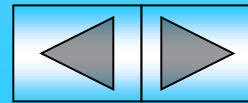


§ 3.1 正 态 过 程

在现实问题中, 满足一定条件的随机变量之和的极限服从正态分布.

电子技术中的热噪声是由大量的热运动引起, 也服从正态分布.

由于一个随机过程可以用有限维分布来描述, 为研究正态过程应首先研究多维正态分布随机变量.



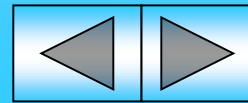
一、多维正态随机变量

1. 概率密度与特征函数

若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

(X, Y) 的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$



记

$$\boldsymbol{\mu} = E \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix},$$

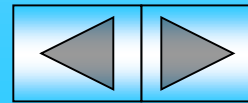
$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

其中 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$,
 $|\rho| < 1$, 故协方差
矩阵满足 $|\mathbf{B}| \neq 0$.

(X,Y) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{X}-\mu)^T B^{-1}(\vec{X}-\mu)\right\}\end{aligned}$$

记为 $(X,Y) \sim N(\mu, B)$.



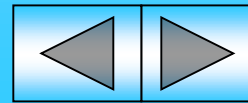
定义3.1.1 设 $B=(b_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, μ 是 n 维实值列向量, 定义 n 维随机向量

$$X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |B|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{X} - \mu)^T B^{-1} (\vec{X} - \mu) \right\} \quad (*)$$

其中 $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 称 X 服从 n 维正态分布.



记为 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim N(\mu, B)$.

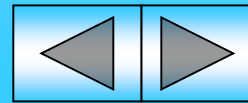
注 当 $B=(b_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, 有 $|B| \neq 0$;
若 $|B|=0$ 则不能用 (*) 式给出其概率密度.

定理3.1.1 n 维正态分布随机向量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的特征函数为

$$\phi(u) = \exp \left\{ i\mu^T u - \frac{1}{2} u^T B u \right\} \quad (**)$$

其中 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$.

证明



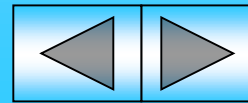
定义3.1.2 若 μ 是 n 维实向量, B 是 n 阶非负定对称阵, 称以(**)式中的 $\varphi(t)$ 为其特征函数的 n 维随机变量 X 服从 n 维正态分布.

注 若(**)式中的 $|B|=0$, 称 X 服从退化正态分布或奇异正态分布.

2.边缘分布及二阶矩

以下结论总假定随机向量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 服从 $N(\mu, B)$.

非退化



定理3.1.2 n 维正态分布随机变量 X 的任一子向量

$$(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_m})^T \quad (m \leq n)$$

也服从正态分布 $N(\tilde{\mu}, \tilde{B})$, 其中 $\tilde{\mu} = (\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \dots, \mu_{k_m})$,
 \tilde{B} 是 B 保留第 k_1, k_2, \dots, k_m 行及列所得的 m 阶矩阵.

多元正态分布的
边缘分布仍是正
态分布

定理3.1.3 设 μ 和 B 分别是随机向量 X 的数学期望向量及协方差矩阵, 即

$$E(X_i)=\mu_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$b_{ij}=E\{(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

n 维正态分布
由二阶矩确定.

3.独立性问题

定理3.1.4 n 维正态分布随机向量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立的充要条件是它们两两不相关.

等价于其协方差矩阵是对角阵.

4.正态随机向量的线性变换

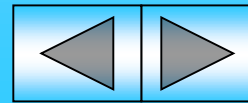
定理3.1.5 正态随机向量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$,
记 $E(X)=\mu$, 协方差矩阵为 B .

1) 对 X 的线性组合

$$Y = \sum_{j=1}^n l_j X_j = LX, \quad L=(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

有
$$E(Y) = \sum_{j=1}^n l_j \mu_j = L\mu,$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n l_j l_k b_{jk} = LBL^T,$$



2) 若 $C=(c_{jk})_{m \times n}$, 线性变换 $Z=CX$, 则
均值向量为 $E(Z)=E(CX)=CE(X)=C\mu$,
协方差矩阵为 $D_Z=CBC^T$

定理3.1.6 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu, B)$ 的充要条件是它的任何一个非零线性组合

$$\sum_{j=1}^n l_j X_j,$$

服从一维正态分布.

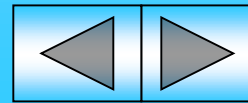
可将多维正态随机变量问题转化为一维正态分布问题.

定理3.1.7 若 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu, B)$, $C=(c_{jk})_{m \times n}$ 是任意矩阵, 则 $Y=CX$ 服从 m 维正态分布 $N(C\mu, CBC^T)$.

正态分布的线性变换不变性

证 对于任意 m 维实值列向量 u , Y 的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_Y(u) &= E(e^{iu^T Y}) = E(e^{iu^T CX}) = E(e^{i(C^T u)^T X}) \\ &= \exp \left\{ i\mu^T (C^T u) - \frac{1}{2} (C^T u)^T B (C^T u) \right\}\end{aligned}$$



$$= \exp \left\{ i(C\mu)^T u - \frac{1}{2} u^T (CBC^T) u \right\}$$

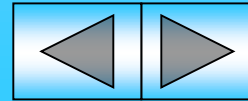
即随机向量 $Y=CX$ 服从 m 维正态分布 $N(C\mu, CBC^T)$

思考问题： 能否保证 $Y= CX$ 服从非退化正态分布 ?

反例： 设随机变量 X_0 与 V 相互独立, 都服从标准正态分布 $N(0,1)$, 令

$$X(1)=X_0+V, \quad X(2)=X_0+2V, \quad X(3)=X_0+3V,$$

问 $(X(1), X(2), X(3))$ 是否服从非退化正态分布?



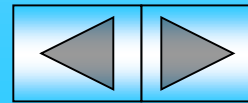
分析 设

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix}$$

因 $\begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

\mathbf{X} 的协方差矩阵为

$$\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^T = \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



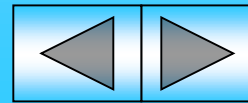
$$|\mathbf{CBC}^T| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

参见P35例2

$X=(X(1), X(2), X(3))$ 不服从非退化正态分布.

一般地, 若 $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ 是非退化二维正态随机向量, 其线性变换 $\mathbf{Y}=\mathbf{CX}$, 有

- 1) 每一分量服从正态分布;
- 2) 不能构成二维以上的非退化联合正态分布;



分析2) 设 $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ 的协方差矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad R(B) = 2$$

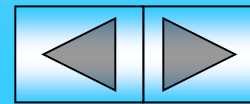
线性变换矩阵

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \end{bmatrix}, \quad R(C) \leq 2$$

则线性变换 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ 的协方差矩阵为

$$\Gamma_Y = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^T, \quad R(\Gamma_Y) \leq \min(R(C), R(B)) \leq 2$$

即二维以上的线性变换向量 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ 都是退化(奇异)联合正态分布.

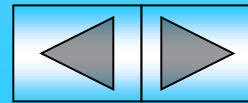


问题结论:

- 1) 不能保证 $Y=CX$ 服从非退化正态分布.
- 2) 当 $|CBC^T| \neq 0$ 时, 随机向量 Y 服从非退化正态分布.

可证明

推论 非退化正态分布随机向量 X 的行**满秩**线性变换仍服从非退化正态分布.



定理3.1.8 若随机向量 X 服从 $N(\mu, B)$, 则存在一个正交变换 U , 使得 $Y=UX$ 是一个相互独立的正态随机向量.

证 B 为实对称矩阵, 存在正交阵 U , 使

$$UBU^T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

λ_i 是 B 的特征向量

又因 \mathbf{B} 是正定阵(从而非奇异的)

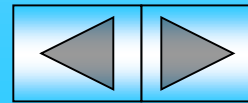
➡ \mathbf{B} 有 n 个线性无关特征向量

设 \mathbf{U} 是以特征向量为列构成的正交阵, 令 $\mathbf{Y}=\mathbf{UX}$ 则得证.

判定多维正态分布的方法总结

二、正态随机过程

定义3.1.3 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 称为正态过程, 如果它的任意有限维分布都是联合正态分布.



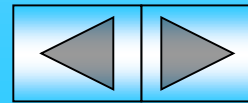
即对任意的正整数 n 和 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 都服从正态分布.

注

1) 上述几个定理均可应用于正态过程.

2) 若存在 n , 对 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 服从退化正态分布, 称 $\{X(t), t \in T\}$ 为退化正态过程.

3) 正态过程的 n 维分布由其二阶矩完全确定.

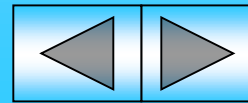


有 对任意的 $n \geq 1$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,

$$(X(t_1), \dots, X(t_n))^T \sim N(\mu, B),$$

$$\mu = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & C(t_1, t_2) & \cdots & C(t_1, t_n) \\ C(t_2, t_1) & C(t_2, t_2) & \cdots & C(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_n, t_1) & C(t_n, t_2) & \cdots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

$$C(t_i, t_j) = E\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - m(t_j)]\} \\ (1 \leq i, j \leq n).$$



Ex.1 随机振幅电信号

设 $X(t) = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t, t \in R$

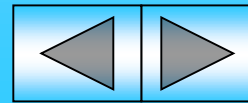
$$E(\xi) = E(\eta) = 0, E(\xi^2) = E(\eta^2) = \sigma^2, \quad \omega \text{ 为常数}$$

ξ 与 η 相互独立同服从正态分布,

- 1) 试求 $X(t)$ 的均值函数和相关函数;
- 2) 写出一维概率密度和二维概率密度.

解 1) $E\{X(t)\} = E(\xi) \cos \omega t + E(\eta) \sin \omega t = 0$

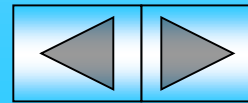
因 $E(\xi\eta) = 0$, 故



$$\begin{aligned} R(s, t) &= E\{(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t)(\xi \cos \omega s + \eta \sin \omega s)\} \\ &= E(\xi^2) \cos \omega t \cos \omega s + E(\eta^2) \sin \omega t \sin \omega s \\ &= \sigma^2 \cos \omega(t - s) = \sigma^2 \cos(\tau), (\tau = t - s) \\ \Rightarrow D(X(t)) &= R(t, t) = \sigma^2 \cos 0 = \sigma^2. \end{aligned}$$

2) $X(t)$ 的一维密度为

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$



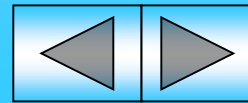
$X(t_i)$ 是相互独立正态随机变量的线性组合, 故 $(X(t_1), X(t_2))$ 服从二维正态分布, 其相关系数为

$$\rho = \frac{R(s, t) - m(s)m(t)}{\sqrt{R(s, s)}\sqrt{R(t, t)}} = \frac{\sigma^2 \cos \omega \tau}{\sigma^2} = \cos \omega \tau$$

得过程 $X(t)$ 的二维密度为

仅与 $\tau = t - s$ 有关

$$f(x_1, x_2; s, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\omega\tau}} e^{-\frac{x_1^2 - 2x_1x_2\cos\omega\tau + x_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2\omega\tau)}}, \quad (x, y) \in R_2.$$



思考题：

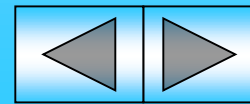
此过程是否是正态过程？可否写出任意 n 维概率密度？

Ex.2 分析P35 例2中的 n 维概率分布

在随机向量的协方差矩阵 \mathbf{C} 中

取 $n = 3, t_2 = 2t_1, t_3 = 3t_1$, 则

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \omega t_1 & \sin \omega t_1 \\ \cos 2\omega t_1 & \sin 2\omega t_1 \\ \cos 3\omega t_1 & \sin 3\omega t_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \omega t_1 & \sin \omega t_1 \\ \cos 2\omega t_1 & \sin 2\omega t_1 \\ \cos 3\omega t_1 & \sin 3\omega t_1 \end{bmatrix}^T$$



可计算得 $|C| = 0$, 且 $\text{Rank}(C) = 2$,
故例中当 $n > 2$ 时, 不能写出 n 维联合正态概率密度.

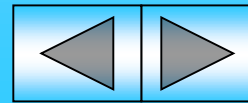
Ex.3 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 相互独立, 都是正态随机过程, 设

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \quad t \in R$$

证明 $Z(t)$ 是正态过程。

证 对任意正整数 n 及 $t_1, t_2, \dots, t_n \in R$

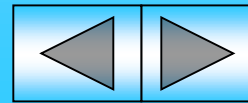
$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \quad (Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n))$$



都是 n 维联合正态随机向量，并相互独立。

$(Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n))$ 的 n 维特征函数为

$$\begin{aligned} \varphi_z(t_1, t_2, \dots, t_n; u_1, u_2, \dots, u_n) &= E \left\{ e^{i[u_1(X(t_1)+Y(t_1))+\dots+u_n(X(t_n)+Y(t_n))]} \right\} \\ &= E \left\{ e^{i[u_1X(t_1)+\dots+u_nX(t_n)]} \right\} E \left\{ e^{i[u_1Y(t_1)+\dots+u_nY(t_n)]} \right\} \\ &= \exp\{i\mu'_X u - \frac{1}{2}u' C_X u\} \exp\{i\mu'_Y u - \frac{1}{2}u' C_Y u\} \\ &= \exp\{i(\mu_X + \mu_Y)' u - \frac{1}{2}[u' C_X u + u' C_Y u]\} \end{aligned}$$



$$= \exp\{i(\mu_X + \mu_Y)'u - \frac{1}{2}[u'(C_X + C_Y)u]\}$$

由特征函数和分布函数的惟一性定理知

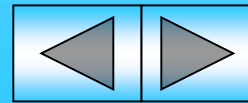
$$(Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n))$$

是正态随机向量.

问题： $C_X + C_Y$ 是否是上随机向量的协方差矩阵？

根据数学期望与协方差的性质

$$\begin{aligned} & COV[(X(t_1) + Y(t_1)), (X(t_2) + Y(t_2))] \\ &= COV(X(t_1), X(t_2)) + COV(Y(t_1), Y(t_2)) \end{aligned}$$



$(Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n))$ 的均值向量为 $\mu_X + \mu_Y$

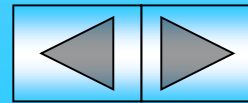
协方差矩阵为 $C_X + C_Y$.

问题： 能否保证是非退化正态过程？

实际应用

怎样验证随机过程 $X_T = \{X(t), t \in T\}$ 是正态随机过程？

任取 $n \geq 1$, 及 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, 记
 $X = (X(t_1), \dots, X(t_n))$,



算法步骤如下：

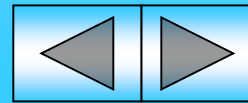
1) 计算 X 的 n 维协方差矩阵 B ；

2) 验证 B 的正定性；

3) 求正交矩阵 U , 使 $UBU^T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

4) 令 $Y=UX$, Y 的协方差矩阵为 Λ ；

称将 X
去相关



5) 检验 $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的独立性:

6) 检验 Y 的一维分布的正态性.

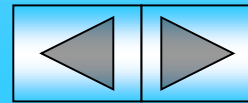
随机过程统计推断问题

结论

若检验得 $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 是相互独立的正态随机变量,



$X=U^{-1}Y$ 是 n 维正态随机变量, 即
 $X_T=\{X(t), t \in T\}$ 是正态随机过程.



思考

- 1) 为以上算法写出理论依据;
- 2) 你能考虑用其他方法验证吗?



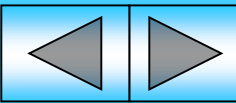
设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是正态过程，则以下过程仍为正态过程。

1) 对任意的 $\tau \geq 0, \{X(t + \tau) - X(\tau), t \geq 0\}$;

2) 对常数 $\lambda \geq 0, \{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} X(\lambda t), t \geq 0\}$;

3) $\{tX(\frac{1}{t}), t \geq 0\}$; 其中 $tX(\frac{1}{t})|_{t=0} = 0$;

4) 当 $t_0 \geq 0, Z(s) = \begin{cases} X(t_0 + s) - X(s), & s > 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$



证 因 \mathbf{B} 为对称正定矩阵, 存在正交阵 \mathbf{U} , 使得

$$\mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{U} = \Lambda \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^T = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \quad (\mathbf{Q} = \mathbf{U} \sqrt{\Lambda})$$

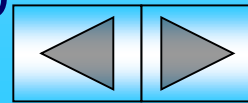
$$\phi(u) = E \left\{ \exp \left(i \sum_{k=1}^n u_k X_k \right) \right\}$$

$$= \oint_{R^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{B}|^{1/2}} \exp \left(i u^T \vec{X} - \frac{1}{2} (\vec{X} - \mu)^T \mathbf{B}^{-1} (\vec{X} - \mu) \right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$\text{令 } \vec{Y} = \mathbf{Q}^{-1} (\vec{X} - \mu),$$

$$= \oint_{R^n} \frac{e^{i \mu^T u}}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left(i (\mathbf{Q}^T u)^T \vec{Y} - \frac{1}{2} \vec{Y}^T \vec{Y} \right) dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \exp \left\{ i \mu^T u - \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^T u)^T (\mathbf{Q}^T u) \right\} = \exp \left\{ i \mu^T u - \frac{1}{2} u^T \mathbf{B} u \right\}$$



判定多维正态分布的方法：

- 1) 概率密度函数；(定义3.1.1)
- 2) 特征函数；(定义3.1.2)
- 3) 任意非零线性组合服从一维正态分布；
(定理3.1.6)
- 4) 是某个多维正态分布的线性变换；
(定理3.1.7)

