

# 2021-2022 学年秋季学期组合数学考试

18th December 2023 整理

1. 正偶数  $k_1, k_2, \dots > 0$ , 且满足  $k_i \neq k_j; i \neq j$ 。写出求将正整数  $r$  分解为  $k_1, k_2, \dots, k_n$  的和的方法数的算法, 要求  $k_i$  最多可被选中三次。(整数分解问题, 分解成偶数的和, 每个数最多被选中三次。)

2. 求:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 160, \\ 2 \leq x_3 \leq 10, x_4 \leq 3 \end{cases}$$

正整数解的个数

3. 证明: 11 个当中有 4 个人相识或 3 个人不相识

4. 求递归关系式:

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 2 \times 3^n, \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

题目是通过答案反推的, 参考答案为:  $a_n = \frac{11}{8}(-1)^n - \frac{3}{8} \times 3^n + \frac{3}{2} \times 3^n$

5. 禁区棋盘的棋盘多项式计算 (类似原题: 2020 年第五题)

6. 奔赴抗疫, 全国 4 个片区共有 68 个医疗队, 其中西南片区有 10 个, 中部片区有 18 个, 北方片区有 18 个, 东部片区有 22 个。假定同一片区的各个医疗队不加以区别, 现在要从中选取 27 个医疗队入围。考虑到不同片区的特殊情况, 要求西南片区至少入围 4 个医疗队, 北方片区至少入围 7 个医疗队, 其他片区至少各入围 2 个医疗队, 问理论上有多少种不同的选取方案? (数字是根据答案反推的: 本质就是四种元素的 12-重集, 有两种元素个数 6, 11 需要讨论数量是否够取)

7. 求不包含 3、5、7，出现偶数次 1、2，至少出现两次 4、8 的  $r$  位十进制数的个数。(具体数字记不清了，但是限制条件和被限制数的个数是对的，比较难算)
8. 解释是否存在一种无损压缩算法（解压后能得到和原来完全一样的数据），可以把任意数据进行压缩变得更小？