§6.3 齐次马氏链状态的分类(一)

为揭示齐次马氏链的基本结构，需对其状态按某些概率特性进行分类，状态分类是研究n步转移概率的极限状态的基础.

一、状态类型定义

EX.1　设系统有三种可能状态$E=\{1, 2, 3\}$, "1"表示系统运行良好, "2"表示系统运行正常， "3"表示系统失败.

以$X(n)$表示系统 在n 时刻的状态, 并设$\{X(n),n\geq 0\}$是一马氏链. 在没有维修及更换的条件下, 其自然转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17/20 & 2/20 & 1/20 \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵P可见，从“1”或“2”出发经有限次转移后总能到达“3”状态，而一旦到达“3”状态则永远停留在“3”.

状态 “1”, “2”与状态 “3”有不同的概率特性.

1. 刻画状态特性的几个特征量

定义6.3.1 对$\forall i, j \in E$ 及 $n \geq 1$, 记

$$f_{ij}^{(1)} \triangleq P\{X(1)=j \mid X(0)=i\} \triangleq P_i\{X(1)=j\}$$

$$f_{ij}^{(n)} \triangleq P\{X(n)=j, X(k)\neq j, k=1,2,\cdots,n-1 \mid X(0)=i\},$$

称为(n步)**首达概率**.

系统从状态 “i” 出发经过n步转移后首次到达状态 “j” 的概率

称 $f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 为**最终概率**.

最终概率

$$f_{ij} = P\{\text{存在}\, n \geq 1, \text{使}\, X(n) = j \mid X(0) = i\},$$

是系统从状态 "i" 出发经过有限步转移后最终到达状态 "j" 的概率.

定理6.3.1 **首达概率表示式**

对 $\forall i, j \in E$ 及 $n \geq 1$, 有

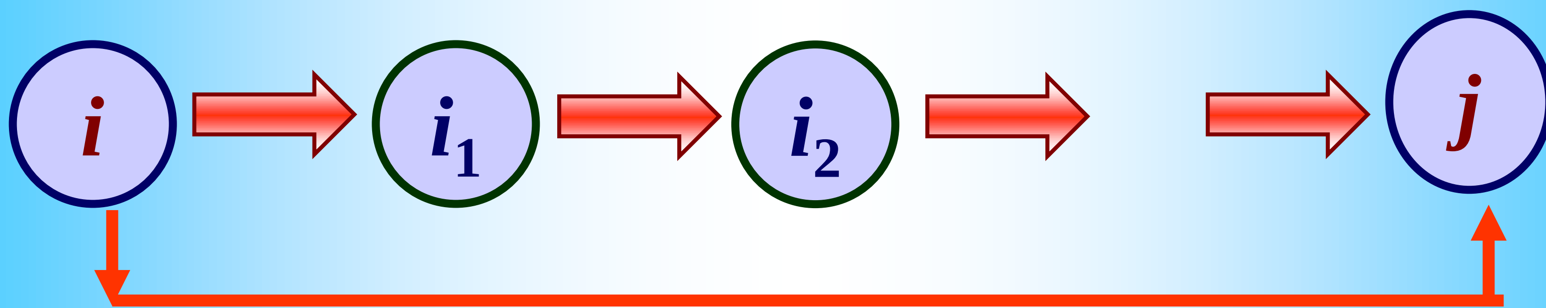
1) $0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq 1;$

2）**首达概率可以用一步转移概率表示为**

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{i\,i_1} p_{i_1\,i_2} \cdots p_{i_{n-1}\,j}$$

证 1）显然

2）分析示意图如下



$$f_{ij}^{(n)} = P\{X(n) = j, X(k) \neq j, k = 1, 2, \cdots, n-1 \mid X(0) = i\}$$

$$= P\left\{ X(n) = j, \bigcup_{i_k \neq j} \{X(k) = i_k\}, k = 1,2,\cdots,n-1 \,\middle|\, X(0) = i \right\}.$$

$$= P\left\{ X(n) = j, \bigcup_{i_k \neq j} \{X(k) = i_k\}, k = 1,2,\cdots,n-1 \middle| X(0) = i \right\}.$$

$$= P\left\{ \bigcup_{i_1 \neq j} \bigcup_{i_2 \neq j} \cdots \bigcup_{i_{n-1} \neq j} \{X(1) = i_1, \cdots, X(n-1) = i_{n-1}, X(n) = j\} \middle| X(0) = i \right\}$$

$$= \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} P\{X(1) = i_1, \cdots, X(n-1) = i_{n-1}, X(n) = j | X(0) = i\}$$

$$= \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}$$

定义6.3.2 对$j \in E$, 称

$$T_j = \min\{n : n \geq 1, X(n) = j\}$$

为到达 j 的**首达时间**.

随机变量

注 若右边是空集, 则令$T_j = \infty$.

EX. 2 在股票交易过程中令状态空间为

$$E = \{-1, 0, 1\}$$

各状态分别代表“下跌”、“持平”、“上升”,

若 $X(k) \neq 1, k = 1, 2, \cdots n-1, \; X(n) = 1,$

则 $T_1 = \min\{k \geq 1 : X(k) = 1\} = n$

注 **首达时与首达概率之间的关系：**

1) $f_{ij}^{(n)} = P\{T_j = n \mid X(0) = i\} \triangleq P_i\{T_j = n\}, \; i, j \in E, \; n \in \mathbb{N}$

2) $f_{ij} = P\{T_j < \infty \mid X(0) = i\} \triangleq P_i\{T_j < \infty\}, \; i, j \in E$

续EX.1 设系统有三种可能状态$E=\{1, 2, 3\}$, "1"表示系统运行良好, "2"表示系统运行正常, "3"表示系统失败.

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17/20 & 2/20 & 1/20 \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_3是系统的工作寿命，有

$$f_{13}^{(1)}=P\{T_3=1 \mid X(0)=1\}=p_{13}=\frac{1}{20},$$

$$f_{13}^{(2)} = P\{T_3 = 2 \mid X(0) = 1\}$$

$$= p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} = \frac{21}{400},$$

$$\boxed{f_{13}^{(n)} = ?}$$

$P\{T_3 \geq n\}$是系统在$[0, n]$内运行的可靠性,有

$$P\{T_3 \geq n \mid X(0) = 1\} = \sum_{k=n}^{\infty} P\{T_3 = k \mid X(0) = 1\} = \sum_{k=n}^{\infty} f_{13}^{(k)}$$

研究首达概率和首达时间有实际工程意义.

定理6.3.2 对 $\forall i, j \in E$ 及 $n \geq 1$，任意步转移概率与首达概率有关系式

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}$$

证 因 $\{X(n) = j\} \subset \bigcup_{m=1}^{n} \{T_j = m\}$

故 $\{X(n) = j\} = \{X(n) = j\} \cap \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} \{T_j = m\} \right\}$

$$= \bigcup_{m=1}^{n} \{X(n) = j, T_j = m\}$$

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X(n)=j \mid X(0)=i\}$$

$$= P\left\{ \bigcup_{m=1}^{n} \{T_j = m, X(n)=j\} \middle| X(0)=i \right\}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P\{T_j = m \mid X(0)=i\} P\{X(n)=j \mid T_j = m, X(0)=i\}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} \cdot P\{X(n)=j \mid X(m)=j,$$

$$X(k) \neq j, 1 \le k \le m-1, X(0)=i\}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}.$$

马氏性

定义6.3.3 设 $P_i\{T_j=\infty\}=0,\ j\in E$, 称

$$\mu_{ij}=E[T_j\mid X(0)=i]\triangleq E_i[T_j]=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

为从状态 i 出发, 到达状态 j 的**平均转移步数(时间)**.

特别当 $i=j$ 称 μ_{jj} 为状态 j 的**平均返回时间**;

f_{jj}: 状态 j 的**最终返回概率**;

$f_{jj}^{(n)}$: 为从状态 j 出发经 n 步**首次返回的概率**;

2. 状态类型分类

续EX.1　设系统有三种可能状态E={1, 2 ,3}, “1”表示系统运行良好, “2”表示系统运行正常，　“3”表示系统失败.

该系统的状态“3”是吸收态, 经有限步均会被吸收, 直观分析可得

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有必要分析各种状态的类型.

定义6.3.4 对$i \in E$, 若正整数集

$$\{n \mid n \geq 1,\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

非空, 则定义其最大公约数(*GCD*)为状态i 的**周期**，记为

$$d_i = GCD\{n \mid n \geq 1,\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

若$d_i = 1$, 称状态i **是非周期的**.

若整数集$\{n \mid n \geq 1,\ f_{ii}^{(n)} > 0\}$非空, 记

$$h_i = GCD\{n : n \geq 1,\ f_{ii}^{(n)} > 0\}$$

注 若 $p_{ii}^{(n)} > 0$，则有正整数m，使得$n=md_i$，且 d_i 是满足$md_i= n$ 的最大整数，h_i 也相同.

引理1 h_i和 d_i同时有定义，且二者相等.

以下根据状态的返回概率f_{ii}对状态进行分类.

定义6.3.5 对状态$i \in E$，最终返回概率为f_{ii}，

若 $f_{ii}=1$，称状态i 是**常返的**；

若 $f_{ii}<1$，称状态 i 是**非常返的**(或暂留的).

注 $f_{ii}=1$表示系统从状态i出发几乎必定会返回状态i.

定义6.3.6 对常返状态$i\in E$, 平均返回时间为μ_{ii},

若$\mu_{ii}<+\infty$, 称状态i是**正常返**的;

若$\mu_{ii}=+\infty$, 称状态i为**零常返**的.

定义6.3.7 称非周期正常返的状态为**遍历状态**.

以三个层次区分状态类型

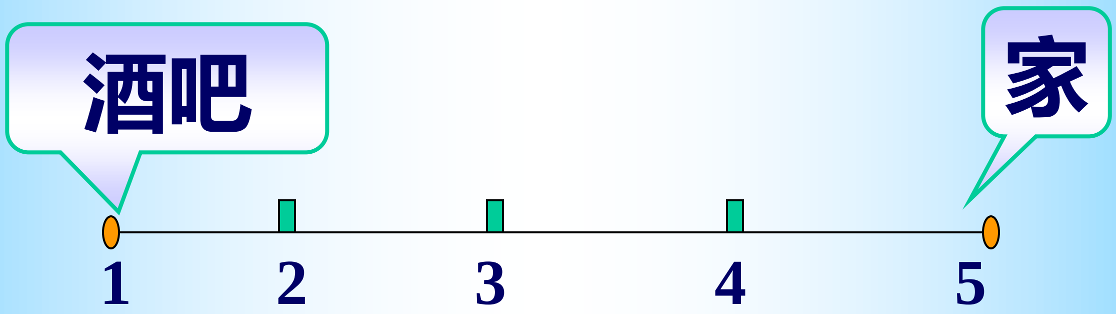
- 状态
  - 非常返态
  - 常返态
    - 零常返态
    - 正常返态
      - 有周期
      - 非周期 → 遍历态

首返概率

平均返回时间

周期

EX.3 醉汉问题



醉汉在街上徘徊, 在每一个街口以1/3的概率停下, 以1/3的概率向前或向后.

若他又返回酒吧或到家门, 不再游动 .

状态空间为$E=\{1,2,3,4,5\}$

运动的转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有两个**吸收**状态“1”和“5”

问：该马氏链有极限分布吗？平稳分布？

$$\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} p_{51}^{(n)}$$

若不许他再进入酒吧, 又被家人赶出门, 则转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

称状态 “1”和 “5”是**反射状态.**

以他又返回酒吧或到家门, 不再游动 为例

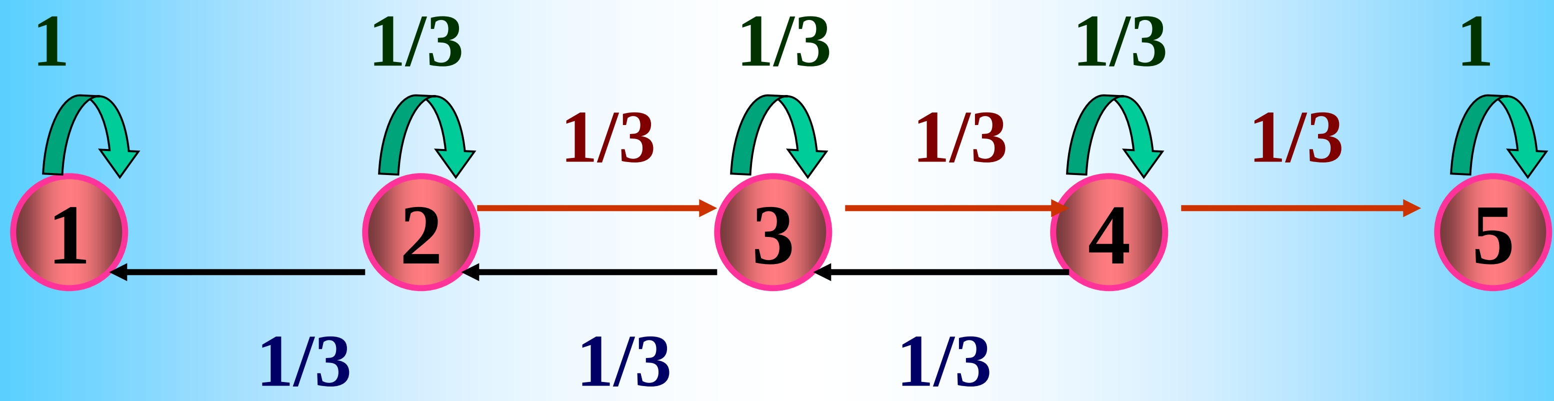
状态空间为$E=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑各状态的类型.

状态示意图：



解 1) 因 $p_{11}^{(1)} = f_{11}^{(1)} = 1,\ f_{11}^{(n)} = 0$ (当 $n \geq 2$),

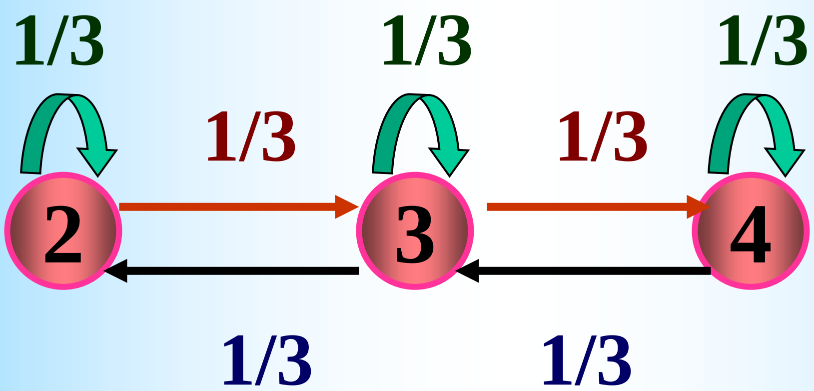
$$d(1) = 1, \qquad \mu_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1,$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 1,$$

状态1是非周期的正常返的，即为遍历状态.

同理，状态5 也是非周期的正常返的.

2) 考 虑 状 态 “2” 的 类 型



$$f_{22}^{(1)}=\frac{1}{3},\qquad f_{22}^{(2)}=p_{23}p_{32}=(\frac{1}{3})^2,$$

$$f_{22}^{(3)}=p_{23}p_{33}p_{32}=(\frac{1}{3})^3,\quad f_{22}^{(n)}=?\quad(n\geq 4)$$

计算 $f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}$非常困难.

提示 请考虑1时刻的状态.

参考解答

二、状态类型判别

从定义出发判别状态类型十分困难, 可通过不同类型状态所具有性质来区别它们.

定理6.3.3

状态$j\in E$是**常返**状态, 当且仅当以下三个条件之一成立

1) $f_{jj}=1$, 即 j 的最终返回概率是1.

定义

2) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$;

常返态判别准则

3) $P\{T_j < +\infty \mid X(0) = j\} = 1.$

注 从常返状态j 出发, 首次返回状态j 的转移次数是有限次.

推论1 状态j 是**非常返**的，当且仅当以下三个条件之一成立

1) $f_{jj}<1$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \dfrac{1}{1-f_{jj}} < +\infty$;

证 明

3) $P\{T_j < +\infty \mid X(0) = j\} < 1$.

推论2 若状态j是非常返的，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0. \quad \left(In\ fact, \forall i \in E,\ \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \right)$$

续EX.2 醉汉问题

$$f_{22}^{(n)} = \sum_{i_1\neq 2}\sum_{i_2\neq 2}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq 2} p_{2i_1} p_{i_1 i_2}\cdots p_{i_{n-1}2}$$

计算$\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}$很困难.

计算$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$通常也困难.

常返意义解释:

令 $$Y(n)=\begin{cases}1, & X(n)=j;\\ 0, & X(n)\neq j.\end{cases}$$

则 $N_j=\sum_{n=1}^{\infty} Y(n)$表示到达状态 j 的次数，有

$$E[N_j \mid X(0)=j] = E[\sum_{n=1}^{\infty} Y(n) \mid X(0)=j]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[Y(n) \mid X(0)=j]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{X(n)=j \mid X(0)=j\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

若j是常返的，则$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$，

返回状态 j 的平均次数是无穷次；

不仅如此， $P_j\{N_j=\infty\}=1.$ **证 明**

若 j 是非常返的，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty$，

$\Rightarrow$ 返回 j 的次数以概率1有限。

定理6.3.4 设状态 j 是常返状态，则

1) j 为零常返态的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0,$$

若 j 是零常返或非常返状态，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad \forall i \in E.$$

2) j 为非周期正常返的充要条件是存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0.$$

EX.4 脉冲问题

设有一随机幅度的电脉冲, 其变化范围是 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$,且在其上均匀分布. 现用一电表每隔一单位时间对脉冲幅度测量一次, 从第一次测量起, 记录其最大值 $X(m)$, $m\geq 1$.

1）证明该过程是一齐次马氏链；

2）从1出发，仪器记录到最大值n 的期望时间.

分析 设第i 次记录到的幅度值是ξ_i，则ξ_i，$i=1,2,\ldots$是相互独立同分布随机变量序列，有

$$\xi_i \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}, i = 1,2,\cdots$$

$X(m)$表示前m次记录的最大值，则

$$P\{X(m)=i\}=P\{\max_{1\le r\le m}\{\xi_r\}=i\}$$

解 1) $P\{X(m+1)=j \mid X(m)=i\}$

$$=P\{\max_{1\le r\le m+1}\{\xi_r\}=j \mid \max_{1\le r\le m}\{\xi_r\}=i\}$$

$$=P\{\max\{\max_{1\le r\le m}\{\xi_r\},\xi_{m+1}\}=j \mid \max_{1\le r\le m}\{\xi_r\}=i\}$$

$$=P\{\max\{\xi_{m+1},i\}=j\}.$$

$$=\begin{cases}0, & j<i;\\ 1/n, & j>i;\\ i/n, & j=i.\end{cases}$$

ξ_i 相互独立同分布

故该过程是一齐次马氏链.

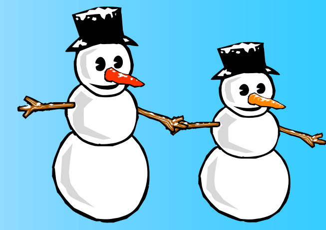
2）设T_n为记录仪记录到最大值“n”的首达的时间，需求 $\mu_{1n}=E_1[T_n]=\sum_{s=1}^{\infty} s f_{1n}^{(s)}$,

因 $$f_{1n}^{(s)}=P_1\{T_n=s\}$$

$$=P_1\{\xi_i\neq n, i=1,2,\cdots,s-1,\xi_s=n\}$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s-1}\frac{1}{n},$$

$$\mu_{1n}=E_1[T_n]=\sum_{s=1}^{\infty} s\cdot\frac{1}{n}\frac{(n-1)^{s-1}}{n^{s-1}}=n.$$



首步分析法计算$f_{13}^{(n)}(n>1)$:

$$f_{13}^{(n)}=P\{T_3=n,\bigcup_{i=1}^{3}\{X(1)=i\}\mid X(0)=1\}$$

$$P\{T_3=n,X(1)=1\mid X(0)=1\}$$

$$=P\{T_3=n\mid X(1)=1,X(0)=1\}*P\{X(1)=1\mid X(0)=1\}$$

$$=P\{X(n)=3,X(k)\neq 3,k=1,2,\cdots,n-1\mid X(1)=1\}\cdot p_{11}$$

$$=P\{X(n-1)=3,X(k)\neq 3,k=1,2,\cdots,n-2\mid X(0)=1\}\cdot p_{11}$$

$$=f_{13}^{(n-1)}p_{11}$$

类似 $P\{T_3=n,X(1)=2\mid X(0)=1\}=f_{23}^{(n-1)}p_{12}$

所以 $f_{13}^{(n)}=p_{11}f_{13}^{(n-1)}+p_{12}\underline{f_{23}^{(n-1)}}$

$$=p_{11}f_{13}^{(n-1)}+p_{12}\underline{p_{22}^{(n-2)}p_{23}}$$

$$f_{13}^{(n)} = p_{11} f_{13}^{(n-1)} + p_{12} p_{22}^{(n-2)} p_{23}, \quad n = 2, 3, \cdots$$

带入n=2, $$f_{13}^{(2)} = p_{11} p_{13} + p_{12} p_{23}$$

带入n=3, $$f_{13}^{(3)} = p_{11} f_{13}^{(2)} + p_{12} p_{22} p_{23}$$

$$= p_{11}^2 p_{13} + p_{11} p_{12} p_{13} + p_{12} p_{22} p_{23}$$

$$\cdots \Rightarrow f_{13}^{(n)} = p_{11}^{n-1} p_{13} + \sum_{k=0}^{n-2} p_{11}^{n-2-k} p_{12} p_{22}^{k} p_{23}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

注意 $$\sum_{n=1}^{\infty} f_{13}^{(n)} = \frac{p_{13}}{1 - p_{11}} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+2}^{\infty} p_{11}^{n-2-k} p_{12} p_{22}^{k} p_{23} = 1$$

由全概率公式和马氏性，

$$f_{22} = P_2\{T_2 < \infty\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} P_2\{T_2 < \infty \mid X(1) = i\} P_2\{X(1) = i\}$$

$$= 1/3 + f_{32}/3, \quad \Longrightarrow \quad f_{22} = 5/9.$$

类似，$f_{32} = P_3\{T_2 < \infty\}$

$$= \sum_{i=2}^{4} P_3\{T_2 < \infty \mid X(1) = i\} P_3\{X(1) = i\}$$

$$= 1/3 + (f_{32} + f_{42})/3, \Rightarrow f_{32} = 2/3$$

$$f_{42} = P_4\{T_2 < \infty\} = (f_{32} + f_{42})/3 \Rightarrow f_{42} = f_{32}/2$$

j常返 $\Leftrightarrow P_j\{N_j=\infty\}=1.$

证明： 令 $T_j(0)=0,\ T_j(1)=\inf\{n>0,\ X(n)=j\},$

$$T_j(k+1)=\inf\{n>T_j(k),\ X(n)=j\},\ k=0,1,\cdots$$

$$P_j\{N_j\ge k\}=P_j\{T_j(k)<\infty\}=P_j^k\{T_j(1)<\infty\},\ k=0,1,2,\cdots$$

$$P_j\{T_j(1)=n_1,T_j(2)-T_j(1)=n_2,\cdots T_j(k)-T_j(k-1)=n_k\}$$

$$=P_j\{X(1)\ne j,\cdots X(n_1-1)\ne j,X(n_1)=j,$$

$$X(n_1+1)\ne j,\cdots X(n_1+n_2-1)\ne j,X(n_1+n_2)=j,$$

$$\cdots X\Big(\sum_{s=1}^{k-1}n_s+1\Big)\ne j,\cdots X\Big(\sum_{s=1}^{k-1}n_s+n_k-1\Big)\ne j,X\Big(\sum_{s=1}^{k}n_s\Big)=j\}$$

$$= P_j\{X(1)\neq j,\cdots X(n_1-1)\neq j, X(n_1)=j\}*$$

$$P_j\{X(n_1+1)\neq j,\cdots X(n_1+n_2-1)\neq j, X(n_1+n_2)=j,$$

$$|\, X(1)\neq j,\cdots X(n_1-1)\neq j, X(n_1)=j\}$$

$$\cdots P_j\{X(\sum_{s=1}^{k-1} n_s+1)\neq j,\cdots X(\sum_{s=1}^{k-1} n_s+n_k-1)\neq j, X(\sum_{s=1}^{k} n_s)=j,$$

$$|\, X(1)\neq j,\cdots X(n_1-1)\neq j, X(n_1)=j, X(n_1+1)\neq j,\cdots X(\sum_{s=1}^{k-1} n_s)=j\}$$

$$= P_j\{T_j(1)=n_1\}*P_j\{T_j(1)=n_2\}\cdots P_j\{T_j(1)=n_k\}$$

齐次马氏性

对n_1,n_2, …, n_k求和即可。注意到，

$$P_j\{N_j=\infty\}=\lim_{k\to\infty} P_j\{N_j\geq k\}=\lim_{k\to\infty} P_j^k\{T_j(1)<\infty\}$$

$$=\begin{cases}1, & j\text{常返;}\\ 0, & j\text{非常返.}\end{cases}$$

定义生成函数： $P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n$，$F_{ij}(s)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{ij}^{(k)}s^n$，$|s|<1.$

由 $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$，$\forall n\geq 1$，

若$i\neq j$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}s^n=\sum_{k=1}^{\infty}f_{ij}^{(k)}s^k\sum_{n=k}^{\infty}p_{jj}^{(n-k)}s^{n-k}$

即 $P_{ij}(s)=F_{ij}(s)P_{jj}(s).$

若$i=j$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{jj}^{(n)}s^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_{jj}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}s^n=\sum_{k=1}^{\infty}f_{jj}^{(k)}s^k\sum_{n=k}^{\infty}p_{jj}^{(n-k)}s^{n-k}$

即 $P_{jj}(s)-1=F_{jj}(s)P_{jj}(s)\Rightarrow P_{jj}(s)=1/\left(1-F_{jj}(s)\right).$

令$s\to 1$**可得**$\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}^{(n)}=1/(1-f_{jj})$, *and thus* $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=f_{ij}/(1-f_{jj}).$