

§1.5 特征函数

一、特征函数的定义及例

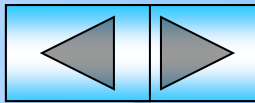
设 X, Y 是实随机变量,复随机变量

$$Z=X + jY,$$

的数学期望定义为

$$E(Z) = E(X) + j E(Y), \quad j = \sqrt{-1}$$

特别



特征函数

$$E(e^{jtX}) = E(\cos tX) + jE(\sin tX)$$

X 是实随机变量

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF(x) + j \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

**求随机变量
 X 的函数的
数学期望**

注 1) $\forall t \in R$, $\cos tx$ 和 $\sin tx$ 均为有界函数, 故

$E(e^{jtX})$ 总存在.

2) $E(e^{jtX})$ 是实变量 t 的复值函数.

特征函数

定义1.5.1 设 X 是定义在 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量,称

$$\varphi(t) = E(e^{jtx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} dF(x), \quad t \in R$$

为 X 的**特征函数**.

当 X 是连续型随机变量

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x) dx;$$

当 X 是离散型随机变量

$$\varphi(t) = \sum_k e^{jtx_k} p_k.$$

关于 X 的分布函数的Fourier-Stieltjes变换

特征函数

Ex.1 单点分布 $P\{X = c\} = 1,$

$$\varphi(t) = E(e^{jtc}) = e^{jtc}, t \in \mathbf{R}.$$

Ex.2 两点分布

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{jt \cdot 0}(1-p) + e^{jt \cdot 1}p \\ &= 1-p + pe^{jt} = q + pe^{jt}, t \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Ex.3 二项分布 $\varphi(t) = (q + pe^{jt})^n, t \in \mathbf{R}$

Ex.4 泊松分布 $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{jt}-1)}, t \in \mathbf{R}$

Ex.5 指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{jtx} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cos tx dx + j\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin tx dx$$

$$= \lambda \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2} + j\lambda \frac{t}{\lambda^2 + t^2} = \left(1 - \frac{jt}{\lambda}\right)^{-1}, t \in R$$

Ex.6 均匀分布 $U[-a, a]$,

$$\varphi(t) = \frac{\sin at}{at}, t \in R$$

Ex.7 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$\varphi(t) = e^{j\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, t \in R$$

特别正态分布 $N(0, 1)$, 则

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, t \in R$$

特征函数

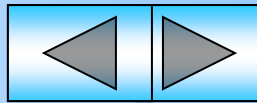
证明

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in R$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\underline{\underline{u = \frac{x-\mu}{\sigma}}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jt(\mu+\sigma u)} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-jt\sigma)^2}{2}} du = e^{j\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, t \in R$$



二、特征函数性质

性质1.5.1 随机变量 X 的特征函数满足：

1) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1;$

2) $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t).$

证 1) $|\varphi(t)|^2 = |E(\cos tX) + jE(\sin tX)|^2$

$$= [E(\cos tX)]^2 + [E(\sin tX)]^2$$
$$\leq E[(\cos tX)^2] + E[(\sin tX)^2]$$
$$= E[(\cos tX)^2 + (\sin tX)^2] = 1 = \varphi(0)$$

司蒂阶积分性质或矩的性质

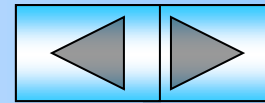
特征函数

$$\begin{aligned} 2) \quad \overline{\varphi(t)} &= \overline{E(e^{jtX})} = \overline{E(\cos tX) + jE(\sin tX)} \\ &= E(\cos tX) - jE(\sin tX) \\ &= E[\cos(-tX)] + jE[\sin(-tX)] \\ &= E[e^{j(-t)X}] = \varphi(-t) \end{aligned}$$

性质1.5.2 随机变量 X 的特征函数为 $\varphi_X(t)$, 则
 $Y = aX + b$ 的特征函数是

$$\varphi_Y(t) = e^{jbt} \varphi_X(at)$$

a, b 是常数.



特征函数

证 $\varphi_Y(t) = E[e^{j(aX+b)t}]$

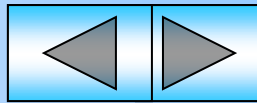
$$= E[e^{jbt} e^{j(at)X}] = e^{jbt} \varphi_X(at)$$

Ex.8 设 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求其特征函数.

解 设 $X \sim N(0, 1)$, 有 $Y = \sigma X + \mu$, 且

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in R.$$

$$\varphi_Y(t) = e^{j\mu t} \varphi_X(\sigma t) = e^{j\mu t} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in R.$$



性质1.5.3 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 R 上一致连续.

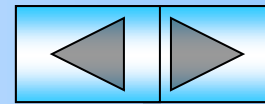
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 $|h| < \delta$ 时, 对 t 一致地有

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

一般, $\delta = \delta(\varepsilon, t)$

性质1.5.4 特征函数是非负定的函数, 即对任意正整数 n , 任意复数 z_1, z_2, \dots, z_n , 及 $t_r \in R$, $r = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \varphi(t_r - t_s) z_r \overline{z_s} \geq 0.$$

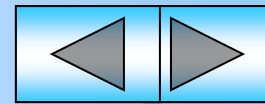


特征函数

证

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \varphi(t_r - t_s) z_r \bar{z}_s &= \sum_{r,s=1}^n z_r \bar{z}_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(t_r - t_s)x} dF(x) \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{r,s=1}^n z_r \bar{z}_s e^{jt_r x} e^{-jt_s x} \right] dF(x) \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{r=1}^n z_r e^{jt_r x} \right|^2 dF(x) \geq 0.\end{aligned}$$

注 以上性质中 $\varphi(0) = 1$, 一致连续性, 非负定性是本质性的.



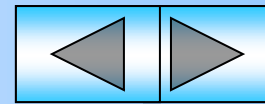
定理1.5.1 (波赫纳—辛钦) 函数 $\varphi(t)$ 为特征函数的充分必要条件是在 R 上一致连续, 非负定且 $\varphi(0) = 1$.

三、特征函数与矩的关系

定理1.5.2 若随机变量 X 的 n 阶矩存在, 则 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 的 k 阶导数 $\varphi^{(k)}(t)$ 存在, 且

$$E(X^k) = j^{(-k)} \varphi^{(k)}(0), \quad (k \leq n)$$

注 逆不真.



证 仅证连续型情形

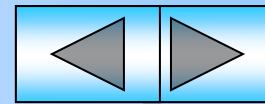
设 X 的概率密度为 $f(x)$, 有

$$\frac{d^k [e^{jtx} f(x)]}{dt^k} = j^k x^k e^{jtx} f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{jtx} x^k f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k f(x)| dx = E[|X|^k] < \infty$$

对 $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x) dx$ 两边求导, 得

$$\varphi^{(k)}(t) = j^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} x^k f(x) dx = j^k E(X^k e^{jtX})$$



特征函数

令 $t=0$, 得 $\varphi^{(k)}(0) = j^k E(X^k)$

故 $E(X^k) = j^{-k} \varphi^{(k)}(0)$

Ex.9 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 $\varphi(t) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos x \cos tx \, dx \quad (\because f(x) = f(-x))$

特征函数

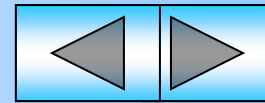
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(t+1)x + \cos(t-1)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{t+1} \sin[(t+1)\frac{\pi}{2}] + \frac{1}{t-1} [\sin(t-1)\frac{\pi}{2}] \right\}, \quad t \in R.$$

因 $\varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 2 - \frac{1}{4}\pi^2.$

故 $E(X) = j^{-1}\varphi'(0) = 0$

$$D(X) = E(X^2) = j^{-2}\varphi''(0) = -\left(2 - \frac{1}{4}\pi^2\right) = \frac{1}{4}\pi^2 - 2.$$



三、反演公式及唯一性定理

由随机变量 X 的分布函数可惟一确定其特征函数：

$$F(x) \Rightarrow \varphi(t)$$

问题

能否由 X 的特征函数唯一确定其分布函数？

$$\varphi(t) \Rightarrow F(x)$$

从而 $\varphi(t) \Leftrightarrow F(x)$

定理1.5.3 (反演公式) 设随机变量 X 的分布函数和特征函数分别为 $F(x)$ 和 $\varphi(t)$, 则对 $F(x)$ 的任意连续点 $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$,有

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt.$$

推论1(唯一性定理) 分布函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 恒等的充要条件是它们的特征函数 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 恒等.

特征函数

推论2 若随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 在 \mathbb{R} 上绝对可积, 则 X 为连续型随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

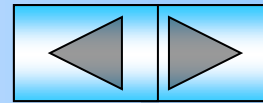
反演公式

注 对于连续型随机变量 X , 概率密度与特征函数互为富氏变换(仅差一个负号).

推论3 随机变量 X 是离散型的, 其分布律为

$$p_k = P\{X = k\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其特征函数为



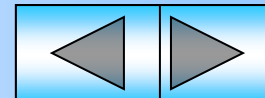
特征函数

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt}, \quad t \in R.$$

且 $p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk} \varphi(t) dt$ 反演公式

证 设 $k \in N$, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk} \varphi(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} p_s e^{ist} e^{-itk} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} p_k dt + \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq k}}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_s e^{it(s-k)} dt = 2\pi p_k + 0 \end{aligned}$$



特征函数

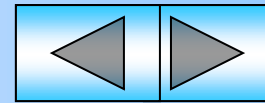
其中, 当 $s \neq k$ 时 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-s)} dt = 0$.

$$\Rightarrow p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itk} \varphi(t) dt.$$

Ex.9 随机变量 X 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上服从均匀分布,
 $Y = \cos X$, 利用特征函数求 Y 的概率密度.

解 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



Y 的特征函数为

$$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it\cos X})$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{it\cos x} \frac{1}{\pi} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it\cos x} \frac{1}{\pi} dx$$

偶
函
数

令

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx = -\sqrt{1-u^2} dx$$

$$\varphi_Y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 e^{itu} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

根据特征函数与分布函数一一对应的惟一性定理, 知随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1; \\ 0. & \text{其它.} \end{cases}$$

Ex.10 已知随机变量 X 的特征函数为

$$\varphi(t) = \cos^2 t, t \in R$$

试求 X 的概率分布.

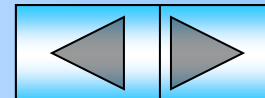
特征函数

解
$$\varphi(t) = \cos^2 t = \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right)^2$$
$$= \frac{1}{4} e^{2jt} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2jt}$$

$$= e^{2jt} P\{X = 2\} + e^{0jt} P\{X = 0\} + e^{-2jt} P\{X = -2\}$$

根据特征函数与分布函数一一对应的惟一性定理, 知随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p	1/4	1/2	1/4



四、独立随机变量和的特征函数

定理1.5.4 随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立,

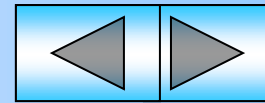
令

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{则} \quad \varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t)$$

Ex.11 随机变量 $Y \sim B(n, p)$, 写出其特征函数.

解 二项分布随机变量 Y 可表示为 $Y = \sum_{k=1}^n X_k$, 且 $X_k \sim B(1, p), k=1, 2, \dots, n$, 相互独立, 故 Y 的特征函数为

$$\varphi_Y(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = (q + pe^{it})^n$$



特征函数

Ex.12 若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且 $X_k \sim N(0, 1)$,

证明 $Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$ 也服从 $N(0, 1)$ 分布.

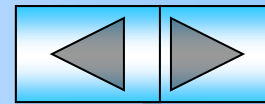
证 X_k 的特征函数为 $\varphi_k(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, 则

$$\varphi_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = e^{-\frac{nt^2}{2}}, \quad t \in R$$

从而

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in R$$

由唯一性定理知, $Y \sim N(0, 1)$.



五、多维随机变量的特征函数

定义1.5.2 二维随机变量 (X, Y) 的特征函数
定义为

$$\varphi(t_1, t_2) = E[e^{j(t_1 X + t_2 Y)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t_1 x + t_2 y)} dF(x, y)$$

连续型

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t_1 x + t_2 y)} f(x, y) dx dy$$

离散型

$$\varphi(t_1, t_2) = E[e^{j(t_1 X + t_2 Y)}] = \sum_r \sum_s e^{j(t_1 x_r + t_2 y_s)} p_{r,s}.$$

定义1.5.3 n 维随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则它的特征函数为

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) &= E[e^{j(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} dF(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

性质1.5.5

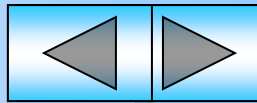
1) 随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立的充要条件是

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k)$$

与独立和 $Y = \sum_{k=1}^n X_k$ 的特征函数性质有什么差别？

2) 二维随机变量 (X, Y) 的特征函数为 $\varphi(t_1, t_2)$,
则 $Z=aX+bY+c$ 的特征函数为

$$\varphi_Z(t) = e^{itc} \varphi(at, bt), \quad t \in R.$$



特别有

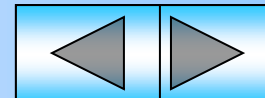
$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi(t, t)$$

证

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) &= E[e^{jt(aX+bY+c)}] = e^{jtc} E[e^{jt(aX+bY)}] \\ &= e^{jtc} [e^{jatX + jbtY}] \\ &= E^{jtc} \varphi(at, bt).\end{aligned}$$

Ex.13 设 (X_1, X_2) 服从二维正态分布, 且 $E(X_k) = k$, $k=1, 2$, 记.

$$K_{ij} = \text{Cov}(X_k, X_j) = k + j, \quad k, j, = 1, 2.$$



求 $Y=X_1+X_2$ 的特征函数.

解 $\varphi_{X_1, X_2}(t_1, t_2) =$

$$= e^{i(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) - \frac{1}{2}[\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2]}$$

$$= e^{i(t_1 + 2t_2) - \frac{1}{2}(2t_1^2 + 2 \times 3t_1 t_2 + 4t_2^2)}$$

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1, X_2}(t, t) = e^{i3t - 6t^2}$$

特征函数

$$= e^{i3t} e^{\frac{1}{2} \times 12t^2}, \quad t \in R.$$

故 $Y=X_1+X_2 \sim N(3,12)$.

