§1.2 随机变量及其分布

一、随机变量

定义1.2.1 设(Ω,F,P)是概率空间，$X(\omega)$是定义在Ω上的单值实函数，若对于任意实数$x\in R$，有

$$\{\omega : X(\omega)\le x\}\in F,$$

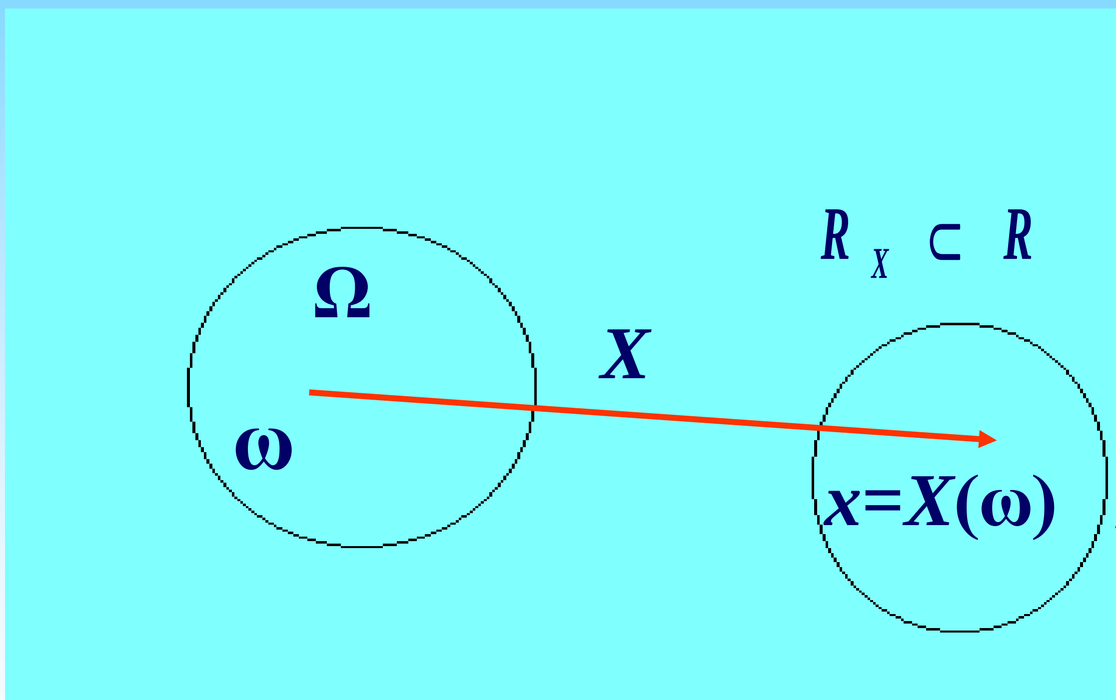
称$X(\omega)$是随机变量.

可测空间(Ω,F)上的可测函数.

随机变量及其分布

X是概率空间(Ω,F,P)上的随机变量,有

对于$\omega\in\Omega$，有唯一$X(\omega)$与之对应,



随机变量X可理解为从样本空间Ω到实数集R_X的一个映射.

注 $\{\omega : X(\omega) \le x\} = \{X \le x\} \in \mathrm{F},$

使$P\{X \le x\}$总有意义.

由随机变量定义及σ代数性质, 有

$$\{X = x\} = \{X \le x\} - \bigcup_{k=1}^{+\infty}\{X \le x - \frac{1}{k}\} \in \mathrm{F}$$

$$\{X < x\} = \{X \le x\} - \{X = x\} \in \mathrm{F}$$

$$\{X > x\} = \Omega - \{X \le X\} \in \mathrm{F}, \cdots$$

二、分布函数

定义1.2.2 设$X(\omega)$是定义在概率空间(Ω, F, P)上的随机变量, 令

$$F(x) = P\{X \le x\}, \quad \forall x \in R$$

称$F(x)$为X的分布函数.

对 $\forall a < b \in R$, 有 $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$,

性质

1) $F(x)$是单调不减函数;

2) $0 \le F(x) \le 1, \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$

3) $F(x)$是右连续函数, 即对

$$\forall x \in R, \quad F(x+0) = F(x).$$

证3）由于$F(x)$单调不减，根据单调原理仅需证,对任意的$x\in R$, 有

$$\lim_{n \to \infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(x).$$

因 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \le x+\frac{1}{n}\}=\{X \le x\}$,

且 $\{X \le x+1\} \supset \{X \le x+\frac{1}{2}\} \supset \cdots$

$\supset \{X \le x+\frac{1}{n}\} \supset \cdots$

事件列$\{X \le x+\frac{1}{n}\}$单调下降趋于$\{X \le x\}$,由概率的连续性知性质3成立.

三、二维随机变量

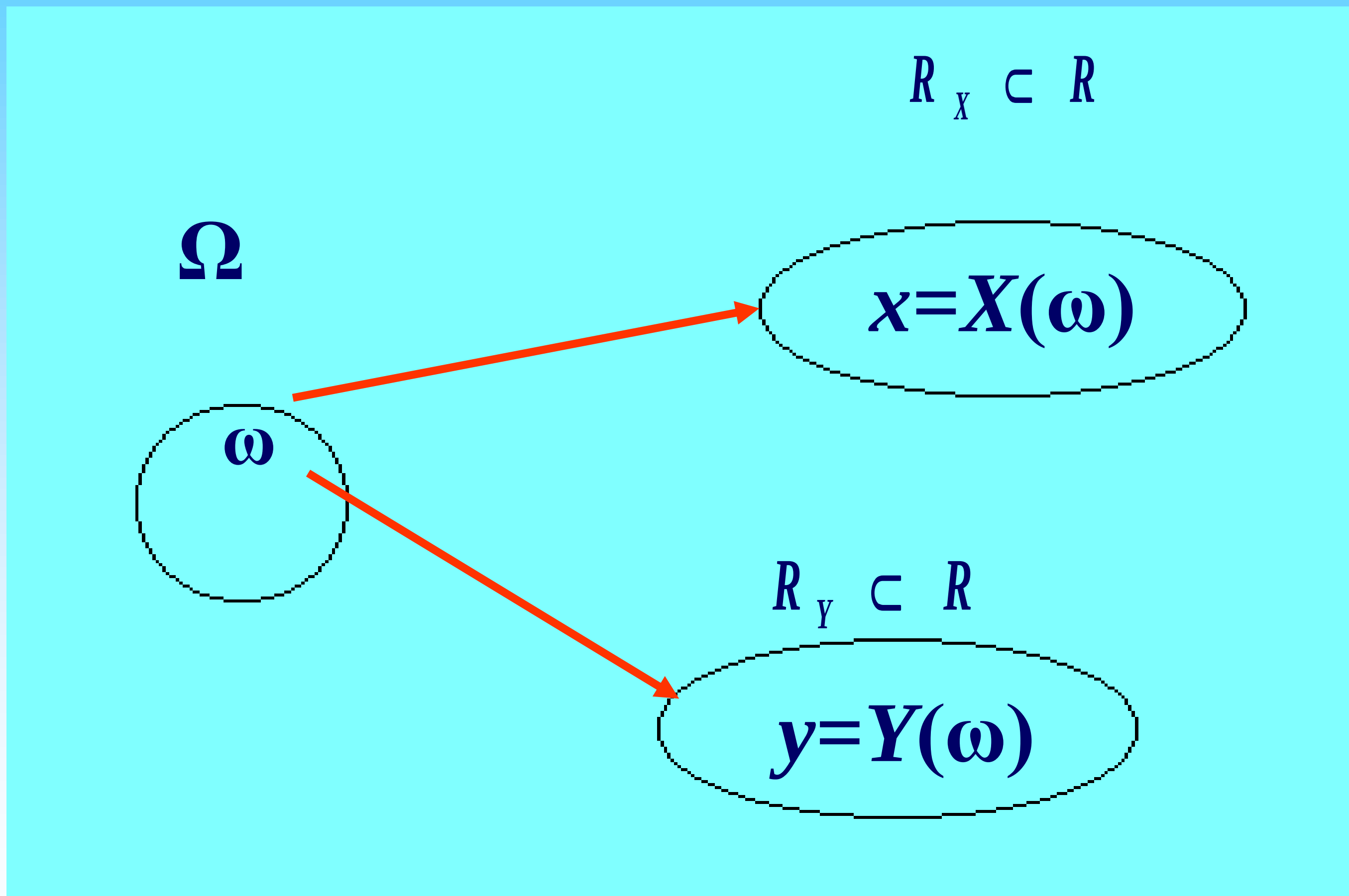
定义1.2.3 如果X和Y是定义在同一概率空间(Ω, F, P)上的两个随机变量, 称(X,Y)为**二维**随机变量(向量).

思考:

如何准确理解"**维**"的含义?

如何理解"定义在同一概率空间"?

对 $\forall\omega\in\Omega$，有唯一$(X(\omega),Y(\omega))$与之对应.



(X,Y)是概率空间(Ω,F,P)上的随机向量.

Ex.1 随机试验E:检查n个学生的健康情况，$\{i\}$表示抽检到第i名学生，记样本空间为

$$\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$$

对于样本点 $i\in\Omega$ 可定义

身高：$X(i)\triangleq h$，　体重：$Y(i)\triangleq w$.

身高X与体重Y构成定义在(Ω, F)上的二维随机变量(X, Y).

EX.2 先抛一枚均匀硬币, 再掷一颗均匀硬币骰子试验的样本空间为

$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2)\ ,\ \omega_i\in\Omega_i\ \ i=1,\ 2\}$

对 $\omega=(\omega_1,\ i)\in\Omega,\ \omega_1=H(0),\ T(1),\ i=1,2,\ \ldots,6.$

定义二维随机变量

$$(X(\omega),Y(\omega))=\begin{cases}(1,i), & \omega_1=T,\quad \omega_2=i\ ;\\ (0,i), & \omega_1=H,\quad \omega_2=i\ ;\end{cases}$$

定义1.2.4 设(X, Y) 是定义在(Ω,F, P)上的随机向量,对 $\forall (x, y) \in R^2$

$$F(x, y) \hat{=} P\{\omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}$$

称为(X, Y)的**联合分布函数**.

注: 由(X,Y)的分布可确定X, Y 各自的分布,反之不行;即联合分布可确定边缘分布，反之不行。

定理1.2.1 若$F(x,y)$是联合分布函数,则有

1) $F(x,y)$分别对x和y单调不降;

2) $F(x,y)$对每个变元右连续;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0,\ \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0,$

$\lim\limits_{\substack{y\to+\infty \\ x\to+\infty}} F(x,y)=1;$

4) $\forall x_1<x_2,\ y_1<y_2,$

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0.$$

注

1) 此定理的逆成立;

2) 可以推广到任意有限维的情形;

3) 分布函数与概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$的概率一一对应.

四、条件分布

定义1.2.5 设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，记

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\le y|X=x\}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{F(x,y)-F(x-\alpha,y)}{F(x,+\infty)-F(x-\alpha,+\infty)},\quad(\alpha>0)$$

若极限存在，称为在$X=x$的条件下,随机变量Y的**条件分布函数**.

注 需满足对 $\forall\alpha>0$,

$$F(x,+\infty)-F(x-\alpha,+\infty)$$

$$=F_X(x)-F_X(x-\alpha)$$

$$=P\{x-\alpha<X\le x\}>0$$

离散型随机变量(X,Y), 在$y=y_k$条件下X的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y_k)=\mathrm{P}\{X\le x|y=y_k\}$$

$$=\frac{\sum\limits_{x_i\le x}\mathrm{P}\{X=x_i,Y=y_j\}}{\mathrm{P}\{Y=y_k\}}$$

$$P\{X=x_i \mid Y=y_k\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_k\}}{P\{Y=y_k\}}, (i=1,2,\cdots)$$

称为在$y=y_k$条件下X的条件分布律.

例3. 某射手进行射击，击中目标两次则停止射击，每次的命中率为p $(0 < p < 1)$，令X 表示**第一次命中目标**时的射击次数，令Y表示**第二次命中目标**时的射击次数，求条件分布律

$$P\{X = i | Y = j\}, \quad i = 1, 2, \cdots j-1.$$

1	2	…	i	…	j

解

$$P\{X = i，Y = j\} = p^2(1-p)^{j-2},$$

$$(1 \le i < j = 2, 3, \ldots)$$

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}p^2(1-p)^{j-2}$$

$$=(j-1)p^2(1-p)^{j-2}, \qquad (j=2,3,\cdots)$$

当 $j=2, 3, \ldots$ 时，条件分布律存在

$$P\{X=i|Y=j\}=P\{X=i,Y=j\}/P\{Y=j\}$$

$$=p^2(1-p)^{j-2}/(j-1)p^2(1-p)^{j-2}$$

$$=\frac{1}{j-1}, \qquad (i=1,2,\cdots,j-1)$$

连续型(X, Y),有

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y | X = x\} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)\mathrm{d}v}{f_X(x)}$$

称 $$f_{Y|X}(y|x) = F'_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

为在$X=x$条件下, 随机变量Y的条件密度函数.

例4 设随机变量(X, Y)在D上服从均匀分布

$$D=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le x+\frac{y}{2}\le 1\}$$

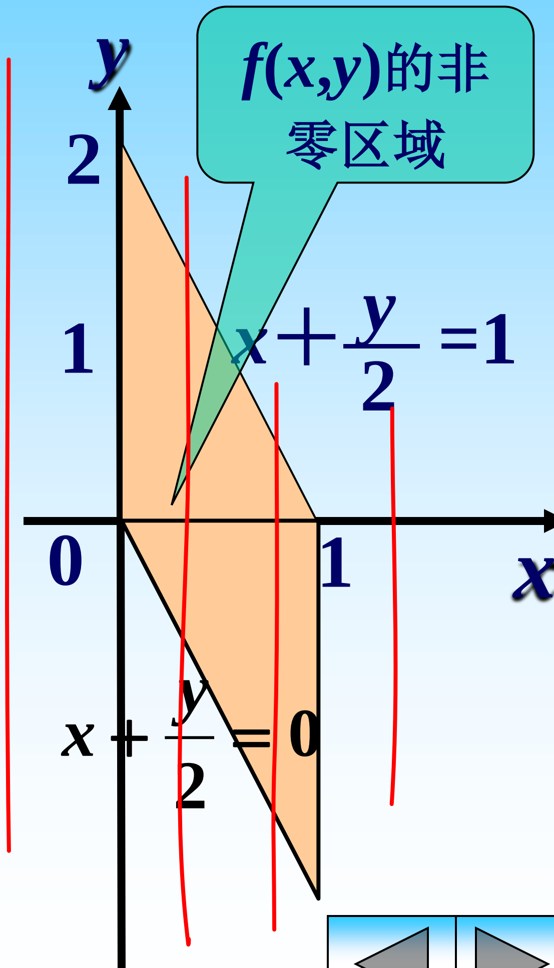
试求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和$f_{Y|X}(y|x)$.

解:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0 & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-2x}^{2(1-x)}\frac{1}{2}dy=1, & 0<x<1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

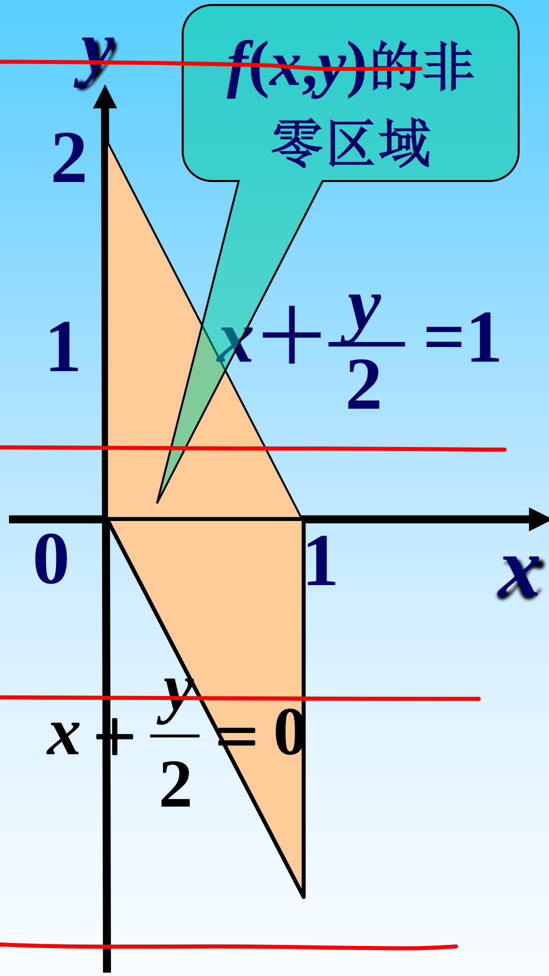


随机变量及其分布

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\frac{y}{2}}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right), -2\le y<0;\\ \displaystyle\int_{0}^{1-\frac{y}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{2}\right), 0\le y<2;\\ 0, \qquad\qquad 其它.\end{cases}$$

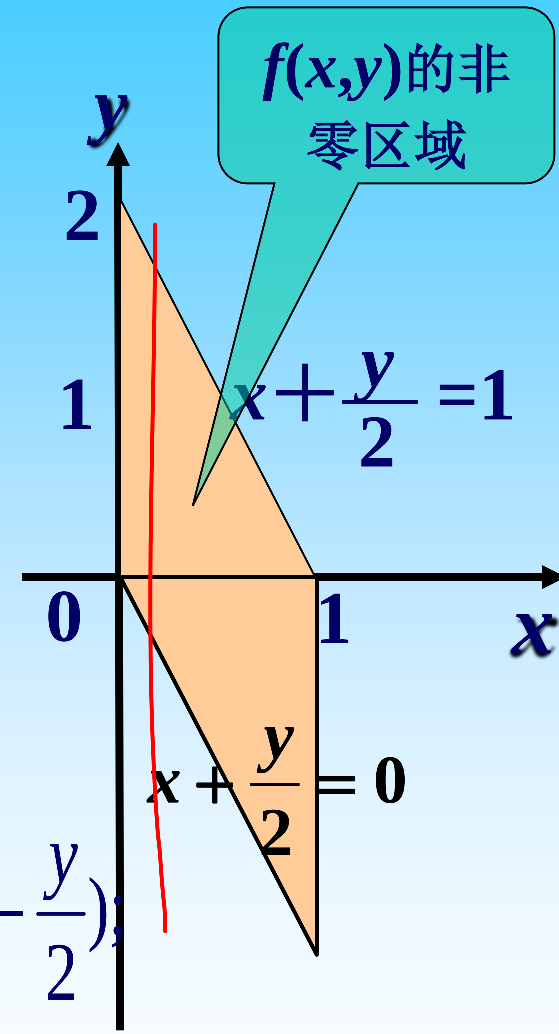
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{|y|}{2}\right), & |y|<2;\\ 0, & 其它.\end{cases}$$



当$0 < x < 1$时

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & -2x < y < 2(1-x); \\ 0, & 其它. \end{cases}$$



当$|y| < 2$时

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{|y|}{2}}, & -\frac{y}{2} \vee 0 < x < 1 \wedge (1-\frac{y}{2}); \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

Ex.4已知$X \sim N(\mu, \tau^2)$，给定$X=x$ 的条件下，Y的条件分布为$N(x, \sigma^2)$，求Y的分布及给定$Y=y$的条件下X 的条件分布.

解 已知

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tau^2}}, \quad x \in R,$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}, y \in \mathrm{R}.$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tau^2} - \frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}, (x,y) \in R_2$$

(X,Y)是二维正态吗?

是

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tau^2} - \frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau^2+\sigma^2)}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2(\tau^2+\sigma^2)}}, \quad y \in R$$

五、随机向量的独立性

定义1.2.6 设(X, Y)是二维随机变量, 对

$\forall (x, y) \in R_2$

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\} \qquad (1)$$

成立,称X与Y相互独立.

注 本质上是事件的独立,(X,Y)定义在$(\Omega,\mathcal{F}, P)$上,对$\forall(x,y)\in R_2$,随机事件$\{X\le x\}$与$\{Y\le y\}$相互独立.

$$(1)\text{式} \Leftrightarrow F_X(x)F_Y(y)=F(x,y) \qquad (2)$$

对所有$(x, y)\in R_2$成立.

定义1.2.6 $(X_1, X_2,\ldots, X_n)$是n维随机变量,若对任意 $(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in R^n$,有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n).$$

成立,称随机向量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立.

定理1.2.2 若随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立,则其中任意$k(2 \le k \le n)$个随机变量

$$X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k}$$

也相互独立.

定理1.2.3 设有$n_1+n_2+\ldots+n_k$维随机变量

$$(X_{11}, \cdots, X_{1,n_1}, X_{2,1}, \cdots, X_{2,n_2}, \cdots, X_{k,1}, \cdots, X_{k,n_k})$$

若ψ_i是n_i元实变实值连续函数,令

$$Y_i=\varphi_i(X_{i_1},\cdots,X_{i,n_i})\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

有 1) $Y_1,Y_2,\ldots,Y_k$必为同一概率空间的随机变量;

2) 若$(X_{11},\cdots,X_{1,n_1},X_{2,1},\cdots,X_{2,n_2},\cdots,X_{k,1},\cdots,X_{k,n_k})$

相互独立,则$Y_1,Y_2,\ldots,Y_k$也相互独立.

问题：若 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$，

且 X 与 Y 不相关，即 $\rho_{XY} = 0$.

能否说明相互独立?

否 反例如下：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + e^{-\pi^2}(\sin x \cos y) 1_{\{-\pi<x<\pi, -\pi<y<\pi\}} \right),$$

$(x,y) \in R^2$.

Ex.4 （X,Y）服从二维正态分布。

证明： 多维随机向量服从正态分布的一个**充要条件**：任一非零线性组合服从一维正态分布。

$$E[e^{j\theta(aX+bY)}] = E\{E[e^{j\theta(aX+bY)} \mid X]\}$$

全数学期望公式

$$= E\{e^{j\theta aX + j\theta bX - \frac{1}{2}\theta^2 b^2 \sigma^2}\}$$

$$= e^{j\theta(a+b)\mu - \frac{1}{2}\theta^2\left((a+b)^2\tau^2 + b^2\sigma^2\right)}$$

（X,Y）的相关系数?

在上式中令a=0, b=1得 $Y \sim N(\mu, \tau^2 + \sigma^2)$.

再用全数学期望公式，

$$E[XY] = E\{E[XY \mid X]\} = E\{X \cdot X\}.$$

因此

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{D(X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}}.$$