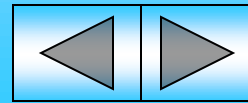


§5.4 平稳过程的谱分析简介

付氏变换在应用和理论中是一种有效的分析方法, 特别在电路分析中用付氏变换确立了时域和频域间的关系.

现用付氏变换来研究平稳过程.

一、确定函数的功率谱密度



设 $x(t)$ 是定义在时间轴上的确定函数(信号), 满足

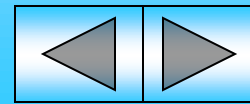
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty,$$

则 $x(t)$ 的付氏变换存在, 或称 $x(t)$ 具有频谱:

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

一般 $F_x(\omega)$ 是复函数, 有

$$F_x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \overline{F_x(\omega)},$$



$F_x(\omega)$ 的逆变换为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

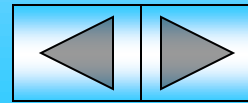
Parseval(巴塞瓦尔)公式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3)$$

称 $|F(\omega)|^2$ 为能谱密度,

$x(t)$ 在 R 上的
总能量

(3)式为信号的总能量的谱表示.



若令 $x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (T > 0)$

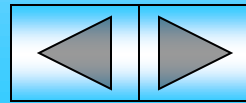
$x_T(t)$ 的付氏变换记为

$$F(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt$$

且巴塞瓦尔公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega, T)|^2 d\omega$$

二、平稳过程的功率谱密度



设过程 $\{X(t), t \in R\}$ 均方连续,均方积分

$$F_X(\omega, T) = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt$$

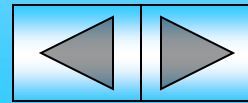
存在, 且有巴塞瓦尔等式

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} |F(\omega, T)|^2 d\omega \quad (3')$$

成立.

上式两边求均值再取极限, 左端为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right\} \quad (4)$$



称为平稳过程 $X(t)$ 的**平均功率**.

若(4)中的积分与求均值可交换顺序, 则

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E\{|X(t)|^2\} dt = E[|X(t)|^2] = R_X(0) = \Psi_X^2$$

(3') 式右端为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} E[|F(\omega, T)|^2] \right\} d\omega$$

平均功率等于过程的均方值

记 $S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|F_X(\omega, T)|^2],$

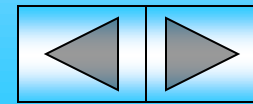
称为平稳过程 $X(t)$ 的**功率谱密度**(功率谱, 谱密度).

注 从频率角度描述平稳过程统计规律的主要数字特征.

巴塞瓦尔等式可表示为

$$\psi_X^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (5)$$

称为平稳过程的**平均功率谱表示式**.



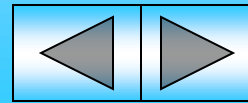
三、平稳过程相关函数的谱分解

研究平稳过程的相关函数与功率谱密度间的关系.

定理5.4.1 (维纳—辛钦) 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是均方连续平稳过程, $E[X(t)] = 0$, 当其相关函数 $R(\tau)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty,$$

有



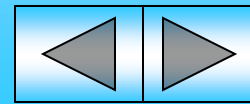
$$\begin{cases} S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, & (6) \end{cases}$$

平稳过程的相关函数与功率谱密度构成一对Fourier变换.

注 (6) 式称为**相关函数的谱分解式**.

推论1 $\{X(t), t \in R\}$ 是平稳过程, 则其谱密度 $S(\omega)$ 满足



1) $S(\omega)$ 为实值非负函数, 即

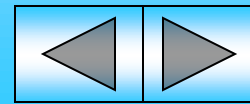
$$\overline{S(\omega)} = S(\omega) \geq 0.$$

2) 又若 $\{X(t), t \in R\}$ 是实过程, 则 $S(\omega)$ 是偶函数.

证 1) $\overline{S(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|F(\omega, T)|^2] = S(\omega) \geq 0;$

2) 实平稳过程的相关函数是偶函数, 由(5)式可得

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(u) e^{j\omega u} du$$

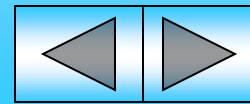
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(u) e^{-j(-\omega)u} du = S(-\omega).$$

推论2 若 $\{X(t), t \in R\}$ 为实平稳过程,则

$$\begin{cases} S(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau & (5') \\ R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega, & (6') \end{cases}$$

因 $R(\tau)$ 与 $S(\omega)$ 均为偶函数.

注 由付氏变换性质, 可得谱密度及相关函数的关系及性质, 参见 P151~P152.



EX.1 设平稳过程的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \delta(\omega),$$

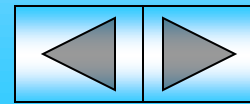
求相关函数 $R_X(\tau)$.

$$\text{其中 } \delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

解 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1,$

和 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0),$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{-j0\tau} = \frac{1}{2\pi}.$$



EX.2 设平稳过程的相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma^2 \cos a\tau,$$

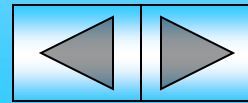
求其功率谱密度.

解 将 $R_X(\tau)$ 改写为

$$R_X(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} (e^{ia\tau} + e^{-ia\tau}),$$

因 $S_X(\omega)$ 与 $R_X(\tau)$ 互为付氏变换对的关系, 有

$$R_X(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} (e^{ia\tau} + e^{-ia\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_X(\omega) d\omega,$$

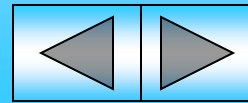


故 $S_X(\omega) = \pi \sigma^2 [\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]$.

四、谱密度的数学讨论

以上是从工程的角度，将确定函数的谱密度概念引入平稳过程，得到了相关函数的谱展式，现从数学的角度进一步讨论。

引理（波赫纳Bochner-辛钦Khintchine定理）函数 $\psi(t)$ 为特征函数的充分必要条件是 $\psi(t)$ 在 R 是一致连续，非负定且 $\psi(0)=1$ 。



定理5.4.2 (维纳—辛钦)均方连续平稳过程

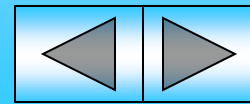
$\{X(t), t \in T\}$ 的相关函数 $R_X(\tau)$ 可表示为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} dF_X(\omega), \tau \in R \quad (7)$$

其中 $F(\omega)$ 是 R 上的非负有界, 单调不减, 右连续函数, 且

$$F_X(-\infty)=0, \quad F_X(+\infty)=2\pi R_X(0).$$

证 若 $R_X(0)=0$, 则 $R_X(\tau) \equiv 0$, 取 $F_X(\omega) \equiv 0$ 即可.



若 $R_X(0) > 0$, 令 $f(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$

有 $f(0) = \frac{R_X(0)}{R_X(0)} = 1$,

由过程的
均方连续
性及平稳
性推知.

$f(\tau)$ 是非负定函数, (因 $R(\tau)$ 非负定),
且在 R 上一致连续.

根据由波赫纳 - 辛钦定理, $f(\tau)$ 一定是
某一随机变量(或分布函数)的特征函数,

→ 存在分布函数 $G(\omega)$, 使

$$f(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} dG(\omega)$$

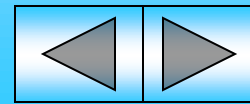
令 $F_X(\omega) = 2\pi R_X(0)G(\omega)$ 即为定理所求.

注 $R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} dF_X(\omega), \quad \tau \in R$

称为平稳过程相关函数的**谱展式**.

定义5.4.1 称 $F_X(\omega)$ 为过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的**谱函数**, 若存在 $S_X(\omega)$, 使

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S_X(\omega_1) d\omega_1, \quad \omega \in R$$

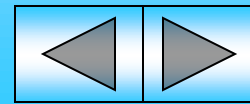


称 $S_X(\omega)$ 为过程的**谱密度**.

利用特征函数和分布函数之间的关系,可证得定理5.4.1 (维纳—辛钦).

定理5.4.3 设 $\{X(t), t \in R\}$ 是均方连续的平稳过程, $E[X(t)] = m$, 相关函数为 $R_X(\tau)$, 谱函数为 $F(\omega)$, 则以下**三个命题等价**:

$$1) \quad \text{l.i.m}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = m; \quad (\text{均值各态历经})$$



2) $F(\omega)$ 在 ω 处连续;

$$3) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T C_X(\tau) d\tau = 0.$$

