§3.1 正 态 过 程

在现实问题中, 满足一定条件的随机变量之和的极限服从正态分布.

电子技术中的热噪声是由大量的热运动引起, 也服从正态分布.

由于一个随机过程可以用有限维分布来描述, 为研究正态过程应首先研究多维正态分布随机变量.

一、多维正态随机变量

1.概率密度与特征函数

若$(X,Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

(X,Y)的联合概率密度为

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

记

$$\boldsymbol{\mu} = E\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

其中$\sigma_1>0,\sigma_2>0$, $|\rho|<1$, 故协方差矩阵满足$|\mathbf{B}|\neq 0$.

(X,Y)的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{X}-\mu)^T B^{-1}(\vec{X}-\mu)\right\}$$

记为$(X,Y)\sim N(\mu,B)$.

定义3.1.1 设$B=(b_{ij})$ 是n 阶**正定对称矩阵**,μ是n 维实值列向量, 定义n维随机向量

$$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{X}-\mu)^T B^{-1}(\vec{X}-\mu)\right\} \qquad (*)$$

其中$\vec{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, 称$X$ 服从n **维正态分布**.

记为$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim N(\mu, B)$.

注 当$B=(b_{ij})$是n阶正定对称矩阵, 有 $|B| \neq 0$;

若 $|B|=0$则不能用(*)式给出其概率密度.

定理3.1.1 n维正态分布随机向量$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的特征函数为

$$\phi(u)=\exp\left\{i\mu^T u-\frac{1}{2}u^T Bu\right\} \qquad (**)$$

其中 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_n)^T$.

证 明

定义3.1.2 若μ是n维实向量, B是n阶非负定对称阵, 称以(**)式中的$\varphi(t)$为其特征函数的n维随机变量X服从n维正态分布.

注 若(**)式中的$|B|=0$, 称X服从退化正态分布或奇异正态分布.

2.边缘分布及二阶矩

以下结论总假定随机向量$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$服从$N(\mu, B)$.

非退化

定理3.1.2 n维正态分布随机变量X的任一子向量

$$(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_m})^T \quad (m \le n)$$

也服从正态分布$N(\tilde{\mu}, \tilde{B})$, 其中 $\tilde{\mu} = (\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \cdots, \mu_{k_m})$,

$\tilde{B}$是B 保留第$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 行及列所得的m 阶矩阵.

多元正态分布的边缘分布仍是正态分布

定理3.1.3 设μ和 B 分别是随机向量 X 的数学期望向量及协方差矩阵, 即

$$E(X_i)=\mu_i, \quad 1\le i\le n;$$

$$b_{ij}=E\{(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\}, \quad 1\le i, j\le n.$$

n维正态分布由二阶矩确定.

3.独立性问题

定理3.1.4 n维正态分布随机向量$X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立的充要条件是它们两两不相关.

等价于其协方差矩阵是对角阵.

4.正态随机向量的线性变换

定理3.1.5正态随机向量 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$，记$E(X)=\mu$,协方差矩阵为B.

1) 对X 的线性组合

$$Y=\sum_{j=1}^{n} l_j X_j = LX, \quad L=(l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

有
$$E(Y)=\sum_{j=1}^{n} l_j \mu_j = L\mu,$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_j l_k b_{jk} = LBL^{\tau},$$

2) 若$C=(c_{jk})_{m\times n}$, 线性变换 $Z=CX$, 则

均值向量为 $E(Z)=E(CX)=CE(X)=C\mu$,

协方差矩阵为 $D_Z=CBC^T$

定理3.1.6 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$服从n 维正态分布$N(\mu,B)$的充要条件是它的任何一个非零线性组合

$$\sum_{j=1}^{n} l_j X_j,$$

服从一维正态分布.

可将多维正态随机变量问题转化为一维正态分布问题.

定理3.1.7 若$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 服从n维正态分布$N(\mu,B)$, $C=(c_{jk})_{m\times n}$是任意矩阵,则$Y=CX$ 服从m维正态分布$N(C\mu,CBC^T)$.

正态分布的线性变换不变性

证 对于任意m 维实值列向量u, Y 的特征函数为

$$\phi_Y(u)=E(e^{iu^TY})=E(e^{iu^TCX})=E(e^{i(C^Tu)^TX})$$

$$=\exp\left\{i\mu^T(C^Tu)-\frac{1}{2}(C^Tu)^TB(C^Tu)\right\}$$

$$= \exp\left\{ i(C\mu)^T u - \frac{1}{2}u^T(CBC^T)u \right\}$$

即随机向量Y=CX 服从m维正态分布$N(C\mu, CBC^T)$

思考问题：能否保证Y= CX 服从非退化正态分布 ?

反例：设随机变量X_0与V相互独立,都服从标准正态分布$N(0,1)$, 令

$$X(1)=X_0+V,\quad X(2)=X_0+2V,\quad X(3)=X_0+3V,$$

问$(X(1),X(2),X(3))$是否服从非退化正态分布?

分析 设

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\V\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}X_0\\V\end{bmatrix}$$

因 $\begin{bmatrix}X_0\\V\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$

X的协方差矩阵为

$$\mathbf{CBC}^T=\mathbf{C}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\mathbf{C}^T=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{CBC}^T| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

参见$P35$例2

$X=(X(1), X(2), X(3))$不服从非退化正态分布.

一般地, 若$X=(X_1, X_2)$是非退化二维正态随机向量,其线性变换 $Y= CX$, 有

1) 每一分量服从正态分布;

2) 不能构成二维以上的非退化联合正态分布;

分析2) 设X=(X_1, X_2)的协方差矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix},\qquad R(B)=2$$

线性变换矩阵

$$C^T=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1}\\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2}\end{bmatrix},\quad R(C)\le 2$$

则线性变换 Y= CX的协方差矩阵为

$$\Gamma_Y=\mathrm{CBC}^T,\quad R(\Gamma_Y)\le \min(R(C),R(B))\le 2$$

即二维以上的线性变换向量Y= CX都是退化(奇异)联合正态分布.

问题结论:

1)不能保证Y=CX 服从非退化正态分布.

2) 当$|CBC^T| \neq 0$时, 随机向量Y服从非退化正态分布.

可证明

推论 非退化正态分布随机向量X的行满秩线性变换仍服从非退化正态分布.

定理3.1.8 若随机向量X服从$N(\mu,B)$, 则存在一个正交变换U, 使得Y=UX是一个相互独立的正态随机向量.

证 B为实对称矩阵, 存在正交阵U, 使

$$\mathrm{UBU}^T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

λ_i 是B的特征向量

又因B是正定阵(从而非奇异的)

⟹ B 有n个线性无关特征向量

设U是以特征向量为列构成的正交阵, 令Y=UX 则得证.

判定多维正态分布的方法总结

二、正态随机过程

定义3.1.3 随机过程$\{X(t), t\in T\}$称为正态过程, 如果它的任意有限维分布都是联合正态分布.

即对任意的正整数n和$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, n维随机变量$(X(t_1),\ldots,X(t_n))$都服从正态分布.

注

1)上述几个定理均可应用于正态过程.

2）若存在n, 对$t_1,t_2, \ldots,t_n \in T$, n维随机变量$(X(t_1),\ldots,X(t_n))$服从退化正态分布, 称$\{X(t), t \in T\}$为退化正态过程.

3) 正态过程的n 维分布由其二阶矩完全确定.

有 对任意的$n\geq1$， $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$,

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T \sim N(\mu, B),$$

$$\mu = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C(t_1,t_1) & C(t_1,t_2) & \cdots & C(t_1,t_n) \\ C(t_2,t_1) & C(t_2,t_2) & \cdots & C(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C(t_n,t_1) & C(t_n,t_2) & \cdots & C(t_n,t_n) \end{bmatrix}$$

$$C(t_i,t_j) = E\{[X(t_i)-m(t_i)][X(t_j)-m(t_j)]\}$$

$$(1 \leq i, j \leq n).$$

Ex.1 随机振幅电信号

设 $X(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t, t\in R$

$E(\xi)=E(\eta)=0, E(\xi^2)=E(\eta^2)=\sigma^2,\quad \omega$为常数

ξ与η相互独立同服从正态分布,

1) 试求$X(t)$的均值函数和相关函数;

2）写出一维概率密度和二维概率密度.

解 1) $E\{X(t)\}=E(\xi)\cos\omega t+E(\eta)\sin\omega t=0$

因 $E(\xi\eta)=0$, 故

$$R(s,t) = E\{(\xi\cos\omega t + \eta\sin\omega t)(\xi\cos\omega s + \eta\sin\omega s)\}$$

$$= E(\xi^2)\cos\omega t\cos\omega s + E(\eta^2)\sin\omega t\sin\omega s$$

$$= \sigma^2\cos\omega(t-s) = \sigma^2\cos(\tau), (\tau = t-s)$$

$$\Rightarrow \quad D(X(t)) = R(t,t) = \sigma^2\cos 0 = \sigma^2.$$

2) $X(t)$的一维密度为

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in R$$

$X(t_i)$是相互独立正态随机变量的线性组合，故$(X(t_1),X(t_2))$服从二维正态分布，其相关系数为

$$\rho=\frac{R(s,t)-m(s)m(t)}{\sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}}=\frac{\sigma^2\cos\omega\tau}{\sigma^2}=\cos\omega\tau$$

仅与$\tau=t-s$有关

得过程$X(t)$的二维密度为

$$f(x_1,x_2;s,t)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\omega\tau}}e^{-\frac{x_1^2-2x_1x_2\cos\omega\tau+x_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2\omega\tau)}},$$

$$(x,y)\in R_2.$$

思考题:

此过程是否是正态过程? 可否写出任意n维概率密度?

Ex.2 分析P35 例2中的n 维概率分布

在随机向量的协方差矩阵C中

取$n=3, t_2=2t_1, t_3=3t_1$,则

$$C=\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\ \cos 2\omega t_1 & \sin 2\omega t_1\\ \cos 3\omega t_1 & \sin 3\omega t_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\omega t_1 & \sin\omega t_1\\ \cos 2\omega t_1 & \sin 2\omega t_1\\ \cos 3\omega t_1 & \sin 3\omega t_1\end{bmatrix}^T$$

可计算得 $|C| = 0$，且 $Rank(C) = 2$，

故例中当n>2时，不能写出n维联合正态概率密度.

Ex.3 设随机过程$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$相互独立，都是正态随机过程，设

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \quad t \in R$$

证明 $Z(t)$是正态过程。

证 对任意正整数 n 及 $t_1, t_2, \cdots t_n \in R$

$$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)) \quad (Y(t_1), Y(t_2), \cdots, Y(t_n))$$

都是n维联合正态随机向量，并相互独立。

$(Z(t_1), Z(t_2), \cdots, Z(t_n))$ 的n维特征函数为

$$\varphi_z(t_1, t_2, \cdots, t_n; u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

$$= E\left\{e^{i[u_1(X(t_1)+Y(t_1))+\cdots+u_n(X(t_n)+Y(t_n))]}\right\}$$

$$= E\left\{e^{i[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]}\right\}E\left\{e^{i[u_1Y(t_1)+\cdots+u_nY(t_n)]}\right\}$$

$$= \exp\{i\mu_X' u - \frac{1}{2}u'C_X u\}\exp\{i\mu_Y' u - \frac{1}{2}u'C_Y u\}$$

$$= \exp\{i(\mu_X + \mu_Y)'u - \frac{1}{2}[u'C_X u + u'C_Y u]\}$$

$$= \exp\{i(\mu_X + \mu_Y)'u - \frac{1}{2}[u'(C_X + C_Y)u]\}$$

由特征函数和分布函数的惟一性定理知

$$(Z(t_1), Z(t_2), \cdots, Z(t_n))$$

是正态随机向量.

问题：C_X+C_Y是否是上随机向量的协方差矩阵?

根据数学期望与协方差的性质

$$COV[(X(t_1)+Y(t_1)),(X(t_2)+Y(t_2))]$$

$$= COV(X(t_1), X(t_2)) + COV(Y(t_1), Y(t_2))$$

$(Z(t_1), Z(t_2), \cdots, Z(t_n))$ 的均值向量为 $\mu_X + \mu_Y$

协方差矩阵为$C_X + C_Y$.

问题：能否保证是非退化正态过程？

实际应用

怎样验证随机过程$X_T=\{X(t), t\in T\}$是正态随机过程?

任取$n\geq 1$，及 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$，记

$$X=(X(t_1),\ldots,X(t_n)),$$

算法步骤如下：

1) 计算X的n维协方差矩阵B；

2) 验证B的正定性；

3) 求正交矩阵U, 使$UBU^T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

4) 令$Y=UX$, Y的协方差矩阵为Λ；

称将X去相关

5) 检验$Y=(Y_1,Y_2, \ldots, Y_n)$的独立性；

6) 检验Y的一维分布的正态性.

随机过程统计推断问题

结论

若检验得$Y=(Y_1,Y_2, \ldots, Y_n)$是相互独立的正态随机变量，

$X=U^{-1}Y$是n维正态随机变量, 即

$X_T=\{X(t), t\in T\}$是正态随机过程.

思考

1)为以上算法写出理论依据;

2) 你能考虑用其他方法验证吗?

设$\{X(t), t\geq 0\}$是正态过程，则以下过程仍为正态过程。

1) 对任意的$\tau \geq 0, \{X(t+\tau)-X(\tau), t\geq 0\}$;

2) 对常数$\lambda \geq 0, \{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X(\lambda t), t\geq 0\}$;

3) $\{tX(\frac{1}{t}), t\geq 0\}$; 其中$tX(\frac{1}{t})|_{t=0}=0$;

4) 当$t_0 \geq 0$, $Z(s)=\begin{cases} X(t_0+s)-X(s), & s>0 \\ 0, & s=0 \end{cases}$

证 因B为对称正定矩阵, 存在正交阵U, 使得

$$U^T B U = \Lambda \Rightarrow B = U\Lambda U^T = QQ^T \quad (Q = U\sqrt{\Lambda})$$

$$\phi(u) = E\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^n u_k X_k\right)\right\}$$

$$= \oint_{R^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}} \exp\left(iu^T\vec{X} - \frac{1}{2}(\vec{X}-\mu)^T B^{-1}(\vec{X}-\mu)\right) dx_1\cdots dx_n$$

令 $\vec{Y} = Q^{-1}(\vec{X}-\mu)$,

$$= \oint_{R^n}\frac{e^{i\mu^T u}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(i(Q^Tu)^T\vec{Y} - \frac{1}{2}\vec{Y}^T\vec{Y}\right)dy_1\cdots dy_n$$

$$= \exp\left\{i\mu^T u - \frac{1}{2}(Q^Tu)^T(Q^Tu)\right\} = \exp\left\{i\mu^T u - \frac{1}{2}u^T B u\right\}$$

判定多维正态分布的方法：

1）概率密度函数；(定义3.1.1)

2）特征函数；(定义3.1.2)

3）任意非零线性组合服从一维正态分布；(定理3.1.6)

4）是某个多维正态分布的线性变换；(定理3.1.7)