§4.2 二阶矩随机变量空间及均方极限

均方微积分应用实例一

数学模型: Black-Scholes期权定价公式

1997年的诺贝尔经济学奖获得者，美国学者：Robert C.Merton; Myron. Scholes以及Fisher Black (1938-1995)创建的了著名的Black-Scholes理论.

Black-Scholes在股票价格的变化是一种几何布朗运动的假定下，从机理上导出一个随机微分方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

μ—股票的期望收益率，

σ—股票收益率的波动率；

W_t— 标准布朗运动，表示了对股票收益率的随机干扰作用.

由此得到期权价格作为时间和股价的函数所满足的抛物型方程及显示解，称为Black-Scholes公式。

由Merton进一步完善和系统化，创建了Black-Scholes理论.

被誉为“华尔街第二次革命”；

人类有史以来使用最频繁的数学工具；

奠定了研究新型衍生证券设计的新学科——金融工程的基础.

均方微积分应用实例二

考虑一个时不变系统

$$x(t) \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y(t)$$

对任意常数τ, 输入和输出满足

$$y(t+\tau) = L[x(t+\tau)]$$

若L是积分算子, 则 $\quad y(t) = \int_0^T x(t)dt$

若L是微分算子, 则 $\quad y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

对于随机输入信号$X(t)$如何进行微积分运算?

一、二阶矩随机变量空间H

本章着重介绍二阶矩过程的随机分析—均方意义下的微积分.

普通微积分学中的微分、积分、连续等概念都是建立在极限的基础上，而极限定义又取决于实数(复数)域上点间距离的定义.

为定义关于随机变量的距离以及极限概念, 引进

定义4.2.1 称定义在概率空间(Ω,F,P)上的具有有限二阶矩的随机变量的全体组成的集合

$$H=\{X \mid E[|X|^2]<+\infty\}$$

为**二阶矩随机变量空间**.

注　在H中称X与Y相等,若

$$P\{X=Y\}=1 \quad (\text{记为}X=Y,\ a.e.)$$

定理4.2.1 H为线性空间, 即设$X, Y\in H$, 则对任意复数 a, b, 有$aX+bY\in H$.

证: 由许瓦兹不等式

证 明

$$\{E[|XY|]\}^2 \le E[|X|^2]\cdot E[|Y|^2] < \infty$$

$$E[|aX+bY|^2] \le E[(|aX|+|bY|)^2]$$

$$\le |a|^2 E[|X|^2] + 2|a|\cdot|b|E[|XY|] + |b|^2 E[|Y|^2]$$

$$\le |a|^2 E[|X|^2] + 2|a|\cdot|b|\sqrt{E[|X|^2]}\sqrt{E[|Y|^2]}$$

$$+|b|^2 E[|Y|^2] < \infty$$

即有 $aX+bY\in H$.

引理4.2.1 对$X \in H$，令

$$\boxed{\|X\| \triangleq [E(|X|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

1) $\forall X, Y \in H$, $|E(X\overline{Y})| \le E(|X\overline{Y}|) \le \|X\| \cdot \|Y\|$;

2) $\forall X \in H$, $|E(X)| \le E(|X|) \le \|X\|$.

证 明

引理4.2.2 如上定义的$\|\cdot\|$是范数,即有

1) 正定性：$\forall X \in H$, $\|X\| \ge 0$, 且

$$\|X\| = 0 \Leftrightarrow P\{X = 0\} = 1;$$

2) 齐次性：$\forall a \in C, \forall X \in H, \|aX\| = |a| \cdot \|X\|;$

3) 三角不等式：$\forall X, Y \in H, \|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|.$

证 (1) 和 (2)显然.

$$\boxed{\|X\| \triangleq [E(|X|^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

(3) $\|X+Y\|^2 = E[|X+Y|^2]$

$$\le E[|X|^2] + 2E[|XY|] + E[|Y|^2]$$

$$\le \|X\|^2 + 2\|X\| \cdot \|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2$$

结论 H构成一个线性赋范空间.

定理4.2.2 对任意$X,Y\in H$, 令

$$d(X,Y)\triangleq\|X-Y\|$$

则 $d(X,Y)$是H 中的**距离**. 即对任意$X,Y,Z\in H$, 有

1) **非负性** $d(X,Y)\geq 0$,

$$X=Y\ (a.e)\iff d(X,Y)=0;$$

2) **对称性** $d(X,Y)=d(Y,X)$;

3) **三角不等式** $d(X,Z)\leq d(X,Y)+d(Y,Z)$.

将H构成一个距离空间

二、随机变量序列的均方极限

定义4.2.2 设X_n, $X\in H$，n=1,2, …,如果

$$\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\| = 0, \qquad (*)$$

称X_n**均方收敛**于X,记为

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X$$

注1 按H 中距离定义知

$$(*) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0;$$

注2 均方极限具有唯一性,即若

$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ X_n = X$和 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\ X_n = Y$ 同时成立,

则 $X = Y \quad (a.e.)$

$\because \quad d(X,Y)\le d(X_n,X)+d(X_n,Y)\to 0 \quad (as\ n\to\infty)$

$\therefore d(X,Y)=0 \Leftrightarrow E\{|X-Y|^2\}=0 \Rightarrow P\{X=Y\}=1$

定理4.2.3 (柯西均方收敛准则)

H中随机变量序列$\{X_n\}$均方收敛的充要条件为

$$\lim_{m,n\to\infty}\|X_m - X_n\| = 0$$

二重极限

此定理称为完备性定理, 说明H是完备的线性赋范空间.

称$\{X_n\}$为均方收敛基本列(柯西列).

注：柯西列必有界

证 仅证必要性

若 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X,$

因 $\|X_m - X_n\| \le \|X_m - X\| + \|X_n - X\|$

$$\Rightarrow \quad \lim_{m,n\to\infty}\|X_m - X_n\| = 0.$$

EX.1 相互独立随机变量序列

$$X_n \sim \begin{bmatrix} n & 0 \\ \dfrac{1}{n^2} & 1-\dfrac{1}{n^2} \end{bmatrix} \quad n=1,2,\cdots$$

$$E[|X_n|^2] = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 < \infty, \quad X_n \in H, \qquad n = 1,2,\cdots$$

由 于 $\quad \|X_m - X_n\|^2 = E(X_m^2 - 2X_mX_n + X_n^2)$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n} + 1 = 2\left(1-\frac{1}{mn}\right) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 2$$

故$\{X_n\}$不均方收敛.

EX.2 设$\{X_n\}$是相互独立同分布随机变量序列，均值为μ，方差为1，定义

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

证明Y_n均方收敛于μ.

证 $\|Y_n - \mu\|^2 = E[|Y_n - \mu|^2] = E[(Y_n - \mu)\overline{(Y_n - \mu)}]$

$$= E[(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu)\overline{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu)}]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E[(X_i - \mu)(\overline{X_k} - \overline{\mu})]$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}Cov(X_i,X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\|Y_n-\mu\|^2=0. \quad \Rightarrow \quad \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,Y_n=\mu.$$

三、随机变量序列的均方极限性质

定理4.2.4 (均方极限的线性性质)

设 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,X_n=X$, 且 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,Y_n=Y$, a,b是复常数,则

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\,(aX_n+bY_n)=aX+bY;$$

证

$$\|(aX_n + bY_n) - (aX + bY)\|$$

$$= \|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)\|$$

$$\le |a| \cdot \|X_n - X\| + |b| \cdot \|Y_n - Y\| \xrightarrow[as\ n\to\infty]{} 0$$

定理4.2.5* (均方极限的数字特征)

设 $\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{n\to\infty} X_n = X$， 且 $\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$，则

1) $\lim\limits_{m,n\to\infty} E(X_m \overline{Y_n}) = E(X\overline{Y})$;

乘积性质

2) $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = E(\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{n\to\infty} X_n) = E(X)$;

3) $$\lim_{n\to\infty} E(|X_n|^2) = E(|\operatorname*{l.i.m}_{n\to\infty} X_n|^2) = E(|X|^2);$$

4) $$\lim_{n\to\infty} D(X_n) = D(\operatorname*{l.i.m}_{n\to\infty} X_n) = D(X);$$

5) 若实随机变量X，$X_n \in H$,则

$$E(e^{it\operatorname*{l\cdot i\cdot m}_{n\to\infty} X_n}) = E(e^{itX}) = \lim_{n\to\infty} E[e^{itX_n}].$$

证 1）仅证实随机变量的情形

$$|E[X_mY_n] - E(XY)| = |E(X_mY_n - XY)|$$

$$= |E[X_mY_n - X_mY - XY_n + XY + X_mY - XY + XY_n - XY]|$$

$$\le E\left|(X_m - X)(Y_n - Y)\right| + E\left|X(Y_n - Y)\right| + E\left|(X_m - X)Y\right|$$

$$\le \|X_m - X\|\cdot\|Y_n - Y\| + \|X\|\cdot\|Y_n - Y\| + \|X_m - X\|\cdot\|Y\|$$

因X，$Y\in H$，$\|X\|<\infty$，$\|Y\|<\infty$，令$m,n\to\infty$，　1)得证.

在1）中令$Y_n\equiv 1$，得2).

在1）中令$Y_n\equiv X_n$，得3).

由 1) 与 2) 可证4).

5)　$\left|E(e^{jtX_n}) - E(e^{itX})\right| = \left|E(e^{itX_n} - e^{itX})\right|$

$$= \left| E[e^{itX}(1-e^{it(X_n - X)})] \right|$$

$$\le E[\left|1-e^{it(X_n - X)}\right|] \le E\left[\left|t(X_n - X)\right|\right]$$

$$\le |t| \cdot \| X_n - X \| \xrightarrow[as\ n\to\infty]{} 0$$

注 **随机变量序列$\{X_n\}$均方收敛,其相应的数学期望数列, 方差数列及特征函数列也收敛.**

EX.4 设$\{X_n, n\geq 1\}$是泊松随机变量序列,证明:该序列的均方极限服从泊松分布.

证 记 $E(X)=\lambda,\quad E(X_n)=\lambda_n,$

定理5之2)

因 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X,$

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n) = E(X);$

即 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda,$

设 $\varphi_n(u)$ 和 $\varphi(u)$ 为 X_n 和 X 的特征函数,有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(u)=\lim_{n\to\infty}E(e^{iuX_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\lambda_n(e^{iu}-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(e^{iu}-1)}=e^{\lambda(e^{iu}-1)}$$

定理5之5)

$$=\varphi(u)$$

因特征函数与分布函数一一对应, 故 X 服从参数为 λ 的泊松分布.

注 正态分布随机序列的均方极限服从正态分布.

$$E(e^{iuX})=\mathrm{e}^{iuE(X)-u^2D(X)/2}$$

定理4.2.6 (洛易夫均方收敛判别准则)

随机变量序列$\{X_n\} \in H$ 均方收敛的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E(X_m \overline{X_n})$ 存在.

将随机变量序列的均方收敛性转化为自相关函数的收敛性问题.

证 **必要性 由定理4.2.5之1)即得.**

充分性　设 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E(X_m\overline{X_n}) = c$, 由

$$\|X_m - X_n\|^2 = E(|X_m - X_n|^2)$$

$$= E(|X_n|^2) + E(|X_m|^2) - E(\overline{X_m}X_n) - E(X_m\overline{X_n})$$

$$\xrightarrow[as\ n,m\to\infty]{} 0$$

由柯西均方收敛准则知$\{X_n\}$均方收敛.

E.X.3 设$\{X_n, n\geq 1\}\in H$,又$\{a_n, n\geq 1\}$为复数列,试研究随机变量序列

$$\{Y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k, n\geq 1\}$$

均方收敛的条件.

解 $$R_Y(m,n) = E(Y_m\overline{Y_n}) = E[\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} a_k \overline{a_r} X_k \overline{X_r}]$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} a_k \overline{a_r} E(X_k \overline{X_r}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} a_k \overline{a_r} R_X(k,r)$$

由均方收敛准则知

$\{Y_n, n\geq 1\}$**均方收敛** $\Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty} E(Y_m\overline{Y_n})$存在，

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} a_k\overline{a_r}R_X(k,r)\text{收敛}.$$

判断均方收敛的几个方法:

1.**定义**: $\|X_n - X\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

2.**Cauchy列**: $\|X_n - X_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

3.**洛易夫均方收敛判别准则**:

$$\lim_{m,n\to\infty} E(X_m \overline{X_n}) \text{ 存在.}$$

思考题:

1）在二阶矩随机变量空间除定义均方极限外，还可以定义其他极限吗?

2）均方极限与普通函数极限有什么相似之处?

3）若 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X$，是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n Y] = E(XY)$?

$$\{E[|XY|]\}^2 \le E[|X|^2]\cdot E[|Y|^2]$$

证:

令 $g(a)=E[(a|X|+|Y|)^2],\ a\in R$

则g(a)是a的二次函数，且取值非负。由Δ判别法可得结论。

$$|E[X]| \le E[|X|]$$

证：设 X=Y+jZ, 则

$$\begin{aligned}
&|E[X]| \\
&= \left|\iint (y+jz)\,dF(y,z)\right| \\
&\le \iint |(y+jz)|\,dF(y,z) \\
&= E[|X|]
\end{aligned}$$