§6.2 马氏链序列(一)

设$\{X(t), t\in T\}$为马氏过程, 称"$X(t)=x$"为"过程在 t 时刻处于状态x";

记 $E=\{x\,|\,X(t)=x,\ t\in T\}$ 称为过程的**状态空间**.

若E 是可数集, 称$\{X(t), t\in T\}$是**马氏链**.

若指标集T 是可数集, 称$\{X(t), t\in T\}$是**马氏序列**.

本节讨论状态空间E和参数集T都是可列集的马尔科夫链.

马尔科夫链的理论系统而深入，在自然科学、工程技术及经济管理各领域有广泛的应用.

一、定义及例

定义6.2.1 设$\{X(n), n\geq 0\}$为随机变量序列, 状态空间$E=\{0,1,2,\ldots\}$,如果对于任意非负整数k及$n_1< n_2<\ldots n_r<m$，以及

$$i_{n_1}, i_{n_2}, \cdots, i_{n_r}, i_m, i_{m+k} \in E,$$

$$P\{X(m+k)=i_{m+k}|\ X(n_1)=i_1,\ \ldots,X(n_r)=i_{n_r},\ X(m)=i_m\}$$

$$= P\{X(m+k)= i_{m+k}|\ X(m)=i_m\}$$

成立,称$\{X(n), n\geq 0\}$ 为离散参数马氏链.

定理6.2.1 (等价定义) 随机变量序列$\{X(n), n\geq 0\}$ 的状态空间$E=\{0,1,2,\ldots\}$,如果对于任意非负整数m，以及 $i_0, i_1, \cdots, i_m, i_{m+1} \in E$,

$$P\{X(m+1)= i_{m+1}|\ X(m)= i_m ,X(m-1)=i_{m-1},\ \ldots,X(0)=i_0\}$$

$$= P\{X(m+1)=i_{m+1}|\ X(m)=i_m\}$$

成立,是$\{X(n), n\geq 0\}$ 为离散参数马氏链的**充分必要条件.**

注 必要性显然，充分性自证.

定义6.2.2 设$\{X(n):n\geq 0\}$ 为马氏链，状态空间为$E=\{0,1,2,\ldots\}$,称条件概率

$$p_{ij}^{(k)}(m)=P\{X(m+k)=j|X(m)=i\}$$

为马氏链在m 时刻的k **步转移概率.**

特别 $p_{ij}^{(1)}(m)=P\{X(m+1)=j|X(m)=i\}$

称为在m 时刻的一步**转移概率.**

表示在时刻m 时$X(m)$取 i 值的条件下，在下一时刻$m+1$时，$X(m+1)$取j 值的概率.

注 定理6.2.1说明可由一步转移概率验证时间序列的马氏性.

EX. 1 在股票交易过程中令状态空间为 $E=\{-1, 0, 1\}$。各状态分别代表“下跌”、“持平”、“上升”。

时间集$T=\{n=0,1,2,\ldots\}$(单位周),将股票交易过程转化马氏链$\{X(n), n\geq 0\}$. 因对任意时刻m有

$$P\{X(m+1)=i_{m+1} \mid X(m)=i_m, X(m-1)=i_{m-1}, \ldots, X(0)=i_0\}$$

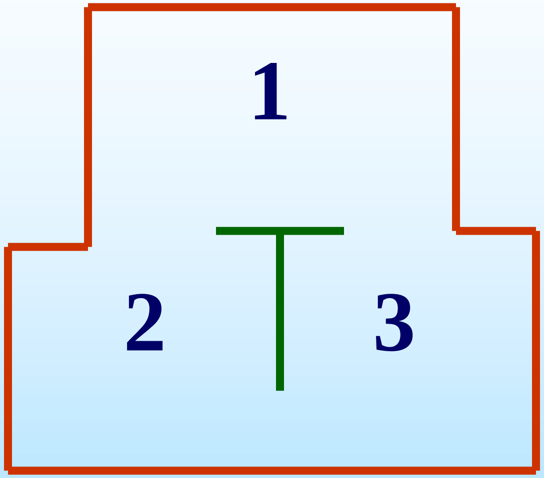
$$= P\{X(m+1)=i_{m+1} \mid X(m)=i_m\}$$

注 **例中有**

1) $p_{ij}^{(1)}(m) \ge 0; \quad (\forall m \ge 0, \text{及} i, j \in E);$

2) $\sum_{j \in E} p_{ij}^{(1)}(m) = 1, \quad (i \in E, \forall m \ge 0).$

EX.2 迷宫问题 定时观察老鼠位于哪一个房间?



状态空间 $E=\{1, 2, 3\}$,

$X(n)$为第n 次观察时老鼠所处位置, 记

$$\pi_j(n) = P\{X(n) = j\},$$

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}(n-1), \quad i, j = 1,2,3.$$

根据全概率公式，对$j=1, 2, 3$有

$$\pi_j(n)=\pi_1(n-1)p_{1j}^{(1)}+\pi_2(n-1)p_{2j}^{(1)}+\pi_3(n-1)p_{3j}^{(1)}$$

在时刻n，老鼠处于各状态的概率只与第$n-1$次时所处状态与转移概率有关，而与第$n-1$次前的状态无关.

老鼠的随机转移状态运动过程是一个马氏链.

EX.3 设$X(n)$, $n=1,2,\ldots$是相互独立随机变量，令

P219 习题2

$$Y(n)=[X(1)+X(2)+\cdots+X(n)]^2 \quad n=1,2,\cdots$$

证明：$\{Y(n),n=1,2,\cdots\}$是马尔科夫链.

证 记 $S_n = X(1) + X(2) + \cdots + X(n), \quad n = 1,2,\cdots$

则 $Y(n) = S_n^2 = \{[X(1) + X(2) + \cdots + X(n-1)] + X(n)\}^2$

$$= [S_{n-1} + X(n)]^2 = S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X(n) + [X(n)]^2$$

且 $X(n)$与$Y(1) = S_1^2, Y(2) = S_2^2, \cdots, Y(n-1) = S_{n-1}^2$

分别相互独立

$$P\{Y(n) = y_n \mid Y(1) = y_1, Y(2) = y_2, \cdots Y(n-1) = y_{n-1}\}$$

$$= P\{S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X(n) + [X(n)]^2 = y_n \mid S_1^2 = y_1, \cdots, S_{n-1}^2 = y_{n-1}\}$$

$$= P\{y_{n-1} + 2\sqrt{y_{n-1}}X(n) + [X(n)]^2 = y_n \mid S_1^2 = y_1, \cdots, S_{n-1}^2 = y_{n-1}\}$$

因$X(n)$与$S_1^2, S_2^2, \cdots, S_{n-1}^2$均相互独立,故

$$P\{Y(n)=y_n \mid Y(1)=y_1, Y(2)=y_2, \cdots Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n \mid S_1^2=y_1,\cdots,S_{n-1}^2=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n\} \qquad (1)$$

另一方面

$$P\{Y(n)=y_n \mid Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n \mid S_{n-1}^2=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n\} \quad (2)$$

比较(1)和(2)得

$$P\{Y(n)=y_n \mid Y(1)=y_1, Y(2)=y_2, \cdots, Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

$$=P\{Y(n)=y_n \mid Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

即 $\{Y(n), n=1,2,\cdots\}$是马尔科夫链.

二、齐次马氏链

定义6.5.3 若马氏链 $\{X(n), n\geq 0\}$的一步转移概率与起始时刻无关，即对任意m

$$p_{ij}^{(1)}(m)=P\{X(m+1)=j \mid X(m)=i\}=p_{ij}^{(1)}=p_{ij},$$

与m无关

称$\{X(n), n\geq 0\}$为齐次马氏链.

注　如何理解齐次马氏性

设齐次马氏链$\{X(n), n\geq 0\}$ 的状态空间为E，对于任意非负整数k和m，$S_1, S_2, \ldots, S_k$为E的子集，$i, i_1, i_2, \ldots i_{m-1}\in E$，

$$P\{X(m+1)\in S_1, X(m+2)\in S_2, \cdots, X(m+k)\in S_k \mid X(m)=i, X(m-1)=i_{m-1}, \cdots, X(1)=i_1\}$$

$$=P\{X(m+1)\in S_1, X(m+2)\in S_2, \cdots, X(m+k)\in S_k \mid X(m)=i\}$$

$$=P\{X(1)\in S_1, \cdots, X(k)\in S_k \mid X(0)=i\}$$

若状态空间为$E=\{0,1,2,\ldots\}$

记 $$P=(p_{ij})=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

称 P 为**一步转移矩阵.**

矩阵中每个元素为非负数，且每行之和均为1.

1) $0 \le p_{ij} \le 1$, 和 2) $\sum_{j\in E} p_{ij}=1$ 成立.

定义6.5.4 称矩阵$A=(a_{ij})$为**随机矩阵**, 若对$\forall i \in E$,满足

1) $a_{ij} \geq 0$;

2) $\sum_{j\in E} a_{ij} = 1.$

凡满足以上两条的行向量称为**概率向量**.

转移矩阵P是随机矩阵.

转移矩阵P的行向量都是概率向量.

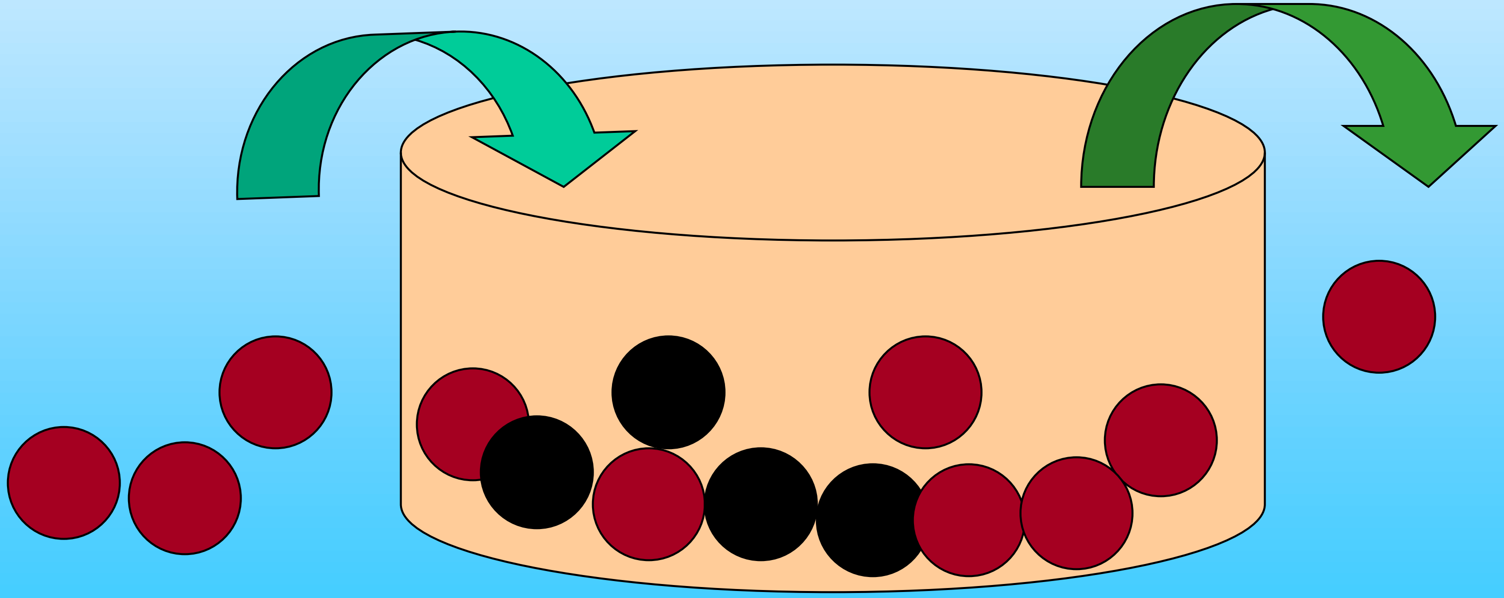
EX.4 在某数字通信系统中传0 和 1 两种信号, 且传递要经过多级. 若每级由于噪声的存在, 送出0, 1信号的失真概率均为p $(0<p<1)$, 则各级输入状态和输出状态的转移矩阵为

$$P=(p_{ij})=\begin{bmatrix}1-p & p \\ p & 1-p\end{bmatrix} \quad E=\{0,1\}, \quad i,j\in E.$$

数字传输过程是齐次马氏链.

EX.5 *Polya*模型（传染病模型）

设坛子中有b个黑球，r 个红球. 从坛子中随机地摸出一个球，然后将球放回并加入c只同色球, 如此取和放 , 不断进行下去. 研究坛子中黑色球个数.



分析 设$X(n)$表示第n次摸球后坛子中的黑球个数.每取放一次后黑球或者增加 c 个黑球,或者不变.

显然, $\{X(n), n\geq 1\}$是马氏链，但

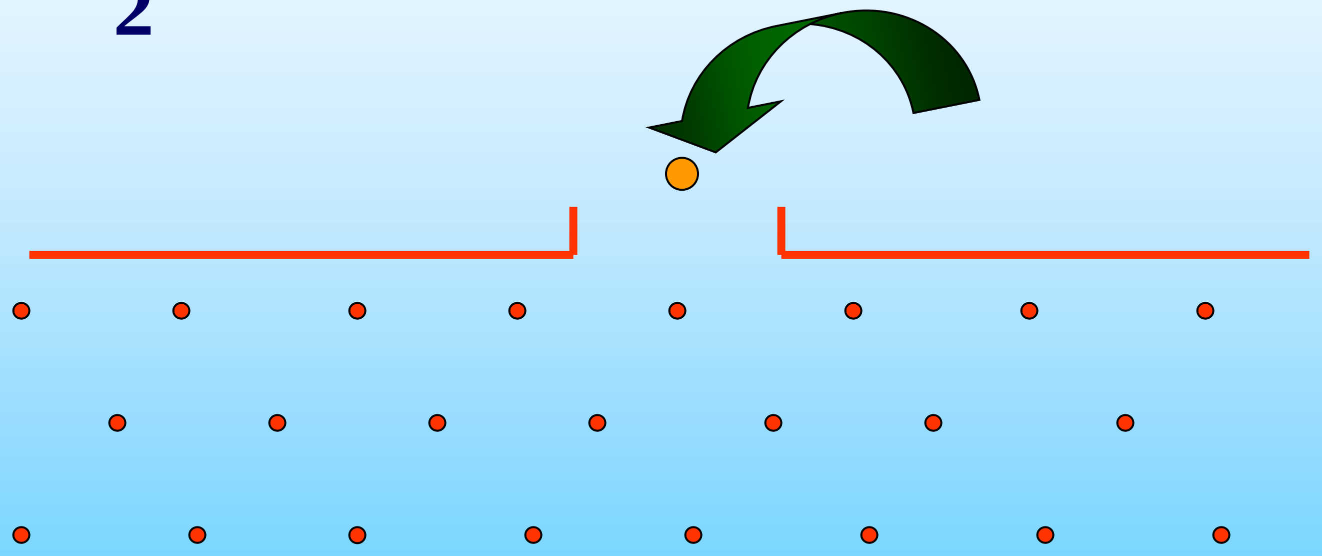
$$p_{ij}^{(1)}(n) = P\{X(n+1) = j \mid X(n) = i\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i}{b+r+nc}, & j = i + c; \\ 1 - \dfrac{i}{b+r+nc}, & j = i; \\ 0,\text{其他}. \end{cases}$$

n次转移概率与n有关，$\{X(n), n\geq 1\}$是非齐次马氏链

EX6. 随机游动(高尔顿钉板试验)

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内,小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.



$$X(k)=\begin{cases}1, & \text{在第}k\text{层向右位移一格;}\\ -1, & \text{在第}k\text{层向左位移一格.}\end{cases}$$

$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

令 $$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k),$$

随机游动n步所处的状态

状态空间 $E=N$，有

$$P\{Y(m_n)=j_n \mid Y(m_1)=j_1, Y(m_2)=j_2, \cdots Y(m_{n-1})=j_{n-1}\}$$

$$=P\{Y(m_n)=j_n \mid Y(m_{n-1})=j_{n-1}\}$$

$\{Y(n), n\in N\}$是马氏过程.

更进一步，因对任意m 有

$$p_{ij}^{(1)}(m) = P\{Y(m+1) = j \mid Y(m) = i\} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

即马氏链 $\{Y(n), n \in N\}$的一步转移概率与起始时刻无关，是齐次马氏链.

转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

思考 齐次马氏链$X(n)$的一步转移概率与起始时刻无关，是否任意$k(>1)$步转移概率也与起始时刻无关?

三、切普曼 - 柯尔莫哥洛夫方程

定理6.2.2 齐次马氏链$\{X(n),n\geq 0\}$的k步转移概率满足**切普曼 - 柯尔莫哥洛夫方程**

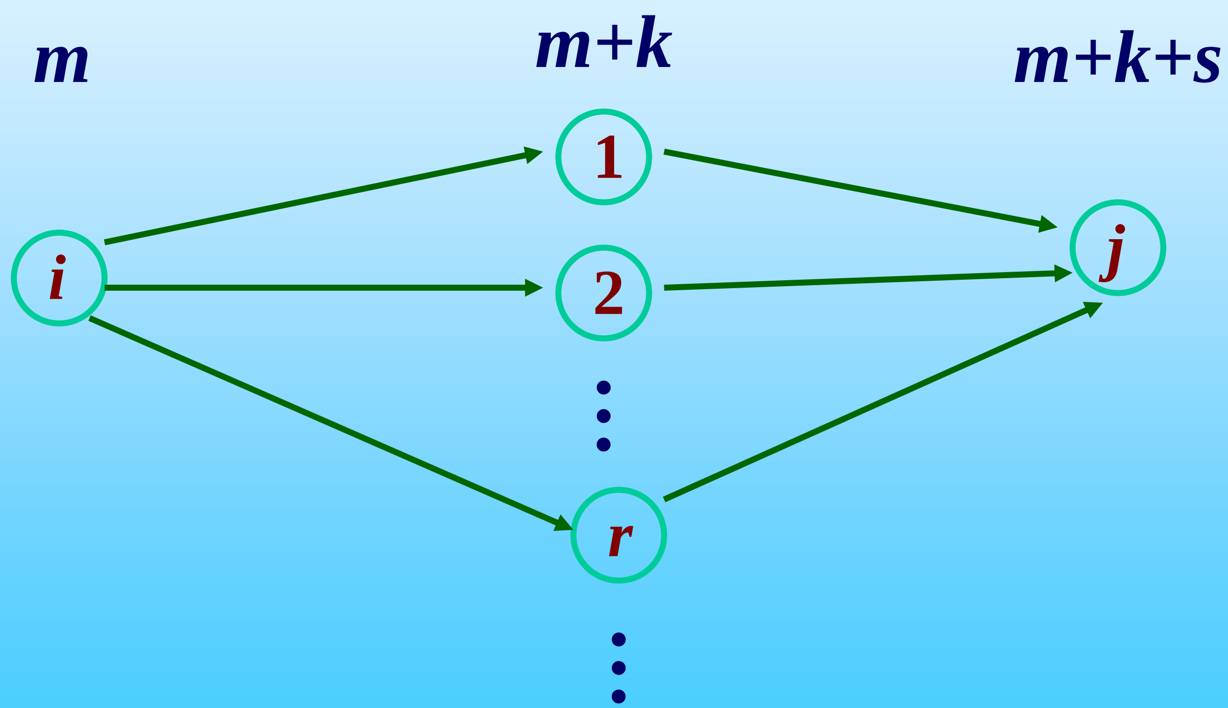
$$\boxed{p_{ij}^{(s+k)} = \sum_{r\in E} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(s)}}$$

其中 $p_{ij}^{(m)} = P\{X(s+m)=j \mid X(s)=i\}.$

$$\{X(m)=i, X(m+k+s)=j\}$$

$$=\bigcup_{r\in E}\{X(m)=i, X(m+k)=r, X(m+k+s)=j\}$$

分析图



证 由全概率公式和乘法公式，

$$P\{X(m+k+s)=j \mid X(m)=i\}$$

$$=\sum_{r\in E} P\{X(m+k)=r, X(m+k+s)=j \mid X(m)=i\}$$

$$=\sum_{r\in E} P\{X(m+k)=r \mid X(m)=i\}\times$$

马氏性

$$P\{X(m+k+s)=j \mid X(m)=i, X(m+k)=r\}$$

$$=\sum_{r\in E} P\{X(m+k)=r \mid X(m)=i\}\times$$

$$P\{X(m+k+s)=j \mid X(m+k)=r\}$$

即 $$p_{ij}^{(s+k)} = \sum_{r\in E} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(s)}.$$

C－K方程的矩阵形式

若记 $P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})$,

称k步转移矩阵

则 $$P^{(k+s)} = P^{(k)} P^{(s)}$$

推论1 **齐次马氏链的n步转移矩阵为(一步)转移矩阵的n 次幂.**

$$P^{(n)} = PP\cdots P = P^n$$

证 在$C-K$方程中，

令$k=s=1$，有 $P^{(2)}=P^{(1)}P^{(1)}=P^2$，

令$k=2$，$s=1$，有 $P^{(3)}=P^{(2)}P^{(1)}=P^2P=P^3$，

由数学归纳法知

$$P^{(n)}=P^{(n-1)}P=P^{n-1}P=P^n$$

齐次马氏链的n步转移矩阵由一步转移矩阵确定.

EX.7 天气预报问题 假设明日是否有雨仅与今日下雨与否有关，而与过去无关.把有雨称为“0”状态天气，无雨称为“1状态天气，这是一个两状态马氏链.

记 $p_{00}=\alpha, p_{10}=\beta$, 则过程的一步转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

设$\alpha=0.7, \beta=0.4$, 可得

$$P^{(4)} = P^4 = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}$$

可知今日有雨的条件下第四日仍有雨的概率为

$$p_{00}^{(4)} = 0.5749.$$

问题:

1) 计算$P^{(8)}$，$P^{(16)}$，$P^{(32)}$，尝试发现其变化规律.

定义6.2.5 给定齐次马氏链$\{X(n), n\geq 0\}$，记

$$\pi_i(n)=P\{X(n)=i\}\ ,\quad i\in E$$

称行向量$\pi(0)=\{\pi_0(0), \pi_1(0), \ldots, \pi_i(0), \ldots\}$为马氏链的**初始(概率)分布**

称行向量$\pi(n)=\{\pi_0(n), \pi_1(n), \ldots, \pi_i(n),\ldots\}$为马氏链的**绝对(概率)分布**.

定理6.2.3 设$\{X(n), n\geq 0\}$是齐次马氏链, 其绝对分布和有限维分布由初始分布和一步转移矩阵所完全确定.

证 由全概率公式及马氏性知

$$P\{X(n)=j\}=\sum_{i\in E}P\{X(0)=i,X(n)=j\}$$

$$=\sum_{i\in E}P\{X(0)=i\}P\{X(n)=j\mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{i\in E}\pi_i(0)p_{ij}^{(n)},\quad j\in E$$

或

$$\pi(n)=\pi(0)P^{(n)}=\pi(0)P^{n},\qquad n\geq 0.$$

绝对分布

初始分布

对于$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，**有限维分布为**

$$P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \cdots, X(n_k)=i_k\}$$

$$= \sum_{i\in E} P\{X(0)=i\} P\{X(n_1)=i_1 \mid X(0)=i\}$$

$$\times P\{X(n_2)=i_2 \mid X(n_1)=i_1\} \cdots P\{X(n_k)=i_k \mid X(n_{k-1})=i_{k-1}\}$$

$$= \sum_{i\in E} P\{X(0)=i\} P_{ii_1}^{(n_1)} P_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)} \cdots P_{i_{k-1} i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$$

由$\{X(n), n\geq 0\}$的齐次性, 以上各转移概率均可利用C - K方程，由一步转移概率求出.

续EX.2 迷宫问题

$$\pi_j(n)=\pi_1(n-1)p_{1j}^{(1)}+\pi_2(n-1)p_{2j}^{(1)}+\pi_3(n-1)p_{3j}^{(1)}$$

j=1,2,3

若老鼠随机转移过程是齐次的, 则

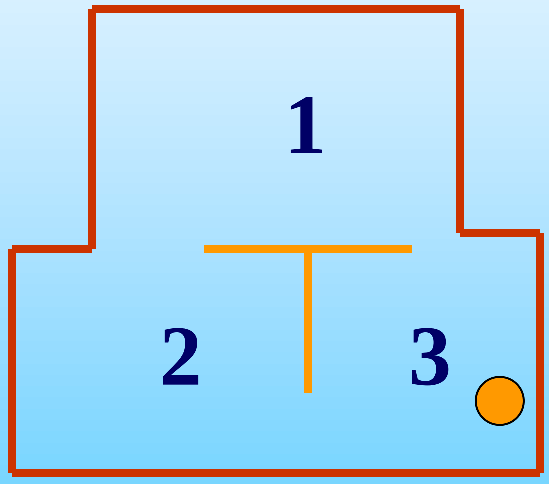
$$\pi(n)=\pi(0)P^n,\qquad n\geq 0.$$

其中$\pi(0)$是初始分布，$P=(p_{ij})_{3\times 3}$是一步转移矩阵.

EX.8 另一类迷宫问题 假设在三个分隔间的第3间放有食物, 当老鼠到达第3分隔间, 受到食物吸引不再运动到其他房间.

分析 状态空间$E=\{1,2,3\}$，有

$p_{33}=1,\ p_{3j}=0,\ j=1, 2.$

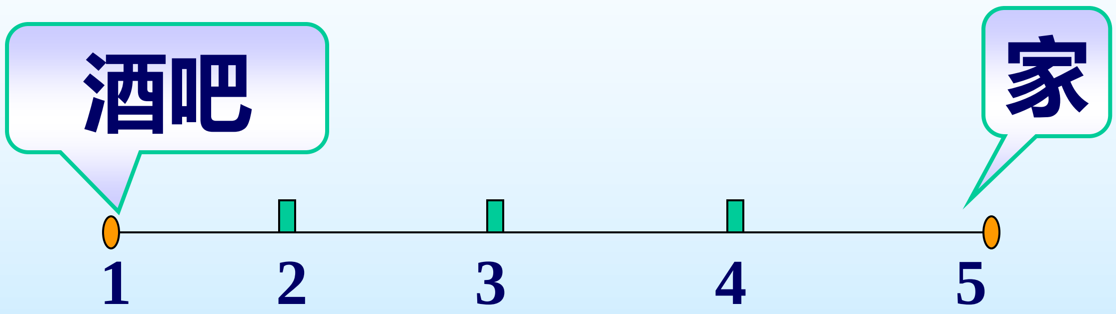


其转移矩阵形如

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

称状态3为**吸收状态**.

EX.9 醉汉问题



醉汉在街上徘徊, 在每一个街口以1/3的概率停下, 以1/3的概率向前或向后.

若他又返回酒吧或到家门, 不再游动.

状态空间为$E=\{1,2,3,4,5\}$

运动的转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

有两个**吸收**状态“1”和“5”

若不许他再进入酒吧，又被家人赶出门，则转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

称状态“1”和“5”是反射状态.

思考题：

1) 齐次性描述的是转移概率与起始时刻的无关性，齐次马氏链定义6.5.3中的

$$p_{ij}^{(1)}(m)=P\{X(m+1)=j|X(m)=i\}=p_{ij}^{(1)}=p_{ij},$$

与m无关

可否用二步转移概率

$$p_{ij}^{(2)}(m)=P\{X(m+2)=j|X(m)=i\}=p_{ij}^{(2)}$$

代替，为什么？

$$X(1)=1, X(2)=1, X(3)=-1, X(4)=-1$$

$$X(5)=1, X(6)=1, X(7)=-1, X(8)=-1\ldots$$