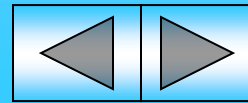


§4.3 随机过程的均方极限与均方连续

本节将二阶矩随机变量空间中的均方极限概念引入二阶矩随机过程中,并引进均方连续的概念.

一、二阶矩过程

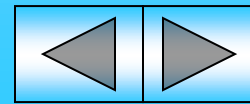
二阶矩过程是一类重要的随机过程,在物理、生物、通讯与控制、系统工程与管理科学等方面,有广泛的应用.



1) 随机过程的概率性质由其分布函数族完全确定，但在实际问题中很难确定出分布函数族.

2) 正态随机过程的一、二阶矩就能完全确定其有限维分布.

3) 不少实际问题通过对二阶矩的讨论就足以了解过程的统计特征.



定义4.3.1 如过程 $X_T=\{X(t), t \in T\}$, 对任意 $t \in T$, 有

$$E\{|X(t)|^2\} < +\infty$$

称过程是**二阶矩过程**..

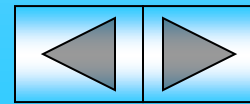
二阶矩过程的均值函数和协方差函数一定存在.

注

随机变量矩性质:

高阶矩存在则低阶矩及其他同阶一定存在.

正态过程是二阶矩过程.



EX.1 余弦波过程 $X(t) = A \cos(\omega t + \Theta), t \geq 0$.

振幅 A 与角频率 ω 取常数, 相位 $\Theta \sim U(-\pi, +\pi)$

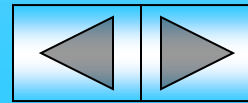
$$\text{因 } E|X(t)|^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} A^2 \cos^2(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \leq A^2, \forall t \geq 0.$$

故 $X(t)$ 是一个二阶矩过程.

$$\text{且 } E\{X(t)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} A \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0,$$

$$\Rightarrow R(s, t) = E[X(t)X(s)]$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} A^2 \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega s + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta]$$



$$= \frac{1}{2} A^2 \cos \omega(t-s) = \frac{1}{2} A^2 \cos \omega\tau, \quad (\tau = t-s)$$

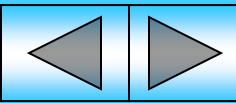
二、二阶矩过程的均方极限

定义4.3.2 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程,
 $X \in H$, 如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} d(X(t), X) = \lim_{t \rightarrow t_0} \|X(t) - X\| = 0$$

称 $X(t)$ 均方收敛于 X , 记为 $\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = X$

注 $\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = X \Leftrightarrow \forall t_k \rightarrow t_0 (k \rightarrow \infty), \lim_{k \rightarrow +\infty} X(t_k) = X$



过程均方收敛有类似序列均方收敛的性质

定理4.3.1 $\text{l.i.m}_{t \rightarrow t_0} X(t) = X \Rightarrow \lim_{s, t \rightarrow t_0} E(X(s) \overline{X(t)}) = E(|X|^2)$

定理4.3.2 (洛易夫均方收敛准则)

$X(t)$ 在 t_0 处收敛的充分必要条件是极限

$\lim_{s, t \rightarrow t_0} E(X(s) \overline{X(t)})$ 存在. **二重极限**

注 $\lim_{s, t \rightarrow t_0} E(X(s) \overline{X(t)})$ 存在

$\Leftrightarrow \forall s_m, t_n \rightarrow t_0 (m, n \rightarrow \infty),$

$\lim_{m, n \rightarrow \infty} E(X(s_m) \overline{X(t_n)})$ 存在

证 必要性 $X(t)$ 在 t_0 处均方收敛, 设极限为 X

$$\forall s_m, t_n \rightarrow t_0 (m, n \rightarrow \infty), \lim_{m \rightarrow +\infty} E(X(s_m) \overline{X(t_n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X(t_n) \overline{X(s_m)}) = X$$

由定理4.2.5之1)可得

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} E(X(s_m) \overline{X(t_n)}) = E(|X|^2)$$

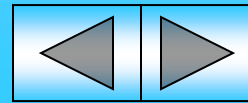
充分性 若 $\lim_{s, t \rightarrow t_0} E(X(s) \overline{X(t)}) =: C$, 则

$$\forall s_m \rightarrow t_0 (m \rightarrow \infty), \lim_{m, n \rightarrow \infty} E(X(s_m) \overline{X(s_n)}) = C$$

由定理4.2.6, 记 $\lim_{m \rightarrow +\infty} X(s_m) =: X_1$

同理, 对 $\forall t_n \rightarrow t_0 (n \rightarrow \infty), \lim_{n \rightarrow +\infty} X(t_n) =: X_2$

下证: $X_1 = X_2$ *a.e.*

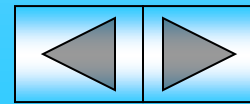


由范数的三角不等式

$$\begin{aligned} \|X_1 - X_2\| &\leq \|X_1 - X(s_m)\| + \|X(t_n) - X_2\| \\ &\quad + \|X(s_m) - X(t_n)\| \end{aligned} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

$$\begin{aligned} \|X(s_m) - X(t_n)\|^2 &= \|X(s_m)\|^2 + \|X(t_n)\|^2 \\ &\quad - \mathbf{E}(X(s_m)\overline{X(t_n)}) - \mathbf{E}(X(t_n)\overline{X(s_m)}) \\ &\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} C + C - C - C = 0 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|X_1 - X_2\| = 0 \Rightarrow X_1 = X_2, a.e.$



二、二阶矩过程的均方连续

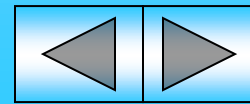
定义4.3.3 称二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 $t_0 \in T$ 处均方连续, 如果

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{l.i.m} X(t) = X(t_0)$$

若 $X(t)$ 对 $\forall t \in T$ 都均方连续, 称随机过程

$$\{X(t), t \in T\}$$

是均方连续的.



定理4.3.3 (均方连续准则)

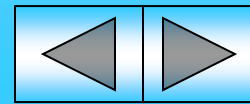
二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 $t_0 \in T$ 处连续的**充分必要条件**是 $\{X(t), t \in T\}$ 的相关函数 $R(s, t)$ 在 (t_0, t_0) 处连续.

证 必要性 由定理4.3.1知

$$\text{l.i.m}_{t \rightarrow t_0} X(t) = X(t_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{s, t \rightarrow t_0} E(X(s) \overline{X(t)}) = E[X(t_0) \overline{X(t_0)}]$$

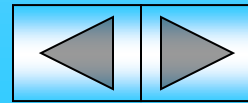
即
$$\lim_{s, t \rightarrow t_0} R(s, t) = R(t_0, t_0).$$



充分性 若 $\lim_{s,t \rightarrow t_0} R(s,t) = R(t_0,t_0)$

则对 $\forall t \rightarrow t_0$

$$\begin{aligned} \|X(t) - X(t_0)\|^2 &= R(t,t) + R(t_0,t_0) \\ &\quad - R(t,t_0) - R(t_0,t) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow t_0} R(t_0,t_0) + R(t_0,t_0) \\ &\quad - R(t_0,t_0) - R(t_0,t_0) = 0 \end{aligned}$$

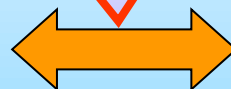


均方连续准则的重要性:

二阶矩过程的均方连续可由其相关函数的普通意义下的连续性来确定.

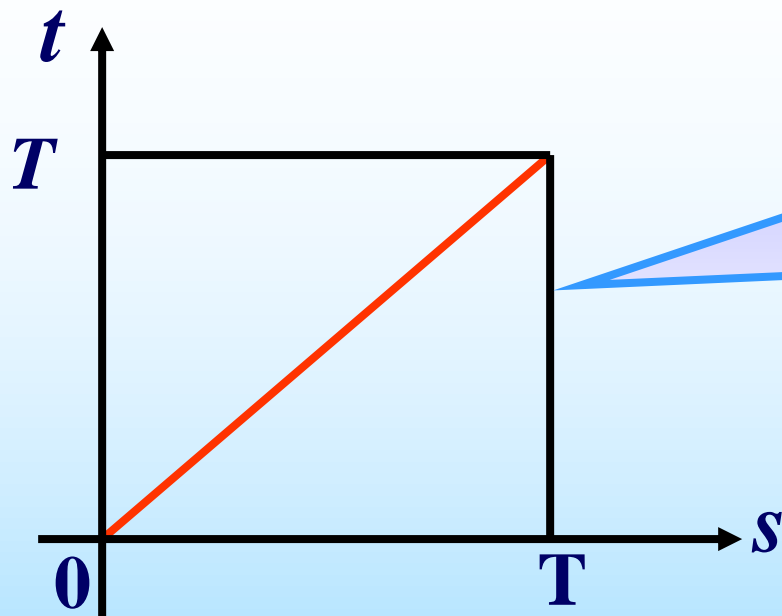
均方连续的重要结论:

参见P73定理4的证明.



定理4.3.4 二阶矩过程的均方连续
相关函数 $R(s, t)$ 在对角线上连续.

推论1 二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的相关函数
 $R(s, t)$ 对 $\forall t \in T$ 在点 (t, t) 处连续, 则它在 $T \times T$
上连续.



$R(s, t)$ 在整个区域
 $T \times T$ 上连续, 等
价于在对角线上
连续.

证 $R(s, t)$ 对 $\forall t \in T$, 在 (t, t) 处连续

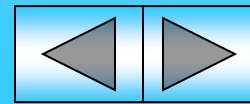
定理4.3.4

$\{X(t), t \in T\}$ 在 T 上均方连续

对 $\forall s_0, t_0 \in T$, 有

$$\lim_{s \rightarrow s_0} X(s) = X(s_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = X(t_0)$$

电子科技大学



定理4.2.5之1) $\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ t \rightarrow t_0}} E(X(s) \overline{X(t)}) = E[X(s_0) \overline{X(t_0)}]$

即 $\lim_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ t \rightarrow t_0}} R(s, t) = R(s_0, t_0)$

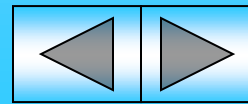
由 s_0, t_0 的任意性知 $R(s, t)$ 在 $T \times T$ 上连续.

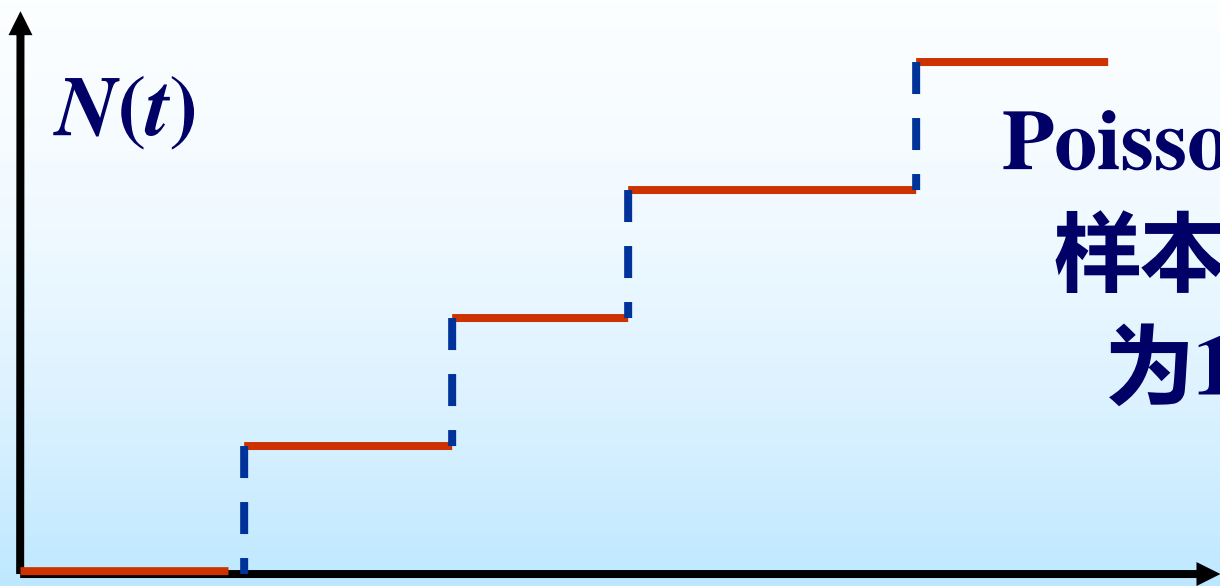
EX.2 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为参数为 λ 的Poisson过程,

均值函数 $m_N(t) = \lambda t,$

自相关函数 $R_N(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$

在 (t, t) 处连续,故 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是均方连续过程.





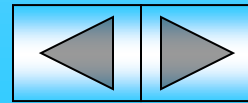
Poisson过程的每一条
样本函数都是跃度
为1的**阶梯函数**

均方连续过程的样本函数可能不连续..

EX.3 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程,其自相关函数

$$R_W(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$$

电子科技大学



对任意 $t \geq 0$ 在 (t, t) 处连续, 维纳过程均方连续.

设随机过程 $X(t) = W^2(t)$, $t \geq 0$, 其

均值函数为 $E[X(t)] = \sigma^2 t$.

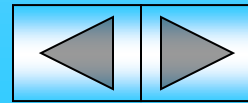
自相关函数为 $R_X(s, t) = \sigma^4(st + 2 \min^2(s, t))$

对任意 $t \geq 0$, $R_X(t, t) = 3\sigma^4 t^2$,

故 $X(t)$ 是均方连续过程.

同理

过程 $X(t) = tW(\frac{1}{t})$, 对所有 $t > 0$ 均方连续



定理4.3.5 若二阶矩随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 均方连续, 则其均值函数、方差函数也在 T 上连续.

由定理4.2.5可得

思考题:

- 1)你认为关于随机过程的均方极限最本质的性质是哪一条? 为什么?
- 2)均方连续随机过程的样本函数是否一定是连续函数?