随机变量及其分布

<table>
<tr><th colspan="2">一维</th><th colspan="2">二维</th></tr>
<tr><th>离散</th><th>连续</th><th>离散</th><th>连续</th></tr>
<tr>
<td>分布率：
$P\{X=x_k\}=p_k$</td>
<td>概率密度函数：
$f(x)=F'(x)$</td>
<td>联合分布率：
$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$</td>
<td>联合概率密度函数：
$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$</td>
</tr>
<tr>
<td>分布函数：
$F(x)=\sum_{x_k<x} p_k$</td>
<td>分布函数：
$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$</td>
<td>联合分布函数：
$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}$</td>
<td>联合分布函数：
$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$</td>
</tr>
<tr>
<td>性质：
$0\le F(x)\le 1, F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$
$\forall x_1<x_2, F(x_1)<F(x_2)$
$F(x+0)=F(x)$</td>
<td>性质：
$f(x)\ge 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
连续型$r.v.X$取某个值得概率为 0
连续型$r.v.X$落在区间的概率与区间的开闭无关</td>
<td>边缘分布律：
$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}, p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}$</td>
<td>边缘概率密度函数：
$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td rowspan="2">一维连续型随机函数的分布
$f_X(x), y=g(x)$，则$Y=g(X)$的分布函数为
$F_Y(y)=\int_{g(x)<y} f_X(x)dx$
概率密度函数为
$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\lvert h'(y)\rvert, & \alpha<x<\beta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
$\alpha=\min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$
$\beta=\max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$
$h(y)$是$g(x)$的反函数</td>
<td>条件分布率：
$p_{i\mid j}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, p_{j\mid i}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$</td>
<td>条件概率密度函数：
$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>条件分布函数：
$F_{Y\mid X}(y\mid x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y\mid X}(v\mid x)dv$
$F_{X\mid Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X\mid Y}(u\mid y)du$</td>
</tr>
</table>

一维		二维	
离散	连续	离散	连续
		性质： $0 \le F(x,y) \le 1, F(+\infty,+\infty) = 1$ $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$ $F(x,y)$对每个变量都是单调非减函数 $F(x,y)$对每个变量都是右连续函数 $\forall x_1 < x_2, F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) \ge 0$	性质： $f(x,y) \ge 0, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ $P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$
		二维随机变量的变换 设$r.v.(X,Y)$的联合概率密度为$f_{XY}(x,y)$，如果$g_1(x,y)$和$g_2(x,y)$为二元连续函数，由$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_2(x,y) \end{cases}$确定的$r.v.(U,V)$称为$r.v.(X,Y)$的变换，其联合概率密度为 $f_{UV}(u,v) = \begin{cases} f_{XY}[h_1(u,v),h_2(u,v)]\lvert J\rvert, & (u,v) \in G \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 其中变换行列式（雅可比行列式）$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$， $\begin{cases} x = h_1(u,v) \\ y = h_2(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in G$是$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_2(x,y) \end{cases}$的唯一反函数。 $\begin{cases} u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = g_1(u,v) \\ y_1 = g_2(u,v) \end{cases}, \begin{cases} x_2 = h_1(u,v) \\ y_2 = h_2(u,v) \end{cases}$ $f_{UV}(u,v) = f_{XY}[g_1,g_2]\lvert J_1\rvert + f_{XY}[h_1,h_2]\lvert J_2\rvert$ $J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} \end{vmatrix}, J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v} \end{vmatrix}$	两个连续型随机变量函数的分布 $Z = X + Y$ $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$ $Z = X - Y$ $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(x-z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z+y)f_Y(y)dy$ $Z = \lvert X \pm Y\rvert$ $f_Z(z) = \iint\limits_{\lvert X \pm Y\rvert < z} f(x,y)dxdy$ $Z = \min(X,Y)$ $F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$ $f_Z(z) = f_X(z)[1 - F_Y(z)] + f_Y(z)[1 - F_X(z)]$ $Z = \max\{X,Y\}$ $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$ $f_Z(z) = f_X(z)F_Y(z) + f_Y(z)F_X(z)$ $Z = \frac{X}{Y}$ $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert y\rvert f(zy,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert y\rvert f_X(zy)f_Y(y)dy$ $Z = X \cdot Y$ $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lvert x\rvert} f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lvert y\rvert} f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)dy$
		串联：$Z = \min\{X,Y\}$，并联$Z = max\{X,Y\}$，备份：$Z = X + Y$	

离散随机变量

一维		二维	
1. 分布率（概率分布）	$P\{X=x_k\}=p_k$	1. 联合分布律	$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_i\}$
2. 分布函数	$F(x)=P\{X<x\}=\sum\limits_{x_k<x}p_k$	2. 联合分布函数	$F(x,y)=\sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_j<y}P\{X=x_i,Y=y_i\}=\sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_j<y}p_{ij}$
3. 数学期望（均值）	$E(X)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$	3. 边缘分布率	$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\,,p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}p_{ij}$
4. 方差/均方差（标准差）	$D(X)=E[X-E(x)]^2=E(X^2)-E^2(X)$ $\sigma_X=\sqrt{D(X)}$	4. 条件分布率/条件数学期望	$p_{i\|j}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},p_{j\|i}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$ $E(X\|Y=y_j)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_ip_{i\|j}\,,E(Y\|X=x_i)=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}y_jp_{j\|i}$
		6. 协方差/相关系数	$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[x-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$ $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$
		7. 协方差矩阵	$c_{ij}=\mathrm{cov}(X_i,X_j)=E\{[X-E(X_i)][X-E(X_j)]\}$ $C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}$ 特别地，对二维随机变量$C=\begin{bmatrix}D(X)&\mathrm{cov}(X,Y)\\\mathrm{cov}(X,Y)&D(Y)\end{bmatrix}$
特征函数	$\varphi_X(u)=E(e^{iuX})=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}e^{iuX}p_k$	特征函数	$\varphi(u,v)=E[e^{i(uX+vY)}]=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}e^{i(ux_j+vy_k)}p_{jk}$

连续随机变量

一维		二维	
1. 概率密度函数	$f(x)=F'(x)$	1. 联合概率密度函数	$f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$
2. 分布函数	$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$	2. 联合分布函数	$F(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$
3. 数学期望（均值）	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$	3. 边缘概率密度函数	$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\,,f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$
4. 方差/均方差（标准差）	$D(X)=E[X-E(x)]^2=E(X^2)-E^2(X)$ $\sigma_X=\sqrt{D(X)}$	4. 边缘分布函数	$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx$ $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$
		5. 条件概率密度函数/条件数学期望	$f_{Y\|X}(y\|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)},f_{X\|Y}(x\|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $E(X\|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X\|Y}(x\|y)dx$ $E(Y\|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y\|X}(y\|x)dy$
		6. 条件分布函数	$F_{Y\|X}(y\|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y\|X}(v\|x)dv=\dfrac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}$ $F_{X\|Y}(x\|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X\|Y}(u\|y)du=\dfrac{\int_{-\infty}^{x} f(u,v)du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}$
		7. 协方差/相关系数/协方差矩阵	同离散随机变量
特征函数	$\varphi_X(u)=E\left(e^{iuX}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuX}f_X(x)dx$	特征函数	$\varphi(u,v)=E\left[e^{i(uX+vY)}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ux_j+vy_k)}f(x,y)dxdy$

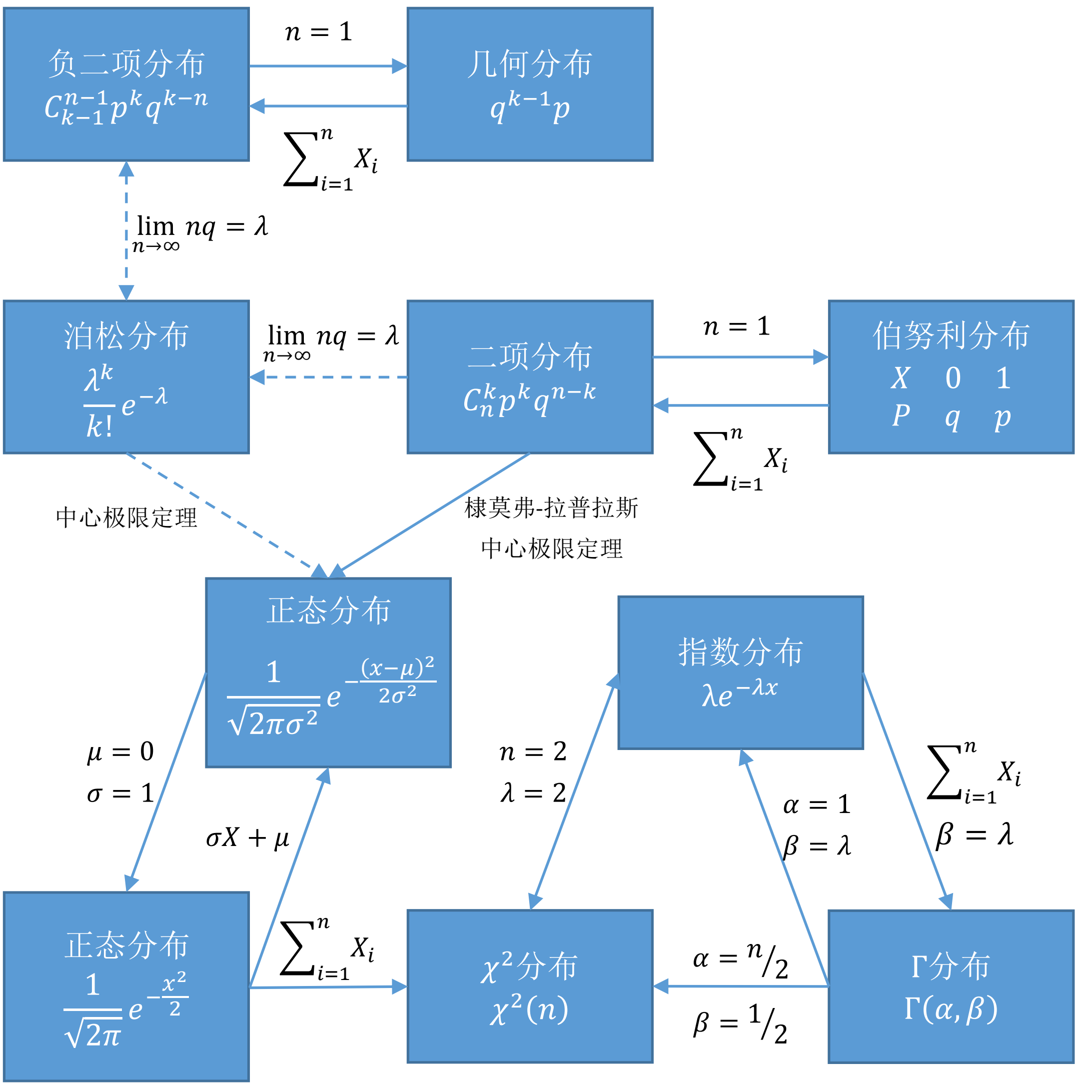
常见随机变量及其分布、数字特征和特征函数

分布名称	分布律/概率密度函数	分布函数	数字特征		特征函数
			$E(X)$	$D(X)$	
1. 二项分布	$p_k=C_n^k p^k q^{n-k}$	$X\sim B(n,p)$	np	npq	$\varphi_X(u)=\left(q+pe^{iu}\right)^n$
<0-1> 分布 / 伯努利分布	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline X & 0 & 1 \\ \hline P & q & p \\ \hline\end{array}$ $0<p<1,p+q=1$	$X\sim B(1,p)$	p	pq	$\varphi_X(u)=q+pe^{iu}$
2.负二项分布	$p_k=C_{k-1}^{n-1}p^n q^{k-n}$	$X\sim B^-(n,p)$	$\frac{n}{p}$	$\frac{nq}{p^2}$	$\varphi_X(u)=\left(\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}\right)^n$
几何分布	$p_k=q^{k-1}p,0<p<1,p+q=1,k=1,2,\cdots$				$\varphi_X(u)=\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}$
3. 泊松分布	$p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0,k=0,1,\cdots$	$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$\varphi_X(u)=e^{\lambda(e^{iu}-1)}$
4. 均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$	$X\sim U(a,b)$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\varphi_X(u)=\frac{e^{ibu}-e^{iau}}{i(b-a)u}$
5. 指数分布/寿命分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\lambda>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 指数分布是参数为$\alpha=1,\beta=\lambda$的Γ分布，即$f(x)=\Gamma(1,\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\varphi_X(u)=\left(1-i\frac{u}{\lambda}\right)^{-1}$
6. 正态分布/高斯分布	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in\mathbb{R}$	$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2	$\varphi_X(u)=e^{-\mu u-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$
标准正态分布	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in\mathbb{R}$	$X\sim N(0,1)$ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,x\in\mathbb{R}$ $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ $P\{a<x<b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$	0	1	$\varphi_X(u)=e^{-\frac{1}{2}u^2}$

7. Γ分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-a}e^{-\beta x}, & x,\alpha,\beta>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$X\sim\Gamma(\alpha,\beta),\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\Gamma(1)=1,$ $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\Gamma(n)=n!$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\varphi_X(u)=\left(1-\frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}$
8. 对数正态分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lg e}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & \mathrm{x},\sigma>0\\ 0, & \mathrm{x}\le 0\end{cases}$	$r.v.X$服从参数为μ,σ的对数正态分布			
9. χ^2分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$r.v.X$服从自由度为n的对数χ^2分布，若 $X=\sum_{i=1}^{n}Z_i$ 若Z_i之间相互独立且都服从标准正态分布，则$X\sim\chi^2(n)$ $\chi^2(n)=\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$	n	$2n$	$\varphi_X(u)=(1-2iu)^{-\frac{n}{2}}$
11. 瑞利分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$		$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$	
12. 二维正态分布	$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$ $f(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2\pi\lvert C\rvert^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^TC^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})},\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},C=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$	$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ $\varphi(u,v)=e^{i(\mu_1u+\mu_2v)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2u^2+2\rho\sigma_1\sigma_1uv+\sigma_2^2v^2)}$ $\varphi(\boldsymbol{u})=e^{i\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^TC\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$			
13. n维正态分布	$f(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}\lvert C\rvert^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^TC^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})},\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T,\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_n)^T,C=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$	$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)^T\sim N(\boldsymbol{\mu},C)$ $\varphi(\boldsymbol{u})=e^{i\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^TC\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)^T$			

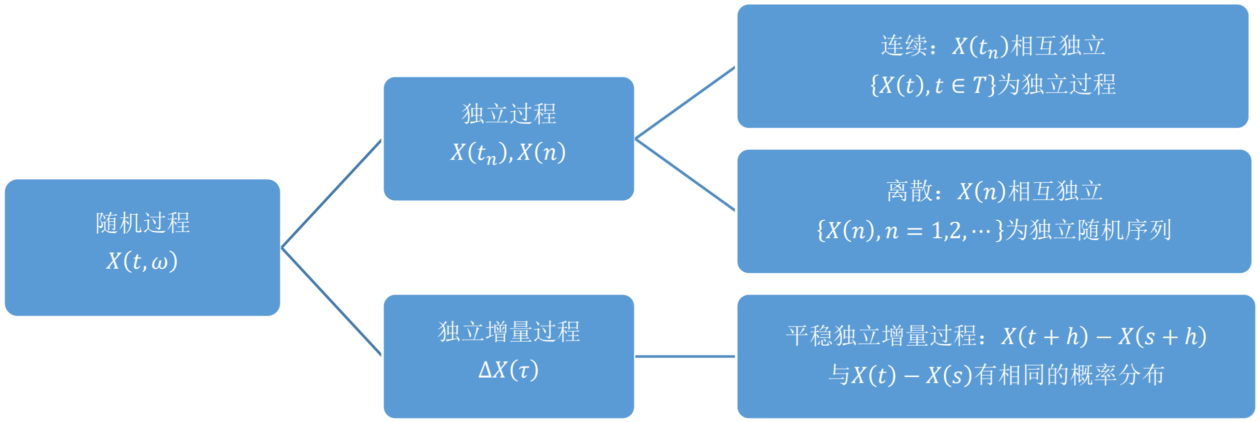
	运算法则和性质
名称	**运算法则或性质或适用对象**
全概率公式	$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\|B_i)$
贝叶斯公式	$P\left(B_j\|A\right)=\frac{P\left(B_j\right)P\left(A\|B_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\|B_i)}$
数学期望	$E(C)=C$ $E(CX)=CE(X)$ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ X与Y相互独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$ 许瓦茨不等式：$E(XY)\le\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$
方差	$D(C)=0$ $D(CX)=C^2D(X)$ $D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$
协方差	$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$ $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$ $\mathrm{cov}(X,X)=D(X),$ $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$ $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\mathrm{cov}(X,Y)$ $\mathrm{cov}[(aX+bY),(cX+dY)]=acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)\mathrm{cov}(X,Y)$
条件数学期望	$E[C\|Y]=C$ $E[aX+bY\|Z]=aE[X\|Z]+bE[Y\|Z]$ X与Y相互独立时，$E(X\|Y)=E(X)$ $E(X)=E[E(X\|Y)]$ 全概率公式：$P(A)=\begin{cases}\sum_y P(A\|Y=y)P\{Y=y\}\text{，离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}P(A\|Y=y)f_Y(y)dy\text{，连续型}\end{cases}$ 全期望公式：$E[g(X)]=E\{E[g(X)\|Y]\}$ $E[g(X)h(Y)\|X]=g(X)E[h(Y)\|X]$ $E[g(X)h(Y)\|Y]=h(Y)E[g(X)\|Y]$ $E[X-E(X\|Y)]^2\le E[X-g(Y)]^2$ 全方差公式：$D(X)=E[D(X\|Y)]+D[E(X\|Y)]$
特征函数	$\varphi_X(u)=E\left[e^{-iuX}\right]$ $\begin{cases}\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}f_X(x)dx\\ f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iux}\varphi_X(u)du\end{cases}$ $\varphi_X(0)=1$ $\|\varphi_X(u)\|\le\varphi_X(0)$ $\overline{\varphi_X(u)}=\varphi_X(-u)$ $Y=aX+b,\varphi_Y(u)=e^{-iub}\varphi_X(au)$ X与Y相互独立时，$\varphi_{X+Y}(u)=\varphi_X(u)\varphi_Y(u)$ $E(X^k)=(-i)^k\varphi_X^{(k)}(0)$ $F(X_2)-F(X_1)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iux_1}-e^{-iux_2}}{iu}\varphi_X(u)du$
概率分布可加性	二项分布，泊松分布，正态分布，Γ分布，χ^2分布

概率分布间的关系	
二项分布	二项分布：伯努利试验中，事件A发生的概率为$P(A)=p$，k是事件A次发生次数。 $$P(A)=C_n^k p^k q^{n-k}$$
负二项分布	负二项分布：伯努利试验中，事件A发生的概率为$P(A)=p$，k是直到事件A第n次发生未知的试验次数。在前$k-1$次试验中，事件A发生$n-1$次的概率为$C_{k-1}^{n-1}p^{n-1}q^{k-n}$，第$k$次试验事件$A$又发生1次，因此负二项分布的概率分布为 $$P(A)=C_{k-1}^{n-1}p^n q^{k-n}$$
伯努利大数定律	伯努利试验中事件A发生的频率依概率收敛于事件A发生的概率 $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right\| < \varepsilon\right\} = 1$$ X_i相互独立且都服从伯努利分布
中心极限定理	X_i是相互独立且同分布随机变量序列，期望为$E(X_i)=\mu$，方差为$D(X_i)=\sigma^2$ $$\lim_{n\to\infty} P\left\{Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x)$$ 即Z_n的极限分布为标准正态分布
棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理	X_i相互独立且都服从伯努利分布 $$\lim_{n\to\infty} P\left\{Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x)$$ 即Z_n的极限分布为标准正态分布



随机过程		**参数集*T***	
		离散	**连续**
状态空间*E*	**离散**	（离散参数）链	（连续参数）链
	连续	随机序列	随机过程

随机过程	$X(t,\omega)$，$t\in T$固定时为随机变量；$\omega\in\Omega$固定时为样本函数	复随机过程	$Z(t)=X(t)+iY(t)$
一维分布函数	$f(t,\omega)=F'(t,\omega)$	均值函数	$m_Z(t)=m_X(t)+im_Y(t)$
一维概率密度函数	$F(t,\omega)=P\{X(t)<x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t,u)du$	方差函数	$D_Z(t)=D_X(t)+D_Y(t)$
特征函数	$\varphi(t_1,\cdots,t_n;u_1,\cdots,u_n)==E\left\{e^{i[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]}\right\}$		
二维随机分布函数	$f(s,t;x,y)=\dfrac{\partial^2F(s,t;x,y)}{\partial x\partial y}$	自相关函数	$R_Z(s,t)=E\left[Z(s)\overline{Z(t)}\right]$
二维概率密度函数	$F(x,t;x,y)=P\{X(s)<x,X(t)<y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t;u,v)dudv$	自协方差函数	$C_Z(s,t)=R_Z(s,t)-m_Z(s)\overline{m_Z(t)}$
$n+m$维联合分布函数	$F_{XY}(t_1,\cdots,t_n;s_1,\cdots,s_m;x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ $=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_m}f_{XY}(t_1,\cdots,t_n;s_1,\cdots,s_m;u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_m)dudv$	互相关函数	$R_{Z_1Z_2}(s,t)=E\left[Z_1(s)\overline{Z_2(t)}\right]$
均值函数（数学期望）	$m(t)=E[X(t)]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty}x_ip_i(t), & 离散型\\ \int_{-\infty}^{+\infty}xf(t,x)dx, & 连续型\end{cases}$	互协方差函数	$C_{Z_1Z_2}(s,t)=R_{Z_1Z_2}(s,t)-m_{Z_1}(s)\overline{m_{Z_2}(t)}$
方差函数/均方差函数	$D(t)=D[X(t)]=E[X(t)-m(t)]^2=E[X^2(t)]-m^2(t)=C(t,t)$ $\sigma(t)=\sqrt{D(t)}$		
相关函数	$R(s,t)=E[X(s)X(t)]$		
协方差函数	$C(s,t)=R(s,t)-m(s)m(t)$		
相关系数	$\rho(s,t)=\dfrac{C(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)}=\dfrac{\mathrm{cov}[X(s),X(t)]}{\sqrt{D(s)D(t)}}$		
互相关函数	$R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]$		
互协方差函数	$C_{XY}(s,t)=\{[X(s)-m_X(s)][Y(t)-m_Y(t)]\}=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t)$		



性质 1：如果$\{X(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程，$X(0)=0$，则（1）均值函数 $m(t)=mt$ 其中$m=m(1)$

（2）方差函数 $D(t)=\sigma^2 t$ 其中$\sigma^2=D(1)$

（3）协方差函数 $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$

性质 2：独立增量过程的有限维分布由一维分布和增量分布确定

$$\varphi(t_1,\cdots,t_2;u_1,\cdots,u_n)=\varphi_{X(t_1)}(u_1+\cdots+u_n)\prod_{k=2}^{n}\varphi_{[X(t_k)-X(t_{k-1})]}(u_k+\cdots u_n)$$

1. 正态过程（高斯过程）

定义	维度	概率密度函数
n维随机变量$\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\}$的联合概率分布为n维正态分布	一维	$f(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}}\exp\left\{-\dfrac{[x-m(t)]^2}{2D(t)}\right\}$ $X(t)\sim N\big(m(t),D(t)\big)$ $t\in T,x\in\mathbb{R}$
	二维	$f(s,t;x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{D(s)D(t)(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{\big(x-m(s)\big)^2}{D(s)}-\dfrac{2\rho\big(x-m(s)\big)\big(y-m(t)\big)}{\sqrt{D(s)D(t)}}+\dfrac{\big(y-m(t)\big)^2}{D(t)}\right]\right\}$ $f(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2\pi\lvert C\rvert^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'C^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$ $x=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $\big(X(s),X(t)\big)'\sim N(\boldsymbol{\mu},C)$
	n维	$f(\boldsymbol{x})=f(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\lvert C\rvert^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'C^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$ $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ $\big(X(t_1),\cdots,X(t_n)\big)'\sim N(\boldsymbol{\mu},C)$

维度	均值	方差/均方矩阵	特征函数
一维	$m(t)$	$D(t)$	$\varphi(t,u)=\exp\left\{im(t)u-\frac{1}{2}D(t)u^2\right\}\quad t\in T,x\in\mathbb{R}$
二维	$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}m(s)\\m(t)\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}D(s)&C(s,t)\\C(t,s)&D(t)\end{bmatrix}$	$\varphi(s,t;u,v)=\exp\left\{i[um(s)+vm(t)]-\frac{1}{2}[u^2D(s)+2uvc(s,t)+v^2D(t)]\right\}$ $\varphi(\boldsymbol{u})=\exp\left\{i\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'C\boldsymbol{u}\right\}\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$
n维	$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}m(t_1)\\m(t_2)\\\vdots\\m(t_n)\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}C(t_1,t_1)&C(t_1,t_2)&\cdots&C(t_1,t_n)\\C(t_2,t_1)&C(t_2,t_2)&\cdots&C(t_2,t_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\C(t_n,t_1)&C(t_n,t_2)&\cdots&C(t_n,t_n)\end{bmatrix}$	$\varphi(\boldsymbol{u})=\exp\left\{i\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'C\boldsymbol{u}\right\}\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}$

2. 维纳过程（布朗运动）

定义	维度	概率密度函数	特征函数
随机过程$\{W(t),t\geq 0\}$满足： $W(0)=0$ $E[W(t)]=0$ 具有平稳独立增量 $W(t)\sim N(0,\sigma^2 t),t>0,\sigma>0$ 称为参数为σ^2的维纳过程	一维	$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\quad t>0,-\infty<x<+\infty$	$\varphi(t,u)=\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2tu^2\right\}\quad t\geq 0,-\infty<x<+\infty$
	二维	$f(s,t;x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2s(t-s)}(tx^2-2sxy+sy^2)\right\}$	$\varphi(s,t;u,v)=\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}[su^2+2suv+tv^2]\right\}$
	n维	$f(\boldsymbol{x})=f(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\lvert C\rvert^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'C^{-1}\boldsymbol{x}\right\}\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$	$\varphi(t_1,\cdots,t_n;u_1,\cdots,u_n)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}'C\boldsymbol{u}\right\}\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}$

维度	概率分布	协方差函数	性质
一维	$W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2\lvert t-s\rvert)$	$C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$	性质 1：维纳过程是平稳独立增量过程 性质 2：维纳过程是正态过程 性质 3：维纳过程是马尔可夫过程 性质 4：维纳过程是均方连续、均方不可导、均方可积的二阶矩过程 性质 5：维纳过程是非平稳过程，但为平稳增量过程
二维	$\big(W(s),W(t)\big)\sim N(\boldsymbol{0},C)\quad \boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},t>s$	$C=\begin{bmatrix}\sigma^2s&\sigma^2s\\\sigma^2s&\sigma^2t\end{bmatrix}$	
n维	$X=\begin{bmatrix}W(t_1)\\W(t_2)\\\vdots\\W(t_n)\end{bmatrix}\sim N(\boldsymbol{0},C)\quad \boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},0<t_1<\cdots<t_n$	$C=\begin{bmatrix}\sigma^2t_1&\sigma^2t_1&\cdots&\sigma^2t_1\\\sigma^2t_1&\sigma^2t_2&\cdots&\sigma^2t_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sigma^2t_1&\sigma^2t_2&\cdots&\sigma^2t_n\end{bmatrix}$	

3. 泊松过程

3.1 齐次泊松过程

<table>
<tr><th colspan="2">定义</th></tr>
<tr><td>取非负整数值的计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足：
$N(0)=0$；
具有独立增量；
$\forall 0\leq s<t, N(t)-N(s)$服从参数为$\lambda(t-s)$的泊松分布
$$P\{N(t)-N(s)=k\}=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)};$$
则随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$为$\{N(t),t\geq 0\}$。</td><td>取非负整数值的计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足：
$N(0)=0$；
具有平稳独立增量；
$P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h)$;
$P\{N(h)\geq 2\}=o(h)$;
则随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$为参数（或平均律、强度）为λ的（齐次）泊松过程。</td></tr>
<tr><td>一维概率密度函数
$$\forall t>0, N(t)\sim\mathcal{P}(\lambda t),\qquad P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\qquad k=0,1,2,\cdots$$</td><td>二维概率分布
$$P\{N(s)=j,N(t)=k\}=\frac{\lambda^k s^j(t-s)^{k-j}}{j!\,(k-j)!}e^{-\lambda t},\qquad 0<s<t$$</td></tr>
<tr><td>均值函数 $m(t)=\lambda t$
方差函数 $D(t)=\lambda t$
一维特征函数 $\varphi(u)=e^{\lambda t}\left(e^{iu}-1\right)$</td><td>协方差函数 $C(s,t)=\lambda\min(s,t)$
相关函数 $R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$</td></tr>
<tr><td colspan="2">性质 1：泊松过程是平稳独立增量过程
性质 2：泊松过程是马尔可夫过程
性质 3：泊松过程是生灭过程
性质 4：泊松过程是均方连续、均方不可导、均方可积的二阶矩过程
性质 5：泊松过程是是非平稳过程，但为平稳增量过程
性质 6：设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，$\{T_n,n=1,2,\cdots\}$为点间间距序列，表示事件第$n-1$次出现到第n次出现之间的点间间距，$T_n=\tau_n-\tau_{n-1}$，则$T_n,n=1,2,\cdots$是相互独立同分布的随机变量，且都服从参数为λ的指数分布，即$\boldsymbol{T_n\sim\Gamma(1,\lambda)}$
性质 7：设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，$\{\tau_n,n=1,2,\cdots\}$为等待时间序列，表示事件第n次出现的等待时间，$\tau_n=\sum_{i=1}^n T_i$，则τ_n服从参数为(n,λ)的 Gamma 分布，即$\boldsymbol{\tau_n\sim\Gamma(n,\lambda)}$，即概率密度函数为$f(t)=\begin{cases}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>更新计数过程：
设$\{N(t),t\geq 0\}$是一个计数过程，如果它的点间间距T_n，是相互独立同分布的随机变量，称此过程为更新计数过程，称点间间距为更新间距。
均值函数 $m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F_{\tau_k}(t)$
更新强度 $\lambda(t)={dm(t)}/{dt}=\sum_{k=1}^{\infty}f_{\tau_k}(t)$</td><td>更新计数过程的分布函数：
1. 有点间间距T的特征函数$\varphi_T(u)$，计算到达时间$\tau_k=\sum_{i=1}^k T_k$的特征函数$\varphi_{\tau_k}(u)=[\varphi_T(u)]^k$；
2. 由特征函数$\varphi_{\tau_k}(u)$确定概率密度函数$f_{\tau_k}(t)$和概率分布函数$F_{\tau_k}(t)$；
3. 由概率分布函数$F_{\tau_k}(t)$确定更新计数过程的分布函数$F_{N(t)}(k)=1-F_{\tau_k}(t)$。</td></tr>
</table>

3.2 非齐次泊松过程

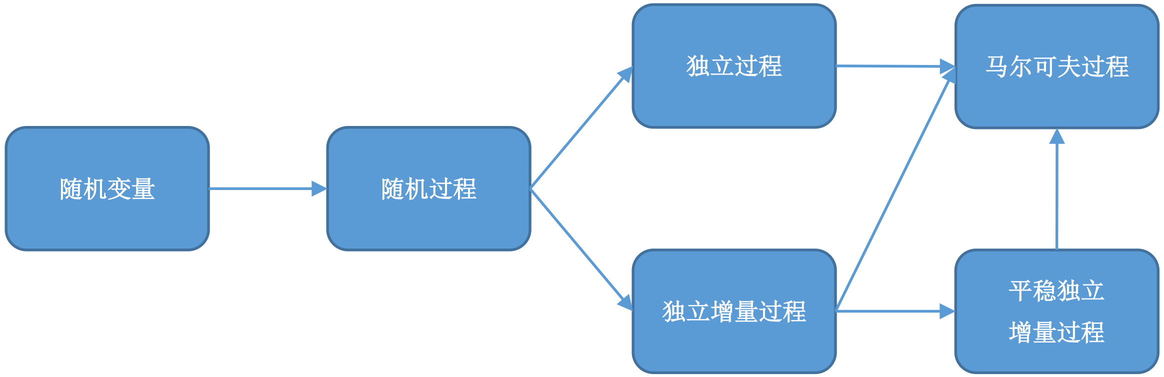
定义	定理
如果计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足： 1. $N(0)=0$； 2. $\{N(t),t\geq 0\}$是一个独立增量过程； 3. $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda(t)+o(\Delta t)$； 4. $P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t)$ 称为非齐次泊松过程，$\lambda(t)$为强度或平均率。当$\lambda(t)=\lambda$时，称为齐次泊松过程。	若$\{N(t),t\geq 0\}$是非齐次泊松过程，且$\lambda(t)$为连续函数，则在时间间距$[t_0,t_0+t)$内事件A出现k次的概率为 $$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k\}=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]},\qquad k=0,1,\cdots$$ 其中$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$

3.3 复合泊松过程

定义	定理
设$\{N(t),t\geq 0\}$是平均率（强度）为λ的（齐次）泊松过程，$Y_n,n=1,2,\cdots$是相互独立且都服从分布Y的随机变量序列，且$\{N(t),t\geq 0\}$与$\{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}$相互独立，令 $$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$$ 称$\{X(t),t\geq 0\}$为复合泊松过程。 若Y是离散型随机变量，则$\{X(t),t\geq 0\}$称为广义泊松过程； 若Y是连续型随机变量，则$\{X(t),t\geq 0\}$称为复合泊松过程；	设$\{X(t),t\geq 0\}$为复合泊松过程，$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n$，其中$\{N(t),t\geq 0\}$是平均率为$\lambda$的泊松过程，$Y_n,n=1,2,\cdots$是相互独立且都服从分布$Y$，$Y$的特征函数为$\varphi_Y(u)$，则 1. 特征函数 $\varphi_X(t,u)=e^{\lambda t[\varphi_Y(u)-1]}$ 2. 均值函数 $m_X(t)=E[N(t)]E[Y]=\lambda tE[Y]$ 3. 方差函数 $D_X(t)=\lambda tE[Y^2]=E[N(t)]E[Y^2]$

3.4 过滤的泊松过程

定义	定理
设随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$定义为 $$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}h(t-u_k)$$ 其中$h(t)$为线性时不变系统中的脉冲响应，在时刻u_k发生的事件，在时刻t产生一个输出为$h(t-u_k)$，$\{N(t),t\geq 0\}$表示事件在$[0,t)$内发生次数是一个平均律为λ的泊松过程，随机变量u_k是在$[0,t)$中发生事件的无次序达到时刻，则此随机过程称为过滤的泊松过程	设$\{X(t),t\geq 0\}$为过滤的泊松过程，则 1. 数学期望 $E[X(t)]=\lambda\int_0^t h(v)dv$ 2. 相关函数 $R_X(t,t-\tau)=\lambda\int_0^t h(v)h(v-\tau)dv+\lambda^2\left[\int_0^t h(v)dv\right]^2$ 3. 协方差函数 $C_X(t,t-\tau)=\lambda\int_0^t h(v)h(v-\tau)dv$



马尔可夫过程		参数集T	
		离散	连续
状态空间E	离散	离散参数马氏链	连续参数马氏链
	连续	连续参数马氏序列	连续参数马氏过程

1. 马尔可夫过程

定义 1

随机过程$\{X(t), t \in T\}$，如果对于参数中任意n个时刻$t_i, i = 1, \cdots, n, t_1 < \cdots < t_n$有

$$P\{X(t_n) < x_n | X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

则称随机过程为**马尔可夫过程**，简称**马氏过程**。

$$F(x_n; t_n | x_1, \cdots, x_{n-1}; t_1, \cdots, t_{n-1}) = F(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1})$$

$$f(x_n; t_n | x_1, \cdots, x_{n-1}; t_1, \cdots, t_{n-1}) = f(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1})$$

定义 2

马氏过程$\{X(t), t \in T\}$条件概率

$$p(s, t; x, y) = P\{X(t) < y | X(s) = x\}$$

称为马氏过程的**转移概率函数**。

2. 齐次马尔可夫链

定义 1:

设$\{X(n), n = 0,1,2,\cdots\}$为随机序列，状态空间为$E = \{0,1,2,\cdots\}$，如果对于任意非负整数$k$及$n_1 < \cdots < n_l < m$以及$i_{n_1}, i_{n_2}, \cdots, i_{n_l}, i_m, i_{m+k} \in E$，马尔可夫性

$$P\left\{X(m+k) = i_{m+k} | X(n_1) = i_1, \cdots, X(n_l) = i_{n_l}, X(m) = i_m\right\}$$
$$= P\{X(m+k) = i_{m+k} |\}$$

成立，则称其为离散参数**马尔可夫链**，简称**马氏链**。

定义 2:

设$\{X(n), n = 0,1,2,\cdots\}$为马氏链，$E = \{0,1,2,\cdots\}$，称条件概率

$$p_{ij}(m, k) = P\{X(m+k) = j | X(m) = i\}$$

为马氏链在m时刻的$\boldsymbol{k}$**步转移概率**。

即质点于时刻m处于状态i，再经过k步（k个单位时间）处于状态j的条件概率。

特别地，$k = 1$时，称为**一步转移概率**，简称**转移概率**

定义 3:

称矩阵

$$P(m,k) = \left(p_{ij}(m,k)\right) = \begin{bmatrix} p_{00}(m,k) & p_{01}(m,k) & \cdots & p_{0n}(m,k) \\ p_{10}(m,k) & p_{11}(m,k) & \cdots & p_{1n}(m,k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n0}(m,k) & p_{n1}(m,k) & \cdots & p_{nn}(m,k) \end{bmatrix}$$

为马氏链在时刻m的$\boldsymbol{k}$**步转移矩阵**，一步转移矩阵$P(m,1)$简称为**转移矩阵**。

定义 4:

若马氏链$\{X(n), n = 0,1,2,\cdots\}$的转移概率$p_{ij}(m,k)$与$m$无关，即

$$p_{ij}(m,k) = P\{X(m+k) = j | X(m) = i\} = p_{ij}(k)$$

$$p_{ij}(m,1) = P\{X(m+1) = j | X(m) = i\} = p_{ij}(1)$$

则称为**齐次马尔可夫链**，简称**齐次马氏链**。

齐次马氏链的k步转移矩阵记为$P(m,k) = P(k) = \left(p_{ij}(k)\right) \quad i, j \in E$

独立同分布的离散随机变量序列$\{X(n), n = 0,1,2,\cdots\}$是齐次马氏链。

性质 1： 齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的转移概率$p_{ij}(k)$满足 **C-K 方程** $p_{ij}(k+l)=\sum_{r\in E}p_{ir}(k)p_{rj}(l)$或$P(k+l)=P(k)P(l)$	**性质 2：** 齐次马氏链的n步转移矩阵等于一步转移矩阵的n次方，即 $P(n)=P^n$
定义 5： 给定齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$，称 $p_i=P\{X(0)=i\}\quad i\in E$ 即$X(0)$的概率密度分布为齐次马氏链的**初始分布**，记 $\tilde{P}_0=(p_i,i\in E)$	**定义 6：** 给定齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$，称 $p_i(n)=P\{X(n)=i\}\quad i\in E$ 即$X(n)$的概率密度分布为齐次马氏链的**绝对分布**，记 $\tilde{P}_n=(p_i(n),i\in E)$
性质 3： 绝对分布由初始分布和转移概率确定，且满足 $p_j(n)=\sum_{i\in E}p_ip_{ij}(n)$ 或记为 $\tilde{P}_n=\tilde{P}_0P^n$	**性质 4：** 齐次马氏链的有限维分布由初始分布和转移概率确定，且满足 $P\{X(n_1)=i_1,\cdots,X(n_k)=i_k\}=\sum_{i\in E}p_ip_{ii_1}(n_1)p_{i_1i_2}(n_2-n_1)\cdots p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$ 其中$P\{X(n_1)=i_1,\cdots,X(n_k)=i_k\}$为齐次马氏链的$k$维概率分布。
定义 7： 齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$，如果对于一切状态i和j，存在与i无关的极限 $\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)=\pi_j>0\quad i,j\in E$ 则称次马氏链具有**遍历性**。 如果$\pi_j>0,j\in E$且$\sum_{j\in E}\pi_j=1$，则称$\Pi=\{\pi_j>0,j\in E\}$为**极限分布**或**最终分布**。	**性质 5：** 设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$E=\{1,\cdots,s\}$有限，若存在正整数n_0，对任意$i,j\in E$，n_0步转移概率$p_{ij}(n_0)>0$，则此链式遍历的，且极限分布$\{\pi_j,j\in E\}$等于平稳分布，是下列方程的唯一解。 $\begin{cases}\pi_j=\sum_{i=1}^{s}\pi_i\,p_{ij}\\ \pi_j>0,\sum_{j\in E}\pi_j=1\end{cases}$
定义 8： 齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$若存在$\{v_j,j\in E\}$满足下列条件 1. $v_j>0,j\in E$ 2. $\sum_{j\in E}v_j=1$ 3. $v_j=\sum_{i=1}^{s}v_i\,p_{ij}$ 则称此**马氏链是平稳**的，称$\{v_j,j\in E\}$是此马氏链的**平稳分布**。	**推论：** 设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$具有遍历性，则 $\lim_{n\to\infty}p_j(n)=\pi_j,\quad j\in E$ 即遍历的齐次马氏链的绝对分布于转移概率具有相同的极限。
性质 7： 设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的平稳分布为$\{v_j,j\in E\}$，则有 $V=VP^n$	**性质 8：** 如果齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的初始分布$\{p_j,j\in E\}$恰好是平稳分布，则对一切n有 $p_j(n)=p_j,\quad n=0,1,2,\cdots,j\in E$ 即$\tilde{P}_n=\tilde{P}_0$

3. 齐次马氏链状态分类

定义 1： 如果存在某一个$n \geq 1$，使得$p_{ij}(n) > 0, i, j \in E$，则称自状态$i$**可到达状态**$j$，记为$i \to j$；否则称状态$i$**不能到达状态**$j$，记为$i \nrightarrow j$，此时对一切$n$，均有$p_{ij}(n) = 0$。	**定理 1：** 互通关系具有以下性质 (1) **自返性** $i \leftrightarrow i$； (2) **对称性** 若$i \leftrightarrow j$，则$j \leftrightarrow i$； (3) **传递性** 若$i \leftrightarrow k$且$k \leftrightarrow j$，则$i \leftrightarrow j$。
定义 2： 如果$i \to j$且$j \to i$，则称状态i和j**互通**，或称**相通**，记为$i \leftrightarrow j$。	**定理 2：** 对任意$i, j \in E$，及$n \geq 1$，有 $$p_{ij}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(m) p_{jj}(n-m)$$
定义 3： 从状态i出发经过n步首次到达状态j的时刻称为**首达时刻**，记为 $$T_{ij} = \min\{n; X(m) = i, X(n+m) = j, n \in N\}$$	**定理 3：** $f_{ij} > 0$的充分必要条件是$i \leftrightarrow j$ $i \leftrightarrow j$的充分必要条件是$f_{ij} > 0$且$f_{ji} > 0$
定义 4： 从状态i出发经过n步首次到达状态j的概率称为**首达概率**，记为 $$f_{ij}(n) = P\{T_{ij} = n \mid X(m) = i\}$$ $$= P\{X(m+n) = j, X(m+k) \neq j, 1 \leq k < n \mid X(m) = i\}$$	**定理 4：** 状态j常返的充要条件是$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = +\infty$ 状态j非常返的充要条件是$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < +\infty$ 若状态j是非常返的，则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}(n) = 0$
定义 5： 从状态i出发经过n步**最终到达**状态j的概率定义为 $$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_{ij} = n \mid X(m) = i\} = P\{T_{ij} = n < +\infty\}$$ 当$j = i$时，T_{ii}表示从状态i出发**首次返回状态i的时刻**； $f_{ii}(n)$表示从状态i出发经过n步**首次返回i的概率**； f_{ii}表示状态i出发**迟早返回i的概率**，$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) = P\{T_{ii} < +\infty\}$。	**定理 5：** 设i是常返状态，则i是零常返的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$， 如果$j$也是零常返状态，则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$
定义 6： $\mu_{ij} = E(T_{ij}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n)$称为自$i$出发首次到达$j$的**平均时间（步数）**； $\mu_i = \mu_{ii} = E(T_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)$称为自$i$出发首次返回$i$的**平均返回时间（步数）**。 **定义 7：** 如果$f_{ii} = 1$，称i是**常返状态**；如果$f_{ii} < 1$，称i是**非常返状态**，或**瞬时状态**。	**定理 6：** 如果$i \to j$，则它们同为常返或非常返； 如果它们均为常返时，则它们同为正常返或零常返。 (1) i是非常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < +\infty$，此时$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$； (2) i是零常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$； (3) i是正常返$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) \neq 0$。

定义 8： 设i是常返状态，$f_{ii}=1$， (1) 如果$\mu_i<+\infty$，称状态i是一个**正常返状态**； (2) 如果$\mu_i=+\infty$，称状态i是一个**零常返状态**或**消极常返状态**。	**定理 7：** 所有常返状态构成一个闭集。 因此从常返态出发，不可能转移到非常返状态上去。
定义 9： 设C是状态空间E的一个子集，若C外的任一状态不可能从C内的任一状态到达，即对任意$i\in C,j\notin C$，总有$p_{ij}(n)=0$，称C为一个**闭集**。 (1) 整个状态空间E是最大的闭集； (2) $p_{ii}=1$的状态i称为**吸收状态**，任何一个吸收状态构成最小的单点闭集。	**定理 8：** 状态空间E必可分解为 $$E=N+C_1+\cdots+C_k+\cdots$$ 其中N是非常返状态集合，$C_1+\cdots+C_k+\cdots$是互不相交的常返闭集。
定义 10： 一个马氏链，如果除了整个状态空间E构成闭集外，不可能再分解出较小的闭集来，称此马氏链为**不可约马氏链**。	**定理 9：** 马氏链为不可约马氏链的充要条件是任何两个状态都相通。
定义 11： 当一个马氏链的状态空间是一个有限集合时，称此马氏链为**有限马氏链**。 (1) 所有非常返状态组成的集合不可能是闭集； (2) 没有零常返状态； (3) 必有正常返状态； (4) 状态空间可分解为$E=N+C_1+\cdots+C_k$	**定理 10：** 一个不可约马氏链，或者没有非常返状态，或者没有常返状态。 **定理 11：** 不可约马氏链是常返的充要条件是方程组 $$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}y_jp_{ij}$$ 没有非零的有界解。
定义 12： 状态i的**周期**定义为 $$d=G\cdot C\cdot D\{n:p_{ii}(n)>0\}$$ 其中$G\cdot C\cdot D$表示最大公约数 如果i有周期$d>1$时，则只有$n=d,2d,\cdots,kd$（k为正整数）时，$p_{ii}(n)>0$；否则当n不能被d整除时，$p_{ii}(n)=0$。 如果不存在大于 1 的整数d，称状态i是非周期的，记为$d=1$。 不可约马氏链，若$p_{ii}>0$，则此马氏链是**非周期**的。	**定理 12：** 如果$i\leftrightarrow j$，则状态i和j或者有相同的周期，或者都是非周期的。 如果C是一个常返闭集，则C中每一个状态，或者都是非周期的，或者都是同周期的状态。 如果马氏链是不可约常返链，那么只要有一个周期为$d(d>1)$的状态，则状态空间E都是周期为d的状态。
定理 13： 如果j是一个非周期常返状态，则$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(n)={f_{ij}}/{\mu_j}$ 如果马氏链是不可约非周期常返链，则$\lim\limits_{n\to\infty}p_{jj}(n)={1}/{\mu_j}$ 其中$\mu_j=E(T_{jj})$	(1) 不可约非周期正常返状态的齐次马氏链是遍历马氏链，且极限分布$\pi_j={1}/{\mu_j}$是唯一的平稳分布，且绝对分布的极限是平稳分布； (2) 不可约非周期常返链是遍历链的充要条件是存在平稳分布${1}/{\mu_j}$，即极限分布； (3) 不可约非周期有限马氏链必存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布

4. 连续参数马尔可夫链

定义 1： 设$\{X(t),t\geq 0\}$，状态空间为$E=\{0,1,2,\cdots\}$，如果对$0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}$及非负整数及$i_1,i_2,\cdots,i_{n_l},i_{n+1}$，有 $P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_n)=i_n\}$ 成立，则称其为**连续参数马尔可夫链**。	**性质 1：** $0\leq p_{ij}\leq 1,\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=1$
定义 2： 设$\{X(t),t\geq 0\}$为连续参数马氏链，对任意$i,j\in E$，任意的非负实数s,t，条件概率 $p_{ij}(s,t)=P\{X(t+s)=j\mid X(s)=i\}$ 称为此马氏链的**转移概率函数**，$P(s,t)=\left(p_{ij}(s,t)\right)$称为马氏链的**转移矩阵**。	**性质 2：** $p_{ij}(t)$满足 **C-K 方程** $p_{ij}(t+s)=\sum_{r\in E}p_{ir}(t)p_{rj}(s)$ 矩阵形式 $P(t+s)=P(t)P(s)$
定义 3： 如果连续参数马氏链$\{X(t),t\geq 0\}$的转移概率$p_{ij}(s,t)$与时间起点s无关，即 $p_{ij}(s,t)=P\{X(t+s)=j\mid X(s)=i\}=p_{ij}(t)$ 则称其为**连续参数齐次马氏链**。$P(t)=\left(p_{ij}(t)\right)$称为齐次马氏链的**转移矩阵**。 齐次马氏链的转移函数需满足**连续性条件**： $\lim_{t\to 0^+}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$	**性质 3：** 绝概率满足 $p_j(t)=\sum_{i\in E}p_ip_{ij}(t),(j\in E)$ 如果齐次马氏链$\{X(t),t\geq 0\}$为遍历马氏链，则 $\lim_{t\to+\infty}p_j(t)=\lim_{t\to+\infty}p_{ij}(t)=\pi_j,(j\in E)$
定义 4： 设$\{X(t),t\geq 0\}$为连续参数齐次马氏链， $p_j=P\{X(0)=j\}$称为该马氏链的**初始分布**； $p_j(t)=P\{X(t)=j\}$称为该马氏链的**绝对分布**。 **定义 5：** 设$\{X(t),t\geq 0\}$为连续参数齐次马氏链，如果转移概率极限存在 $\lim_{t\to+\infty}p_{ij}(t)=\pi_j>0,(i,j\in E)$ 且与i无关，则称此连续参数齐次马氏链为**遍历的马氏链**，称该链具有**遍历性**。	**性质 4：** 设齐次马氏链$\{X(t),t\geq 0\}$的状态有限，$E=\{0,1,2,\cdots\}$，如果存在$t_0>0$，使得对一起$i,j\in E$都有$p_{ij}(t_0)>0$，则该链为遍历的齐次马氏链，即 $\lim_{t\to+\infty}p_{ij}(t)=\pi_j,(j\in E)$ 存在且与i无关，并且极限分布$\{\pi_j,j\in E\}$是唯一的平稳分布： $\pi_j>0,\sum_{j\in E}\pi_j=1,\pi_j=\sum_{i\in E}\pi_ip_{ij}(t)$
定义 6： 如果$\{v_j,j\in E\}$满足$\begin{cases}v_j\geq 0,\sum_{j\in E}v_j=1\\v_j=\sum_{i\in E}v_ip_{ij}(t)\end{cases}$，则称$\{v_j,j\in E\}$为连续参数齐次马氏链$\{X(t),t\geq 0\}$的平稳分布。	**性质 5：** 对固定的i,j，函数$p_{ij}(t)>0$是$t>0$的一致连续函数。

定义 7：

设连续参数齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，状态空间 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，下列矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} -q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0s} \\ q_{10} & -q_{11} & \cdots & q_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{s0} & q_{s0} & \cdots & -q_{ss} \end{bmatrix}$$

称为该链的**状态转移速度矩阵**，简称$\boldsymbol{Q}$**矩阵**。

由连续性条件和导数定义，有

$$p'_{ij}(+0) = \begin{cases} -q_{ii}, & i = j \\ q_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

即
$$P'(+0) = Q$$

性质 6：

满足连续性条件的连续参数齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，存在下列界限：

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = q_{ii} \triangleq q; \lim_{t \to 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij}, i \neq j$$

其中q_i表示在时刻t市通过状态i的**通过速度**（**通过强度**）；q_{ij}表示时刻t时从状态i转移到状态j的**速度**（**强度**）。q_i, q_{ij}统称为**转移速度**。

性质 7：

设连续参数齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，状态空间 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，其转移速度

$$q_{ij} > 0, q_{ii} = \sum_{j \neq i \in E} q_{ij}$$

性质 8：

设连续参数齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，当$q_j < +\infty, \sum_{j \neq i \in E} q_{ij} = q_i$时，满足**科尔莫戈罗夫后退微分方程**

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i \in E} q_{ik} p_{kj}(t)$$

即
$$P'(t) = QP(t)$$

性质 9：

设连续参数齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，当$q_j < +\infty, \lim_{t \to 0^+} {p_{ij}(t)}/{t} = q_{ij}$，对一致$i$成立，则有**科尔莫戈罗夫前进微分方程**

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k \neq i \in E} p_{ik}(t) q_{kj}$$

即
$$P'(t) = P(t)Q$$

性质 10：

绝对概率满足**福克-普朗克方程**

$$p'_j(t) = -p_j(t) + \sum_{r \neq j \in E} p_r(t) q_{rj}$$

性质 11：

齐次不可约连续参数马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$存在极限分布，即为平稳分布$\left\{\pi_j, j \in E\right\}$

$$-\pi_j q_j + \sum_{i \neq j \in E} \pi_i q_{ij} = 0$$

即
$$\Pi Q = 0$$

5. 生灭过程

设连续参数齐次马氏链$\{X(t), t \geq 0\}$，状态空间 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，如果它的状态转移速度矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1} + \mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\ & & & & & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix}$$

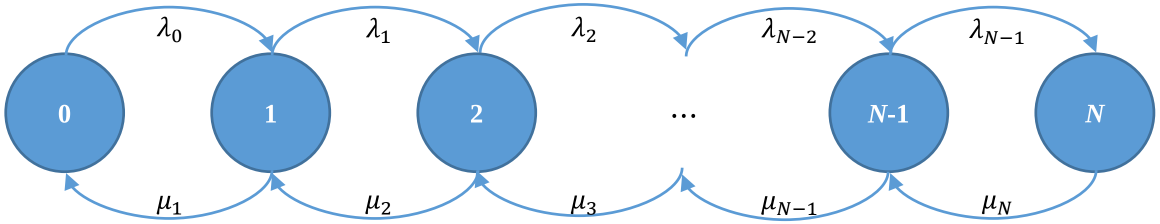
称$\{X(t), t \geq 0\}$为**生灭过程**。

生灭过程可等价地用$p_{ij}(t)$满足下列各式来表达：

$$\begin{cases} p_{ii+1}(t)=\lambda_i t+o(t), & (\lambda_i>0, i=0,1,\cdots,N-1, \lambda_N=0) \\ p_{ii-1}(t)=\mu_i t+o(t), & (\mu_i>0, i=1,2,\cdots,N, \mu_0=0) \\ p_{ii}(t)=1-(\mu_i+\lambda_i)t+o(t), & \text{none} \\ p_{ij}(t)=o(t), & |i-j|\geq 2 \end{cases}$$

1. $i\to i+1$，状态增加 1，群体“生”了一个个体，其概率为$\lambda_i t$，其“生长率”为λ_i；
2. $i\to i-1$，状态减少 1，群体“死”了一个个体，其概率为$\mu_i t$，其“死亡率”为μ_i；
3. $i\to i$，状态不变，群体个数不变，其概率为$1-(\lambda_i+\mu_i)t$；
4. 状态增加或减少 2 个或 2 个以上的概率为 0。

状态转移速度图



后退方程：

$$P'(t)=QP(t), P(+0)=I$$

$$\begin{cases} p'_{ij}(t)=-(\lambda_i+\mu_i)p_{ij}(t)+\lambda_i p_{i+1,j}(t)+\mu_j p_{i-1,j}(t) \\ p'_{0j}(t)=-\lambda_0 p_{0j}(t)+\lambda_0 p_{1j}(t) \\ p'_{Nj}(t)=-\mu_N p_{N,j}(t)+\lambda_{N-1}p_{N-1,j}(t) \end{cases}$$

前进方程：

$$P'(t)=P(t)Q, P(+0)=I$$

$$\begin{cases} p'_{ij}(t)=-p_{ij}(t)(\lambda_j+\mu_j)+p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1}+p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1} \\ p'_{i0}(t)=-\lambda_0 p_{i0}(t)+\mu_1 p_{i1}(t) \\ p'_{iN}(t)=-\mu_N p_{iN}(t)+\lambda_{N-1}p_{i,N-1}(t) \end{cases}$$

福克-普朗克方程：

$$\begin{cases} p'_j(t)=-p_j(t)(\lambda_j+\mu_j)+p_{j-1}(t)\lambda_{j-1}+p_{j+1}(t)\mu_{j+1} \\ p'_0(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \\ p'_N(t)=-\mu_N p_N(t)+\lambda_{N-1}p_{N-1}(t) \end{cases}$$

当$\mu_i=0$时，生灭过程是**纯生过程**，即“灭”是不可能的；

当$\lambda_i=0$时，生灭过程是**纯灭过程**，即“生”是不可能的。

平稳分布：

有限状态$E=\{0,1,2,\cdots\}$的生灭过程$\{X(t),t\geq 0\}$是遍历的齐次连续参数马氏链，生灭过程存在极限分布即为平稳分布$\Pi=\{\pi_j, j\in E\}$

$$\Pi Q=0$$

$$\begin{cases} -(\lambda_j+\mu_j)\pi_j+\lambda_{j-1}\pi_{j-1}+\mu_{j+1}\pi_{j+1}=0 \\ -\lambda_0\pi_0+\mu_1\pi_1=0 \\ -\mu_N\pi_N+\lambda_{N-1}\pi_{N-1}=0 \\ \sum_{j\in E}\pi_j=1 \end{cases}$$

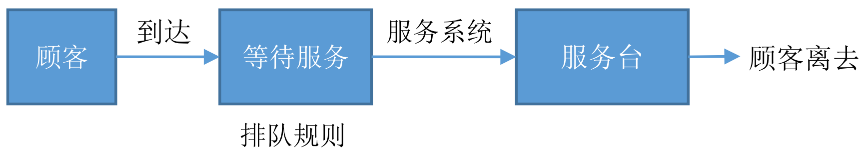
解得生灭过程的平稳分布为

$$\begin{cases} \pi_0=\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1} \\ \pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0, \pi_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0, \cdots \\ \pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0 \end{cases}$$

递推公式 $\mu_j\pi_j=\lambda_{j-1}\pi_{j-1}$

6. 排队论

排队服务的系统模型：



随机服务系统的组成部分：

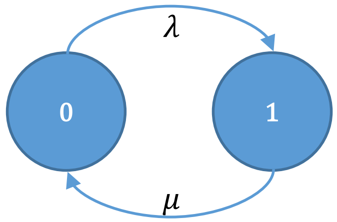
1. 输入过程：泊松过程 M；定长输入 D
2. 排队规则：损失制；先到先服务 FIFO；后到先服务 LIFO；随机选择服务 SIRO；优先服务；
3. 服务过程

输入过程/服务分布/服务台个数/系统容量/顾客源数/排队规则

1. 损失制排队模型

a. M/M/1 损失制

顾客按**泊松过程**到达，**平均律（强度）为λ，时间间距**服从**参数为λ的指数分布，服务时间**服从**参数为μ的指数分布，服务强度为μ**，只有**一个**服务员，当顾客来到服务系统时，若服务台已被占用，顾客立即离开系统。



状态转移速度矩阵：

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{bmatrix}$$

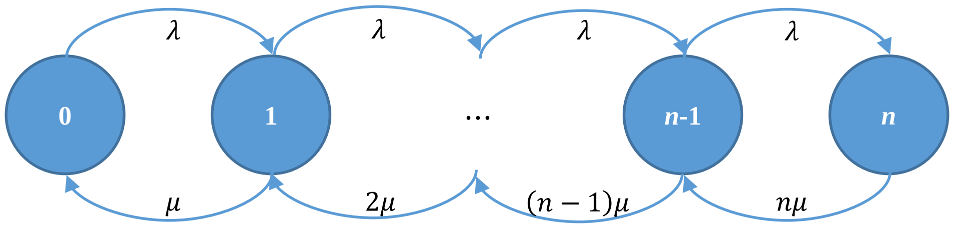
平稳分布：

$$\Pi Q=0,\sum_{k=0}^{n}\pi_k=1$$

$$\begin{cases}\pi_{闲}=\pi_0=\dfrac{\mu}{\mu+\lambda}\\ \pi_{损}=\pi_1=\dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}\end{cases}$$

b. M/M/n 损失制

顾客按**泊松过程**到达，服务时间服从**指数分布**，有$\boldsymbol{n}$个服务员。



状态转移速度矩阵：

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & n\mu & -n\mu\end{bmatrix}$$

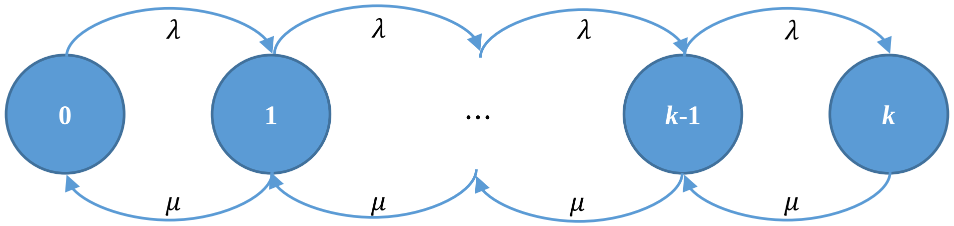
平稳分布：

$$\begin{cases}\pi_{闲}=\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}\\ \pi_{损}=\pi_1=\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0\end{cases}$$

2. 等待制系统排队模型

a. M/M/1 等待制系统

顾客按**泊松过程**到达，平均律（强度）为λ，**服务时间**服从**指数分布**，**服务强度为μ**，只有**一个**服务员，当顾客来到系统时，若服务台已被占用，顾客就排队等待，顾客总体为**无限源**。



$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \cdots \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}=\left[\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]^{-1}=1-\rho \\ \pi_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0=\rho^k(1-\rho) \end{cases}$$

其中$\rho={}^{\lambda}/_{\mu}$称为系统负荷率，用来衡量系统工作强度。

(1) 系统空闲的概率和系统忙期的概率

系统空闲概率即没有顾客来到系统要求服务的概率

$$\pi_{闲}=\pi_0=1-\rho$$

$$\pi_{忙}=1-\pi_0=\rho$$

(2) 顾客在系统逗留的平均数L_s

包括等待服务和正在接受服务的人数

$$L_s=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\pi_0=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

(3) 顾客在系统内排队等待的平均数L_q

$$L_q=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k-\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k=L_s-(1-\pi_0)=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

(4) 顾客在系统内平均逗留时间W_s

顾客来到系统的平均时间间隔$1/\lambda$和顾客平均逗留数L_s的乘积

$$W_s=\frac{1}{\lambda}L_s=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

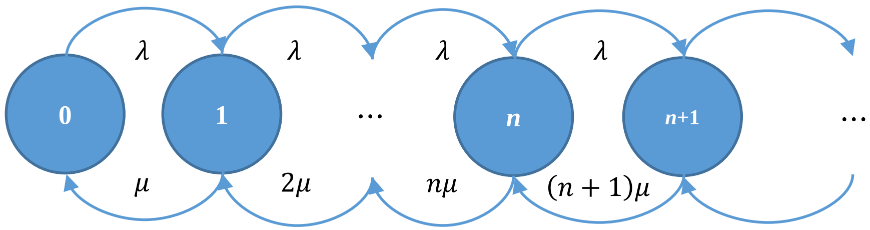
(5) 顾客在系统中平均等待时间W_q

顾客来到系统的平均时间间隔$1/\lambda$和顾客平均等待时间L_q的乘积

$$W_q=\frac{1}{\lambda}L_q=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

b. M/M/n 等待制系统

顾客按**泊松过程**输入，平均律为λ，服务时间服从**负指数分布**（服务强度为μ），二者相互独立；有**n个**服务员的等待制系统，服务规则是先到先服务，顾客为**无限源**，设$\lambda<n\mu$



平稳分布：

$$\begin{cases} \pi_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0, & 0<k<n \\ \pi_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\pi_0, & k=n \\ \pi_k=\frac{1}{n^{k-n}}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0, & k>n \end{cases},\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!\left(1-\frac{\lambda}{n\mu}\right)}\right]^{-1}$$

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & \\ & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & n\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \\ & & & & n\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

(1) 顾客排队等待时间

$$L_q=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}\pi_0$$

(2) 顾客在系统逗留平均数

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$$

(3) 每个顾客在系统内平均逗留时间

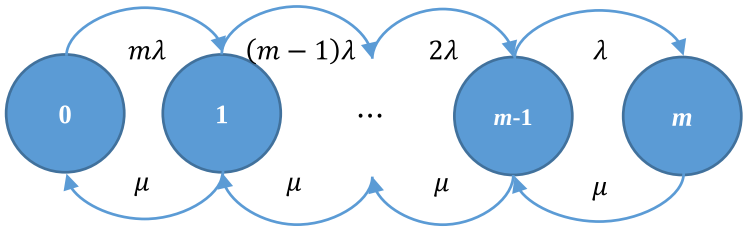
$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}$$

(4) 每个顾客在系统内平均排队等待时间

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$$

c. M/M/1 顾客为有限源等待制

每个顾客独立地来到系统的时间间距服从**指数分布**，单位时间平均数为λ，服务时间按**指数分布**，平均律为μ，有一个服务员，顾客总数为m，先到先服务。



$$Q=\begin{bmatrix}-m\lambda & m\lambda & & & & & \\ \mu & -[(m-1)\lambda+\mu] & (m-1)\lambda & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \mu & -(2\lambda+\mu) & 2\lambda & \\ & & & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & & & & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}\\ \pi_m=\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\pi_0\\ \pi_k=\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0\end{cases}$$

(1) 顾客在系统逗留平均数

$$L_s=m-\frac{\mu}{\lambda}(1-\pi_0)$$

(2) 顾客在系统等待的平均数

$$L_q=L_s-(1-\pi_0)$$

(3) 顾客在系统逗留的平均时间

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}$$

(4) 顾客平均等待时间

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}=\frac{L_q}{\lambda(m-L_s)}$$

(5) 设备（“顾客”）处于正常运行的台数

$$K=m-L_s$$

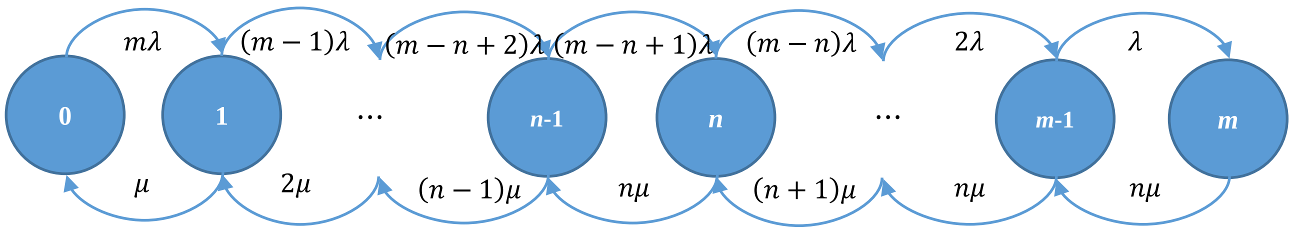
(6) 设备利用率

$$\tau=\frac{m-L_s}{m}$$

其中$\lambda_e=\lambda(m-L_s)=\mu(1-\pi_0)$为系统外的顾客平均到来律。

d. M/M/n 顾客为有限源等待制

顾客各自独立到达系统的时间间距服从**平均律为λ的指数分布**，服务时间是**平均律为μ的指数分布**，有$\boldsymbol{n}$**个**服务员，顾客总数为m，先到先服务，$n < m$。



$$Q = \begin{bmatrix} -m\lambda & m\lambda & & & & & & \\ \mu & -[(m-1)\lambda+\mu] & (m-1)\lambda & & & & & \\ & 2\mu & -[(m-2)\lambda+2\mu] & (m-2)\lambda & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & n\mu & -[(n-1)\lambda+n\mu] & (n-1)\lambda & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & n\mu & -n\mu \end{bmatrix}$$

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0, & 0 \le k \le n \\ \dfrac{1}{n^{k-n}}\dfrac{m!}{n!\,(m-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0, & n < k < m \\ \dfrac{1}{n!}\dfrac{m}{n^{m-n}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^m \pi_0, & k = m \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} C_m^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{n^{k-n}}\frac{m!}{n!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}$$

(1) 顾客在系排队等待的平均数

$$L_q = \sum_{k=n}^{m}(k-n)\pi_k$$

(2) 顾客在系统逗留的平均数

$$L_s = \sum_{k=1}^{m} k\pi_k$$

(3) 设备（“顾客”）正常运行的台数

$$K = m - L_s$$

(4) 设备利用率

$$\tau = \frac{K}{m} = \frac{m - L_s}{m}$$

(5) 有效到来率

$$\lambda_e = \lambda K = \lambda(m - L_s)$$

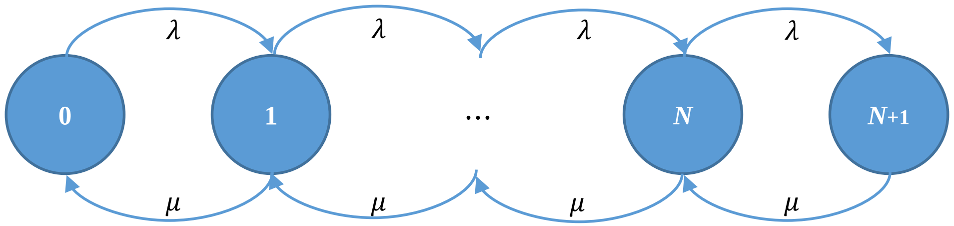
(6) 顾客在系统逗留的平均时间

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$$

3. 混合制系统

a. M/M/1 有限等待空间系统

顾客按**泊松过程**输入，**平均律为λ**；服务时间是**平均律为μ的指数分布**，一个服务员，先到先服务，顾客**排队最大数为N**，顾客来到系统而又容纳不下时，自动离去。



$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\pi_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0=\rho^k\pi_0,\pi_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}},\pi_{\text{损}}=\pi_{N+1}=\rho^{N+1}\pi_0$$

(1) 顾客在系统逗留平均数

$$L_s=\sum\nolimits_{k=0}^{N}k\,\pi_k=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(N+2)\rho^{N+2}}{1-\rho^{N+2}}$$

(2) 顾客在系统排队等待的平均数

$$L_q=L_s-(1-\pi_0)=L_s+\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}}-1$$

(3) 每一顾客在系统逗留的平均时间

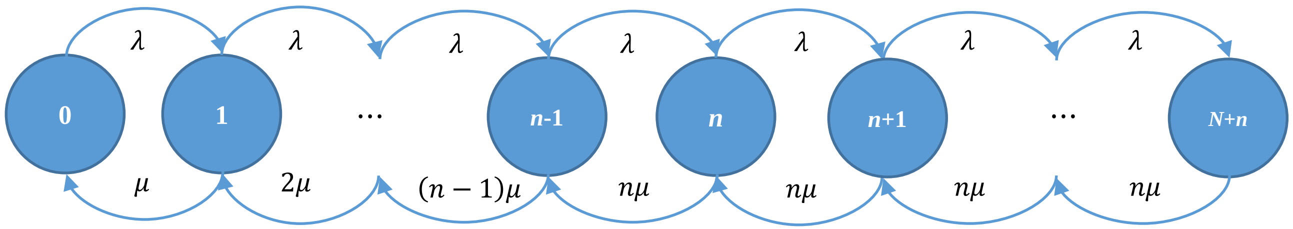
$$W_s=\frac{L_s}{\lambda(1-\rho^{N+1}\pi_0)}$$

(4) 每一顾客在系统等待的平均时间

$$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{L_q}{\lambda(1-\rho^{N+1}\pi_0)}$$

b. M/M/n 有限等待空间系统

顾客按**泊松分布**到达，服务时间服从**指数分布**，有$\boldsymbol{n}$**个**服务员，先到先服务，顾客**排队最大数为N**，当顾客来到系统而又容纳不下时，自动离去。



$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & n\mu & -(\lambda+n\mu) & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & n\mu & -n\mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_k=\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0, & k=1,\cdots,n \\ \pi_{n+k}=\dfrac{1}{n!\,n^k}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n+k}\pi_0, & k=1,\cdots,N \end{cases}$$

(1) 顾客在系统排队等待平均数

$$L_q=\frac{\rho^{N+1}\left[1-(N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N+N\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}\pi_0$$

(2) 顾客在系统逗留平均数

$$L_s=L_q+\rho\left(1-\frac{\rho^{N+n}}{n^N n!}\pi_0\right)$$

$\pi_0=\left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n\left[\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]}{n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}\right\}^{-1},\rho=\frac{\lambda}{\mu}$	(3) 每个顾客等待排队的平均时间 $W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{\rho^N\left[1-(N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N+N\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]}{n\lambda n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}\pi_0$ (4) 每个顾客在系统中逗留的平均时间 $W_s=W_q+\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{\rho^{N+n}}{n^N n!}\pi_0\right)$

1. 均方极限和均方连续

定义 1（随机序列的均方极限）：

设有随机序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$和随机变量X，且$E|X_n|^2<+\infty, E|X|^2<+\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n-X|^2=0$$

则称$\boldsymbol{X_n}$**均方收敛于**$\boldsymbol{X}$，称X是X_n的**均方极限**，记为

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n=X$$

性质 1：

均方极限是唯一的，即若$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n=X$且$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n=Y$，则$P\{X=Y\}=1$

性质 2：

若$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n=X$，则$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} E(X_n)=E\left(\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n\right)=E(X)$

性质 3：

若$\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_m=X, \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} Y_n=Y$，则$\underset{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}} E(X_mY_n)=E(XY)$

特别地，$\underset{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}} E(X_mX_n)=E(X^2)$

性质 4：

若$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n=X, \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} Y_n=Y$，则对任意常数$a,b$，有$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}(aX_n+bY_n)=aX+bY$

性质 5：

设$\{a_n\}$为普通数列，若$\lim_{n\to\infty} a_n=0$，则$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}(a_nX)=0$

性质 6（收敛准则）：

均方极限$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n$存在的充要条件是

$$\underset{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}{\mathrm{l.i.m.}}(X_m-X_n)=0$$

性质 7：

均方收敛必依概率收敛，即若$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_n=X$，则有$\lim_{n\to\infty} X_n=X\ \ (P)$

二阶矩过程：

一个随机过程$\{X(t), t\in T\}$，如果对任意的$t\in T$，有$E|X(t)|^2<+\infty$，称此过程为**二阶矩过程**，概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},P\}$上具有二阶矩的随机变量称为二阶矩随机变量，其全体记为H。H是完备的赋范线性空间（即 Banch 空间），也是完备的内积空间（即 Hilbert 空间）。

定义 2（随机过程的均方极限）：

给定二阶矩过程$\{X(t), t\in T\}$，X 为随机变量，$E|X(t)|^2<+\infty$，若

$$\lim_{t\to t_0} E|X(t)-X|^2=0$$

称$t\to t_0$时，$\boldsymbol{X(t)}$**均方收敛于**$\boldsymbol{X}$，也称$t\to t_0$时，$X(t)$的**均方极限**为X，记作

$$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X(t)=X$$

性质 1：

如果$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X(t)=X$，则$\lim_{t\to t_0} E[X(t)]=E\left[\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X(t)\right]=E(X)$

性质 2：

如果$\underset{s\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X(s)=X, \underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} Y(t)=Y$，则$\underset{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}}{\mathrm{l.i.m.}} E[X(s)Y(t)]=E(XY)$

性质 3：

如果$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X(t)=X, \underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} Y(t)=Y$，则对任意常数$a,b$有

$$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}}[aX(t)+bY(t)]=aX+bY$$

定义 1：

二阶矩过程$\{X(t), t\in T\}$，如果对于某一固定的$t_0\in T$，有$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X(t)=X(t_0)$，即

$\lim_{t\to t_0} E|X(t)-X(t_0)|^2=0$，称$X(t)$在$t_0$**均方连续**，若$X(t)$对$T$中每一个$t$都均方连续，则称随机过程$\{X(t), t\in T\}$在$T$上均方连续。

定理 1：

随机过程$\{X(t), t\in T\}$均方连续的充要条件是其自相关函数$R(s,t)$在(t,t)连续。

2. 均方导数

定义 1：

若二阶矩过程$\{X(t), t \in T\}$在$t_0 \in T$时存在均方极限

$$\underset{h \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}$$

称$X(t)$在t_0处**均方可微**，此极限称为$X(t)$在t_0处的**均方导数**，记为$X'(t_0)$或$\left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t_0}$即

$$X'(t_0) = \underset{h \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}$$

如果$\{X(t), t \in T\}$在T中每一个点t都均方可微（或称均方可导），则称随机过程$\{X(t), t \in T\}$**均方可微**（或称**均方可导**），此时均方导数为$X'(t)$或$\frac{dX(t)}{dt}$

定理 1：

随机过程$\{X(t), t \in T\}$均方可导的充要条件是对任意$t \in T$，下列广义二阶导数存在

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{R(t+h, t+k) - R(t+h, t) - R(t, t+k) + R(t,t)}{hk}$$

性质 1：

均方可导一定均方连续，即$X(t)$在$t \in T$有均方导数$X'(t)$，则在t一定均方连续

性质 2：

均方可导随机过程$\{X(t), t \in T\}$的可导过程$\{X'(t), t \in T\}$的均值等于随机过程均值的导数，即

$$m_{X'}(t) = E[X'(t)] = \frac{d}{dt} E[X(t)] = m_X'(t)$$

性质 3：

均方可导随机过程$\{X(t), t \in T\}$的导过程$\{X'(t), t \in T\}$其自、互相关函数为

(1) $R_{X'X}(s,t) = E[X'(s)X(t)] = \frac{\partial}{\partial s} R_X(s,t)$

(2) $R_{XX'}(s,t) = E[X(s)X'(t)] = \frac{\partial}{\partial t} R_X(s,t)$

(3) $R_{X'X'}(s,t) = E[X'(s)X'(t)] = \frac{\partial}{\partial s \partial t} R_X(s,t)$

性质 4：

设$X(t), Y(t)$均方可导，a, b为常数，则$[aX(t)+bY(t)]' = aX'(t) + bY'(t)$

性质 5：

具有相等均方导数的两个随机过程最多只差一个随机变量，即$[X(t)+X]' = X'(t)$

性质 6：

如果$t \in T$，函数$f(t)$可导，$X(t)$均方可导，则$f(t)X(t)$均方可导，且

$$[f(t)X(t)]' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$$

3. 均方积分

一、黎曼均方积分

定义 1：

设$\{X(t), a \le t \le b\}$是随机过程，$f(t), t \in [a,b]$是普通函数，任意插入$n-1$个分点$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，将$[a,b]$分成$n$个小区间，作和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(u_k) X(u_k)(t_k - t_{k-1})$$

其中u_k是子区间$[t_{k-1}，t_k]$中任意一点，$k = 1,2,\cdots,n$，记$\Delta = \max\limits_{1 \le k \le n}(t_k - t_{k-1})$，若均方极限

$$\underset{\Delta \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) X(u_k)(t_k - t_{k-1})$$

定理 1：

$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充要条件是二重积分

$$\int_a^b \int_a^b f(s) f(t) R(s,t) ds dt$$

存在，且有

$$E\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2 = \int_a^b \int_a^b f(s)f(t)R(s,t)dsdt$$

性质 1：

若随机过程$\{X(t), a \le t \le b\}$在$[a,b]$上均方连续，则$\{X(t), a \le t \le b\}$在$[a,b]$上均方可积。

存在且与区间$[a,b]$的分法和u_k的取法无关，则称此极限为$f(t)X(t)$在区间$[a,b]$上的黎曼均方积分，记为

$$\int_a^b f(t)X(t)dt$$

此时称$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积。

特别地，若$f(t)=1$，有

$$\int_a^b X(t)dt=\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}X(u_k)(t_k-t_{k-1})$$

称为随机过程$\{X(t),a\le t\le b\}$在$[a,b]$上的均方积分，此时称$\{X(t),a\le t\le b\}$在$[a,b]$上均方可积

性质 2：

若随机过程$\{X(t),a\le t\le b\}$在$[a,b]$上均方可积，则均方积分是唯一的。

性质 3：

设$\{X(t),a\le t\le b\},\{Y(t),a\le t\le b\}$为均方可积随机过程，$\alpha,\beta$为常数，则

$$\int_a^b[\alpha X(t)+\beta Y(t)]dt=\alpha\int_a^b X(t)dt+\beta\int_a^b Y(t)dt$$

性质 4：

均方积分具有对积分区间的可加性，即

$$\int_a^b X(t)dt=\int_a^c X(t)dt+\int_c^b X(t)dt$$

性质 5：

设$\{X(t),a\le t\le b\}$为均方可积随机过程，$f(t)$是普通函数，$m(t)$为均值函数，则

$$E\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\right]=\int_a^b f(t)m(t)dt$$

特别地，当$f(t)=1$时，有

$$E\left[\int_a^b X(t)dt\right]=\int_a^b m(t)dt$$

性质 6：

$$E\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2=\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R(s,t)dsdt$$

特别地，当$f(t)=1$时，有

$$E\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2=\int_a^b\int_a^b R(s,t)dsdt$$

性质 7：

设随机过程$\{X(t),a\le t\le b\}$程在$[a,b]$上均方连续，则随机过程

$$Y(t)=\int_a^t X(s)ds\quad a\le t\le b$$

在$[a,b]$上均方可导，且$Y'(t)=X(t)$

性质 8：

设随机过程$\{X(t),a\le t\le b\}$在$[a,b]$上均方可导，且$X'(t)$在$[a,b]$上均方连续，则

$$\int_a^b X'(t)dt=X(b)-X(a)$$

二、黎曼-斯蒂阶均方积分

定义 2：

设$\{X(t),a\le t\le b\}$是随机过程，$f(t),t\in[a,b]$是普通函数，将$[a,b]$任意分成n个小区间，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，作和式

$$\sum_{k=1}^{n}f(u_k)[X(t_k)-X(t_{k-1})]$$

其中u_k是子区间$[t_{k-1},\ t_k]$中任意一点，$k=1,2,\cdots,n$，记$\Delta=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极限

$$\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)[X(t_k)-X(t_{k-1})]$$

三、伊藤积分

定义 3：

设$\{X(t),a\le t\le b\}$是随机过程，$\{W(t),t\ge 0\}$是维纳过程，将$[a,b]$任意分成n个小区间，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，作和式

$$\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$

令$\Delta=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极限

$$\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$

存在，且与$[a,b]$的分法无关，则称此极限为$X(t)$关于维纳过程的伊藤积分，记为

<table>
<tr>
<td colspan="2">存在，且与$[a,b]$的分法和u_k的取法无关，则称此极限为$f(t)$对$X(t)$在区间$[a,b]$上的黎曼-斯蒂阶均方积分，简称 R-S 均方积分，记为$\int_a^b f(t)dX(t)$，即
$$\int_a^b f(t)dX(t) = \underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)[X(t_k)-X(t_{k-1})]$$</td>
<td colspan="2">$\int_a^b X(t)dW(t)$，即
$$\int_a^b X(t)dW(t) = \underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n} X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">四、无穷区间上的均方积分</td>
<td colspan="2">五、正态过程的均方微积分</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">定义 4：
设随机过程$\{X(t), a\le t\le +\infty\}$及函数$f(t), a\le t\le +\infty$，如果对于任意$b>a$，均方积分$\int_a^b f(t)X(t)dt$存在，且下述均方极限
$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)X(t)dt$$
存在，则称此极限为$f(t)X(t)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的均方积分，记为
$$\int_a^{+\infty} f(t)X(t)dt = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)X(t)dt$$</td>
<td colspan="2">定理 2：
设$\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{n})} = \left(X_1^{(n)},\cdots,X_k^{(n)}\right)^T$为$k$维正态随机向量，且$\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{n})}$均方收敛于$\boldsymbol{X} = (X_1,\cdots,X_2)^T$，即对每个$i$，有
$$\lim_{n\to\infty} E\left[X_i^{(n)} - X_i\right]^2 = 0,\quad 1\le i\le k$$
则$\boldsymbol{X}$也是k维正态向量。
定理 3：
设$\{X(t), t\in T\}$是正态过程，且在T上均方可导，则$\{X'(t), t\in T\}$也是正态过程。</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">六、一阶线性微分方程</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\begin{cases} a_1 Y'(t) + a_0 Y(t) = X(t) \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$
$$Y(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\int_0^t e^{\frac{a_0}{a_1}\tau} X(\tau)d\tau$$</td>
<td>$$\begin{cases} Y'(t) = a(t)Y(t) + X(t) \\ Y(t_0) = Y(0) \end{cases}$$
$$Y(t) = Y(0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} X(s)ds$$</td>
<td>$$\begin{cases} a_1 m_Y'(t) + a_0 m_Y(t) = m_X(t) \\ m_Y(0) = 0 \end{cases}$$
$$m_Y(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\int_0^t e^{\frac{a_0}{a_1}\tau} m_X(\tau)d\tau$$</td>
<td>$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial}{\partial t} R_{XY}(s,t) + a_0 R_{XY}(s,t) = R_{XX}(s,t) \\ R_{XY}(s,0) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial}{\partial s} R_{YY}(s,t) + a_0 R_{YY}(s,t) = R_{XY}(s,t) \\ R_{YY}(0,t) = 0 \end{cases}$$
联立求得$R_{XY}(s,t), R_{YY}(s,t)$</td>
</tr>
</table>

一、 平稳过程的概念

定义 1： 设$\{X(t),t\in T\}$是一个随机过程，如果对$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$及$\forall\tau,t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau\in T$，$n$维随机变量$\big(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)\big)$与$\big(X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\cdots,X(t_n+\tau)\big)$有相同的$n$维联合分布函数，即 $F_n(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=F_n(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,\cdots,x_n)$ 则称随机过程为**严平稳过程**或**强平稳过程**或**狭义平稳过程**。 $f_n(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=f_n(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,\cdots,x_n)$ $\varphi_n(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=\varphi_n(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,\cdots,x_n)$	**定义 2：** 如果随机过程$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程，$E[X^2(t)]<+\infty$，且满足 1. $E[X(t)]=m$（常数） 2. $R(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=R(\tau)$ 则称随机过程为**宽平稳过程**或**弱平稳过程**或**广义平稳过程**，简称**平稳过程**。 **定义 3：** 如果随机序列$\{X(n),n=0,1,\cdots\}$满足$E[X^2(n)]<+\infty$且$E[X(t)]=m$（常数），$R(m,n)=R(n-m)=R(\tau)$，则称其为**宽平稳序列**，简称**平稳序列**。
定理 1： 严平稳过程$\{X(t),t\in T\}$是宽平稳过程的充要条件是二阶矩存在且$E[X^2(t)]<+\infty$。	**定理 2：** 正态过程是严平稳过程的充要条件是它为宽平稳过程，即两者对正态过程等价。
定义 4： 设$\{Z(t),t\in T\}$为复随机过程，若二阶矩存在，$E[X^2(t)]<+\infty$且 1. $E[Z(t)]=m$（复常数） 2. $R(t,t+\tau)=E\big[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\big]=R(\tau)$ 则成其为**复平稳过程**，$C(\tau)=R(\tau)-\|m\|^2$	**定义 5：** 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$都是平稳过程，如果其互相关函数满足 $R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau)$ 则称$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$为**联合平稳过程**。
定义 6： 若$\{X(t),t\in T\}$是平稳过程，且满足 $X(t+L)=X(t),\qquad L>0$ 则称其为**周期平稳过程**，L为周期。	**定义 7：** 设有随机过程$\{X(t),t\in T\}$，对$\forall h\in T,t+h\in T$， $Y(t)=X(t+h)-X(t)$ 如果$\{Y(t),t\in T\}$是平稳过程，则称$\{X(t),t\in T\}$为**平稳增量过程**。

平稳过程例举

1. 离散参数白噪声序列$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是平稳序列 $E[X(n)]=0$ $R(\tau)=E[X(m)X(n)]=\sigma^2\delta_{m,n}=\begin{cases}\sigma^2, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$ 若$X(n)\sim N(0,\sigma^2)$，则称为高斯白噪声序列，是相互独立的正态平稳序列。	**2. 连续参数白噪声**$\{X(t),t\in T\}$是平稳过程 $E[X(t)]=0$ $R(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=\sigma^2\delta(\tau)=\begin{cases}\infty, & \tau=0\\ 0, & \tau\neq 0\end{cases}$
3. 离散白噪声$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的**滑动和** $Y(n)=\sum_{k=0}^{N}a_kX(n-k)$ $E[Y(n)]=0$ $R_Y(n,n+m)=\sum_{\substack{k=0\\0\le m+k\le N}}^{N}a_ka_{m+k}\sigma^2,\qquad E[Y^2(n)]=\sum_{k=0}^{N}a_k^2\sigma^2<+\infty$ $\{Y(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳序列。	**4.** 离散白噪声$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的**无限滑动和** $Z(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kX(n-k)$ $E[Z(n)]=0$ $R_Z(n,n+m)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ka_{m+k}\sigma^2,\qquad E[Z^2(n)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^2\sigma^2<+\infty$ $\{Z(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳序列。

5. 复随机序列$\{Z(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，记

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n e^{-i\omega_n t},\omega_n\text{为常数}$$

$$E[X(n)]=0$$

$$R(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sigma_n^2 e^{-i\omega_n\tau},\qquad E|X(t)|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sigma_n^2<+\infty$$

$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为复平稳过程。

6. 随机相位正弦波

设随机过程$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，其中$a,\omega$为常数，$\Theta$在$[0,2\pi]$上均匀分布

$$E[X(t)]=0,\qquad R(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau,\qquad E|X(t)|^2=\frac{a^2}{2}$$

7. 随机过程$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t,-\infty<t<+\infty$，$\omega$为常数，$A,B$是相互独立的随机变量且$E(A)=E(B)=0,D(A)=D(B)=\sigma^2>0$

$$E[X(t)]=0,\qquad R(\tau)=\sigma^2\cos\omega\tau,\qquad E|X(t)|^2=\sigma^2<+\infty$$

8. 随机电报信号$X(t)=A(-1)^{N(t)},t\ge0$，正负号变化随机，在$[0,t)$内变号次数$\{N(t),t\ge0\}$是参数为λ的泊松过程

A	$-I$	$+I$
P	0.5	0.5

$$E[X(t)]=0,\qquad R(\tau)=I^2e^{-2\lambda|\tau|}$$

9. 半随机二元波$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$在$[(n-1)T,nT],n=0,\pm1,\cdots$取值$+1$或$-1$，$P\{X(t)=1\}=P\{X(t)=-1\}=0.5$且在不同区间的取值相互独立。

$$E[X(t)]=0,\qquad E[X^2(t)]=1,\qquad R(\tau)=\begin{cases}1, & (n-1)T<s,t<nT,n=0,\pm1,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

10. 随机二元波（双向噪声）

$X(t)$是半随机二元波，$Y(t)=X(t-\Phi)$，Φ在$[0,T]$上均匀分布且与$X(t)$独立

$$E[Y(t)]=0,\qquad R_Y(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T}, & |\tau|\le T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

二、 平稳过程及其相关函数性质

自相关函数性质：

性质 1：

$$R(0)\ge0$$

性质 2：

$$|R(\tau)|\le R(0),\qquad |C(\tau)|\le C(0)$$

性质 3：

实平稳过程的相关函数是偶函数，即$R(-\tau)=R(\tau)$

性质 4：

$R(\tau)$是非负定的，即$\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N R(\tau_i-\tau_j)x_ix_j\ge0$

性质 5：

$R(\tau)$在$(-\infty,+\infty)$连续的充要条件是$R(\tau)$在$\tau=0$处连续

性质 6：

周期平稳过程$X(t)$的周期为L，则$R(\tau)$也是周期为L的周期函数

性质 7：

$\{X(t),t\in T\}$是不含周期分量的平稳过程，且$\tau\to\infty$时$X(t)$与$X(t+\tau)$相互独立，则

$$\lim_{|\tau|\to\infty}R_X(\tau)=m_X^2,\qquad D(t)=R(0)-R(\infty)$$

互相关函数性质：$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$，$C_{XY}(\tau)=R_{XY}(\tau)-m_Xm_Y$

性质 1：

$$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)$$

性质 2：

$$R_{XY}(\tau)\le\sqrt{R_X(0)}\sqrt{R_Y(0)},\qquad C_{XY}(\tau)\le\sqrt{C_X(0)}\sqrt{C_Y(0)}$$

性质 3：

$Z(t)=X(t)+Y(t)$，$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$为联合平稳过程，则$\{Z(t),t\in T\}$为平稳过程

复平稳过程的自相关函数性质：$R_Z(\tau)=\left[Z(t)\overline{Z(t+\tau)}\right]$，$C_Z(\tau)=R_Z(\tau)-|m_Z|^2$

性质 1：

$$R_Z(0)=E|Z(t)|^2\ge0$$

性质 2：

$$R_Z(-\tau)=\overline{R_Z(\tau)}$$

性质 3：

$$|R_Z(\tau)|\le R_Z(0),\qquad |C_Z(\tau)|\le C_Z(0)$$

性质 4：

$R_Z(\tau)$非负定

平稳过程的性质：

性质 1：

平稳过程$\{X(t), t\in T\}$**均方连续**$\Leftrightarrow$ $R(\tau)$在$\tau=0$处连续。此时$R(\tau)$在T上连续。

性质 2：

平稳过程$\{X(t), t\in T\}$**均方可导**$\Leftrightarrow$ $R(\tau)$在$\tau=0$处二阶导数$R''(0)$存在，此时$R''(\tau)$处处存在。

性质 3：

若$\{X(t), t\in T\}$是均方可导的平稳过程，则其导过程$\{X'(t), t\in T\}$也是平稳过程且$m_{X'}=0$，$R_{X'}(\tau)=-R_X''(\tau)$，$R_{XX'}(\tau)=R_X'(\tau)$，$R_{X'X}(\tau)=-R_X'(\tau)$

推论：

$$D[X'(t)]=-R_X''(0),\qquad R_{XX'}(0)=0,\qquad R_{X'X}(0)=0$$

性质 4：

平稳过程$\{X(t), t\in T\}$均方连续，则$\int_a^b X(t)dt$存在，且$E\left[\int_a^b X(t)dt\right]=m_X(b-a)$，　$E\left[\int_a^b X(t)dt\right]^2=\int_a^b\int_a^b R(t-s)dsdt=2\int_0^{b-a}[(b-a)-|\tau|]d\tau$

三、　**平稳过程的均方遍历性**

定义 1：

1. 如果下列均方极限存在：

$$\langle X(t)\rangle=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

则称$\langle X(t)\rangle$为随机过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的**时间均值**；

2. 如果下列均方极限存在：

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$

则称$\langle X(t)\rangle$为随机过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的**时间自相关函数。**

定义 2：

1. 如果

$$P\{\langle X(t)\rangle=m_X\}=1$$

即$\langle X(t)\rangle=m_X$以概率 1 成立，则称平稳过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的**均值具有均方遍历性**；

2. 如果

$$P\{\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=R_X(\tau)\}=1$$

即$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=R_X(\tau)$以概率 1 成立，则称平稳过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的**自相关函数具有均方遍历性**。

3. 如果平稳过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值和自相关函数都具有均方遍历性，则称平稳过程具有**均方遍历性（各态历经性）**，或是**均方遍历的平稳过程**。

定理 1：

平稳过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值具有均方遍历性$\Leftrightarrow$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

推论：

若平稳过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$满足条件

$$\lim_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=m_X^2,\qquad \text{即}\lim_{\tau\to\infty}C_X(\tau)=0$$

则$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值具有均方遍历性。

定理 2：

若平稳过程$\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$的四阶矩存在，其自相关函数具有均方遍历性$\Leftrightarrow$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)[B(u)-R_X^2(u)]du=0,\qquad B(u)=E[X(t)X(t+\tau)X(t+u)X(t+\tau+u)]$$

定理 1′：	**定理 2′：**
平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的均值具有均方遍历性$\Leftrightarrow$ $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$	平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的自相关函数具有均方遍历性$\Leftrightarrow$ $$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{2T}\right)[B(u)-R_X^2(u)]du=0$$

四、 平稳过程的谱密度

定理 1（维纳-辛钦定理）：

设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为均方连续的平稳过程，相关函数为$R(\tau)$，则必存在一个有界、非降、右连续的函数，使得

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}dF(\omega)$$

$F(\omega)$称为平稳过程的**谱函数**，上式称为相关函数的**谱分解式**。

当$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|d\omega<+\infty$时，必存在$S(\omega)=\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$，称为平稳过程的**谱密度**，则

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

当$\int_{-\infty}^{+\infty}|R(\tau)|d\tau<+\infty$时，必存在连续谱密度$S(\omega)$，且$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$\begin{cases}S(\omega)=\mathcal{F}[R(\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\\ R(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[S(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\end{cases}$$

对于平稳序列$\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，当$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|R(n)|<+\infty$时，有

$$\begin{cases}S(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R(n)e^{-i\omega n}\\ R(n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)e^{i\omega n}d\omega\end{cases}$$

定义：

$$\tilde{S}_X(\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E[|F_X(\omega,T)|^2],\qquad F_X(\omega,T)=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt$$

$\tilde{S}_X(\omega)$称为平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的**功率谱密度**；

$$\Psi_X=\lim_{T\to+\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2dt\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{S}_X(\omega)d\omega$$

称为平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的**平均功率**，上式称为**平均功率谱表达式**。

定理 2：

设有平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$，若$\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)d\tau<+\infty$，则平稳过程的谱密度$S(\omega)$等于功率谱密度，即

$$S(\omega)=\tilde{S}_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

性质 1：

平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的谱密度$S(\omega)$是实非负函数；

实平稳过程的谱密度是实非负偶函数。

定义：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}+\infty, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0\end{cases},\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)dx=1$$

性质 2：

对任意连续函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(1),\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$$

傅立叶变换性质

1. 线性性质

如果$S_1(\omega)=\mathcal{F}[R_1(\tau)],S_2(\omega)=\mathcal{F}[R_2(\tau)]$，则

$$\mathcal{F}[a_1R_1(\tau)+a_2R_2(\tau)]=a_1S_1(\omega)+a_2S_2(\omega)$$
$$\mathcal{F}^{-1}[a_1S_1(\omega)+a_2S_2(\omega)]=a_1R_1(\tau)+a_2R_2(\tau)$$

2. 相似性质

如果$S(\omega)=\mathcal{F}[R(\tau)],a\neq0$，则

$$\mathcal{F}[R(a\tau)]=\frac{1}{|a|}S\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

3. 时移频移性质

如果$S(\omega)=\mathcal{F}[R(\tau)]$，则

$$\mathcal{F}[R(\tau\pm\tau_0)]=e^{\pm i\omega\tau_0}S(\omega),\qquad \mathcal{F}\left[R(\tau)e^{\pm i\omega_0\tau}\right]=S(\omega\mp\omega_0)$$

4. 对称性质

如果$S(\omega)=\mathcal{F}[R(\tau)]$，则

$$\mathcal{F}[S(\tau)]=2\pi R(-\omega)$$

5. 微分性质

如果平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$均方可导，则导过程$\{X'(t),-\infty<t<+\infty\}$的相关函数和谱密度分别为

$$R_{X'}(\tau)=-R_X''(\tau)$$
$$S_{X'}(\omega)=\omega^2S_X(\omega)$$

6. 卷积性质

如果$S_1(\omega)=\mathcal{F}[R_1(\tau)],S_2(\omega)=\mathcal{F}[R_2(\tau)]$，则

$$\mathcal{F}[R_1(\tau)*R_2(\tau)]=S_1(\omega)\cdot S_2(\omega),\qquad \mathcal{F}^{-1}[S_1(\omega)\cdot S_2(\omega)]=R_1(\tau)*R_2(\tau)$$

其中卷积$R_1(\tau)*R_2(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_1(t)R_2(\tau-t)dt$

定义：

设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$和$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$为联合平稳过程，互相关函数为$R_{XY}(\tau)=E\left[X(t)\overline{Y(t+\tau)}\right]$，当$\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)d\tau<+\infty$时，有

$$S_{XY}(\omega)=\mathcal{F}[R_{XY}(\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

称为平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$和$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$的互谱密度，且有

$$R_{XY}(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[S_{XY}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$S_{YX}(\omega)=\mathcal{F}[R_{YX}(\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$R_{YX}(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[S_{YX}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{YX}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

性质：

$S_{XY}(\omega)=\overline{S_{YX}(\omega)}$，　$\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$是$\omega$的偶函数，$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$是$\omega$的奇函数，　$|S_{XY}(\omega)|\le\sqrt{S_X(\omega)}\sqrt{S_Y(\omega)}$

五、　平稳过程的谱分解

定义 1：

设复随机过程$\{Z(t),t\in T\}$，对$\forall t_1<t_2<t_3<t_4\in T$有　$E[Z(t_2)-Z(t_1)]\left[\overline{Z(t_4)-Z(t_3)}\right]=0$

则称$\{Z(t),t\in T\}$是正交增量过程。

定理 1（平稳过程谱分解定理）：

设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是均方连续的平稳过程，$m_X=0$，谱函数为$F(\omega),-\infty<\omega<+\infty$，则

$$X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}dZ(\omega),\qquad Z(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\omega t}-1}{-it}X(t)dt$$

上式称为**平稳过程**$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的**谱分解式**，$Z(\omega)$称为$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的**随机谱函数**，且是正交增量过程，并具有以下性质：

定理 2（平稳序列谱分解定理）：

设$\{X(n),n=0,\pm1,\cdots\}$是平稳序列，且$m_X=0$，谱函数为$F(\omega),-\pi\le\omega\le\pi$，则

$$X(n)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}dZ(\omega),\qquad Z(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\omega X(0)-\sum_{n\neq0}\frac{e^{-i\omega n}}{in}X(n)\right\}$$

上式称为**平稳序列**$\{X(n),n=0,\pm1,\cdots\}$的**谱分解式**，$Z(\omega)$称为$\{X(n),n=0,\pm1,\cdots\}$的**随机谱函数**，且在$[-\pi,\pi]$上是正交增量过程，并具有以下性质：

$$E[Z(\omega)]=0$$

对于不重叠的区间(ω_1,ω_2)和(ω_3,ω_4)有

$$E[Z(\omega_2)-Z(\omega_1)]\left[\overline{Z(\omega_4)-Z(\omega_3)}\right]=0$$

$$E|Z(\omega_2)-Z(\omega_1)|^2=\frac{1}{2\pi}[F(\omega_2)-F(\omega_1)]$$

$$E[Z(\omega)]=0$$

对于不重叠的区间(ω_1,ω_2)和(ω_3,ω_4)有

$$E[Z(\omega_2)-Z(\omega_1)]\left[\overline{Z(\omega_4)-Z(\omega_3)}\right]=0$$

$$E|Z(\omega_2)-Z(\omega_1)|^2=\frac{1}{2\pi}[F(\omega_2)-F(\omega_1)]$$

定理 3（实平稳过程谱分解定理）：

设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是均方连续的实平稳过程，$m_X=0$，谱函数为$F(\omega)$，则

$$X(t)=\int_0^{+\infty}\cos\omega t\,dZ_1(\omega)+\int_0^{+\infty}\sin\omega t\,dZ_2(\omega)$$

$$Z_1(\omega)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\omega t}{t}X(t)dt\,,\qquad Z_2(\omega)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos\omega t}{t}X(t)dt$$

上式称为**实平稳过程**$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的**谱分解式**，$Z_1(\omega)$和$Z_2(\omega)$称为$X(t)$的**随机谱函数**，且具有以下性质：

$$E[Z_1(\omega)]=E[Z_2(\omega)]=0$$

对于不重叠的区间(ω_1,ω_2)和(ω_3,ω_4)有

$$E[Z_i(\omega_2)-Z_i(\omega_1)]\left[Z_j(\omega_2)-Z_j(\omega_1)\right]=0,\qquad i,j=1,2$$

$$E[Z_1(\omega_2)-Z_1(\omega_1)]^2=E[Z_2(\omega_2)-Z_2(\omega_1)]^2=\frac{1}{\pi}[F(\omega_2)-F(\omega_1)]$$

定理 4（实平稳序列谱分解定理）：

设$\{X(n),n=0,\pm1,\cdots\}$是平稳序列，且$m_X=0$，谱函数为$F(\omega),-\pi\le\omega\le\pi$，则

$$X(n)=\int_0^{+\infty}\cos\omega n\,dZ_1(\omega)+\int_0^{+\infty}\sin\omega n\,dZ_2(\omega)$$

$$Z_1(\omega)=\frac{1}{\pi}\left\{\omega X(0)+\sum_{n\neq0}\frac{\sin\omega n}{n}X(n)\right\},\qquad Z_2(\omega)=\frac{-1}{\pi}\sum_{n\neq0}\frac{\cos\omega n}{n}X(n)$$

上式称为**实平稳序列**$\{X(n),n=0,\pm1,\cdots\}$的**谱分解式**，$Z_1(\omega)$和$Z_2(\omega)$称为$X(t)$的**随机谱函数**，且具有以下性质：

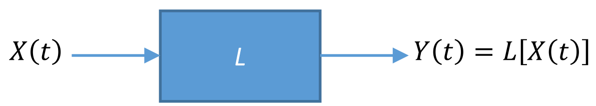
$$E[Z_1(\omega)]=E[Z_2(\omega)]=0$$

对于不重叠的区间(ω_1,ω_2)和(ω_3,ω_4)有

$$E[Z_i(\omega_2)-Z_i(\omega_1)]\left[Z_j(\omega_2)-Z_j(\omega_1)\right]=0,\qquad i,j=1,2$$

$$E[Z_1(\omega_2)-Z_1(\omega_1)]^2=E[Z_2(\omega_2)-Z_2(\omega_1)]^2=\frac{1}{\pi}[F(\omega_2)-F(\omega_1)]$$

六、 线性系统中的平稳过程



输入为随机过程$\{X(t),t\in T\}$，系统记为$L[\cdot]$

输出为随机过程$\{Y(t),t\in T\}$，也称为系统对输入的响应

定义 1：

如果$Y_1(t)=L[X_1(t)],Y_2(t)=L[X_2(t)]$，$C_1$和$C_2$为常数，且有

$$L[C_1X_1(t)+C_2X_2(t)]=C_1Y_1(t)+C_2Y_2(t)$$

则称L为线性系统

定义 2：

如果对任意T有

$$L[X(t+\tau)]=Y(t+\tau)$$

则称L为时不变系统。

频率响应函数：

$$H(i\omega)=\mathcal{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt$$

脉冲响应函数：

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(i\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$Y(\omega)=H(i\omega)X(\omega)$$

$$Y(t)=X(t)*h(t)=h(t)*X(t)=\int_0^{+\infty}X(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda=\int_0^{+\infty}X(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$

若$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$，则系统是稳定的

定理 1：
设线性时不变系统是稳定的、物理上可实现的系统，如果输入$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是平稳过程，则系统的输出是平稳过程，且

$$m_Y=m_X\int_0^{+\infty}h(\lambda)d\lambda$$

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)*h(\tau)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}R_X(\lambda_2-\lambda_1-\tau)h(\lambda_1)h(\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2$$

定理 2：
设线性时不变系统是稳定的、物理上可实现的系统，如果输入平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的谱密度为$S_X(\omega)$，则输出平稳过程$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$的谱密度为

$$S_Y(\omega)=|H(i\omega)|^2S_X(\omega)$$

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(i\omega)|^2S_X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

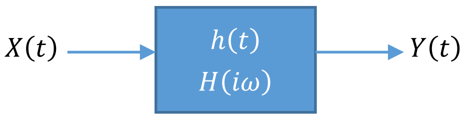
$$\Psi_Y^2=R_Y(0)$$

定理 3：
设线性时不变系统是稳定的、物理上可实现的系统，如果输入平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$，它和输出平稳过程$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$是联合平稳的，且

$$R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}R_X(\tau-\lambda)h(\lambda)d\lambda=R_X(\tau)*h(\tau),\qquad S_{XY}(\omega)=H(i\omega)S_X(\omega)$$

七、 白噪声通过线性系统

1. 一般情况



零均值连续参数白噪声$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$，其谱密度和自相关函数分别为

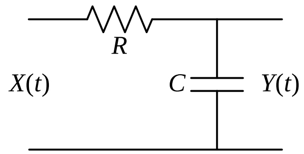
$$S_X(\omega)=\frac{N_0}{2},\qquad R_X(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

线性系统脉冲响应为$h(t)$，频率响应为$H(i\omega)$，输出过程$\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$，则

$$D[Y(t)]=E[Y^2(t)]=R_Y(0)=\frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(i\omega)|^2d\omega$$

$$S_Y(\omega)=\frac{N_0}{2}|H(i\omega)|^2,\qquad R_Y(\tau)=\frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(i\omega)|^2e^{i\omega t}d\omega$$

2.1 白噪声通过$R-C$积分器



$$h(t)=\alpha e^{-\alpha t},t>0,\alpha=\frac{1}{RC},\qquad H(i\omega)=\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}$$

$$S_Y(\omega)=\frac{N_0\alpha^2}{2(\omega^2+\alpha^2)},\qquad R_Y(\tau)=\frac{N_0}{4}\alpha e^{-\alpha|\tau|},\qquad E[Y^2(t)]=R_Y(0)=\frac{N_0}{4}\alpha$$

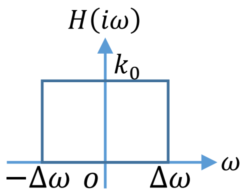
$$S_{XY}(\omega)=\frac{N_0\alpha}{2(i\omega+\alpha)},\qquad R_{XY}(\tau)=\frac{N_0}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}U(\tau)$$

2.2 白噪声通过理想低通网络

$$H(i\omega)=k_0,-\Delta\omega<\omega<\Delta\omega$$

$$S_Y(\omega)=\frac{N_0}{2}k_0^2$$

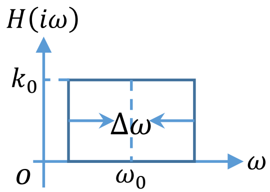
$$R_Y(\tau)=\frac{N_0k_0^2\Delta\omega}{2\pi}\cdot\frac{\sin\Delta\omega\tau}{\Delta\omega}$$



2.3 白噪声通过理想带通网络

$$H(i\omega)=k_0,|\omega-\omega_0|<\frac{\Delta\omega}{2}$$

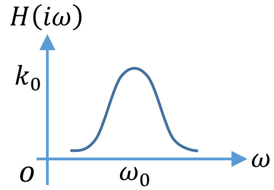
$$S_Y(\omega)=\frac{N_0}{2}k_0^2,\qquad R_Y(\tau)=\frac{N_0}{2}\frac{k_0^2\Delta\omega}{2\pi}\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\tau}{\frac{\Delta\omega}{2}\tau}\cos\omega_0\tau$$



2.4　白噪声通过高斯型带通网络

$$H(i\omega)=k_0\exp\left\{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta^2}\right\}$$

$$S_Y(\omega)=\frac{N_0}{2}k_0^2\exp 2\left\{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta^2}\right\},\qquad R_Y(\tau)=\frac{N_0k_0^2}{2\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}\right\}\cos\omega_0\tau$$



八、　平稳窄带随机过程

定义 1：

如果平稳随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的谱密度$S_X(\omega)$集中在中心角频率$\omega_0$附近相对窄的角频带宽$\Delta\omega$附近，即满足$\Delta\omega\ll\omega_0$，则称$X(t)$为**平稳窄带随机过程**。

定义 2：

给定一个实随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$，定义一个复随机过程

$$\tilde{X}(t)=X(t)+i\hat{X}(t)$$

且$\tilde{X}(t)$满足条件　$\mathrm{Re}[\tilde{X}(t)]=X(t),\ \tilde{X}(\omega)=2X(\omega)U(\omega)$

称$\tilde{X}(t)$为实随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的**复解析过程**。

定义 3：

随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的线性变换

$$\hat{X}(t)=H[X(t)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(\tau)}{t-\tau}d\tau=X(t)*\frac{1}{\pi t}$$

称为**希尔伯特变换，逆变换**为

$$X(t)=H^{-1}\left[\hat{X}(t)\right]=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{X}(\tau)}{t-\tau}d\tau=\hat{X}(t)*\left(-\frac{1}{\pi t}\right),\qquad H\left[\hat{X}(t)\right]=-X(t)$$

希尔伯特变换的性质

1.　希尔伯特变换是**正交变换**

$$h(t)=\frac{1}{\pi t},\qquad H(i\omega)=-i\,\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}-i, & \omega\ge 0\\ i, & \omega<0\end{cases}$$

幅度$|H(i\omega)|=1$，移相 $\Theta(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & \omega\ge 0\\ \dfrac{\pi}{2}, & \omega<0\end{cases}$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)\hat{X}(t)dt=0$$

2.　线性性质

$$H[a_1X_1(t)+a_2X_2(t)]=a_1\hat{X}_1(t)+a_2\hat{X}_2(t)$$

3.　移位性质

$$H[X(t-a)]=\hat{X}(t-a)$$

4.　奇偶特性

$X(t)$为奇函数（偶函数），则$\hat{X}(t)$为偶函数（奇函数）。

5.　能量守恒

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}^2(t)dt$$

6.　调制性质

$X(t)$为带限的，则$\begin{cases}H[X(t)\cos\omega_0t]=X(t)\sin\omega_0t\\ H[X(t)\sin\omega_0t]=X(t)\cos\omega_0t\end{cases}$

7.　卷积性质

$$H[X_1(t)*X_2(t)]=\hat{X}_1(t)*\hat{X}_2(t)$$

解析过程的性质

性质 1：

若$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是实平稳过程，则$\{\hat{X}(t),-\infty<t<+\infty\}$也是时平稳过程，且两者是联合平稳过程。

性质 2：

$X(t)$和$\hat{X}(t)$有相同的谱密度和自相关函数

$$S_X(\omega)=S_{\hat{X}}(\omega),\qquad R_X(\tau)=R_{\hat{X}}(\tau)$$

性质 3： $$R_{X\hat{X}}(\tau)=\hat{R}_X(\tau),\qquad R_{\hat{X}X}(\tau)=-\hat{R}_X(\tau)$$ **性质 4：** $$R_{X\hat{X}}(\tau)=-R_{\hat{X}X}(\tau)$$ **性质 5：** $$R_{\hat{X}X}(-\tau)=-R_{\hat{X}X}(\tau)$$ **性质 6：** $$R_{\hat{X}X}(0)=0$$	**性质 7：** $$R_{\tilde{X}}(\tau)=2[R_X(\tau)+iR_{X\hat{X}}(\tau)]$$ **性质 8：** $$S_{X\hat{X}}(\omega)=-i\,\mathrm{sgn}\,S_X(\omega)$$ **性质 9：** $$S_{\tilde{X}}(\omega)=\begin{cases}4S_X(\omega), & \omega\ge 0\\ 0, & \omega<0\end{cases}$$

窄带过程的莱斯表示法

定理：

给定实平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$，总可以表示成

$$X(t)=\xi(t)\cos\omega_0 t-\eta(t)\sin\omega_0 t$$

其中

$$\xi(t)=X(t)\cos\omega_0 t+\hat{X}(t)\sin\omega_0 t\,,\qquad \eta(t)=-X(t)\sin\omega_0 t+\hat{X}(t)\cos\omega_0 t$$

上式称为**窄带过程的莱斯表示式**。

性质 1： $\{\xi(t),-\infty<t<+\infty\}$和$\{\eta(t),-\infty<t<+\infty\}$都是零均值实平稳过程，且二者是联合平稳过程 **性质 2：** $$R_{\xi\eta}(\tau)=-R_{\eta\xi}(\tau),\qquad R_{\xi\eta}(-\tau)=-R_{\xi\eta}(\tau),\qquad R_{\xi\eta}(0)=0$$	**性质 3：** $$R_\xi(0)=R_\eta(0)=R_X(0),\qquad E[\xi^2(t)]=E[\eta^2(t)]=E[X^2(t)]$$ **性质 4：** $$S_\xi(\omega)=S_\eta(\omega)=\mathrm{LP}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)]$$ $$S_{\xi\eta}(\omega)=-i\,\mathrm{LP}[S_X(\omega+\omega_0)-S_X(\omega-\omega_0)]$$ 其中$\mathrm{LP}[A]$表示A的低频部分。

窄带平稳正态随机过程及其包络和相位的概率密度

给定一个零均值实平稳正态随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$, $X(t)\sim N(0,\sigma^2)$，则

$$\tilde{X}(t)=X(t)+\hat{X}(t)=[\xi(t)+i\eta(t)]e^{i\omega_0 t}$$

令

$$\xi(t)+i\eta(t)=A(t)e^{i\theta(t)}$$

则

$$\tilde{X}(t)=\ A(t)e^{i[\omega_0 t+\theta(t)]}$$

可知

$$\begin{cases}A(t)=\sqrt{\xi^2(t)+\eta^2(t)}\\ \theta(t)=\arctan\dfrac{\eta(t)}{\xi(t)}\end{cases},\qquad f_{A\Theta}(a,\theta)=\begin{cases}\dfrac{a}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{a^2}{2\sigma^2}\right\}, a\ge 0, 0\le\theta\le 2\pi\\ 0, \qquad\text{其他}\end{cases},\qquad f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{a^2}{2\sigma^2}\right\}, a\ge 0\\ 0, \qquad\text{其他}\end{cases},\qquad f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, 0\le\theta\le 2\pi\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

$A(t)$服从瑞利分布，$\theta(t)$服从$[0,2\pi]$上的均匀分布，且两者相互独立。