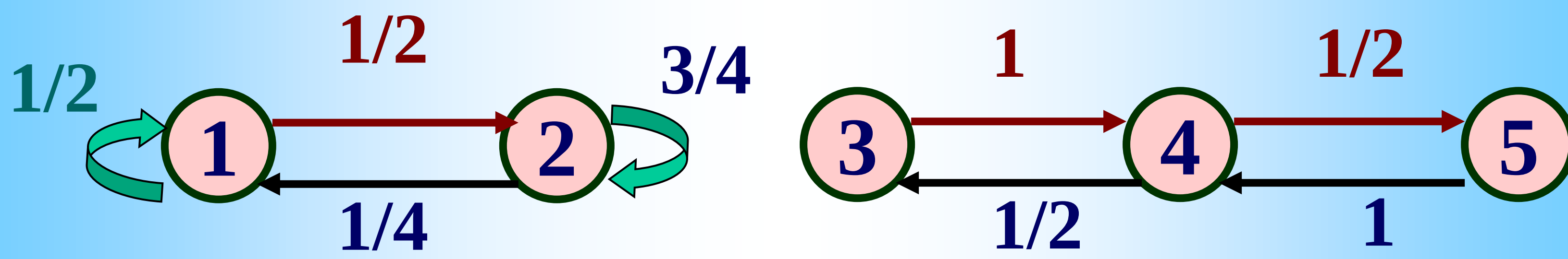
EX.4 设马氏链的状态空间 $E=\{1,2,3,4,5\}$, 其一步转移矩阵为

$$P=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \end{array}$$

其一步状态转移图如下





按互通性可将E 分解为

$$E=\{1,2\}\cup\{3,4,5\}=C_1\cup C_2$$

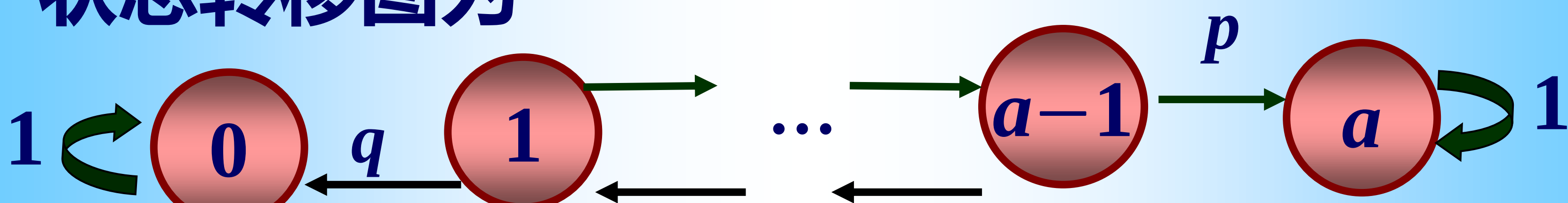
不相交集

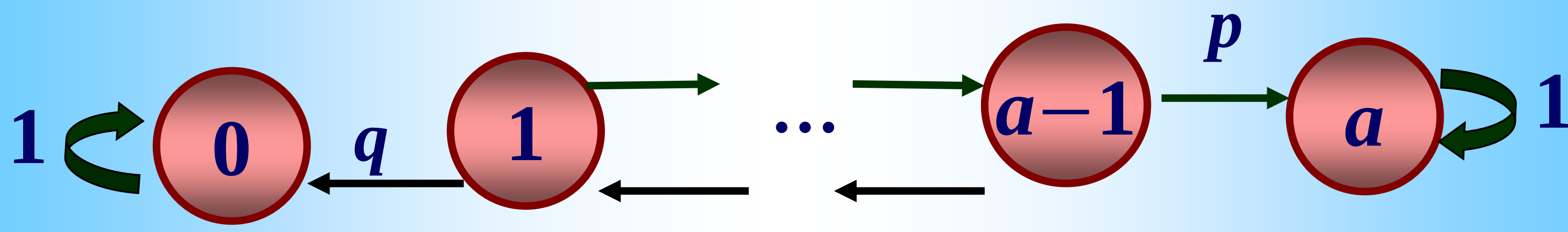
其中，C_i中的状态是互通的, 质点运动一旦位于某一类，以后它的状态都保持在此类.

EX.5 设马氏链的状态空间$E=\{0,1,2,\dots,a\}$，其一步转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (0<q<1,\ 0<p<1)$$

状态转移图为





有 $p_{00}=1,\ f_{00}^{(1)}=1,\ f_{00}^{(n)}=0,(n>1);$

$p_{aa}=1,\ f_{aa}^{(1)}=1,\ f_{aa}^{(n)}=0,(n>1);$

按互通性有 $E=\{0\}\cup\{1,2,\ldots,a-1\}\cup\{a\}$

$=C_1\cup C_2\cup C_3$

状态可由第二类到达第一类或第三类, 反之不真.

定理6.3.5 设状态i 和j 互通, 则

1) i 和j 同为非常返的;

2) i 和j 同为零常返的;

3) i 和j 同为正常返非周期的(遍历状态的);

4) i 和j 都是正常返有周期的, 具有相同周期.

结论 互通状态具有相同类型

证明： 由于 $i \leftrightarrow j$, 故存在正整数 k 和 l, 使得

$$p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(l)} > 0.$$ 根据C-K方程，我们有

$$p_{ii}^{(k+n+l)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)}, \quad p_{jj}^{(l+n+k)} \geq p_{ji}^{(l)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}$$

在不等式两端同时关于 n 求和，由定理6.3.3和定理6.3.4可得，i 与 j 具有相同的常返性。

令 d_i 和 d_j 分别为 i 和 j 的周期，若 $p_{jj}^{(n)} > 0\ (d_j \mid n)$

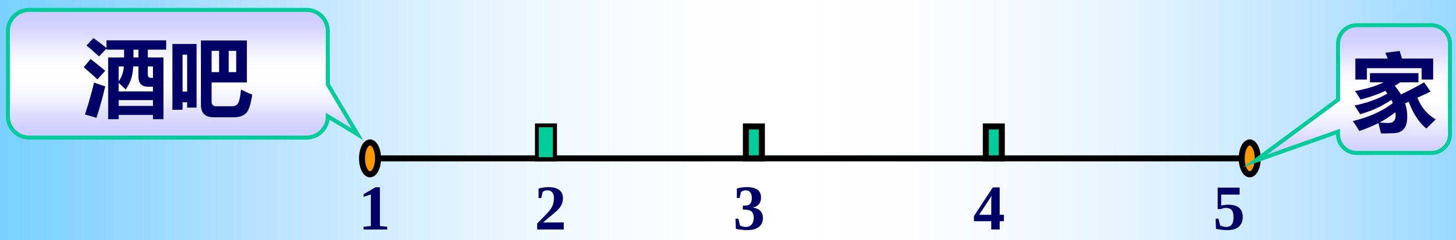
由上面第一个不等式可得 $d_i \mid (k+n+l)$.

再根据C-K方程，$p_{ii}^{(k+l)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(l)} > 0 \Rightarrow d_i \mid (k+l)$

因此, $d_i \mid n$. 由周期的定义(最大公约数), 可得 $d_i \mid d_j$. 同理, 可得 $d_j \mid d_i$.

#

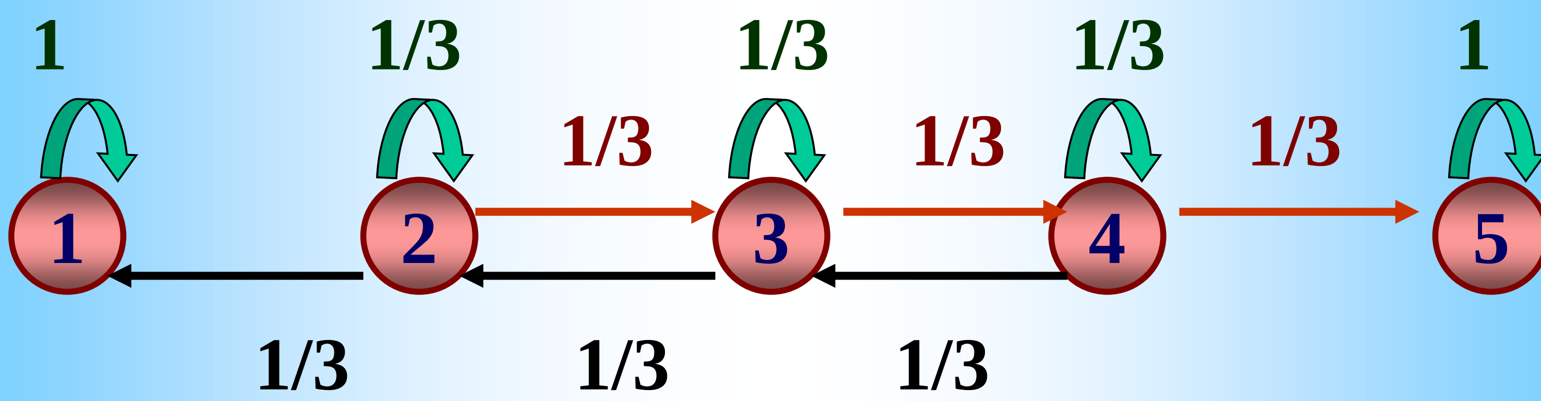
续EX.3 醉汉问题



醉汉在街上徘徊，在每一个街口以1/3的概率停下，以1/3的概率向前或向后.

若他又返回酒吧或到家门，不再游动 .

状态转移图为

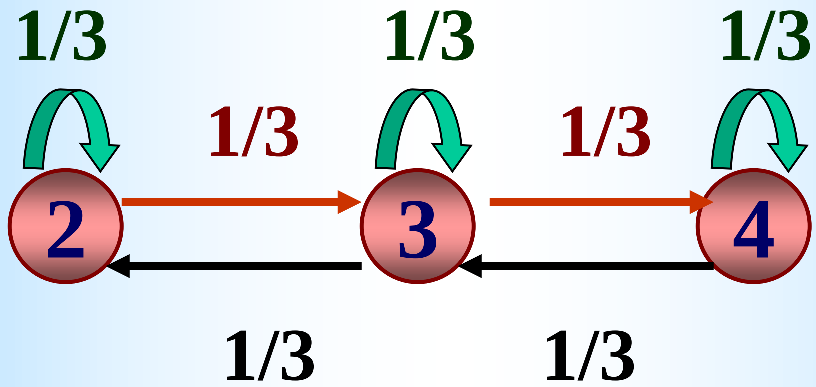


分 析 状 态 “2” 的 类 型 很 困 难.

先讨论状态“3”的类型.

有限次首达状态“3”的概率分别为

$$f_{33}^{(1)}=\frac{1}{3},\quad f_{33}^{(2)}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{2},\quad f_{33}^{(3)}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{3},\cdots$$



一般有 $f_{33}^{(n)} = 2(\frac{1}{3})^n, \quad n = 2,3,\cdots$

状态3 的最终返回概率为

$$f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = \frac{1}{3} + 2[(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + \cdots (\frac{1}{3})^n + \cdots]$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \times \frac{[{}^1\!/_3]^2}{1 - {}^1\!/_3} = \frac{2}{3} < 1,$$

⇒ **状态3是非常返的.**

因 $p_{33}^{(1)}=\dfrac{1}{3}, \Rightarrow d_3=1,$ ⇒ **状态3是非周期的.**

由于 $2 \leftrightarrow 3,\ 3 \leftrightarrow 4,$

故2 和4 都是非周期非常返的，且

$$E=\{1\}\cup\{5\}\cup\{2,3,4\}.$$

关于常返状态有下结论：

定理6.3.6 **设**$i\in E$**且常返**,若 $i \to j$,**则**

1) j 也是常返态;

2) $i \leftrightarrow j$;

3) $f_{ij} = f_{ji} = 1.$

证明：由$i \to j$，存在$m>0$使得$p_{ij}^{(m)} > 0.$

因i 常返，故 $P_i\{N_i = \infty\} = 1$，则

$$0 = P_i(X_k \neq i,\ \forall k > m,\ X_m = j)$$

$$= P_i(X_m = j)P_i(X_k \neq i,\ \forall k > m \mid X_m = j)$$

$$= p_{ij}^{(m)}(1 - f_{ji}) \Rightarrow f_{ji} = 1$$

一步转移概率

四、闭集、状态空间的分解

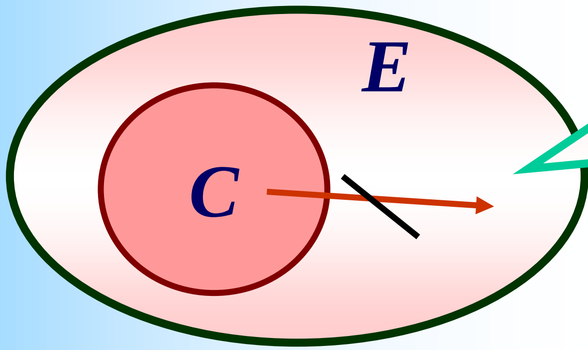
定义6.3.9 设E是状态空间，$C\subset E$，若对$\forall i\in C$及$j\notin C$，都有$p_{ij}=0$，称C为一个**闭集**.

注 C是闭集的**充要条件**是对任意的$i\in C$和$j\notin C$，及$n\geq 1$，都有$p_{ij}^{(n)}=0$.

证明: 假设$n=k$时，对任意$i\in C, j\notin C$，有$p_{ij}^{(k)}=0$，

则
$$p_{ij}^{(k+1)}=\sum_{r\in C}p_{ir}^{(k)}p_{rj}+\sum_{r\notin C}p_{ir}^{(k)}p_{rj}$$
$$=\sum_{r\in C}p_{ir}^{(k)}\cdot 0+\sum_{r\notin C}0\cdot p_{rj}=0.$$

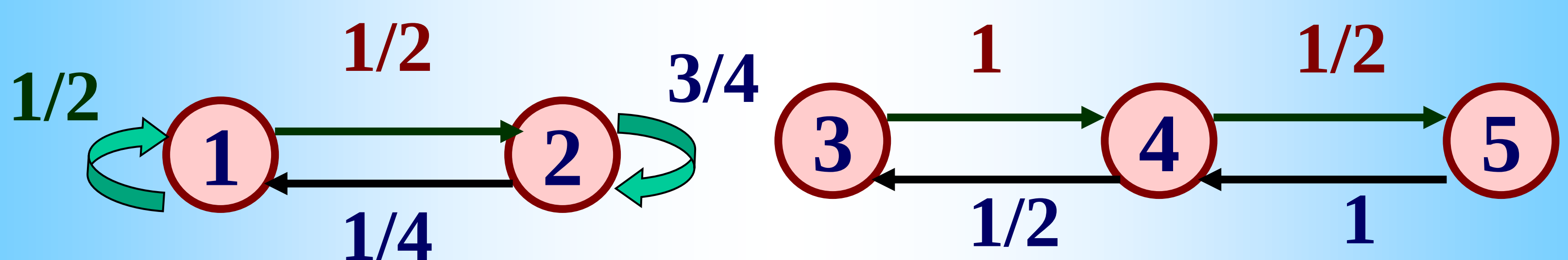
直观解释 自C 内部不能到达C的外部.



如果质点运动状态进入C,将永远停留在C 内.

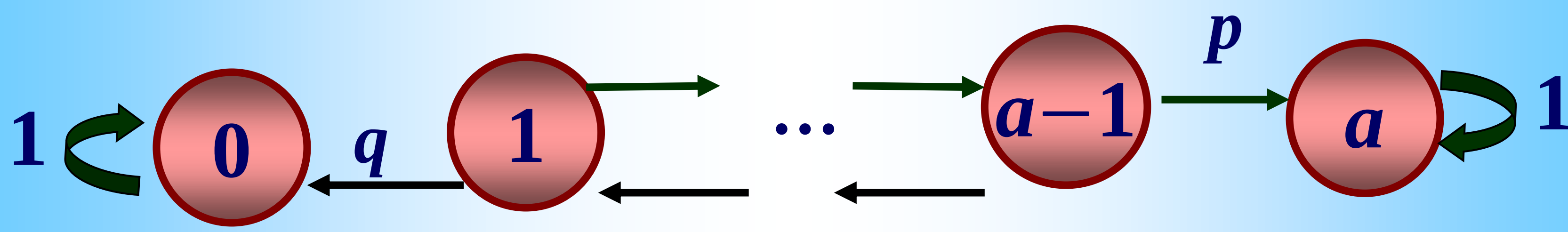
续EX.4 $E=\{1,2\}\cup\{3,4,5\}=C_1\cup C_2$

E、C_1和C_2都是闭集.



续EX.5 有$E=\{0\}\cup\{1,2,\ldots,a-1\}\cup\{a\}$

$$=C_1\cup C_2\cup C_3$$



E、C_1、C_3都是闭集，而C_2不是闭集.

整个状态空间构成一个闭集.

定义6.3.10 若状态的单元素集$\{i\}$是闭集,称 i 是**吸收状态**.

续EX.5 有$E=\{0\}\cup\{1,2,\ldots,a-1\}\cup\{a\}$,状态“0”和状态“$a$”是吸收态.

定义6.3.11 若闭集C 中不再含有非空的闭真子集,称C是**不可约的**(或不可分的,最小的).

若马氏链的状态空间E 是不可约的, 称此马氏链是**不可约马氏链**.

定理6.3.7 马氏链所有常返态构成一闭集.

证明 由定理6.3.6知道，从常返态出发，只能到达常返态. 故常返态集是闭集.

推论 不可约马氏链或者没有非常返态，或者没有常返态.

引理4

1) C是闭集 $\Longleftrightarrow p_{ij}=0, \forall i \in C,\ j \notin C.$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j\in C} p_{ij}=1, \forall i \in C;$$

2) i 为吸收状态 $\Longleftrightarrow$ $p_{ii}=1.$

引理5 记 $C(i)=\{i\}\cup\{j\in E \mid i\to j\}$，有

1) $C(i)=C(j)\Leftrightarrow i\leftrightarrow j;$

2) $C(i)$ 是闭集（可约或不可约都有可能）.

推论 齐次马氏链**不可约**的充要条件是它的任意两个状态均互通.

定理6.3.8 **分解定理**

齐次马氏链的状态空间可唯一地分解成有限个或可列多个不相交的状态子集之并.

$$E=N\cup C_1\cup C_2\cup\ldots$$

其中 1）N是所有**非常返**态所成之集；

2）每个C_n,（n=1,2,…）均为**常返**状态组成的**不可约闭集**.

注1 对$\forall n \geq 1$, C_n内的状态均互通，

从而具有相同的状态类型.

注2 对$\forall i, j \in C_n$，$f_{ij} = 1$;

注 3 **从常返状态出发,不可能转移到非常返状态.**

定理6.3.9 **设N是非常返态集，$i \in N$，j是常返态，则最终概率f_{ij}满足以下方程**

$$f_{ij} = \sum_{k \in N} p_{ik} f_{kj} + \sum_{k \in H} p_{ik}, \quad (i \in N)$$

其中$H=C(j)$.

证明 $\because\ f_{kj}=\begin{cases}1, & k\in H;\\ 0, & k\notin H \text{ 且 } k\notin N.\end{cases}$

$$\therefore\ f_{ij}=P\{\text{经有限步到达}j\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in E}P\{\text{经有限步到达}j\mid X(0)=i,X(1)=k\}$$

$$\cdot P\{X(1)=k\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in N}p_{ik}f_{kj}+\sum_{k\in H}f_{kj}p_{ik}+\sum_{\substack{k\notin H\\ k\notin N}}f_{kj}p_{ik}$$

$$= \sum_{k \in N} f_{kj} p_{ik} + \sum_{k \in H} p_{ik}$$

EX.6 设某企业在每次经营中赢利、亏损的概率分别为p和$1-p$ $(0<p<1)$, 各次经营是独立的. 求自有i个单位财产开始经营, 企业的财产在达到零前曾达到N个单位的概率.

分析 记$X(n)$—n时刻企业的财产.

$\{X(n), n \geq 1\}$是齐次马氏链,一步转移概率为

$$p_{00} = 1, \quad p_{NN} = 1;$$

$$p_{i\,i+1} = p = 1 - p_{i\,i-1}, \quad (i = 1,2,\cdots, N-1)$$

状态空间 $E = \{0\} \cup \{N\} \cup \{1,2,\cdots, N-1\}$

$\{1,2,\ldots,N-1\}$是非常返状态集, 每一个非常返态仅到达有限次.

即在进行限次经营后, 企业或者破产或者达到目标值N.

现需求 $f_{iN} = ?, \quad i = 1,2,\cdots, N-1.$

解

记 $f_i \triangleq f_{iN} = P\{$经有限步最终达到$N \mid X(0)=i\}$

根据定理6.3.9的结论，有

$$f_i = pf_{i+1} + qf_{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,N-1,$$

或 $$f_{i+1} - f_i = \frac{q}{p}(f_i - f_{i-1}), (\text{因 } p+q=1)$$

由 $f_0 = f_{0N} = 0$，得

$$f_2 - f_1 = \frac{q}{p}(f_1 - f_0) = \left(\frac{q}{p}\right) f_1,$$

$$f_3 - f_2 = \frac{q}{p}(f_2 - f_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 f_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_i - f_{i-1} = \frac{q}{p}(f_{i-1} - f_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} f_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_N - f_{N-1} = \frac{q}{p}(f_{N-1} - f_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} f_1,$$

将前$i-1$个等式相加, 得

$$f_i - f_1 = f_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\frac{q}{p}} f_1, & 如 p \neq \dfrac{1}{2}; \\ i\ f_1, & 如 p = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

又因 $f_N = f_{NN} = 1$, 推得

$$f_1 = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N},$$

故

$$f_i=\begin{cases}\dfrac{1-\left(q/p\right)^i}{1-\left(q/p\right)^N}, & \text{如}P\neq\dfrac{1}{2};\\ i/N, & \text{如}P=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

当$N\to\infty$时

$$f_i=\begin{cases}1-\left(q/p\right)^i, & p>\dfrac{1}{2};\\ 0, & P\leq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

定理6.3.10 1）若j正常返非周期，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}},\ \forall i \in E.$$

2）若j正常返周期为d，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{jj}}.$$

3）若j非常返或零常返，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,\ \forall i \in E.$$

定理6.3.11 1）极限分布是平稳分布。

注：若马氏链有两个及以上常返闭集，则马氏链不具有遍历性。

2）对于不可约马氏链，

正常返 $\Leftrightarrow$ 存在平稳分布；

此时，平稳分布存在且唯一，并有 $\pi_j = 1/\mu_{jj},\ j \in E.$

3）对于不可约非周期马氏链，

正常返 $\Leftrightarrow$ 存在平稳分布 $\Leftrightarrow$ 存在极限分布；

若上述之一满足，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j,\quad i, j \in E.$

五、有限马氏链

若状态空间E 是有限集合, 称为有限马氏链.

1）状态空间可分解为

$$E=N\cup C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_k$$

其中, N为非常返集，$C_1,C_2,\ldots,C_k$为正常返闭集.

2) 没有零常返状态，必有正常返状态;

3) 所有非常返状态组成的集合不是闭集；且

$$P_i\{\tau<\infty\}=1,\ \forall i\in N \quad \text{其中}\ \tau=\min\{n: n\geq 1, X(n)\notin N\}$$

4）马氏链具有遍历性当且仅当$E=C$，其中C为正常返非周期不可约闭集。

（平稳分布）定理6.3.12 有限马氏链$\{X(n)\}$状态空间分解为

$$E=N\cup C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_k$$

转移矩阵可写为分块矩阵，

$$P=\begin{array}{c} N \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{array}\begin{bmatrix} Q & R_1 & R_2 & \cdots \\ 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

其中P_s为随机矩阵，s=1,…k。

令Π_s为马氏链$\{X(n)\}$限制在正常返闭集C_s上的平稳分布。则马氏链$\{X(n)\}$的平稳分布为

$$\Pi=(\vec{0},\lambda_1\Pi_1,\lambda_2\Pi_2,\cdots,\lambda_k\Pi_k),\ 0\le\lambda_s\le 1,\ \sum_{s=1}^{k}\lambda_s=1.$$

注：$\vec{0}$是行向量，对应非常返集N。

推论 有限马氏链$\{X(n)\}$状态空间分解为 $E=N\cup C$，即只有一个正常返闭集

转移矩阵可写为分块矩阵，其中P_C为随机矩阵。

$$P=\begin{array}{c}N\\C\end{array}\begin{bmatrix}Q & R\\ 0 & P_C\end{bmatrix}$$

令Π_C为马氏链$\{X(n)\}$限制在正常返闭集C上的平稳分布。则马氏链$\{X(n)\}$的(唯一)平稳分布为

$$\Pi=(\vec{0},\Pi_C)$$

若C是正常返非周期闭集，则极限分布为Π。