第五章 平稳随机过程

§5.1 平稳随机过程的概念

上一章对于二阶矩过程,主要是针对过程的均值函数和相关函数两个数字特征, 进行概率性质的讨论.

平稳过程是一类其概率特征不随时间推移的随机过程，在过程理论和应用中有特殊地位和作用。

本章重点讨论特殊的二阶矩过程—(宽)平稳过程.

一、严平稳过程

一类过程,具有平稳性, 即它的统计特性不随时间的推移而改变, 它的当前变化情况与过去的情况有不可忽视的联系.

定义5.4.1 $\{X(t)\ t\in T\}$是实随机过程, 若对$n>1$, $t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$ 和实数τ, 当$t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_n+\tau\in T$ 时

$$(X(t_1), \cdots, X(t_n))$$

与

$$(X(t_1+\tau), \cdots, X(t_n+\tau))$$

有相同的联合分布函数，称$\{X(t),t\in T\}$是严(强、 狭义)平稳过程.

有限维分布不随时间的推移而改变.

注1 严平稳过程描述的物理系统的概率特征不随时间的推移而改变.

例如 工作在稳定状态下的接受机，其输出噪声可认为是严平稳的随机过程；

刚接上电源时的输出噪声应认为是非平稳过程.

注2 严平稳过程的一维分布与时间无关，而二维分布仅与t_1和t_2的间隔有关，与时间起点无关.

二、宽平稳过程

1）工程中确定一个过程的有限维分布函数族,进而判定过程的严平稳性十分困难；

2）部分随机过程(如正态过程)的概率特征主要由一阶和二阶矩函数确定；

3）工程实际中,通常仅需在相关理论范畴内考虑平稳过程,即只限于研究一、二阶矩（均值、相关函数等）理论.

例如平稳过程$\{X(t),t\in T\}$表示噪声电压(或电流)，则由它的一、二阶矩函数可以求出噪声的直流平均功率，总平均功率、功率谱密度等重要参数.

从随机过程的一、二阶矩出发定义在理论和应用中更重要的平稳过程概念.

定义5.4.2 设$X=\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程, 若

1) 对任意$t\in T$, $m_X(t)=E(X(t))=m_X$; 常数

2) 对任意$s, t\in T$, $R_X(s,t)=R_X(t-s)=R_X(\tau)$.

称$\{X(t),t\in T\}$为宽(弱、广义)平稳过程,简称**平稳过程.**

称$R_X(\tau)$为$\{X(t),t\in T\}$的**自相关函数.**

其协方差函数为

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)-|m_X|^2=R_X(\tau)-|m_X|^2$$

注 自协方差函数与自相关函数都仅依赖于$t-s$.

平稳过程在实际中是常见过程,如

照明电网中电压的波动过程;

电子系统中的随机噪声;

稳定气象条件下海域中一定点处的海浪高度随时间的变化或随地点的变化(平稳随机场);

卫星图片中相同条件下的灰度水平.

Ex.1 (随机相位周期过程)

$S(t)$是周期为T的连续函数,$\Phi \sim U(0, T)$,

讨论 $X(t) = S(t+\Phi)$的平稳性.

YES

解 1) 过程是严平稳过程吗?

$$2)\quad m_X(t) = E[X(t)] = E[S(t+\Phi)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t+\varphi) f_\Phi(\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T S(t+\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} S(u)du = \frac{1}{T}\int_0^T S(u)du$$

与t无关的常数

$$R_X(t, t+\tau) = E[X(t)\overline{X(t+\tau)}]$$

$$= E[S(t+\Phi)\overline{S(t+\tau+\Phi)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t+\varphi)\overline{S(t+\tau+\varphi)} f_\Phi(\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T S(t+\varphi)\overline{S(t+\tau+\varphi)}d\varphi$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} S(u)\overline{S(u+\tau)}du$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T S(u)\overline{S(u+\tau)}du$$

仅与τ有关,与 t 无关.

随机相位周期过程是(弱)平稳过程..

Ex.2 (随机二元传输过程)

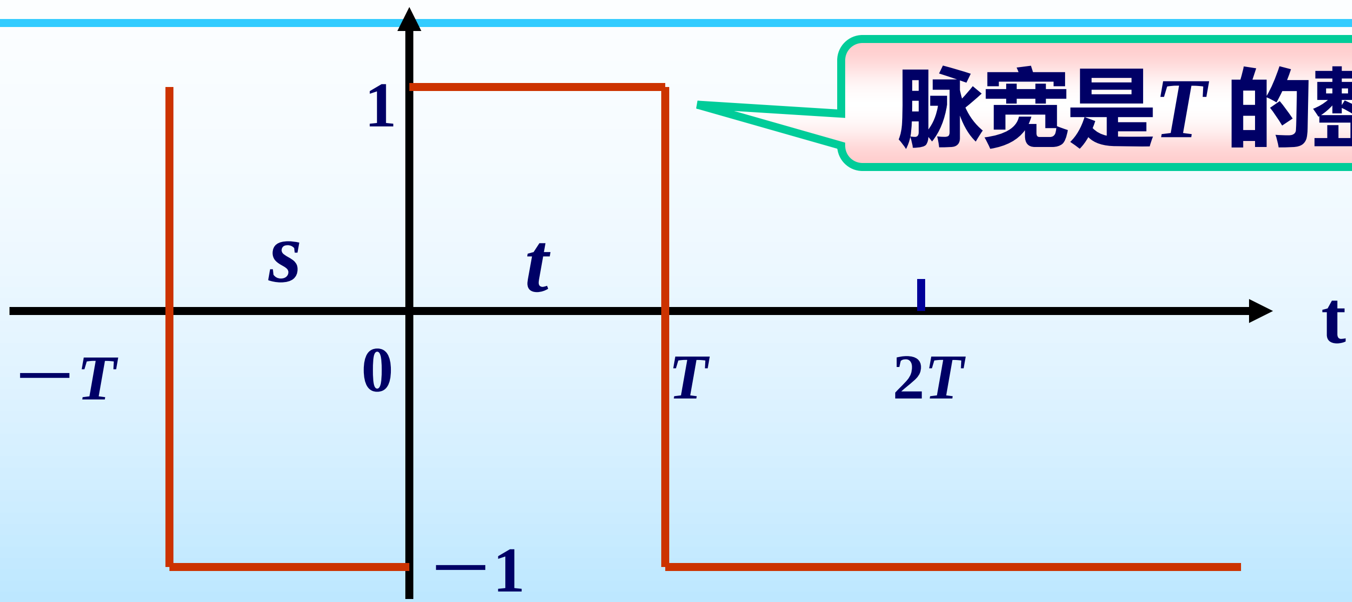
1）半随机二元传输

重复抛一枚均匀硬币,令

$$X(t)=\begin{cases}1, & \text{第}n\text{次出现正面;}\\ -1, & \text{否则.}\end{cases}$$

其中$(n-1)T < t < nT$, $\quad (T > 0, n \in N)$

脉宽是T的整倍数



$$E[X(t)] = 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0, \qquad E\{X^2(t)\} = 1,$$

$$R(s,t) = E[X(s)X(t)] = \begin{cases} 1, & (n-1)T < s,t < nT \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

s 与 t 分属不同的T 区间, $X(s)$和$X(t)$相互独立.

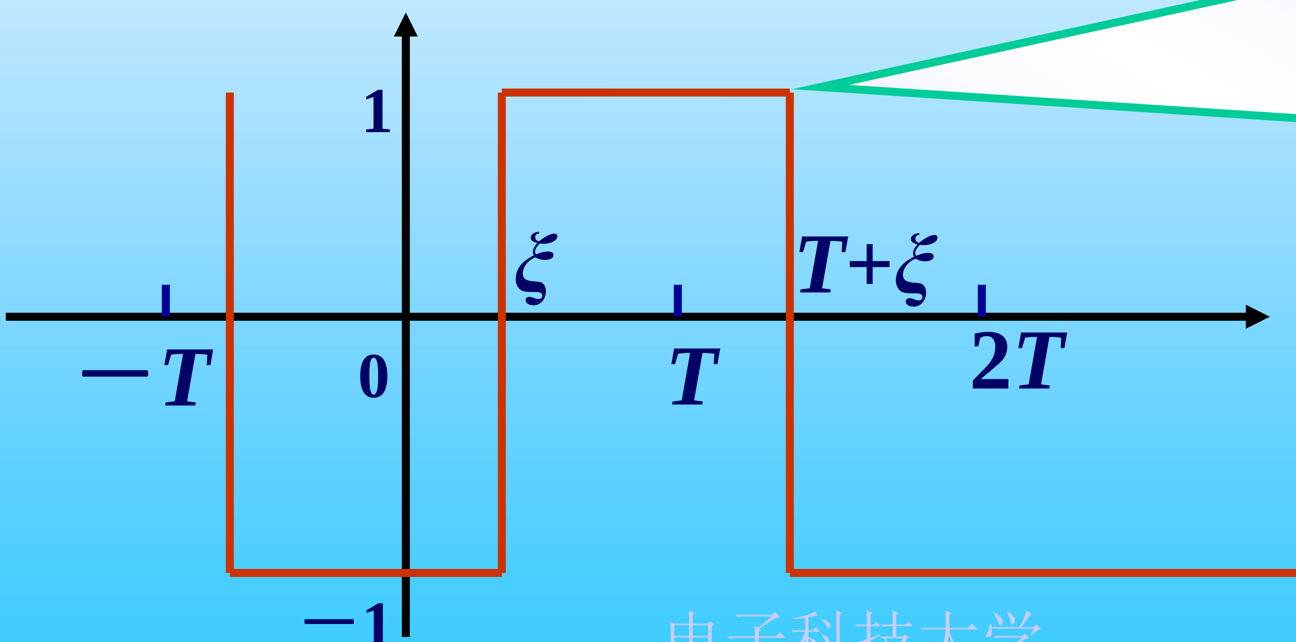
半随机二元传输不是(弱)平稳过程.

2）随机二元传输

又设$\xi \sim U(0, T)$, ξ与$X(t)$相互独立,令

$$Y(t)=X(t-\xi), \quad t\in R.$$

即将$X(t)$的 t 平移一个随机变量ξ.



$Y(t)$的样本函数相应于$X(t)$的样本函数平移一个随机距离

$$(1)\quad E\{Y(t)\} = E\{X(t-\xi)\} = 0;$$

$$(2)\quad E\{Y(s)Y(t)\} = \begin{cases} 0, & \text{若}\ |s-t| > T; \\ 1 - \dfrac{|s-t|}{T}, & \text{若}\ |s-t| < T. \end{cases}$$

证 (1)因为 $E[X(t-\xi)] = E\{E[X(t-\xi)|\xi]\}$,

仅需证 $E[X(t-\xi)|\xi] = 0$,

对 $\forall\theta \in (0, T)$, $X(t-\theta)$**与**ξ**相互独立**,

$$E[X(t-\theta)|\xi=\theta] = E[X(s)|\xi=\theta] = E[X(s)] = 0,$$

$$\Rightarrow \qquad E[X(t-\xi)|\xi] = 0,$$

即 $$E[Y(t)] = E[X(t-\xi)] = 0.$$

(2) **对过程$X(t)$有结论, 已知**

A.当 s 与 t 分属不同T 区间, $X(s)$与$X(t)$相互独立,

$$\Rightarrow \qquad E\{X(s)X(t)\} = E\{X(s)\}E\{X(t)\} = 0$$

B. 若 s 与 t 同属一个T 区间, 则

$$E\{X(s)X(t)\} = 1.$$

i) 如果$|s-t| > T,$

$$E\{Y(s)Y(t)\} = E\{E[Y(s)Y(t)|\xi]\}$$

$$= E\{E[X(s-\xi)X(t-\xi)|\xi]\}$$

对 $\forall\theta\in(0,T)$, $|(s-\theta)-(t-\theta)| = |s-t| > T$

$$E[X(s-\theta)X(t-\theta)|\xi=\theta] = 0$$

$$\Rightarrow \quad E\{Y(s)Y(t)\} = E\{E[Y(s)Y(t)|\xi]\} = 0.$$

ii) 当 $|s-t|<T$, 一般化处理可只考虑下述两种情形:

① $0<s<t<T$;

② $0<s<T<t<2T$ 且 t-s<T.

下面只考虑第①种情形, 情形②可做类似推理.

对 $\forall\theta\in(0,T)$, $E[Y(s)Y(t)|\xi=\theta]=E[X(s-\theta)X(t-\theta)]$

$$=\begin{cases}0, & s<\theta<t,\\ 1, & \theta<s \text{ or } \theta>t.\end{cases}$$

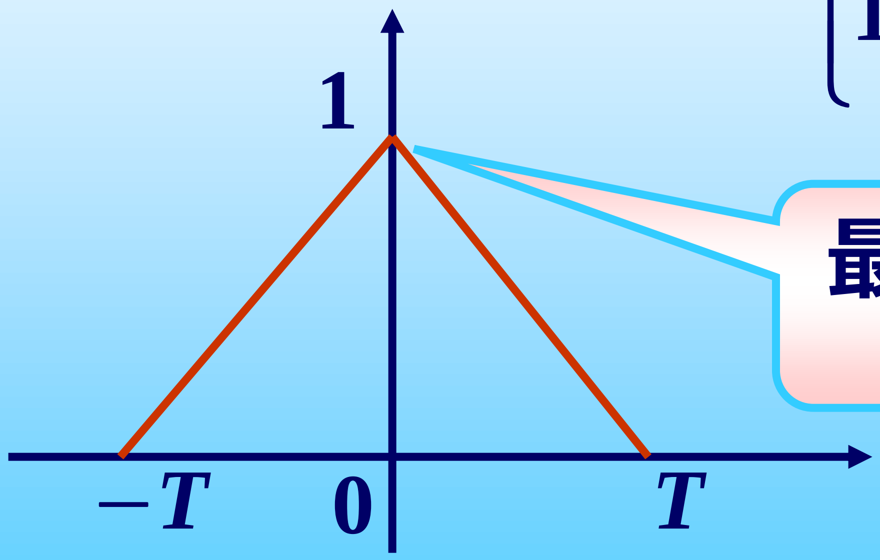
因此, $E\{Y(s)Y(t)\}$

$$=E\{E[Y(s)Y(t)|\xi]\}$$

$$=\int_0^s \frac{1}{T}d\theta+\int_t^T \frac{1}{T}d\theta=1-\frac{t-s}{T}.$$

随机二元传输过程是一个平稳过程,记$\tau=t-s$,其自相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}0, & 若|\tau|>T;\\ 1-\dfrac{|\tau|}{T}, & 若|\tau|<T.\end{cases}$$



最大值为$R_X(0)=1$,是偶函数.

YES

问：随机二元传输过程$Y(t)$是严平稳过程吗?

Ex.3 (随机电报信号)

电报信号$X(t)$ 在传输过程中有不同的电流符号C 和 - C, 设$X(t)$在$[0, t]$内的变号次数$N(t)$ 是强度为λ的泊松过程，有

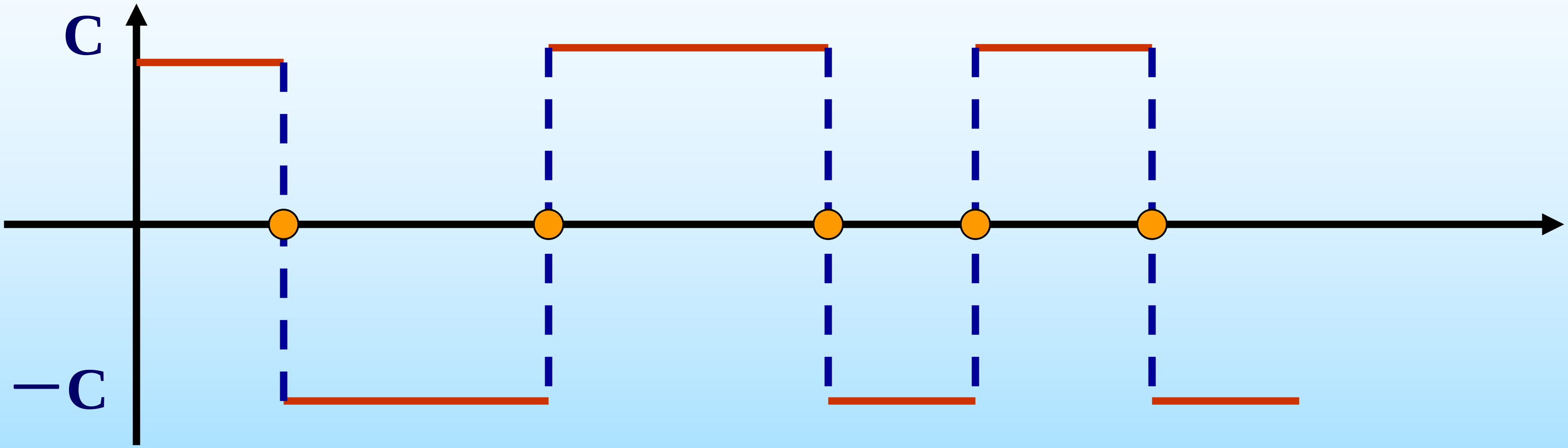
参见《概率、随机变量与随机过程》美 A.帕普力斯，p303

$$X(t) = X_0(-1)^{N(t)}, \quad t \ge 0,$$

其中X_0 与$N(t)$相互独立，且

$$X_0 \sim \begin{bmatrix} C & -C \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad C > 0,$$

讨论 $\{X(t), t\geq 0\}$ 的平稳性.



解 因 $X(t) = X_0(-1)^{N(t)}, \quad t \geq 0,$

$$m_X(t) = E[X(t)] = E(X_0)E[(-1)^{N(t)}] = 0, \quad t \geq 0$$

要计算$X(t)$的自相关函数，先计算

$$E[(-1)^{N(t)}]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}(-1)^k e^{-\lambda t}=e^{-2\lambda t}, t\geq 0.$$

对任意的$\tau\geq 0$,

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=E[X_0^2(-1)^{N(t+\tau)+N(t)}]$$

$$=C^2E[(-1)^{N(t+\tau)-N(t)+2N(t)}]$$

$$=C^2E[(-1)^{N(\tau))}]=C^2e^{-2\lambda\tau}$$

$\Rightarrow R_X(\tau)=C^2e^{-2\lambda|\tau|}, \tau\in R$, $X(t)$是平稳过程.

问：随机电报信号X(t)是严平稳过程吗? YES

Ex.4 $\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程, 有

1) 维纳过程非**宽平稳**过程;

2) 维纳过程是**增量宽平稳**过程，即

$$X(t)=W(t+a)-W(t),\quad t\geq 0,\quad (a>0)$$

是宽平稳过程.

证 1) 因 $E[W(t)]=0$,

$$R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t),\quad s,t\geq 0$$

与起点有关.

故 $\{W(t), t\geq 0\}$ 非**宽**平稳过程.

2）因维纳过程是**平稳**独立增量的正态过程，且（讲义$p34$）

$$X(t)=W(t+a)-W(t)\sim N(0,a\sigma^2)$$

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[W(t+a)-W(t)]=0,$$

$$\begin{aligned}R_X(t,t+\tau)&=E[X(t)X(t+\tau)]\\&=R_W(t+a,t+a+\tau)-R_W(t+a,t+\tau)\\&\quad-R_W(t,t+a+\tau)+R_W(t,t+\tau)\\&=\sigma^2[\min(t+a,t+a+\tau)-\min(t+a,t+\tau)\\&\quad-\min(t,t+a+\tau)+\min(t,t+\tau)]\end{aligned}$$

$$= \sigma^2\{[t + a + \min(0, \tau)] - [t + \min(a, \tau)]$$

$$- [t + \min(0, \tau + a)] + [t + \min(0, \tau)]$$

$$= \sigma^2[a + 2\min(0, \tau) - \min(a, \tau) - \min(0, a + \tau)]$$

$$= \begin{cases} \sigma^2(a - |\tau|), & |\tau| < a; \\ 0, & |\tau| \geq a \end{cases}$$

$R_X(t, t+\tau)$与 t 无关，故$X(t)$ 是宽平稳过程.

P107例12 泊松过程不是平稳过程，是平稳增量过程.

三、两种平稳性的关系

1）严平稳过程不一定是宽平稳的;

因宽平稳过程一定是二阶矩过程, 而严平稳过程未必是二阶矩过程.

2）宽平稳过程不一定严平稳. （例4.1.4）

3) 二阶矩存在的严平稳过程是宽平稳过程.

4) 对于正态过程, 宽平稳性与严平稳性等价.

Ex.6 设$\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$是独立随机变量序列,每个随机变量的概率密度均为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

由于$E(X(n))$不存在, 所以$\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$不是二阶矩过程，从而不是宽平稳过程.

另一方面, 对任意自然数 k, m, 任意非负整数 $0\le n_1<n_2<\cdots<n_k$,有

$$P\{X(n_1)\le x_1,\cdots,X(n_k)\le x_k\}=\prod_{i=1}^{k}P\{X(n_i)\le x_i\}$$

$$=\prod_{i=1}^{k}P\{X(n_i+m)\le x_i\}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是任意实数，

所以$\{X(n),n=0,1,2,\ldots\}$是严平稳过程.

思考题:

1) 严平稳性与宽平稳性的实际意义?

2) 独立增量过程是否为平稳过程?

对任意时间点列 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \theta \in R, k \in Z,$

$$(X(t_1-\theta), X(t_2-\theta), \cdots, X(t_n-\theta)) \overset{d}{=} (X(t_1-\theta+kT), X(t_2-\theta+kT), \cdots, X(t_n-\theta+kT))$$

对任意 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \tau \in R,$

令 $g(\theta) = E\left[\exp\left(j\sum_{k=1}^{n} u_k X(t_k-\theta)\right)\right]$, 函数$g(\theta)$周期为$T$.

$$E\left[\exp\left(j\sum_{k=1}^{n} u_k X(t_k+\tau-\xi)\right)\right] = \int_0^T E\left[\exp\left(j\sum_{k=1}^{n} u_k X(t_k+\tau-\theta)\right)\right]\frac{d\theta}{T}$$

$$= \int_{-\tau}^{T-\tau} E\left[\exp\left(j\sum_{k=1}^{n} u_k X(t_k-\theta)\right)\right]\frac{d\theta}{T}$$

$$E\left[\exp\left(j\sum_{k=1}^{n}u_k X(t_k+\tau-\xi)\right)\right]=\int_0^T E\left[\exp\left(j\sum_{k=1}^{n}u_k X(t_k-\theta)\right)\right]\frac{d\theta}{T}$$

$$=E\left[\exp\left(j\sum_{k=1}^{n}u_k X(t_k-\xi)\right)\right]$$

由唯一性定理,

$$(X(t_1+\tau-\xi),X(t_2+\tau-\xi),\cdots,X(t_n+\tau-\xi))$$

$$\overset{d}{=}(X(t_1-\xi),X(t_2-\xi),\cdots,X(t_n-\xi))$$

结论：随机二元传输过程Y(t)是严平稳过程.

随机电报信号X(t)是严平稳过程.

证明：**首先，由全数学期望公式，对任意t≥0**

$$P\{X(t)=C\}$$

$$=P\{X(t)=C,X_0=C\}+P\{X(t)=C,X_0=-C\}$$

$$=P\{(-1)^{N(t)}=1,X_0=C\}+P\{(-1)^{N(t)}=-1,X_0=-C\}$$

$$=P\{N(t)\text{取偶数},X_0=C\}+P\{N(t)\text{取奇数},X_0=-C\}$$

=1/2.

其次, 对任意的 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in\{-C,C\}$,

$$0\le\tau,0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$$

$$P\{X(t_k+\tau)=i_k, k=1,2,\cdots,n\}$$

$$=P\{X(t_1+\tau)=i_1,$$

$$X(t_k+\tau)(-1)^{N(t_{k+1}+\tau)-N(t_k+\tau)}=i_{k+1},\quad k=1,\cdots,n-1\}$$

$$=P\{X(t_1+\tau)=i_1,$$

$$(-1)^{N(t_{k+1}+\tau)-N(t_k+\tau)}=i_{k+1}/i_k,\quad k=1,\cdots,n-1\}$$

$$=P\{X(t_1+\tau)=i_1\}*$$

$$P\{(-1)^{N(t_{k+1}+\tau)-N(t_k+\tau)}=i_{k+1}/i_k,\quad k=1,\cdots,n-1\}$$

$$=P\{X(t_1)=i_1\}*$$

$$P\{(-1)^{N(t_{k+1})-N(t_k)}=i_{k+1}/i_k,\quad k=1,\cdots,n-1\}$$

$$=P\{X(t_k)=i_k, k=1,2,\cdots,n\},$$

结论：随机电报信号是严平稳过程.

$$\varphi(t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau;u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

$$=E\{\exp(j\sum_{k=1}^{n}u_kX(t_k+\tau))\}$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\exp(j\sum_{k=1}^{n}u_kS(t_k+\tau+\phi))d\phi$$

$$=\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}\exp(j\sum_{k=1}^{n}u_kS(t_k+\phi))d\phi$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\exp(j\sum_{k=1}^{n}u_kS(t_k+\phi))d\phi$$

$$=E\{\exp(j\sum_{k=1}^{n}u_kX(t_k))\}=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

结论：随机相位周期过程是严平稳过程.