§4.5 随机过程的均方积分（二）

四、均方不定积分

定义4.5.4 设$X(t)$ 在$[a, b]$在上均方连续,

$$Y(t)=\int_a^t X(s)ds \qquad \forall t\in[a,b],$$

称为$X(t)$在$[a, b]$上的**均方不定积分**.

定理4.5.4 设$X(t)$在$[a, b]$上均方连续,则其在$[a, b]$上的均方不定积分 $Y(t)$ 在$[a, b]$上均方可导, 且

1) $Y'(t) = X(t);$

2) $E[Y(t)] = \int_a^t E[X(s)]ds,$

$$m_Y(t) = \int_a^t m_X(s)ds;$$

3) $R_Y(s,t) = \int_a^s \int_a^t R_X(u,v)dudv.$

定理4.5.5 **(牛顿-莱布尼兹公式) 设$X(t)$在$[a,b]$上均方可导，** $X'(t)$均方连续，则有

$$\int_a^b X'(t)dt = X(b) - X(a)$$

证　$X'(t)$均方连续

$\Longrightarrow$ $Y(t)=\int_a^t X'(s)ds$ 在$[a,b]$上均方可导,且

$Y'(t)=X'(t),$　定理4.5.4之1)

$\Longrightarrow$ $[Y(t)-X(t)]'=Y'(t)-X'(t)\equiv 0,\quad t\in[a,b],$

$\Longrightarrow$ $Y(t)-X(t)=X$　与t无关的随机变量

$\Longrightarrow$ $Y(t)=X(t)+X,\quad t\in[a,b],$

令$t=a$,得　$X(a)+X=Y(a)=0,$

$$X = -X(a)$$

$$\int_a^b X'(t)dt = Y(b) = X(b) - X(a).$$

EX.4 设$\{W(t),\ t\geq 0\}$为参数为σ^2的维纳过程, 求积分过程

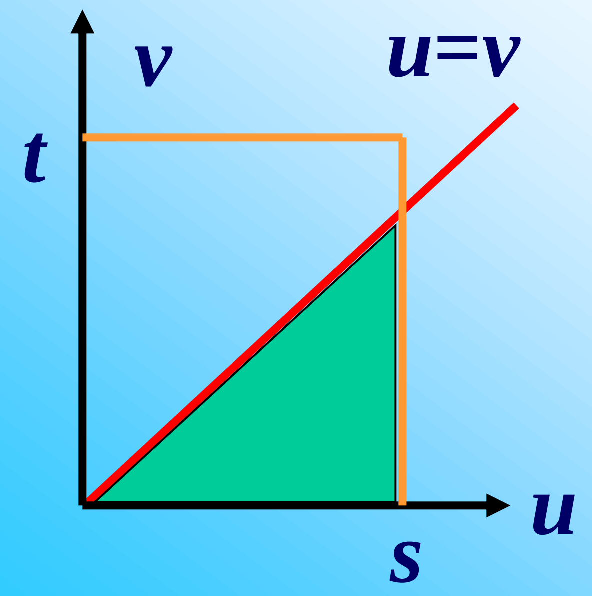
$$X(t) = \int_0^t W(s)ds, \qquad t \geq 0,$$

的均值函数和相关函数.

解 $m_X(t) = E[\int_0^t W(s)ds] = \int_0^t E[W(s)]ds = 0$,

$$R_X(s,t)=\int_0^s\int_0^t R_W(u,v)dudv$$

$$=\int_0^s\int_0^t \sigma^2 \min(u,v)dudv$$



设$s\le t$

$$R_X(s,t)=\sigma^2\int_0^s du\int_0^u \min(u,v)dv$$

$$+\sigma^2\int_0^s du\int_u^t \min(u,v)dv$$

$$=\sigma^2\int_0^s du\int_0^u vdv+\sigma^2\int_0^s du\int_u^t udv$$

$$= \frac{\sigma^2 s^2}{6}(3t - s)$$

由s 与t 的对称性

$$R_X(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 s^2}{6}(3t - s), & 0 \le s \le t; \\ \dfrac{\sigma^2 t^2}{6}(3s - t), & 0 \le t < s \end{cases}$$

维纳过程是均方连续, 均方不可导, 均方可积的二阶矩过程.

EX.5 设随机微分方程为

$$\begin{cases} X'(t) = Y(t), \\ X(a) = X_0. \end{cases} \quad t \in [a,b],$$

其中,$Y(t)$是一个已知的均方连续二阶矩过程,求$X(t)$,并求其数字特征.

解 直接积分并代入初始条件,得

$$X(t) = X(a) + \int_a^t X'(s)ds = X_0 + \int_a^t Y(s)ds$$

$$m_X(t)=E(X_0)+\int_a^t m_Y(s)ds,$$

$$R_X(s,t)=E\{[X_0+\int_a^s Y(u)du]\overline{[X_0+\int_a^t Y(v)dv]}\}$$

$$=E[|X_0|^2]+E[X_0\overline{\int_a^t Y(v)dv}]+E[\overline{X_0}\int_a^s Y(u)du]$$

$$+\int_a^s\int_a^t R_Y(u,v)dudv.$$

EX.6 验证过程

$$Y(t)=Y_0e^{-\int_a^t\beta(u)du}+\int_a^t X(s)e^{-\int_s^t\beta(u)du}ds \qquad (*)$$

是一阶线性微分方程

$$\begin{cases}Y'(t)+\beta(t)Y(t)=X(t)\\ Y(a)=Y_0\end{cases}$$

的解. 其中$\{X(t),\ t\in[a,+\infty)$是均方连续二阶矩过程, Y_0是二阶矩随机变量, $\beta(t)$是普通函数.

解 显然有边界值$Y(a)=Y_0$,

对(*)式两边求均方导数

$$Y'(t)=[Y_0e^{-\int_a^t\beta(u)du}]'_t+[\int_a^t X(s)e^{-\int_s^t\beta(u)du}ds]'_t$$

$$=-Y_0\beta(t)e^{-\int_a^t\beta(u)du}+[e^{-\int_a^t\beta(u)du}\int_a^t X(s)e^{\int_a^s\beta(u)du}ds]'_t$$

$$(\because e^{-\int_s^t\beta(u)du}=e^{-\int_a^t\beta(u)du+\int_a^s\beta(u)du})$$

$$=-Y_0\beta(t)e^{-\int_a^t\beta(u)du}-\beta(t)e^{-\int_a^t\beta(u)du}\int_a^t X(s)e^{\int_a^s\beta(u)du}ds$$

$$+e^{-\int_a^t\beta(u)du}X(t)e^{\int_a^t\beta(u)du}$$

$$=-\beta(t)Y(t)+X(t)$$

如RC积分电路的输出电压$Y(t)$输入电压$X(t)$的关系由方程

$$\begin{cases} Y'(t)+\alpha Y(t)=\alpha X(t) \\ Y(0)=0 \end{cases}$$

描述, 则输出电压为

$$Y(t)=\alpha\int_a^t X(s)e^{-\int_s^t \alpha du}ds \quad =\alpha\int_a^t X(s)e^{-\alpha(t-s)}ds$$

$$=\alpha e^{-\alpha t}\int_a^t X(s)e^{\alpha s}ds, \quad t\geq 0.$$

而且 $$m_Y(t)=\alpha e^{-\alpha t}\int_a^t m_X(t)e^{\alpha s}ds, \quad t\geq 0.$$

二阶矩过程的极限、连续、导数、积分，其统计特征主要由相关函数表征.

均方可导 → 均方连续 → 均方可积

逆均不真

五、正态随机过程的均方微积分

(实值)正态过程是重要的二阶矩过程,常见正态过程的导数或积分问题.

定理4.4.6 正态随机变量序列的均方极限仍为正态分布随机变量.

即若$\{X_n, n\geq 1\}$为正态随机变量序列

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X,$$

则X是正态随机变量.

证　记 $f_n(t)=E\left(e^{jtX_n}\right),\quad f(t)=E(e^{jtX}),$

$$a_n=E(X_n),\quad a=E(X),$$

$$\sigma_n^2=D(X_n),\quad \sigma^2=D(X),$$

由均方收敛性质

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n=X,$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}a_n=a,\qquad \lim_{n\to\infty}\sigma_n^2=\sigma^2,$$

$$\Rightarrow\quad f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{jta_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} = e^{jta - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},$$

即X服从$N(a,\sigma^2)$.

定理4.4.7 m维正态随机向量序列

$$(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \cdots, X_m^{(n)})$$

的均方极限仍为m 维正态随机向量,即若

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_i^{(n)} = X_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

则$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$是m维正态随机向量

定理4.4.8 设$\{X(t), t\in T\}$为一个正态过程,且在T上均方可微, 则其导数过程$\{X'(t), t\in T\}$也是正态过程.

证 对于任意$m\geq1$，任取$t_1, t_2, \cdots, t_m\in T$, m维正态随机向量的线性变换仍为正态随向量,

$$\Longrightarrow \left(\frac{X(t_1+\Delta t)-X(t_1)}{\Delta t}, \cdots, \frac{X(t_m+\Delta t)-X(t_m)}{\Delta t}\right)$$

仍为m 维正态随机向量,当

$$\underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m}} \frac{X(t_k+\Delta t)-X(t_k)}{\Delta t} = X'(t_k), \quad k=1,2,\cdots,m$$

由定理4.4.7知 $(X'(t_1), X'(t_2), \cdots, X'(t_m))$

是m 维正态随机向量,

$\Rightarrow$ $\{X'(t), t \in T\}$是正态过程.

定理4.4.9 若$\{X(t), t\in [a, b]\}$是均方连续的正态过程, 则

$$Y(t) = \int_a^t X(s)ds, \qquad t \in (a,b]$$

也是正态过程.

证 在(a, b)上任取$t_1, t_2, \cdots, t_m$, 对每一个子区间 (a, t_k)进行分割：

$$a = s_0^{(k)} < s_1^{(k)} < \cdots < s_{n_k}^{(k)} = t_k,$$

记 $$\Delta_k = \max_{1 \le r \le n_k} (s_r^{(k)} - s_{r-1}^{(k)})$$

则 $$\sum_{r=1}^{n_k} (X(u_r^{(k)}))(s_r^{(k)} - s_{r-1}^{(k)}), \qquad u_r^{(k)} \in (s_{r-1}^{(k)}, s_r^{(k)})$$

是正态随机变量，且

$$Y(t_k) = \int_a^{t_k} X(s)ds$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} \sum_{r=1}^{n_k} (X(u_r^{(k)}))(s_r^{(k)} - s_{r-1}^{(k)}), \qquad k=1,2,\cdots,m$$

由定理4.4.7知

$$(Y(t_1), Y(t_2), \cdots, Y(t_m))$$

是m维正态随机向量,

$\Rightarrow$ $\{Y(t), t \in [a,b]\}$是正态过程.

思考题:

均方微积分是否具有普通函数微积分的所有性质, 为什么?

研究对象：二阶矩过程

基本概念：均方极限的定义

重要结论：洛易夫均方收敛判别准则

定理 (洛易夫均方收敛准则)

$X(t)$在t_0处收敛的充分必要条件是极限

$$\lim_{s,t\to t_0} E(X(s)\overline{X(t)})$$ 存在.

由此导出：

均方连续准则；

均方可微准则；

均方积分准则.

基本方法：利用洛易夫定理，将过程的均方微积分转换为相应的自相关函数的微积分研究.