§1.3 随机变量的函数

两个问题

1. 随机变量的函数是否仍为同一概率空间上的随机变量?

2. 如何确定其分布?

1. 确定随机变量的函数的分布

1）设已知$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的联合分布, 并有k个n元连续函数：

$$y_1=g_1(x_1,\ldots,x_n)\ ,\ldots,\ y_k=g_k(x_1,\ldots,x_n)$$

则 $Y_i=g_i(X_1,\ldots,X_n)$,（ $i=1,2,\ldots,k$)是随机变量. $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_k)$的联合分布函数为：

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_k)=P\{Y_1\le y_1,Y_2\le y_2,\cdots,Y_k\le y_k\}$$

$$=P\{g_1(X_1,\cdots,X_n)\le y_1,\cdots,g_k(X_1,\cdots,X_n)\le y_k\}$$

当（$X_1,X_2,\ldots,X_k$）是连续型的随机变量时

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_k)=\underset{D}{\int\cdots\int} f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

其中 $D=\{(x_1,\cdots x_n):g_i(x_1,\cdots x_n)\le y_i, i=1,2,\cdots,k\}$

当（$X_1,X_2,\ldots,X_k$）是离散型的随机变量时

$$p(y_1,y_2,\cdots,y_k)=\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}$$

其中$D=\{(x_1,\cdots x_n):g_i(x_1,\cdots x_n)=y_i, i=1,2,\cdots,k\}$

2）二维随机变量的变换

定理1.3.1 设(X_1, X_2)的联合密度为$f(x_1, x_2)$,若函数

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2); \\ y_2 = g_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

满足下述条件:

① 存在惟一反函数 $\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2), \\ x_2 = x_2(y_1, y_2). \end{cases}$

② 有连续的一阶偏导数；

③Jacobi行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

则$Y_1=g_1(X_1,X_2)$, $Y_2=g_2(X_1,X_2)$的联合概率密度为

$$f[x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)]|J|$$

证 Y_1, Y_2是随机变量，其联合分布函数为

$$F(y_1, y_2) = \iint\limits_{D} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

其中 $D = \{(x_1, x_2): g_1(x_1, x_2) \le y_1, g_2(x_1, x_2) \le y_2\}$

做积分变换

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, u_2); \\ x_2 = x_2(u_1, u_2). \end{cases}$$

$$F(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f\left[x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2)\right]|J|du_1du_2$$

$$\Rightarrow \quad f(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F(y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}$$

$$= f[x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)]\left|J\right|$$

Ex.2 和的分布$Y=X_1+X_2$

$$令 \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{cases}$$

反函数

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

得$Y_1=X_1$和$Y_2=X_1+X_2$的联合密度为

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(y_1,y_2-y_1)|J|$$

关于$Y_2=X_1+X_2$的边缘密度为:

$$f_{X_1+X_2}(y_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_1,X_2}(y_1,y_2-y_1)dy_1$$

若X_1, X_2相互独立，则

$$f_{X_1+X_2}(y_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2-y_1)dy_1$$

称为两个函数的卷积或褶积