§2.4 随机过程的基本类型

一、随机过程的基本类型

定义2.4.1 对已给（复或实）随机过程$\{X_t, t \in T\}$，若对任意的$t \in T$，均有$E[|X_t|^2] < +\infty$，则称$\{X_t, t \in T\}$是二阶矩随机过程，简称二阶矩过程。

定理2.4.1 设随机过程$\{X_t,\ t\in T\}$是二阶矩随机过程，则其自相关函数满足下列性质

（1）非负性　对任意的$n\geq 1$及$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，对任意的$\theta(t), t\in T$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)}\geq 0$$

（2）埃密特对称性(共轭对称性)，即

$$R(s,t)=\overline{R(t,s)}$$

二、独立过程

定义2.4.2 对任意的正整数 n 及任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，随机变量

$$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$$

相互独立,称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为**独立过程**.

注 独立随机过程的有限维分布由一维分布确定

$$F_n(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_k(t_k;x_k)$$

Ex.1 高斯白噪声

实值时间序列$\{X(n),n\in N\}$的

$$E\{X(n)\}=0,\qquad D[(X_n)]=\sigma^2,$$

自相关函数为

$$R(m,n)=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \sigma^2, & m=n.\end{cases}$$

两两不相关序列.

称 $\{X(n),n\in N\}$ 为离散白噪声(序列).

又若$X(n)$都服从正态分布,称$\{X(n), n\in N\}$是**高斯白噪声**序列.

对于n维正态随机变量有

相互独立 $\Leftrightarrow$ 不相关

故**高斯白噪声序列**是独立时间序列.

若过程$\{X(t), t\in R\}$是正态过程,且

$$E[X(t)]=0,\quad R(s,t)=\sigma^2\delta(s-t)=\begin{cases}0, & s\neq t\\ \infty, & s=t\end{cases}$$

称其为**高斯白噪声过程**，它是独立过程.

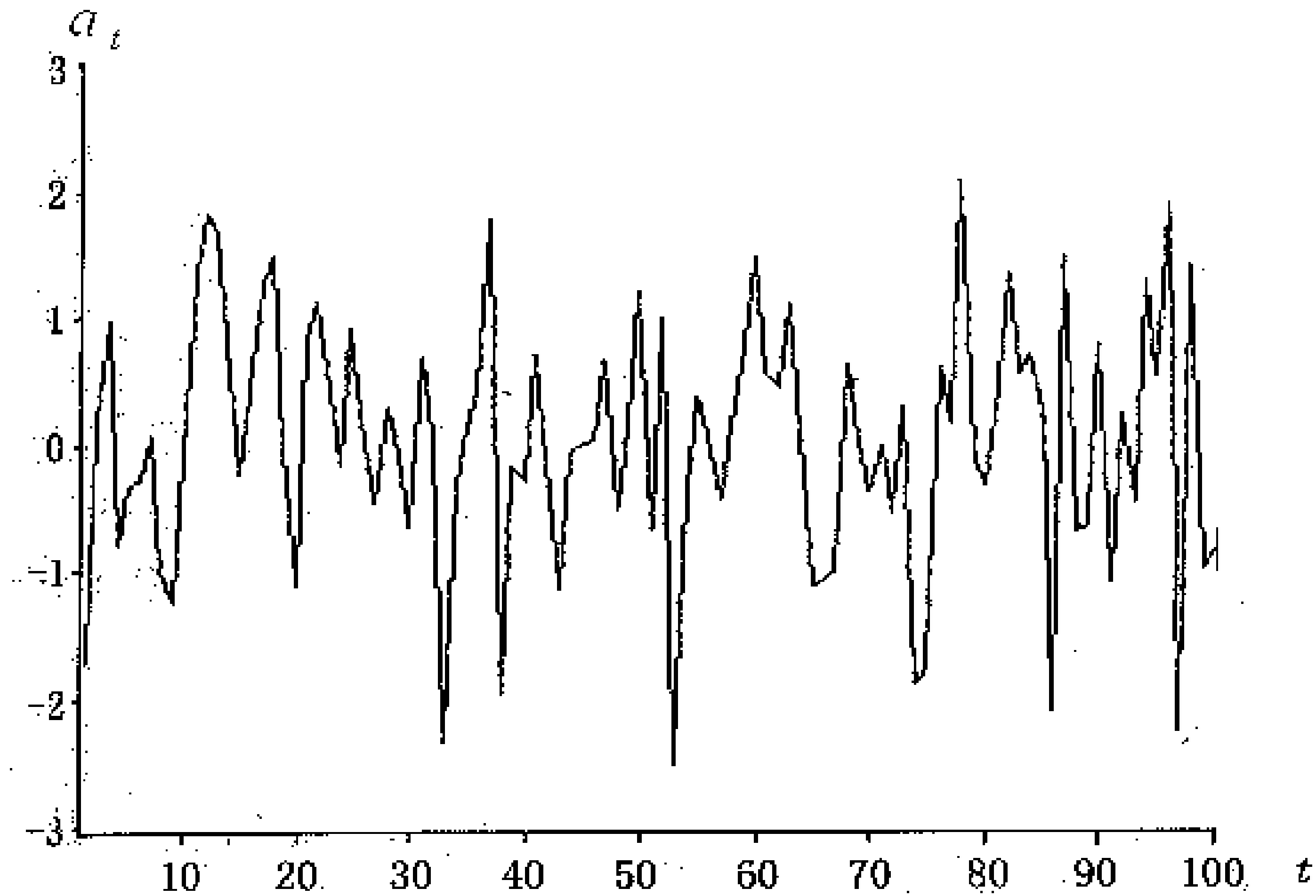
高斯白噪声是典型的**随机干扰数学模型**,普遍存在于电流的波动,通信设备各部分的波动,电子发射的波动等各种波动现象中.

如金融、电子工程中常用的线性模型——自回归模型（AR(p)）

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$ **积分?**

理想模型要求残差序列ε_t是(高斯)白噪声.

随机过程的基本类型



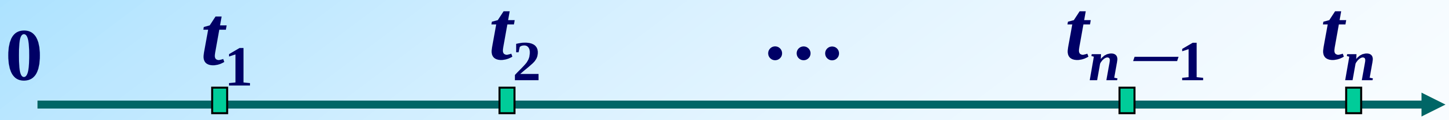
正态白噪声的一条现实

三、独立增量过程

定义2.4.3 称$\{X(t), t\in T\}$，$T=[0,\infty)$为**独立增量过程**，若对$\forall n\geq 2$，及$t_0=0<t_1<t_2<\ldots<t_n$，增量序列

$$X(t_1)-X(0), X(t_2)-X(t_1), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立.



注 不失一般性,设$X(0)=0$ 或 $P\{X(0)=0\}=1$.

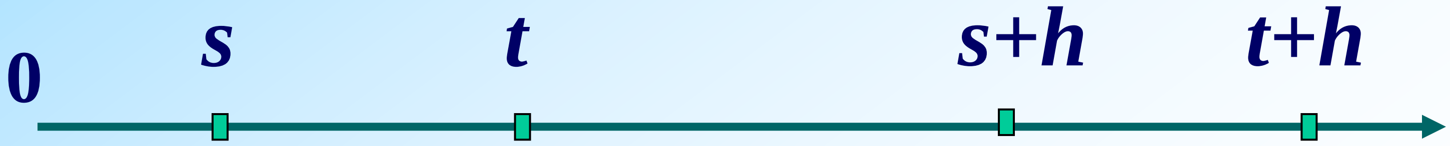
有 $\quad X(t_1)\,,\ X(t_2)-X(t_1),\ \ldots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$

相互独立.

定义2.4.4 若独立增量过程$\{X(t),t\geq 0\}$ 对 $\forall s,t\in T$, 及 $h>0$,

$$X(t+h)-X(s+h) \text{ 与 } X(t)-X(s)$$

有相同的分布函数,称$\{X(t),t\geq 0\}$是**平稳独立增量过程**.



注 增量$X(t+\tau)-X(t)$的分布仅与τ有关,与起始点 t 无关,称$\{X(t),t\geq 0\}$的增量具有**平稳性(齐性)**.

Ex.2 若$\{X(n),n\in N^+\}$是独立时间序列,令

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k),\qquad X(0)=0$$

则$\{Y(n),\ n\in N^+\}$是独立增量过程.

又若$X(n),\ n=1,2,\dots$ **相互独立同分布**,则$\{Y(n),\ n\in N^+\}$是平稳独立增量过程.

证 若$n_1<n_2<\ldots<n_m$

$$Y(n_2)-Y(n_1)=\sum_{k=0}^{n_2}X(k)-\sum_{k=0}^{n_1}X(k)$$

$$=X(n_1+1)+\cdots+X(n_2)$$

$$Y(n_3)-Y(n_2)=X(n_2+1)+\cdots+X(n_3)$$

$$\vdots$$

$$Y(n_m)-Y(n_{m-1})=X(n_{m-1}+1)+\cdots+X(n_m)$$

$\{X(n),n\in N^+\}$ 相互独立 $\Rightarrow$ 各增量相互独立.

性质2.4.2 $\{X(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程，$X(0)=0$, 则

1）均值函数 $m(t)= m\,t$ （m 为常数）;

2）方差函数 $D(t)= \sigma^2 t$ （σ为常数）;

3）协方差函数 $C(s, t)=\sigma^2\min(s,t)$.

分析 因均值函数和方差函数满足

$$\left.\begin{aligned} m(s+t) &= m(s)+m(t),\\ D(s+t) &= D(s)+D(t) \end{aligned}\right\}$$

见教材 $P27$

命题：若 $y(s+t)=y(s)+y(t)$,

则对任意实数 t, **有** $y(t)=ty(1)$.

可证得1)和2).

证3) $C(s,t)=E\{[X(t)-m(t)][X(s)-m(s)]\}$

$$=E[X(t)X(s)]-m(s)m(t)$$

$$=E\{[X(t)-X(s)+X(s)]X(s)\}-m(s)m(t)$$

$$=E\{[X(t)-X(s)]E[X(s)]\}$$

$$+E[X^2(s)]-m^2st$$

$X(t)$-$X(s)$ **与**$X(s)$**相互独立.**

$$= m(t-s)ms+\sigma^2 s+m^2 s^2-m^2 st \qquad (t>s)$$

一般, $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$.

性质2.4.3 独立增量过程的有限维分布由一维分布和增量分布确定.

分析 对于独立增量过程$\{X(t),t\geq 0\}$,任取的$t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$,

证明见教材$P27$

$Y_1=X(t_1)$, $Y_2=X(t_2)-X(t_1)$, …, $Y_n=X(t_n)-X(t_{n-1})$

相互独立性, 利用特征函数法可证明结论.

注1 对于**独立增量**过程$\{X(t), t\in T=[a, b]\}$, 又若

$$P\{X(a)=0\}=1$$

根据$X(t)$的增量分布即可确定有限维分布.

分析 因对任意$t\in T$, $X(t)=X(t)-X(a)$, 由增量分布确定了一维分布.

注2 对于**平稳独立增量**过程$\{X(t),t\in[a,b]\}$,又若

$$P\{X(a)=0\}=1$$

根据$X(t)$的一维分布即可确定有限维分布.

分析 因增量$X(t_2)-X(t_1)$与

$$X(t_2-t_1+a)=X(t_2-t_1+a)-X(a)$$

同分布.

四、不相关增量过程与正交增量过程

定义2.4.5 设随机过程$\{X(t),t\in T\}$，若对$t\in T$，$E[|X(t)|^2]$存在，若对$t_1<t_2<t_3<t_4\in T$，满足

$$E\{[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}\}$$

$$=E[X(t_2)-X(t_1)]E\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}$$

称过程为**不相关增量过程**.

随机过程的基本类型

若 $E\{[X(t_2)-X(t_1)]\overline{[X(t_4)-X(t_3)]}\}=0$

称过程为**正交增量过程**.

思考题:

1. 白噪声过程是否一定是独立过程?

2. 独立过程是否是独立增量过程？反之?

问题：ε(t)是高斯白噪声过程

$$W^a(r)=\int_r^{a+r}\varepsilon(t)dt,\ \ a>0,$$

求W^a的均值和自相关函数?

$$R_{W^a}(s,t)=\begin{cases}0, & |s-t|>a\\ \sigma^2(a-|s-t|), & |s-t|\le a\end{cases}$$

思考：若白噪声过程的相关函数按如下定义

$$R(s,t)=\begin{cases}0, & s\neq t\\ \sigma^2, & s=t\end{cases}$$