

# 2017-2018 学年秋季学期组合数学考试

18th December 2023 整理

1. (17 分) 求解递归关系式:

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} - 15a_{n-2} = (-3)^n & (n \geq 2) \\ a_0 = 1, a_1 = 4 \end{cases}$$

2. (18 分) 今后 5 届 APEC 会议由美国、印度、澳大利亚、加拿大、俄罗斯 5 国举办, 一个国家只能举办一次。假如美国只能举办第一届、第二届或者第三届, 印度不能举办第一届, 澳大利亚只能举办第二届、第四届或者第五届, 加拿大不能举办第二届和第三届, 俄罗斯不能举办第五届。问未来的 5 届 APEC 会议有多少种不同的举办方案?
3. (15 分) 某省打算未来 3 个财政年度偿还一批地方债, 计划每个月至少偿还 10 亿元, 每个财政季度 (3 个月) 至多偿还 50 亿元。证明: 无论怎样安排偿还时间表, 必然存在相继的若干月, 在这些月内恰好偿还 110 亿元地方债。假定每月偿还的地方债都以整 10 亿元计。
4. (16 分) 求 2 和 8 都出现偶数次, 1 和 7 都出现奇数次, 并且 4 至少出现 1 次的  $r$  位十进制数的个数。
5. (18 分) 全国 4 个片区共 40 所大学申报国家重点实验室, 其中, 西部片区有 7 所大学, 华北片区有 18 所大学, 华东片区有 10 所大学, 华南片区有 5 所大学。假定同一片区的各所大学不加以区别, 现在要从中选取 14 所大学入围。
- (a) 问理论上有多少种不同的选区方案?
- (b) 现为了考虑不同片区的特殊情况, 如果西部片区至少有 4 家入围, 华北片区至少有 2 家入围, 问理论上有多少种不同的选取方案?

6. (6 分) 求两个“1”之间至少要有两个“0”的 14 位二进制数的个数。
7. (6 分) 求集合  $\{1, 2 \dots 64\}$  的既不含相邻整数, 也不同同时包含 1 和 64 的 28-组合的个数。
8. (12 分) 证明: 广义 Ramsey 数  $R(C_4, C_4) \geq 6$ , 其中  $C_4$  为 4 个顶点的无向回路图。