第一章 概率论概要

概率空间

随机变量及其分布

随机变量的函数

* 随机变量的数字特征

* 特征函数

随机过程:对随机现象做连续不断的观察

§1.1 概率空间

一、随机事件的公理化定义

回顾初等概率论中引进古典概率、几何概率等定义，有如下问题:

1) 联系于随机试验E的样本空间Ω的结构?

2) 对于随机试验E的样本空间Ω,是否Ω的每一个子集(事件)都能确定概率?

定义1.1.1(σ代数)：设随机试验E 的样本空间为Ω,F 是Ω的子集组成的集族，满足

Ω为全空间

(1) $\Omega \in F$；

对交并补差封闭

(2)若$A \in F$,则 $\overline{A} \in F$； (对逆运算封闭)

(3) 若 $A_i \in F, (i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

(对可列并运算封闭)

σ可加

称F 为Ω的一个σ-代数（事件体）, F 中的集合称为事件. σ 代数包含全空间Ω和空集

Ex.1 在编号为1,2, …, n 的 n个元件中取一件.

1. 考虑元件的编号，则全体基本事件为

$$A_k = \{k\} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

样本空间为

$$\Omega = \{1,2,\cdots,n\}$$

构造如下事件:

$$A_{k,s} = A_k \cup A_s \quad (k,s = 1,2,\cdots,n),$$

$$A_{i,k,s} = A_i \cup A_k \cup A_s \quad (i,k,s = 1,2,\cdots,n)$$

…………

$$A_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}} = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_{n-1}}$$

$$(i_1, i_2, \cdots, i_{n-1} = 1,2,\cdots,n)$$

可验证集族 $\{\phi, \Omega, A_k, A_{k,s}, \cdots, A_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}\}$ 组成一个σ代数.

2. 考虑元件是正品或次品，则基本事件为

A_1={取到正品}，A_2={取到次品}

则 $F=\{\phi, A_1, A_2, \Omega\}$为一个σ代数.

通常称 $F=\{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$是由$A$产生的最简单$\sigma$代数.

Ex.2 测量一个零件,考虑其测量结果与实际长度的误差.

基本事件为$\{x\}$,样本空间为

$$\Omega=\{x : x\in R_1\}=R_1$$

则R_1的子集全体：ϕ, Ω，单点集$\{x\}$，一切开的,闭的，半开闭区间等组成的集族F是一个代数.（如何构造σ代数?）

另外，令 $A_1=\left\{x : x\geq 0\right\}$=$\{$出现正误差$\}$

$A_2=\left\{x : x<0\right\}$=$\{$出现负误差$\}$

则 $F=\{\phi, A_1, A_2, \Omega\}$ 为一个σ代数.

注：对同一研究对象的同一试验, 试验目的不同, 其样本空间和σ代数的结构会不同.

定义1.1.2(可测空间) 样本空间Ω和σ代数的二元体(Ω, F) 称为可测空间.

可测空间有如下性质:

1. $\phi \in F \qquad (\because \phi = \overline{\Omega});$

2. 对可列交运算封闭. 若$A_i \in F \quad (i = 1,2,\cdots),$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

证 因 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}$, $A_i \in F \Rightarrow \overline{A_i} \in F$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in F \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$$

3. 对有限并,有限交封闭:若 $A_i \in F$ $, i = 1,2,\cdots,n$ **则**

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F, \text{或} \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F$$

4.对差运算封闭,即若 $A \in F, B \in F$, **则** $A - B \in F$.

$$\because A - B = A \cap \bar{B} \in F$$

二、概率的公理化定义

柯氏公理体系是现代概率论的基石.

定义(概率): 设(Ω, F)是一可测空间,对 $A \in F$ **定义在F上的实值集函数$P(A)$, 满足**

1) 非负性: 对 $\forall A \in F, 0 \le P(A) \le 1$; 非负有界

2) 规范性: $P(\Omega) = 1$; 归一

3) 完全可加性,对　　可列可加

$$\forall A_i \in F, i=1,2,\cdots; \quad A_i \cap A_j = \phi, i \neq j;$$

有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称P是(Ω,F)上的**概率**(测度),$P(A)$是事件A的概率. 三元体(Ω, F, P)称为**概率空间**.

Ex.3 设某路口到达的车辆数为m,基本事件为$\{m\}$,样本空间$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$,F是Ω的一切子集组成的集族，则F是一个σ代数.

令 $P(\phi)=0$, 并对$A\in F$ 令

$$P(A)=\sum_{k\in A}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\qquad (\lambda>0)$$

证明P为可测空间(Ω,F)上的概率测度.

证 1)

$$P(\Omega)=\sum_{k\in\Omega}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1$$

2) 因 $\lambda>0$, 对$\forall k$ 有 $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\geq 0$,

$$\Rightarrow 0 \le P(A) = \sum_{k\in A} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \le \sum_{k\in\Omega} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1;$$

3) 设

$$A_i \in \mathrm{F}, (i = 1, 2, \cdots), A_i \cap A_j = \phi, (i \ne j),$$

有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k\in\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k\in A_i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

三、乘积样本空间

（为何引入？）

设A 和 B 是两个集合，称

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

为A与B 的**积集**.

定义1.1.3 设随机试验E_i, i=1,2, …n的样本空间分别为Ω_i ,i=1,2, …n,称

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \omega_i \in \Omega_i\ i=1, 2, \ldots, n\}$$

为**乘积样本空间**.

Ex.3 设抛一枚均匀硬币试验E_1的样本空间为

$$\Omega_1 = \{T, H\}$$

掷一颗均匀硬币骰子试验E_2的样本空间为

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

先抛一枚均匀硬币,再掷一颗均匀骰子试验的样本空间可设为

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2),\ \omega_i\in\Omega_i\ i=1,2\}$$

有 $\omega=(T, i)\in\Omega$, $\omega=(H, i)\in\Omega$, $i=1,2,\ldots,6.$

Ex.4 n次独立重复抛一枚均匀硬币试验E的样本空间为

$$\Omega_n=\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),\ \omega_i \in \Omega,\ i=1, 2, \ldots, n\}$$

$$=\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega=\Omega^n$$

称为Ω的n维乘积空间.

如 $(T, T, H) \in\Omega$, $(H, T, H) \in\Omega_3=\Omega^3$.

四、概率性质

设(Ω, F, P)是概率空间,则概率P有如下性质:

1) $P(\phi)=0$;

2)有限可加性: 若

$$A_i \in \mathcal{F}, i=1,2,\cdots,n; A_i \cap A_j = \phi,(i \neq j)$$

则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

推论1: $P(A)+P(\overline{A})=1$;

推论2 (单调性):若 $B \subset A$, 则

$P(A-B)=P(A)-P(B)$ 且 $P(A) \geq P(B)$,

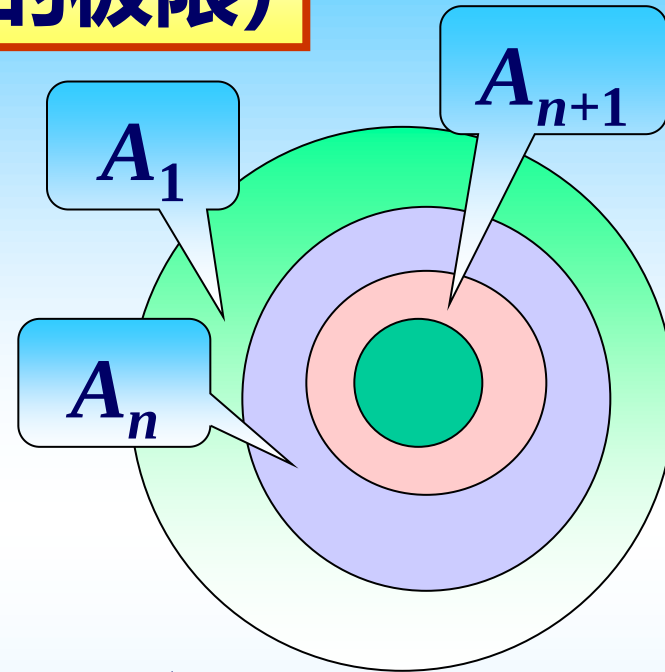
3) 概率的连续性

(事件的极限)

若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，且 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n = \phi$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$

$$= P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$



证:

$$\because\ A_n = (A_n - A_{n+1}) \cup (A_{n+1} - A_{n+2}) \cup \cdots$$

$$= \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k - A_{k+1}) \triangleq \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k, \quad n = 1,2,\cdots$$

其中$B_1, B_2, \ldots$互不相容，特别由完全可加性有

$$1 \geq P(A_1) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}) \geq 0$$

收敛级数的余项极限为0,(as $n \to \infty$),即

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}) \to 0, \quad as\ n \to \infty.$$

推论1： 若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A). \ (= P(\lim_{n\to\infty} A_n))$$

推论2： 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A). \quad (= P(\lim_{n\to\infty} A_n))$$

证：在推论2中

令 $B_n = A - A_n$，则 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$，

且 $$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n} \cap A)$$

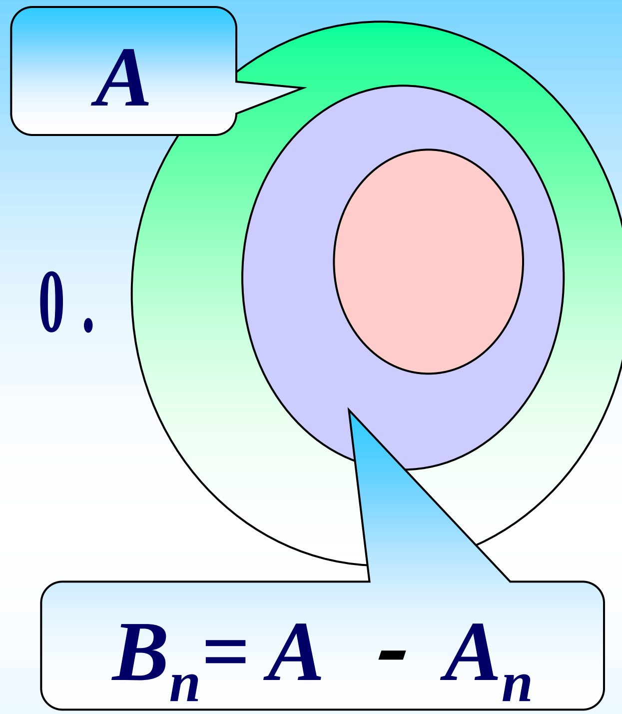
$$= \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right) \cap A = \overline{A} \cap A = \phi$$

概率空间

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$$

$$\Rightarrow P(A) - P(A_n) = P(A - A_n) \to 0.$$

$$\Rightarrow P(A_n) \to P(A), \quad as\ n \to \infty$$



思考：如何用概率的连续性证明分布函数的右连续性？

4）多除少补原理

设 $A_i \in F, i = 1,2,\cdots,n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i\le k\le n} P(A_i A_k)$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

推论：概率具有次可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$

$$Bonferroni\ inequality: P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i\le k\le n} P(A_i A_k).$$

五、条件概率

定义： 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是概率空间，$A, B \in \mathcal{F}$，且$P(B)>0$

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为已知事件B发生的条件下，事件A发生的**条件概率**.

定理： 设(Ω, F, P)是概率空间,B∈F,且 $P(B)>0$,则对$\forall\ A\in F$,有$P(A|B)$ 对应, 集函数 $P(\bullet|B)$满足三条公理:

1) $\forall A\in F,\ 0\le P(A|B)\le 1$;

2) $P(\Omega|B)=1$;

3) $A_i\in F, i=1,2,\cdots$, 且 $A_i\cap A_j=\phi,(i\ne j)$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big|B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B).$$

条件概率是概率.

六、全概率公式与Bayes公式

定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$是概率空间,若

1) $A_i \in \mathcal{F}$, 且 $P(A_i)>0$, $(i=1,2, \ldots)$;

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, $A_i A_j = \phi$.

完备性条件.

称$\{A_i\}$为Ω的一个分划。

则对任意$B \in \mathcal{F}$ 有

概率空间

1) $$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B|A_i);$$

2) $$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B|A_i)},\quad (j=1,2,\cdots).$$

不考

事件的上极限与下极限

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \quad (B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

$$= \{\omega : \omega\text{属于无穷多个}A_n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \quad (C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$$

$$= \{\omega : \text{存在某个}n,\text{使得}\omega\text{属于所有}A_k, k \ge n\}$$

(*i*) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$

(*ii*) 如果$\{A_n\}_{n\ge1}$单调（递增或递减），

则 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$.