第四章 二阶矩过程的均方微积分

§4.1 收敛性与极限定理

一、分布函数弱收敛

定义4.1.1 对于分布函数列$\{F_n(x)\}$,如果存在单调不降函数$F(x)$,使

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

在$F(x)$的每一连续点成立,称$F_n(x)$**弱收敛**于$F(x)$.

记为

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x).$$

注 分布函数列的极限函数$F(x)$是有界非降函数，但不一定是分布函数.

定理4.1.1 连续性定理（列维－克拉美）

正极限定理 设分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于某一分布函数$F(x)$, 则相应的特征函数列收敛于特征函数，且在t的任一有限区间内收敛是一致的.

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x) \Rightarrow \{\varphi_n(t)\} \to \varphi(t)\text{一致成立.}$$

逆极限定理 设特征函数列$\{\varphi_n(t)\}$收敛于某一函数$\varphi(t)$, 且$\varphi(t)$在$t=0$连续,则相应的分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于某一分布函数$F(x)$，而且$\varphi(t)$是$F(x)$的特征函数.

$$\{\varphi_n(t)\} \to \varphi(t) \xrightarrow{\text{在}t=0\text{处连续}} F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$$

连续性定理可用来确定随机变量序列的极限分布.

Ex. 1 设随机变量序列$X_1, X_2, \ldots$相互独立,且
$X_k \sim P(\lambda)\ \ (k=1,2,\ldots)$.

1) 求 $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的概率分布;

2) 证明：当 $n \to \infty$ 时， $Y_n^* = \dfrac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}$

趋于正态分布.

解 1) $\varphi_k(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = e^{n\lambda(e^{it}-1)}$$

即$Y_n \sim P(n\lambda)$,且 $E(Y_n)=D(Y_n)=n\lambda.$

2) Y_n^* 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n^*}(t)=e^{-i\sqrt{n\lambda}\,t}\varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}\right)$$

$$=e^{-i\sqrt{n\lambda}t}e^{-n\lambda}e^{n\lambda\exp(i\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})}$$

$$=e^{-n\lambda}e^{-i\sqrt{n\lambda}t}\exp[n\lambda(1+\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}-\frac{t^2}{2n\lambda}+\cdots)]$$

$$=e^{n\lambda[-\frac{t^2}{2n\lambda}+O(n^{-3/2})\cdots)]}$$

有 $$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Y_n^*}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}},\quad t\in R.$$

由连续性定理的逆定理知当 $n\to\infty$，Y_n^* 趋于正态分布.

二、随机变量的收敛性

定义4.1.2 设随机变量序列$\{X_n\}$的分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于随机变量X 的分布函数$F(x)$,称$\{X_n\}$**依分布收敛**于X, 记为

$$X_n \xrightarrow{W} X,\quad as\quad n\to\infty$$

定义4.1.3 设$\{X_n\}$, n=1,2,…是定义在(Ω, F, P)上的随机变量序列,若对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right\} = 0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

称随机变量序列$\{X_n\}$**依概率收敛**于X, 记为

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad (p) \quad \text{或} \quad X_n \xrightarrow{p} X.$$

定义4.1.4：设$\{X_n\}, n=1,2,\ldots$是定义在(Ω, F, P)上的随机变量序列,若存在一个随机变量X (可以是常数),使

$$P\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$$

称随机变量序列$\{X_n\}$**以概率1收敛**于X，或称**几乎处处收敛**于X,记为

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X. \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X \quad (a.s.)$$

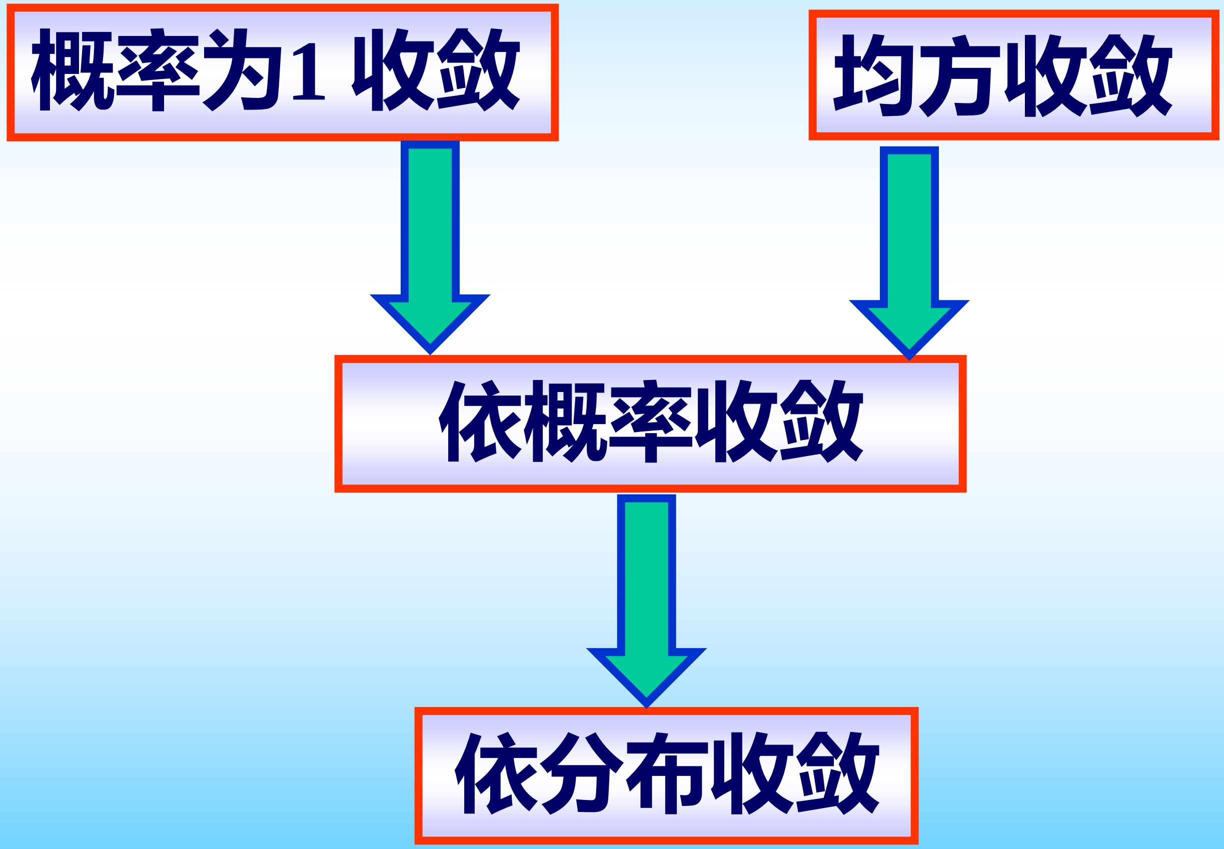
定义4.1.5 设$\{X_n\}$, n=1,2,…是定义在(Ω, F, P)上的随机变量序列,若 $E|X_n|^2<\infty$,且

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0,$$

称随机变量序列$\{X_n\}$**均方收敛**于X, 记为

$$\mathrm{l \cdot i \cdot m}_{n\to\infty} X_n = X.$$

三、几种收敛性的关系



证明 随机变量序列$\{X_n\}$**均方收敛**于X, 则一定**依概率收敛**于X.

证 由马尔科夫不等式,对 $\forall\varepsilon>0$有

$$P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E[|X_n-X|^2]}{\varepsilon^2}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0.$$

四、极限定理

定理4.1.2. 切比雪夫(Chebyshev)大数定律

设X_k，k=1,2…是相互独立的随机变量序列，其数学期望和方差都存在，且存在常数C，使得

$$D(X_n) < C,\ k = 1,2,\ldots$$

则对于任意的$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < \varepsilon\} = 1$$

定理4.1.3 独立同分布大数定律

设X_k，k=1,2…是**相互独立且同分布**的随机变量序列，且 $E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2,\ k=1,2,\dots$

则 $\{X_k\}, k$=1,2…服从大数定律，即对任意的$\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu|<\varepsilon\}=1$$

定理4.1.4 辛钦大数定律

设X_k，k=1,2…是相互独立且同分布的随机变量序列，且 $E(X_k)=\mu$，$k=1,2,\ldots$

则 $\{X_k\}, k$=1,2…服从大数定律，即对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

定理4.1.5 贝努里(Bernulli)大数定律

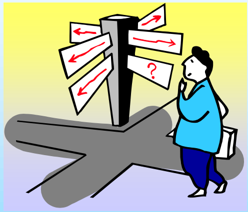
设$\frac{m}{n}$是n次重复独立试验中事件A发生的频率，p是事件A在每次试验中发生的概率。则对任意的$\forall \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$$

定理4.1.6　独立同分布中心极限定理

设$\{X_k\}, k=1,2\ldots$为相互独立, 具有相同分布的随机变量序列, 且$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2$, 则$\{X_k\}$满足中心极限定理，即 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \Phi(x)$$



其中$\Phi(x)$是标准正态分布$N(0,1)$的分布函数。