§3.3 泊 松 过 程(一)

一、计数过程与泊松过程

在天文，地理，物理，生物，通信，医学，计算机网络，密码学等许多领域，都有关于随机事件流的**计数问题**，如：

盖格记数器上的粒子流；

电话交换机上的呼唤流；

计算机网络上的（图象，声音）流；

编码（密码）中的误码流；

§3.3 泊 松 过 程(一)

交通中事故流;

细胞中染色体的交换次数, …

均构成以时间顺序出现的事件流 $A_1, A_2, \ldots$

定义3.3.1 随机过程$\{N(t),\ t\geq 0\}$称为**计数过程**(Counting Process),如果$N(t)$表示在$(0,\ t)$内事件A 出现的总次数.

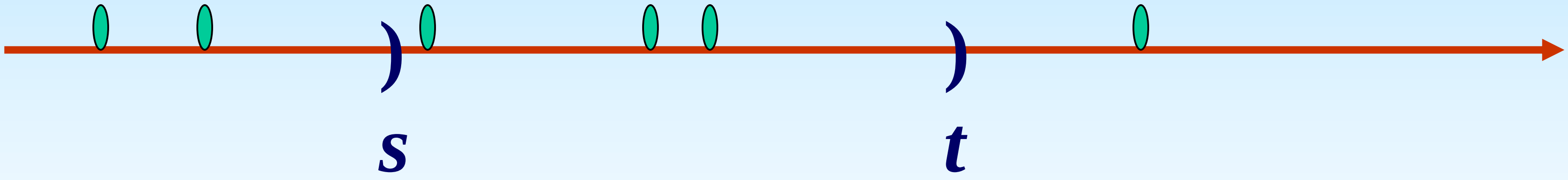
计数过程应满足:

(1) $N(t)\geq 0$;

(2) $N(t)$ 取非负整数值;

(3) 如果$s < t$，则$N(s) \le N(t)$;

(4) 对于$s < t$, $N(t) - N(s)$表示时间间隔(s, t)内事件出现的次数.



Poisson过程是一类很重要的计数过程.

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

Poisson过程数学模型：

电话呼叫过程 设$N(t)$为$[0, t)$时间内到达的呼叫次数, 其状态空间为

$$E=\{0, 1, 2, \ldots\}$$

此过程有如下特点：

1) 零初值性 $N(0)=0$;

2) 独立增量性 任意两个不相重叠的时间间隔内到达的呼叫次数相互独立;

3) 齐次性 在(s, t)时间内到达的呼叫次数仅与时间间隔长度$t-s$ 有关，而与起始时间 s 无关;

4）普通性 在充分小的时间间隔内到达的呼叫次数最多仅有一次，即对充分小的 Δt, 有

$$P\{N(\Delta t)=0\}=p_0(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\{N(\Delta t)=1\}=p_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\{N(\Delta t)\geq 2\}=\sum_{k=2}^{\infty}p_k(\Delta t)=o(\Delta t),$$

其中$\lambda>0$.

定义3.3.2 设计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$满足:

$$\begin{cases}(1)\ N(0)=0; \\ (2)\ \text{是平稳独立增量过程;} \\ (3)\ P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h),\ \lambda>0; \\ (4)\ P\{N(h)\geq 2\}=o(h).\end{cases}$$

称$\{N(t), t\geq 0)$是参数(或速率, 强度)为λ的**齐次泊松过程.**

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

EX.1 在数字通信中误码率 λ 是重要指标, 设$\{N(t), t\geq 0\}$为时间段[0, t)内发生的误码次数, $\{N(t), t\geq 0\}$是计数过程, 而且满足

(1) 初始时刻不出现误码是必然的, 故$N(0)=0$;

(2) 在互不相交的区间

$$[0, t_1),[t_1, t_2),\cdots,[t_{n-1}, t_n), \quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

出现的误码数互不影响, 故$N(t)$独立增量过程.

在系统稳定运行的条件下, 在相同长度区间内出现k个误码概率应相同, 故可认为$N(t)$是增量平稳过程.

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$\{N(t), t\geq 0\}$是平稳独立增量过程;

(3) 认为Δt时间内出现一个误码的可能性与区间长度成正比是合理的,即有

$$P\{N(\Delta t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\ \lambda>0;$$

(4) 假定对足够小的Δt时间内,出现两个以上误码的概率是关于Δt的高阶无穷小也是合理的, 有

$$P\{N(\Delta t)\geq 2\}=o(\Delta t).$$

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

终上所述,可用Poisson过程数学模型描述通信系统中误码计数问题.

可认为

$\{N(t), t\geq 0\}$是强度为 λ 的泊松计数过程.

定理3.3.1 齐次泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$在时间间隔(t_0, t_0+t)内事件出现n 次的概率为

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},(n=0,1,2,\cdots)$$

证　记 $P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{[N(t)-N(0)]=n\}$

$$=P\{N(t_0+t)-N(t_0)=n\} \qquad (1)$$

平稳增量

1° 由条件(2)～(4)，得：

$P_0(t+h)=P\{N(t+h)=0\}=P\{N(t)=0,N(t+h)-N(t)=0\}$

$=P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}$

增量独立

$=P_0(t)[1-\lambda h+o(h)]$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}$$

§3.3 泊 松 过 程(一)

令$h \to 0$,得
$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda \\ P_0(0) = 1, \qquad (\text{条件}(1)\ N(0) = 0) \end{cases}$$

解得 $$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

2^o 当$n \geq 1$,根据全概率公式有

$$p_n(t+h) = p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + o(h)$$

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$p_n(t+h)=(1-\lambda h)p_n(t)+\lambda h p_{n-1}(t)+o(h)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{h}$$

令 $h\to 0$, 得 $$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘以 $e^{\lambda t}$ 后移项整理得

$$\frac{d[e^{\lambda t}P_n(t)]}{dt}=\lambda e^{\lambda t}p_{n-1}(t) \qquad (2)$$

当 $n=1$, 则

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$\begin{cases} \dfrac{d[e^{\lambda t}P_1(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t}P_0(t) = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = \lambda \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

解得 $$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

假设 $$P_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$$ 成立

代入(2)式有

$$\frac{d[e^{\lambda t}P_n(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t}p_{n-1}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$\Rightarrow \qquad e^{\lambda t}P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}+C$$

利用初始条件 $P_n(0)=0$, 可证得

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

对一切$n\geq 0$均成立.

定理证明反之亦然, 得泊松过程的等价定义:

定义3.3.2 ′设计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足下述条件:

(1) $N(0)=0$;

(2) $N(t)$是独立增量过程;

(3) 对一切$0 \le s < t$, $N(t) - N(s) \sim P(\lambda(t-s))$, 即

$$P\{[N(t)-N(s)]=k\}=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)},$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

注 有 $P\{N(t)=k\}=P\{[N(t)-N(0)]=k\}$

$$=\frac{[\lambda t]^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

问题 若$N(t)$的一维分布是泊松分布, 能否推出第(3)条成立?

EX.2 设$\{N(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，事件A在$(0,\tau)$时间区间内出现n次，试求：

$$P\{N(s)=k \mid N(\tau)=n\},\ 0<k<n,\ 0<s<\tau$$

解　原式 $= \dfrac{P\{N(s)=k, N(\tau)=n\}}{P\{N(\tau)=n\}}$

$$= P\{N(s)=k, N(\tau)-N(s)=n-k\}\cdot n!e^{\lambda\tau}(\lambda\tau)^{-n}$$

$$= e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda(\tau-s)}\frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!}n!e^{\lambda\tau}(\lambda\tau)^{-n}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{\tau}\right)^{k}\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}$$

$$= C_n^k\left(\frac{s}{\tau}\right)^{k}\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

二、齐次泊松过程的有关结论

1. 数字特征

因对$\forall t > 0$, $N(t) \sim P(\lambda t)$.

均值函数 $m(t) = E\{N(t)\} = \lambda t$

方差函数 $D(t) = \lambda t$

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

有 $\lambda = E\{N(t)\}/t$

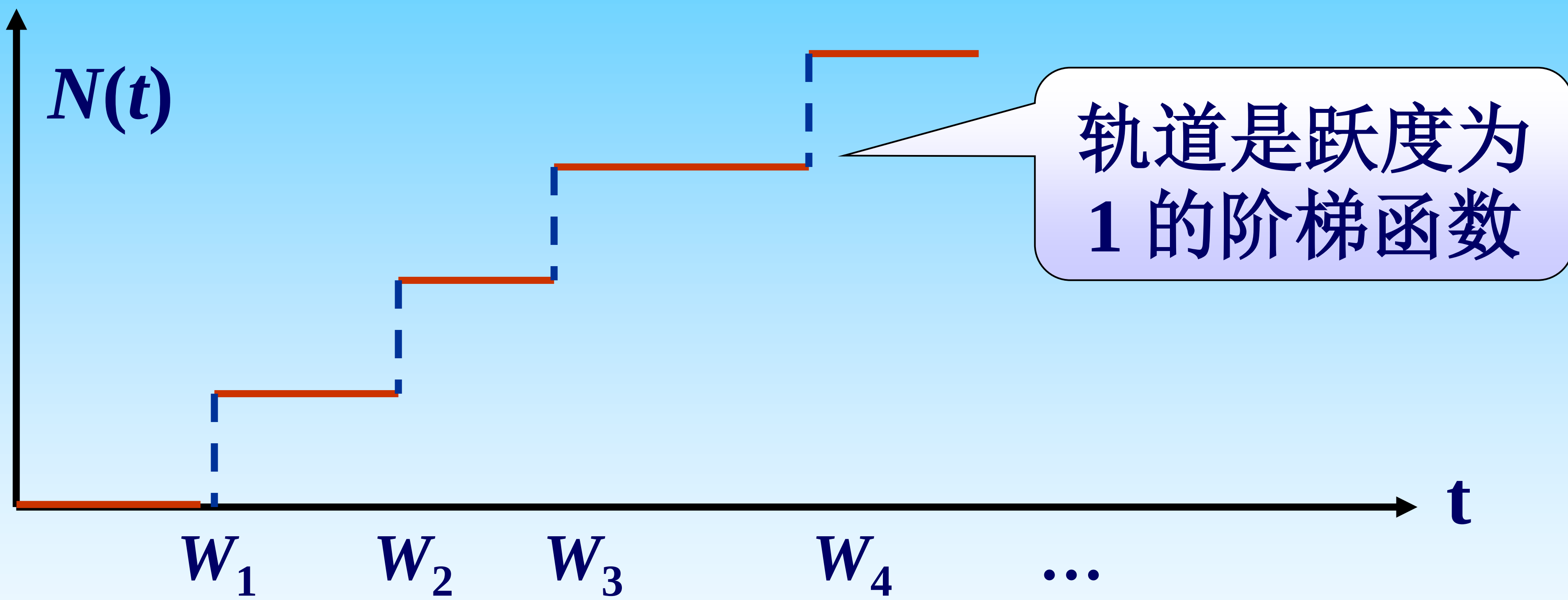
称λ为事件的到达率

λ是单位时间内事件出现的平均次数.

协方差函数 $C(s,t)=\lambda\min(s,t)$,

相关函数 $R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$.

2. 时间间隔与等待时间的分布



用T_n表示事件A第$n-1$次出现与第n次出现的**时间间隔**.

W_n为事件A第n 次出现的等待时间(到达时间).

有 $W_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ 和 $T_i = W_{i+1} - W_i$

定理3.3.2 设$\{T_n, n\geq1\}$是参数为 λ 的泊松过程$\{N(t), t\geq0\}$的时间间隔序列，则$\{T_n, n\geq1\}$相互独立同服从指数分布，且$E\{T\}=1/\lambda$.

证 (1) 因 $\{T_1>t\}=\{(0, t)$内事件A不出现$\}$

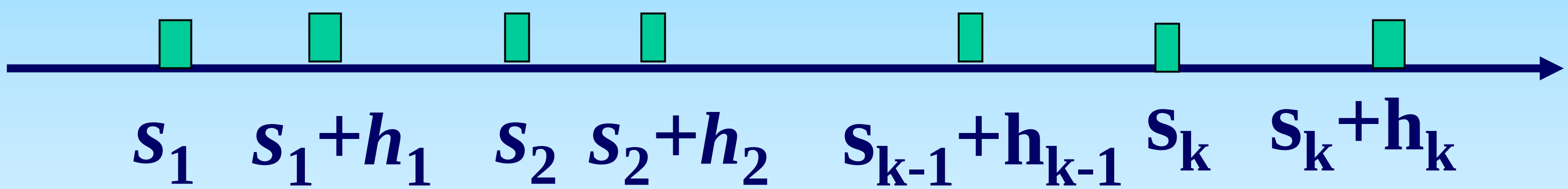
$\Rightarrow$ $P\{T_1>t\}=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}$

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$F_{T_1}(t)=1-P\{T>t\}=1-e^{-\lambda t},\qquad t\ge 0$$

即 T_1 服从均值为1／λ的指数分布.

(2) 取 s_k, h_k, k=1,2,…,n满足如下大小关系



$$P\{s_k<W_k<s_k+h_k,k=1,2,\dots,n\}$$

$$=P\{N(s_1)=0,N(s_1+h_1)-N(s_1)=1,$$

$$N(s_2)-N(s_1+h_1)=0,N(s_2+h_2)-N(s_2)=1,\dots,$$

$$N(s_n)-N(s_{n-1}+h_{n-1})=0,N(s_n+h_n)-N(s_n)=1\}$$

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$=e^{-\lambda s_1}\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}\lambda h_2 e^{-\lambda h_2}\cdots e^{-\lambda(s_n-s_{n-1}-h_{n-1})}\lambda h_n e^{-\lambda h_n}$$

$$=e^{-\lambda s_n}\lambda^n\prod_{k=1}^{n}h_k$$

由此得到($W_1, W_2,\ldots, W_n$)的联合概率密度函数

$$f_{W_1,W_2,\cdots,W_n}(s_1,s_2,\cdots,s_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda s_n}, & 0<s_1<s_2<\cdots<s_n,\\ 0, & others.\end{cases}$$

由$T_k=W_k-W_{k-1}$, k=1,2,…,n, (W_0=0),可得 ($T_1, T_2,\ldots, T_n$)的联合概率密度函数

$$f_{T_1,T_2,\cdots,T_n}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\prod_{k=1}^{n}\lambda e^{-\lambda t_k}, & t_k>0, k=1,2,\cdots,n\\ 0, & others.\end{cases}$$

定理3.3.3 参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$，事件A第n 次出现的等待时间服从 Γ分布，其概率密度为：

$$f_{W_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0\end{cases}$$

注：在排队论中称W_n服从n阶爱尔朗分布.

证　因W_n是事件A 第 n次出现的等待时间，故

$$\{W_n\leq t\}=\{N(t)\geq n\}=\{(0,t)\text{内}A\text{至少出现}n\text{次}\}$$

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$F_{W_n}(t)=P\{W_n\le t\}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},t\ge 0$$

$$f_{W_n}(t)=F'_{W_n}(t)=[\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=n}^{\infty}\lambda\frac{(\lambda t)^k}{k!}]e^{-\lambda t},$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\qquad t\ge 0.$$

3. 到达时间的条件分布

引理3.3.1 设总体X有概率密度$f(x)$，$X_{(1)}$, $X_{(2)}$, …$X_{(n)}$是X的简单随机样本生成的顺序统计量(order statistics)，其概率密度为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n!\, f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$$

当$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

定理3.3.4 设$\{N(t), t \geq 0\}$是Poisson过程，已知在$(0, t]$时间内A出现n 次, 这n 次到达时间$W_1, W_2, \ldots, W_n$的联合条件分布密度为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n \mid N(t)=n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<t_1<\cdots<t_n\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

注 1 在N(t)=n的条件下，$W_1,W_2,\ldots,W_n$的条件分布与n个相互独立同服从$[0,t]$上均匀分布随机变量$U_1,U_2,\ldots,U_n$的顺序统计量$U_{(1)},U_{(2)},\ldots,U_{(n)}$有相同分布, 即

$$\{(W_1,W_2,\cdots,W_n) \mid N(t)=n\} \overset{d}{=} (U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)})$$

$W_1, W_2,\dots,W_n$可视为由相互独立在（0，t）上均匀分布随机变量$U_1, U_2,\dots,U_n$所得的顺序统计量.

注 2
$$\sum_{k=1}^{n} U_{(k)} = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

Ex.4 设到达电影院的观众组成强度为 λ 的 Possion流, 如果电影从t 时刻开演， 计算$(0, t]$内到达电影院的观众等待时间总和的数学期望.

解 设W_k 是第k 名观众到达时刻， 在$(0, t)$内到达的观众数为$N(t)$, 则总等待时间为

$$\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)$$

根据全数学期望公式

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)] = E\{E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\big|N(t)]\}$$

对$\forall n \geq 1$,

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\big|N(t)=n] = nt - E[\sum_{k=1}^{N(t)}W_k\big|N(t)=n]\}$$

由定理3.4.3 知 $W_1, W_2, \ldots, W_n$与 $[\,0, t\,]$上均匀分布相互独立随机变量的顺序统计量 $U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}$ 有相同的分布函数.

§ 3.3 泊 松 过 程(一)

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} W_k \Big| N(t)=n]$$

随机变量函数的条件期望公式

$$= \iint\cdots\int_{0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t} (\sum_{k=1}^{n} t_k) f(t_1,t_2,\cdots t_n \big|_{N(t)=n}) dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^{n} U_{(k)}\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} U_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(U_k) = \frac{nt}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E[\sum_{k=1}^{N(t)} (t-W_k) \Big| N(t)=n] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\,\middle|\,N(t)\right]=\frac{t}{2}N(t)$$

$$\Rightarrow \quad E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\right]= E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\,\middle|\,N(t)\right]\right\}$$

$$=E\left[\frac{t}{2}N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

§3.3 泊 松 过 程(一)