§4.5 随机过程的均方积分（一）

本节主要介绍黎曼意义下的均方积分概念

一、均方积分概念

定义4.5.1 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$是二阶矩过程, $f(t), t\in[a,b]$是普通函数,任意取分点$a=t_0<t_1\cdots<t_n=b$,将区间$[a, b]$分成 n 个小区间, 做和

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$$

其中$t_k^* \in [t_{k-1}, t_k], k = 1,2,\cdots n.$

记 $$\Delta = \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1})$$

若均方极限 $$\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$$

存在, 且与区间[a, b]的分法及t^*的取法无关, 称为二阶矩过程$f(t)X(t)$在[a, b]上的黎曼均方积分,记为

$$\int_a^b f(t)X(t)dt$$

特别当$f(t)\equiv 1,\ t\in[a,b]$ 则

$$\int_a^b X(t)dt = \underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_{k=1}^{n} X(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$$

称为随机过程$\{X(t), t\in[a,b]\}$在$[a,b]$上的**均方积分**.

定义4.5.2 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$是二阶矩过程, $f(t), t\in[a,b]$是普通函数,任意取分点$a=t_0<t_1\cdots< t_n=b$,将区间$[a,b]$分成 n 个小区间, 若均方极限

$$\underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)[X(t_k)-X(t_{k-1})]$$

存在, 且与区间[*a*, *b*]的分法及t^*的取法无关, 称为$f(t)$对二阶矩过程$X(t)$在[*a*, *b*]上的**黎曼—斯蒂阶均方积分**,记为

$$\int_a^b f(t)dX(t)$$

定义4.5.3 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$是二阶矩过程, $W(t)$是维纳过程, 任意取分点$a=t_0< t_1\cdots< t_n=b$, 将区间$[a, b]$分成 n 个小区间, 若均方极限

$$\underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_{k=1}^{n} X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$

存在, 且与区间$[a, b]$的分法无关. 则称此均方为$X(t)$关于维纳过程的伊藤积分. 记为

$$\int_a^b X(t)dW(t)$$

二、均方积分准则

定理4.5.1 设$\{X(t), t\in[a, b]\}$是二阶矩过程，$f(t)$是普通函数，$f(t)X(t)$在$[a, b]$上均方可积的充分必要条件是二重积分

$$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

存在，其中$R(s,t)$是$X(t)$的自相关函数..

证 充分性 若$f(s)\overline{f(t)}R(s,t)$的二重积分存在,

对$[a,b]\times[a,b]$的任意分割

$$a=t_0<t_1\cdots<t_n=b,\quad a=s_0<s_1\cdots<s_m=b \text{ 及任意}$$

$$(s_k^*,t_j^*)\in(s_{k-1},s_k]\times(t_{j-1},t_j],\quad (k=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$$

有
$$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

$$=\lim_{\substack{\Delta s\to0\\ \Delta t\to0}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(s_k^*)\overline{f(t_j^*)}R(s_k^*,t_j^*)\Delta s_k\Delta t_j$$

存在,其中

$$\Delta s = \max_{1\le k\le m} \Delta S_k, \quad \Delta s_k = s_k - s_{k-1}$$

$$\Delta t = \max_{1\le j\le n} \Delta t_j, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1},$$

$$\text{上式} = \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E[f(s_k^*)X(s_k^*)\overline{f(t_j^*)X(t_j^*)}]\Delta s_k \Delta t_j$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E[f(s_k^*)X(s_k^*)\Delta s_k \overline{f(t_j^*)X(t_j^*)\Delta t_j}]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta t \to 0}} E[\sum_{k=1}^{m} f(s_k^*)X(s_k^*)\Delta s_k \overline{\sum_{j=1}^{n} f(t_j^*)X(t_j^*)\Delta t_j}]$$

由均方收敛准则知

$$\underset{\Delta \to 0}{\text{l.i.m}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$$

存在，即$f(t)X(t)$在$[a, b]$上均方可积.

必要性 由洛易夫判别准则, 若均方积分

$$\int_a^b f(t)X(t)dt$$

存在, 则下列极限存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} E\Big[\sum_{k=1}^{m} f(s_k^*)X(s_k^*)\Delta s_k \overline{\sum_{j=1}^{n} f(t_j^*)X(t_j^*)\Delta t_j}\Big]$$

$$= E\Big[\int_a^b f(s)X(s)ds \overline{\int_a^b f(t)X(t)dt}\Big]$$

$$\boxed{\left(= E\Big[\Big|\int_a^b f(t)X(t)dt\Big|^2\Big]\right)}$$

$$= \int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}E[X(s)\overline{X(t)}]dsdt$$

$$= \int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

注1 有书认为必要性不成立，但未举出反例.

注2 实际推出重要公式

$$E\left[\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2\right]=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

推论1 若$\{X(t),t\in[a,b]\}$的自相关函数$R(s,t)$在$[a,b]\times[a,b]$上可积, 则$X(t)$在$[a,b]$上均方可积

$$E\left[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2\right]=\int_a^b\int_a^b R(s,t)dsdt$$

重要公式

推论2 若$X(t)$在$[a, b]$上均方连续，则$X(t)$在$[a, b]$上均方可积.

证 根据均方连续性准则，

$\{X(t), t\in[a,b]\}$均方连续，$\xrightarrow{\text{定理4.3.1之推论}}$

$X(t)$的自相关函数$R(s, t)$在$[a, b]\times[a, b]$上连续，

$\Longrightarrow$ $R(s, t)$在$[a, b]\times[a, b]$上可积，

$\xrightarrow{\text{推论1}}$ $X(t)$在$[a,b]$上均方可积.

EX.1 设$X(t)=A\cos at+B\sin at, t\geq 0$，$a$为常数$a\neq 0$, A与B相互独立, 均服从$N(0,\sigma^2)$, 判断$X(t)$是否均方可积.

解 $m_X(t)=E(A)\cos at+E(B)\sin at=0,$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E[A^2\cos as\cos at+B^2\sin as\sin at]$$

$$=\sigma^2\cos a(t-s).$$

在$[0,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续, 故$X(t)$对所有$t\geq 0$均方连续, 从而均方可积(仅在有限区间上).

定义4.5.3 广义黎曼均方积分定义为

$$\int_a^{\infty} f(t)X(t)dt \triangleq \underset{b\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_a^{b} f(t)X(t)dt$$

推论3 广义均方积分 $\int_a^{\infty} f(t)X(t)dt$ 存在的充分必要条件是广义二重积分

$$\int_a^{\infty}\int_a^{\infty} f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

存在且有限.

三、均方积分性质

定理4.5.2 均方积分具有以下性质

1）均方积分惟一性

若 $\int_a^b f(t)X(t)dt = Y_1, \quad \int_a^b f(t)X(t)dt = Y_2$

则 $Y_1 = Y_2 \quad (a.e.).$

2) 线性性质

若$X(t)$,$Y(t)$在$[a, b]$上均方可积, 则对 $\forall \alpha,\beta \in C$

$$\int_a^b [\alpha f(t)X(t) + \beta g(t)Y(t)]dt$$

$$= \alpha \int_a^b f(t)X(t)dt + \beta \int_a^b g(t)Y(t)dt$$

特别有

$$\int_a^b [\alpha X(t)+\beta Y(t)]dt = \alpha\int_a^b X(t)dt + \beta\int_a^b Y(t)dt$$

3）可加性

设$a<c<b$，若 $\int_a^c f(t)X(t)dt$ 及$\int_c^b f(t)X(t)dt$存在，

则 $$\int_a^b f(t)X(t)dt = \int_a^c f(t)X(t)dt + \int_c^b f(t)X(t)dt$$

以上各条性质类似于普通黎曼积分.

4）设$X(t)$在$[a, b]$均方连续，则

$$\left\|\int_a^b X(t)dt\right\| \le \int_a^b \|X(t)\|dt;$$

证　由定理4.5.1之推论1

$$E\left[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2\right]=\int_a^b\int_a^b R(s,t)dsdt$$

$$\le\int_a^b\int_a^b\left|R(s,t)\right|dsdt=\int_a^b\int_a^b\left|E[X(s)\overline{X(t)}]\right|dsdt$$

$$\le\int_a^b\int_a^b\left[E\left(\left|X(s)\right|^2\right)E\left(\left|X(t)\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}dsdt$$

许瓦兹不等式

$$=\left\{\int_a^b\left[E\left(\left|X(t)\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}dt\right\}^2=\left\{\int_a^b\left\|X(t)\right\|dt\right\}^2$$

定理4.5.3 均方积分的矩

若 $f(t)X(t)$ 在$[a, b]$上均方可积,则有

定理4.5.1
之注2

1) $E[\int_a^b f(t)X(t)dt] = \int_a^b f(t)m_X(t)dt$

2) $E[\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2] = \int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$

证 1)

$$E[\int_a^b f(t)X(t)dt] = E[\underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k]$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} E[\sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k]$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_k f(t_k^*) E[X(t_k^*)] \Delta t_k = \lim_{\Delta \to 0} \sum_k f(t_k^*) m_X(t_k^*) \Delta t_k$$

$$= \int_a^b f(t) m_X(t) dt$$

续EX.1 设$X(t)=A\cos at+B\sin at, t\geq 0$, a为常数$a\neq 0$, A与B相互独立, 均服从$N(0,\sigma^2)$, 令

$$Y = \int_0^2 X(s) ds,$$

计算$E(Y)$和$D(Y)$.

解 $E(Y) = \int_0^2 E[X(s)] ds = 0,$

$$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$= E(Y^2)$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 R_X(u,v) du dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 \sigma^2 \cos a(u-v) du dv$$

$$= \frac{2\sigma^2}{a^2}(1-\cos 2a)$$

EX.2 设A, B相互独立同分布于$N(0,\sigma^2)$, $X(t)=At+B$, $t\in[0, 1]$, 试求下列随机变量的数学期望.

$$Z=\int_0^1 X(t)dt, \qquad Y=\int_0^1 X^2(t)dt,$$

解 $\because E[X(t)]=E(A)t+E(B)=0,$

$$E[X^2(t)]=E[A^2t^2+2AB+B^2]$$

$$=E(A^2)t^2+E(B^2)+2E(A)E(B)=\sigma^2(1+t^2)$$

$$\therefore \quad E[Z]=\int_0^1 E[X(t)]dt=0,$$

$$E[Y]=\int_0^1 E[X^2(t)]dt$$

$$=\int_0^1 \sigma^2(1+t^2)dt=\frac{4}{3}\sigma^2.$$

EX.3 设随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$ 的协方差函数为.

$$C_X(t_1,t_2)=(1+t_1t_2)\sigma^2$$

试求$Y(s)=\int_0^s X(t)dt$ 的协方差函数与方差函数

解 $C_Y(s_1,s_2)=E\{[Y(s_1)-E(Y(s_1))][Y(s_2)-E(Y(s_2))]\}$

$$=E\{[Y(s_1)Y(s_2)]-E[(Y(s_1)]E[(Y(s_2)]$$

$$= R_Y(s_1,s_2) - m_Y(s_1)m_Y(s_2)$$

$$= \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2 - \int_0^{s_1} m_X(t_1)dt_1\int_0^{s_2} m_X(t_2)dt_2$$

$$= \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} [R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)]dt_1dt_2$$

$$= \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} C_X(t_1,t_2)dt_1dt_2 \quad (= C_Y(s_1,s_2))$$

积分过程的协方差计算公式

$$= \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} (1+t_1t_2)\sigma^2 dt_1dt_2 = \sigma^2 s_1 s_2 (1+\frac{1}{4}s_1s_2)$$

$$D_Y(s) = C_Y(s,s) = \sigma^2 s^2 (1+\frac{1}{4}s^2)$$