微积分进阶

(初稿)

楼红卫　编

目　　录

第 0 章　绪论

为什么要开设本课程

在国内极大多数高等院校, 微积分都是一门理工科学生必修的课程. 对于数学类专业, 微积分的教学是通过讲授名为《数学分析》的课程来完成的, 而对于非数学类专业, 通常通过讲授名为《高等数学》或《微积分》的课程来完成.

相对来说,《高等数学》或《微积分》课程主要以了解、应用相应的知识为主, 通俗地讲就是对一些概念定理的要求只要求知其然, 而不需要知其所以然, 应用上往往以会算为目标. 但理工科学科发展的某些方面对数学提出了更高的要求, 所以对于一些希望今后在那些方面有所作为的 (乃至准备转向数学研究的) 同学来讲,《高等数学》或《微积分》课程就不能满足他们的要求. 另一方面, 一些非数学类专业学生也有一种愿望, 希望通过数学上的严格训练来提高自身的某种素养.

对于学习了《数学分析》课程的数学类专业的同学来讲, 他们在这方面已经受到了较好的训练. 但是由于教学进度、顺序的限制, 他们中的大多数对于数学分析知识的把握是零散的、肤浅的, 思维上也会有一些常见的混乱之处. 通常, 一些同学可以随着时间的推移逐步完整深入地把握这些知识, 并让自己的思维严谨起来. 这样一个过程对于那些准备从事数学工作的学生是非常重要的, 某种意义上是不可替代的[1]. 然而,《数学分析》对于数学类专业的大学生是如此重要, 如果有这样一门课程来协助这些同学回顾所学知识, 帮助他们从更深刻的角度审视改善自己 (数学方面) 的思维方式, 从本人自身的经历来看, 是非常有帮助的.

本课程与已学的《高等数学》与《数学分析》的区别

那么本课程与已学的《高等数学》与《数学分析》的区别在什么地方呢? 自然, 与《高等数学》课程的明显区别在于我们将强调基本理论, 通俗地讲就是重心更多地在于证明而不是计算. 而区别于现行《数学分析》课程的地方主要在于知识的融会贯通、以点带面、和知识扩充方面. 由于学生已经对相关知识有了一个较为全面的了解, 使得我们不必受制于初始讲授微积分时遇到的时序上的限制, 而可以对某一部分知识进行全面深入的研讨. 另外, 撇开了教学进度上的要求, 使得我们可以有一个纲领性的把握. 一言以蔽之, 即做到粗的更粗, 细的更细.

严密性

[1]这也许会成为是否应该开设本课程的一个争议之处

通常, 认为数学证明是严密的.《数学分析》之区别于《高等数学》, 重要的一条就在于严密性. 那么, 本课程将会提供严密的数学证明吗? 其实回答是否定的. 尽管在课程尚未开始之时指出这一点, 既不容易理解也有可能影响一部分同学的学习积极性. 但是, 我们觉得还是有必要指出, 通常的数学证明都称不上是绝对严密的. 借用英国数学家哈代的话:"严格说来，没有所谓证明这个东西，归根结蒂，我们只能指指点点."

但这决不意味着我们将放弃严密性. 与其他非数学学科不同, 数学证明的不严密性并不在于它不合逻辑, 而只是体现在事实上很少有人会严格按照逻辑的三段论来进行数学证明. 人们相信, 如果需要, 一个被认为是正确的数学证明是可以严密化的.

某种意义上, 一个证明应该写到如何严密, 是一种数学工作者必备的数学修养. 通过本课程的学习, 我们期望学生能够领会到什么是数学家们所能接受的严密性.

直觉和联想 除了逻辑, 数学还需要一些其他的东西. 要得到新的结果, 第一步是要提出这样的命题, 这通常不是靠逻辑推理就可以得到的. 这里需要数学上的一种直觉, 需要会联想. 事实上, 即使是证明本身, 也往往需要直觉的引导. 与逻辑能力一样, 数学的直觉也需要通过学习加以培养.

技巧 目前有一种倾向, 认为数学教学不应该太注重技巧训练. 但是, 学习数学分析不讲技巧是不对的. 只是我们需要对技巧做一些界定. 分析中有许多技巧是常用的, 比如对角线法, 逼近法, 这样的技巧具有普遍性, 且抓住问题的本质, 应该特别加以训练. 但也有的技巧是非本质的, 这样的技巧不应该化太多的精力去追求.

例 0.1. 设 $a, b > 0$ 满足 $a + 2b = 1$. 试求

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

的最小值.

解法 I: 考虑

$$\begin{aligned} & (a+2b)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big) \\ = \ & 3 + \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} \\ \geq \ & 3 + 2\sqrt{\frac{a}{b}\,\frac{2b}{a}} \\ = \ & 3 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

从而最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$, 且对应的 a, b 为 $a = \sqrt{2} - 1$, $b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

在这个解法中, 对于表达式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

乘上 $a+2b$ 无疑是一种技巧. 我们也可以找到使用这种技巧的理由. 尽管如此, 我们还是宁愿采用下面这种不那么技巧的方法.

解法 II:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{1-2b}+\frac{1}{b}.$$

记

$$x=\frac{1}{b},$$

则 $x>2$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\\ =\ &\frac{x}{x-2}+x\\ =\ &3+\frac{2}{x-2}+(x-2)\\ \geq\ &3+2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

从而最小值为 $3+2\sqrt{2}$, 且对应的 x 为 $2+\sqrt{2}$, 即 $a=\sqrt{2}-1$, $b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

学习中的要求 在学习中, 对自己提出适当的要求是非常重要的. 本人以为, 一个优秀的大学教师应该对学生提出恰当的要求, 持续地给学生提供略高于其现有水平的目标、任务.

对于学生来讲, 通过练习来检验、提高自己的能力是一个必要且有效的途径. 在这个过程中, 除了要努力争取独立地解决问题外, 还要注意不要满足于眼下已解决的特殊问题. 而应尽量去寻求问题的本质, 并推广结论.

例 0.2. 设 $a_1=0$, $a_2=2$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+1$. 证明当 n 为素数时,

$$n|a_n.$$

证明: 记

$$b_k=a_k+1,$$

则

$$b_1=1,\ b_2=3,\ b_k=b_{k-1}+b_{k-2}.$$

要证当 n 为素数时,

$$n|b_n-1.$$

显然当 $n=2$ 时, 结论成立.

证法 I: 我们可以求得 b_n 的表达式, 从而证明结论. 可以解得

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - 1.$$

现设 n 为大于 2 的素数. 则利用[2]

$$2^n = 2 \pmod n$$

以及

$$n|C_n^k, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

可得

$$\begin{aligned} 2^n a_n &= \left(\sqrt{5}+1\right)^n + \left(-\sqrt{5}+1\right)^n - 2^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} C_n^j (\sqrt{5})^j + \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-\sqrt{5})^j - 2^n \\ &= 2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2k} (\sqrt{5})^{2k} - 2^n \\ &= 2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2k} (\sqrt{5})^{2k} - (2^n - 2) = 0 \pmod n. \end{aligned}$$

即当 n 是奇素数时,

$$n | 2^n a_n.$$

由此立即可得结论.

如果仅仅满足于上面的证明, 那么我们只是证明了这个结论, 但没有更深刻的理解. 下面的证明, 看起来会比已给的证明繁琐, 但是它在证明过程中保留了更多的信息, 从而使我们更容易看到本题的关键之处.

证法 II: 记

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix},$$

从而补充定义 $b_0 = b_2 - b_1 = 2$, $b_{-1} = b_1 - b_0 = -1$, 我们有

$$\begin{aligned} b_n &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (1 \quad 0)\, A^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[2] $p = q(\bmod n)$ 表示 n 整除 $p - q$.

考虑

$$B = 2A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

则当 n 为奇素数时,

$$\begin{aligned} 2^n(b_n - 1) &= (1 \quad 0)(B+I)^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} - 2^n \\ &= (1 \quad 0)(B^n + I) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} - 2^n \\ &= (1 \quad 0) B^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} + b_0 - 2^n. \end{aligned}$$

可以验证

$$(1 \quad 0) B^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} = 0, \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{1}$$

从而

$$2^n(b_n - 1) = 2 - 2^n = 0 \pmod n.$$

这就证明了结论.

推广 通常, 能否对所做练习加以推广是对该练习的本质是否把握的一个指标. 根据解法 II, 我们可以容易地把本题加以推广.

可以看到, 题中结论成立的关键在于对于奇素数 n, 等式 (1) 以及 $b_0 - 2^n = 0 \pmod n$ 成立. 注意到 B 的特征根是一对相反数, 从而不难看到 (1) 对所有正奇数成立当且仅当 $n = 1$ 时它成立. 事实上, 此时, 设 λ 为 B 的一个特征值, 则 $B^2 = \lambda^2 I$, 从而

$$(1 \quad 0) B^{2k+1} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} = \lambda^{2k} (1 \quad 0) B \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix}.$$

这样对于满足递推公式 (α, β 是整数)

$$b_n = b_n + \beta b_{n-1}$$

的一列整数, 要使得 n 为奇素数时, 成立

$$n | b_n - \alpha,$$

只要有

$$b_0 - 2^n \alpha = 0 \pmod n$$

以及

$$(1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2\beta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} = 0$$

成立. 为此, 只要成立以下关系式:

$$b_0 = 2\alpha, \quad \alpha + \beta b_{-1} = 0.$$

取

$$\alpha = 3, \beta = 3, b_{-1} = -1.$$

则相应的 b_n 满足: 当 n 为奇素数时

$$n | b_n - 3.$$

注意到 $b_0 = 6, b_1 = 3$ 都含有因子 3, 事实上我们可以定义

$$c_0 = 2, c_1 = 1, c_n = c_{n-1} + 3c_{n-2},$$

则当 n 为大于 3 的素数时

$$n | b_n - 3 = 3(c_n - 1).$$

从而

$$n | c_n - 1.$$

直接验证 $n = 2, 3$ 的情形, 我们得到当 n 素数时, 总有

$$n | c_n - 1.$$

按此思路 (证明中乘 2^n 的地方还可以考虑用乘 3^n 代替), 我们可以构造出一大堆类似的例子.

我们再来看一个例子, 来说明我们希望读者如何对待遇到的数学问题.

例 0.3. 试求 $y = \ln x$ 在 $x = 4$ 与 $x = 8$ 之间的一条切线, 使得曲线与该切线, 直线 $x = 4$ 以及直线 $x = 8$ 所围的区域面积最小.

解: 设切点横坐标为 $x_0 \in [4, 8]$, 直接计算可以把相应区域的面积 S 用 x_0 表示出来. 然后通过求闭区间上函数 $S(x_0)$ 的最小值可以得到使面积 $S(x_0)$ 最小的 x_0 为 6.

对于大多数同学来讲, 上面的解题过程是非常自然的. 但是, 当我们得到切点横坐标为 6 时, 就不应该止步不前. 很明显, 6 是所考虑的区间 $[4, 8]$ 的中点. 那么这个中点是不是只是因为凑巧呢?

为此, 我们可以考虑区间改为一般的 $[a, b]$ $(0 < a < b)$. 有趣的是解答后发现相应问题的结果仍然是中点!

究竟是什么原因导致了这样的结果? 我们把这个问题留给读者.

注记. 最后, 花点时间比较一下一些相关课程的名称是一件有趣的事情. 对于一些读者来讲也是有必要的.

相对于西方一些国家的课程，在我国，由于某种历史上的原因，作为课程名,《微积分》几乎为文科专业所专用，这可能要归功于中国人民大学的文

科版《微积分》教材的影响; 而对于理工类专业，微积分课程被冠以《高等数学》. 《高等数学》课程基本是以微积分内容为主, 加入少量的解析几何和常微分方程的内容，教材则以同济大学版的《高等数学》影响最为显著. 近年来,《高等数学》教材把线性代数乃至概率统计的内容也加入其中, 这倒是让 “高等数学” 一词与其本意更加符合.

英国数学家 Hardy, Godfrey Harold (1877.2.7—1947.12.1)

习题 0

1. 试对例题 0.2 中的结论做推广, 构造出不同的例子来.
2. 研究例题 0.3.

第一章　分析基础，实数系基本定理

通常, 对于数学工作者来讲, 并不需要对建立实数系的详细过程有充分的了解. 人们可以把实数系所具备的一些最简单的性质作为公理, 由此出发, 来建立进一步的理论. 但是实数系的建立毕竟是现代数学的一块基石, 所以我们还是鼓励大家对此有一定的了解, 特别, 需要了解为什么需要用那样的方法去建立实数理论.

§1. 数的发展、有理数的基本性质

数的发展过程可以从两个方面来看, 一个是它的历史发展过程, 另一个是它的逻辑发展过程.

从历史上来看, 大概地, 人们对于数的认识过程可以用下表表示, 需要注意的是, 这是一个交叉、反复的过程[1]:

$$
\begin{array}{cl}
\text{正整数} & \\
\Downarrow & \text{引入正分数} \\
\text{正有理数} & \\
\Downarrow & \text{引入零} \\
\text{非负有理数} & \\
\Downarrow & \text{引入正无理数} \\
\text{非负实数} & \\
\Downarrow & \text{引入负数} \\
\text{实数} & \\
\Downarrow & \text{引入虚数} \\
\text{复数} &
\end{array}
$$

值得注意的是, 零并不是一开始就出现的, 所以, 曾经只把正整数才看作自然数[2].

---

[1] 不同的文化对数的认识过程有所区别.

[2] 1993 年颁布的《中华人民共和国国家标准》(GB 3100 3102-93)《量和单位》, 将零纳入自然数.

数的逻辑发展过程可以用下表表示:

$$
\begin{array}{cl}
\textbf{正整数 (半群, 良序集)} & \\
\Downarrow & \textbf{减法运算封闭} \\
\textbf{整数 (加群, 整环, 全序集)} & \\
\Downarrow & \textbf{除法运算封闭} \\
\textbf{有理数 (全序域)} & \\
\Downarrow & \textbf{完备化} \\
\textbf{实数 (有最小上界性的有序域)} & \\
\Downarrow & \textbf{对代数方程封闭} \\
\textbf{复数} &
\end{array}
$$

从逻辑的角度来看, 从自然数到有理数是一个自然的、可接受的过程[3]. 大家知道, 早在古希腊, 人们对于无理数就有了一定的认识, 知道了有些长度不能用有理数表示. 但是, 人们对于什么是无理数, 直到 19 世纪还没有一个可以接受的定义. 考虑一下什么是 $\sqrt{2}$, 是方程 $x^2=2$ 的根? 或者是

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, \ldots\ldots$$

的 "极限"? 细细想来, 都是有问题的.

尽管如此, 有一点是肯定的, 有理数是引入实数 (或无理数) 的基础.

下面我们回顾一下有理数所具有的一些基本性质.

有理数的基本运算有加法 (和)、减法 (差)、乘法 (积) 与除法 (商), 且有理数对四种运算是封闭的, 即任意两个有理数的和差积商 (除数不能为零) 还是有理数. 在总结这些性质时, 想一想矩阵的运算可能会有利于我们理解到有理数运算的这些特殊性. 在本章, 用 $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 分别表示正整数集, 整数集, 有理数集和将要定义的实数集.

全序集

定义 1.1. *设 F 是一个集合. F 上的***偏序***关系 "$\le$" 是 F 中元素之间的一种次序关系, 满足:*

(O1) **自反性.** *对于任何 $x\in F$, $x\le x$ 成立.*

(O2) **反对称性.** *对于任何 $x,y\in F$, 若 $x\le y$, 且 $y\le x$, 则 $x=y$.*

(O3) **传递性.** *若 $x,y,z\in F$ 满足 $x\le y$, 且 $y\le z$. 则 $x\le z$.*

*此时, 称 $(F,\le)$ 为一个***偏序集***.*

[3]尽管历史上, 某些文化对于负数和零的接受并不像现代人想象的那么顺利.

可以看到 $(\mathbb{Z}_+,\leq)$, $(\mathbb{Z},\leq)$ 和 $(\mathbb{Q},\leq)$ 都是偏序集.

定义 1.2. 设 $(F,\leq)$ 是一个偏序集. $x\in E\subseteq F$.

如果对任何 $y\in E$, 成立着

$$x\leq y,$$

则称 x 为 E 的**最小元**.

如果 F 的任何子集都有最小元, 则称 $(F,\leq)$ 是一个**良序集**.

易见, $(\mathbb{Z}_+,\leq)$ 是良序集, 但 $(\mathbb{Z},\leq)$ 和 $(\mathbb{Q},\leq)$ 都不是良序集.

定义 1.3. 设 F 是一个集合. 如果 F 中元素之间的一种次序关系 "$<$", 满足传递性 (O3) 和:

(O4) **反自反性.** 对于任何 $x\in F$, $x<x$ 不成立.

则称 "$<$" 为 F 上的一个**拟序**关系. 此时, $(F,<)$ 就成为是一个**拟序集**.

易见 $(\mathbb{Z}_+,<)$, $(\mathbb{Z},<)$ 和 $(\mathbb{Q},<)$ 都是拟序集.

另一方面, 不难由偏序关系 (拟序关系) 定义一个与之相对应的拟序关系 (偏序关系). 参见习题 1.

定义 1.4. 设 $(F,\leq)$ 是一个偏序集. 且具有以下性质:

(O5) **全序性.** 对于任何 $x,y\in F$, 下列关系式至少有一个成立:

$$x\leq y,\quad y\leq x.$$

则称 $(F,\leq)$ 是一个**全序集**[4].

可以看到对于 $F=\mathbb{Z}_+,\mathbb{Z},\mathbb{Q}$, $(F,\leq)$ 是全序集.

加群.

定义 1.5. 设 F 和其上的一种加法运算 "$+$" 满足如下性质:

(A1) **封闭性.** 若 $x,y\in F$, 则 $x+y\in F$.

(A2) **结合律.** 对于任何 $x,y,z\in F$, 有

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

[4] 对于拟序集 $(F,<)$, 如果对任何 $x,y\in F$, 以下的 $x<y$, $x=y$, $y<x$ 三者之一成立, 则也称 $(F,<)$ 为全序集.

(A3) **交换律.** 对于任何 $x, y \in F$, 有

$$x + y = y + x.$$

(A4) **存在零元.** 元素 $0 \in F$ 满足: 对于任何 $x \in F$,

$$x + 0 = x.$$

(A5) **存在负元.** 对于任何 $x \in F$, 存在一个元素 $y \in F$ (记做 $-x$) 满足

$$x + (-x) = 0.$$

则称 $(F, +)$ 为一个**可交换群**[5](或 **Abel 群**, **加群**[6]).

可以看到 $(Z, +)$ 和 $(Q, +)$ 都是加群, 但 $(Z_+, +)$ 不是.

域.

定义 1.6. 设 F 和其上的一种加法运算 "+" 和一种乘法运算 "·", 使得 $(F, +)$ 构成一个加群且满足如下性质[7]:

(M1) **乘法封闭性.** 若 $x, y \in F$, 则 $xy \in F$.

(M2) **乘法结合律.** 对于任何 $x, y, z \in F$, 有

$$(xy)z = x(yz).$$

(M3) **乘法交换律.** 对于任何 $x, y \in F$, 有

$$xy = yx.$$

(M4) **乘法单位元存在.** 元素 $1 \in F$ 满足: 对于任何 $x \in F$,

$$1x = x.$$

(M5) **非零元存在逆元.** 对于任何非零的 $x \in F$, 存在一个元素 $y \in F$ (记做 $1/x$) 满足

$$x(1/x) = 1.$$

且乘法和加法的混合运算满足

[5]满足 (A1)—(A2) 的 $(F, +)$ 称为**半群**.
[6]一般只有当这里的运算用 "+" 表示时, 才称为加群.
[7]为简单起见, 常用 xy 表示 $x \cdot y$.

(AM) **分配率.** 对于任何 $x, y, z \in F$, 有

$$x(y+z) = xy + xz.$$

则称 $(F, +, \cdot)$ 是一个域.

可以看到 $(Q, +, \cdot)$ 是一个域, 但 $(Z_+, +, \cdot)$ 和 $(Z, +, \cdot)$ 不是域.

在域中, 人们经常用

$$x - y, \frac{x}{y}, , 2x, 3x, x^2, x^3, \ldots$$

等表示

$$x + (-y), x \cdot \frac{1}{y}, x + x, x + x + x, xx, xxx, \ldots.$$

上面出现的表达式 $2x, 3x$ 中的 $2, 3$ 等符号并不表示是 F 的元, 而是作为 Z_+ 中的元出现的. 自然, $2x$ 并不表示 $2 \cdot x$. 当然, 如果在 F 中把

$$1+1, 1+1+1, \ldots$$

记做

$$2, 3, \ldots,$$

则恰好有

$$x + x = 2 \cdot x, \quad x + x + x = 3 \cdot x.$$

另一方面在域中

$$(x+y)+z = x+(y+z), (xy)z = x(yz),$$

所以人们可以用

$$x + y + z, xyz$$

来代替

$$(x+y)+z, (xy)z$$

而不会产生歧义.

定义 1.7. 设 F 是一个域, 也是一个全序集, 且满足

(AO) 对任何 $x, y, z \in F$, 若 $y \leq z$, 则

$$x + y \leq x + z.$$

(MO) 若 $0 \leq x, y$, 则

$$0 \leq xy.$$

则称 F 为一个**全序域**.

我们用 “$x=y$” 表示 “x 与 y 是同一元”, 用 “$x \neq y$” 表示 “x 与 y 不是同一元”. 则对于全序域 F, 如果 $(F, \leq)$ 是一个偏序集, 我们用 “$x<y$” 表示 “$x \leq y$, 且 $x \neq y$”; 如果 $(F,<)$ 是一个拟序集, 则用 “$x \leq y$” 表示 “$x<y$ 或 $x=y$”. 另一方面, 用 $x \geq y$ 和 $x>y$ 表示 $y \leq x$ 和 $y>x$; 用 $x \leq y \leq z$ 表示 “$x \leq y$ 且 $y \leq z$”, 等等.

稠密性

一个全序域必然具备以下的稠密性.

定理 1.8. *设 F 是一个全序域, 则对于任何 $x<y$, 存在 $z \in F$ 使得*

$$x<z<y.$$

证明. 记 $2=1+1$. 由 $x<y$ 以及全序域的定义, 不难得到 (参见习题 (5))

$$2x<x+y<2y.$$

于是只要取

$$z=\frac{(x+y)}{2},$$

就有

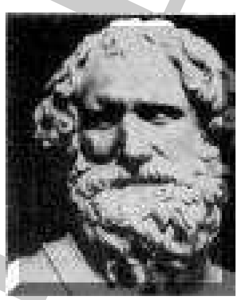
$$x<z<y.$$

□

阿基米德性

容易验证, 有理数域 Q 具有如下阿基米德性:

对于任何 $x>0$ 以及 $y \in Q$, 一定有 $n \in Z_{+}$ 使得 $nx>y$.



古希腊数学家 Archimedes (约公元前 287 年－公元前 212 年)

习题 1.1.

1. 证明:

   (i) 设 $(F,\leq)$ 是一个偏序集, 以 $x<y$ 表示 $x\leq y$, 且 $x\neq y$. 则 $(F,<)$ 是拟序集.

   (ii) 设 $(F,<)$ 是一个拟序集, 以 $x\leq y$ 表示 $x<y$ 或 $x=y$. 则 $(F,\leq)$ 是偏序集.

2. 证明良序集一定是全序集. 反之不然.

3. 设 F 是 Q 的所有子集组成的集合. $\subseteq$ 是集合间的通常的包含关系. 证明 $(F,\subseteq)$ 是一个偏序集, 但不是良序集.

4. 证明:

   (i) 若条件 (M1)—(M5) 成立, 则 $(F\setminus\{0\},\cdot)$ 是一个交换群.

   (ii) 若 $(F,+)$ 是一个加群, $(F\setminus\{0\},\cdot)$ 是一个交换群, 且交换律 (AM) 成立, 则 $(F,+,\cdot)$ 是一个域.

5. 证明: 若 F 是一个全序集, 且是一个域, 则条件 (AO) 和 (MO) 分别等价于

   (AO′) 对任何 $x,y,z\in F$, 若 $y<z$, 则
   $$x+y<x+z.$$

   (MO′) 若 $0<x,y$, 则
   $$0<xy.$$

6. 称全序域 F 和全序域 G(序) 同构, 是指 F 和 G 之间存在一个一一对应 f, 使得
   $$f(x+y)=f(x)+f(y),$$
   $$f(xy)=f(x)f(y),$$
   以及
   $$x>y\Longrightarrow f(x)>f(y).$$
   证明: 若 f 是全序域 F 到全序域 G 的一个序同构映射, $0,1$ 为 F 的零元和单位元. 则 $f(0),f(1)$ 分别是 G 中的零元和单位元.

7. 证明: 任何全序域都包含惟一一个子域与有理数域同构, 从而可以认为任何一个有序域都以有理数域作为其子域.

8. 设 F 是一个全序域, $\alpha\in F$ 满足 $\alpha\geq 0$ 以及
   $$\forall\,\varepsilon>0,\alpha<\varepsilon.$$
   证明 $\alpha=0$.

9. (思考题) 对于全序域 F, 是否一定有阿基米德性?

§2. 实数系的建立

无理数的发现导致了第一次数学危机. 凡是数都可以表示成为整数的比不仅仅是毕达哥拉斯学派的一种信仰而已. 承认任何两条线段都是可公度的, 即存在一条更短的线段, 使得给出的两条线段都是该短线段的整数倍, 是定义一些概念的基础. 对于毕达哥拉斯学派而言, 没有可公度性, 甚至连长度、面积等基本概念的定义都将成为问题.

人们认识到有理数 (分数) 表示成十进制小数时是有限小数或无限循环小数, 所以自然地想到用无限不循环小数来定义无理数. 但是 “无限不循环”

在逻辑上不是一个可以把握的定义. 鉴于最早发现的无理数是代数方程的根, 人们也曾企图借助代数方程的根来定义无理数, 但是人们也发现这不能填补数的所有 “空白”.

下面, 我们回顾 $\sqrt{2}$ 不是有理数的证明来看看我们需要填补怎样的 “空白”. 这里, 有必要指出, 在引入无理数的定义之前, $\sqrt{2}$ 是什么东西本身就是有问题的. 所以我们需要换成以下的叙述方式: 2 不是任何 (正) 有理数的平方[1]. 上述命题的经典证明如下: 假若不然, 设有有理数 $\frac{q}{p}$ 的平方是 2, 其中 p, q 是既约的. 则

$$q^2 = 2p^2.$$

所以 2 整除 q. 这样 $q = 2k$, 其中 k 是整数. 代入上式并约去因子 2 可得

$$2k^2 = p^2.$$

于是又有 2 整除 p. 从而 p, q 有公因子 2. 这与 p, q 是既约的矛盾. 所以 2 不是任何 (正) 有理数的平方.

进一步, 如果用 L 表示所有平方小于 2 的正有理数的集合, U 表示所有平方大于 2 的正有理数的集合. 对于任何正有理数 p, 令

$$q = \frac{2+2p}{p+2}.$$

则不难验证当 $p \in L$ 时, $q > p$, 且 $q \in L$. 而当 $p \in U$ 时, $q < p$, 且 $q \in U$.

这样我们看到所有正有理数被分成 U 和 L 两部分: L 中任何一个元素都小于 U 中任何一个元素, 且 L 中没有最大值, U 中没有最小值. 这就表明有理数之间是有 “空隙” 的.

把有理数扩充到更广泛意义上的数, 主要目的就是要填补这些空隙.

下面我们介绍 Dedekind 用分划来构造实数的方法. 这一构造法于 1872 年发表. 为把握关键点, 我们只给出主要框架, 而把一些细节留作习题.

I. 分划的引入.

称 $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ 为一个分划, 如果:

1. $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
2. 若 $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$, $q \in \alpha$, 则 $p \in \alpha$,
3. 若 $q \in \alpha$, 则存在 $p \in \mathbb{Q}$, $p > q$, 使得 $p \in \alpha$.

可以看到一个分划 α 把有理数集 $\mathbb{Q}$ 分成两部分: α 和它的余集 $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. 余集给出了 α 的所有上界, 而 α 本身并不含有自身的上界.

[1] 请读者思考这里为什么不这样叙述: “$\sqrt{2}$ 是无理数”.

下面我们总用 p, q, r 等英文小写字母来表示有理数, 用 α, β, γ 等希腊小写字母表示分划, 所有分划组成的集合记为 $\mathbb{R}$.

II. 在 $\mathbb{R}$ 中引入序.

规定 $\alpha \le \beta$ 为: $\alpha \subseteq \beta$. 则容易验证 $(\mathbb{R}, \le)$ 构成一个全序集.

如同前面指出的那样, $\alpha = \beta$ 表示 α 和 β 这两个分划完全相同, 而 $\alpha < \beta$ 表示 $\alpha \le \beta$ 且 $\alpha \ne \beta$, 这等价于 α 是 β 的真子集.

III. 在 $\mathbb{R}$ 中引入加法.

定义

$$\alpha + \beta = \{p + q |\, p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

则容易验证加法满足封闭性, 结合率, 交换率. 定义

$$0^* = \{p | p < 0\}.$$

可以验证 0^* 即为零元:

$$\alpha + 0^* = \alpha, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

现在来构造负元. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, 定义

$$\beta = \{p | \text{存在} r > 0, \quad \text{使得对任何} q \in \alpha, \text{成立} p + q + r < 0\}. \tag{2.1}$$

易证 $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \le 0^*$. 下证 $0^* \le \alpha + \beta$. 为此, 只要证明对于任何 $s < 0$, 存在 $p \in \alpha, q \in \beta$, 使得 $s \le p + q$.

利用分划的定义和有理数的阿基米德性, 可以证明存在 p 使得

$$p \in \alpha, \quad p + \frac{-s}{2} \notin \alpha,$$

于是对任何 $v \in \alpha$,

$$(-p + s) + v + \frac{-s}{2} < 0.$$

从而 $-p + s \in \beta$. 这样 $s = (-p + s) + p \in \alpha + \beta$.

总之, 我们得到了 $\alpha + \beta = 0^*$. 这就证明了 β 是 α 的负元, 记为 $-\alpha$.

IV. 在 $\mathbb{R}$ 中引入乘法.

乘法的定义要麻烦一些. 我们先在 $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha > 0^*\}$ 中引入乘法. 对 $\alpha > 0^*$, β^* 定义 $\alpha\beta$:

$$\alpha\beta \triangleq \{pq | p \in \alpha, q \in \beta, p > 0, q > 0\} \bigcup \{r | r \le 0\}.$$

则不难证明乘法在 $\mathbb{R}^+$ 中满足封闭性、结合率、交换率和分配率. 进一步, 令

$$1^* = \{p \big| p < 1\}.$$

则 1^* 是乘法单位元:

$$\alpha \cdot 1^* = \alpha, \qquad \forall\, \alpha > 0^*.$$

类似于负元的构造, 对于 $\alpha > 0^*$, 可以构造逆元

$$\frac{1}{\alpha} \triangleq \{p > 0 | \exists\, r > 0, \text{使得}\ \forall\, q \in \alpha, q > 0 \text{有} pq < 1 - r\} \bigcup \{r \big| r \leq 0\}.$$

则类似负元的情形可以验证 $\frac{1}{\alpha}$ 是 α 的逆元:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1^*.$$

一般地, 定义

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha\beta, & \text{如果 } \alpha > 0^*, \beta > 0^*, \\ 0^*, & \text{如果 } \alpha = 0^* \text{ 或 } \beta = 0^*, \\ -(-\alpha)\beta, & \text{如果 } \alpha < 0^*, \beta > 0^*, \\ -\alpha(-\beta), & \text{如果 } \alpha > 0^*, \beta < 0^*, \\ (-\alpha)(-\beta), & \text{如果 } \alpha < 0^*, \beta < 0^*, \end{cases}$$

则 $\mathbb{R}$ 中任意两个元的乘法得以定义. 容易验证封闭性、交换率、结合率成立. 下证分配率

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

成立. 这需要分情形加以讨论. 若 α 和 $\beta + \gamma$ 之一为 0^*, 则易见分配率成立. 其余情形都可以等价地化为 $\alpha > 0^*$ 且 $\beta + \gamma > 0^*$ 的情形. 这样, 只要证明 $\alpha > 0^*$, $\beta + \gamma > 0^*$, $\gamma < 0^*$ 时分配率成立即可以. 由 $\mathbb{R}^+$ 中的结果,

$$\alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\gamma) = \alpha(\beta + \gamma + (-\gamma)) = \alpha\beta.$$

从而

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta - \alpha(-\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

即分配率成立.

V. $\mathbb{R}$ 是全序域.

前面已经证明了 $\mathbb{R}$ 是一个全序集且是一个域. 显然, 由加法和乘法的定义立即可知 $\alpha, \beta \geq 0^*$ 蕴涵着

$$\alpha + \beta \geq 0^*, \quad \alpha\beta \geq 0^*,$$

因而 $\mathbb{R}$ 是一个全序域.

VI. $\mathbb{R}$ 具有最小上界性.

若 $\mathbb{R}$ 的非空子集 E 有上界, 即存在 $\beta \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha \leq \beta, \qquad \forall\, \alpha \in E,$$

则直接验证可知

$$\gamma \equiv \bigcup_{\alpha \in E} \alpha$$

为 E 的最小上界, 即 γ 满足: 1) γ 是 E 的一个上界; 2) 若 σ 是 E 的上界, 则 $\gamma \leq \sigma$. 以后称 γ 为 E 的上确界[2], 记作 $\sup E$.

VII. 有理数域 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集.

对于 $q \in \mathbb{Q}$, 用 q^* 表示 $\mathbb{R}$ 中的元

$$\{p | p < q\}.$$

记

$$\mathbb{Q}^* = \{q^* | q \in \mathbb{Q}\}.$$

则 $T : q \mapsto q^*$ 建立了 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Q}^*$ 之间的一个一一对应, 它满足

(i) $(p+q)^* = p^* + q^*$,

(ii) $(pq)^* = p^* q^*$,

(iii) 若 $p \geq 0$, 则 $p^* \geq 0^*$.

这样, 对于四则运算来讲, 在 $\mathbb{Q}$ 中的元之间的运算、序关系与对应的元在 $\mathbb{Q}^*$ 中的运算、序关系完全一样 (结合 (iii) 和 (i) 可得, 若 $p \geq q$, 则 $p^* \geq q^*$). 我们称之为 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}^*$ 序同构. 从而在这种序同构的意义下, 可以将 $\mathbb{Q}^*$ 的元与 $\mathbb{Q}$ 中的元等同起来. 正是在这种意义下, 我们将 $\mathbb{Q}$ 看作是 $\mathbb{R}$ 的子集. 特别, 以后就将 $0^*, 1^*$ 等用 $0, 1$ 等表示.

今后称 $\mathbb{R}$ 中不属于 $\mathbb{Q}^*$ 的元为无理数.

VIII. $\mathbb{R}$ 的阿基米德性.

$\mathbb{R}$ 的阿基米德性可由 $\mathbb{Q}$ 的阿基米德性得到. 对于任何 $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, 由 $\alpha > 0$ 的定义可得[3]存在 $q \in \mathbb{Q}^+$ 使得 $q < \alpha$. 而另一方面有 $p \in \mathbb{Q}$ 使得 $p > \beta$. 由有理数的阿基米德性, 存在正整数 n 使得

$$nq > p.$$

[2]若 $\mathbb{R}$ 的非空子集 E 有下界, 则 E 一定有最大下界, 称为 E 的下确界, 记作 $\inf E$.

[3]严格说来, 得到的是 $q \in \alpha$ 或 $q^* < \alpha$.

从而

$$n\alpha > nq > p > \beta.$$

即证实数的阿基米德性.

IX. $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性其实已经在 III 中构造负元时用到. 对于任何 $\alpha \in \mathbb{R}$ 以及 $s \in \mathbb{Q}^+$, 我们要证明存在一个 $q \in \mathbb{Q}$ 使得

$$-s \le \alpha - q \le s.$$

可以取到 $p \in \mathbb{Q}$ 满足 $p \in \alpha$. 利用阿基米德性有正整数 n 使得

$$ns \ge \alpha - p.$$

设 k 为 $1, 2, \cdots, n$ 中满足

$$ks \ge \alpha - p$$

的最小一个数, 则

$$p + (k-1)s < \alpha, \quad p + ks \ge \alpha.$$

易见 $q = p + ks$ 满足要求.

注 2.1. 对于给定的 α, 设 β 由 (2.1) 定义, 则关于 $0^* \le \alpha + \beta$ 的证明也可以按如下方法进行. 这种证明虽然没有那么简洁, 当对于很多读者来说, 这种证明可能更自然. 其思路就是找两个与 α 和 β 的"最小上界"非常接近的两个有理数. 利用分划的定义和有理数的阿基米德性, 可以证明存在 p, q 使得

$$p \in \alpha, \quad p + \frac{-s}{2} \notin \alpha,$$

$$q \in \beta, \quad q + \frac{-s}{4} \notin \beta.$$

由 β 的定义, 可知, 对于

$$r = \frac{-s}{4} > 0,$$

存在 $v \in \alpha$, 使得

$$q + \frac{-s}{4} + v + r \ge 0.$$

即

$$q \ge \frac{s}{2} - v.$$

而由 $p \notin \alpha$ 知

$$p + \frac{-s}{2} > v.$$

于是

$$p+q \quad \geq \quad p+\frac{s}{2}-v>s.$$

这就证明了 $s \in \beta$

注 2.2. 有时候我们需要引入广义实数系, 它包含 $\mathbb{R}$ 以及两个无穷大: 正无穷大 $+\infty$ 和负无穷大 $-\infty$. 规定

$$-\infty<x<+\infty, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

广义实数系并不构成域, 但通常对于 $x \in \mathbb{R}$, 我们规定

$$x+(+\infty)=+\infty, \quad x-(+\infty)=-\infty,$$

$$x+(-\infty)=-\infty, x-(-\infty)=+\infty$$

以及

$$\frac{1}{+\infty}=\frac{1}{-\infty}=0.$$

进一步, 若 $x>0$, 则规定

$$x \cdot(+\infty)=+\infty, \quad x \cdot(-\infty)=-\infty,$$

若 $x<0$, 规定

$$x \cdot(+\infty)=-\infty, \quad x \cdot(-\infty)=+\infty,$$

但是 $(+\infty)+(-\infty)$, $+\infty-(+\infty)$, $0 \cdot(+\infty)$ 等无意义.

在广义实数系中, 若 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集 E 无上界, 则可记

$$\sup E=+\infty;$$

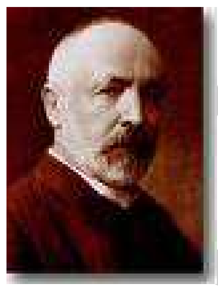
若 $\mathbb{R}$ 的一个子集 E 无下界, 则在可记

$$\sup E=-\infty.$$

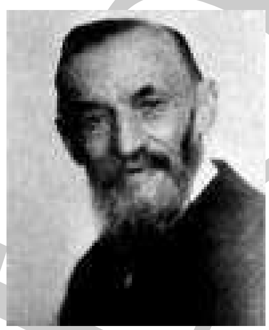
注 2.3. 同样是在 1872 年, Cantor 发表了利用 Cauchy 列构造实数系的方法.

注 2.4. 利用有理数域建立实数系后, 回头看, 我们却发现我们竟然还没有定义什么是自然数. 定义自然数似乎是比定义实数更考验人类的智慧. 它在数学史上, 曾经引起了激烈的争论. 有兴趣的读者可以查阅英国数学家 Russell 和 Whitehead 以及意大利数学家 Peano 的有关著作.

德国数学家 Dedekind, Julius Wilhelm Richard (1831—1916)

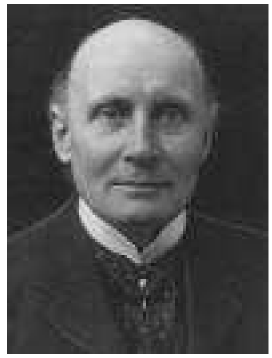


德国数学家 Cantor, Georg Ferdinard Ludwig Philip (1854—1918)



意大利数学家 Peano, Giuseppe (1858.8.27—1932.4.20)

英国数学家 Russell, Bertrand Arthur Willian (1872—1970)



英国数学家 Whitehead, Alfred North (1861—1947)

习题 1.2.

1. 试利用等价的 Cauchy 列将有理数域扩充为实数域.
2. 证明具有最小上界性的全序域与实数域序同构.
3. 对于任何 $\alpha < \beta$, 证明存在有理数 q 和无理数 x 使得
$$\alpha < q < \beta, \quad \alpha < x < \beta.$$
4. 对于 $x > 0$, $n \in Z^+$, 试按以下方式证明满足 $\beta^n = x$ 的实数 $\beta > 0$ 存在惟一. 该实数记为 $x^{\frac{1}{n}}$.

   定义
$$E_x = \{q > 0 | q^n < x\}.$$
   (a) 证明 E_x 有上界.
   (b) 证明 $\beta = \sup E_x$ 满足 $\beta^n = x$.
   (c) 证明对于 $x > 0$, 满足 $\beta^n = x$ 的正实数 β 惟一.
5. 对于 $x, y > 0$, $m, n \in Z^+$, 证明:
   (a) 若 $x > y$, 则 $x^{\frac{1}{n}} > y^{\frac{1}{n}}$.
   (b) 若 $m > n$, $x > 1$, 则 $x^{\frac{1}{n}} > x^{\frac{1}{m}}$.
   (c) $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$.
   (d) $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$.

   特别对于任意 $x > 0$ 以及 $q \in \mathbb{Q}^+$, x^q 有意义. 进一步, 可以定义 $x^0 = 1$ 以及 x^{-q} 为
$$x^{-q} = \frac{1}{q^x}.$$
   试叙述并证明 x^q 的基本性质.
6. 对于 $x > 1, y \in \mathbb{R}$, 定义 x^y 如下:
$$x^y = \sup\{x^q | q < y\}.$$
   证明: 当 $y \in \mathbb{Q}$ 时, 这一定义与前面一致. 进一步, 试叙述并证明 x^y 的基本性质.
7. 对于 $a > 0, b > 0, a \neq 1$, 给出 $\log_a b$ 的定义.
8. 设有 $\mathbb{R}$ 的非空子集 $\{x_\alpha | \alpha \in I\}$ 和 $\{y_\alpha | \alpha \in I\}$, 其中 I 是一个指标集. 在广义实数系中,
   (a) 证明
$$\inf_{\alpha \in I}(-x_\alpha) = -\sup_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

(b) 证明, 对于以下不等式中每一个不等式, 只要该不等式两端都有意义, 就有

$$\begin{aligned} & \inf_{\alpha\in I} x_\alpha + \inf_{\alpha\in I} y_\alpha, \\ \le\ & \inf_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) \\ \le\ & \sup_{\alpha\in I} x_\alpha + \inf_{\alpha\in I} y_\alpha, \\ \le\ & \sup_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) \\ \le\ & \sup_{\alpha\in I} x_\alpha + \sup_{\alpha\in I} y_\alpha, \end{aligned}$$

(c) 若

$$x_\alpha > 0, \qquad \forall\, \alpha \in I.$$

则若在此种情形规定 $\frac{1}{0} = +\infty$, 我们有

$$\sup_{\alpha\in I} \frac{1}{x_\alpha} = \frac{1}{\inf\limits_{\alpha\in I} x_\alpha}.$$

(d) 若

$$x_\alpha > 0, y_\alpha > 0, \qquad \forall\, \alpha \in I.$$

证明, 在广义实数系中, 对于以下不等式中每一个不等式, 只要该不等式两端都有意义, 就有

$$\begin{aligned} & \inf_{\alpha\in I} x_\alpha \inf_{\alpha\in I} y_\alpha, \\ \le\ & \inf_{\alpha\in I}(x_\alpha y_\alpha) \\ \le\ & \sup_{\alpha\in I} x_\alpha \inf_{\alpha\in I} y_\alpha, \\ \le\ & \sup_{\alpha\in I}(x_\alpha y_\alpha) \\ \le\ & \sup_{\alpha\in I} x_\alpha \sup_{\alpha\in I} y_\alpha, \end{aligned}$$

9. 思考题: 如何定义三角函数与反三角函数.

§3. 实数系基本定理

本节介绍实数系的基本定理. 利用 Dedekind 方法建立实数系时, 我们已经看到实数系自然地具备了最小上界性, 我们称之为**上确界存在定理**:

定理 3.1. (**上确界存在定理**) 任何非空的、上方有界的数集都有上确界.

类似地有

定理 3.1′.(下确界存在定理) 任何非空的、下方有界的数集都有下确界.

如果采用 Cauchy 列的等价类来构造实数系, 则容易证明以下的 **Cauchy 准则**成立:

定理 3.2. (**Cauchy 准则**) 设 a_n 是实数列, 则 a_n 收敛的充分必要条件是它是 Cauchy 列. 即: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N >$, 当 $n > N$ 时, 成立

$$|a_n - a_m| \le \varepsilon.$$

如果要说明两种构造方式的等价性就需要证明定理 3.1 和 3.2 之间的等价性. 事实上, 不仅这两个定理是等价的, 实数系中还有其他 5 个与它们等价的基本定理. 它们是

定理 3.3. (单调有界定理) 单调有界数列必有极限.

定理 3.4. (闭区间套定理) 设 $[a_n, b_n]$ 是一列闭区间, 满足

1. $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

则 $[a_n, b_n]$ 有惟一的公共点 ξ. 事实上,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

定理 3.5. (聚点原则) 有界无穷集必有聚点[1].

定理 3.6. (Bolzano-Weierstrass 定理、致密性定理) 有界点列必有收敛子列.

定理 3.7. (Heine-Borel 定理、有限覆盖定理) 开区间所组成的集族 $\mathcal{E}$ 覆盖一个闭区间 $[a, b]$, 则总可以从 $\mathcal{E}$ 中选出有限个开区间, 使之覆盖 $[a, b]$.

上述定理的等价性可以按以下次序证明:

定理 $3.1'$ $\Longleftrightarrow$ 定理 3.1 $\Longrightarrow$ 定理 3.3 $\Longrightarrow$ 定理 3.4 $\Longrightarrow$ 定理 3.7 $\Longrightarrow$ 定理 3.5 $\Longrightarrow$ 定理 3.6 $\Longrightarrow$ 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.1.

我们来证明其中的 "定理 3.4 $\Longrightarrow$ 定理 3.7" 和 "定理 3.7 $\Longrightarrow$ 定理 3.5". 余下的证明留给读者.

定理 3.4 $\Longrightarrow$ 定理 3.7.

设有限闭区间 $[a, b]$ 被开集族 $\mathscr{F} = \{V_\alpha | \alpha \in I\}$ 覆盖, 即

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha.$$

我们要利用区间套定理来证明存在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$ 使得

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{\alpha_k},$$

此时, 称 $[a, b]$ 可以 (被 $\mathscr{F}$ 中的元) 有限覆盖.

现在用反证法. 设 $[a, b]$ 不能被有限覆盖.

[1]设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 称 $x \in \mathbb{R}$ 是 E 的聚点, 如果 $\forall\, \delta > 0$, $(x-\delta, x+\delta) \cap E$ 是无限集.

记

$$a_1 = a, b_1 = b.$$

则由假设, 区间 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ 中至少有一个不能被有限覆盖. 记该区间为 $[a_2, b_2]$. 则

$$[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1], \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

一般地, 可以找到 $[a_n, b_n]$ 不能被有限覆盖, 且满足

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}], \quad b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

这样, 由区间套定理, 知存在惟一的 ξ 属于所有闭区间 $[a_n, b_n]$. 特别

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{3.1}$$

由于 $\mathscr{F}$ 覆盖 $[a, b]$, $\xi \in [a, b]$, 因此, 存在 $\alpha \in I$ 使得

$$\xi \in V_\alpha.$$

由于 V_α 是开集, 故存在 $\delta > 0$ 使得

$$(\xi - \alpha, \xi + \delta) \subseteq V_\alpha.$$

由 (3.1), 存在足够大的 n 使得

$$[a_n, b_n] \subset (\xi - \alpha, \xi + \delta) \subseteq V_\alpha.$$

这与 $[a_n, b_n]$ 不能有限覆盖矛盾.

这样, 我们就证明了结论. □

定理 3.7 $\Longrightarrow$ 定理 3.5

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是一个有界无穷集. 我们要利用有限覆盖定理来证明它一定有聚点 (不一定在 E 内).

由有界性, 可设

$$E \subseteq [a, b].$$

假如 E 没有聚点, 则 $[a, b]$ 中任何一点都不是 E 的聚点. 这样, $\forall\, x \in [a, b]$, $\exists\, \delta_x > 0$, 使得

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \bigcap E \subseteq \{x\}.$$

注意到

$$\bigcup_{x\in[a,b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supseteq [a, b].$$

因而由有限覆盖定理, 知有 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$, 使得

$$\bigcup_{k=1}^{n}(x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}) \supseteq [a,b] \supseteq E.$$

由于每个 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 中至多含有一个 E 中的点, 因而 E 为有限集. 这与假设矛盾.

这样, 我们就证明了结论. $\square$

法国数学家 Cauchy, Augustin Louis (1789.8.21—1857.5.23)

法国数学家 Borel, Félix-douard-Justin Émile (1871—1956)

德国数学家 Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm (1815—1897)

捷克数学家 Bolzano, Bernhard (1781—1848)

习题 1.3.

1. 试由 Cauchy 准则证明上确界存在定理.
2. 证明 x 是 E 的聚点当且仅当: $\forall\, \delta > 0$, $(x-\delta, x+\delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. 这一结论可以作为聚点的等价定义.
3. 证明 Bolzano-Borel 有限覆盖定理更一般的形式: $\mathbb{R}$ 中的有界闭集的开覆盖都有有限子覆盖.
4. 本节 7 个基本定理中, 哪些可以推广到高维情形? 试在高维情形叙述并证明这些定理.

   进一步, 思考我们在证明本节 7 个定理的等价性时默认了哪些性质?

第二章　极限与连续

从本章开始, 课程将主要以讨论例题的形式来展开.

分析课程的内容几乎都围绕极限而展开. 一定程度上, 学习数学分析就是一个对极限概念逐步深入理解的过程. 从自以为懂到真正理解, 从对单个极限的理解到对一致收敛性和多个极限、尤其是两个嵌套的极限的理解, 无不意味着本身分析素养的翟升.

本章涉及的极限和连续, 主要是单个极限的问题.

§1. 极限定义

在本节, 我们将回顾极限定义, 还将利用极限定义简单地介绍否定陈述的数学表示.

极限定义的精确描述应该归功于 Weierstrass, 以函数极限为例, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的数学描述 (常称为 ε—δ 语言) 为

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta\,\text{时, 有}\, |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

在运用中, 我们经常需要改变极限定义的表达形式. 认识到怎样的表示与原始的极限定义等价, 也反映了对极限的理解程度. 举例来说, 我们可以将极限定义改写为如下形式: 设 $M, L > 0$ 为两个给定的常数, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 可定义为

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \text{当}\, 0 < |x - x_0| < L\delta\,\text{时, 有}\, |f(x) - A| \le M\varepsilon.$$

我们鼓励读者写出其他等价性显然的、方便于应用的定义形式.

在书写中, $\forall$, $\exists$ 等符号的先后位置是很重要的. 例如上面极限定义中, $\forall$ 和 $\exists$ 的位置是不能交换的. 我们讲 "对于任意的 $\varepsilon > 0$" 时, ε 是**任意**一个大于 0 的数, 它有任意性, 但是它也有确定性. 比如我们经常会看到有的时候人们会用另一种写法: "对于任意给定的 $\varepsilon > 0$". 可以这样理解, 在 (2.1) 中, 在 ε 第一次出现以前, 即句子 $\forall\,\varepsilon > 0$ 之前, ε 是没有确定的, 它可以随意取, 但是一旦它出现过了, 也就是在 "$\forall\,\varepsilon > 0$" 之后, 它就是固定的一个数. 因此, 后面出现的 $\exists\,\delta > 0$ 是在 ε 已经固定的前提下找到的. 换言之, δ 依赖于这个已经固定的 ε. 如果把两个句子互换位置, 写成:

$$\exists\,\delta > 0,\ \forall\,\varepsilon > 0,\ \text{当}\, 0 < |x - x_0| < \delta\,\text{时, 有}\, |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

则表示这样的 δ 是与 $\varepsilon > 0$ 的选取无关. 因此, (1.2) 事实上就意味着 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta)\bigcup(x_0, x_0 + \delta)$ 内恒为 A.

再以函数在区间 (a,b) 上连续为例, 其定义为

$$\begin{aligned}&\forall\, x\in(a,b),\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\\ &\qquad \text{当}\,|y-x|<\delta\,\text{时, 有}\,|f(y)-f(x)|<\varepsilon.\end{aligned}\tag{1.3}$$

这里, 在 $\forall\, x\in(a,b)$, $\forall\,\varepsilon>0$ 之前, x,ε 是不确定的, 但在它们之后, 就是确定的, 所以后面的 δ 是既依赖于前面给定的 x, 又依赖于给定的 ε 的. 如果是

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\, x\in(a,b),\\ &\qquad \text{当}\,|y-x|<\delta\,\text{时, 有}\,|f(y)-f(x)|<\varepsilon.\end{aligned}\tag{1.4}$$

则 δ 只依赖于 ε 而不依赖于 $x\in(a,b)$, 这就变成了 f 在 (a,b) 上一致连续了. 容易证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续但不是一致连续的.

当然, 在 (1.3) 中, 调换 $\forall\, x\in(a,b)$ 和 $\forall\,\varepsilon>0$ 的位置并不影响语句的含义. 但将 $\forall\, x\in(a,b)$ 放在前面更为可取, 因为这时候后面的语句表示的就是 f 在 x 连续.

另外, 对于 $\exists\,\delta>0$ 这个语句, 这里的 δ 其实也是有一定的随意性的, 比如在上面的各个表述中, 都可以把 δ 取更小一点而不影响整个语句的含义. 但是, 在 "$\delta>0$" 这个句子以后, δ 就是确定的了.

接下来, 我们来考虑如何否定一个数学陈述. 数学上一个陈述无非可以抽象成两种形式:

$$\forall\,\alpha\in I,\ A_\alpha\,\text{成立}\tag{1.5}$$

和

$$\exists\,\alpha\in I,\ A_\alpha\,\text{成立}.\tag{1.6}$$

上面 I 表示一个集合, A_α 表示与 α 有关的一个陈述. 注意到 A_α 不成立可以表示为 A_α 的否定成立, 因而我们不需要单独讨论

$$\forall\,\alpha\in I,\ A_\alpha\,\text{不成立}$$

和

$$\exists\,\alpha\in I,\ A_\alpha\,\text{不成立}$$

这两种表述形式.

对于 (1.5), 要否定它, 必须而且只需 (至少) 有一个 $\alpha\in I$ 使得 A_α 不成立, 因而 (1.5) 的否定陈述为

$$\exists\,\alpha\in I,\ A_\alpha\,\text{不成立}.\tag{1.7}$$

而对于 (1.6), 要否定它, 必须而且只需对所有的 $\alpha\in I$, A_α 不成立, 因而 (1.6) 的否定陈述为

$$\forall\,\alpha\in I,\ A_\alpha\,\text{不成立}.\tag{1.8}$$

至于 (1.7) 和 (1.8) 中的 “A_α 不成立”, 即 A_α 的否定, 可以反复运用上述模式来叙述.

一般地, 我们可以总结出这样一条规律, 对于一个用 $\forall$, $\exists$ 等语句来陈述的一个命题, 其否命题可以通过将 $\forall$ 改为 $\exists$, 而将 $\exists$ 改为 $\forall$ 得到, 同时命题作为结论的陈述语句应该加以否定 (比如小于号应该改为大于等于, 属于号应该改为不属于, 等等), 作为条件的陈述语句不变.

以极限的 ε—δ 语言为例, (1.1) 的否定, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$ 可以表示为

$$\begin{aligned}&\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0,\ \exists\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\},\\ &\text{使得}\, |f(x) - A| \geq \varepsilon.\end{aligned} \tag{1.9}$$

可以看到我们将 (1.1) 中的 $\forall$ 改成了 $\exists$, 而将 $\exists$ 改成了 $\forall$. 另外, “当 $0 < |x - x_0| < \delta$” 是作为条件出现的, 在写否定陈述时, 除了把 “当” (它所起的作用就是 $\forall$) 改成 $\exists$, 后面的条件语句没有改变, 所以这部分被改成了 “ $\exists\, x, 0 < |x - x_0| < \delta$” (即 $\exists\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$”). 最后, (1.1) 中的 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 是作为结论出现的, 自然在改成否定语句时, 需要将它否定而改成 $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

顺便指出, 符号 “ $\forall$ ” 的含义即为 “对于任意”, 因此 “对于 $\forall$ 这样的写法是不可取的.

习题 2.1.

1. 试用 ε—δ 语句写出你认为常用的函数极限定义的其他等价形式.
2. 试写出数列极限 Cauchy 准则的否定语句.
3. 试写出 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上不一致连续的 ε—δ 语言.
4. 利用有限覆盖定理证明: 有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数一定在 $[a, b]$ 上一致连续.

§2. 数列收敛准则及其应用

在考虑数列的收敛性时, 我们常常要用到前面介绍的 Cauchy 准则、单调有界定理、Bolzano-Weierstrass 定理和区间套定理. 而夹逼准则是另一个重要的定理.

定理 2.1. (夹逼准则) 若 $x_n \leq z_n \leq y_n$, 而

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = a.$$

则

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a.$$

这里，$-\infty \le a \le +\infty$.

例 2.1. 利用
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
求
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right).$$

解: 因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$
所以 $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0,\quad \text{s.t.}$ 当 $0<|x|<\delta$ 时,
$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon,$$
即
$$|\sin x-x|<\varepsilon x.$$
因此, 取 $N=\left[\frac{2}{\delta}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 由于
$$0<\frac{1}{n^2}<\frac{3}{n^2}<\ldots<\frac{(2n-1)}{n^2}<\frac{2}{n}<\delta,$$
我们有
$$\left|\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right|<\frac{2k-1}{n^2}\varepsilon,\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$
从而
$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right]\right|\\ \le\ &\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{2k-1}{n^2}-\frac{2k-1}{n^2}\right|\\ <\ &\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$
即有
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n^2}-1\right|<\varepsilon.$$
于是
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right)=1.$$

例 2.2. 考虑调和级数
$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

证明:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

证明. 易见 x_n 单调上升, 所以我们只要证明 x_n 发散. 注意到

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 则 $\forall\, N > 0$, 取 $n = N+1, m = 2n$, 总有

$$x_{2n} - x_n \geq \varepsilon_0.$$

这样, 根据 Cauchy 准则, x_n 发散. 这就证明了结论. □

例 2.3. 若 $f : [a,b] \to [a,b]$ 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|, \tag{2.1}$$

其中 $K \in (0,1)$ 为一给定常数. 定义

$$f_1(x) = f(x), f_2(x) = f[f_1(x)], \cdots, f_{n+1}(x) = f[f_n(x)].$$

则 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(\xi) = \xi$ 的惟一根.

证明. 本题需要证明三件事: 一是 $f_n(x)$ 收敛, 二是 $f_n(x)$ 的极限是 $f(\xi) = \xi$ 的根, 三是 $f(\xi) = \xi$ 的根惟一.

我们有

$$\begin{aligned} \big|f_{n+1}(x) - f_n(x)\big| &= \big|f[f_n(x)] - f[f_{n-1}(x)]\big| \\ &\leq K\big|f_n(x) - f_{n-1}(x)\big| \\ &\leq \cdots\cdots \\ &\leq K^n\big|f_1(x) - x\big|. \end{aligned}$$

由此不难见到 $\forall\, m > n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \big|f_m(x) - f_n(x)\big| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \big|f_{k+1}(x) - f_k(x)\big| \\ &\leq \frac{K^n}{1-K}\big|f_1(x) - x\big|. \end{aligned}$$

于是 $f_n(x)$ 是一个 Cauchy 列. 从而它有极限, 设为 ζ.

下面证 $f(\zeta)=\zeta$. 为此, 注意到 (2.1) 蕴涵着 $f(\cdot)$ 的连续性[1], 于是由 $f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$ 立即可得

$$\zeta=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}f[f_{n-1}(x)]=f[\lim_{n\to+\infty}f_{n-1}(x)]=f(\zeta).$$

再证 $f(\xi)=\xi$ 解的惟一性. 设 $f(\eta)=\eta$, 我们只要证明 η 与前述 ζ 相等. 这可以由

$$|\eta-\zeta|=|f(\eta)-f(\zeta)|\le K|\eta-\zeta|$$

以及 $K\in(0,1)$ 得到. □

例 2.4. 设 $n\ge 2$,

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n,$$
$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n.$$

求证:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n\overset{\triangle}{=}\gamma\qquad(\text{Euler 常数}).$$

证明. 我们先来考察 a_n,b_n 的单调性. 我们有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln n,\\&=\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,dx-\ln(n+1)+\ln n\\&\ge\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx-\ln(n+1)+\ln n=0.\end{aligned}$$

即 a_n 单调上升.

类似地, 有

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n,\\&=\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\,dx-\ln(n+1)+\ln n\\&\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx-\ln(n+1)+\ln n=0.\end{aligned}$$

即 b_n 单调下降.

另一方面, 注意到总有 $a_n\le b_n$, 我们有

$$a_2\le\ldots\le a_n\le b_n\le\ldots b_2.$$

[1]这里 $f(\cdot)$ 表示函数, 其中的 $\cdot$ 表示自变量所在的位置, 这种记法对于区别函数和函数值以及多元函数某些变量固定后得到的函数有很大的便利. 例如, 固定 y, 把 $f(x,y)$ 看作 x 的函数可以表示为 $f(\cdot,y)$.

从而 a_n 和 b_n 均为单调有界列. 由单调有界定理即知它们的极限存在. 而由 $b_n = a_n + \frac{1}{n}$ 又可得它们的极限相等. □

Euler 常数的值约为 0.57721566490153286060651209, 但迄今为止, 人们还不知道它是不是无理数.

例 2.5. 设 $f(\cdot)$ 在 (a,b) 连续. 证明 $f(\cdot)$ 在 (a,b) 一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在.

证明. 充分性. 设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在, 则令

$$\tilde{f}(x) \triangleq \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x), & \text{如果 } x = a, \\ f(x), & \text{如果 } x \in (a,b), \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x), & \text{如果 } x = b. \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而一致连续. 特别, $\tilde{f}(x)$ 一定在 (a,b) 内一致连续, 此即 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

必要性. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续. 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x, y \in (a,b)$ 满足 $|x-y| < \delta$ 时, 成立

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

特别当 $x_1, x_2 \in (b-\delta, b)$ 时,

$$|f(x_1) - f(y_2)| < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 准则, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在. 类似地, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在. □

例 2.6. 设 $c \geq -3$,

$$x_1 = \frac{c}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

问 $\{x_n\}$ 的收敛范围, 并求极限.

解: 首先, 若 x_n 极限存在, 设为 ξ, 则

$$\xi = \frac{c}{2} + \frac{\xi^2}{2}.$$

从而 $1 - c \geq 0$. 且

$$\xi = 1 \pm \sqrt{1-c}.$$

这样,

(1) 当 $c>1$ 时, x_n 发散.

(2) 当 $c\in[0,1]$ 时, 可以归纳地证明 $0\le x_n\le 1$. 进一步,

$$x_{n+1}-x_n=(x_n-x_{n-1})\frac{x_n+x_{n-1}}{2}.$$

由此立即得到 x_n 单调. 于是由单调有界定理, x_n 收敛. 由于其极限小于等于 1, 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=1-\sqrt{1-c}.$$

(3) 当 $c\in[-3,0)$ 时, 也可以归纳地证明 $\frac{c}{2}\le x_n<0$. 从而, 由

$$x_{n+2}-x_n=(x_n-x_{n-2})\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{2}\frac{x_n+x_{n-2}}{2}$$

又可得到 x_{2n} 和 x_{2n+1} 的单调性. 由单调有界定理, x_{2n} 和 x_{2n+1} 收敛, 设它们的极限依次为 a,b. 则

$$a=\frac{c}{2}+\frac{b^2}{2},\quad b=\frac{c}{2}+\frac{a^2}{2}.$$

两式相减可得

$$(a-b)(2+a+b)=0.$$

若 $a+b+2=0$, 则又有 $b^2+2b+4+c=0$. 上式当 $c>-3$ 时不可能成立, 当 $c=-3$ 时得出 $b=a=-1$.

总之, 在 $c\in[-3,0)$ 时, 总有 $a=b$ 成立.

所以 x_n 的极限存在, 由于该 x_n 非正. 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=1-\sqrt{1-c}.$$

例 2.7. 求

$$\lim_{n\to+\infty}\overbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}^{n\text{重}}.$$

解. 记

$$a_n=\overbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}^{n\text{重}}.$$

易见 a_n 单调上升. 归纳地可证 $a_n\le 2$. 从而 a_n 单调有界, 它有极限. 设为 A. 注意到

$$a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}.$$

两边取极限得到

$$A=\sqrt{1+A}.$$

解得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 结合 $A\ge 0$, 得到 $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 2.8. 设有数列 a_n 满足 $a_n > 0$, $(n = 1, 2, \cdots)$. 令

$$t_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

证明: $\{t_n\}$ 收敛与否由

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\ln a_n}{n} \triangleq a$$

判定: 当 $a < \ln 2$ 时收敛, 当 $a > \ln 2$ 时发散, 当 $a = \ln 2$ 时失效. 这里我们规定 $a_n \le 1$ 时, $\ln\ln a_n = -\infty$.

证明. 易见 t_n 是单调增加的数列.

1. 设 $a < \ln 2$. 则由上极限的定义可得存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时,

$$\frac{\ln\ln a_n}{n} < \ln 2.$$

从而

$$a_n < e^{2^n}, \qquad \forall\ n > N.$$

记

$$M = \max\{e, a_1, \ldots, a_N\}.$$

则对任何 $n = 1, 2, \ldots,$

$$a_n < M^{2^n}.$$

于是

$$\begin{aligned} t_n &= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}} \\ &\le \sqrt{M^2 + \sqrt{M^4 + \ldots + \sqrt{M^{2^n}}}} \\ &= M\sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + 1}} = M\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

从而 t_n 有界. 由单调有界定理, t_n 收敛.

2. 对于 $a = \ln 2$ 的情形, 我们可以举出两个不同的例子, 其中一个 t_n 收敛, 另一个发散.

取 $a_n = e^{2^n}$. 则 $\dfrac{\ln\ln a_n}{n} = \ln 2$, 从而

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\ln a_n}{n} = \ln 2.$$

而此时由 (i) 中的讨论可见 t_n 收敛.

现在, 取 $a_n = e^{2^n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^n}$. 则

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\ln a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} 2(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = \ln 2.$$

而
$$t_n \ge a_n^{\frac{1}{2^n}} = e^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} \to +\infty.$$
所以 t_n 发散.

3. 若 $a > \ln 2$. 则存在 $\delta > 0$ 以及 a_n 的子列 a_{n_k} 使得
$$\frac{\ln\ln a_{n_k}}{n_k} > \ln(2+\delta), \qquad \forall\ k = 1, 2, \dots.$$
从而
$$a_{n_k} > e^{(2+\delta)^{n_k}}.$$
于是
$$t_{n_k} \ge \left(a_{n_k}\right)^{\frac{1}{2^{n_k}}} > e^{(1+\frac{\delta}{2})^{n_k}} \to +\infty.$$
所以 t_n 发散. □

例 2.9. 设 $a_1 > b_1 > 0$ 是两个已知数. 定义
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$
求证:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$$
存在. 称为 a_1, b_1 的算术 – 调和平均值.

证明. 我们有
$$a_n > b_n, \qquad n = 1, 2, \dots.$$
于是又有
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, \qquad n = 1, 2, \dots,$$
$$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} > \frac{2a_nb_n}{2a_n} = b_n, \qquad n = 1, 2, \dots.$$
这样,
$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > b_n > \dots > b_2 > b_1.$$
即 a_n, b_n 均单调有界. 设它们的极限为 A, B. 则
$$A = \frac{A+B}{2}.$$
即 $A = B$. 这就证明了结论. □

例 2.10. 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. 试证: 当 $n \to +\infty$ 时, $nx_n \to 1$.

证明. 首先易见 $0 < x_n < 1$. 进一步有

$$x_{n+1} = x_n(1-x_n) \le \frac{1}{4}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

以及

$$(n+1)x_{n+1} - x_n = x_n(1-(n+1)x_n).$$

这样, 如果我们能够证明 $(n+1)x_n < 1$, 则 nx_n 就是单调增加的. 事实上, 由 $3x_2 < \frac{3}{4} < 1$, 并利用函数 $x(1-x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 的单调性可以归纳地证明

$$0 < (n+1)x_n < 1, \qquad n = 2, 3, \ldots. \tag{2.2}$$

所以, 数列 $2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n, \ldots$ 是单调增加且有界的. 所以它有极限, 设为 A.

由 (2.2), $0 \le A \le 1$. 下面证明 $A = 1$. 否则 $A < 1$. 存在 $N > 0$, 当 $n \ge N$ 时,

$$(1+n)x_n < \frac{A+1}{2}.$$

从而

$$(n+1)x_{n+1} - nx_n = x_n(1-(n+1)x_n) \ge \frac{1-A}{2}x_n, \qquad \forall\, n \ge N.$$

于是

$$(n+1)x_{n+1} - Nx_N \ge \frac{1-A}{2}\sum_{k=N}^{n} x_k.$$

所以由 nx_n 的收敛性得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

但是, 另一方面, 由 nx_n 的在 $n \ge 2$ 时的单调性,

$$x_n \ge \frac{2x_2}{n}, \qquad \forall\, n \ge 2.$$

注意到 $x_2 > 0$, 这又表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是发散的. 矛盾.

所以 $A = 1$. □

例 2.11. 设

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

试证:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to 0.$$

证明. 如果利用后面将要提到的 Stolz 定理, 本题将非常简单. 因而本题主要是为初学者而设的. 某种意义上是为了锻炼学生运用极限定义的能力. 所以我们将直接证明. 事实上, Stolz 定理是本题的推广, 它的证明与本题的证明没有太大区别.

由题设, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n| \le \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} & |\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}| \\ \le \quad & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |a_k| + \frac{1}{n}\sum_{N_1+1}^{n} |a_k| \\ \le \quad & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |a_k| + \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.3}$$

取

$$N = \max\Big(N_1, [\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_1}|a_k|]\Big).$$

则当 $n > N$ 时,

$$|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}| \le 2\varepsilon.$$

所以由极限定义即得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0.$$

□

例 2.12. 设 $A > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$. 证明

$$\lim_{n\to+\infty} x_n$$

存在, 并求此极限.

证明. 首先, 我们有

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) \ge \sqrt{A}.$$

从而

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2x_n}(A - x_n^2) \le 0, \qquad \forall\, n \ge 2.$$

即 x_n(当 $n \ge 2$ 时) 单调. 又令

$$M = \max(x_1, x_2, \sqrt{A}).$$

则可以归纳地证明

$$x_{n+1} \le M, \qquad \forall\, n \ge 2.$$

从而 x_n 单调有界, 设其极限为 ℓ. 可得

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{A}{\ell}).$$

从而 $\ell = \sqrt{A}$. □

习题 2.2.

1. 写出其他类型极限的夹逼准则.
2. 推广例题 2.1.
3. 在例题 2.3 中, 如果去除 $K \in (0,1)$ 的限制, 情况又将如何?
4. 例题 2.7 可以作怎样的推广, 使得我们除了可以得到极限的存在性外, 还可以将极限计算出来?
5. 试对
$$\sqrt[r]{a_1 + \sqrt[r]{a_2 + \sqrt[r]{a_3 + \cdots + \sqrt[r]{a_n}}}}$$
进行类似例题 2.8 的讨论.
6. 试证
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n\right)$$
存在.
7. 两个正数 a, b 间常用的平均还包括几何平均 $\sqrt{ab}$. 事实上, 算术平均, 几何平均以及调和平均等都可以归入以下的幂平均 ($p = 0$ 时取极限):
$$M_p(a,b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad -\infty < p < +\infty.$$
可以看到算术平均对应于 $p = 1$, 调和平均对应于 $p = -1$, 而几何平均对应于 $p = 0$. 试对更一般的平均 (幂平均甚至其他的平均) 进行类似例题 2.9 的讨论.
8. 下列结果给出了在计算机上计算数 c 的倒数的格式:
   (i) 设 $0 < x_0 < 1$. 定义
   $$x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
   证明:
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$
   (ii) 设 c 是任一正数, 在 (i) 中取 $x_n = cy_n$ 得 $y_{n+1} = y_n(2 - cy_n)$. 假如 $0 < y_0 < \frac{1}{c}$, 则
   $$\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{c}.$$
9. 思考: 讨论例题 2.6 在 $c < -3$ 时的情况.

§3. 上、下极限的应用

在极限的计算、证明中，利用上、下极限往往能使问题迎刃而解. 在一些非本质的问题上, 往往也能起到简化叙述的效果.

以数列极限为例, 对于数列 $\{a_n\}$, 其上下极限依次定义为:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k, \qquad \varliminf_{n\to+\infty} a_n \triangleq \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

为方便起见, 我们在广义实数系中考虑上下极限. 易见 $\sup\limits_{k\geq n} a_k$ 和 $\inf\limits_{k\geq n} a_k$ 都是单调的. 特别, 前者单调下降, 后者单调上升. 这样, 在广义实数系中, 上下极限总是有意义的. 我们有:

命题 3.1. 设 a_n 为一实数列. 则

(i) $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \geq \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(ii) $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k\geq n} a_k, \qquad \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k\geq n} a_k$.

(iii) 设 a_{n_k} 为 a_n 的一个子列, 则

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n \geq \varlimsup_{k\to+\infty} a_{n_k}. \qquad \varliminf_{n\to+\infty} a_n \leq \varliminf_{k\to+\infty} a_{n_k}.$$

(iv) 存在 a_n 的子列 a_{n_k} 和子列 a_{m_k} 使得

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} a_{n_k}, \qquad \varliminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} a_{m_k}.$$

从命题的 (iii)—(iv) 我们可以看到, 数列的上极限就是其子列极限的 “最大值”, 而下极限则是子列极限的 “最小值”. 于是, 立即有以下重要的性质:

推论 3.2. 对于实数列 a_n, $\lim\limits_{n\to+\infty} = \ell$ 当且仅当 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, 这里 ℓ 可以是 $-\infty$, 有限数, 以及 $+\infty$.

这样, 利用上述推论, 要考虑数列极限存在与否, 只要考察其上下极限是否相等并有限. 由于上下极限总是有意义, 对于一些事先不知道极限是否存在的数列, 我们可以先研究他们的上下极限, 而避免直接讨论极限的存在性. 类似于习题 1.2 中描述的上下确界的性质, 我们有

命题 3.3. 设有 a_n, b_n 是实数列. 则

(i) $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(ii) 对于以下不等式中每一个不等式, 只要该不等式两端都有意义, 就有

$$\begin{aligned} & \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \\ \leq\ & \varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \\ \leq\ & \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le \varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\\&\le \varlimsup_{n\to+\infty}a_n+\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.\end{aligned}$$

(iii) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在, 则

$$\varliminf_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n+\varliminf_{n\to+\infty}b_n,$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n+\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.$$

(iv) 若 $a_n>0$, 则若在此种情形规定 $\dfrac{1}{0}=+\infty$, 我们有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n}.$$

(v) 若 $a_n>0$, $b_n>0$, 则对于以下不等式中每一个不等式, 只要该不等式两端都有意义, 就有

$$\begin{aligned}&\varliminf_{n\to+\infty}a_n\varliminf_{n\to+\infty}b_n\\\le&\varliminf_{n\to+\infty}(a_nb_n)\\\le&\varliminf_{n\to+\infty}a_n\varlimsup_{n\to+\infty}b_n\\\le&\varlimsup_{n\to+\infty}(a_nb_n)\\\le&\varlimsup_{n\to+\infty}a_n\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.\end{aligned}$$

(vi) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在, 则

$$\varliminf_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n\varliminf_{n\to+\infty}b_n,$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n\varlimsup_{n\to+\infty}b_n.$$

上面这些结果都很自然, 读者需要注意的是一些例外情形[1]以及把这些结果变成自己的一种直觉.

例 3.1. 运用上下极限, 在一些证明中可以简化叙述过程. 例如在例 (2.11) 中, 我们可以对式 (2.3) 关于 $n\to+\infty$ 取上极限得到

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|\le\varepsilon.$$

从而由 ε 的任意性得到

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|=0.$$

此即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=0.$$

[1] 例如出现 $+\infty+(-\infty)$ 或 $0\cdot(+\infty)$ 等.

例 3.2. 设正序列 x_n 满足

$$x_{n+1} \le \frac{x_n + x_{n-1}}{2}.$$

求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

证明. 易见 $0 < x_n \le \max(x_1, x_2)$. 于是

$$L \triangleq \varlimsup_{n\to+\infty} x_n < +\infty.$$

从而对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n \ge N$ 时,

$$x_n \le L + \varepsilon.$$

我们断言,

$$x_n \ge L - 3\varepsilon, \qquad \forall\, n \ge N+1.$$

否则, 存在 $m \ge N+1$ 满足 $x_m < L - 3\varepsilon$. 这样就有

$$x_{m+1} \le \frac{x_m + x_{m-1}}{2} \le \frac{L - 3\varepsilon + L + \varepsilon}{2} = L - \varepsilon.$$

由此立即可得

$$x_n \le \max(x_m, x_{m+1}) \le L - \varepsilon, \qquad \forall\, n \ge m+1.$$

这与 L 为 x_n 的上极限矛盾. 从而

$$L - 3\varepsilon \le x_n \le L + \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L.$$

□

例 3.3. 设 $0 < q < 1$, 设 a_n, b_n 满足:

$$a_n = b_n - q a_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

且 a_n, b_n 有界. 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

证明. 充分性显然. 下证必要性. 假设 b_n 收敛. 由于 a_n 有界, 所以

$$L \triangleq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \quad \ell \triangleq \varliminf_{n\to+\infty} a_n$$

有限.

另一方面, 对题中递推公式两边分别取上极限和下极限可得

$$L = \lim_{n\to+\infty} b_n - q\ell,$$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} b_n - qL.$$

两式相减可得

$$L - \ell = q(L - \ell).$$

由于 $q \in (0,1)$, 所以 $L = \ell$. 即 a_n 收敛. □

例 3.4. 设 x_n, y_n 满足:

$$y_n = \sqrt{x_n + \sqrt{x_{n-1} + \cdots + \sqrt{x_1}}} = \sqrt{x_n + y_{n-1}},$$

其中 $x_n > 0$, $y_0 = 0$. 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在.

证明. 充分性显然. 下证必要性. 为此, 设 x_n 收敛. 则 x_n 有界. 从而有 $M \geq 1$ 使得

$$x_n \leq M, \qquad \forall\, n = 1, 2, \ldots.$$

则

$$\begin{aligned} y_n &\leq \sqrt{M + \sqrt{M + \ldots + \sqrt{M}}} \\ &\leq \quad M\sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}} \leq M\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

从而 y_n 有界. 设 L, ℓ 为 y_n 的上极限和下极限, x_n 的极限为 A, 则

$$L^2 = A + L, \qquad \ell^2 = A + \ell.$$

注意到

$$+\infty > L \geq \ell > \lim_{n\to+\infty} (a_1)^{\frac{1}{2^n}} = 1,$$

我们可以解得

$$L = \ell = \frac{1+\sqrt{1+4A}}{2}.$$

从而 y_n 收敛. □

例 3.5. 设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

证明. 不难看到

$$1 \leq x_n \leq 2, \qquad \forall\, n = 3, 4, \ldots.$$

记 L, ℓ 为 x_n 的上极限和下极限, 则

$$L = 1 + \frac{1}{\ell}, \quad \ell = 1 + \frac{1}{L}.$$

从而

$$L\ell = L + 1 = \ell + 1.$$

由此即得 $L = \ell$. 即 x_n 收敛.

事实上, 我们还有

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

□

例 3.6. 设 x_n 满足

$$0 \le x_{m+n} \le x_m \cdot x_m, \qquad \forall\ m, n \ge 1.$$

证明 $\sqrt[n]{x_n}$ 的极限存在.

证明. 我们有

$$0 \le x_n \le x_1^n.$$

从而

$$0 \le L \triangleq \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < +\infty.$$

我们断言,

$$\sqrt[n]{x_n} \ge L, \qquad \forall\ n \ge 1. \tag{3.1}$$

不妨设 $x_1 > 0$. 固定 $m \ge 1$, 对于任何 n, 我们有分解

$$n = k_n m + \ell_n,$$

其中 k_n, ℓ_n 均为整数, $0 \le \ell \le m-1$. 则 k_n, ℓ_n 由 n (及 m) 惟一确定, 且当 $n \to +\infty$ 时

$$\frac{k_n}{n} \to \frac{1}{m}, \quad \frac{\ell_n}{n} \to 0.$$

由假设条件, 可得

$$x_n \le x_m^{k_n} x_1^{\ell_n}.$$

从而

$$L = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \lim_{n\to+\infty} x_m^{\frac{k_n}{n}} x_1^{\frac{\ell_n}{n}} = x_m^{\frac{1}{m}}.$$

这样, (3.4) 成立. 从而又有

$$\varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \ge L.$$

这就证明了

$$\varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$$

即 $\sqrt[n]{x_n}$ 收敛. □

例 3.7. 设 $f(\cdot),\varphi(\cdot)\in C[a,b]$. 而且 $f>0$, $\varphi>0$.

(i) 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)dx}=\max_{x\in[a,b]}f(x)\triangleq M. \tag{3.2}$$

(ii) 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b\varphi(x)f^{n+1}(x)dx}{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)dx}=M. \tag{3.3}$$

证明.

(i) 我们有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)dx}\le\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b M^n\varphi(x)dx}=M. \tag{3.4}$$

另一方面, 由连续函数性质, 存在 $x_0\in[a,b]$ 使得

$$f(x_0)=M.$$

于是 $\forall\,\varepsilon\in(0,\frac{M}{2})$, $\exists\delta>0$, 使得当

$$x\in J\triangleq(x_0-\delta,x_0+\delta)\bigcap[a,b]$$

时, 有

$$f(x)>M-\varepsilon.$$

这样, 我们有

$$\begin{aligned}&\varliminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)dx}\\ \ge\quad&\varliminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_J(M-\varepsilon)^n\varphi(x)dx}=M-\varepsilon.\end{aligned}$$

于是由 ε 的任意性得到

$$\varliminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)dx}\ge M.$$

结合 (3.4), 即知 (3.2) 成立.

(ii) 类似 (3.4), 易见

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b\varphi(x)f^{n+1}(x)dx}{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)dx}\le M. \tag{3.5}$$

另一方面, $\forall\, \varepsilon \in (0, \frac{M}{3})$,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\int_{\{f<M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^n(x) dx}{\int_{\{f\geq M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^n(x) dx} \\
\leq\ & \frac{\int_{\{f<M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^n(x) dx}{\int_{\{f\geq M-\varepsilon\}} \varphi(x) f^n(x) dx} \\
\leq\ & \frac{(M-2\varepsilon)^n \int_{\{f<M-2\varepsilon\}} \varphi(x) dx}{(M-\varepsilon)^n \int_{\{f\geq M-\varepsilon\}} \varphi(x) dx} \to 0.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{\int_{\{f\geq M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^n(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) dx} \to 1.
$$

于是, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \varliminf_{n\to+\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) dx} \\
\geq\ & \varliminf_{n\to+\infty} \frac{\int_{\{f\geq M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^{n+1}(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) dx} \\
=\ & \varliminf_{n\to+\infty} \frac{\int_{\{f\geq M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^{n+1}(x) dx}{\int_{\{f\geq M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^n(x) dx} \\
\geq\ & M-2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这样, 由 ε 的任意性得到

$$
\varliminf_{n\to+\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) dx} \geq M.
$$

结合 (3.5), 即知 (3.3) 成立.

□

习题 2.3.

1. 若 $x_n > 0$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 且

$$
\varlimsup_{n\to+\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 1.
$$

证明序列 x_n 是收敛的.

2. 推广例题 3.2.
3. 观察例题 3.5 的解答过程, 想一些类似的问题并解答.
4. 举例说明, 在例题 3.6 中, $\sqrt[n]{x_n}$ 可以没有单调性.
5. 设 a_n 满足

$$
a_m + a_n - 1 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n + 1, \qquad \forall\, m, n \geq 1.
$$

求证:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 存在.

(b) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=q$, 则 $nq-1\le a_n\le nq+1$.

6. 设 $x_{n+1}=\cos x_n$, $n=0,1,2,\ldots$.

   (a) 利用上下极限证明 x_n 收敛到 $x=\cos x$ 的解.

   (b) 利用上利用 x_{2n} 和 x_{2n+1} 的单调有界性证明 x_n 收敛到 $x=\cos x$ 的解.

   (c) 利用证明 x_n 是 Cauchy 列来证明 x_n 收敛到 $x=\cos x$ 的解.

7. 思考: 例题 3.3 中 $q\notin(0,1)$ 时, 结论会怎样?

8. 思考: 例题 3.6 和习题 5 怎样推广?

9. 思考: 引入 Lebesgue 积分后, 例题 3.7 可以做怎样的改造?

§4. Teoplitz 定理、Stolz 定理、L'Hospital 法则

学过微积分的同学都非常熟悉 L'Hospital 法则, 在计算所谓不定型的极限时, L'Hospital 法则在应用上, 是如此方便有效, 以至于很多同学经常不加思索地运用它 (包括一些错误的运用). 与 L'Hospital 法则相对应的有一个 Stolz 定理, 用于处理离散情形的极限, 人们常常将它比作离散情形的 L'Hospital 法则. 本节我们将介绍这一类结果.

定理 4.1. (**Stolz-Cesáro 定理**) *设 x_n 和 y_n 是两个实数列. 若*

(i) *y_n 严格单增,*

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$,

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\ell$.

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\ell,$$

其中 ℓ 可以是有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$.

证明. 我们以 ℓ 为有限数时的情形证明定理. 由 (ii), 不妨设 $y_n>0$.

由 (iii), 我们有: $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists N>0$, s.t.

$$|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-\ell|\le\varepsilon,\qquad\forall\,n\ge N.$$

即

$$|(x_{n+1}-x_n)-\ell(y_{n+1}-y_n)|\le\varepsilon(y_{n+1}-y_n),\qquad\forall\,n\ge N.$$

从而

$$|x_n-x_N-\ell(y_n-y_N)|\le\varepsilon(y_n-y_N),\qquad\forall\,n\ge N.$$

于是
$$|x_n - \ell y_n| \le |x_N - \ell y_N)| + \varepsilon(y_n - y_N), \quad \forall\, n \ge N.$$
两边除以 y_n 得到
$$|\frac{x_n}{y_n} - \ell| \le \frac{|x_N - \ell y_N)|}{y_n} + \varepsilon \frac{y_n - y_N}{y_n}, \quad \forall\, n \ge N.$$
上式两边关于 n 取上极限, 得
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |\frac{x_n}{y_n} - \ell| \le \varepsilon.$$
由 ε 的任意性得到
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |\frac{x_n}{y_n} - \ell| = 0.$$
此即
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$
□

推论 4.2. (**Cauchy 定理**) 设有数列 x_n 满足
$$\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = A.$$
则
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = A.$$

推论 4.3. 设有正数列 x_n 满足
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell.$$
则
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell.$$

定理 4.4. (**L'Hospital 法则**)

(i) 设函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 在 $x = a$ 附近 (除 a 点外) 处处可微, $g'(x) \ne 0$,
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$
若
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$
则
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

(ii) 设函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 在 $x=a$ 附近 (除 a 点外) 处处可微, $g'(x)\neq 0$,

$$\lim_{x\to a} g(x)=+\infty.$$

若

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell,$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

(iii) 设函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 在 $(A,+\infty)$ 可微, $g'(x)\neq 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.$$

若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

(iv) 设函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 在 $(A,+\infty)$ 可微, $g'(x)\neq 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

其中 ℓ 可以是有限数、$+\infty$, $-\infty$ 或 ∞.

注 4.1. L'Hospital 法则或 Stolz 定理关注的是不定型的极限, 即 $\dfrac{0}{0}$ 型的或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限. 因而早期 L'Hospital 法则或 Stolz 定理的叙述中, 对于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限问题, 总是要求分子也趋于无穷. 但事实上, 这个条件是可以省略的. 因而现在在定理的叙述中, (ii) 和 (iv) 中都没有要求

$$\lim f(x)=\infty.$$

注 4.2. 无论是 L'Hospital 法则还是 Stolz 定理, 都是法则使用以后的极限存在性 (或为无穷) 保证了使用前的极限存在性 (或为无穷). 所以无论是利用 L'Hospital 法则还是 Stolz 定理计算极限, 都既是一种计算, 也是一种极限存在的证明.

除 $\dfrac{0}{0}$ 型和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型以外, 还有一些其他类型的不定型. 究竟哪些是不定型, 我们把它留作习题.

注 4.3. 在 Stolz 定理中的 ℓ 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$, 但不能是 ∞. 然而在 L'Hospital 法则中, ℓ 可以是 ∞. 事实上, 此时的 ∞ 必然是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

定理 4.5. (**Teoplitz 定理**) 设无穷三角矩阵 $(t_{nm})_{n\geq m}$:

$$\begin{array}{llll} t_{11} & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

满足下列条件:

(i) 每一列元趋于零, 即

$$\lim_{n\to+\infty} t_{nm}=0.$$

(ii) 各行元素的绝对值之和有界, 即 $\forall\, n\in\mathcal{N}$

$$|t_{n1}|+|t_{n2}|+\ldots+|t_{nn}|\leq K<+\infty.$$

则:

(i) 若数列 x_n 收敛于 0, $y_n=t_{n1}x_1+\ldots+t_{nn}x_n$. 我们有

$$\lim_{n\to+\infty} y_n=0.$$

(ii) 记 $T_n=t_{n1}+t_{n2}+\ldots+t_{nn}$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n\to 1$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 有限. 则

$$\lim_{n\to+\infty} y_n=a.$$

例 4.1. 利用 Stolz 定理可以同时得到例题 2.10 中极限的存在性和极限值. 首先易见 $0<x_n<1$, 且

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=0.$$

我们有:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nx_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^{-1}}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_nx_{n+1}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2}{x_n^2(1-x_n)}=1.\end{aligned}$$

例 4.2. 设 $0<x_0<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$, ($n=0,1,2,\cdots$). 试证:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}.$$

证明. 易见 x_n 单调下降, $x_n > 0$. 从而它有极限, 设为 x. 则

$$x = \sin x.$$

所以 $x = 0$. 这样, 由 Stolz 定理, 并用 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx_n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(x_n)^{-2}}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Big((x_{n+1})^{-2} - (x_n)^{-2}\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 - x_{n+1}^2}{x_n^2 x_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(x - \sin x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(1 - \cos x)}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{6x} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

这就得到了要证的结论. □

例 4.3. 试证: $2x_n + x_{n-1}$ 收敛 $\Longrightarrow$ x_n 收敛.

证明. 不妨设 $2x_n + x_{n-1}$ 收敛于 0.

法 I. 令

$$y_n = 2x_{n+1} + x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$t_{nm} = \frac{(-1)^{n-m}}{2^{n-m+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots, n.$$

则由 Teoplitz 定理

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \left(x_{n+1} + \frac{(-1)^n}{2^n} x_1\right) \\
= &\lim_{n\to+\infty} \Big(t_{n1}y_1 + t_{n2}y_2 + \ldots + t_{nn}y_n\Big) = 0.
\end{aligned}$$

由此即得 x_n 收敛于 0.

法 II. 由假设, $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\big|2x_{n+1} + x_n\big| < \varepsilon.$$

由此,

$$\begin{aligned} |x_{N+1}| &\le \frac{1}{2}|x_N| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\le \frac{1}{2}|x_N| + \varepsilon. \end{aligned}$$

从而又有

$$\begin{aligned} |x_{N+2}| &\le \frac{1}{2}|x_{N+1}| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\le \frac{1}{4}|x_N| + \varepsilon. \end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$|x_{N+k}| \le \frac{1}{2^k}|x_N| + \varepsilon, \qquad \forall\ k \ge 1.$$

令 $k \to +\infty$, 即得

$$\overline{\lim}\,|x_n| \le \varepsilon.$$

于是由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得到

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

□

例 4.4. 设 $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. 试证明 x_n 收敛, 并求其极限.

证明. 法 I. 由数学归纳法可以得到 (也可以先考虑 a 为 0 的情形)

$$x_{2n+1} = \frac{2^{2n-1}+1}{3\cdot 2^{2n-1}}a + \Big(1 - \frac{2^{2n-1}+1}{3\cdot 2^{2n-1}}\Big)b, \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$x_{2n+2} = \frac{2^{2n}-1}{3\cdot 2^{2n}}a + \Big(1 - \frac{2^{2n}-1}{3\cdot 2^{2n}}\Big)b, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

由于

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \frac{a+2b}{3},$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a+2b}{3}.$$

法 II. 注意到

$$2x_{n+1} = x_n + x_{n-1},$$

我们有

$$2x_{n+1} + x_n = 2x_n + x_{n-1} = \ldots = 2x_2 + x_1 = 2b + a.$$

于是由前一题的结论, x_n 收敛, 设极限为 x, 则

$$3x = 2b + a.$$

即得

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a+2b}{3}.$$

□

例 4.5. 设 a 和 d 是给定的正数. 对于 $n = 1, 2, 3, \ldots$, 由等差数列 a,$a+d$, $\ldots$,$a+(n-1)d$ 形成算术平均 A_n 和几何平均 G_n, 试求

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{G_n}{A_n}.$$

解:

$$G_n = \Big\{a(a+d)\ldots[a+(n-1)d]\Big\}^{\frac{1}{n}},$$

$$A_n = \frac{1}{n}\Big\{a+(a+d)+\ldots+[a+(n-1)d]\Big\} = a + \frac{n-1}{2}d.$$

法 I.

$$\begin{aligned}\ln\frac{G_n}{A_n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(a+kd) - \ln(a+\frac{n-1}{2}d)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\ln(a+kd)-\ln n\Big) - \ln\frac{a+\frac{n-1}{2}d}{n}.\end{aligned}$$

由 Stolz 定理,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\ln(a+kd)-\ln n\Big)\\ =&\lim_{n\to+\infty}\Big(\ln(a+nd)-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n\Big)\\ =&\lim_{n\to+\infty}\Big(\ln\frac{a+nd}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})^n\Big) = \ln d - 1.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{G_n}{A_n} = \ln d - 1 - \ln\frac{d}{2} = \ln 2 - 1.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{G_n}{A_n} = \frac{2}{e}.$$

法 II.

$$\frac{G_n}{A_n} \geq \Big(a\cdot d\cdot 2d\cdots(n-1)d\Big)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{a+\frac{n-1}{2}d}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a}{nd}\right)^{\frac{1}{n}}(n!)^{\frac{1}{n}}\frac{d}{a+\frac{n-1}{2}d} \\
&= \left(\frac{a}{nd}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\frac{nd}{a+\frac{n-1}{2}d}.
\end{aligned}
$$

所以

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{G_n}{A_n}\geq\varliminf_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{nd}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\frac{nd}{a+\frac{n-1}{2}d}=\frac{2}{e}.$$

另一方面, 对任何 $N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$a+nd\leq\frac{n}{N}a+nd=\Big(1+\frac{a}{Nd}\Big)nd.$$

所以当 $n\geq N$ 时,

$$
\begin{aligned}
\frac{G_n}{A_n} &\leq \Big(\prod_{k=0}^{N-1}(a+kd)\Big)^{\frac{1}{n}}\cdot\Big(1+\frac{a}{Nd}\Big)^{\frac{n-N}{n}} \\
&\quad\cdot\Big(\prod_{k=N}^{n-1}kd\Big)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{a+\frac{n-1}{2}d} \\
&= \Big(\prod_{k=0}^{N-1}(a+kd)\Big)^{\frac{1}{n}}\cdot\Big(1+\frac{a}{Nd}\Big)^{\frac{n-N}{n}} \\
&\quad\cdot\Big(\frac{n!}{n(N-1)!}\Big)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot d^{\frac{n-N}{n}}\cdot\frac{n}{a+\frac{n-1}{2}d}.
\end{aligned}
$$

这样

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{G_n}{A_n}\leq\Big(1+\frac{a}{Nd}\Big)\cdot\frac{2}{e}$$

对任何 $N>0$ 成立. 从而有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{G_n}{A_n}\leq\frac{2}{e}.$$

结合关于下极限的结论就得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{G_n}{A_n}=\frac{2}{e}.$$

注: 这里我们用到 **Stirling 公式**

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n(1+o(1)),\qquad n\to+\infty.$$

例 4.6. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x}}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^x.$$

解. 在极限的计算中, 作适当的化简、代换是非常重要的. 我们考虑

$$\ln\Big[e^{\sqrt{x}}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^x\Big]=\sqrt{x}+x\ln(1-\frac{1}{\sqrt{x}}).$$

我们有

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+x\ln(1-\frac{1}{\sqrt{x}})\right) \\
= & \lim_{x\to+\infty}\left(x+x^2\ln(1-\frac{1}{x})\right) \\
= & \lim_{x\to 0^+}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \\
= & \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1-x}}{2x} \\
= & -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^x = e^{-\frac{1}{2}}$$

例 4.7. 设函数 $f(\cdot)$ 在 $(A,+\infty)$ 上有界, 可导, 且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b.$$

求证: $b=0$.

证明. 由 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \\
= & \lim_{x\to+\infty} f'(x) = b.
\end{aligned}$$

另一方面, 由于 $f(x)$ 在 $(A,+\infty)$ 上有界,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0.$$

所以 $b=0$. □

例 4.8. 设函数 $f(\cdot)$ 在 $(A,+\infty)$ 上可导, 且

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = k.$$

求证:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k.$$

证明. 由 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty} f(x) \\
= & \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x} \\
= & \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x} \\
= & \lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = k.
\end{aligned}$$

□

下面是 Stolz 定理和 L'Hospital 法则的一些推广结论.

定理 4.6. 若 $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, b_n 严格单调减少. 则若

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = \ell,$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \ell,$$

其中 ℓ 为有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$.

定理 4.7. 设 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 定义于 $(a,+\infty)$ 上，$f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 在每一个有限区域 (a,b) 内有界, 且 $g(x+1) > g(x)$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)} = \ell,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$

其中 ℓ 为有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$.

推论 4.8. 设 $f(\cdot)$ 定义于 $(a,+\infty)$ 上, 在每一个有限区域 (a,b) 内有界,

(i) 若

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = \ell,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \ell;$$

(ii) 若 $f(x) > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} = \ell,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}} = \ell,$$

其中 $f(x) \geq c > 0$;

(iii) 若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} = \ell,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1},$$

其中 ℓ 为有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$.

法国数学家 L'Hospital, Guillaume François Antoine, Marquis de (1661—1704)

奥地利数学家 Stolz, Otto (1842—1905)

意大利数学家 Cesáro, Ernesto (1859.3.12—1906.12.12)

德国数学家 Toeplitz, Otto (1881.8.1—1940.2.15)

习题 2.4.

1. 证明 Teoplitz 定理.
2. 说明 Teoplitz 定理是 Stolz 定理的推广 (ℓ 有限情形).
3. 设
$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k.$$
求
$$\lim_{n\to+\infty} S_n.$$
4. 设 $a>0, b>0$, 求证:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.$$
5. 试用上下极限证明例题 4.3 的结论.
6. 设 $a_n > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell,$$
其中 ℓ 为有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$. 则
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell.$$
特别, 在例 3.7 中, (i) 是 (ii) 的推论.
7. 分别以 $0, 1, \infty$ 表示极限为 $0, 1, \infty$ 的变量, 试判断下列哪些是不定型:
$$0\cdot\infty,\quad 0^0,\quad 0^1,\quad 0^\infty,\quad 1^0,\quad 1^1,\quad 1^\infty,\quad \infty^0,\quad \infty^1,\quad \infty^\infty.$$
8. 考察下列极限:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x},$$
$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x},\qquad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x},$$
$$\lim_{x\to 0+} x\ln x,\qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln x,$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x},$$

§5. L'Hospital 法则运用技巧

我们将在本节专门介绍 L'Hospital 法则的运用中如何结合等价关系、变量代换、化简等来计算极限.

首先, 我们请大家注意下面这些极限.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha, \qquad \forall\ \alpha\in\mathbb{R},\\
&\lim_{x\to 0^+}x^\alpha\ln x=0, \qquad \forall\ \alpha>0,\\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0, \qquad \forall\ \alpha\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

下面我们收集了一些有较大难度的计算极限的例子. 其中许多例子通常被人们认为是不适合用 L'Hospital 法则的. 我们将在本节展示如何结合将等价关系、化简和变量代换等与 L'Hospital 法则结合以使计算简单.

通过仔细领会例题中的思想，回头看平常的极限计算题，相信会有新的感觉.

我们提请读者注意, 尽管总体上，下面的例题是偏难的，但这里用到的方法、技巧完全在正常范围内. 抽取运算过程中的一部分作为练习也是很有意义的. 本节的例题主要是在技巧的**综合运用上**显得有一定难度 (其中说明部分加星号表示重要，题目加星号表示难).

例 5.1. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x\sin^2 x}.$$

解.

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x\sin^2 x} \\
= \ & \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} && *(\sin x \sim x) \\
= \ & \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} && (\text{L'Hospital 法则}) \\
= \ & \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} && (\text{整理}) \\
= \ & \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

例 5.2. 求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right).$$

解.

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) \\
= \ & \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x - x^2}{x^2\tan^2 x} && *(\text{整理}) \\
= \ & \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)(\tan x + x)}{x^4} && *(\tan x \sim x) \\
= \ & 2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} && (\tan x \sim x) \\
= \ & \frac{2}{3} && (\text{见上例})
\end{aligned}
$$

例 5.3. 求

$$\lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})].$$

解.

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})] \\
= \ & \lim_{x\to 0}[\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}] && *(\text{变量代换}) \\
= \ & \lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} && (\text{整理}) \\
= \ & \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} && (\text{L'Hospital 法则}) \\
= \ & \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

例 5.4. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$$

解. 法 I.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x} && (\text{整理}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} && (\text{L'Hospital 法则}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} && (\text{整理}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}e && *(\text{化简}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}e && (\text{L'Hospital 法则}) \\
=\ &-\frac{e}{2} && (\ln(1+x)\sim x).
\end{aligned}$$

法 II. 也可以先利用等价关系.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x} && (\text{整理}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}e && (\text{整理}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\ln(1+x)-x}{x}e && (y\to 0\text{ 时}, e^y-1\sim y) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}e && (\text{整理}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}e && (\text{L'Hospital 法则}) \\
=\ &-\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

例 5.5. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x-\frac{x^3}{3}}{x^5}.$$

解.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x - \frac{x^3}{3}}{x^5} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1 - x^2}{5x^4} && \text{(L'Hospital 法则)} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x - x^2}{5x^4} && \text{(化简)} \\
= & \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

例 5.6. 求

$$\lim_{x\to 0} x^{(x^x-1)}.$$

解.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} x^{(x^x-1)} \\
= & \lim_{x\to 0} e^{\left(e^{x\ln x}-1\right)\cdot\ln x} && *\text{(整理)} \\
= & \lim_{x\to 0} e^{x\ln x\cdot\ln x} && *(y\to 0\text{ 时, } e^y-1\sim y) \\
= & 1. && (x\ln^2 x\to 0)
\end{aligned}$$

例 5.7. 求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$$

解. 考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}{\sin^3 x} \quad \text{(化简)}.$$

法 I. (下面第一步中把分子拆开是求导时一个常用的技巧)

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}{\sin^3 x} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3} && *(\sin x\sim x) \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}}{3x^2} && \text{(L'Hospital 法则)} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x+\sec^2 x\cdot\sin x-\cos x-\tan x\cdot\cos x}{3x^2(1+\tan x)(1+\sin x)} \\
& && \text{(整理)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x+\tan^2 x\sin x}{3x^2} && *(\text{化简})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x+\sin x}{6x} && (\text{L'Hospital 法则})\\
&= \frac{1}{2}. && (\tan x\sim x,\ \sin x\sim x)
\end{aligned}
$$

或者我们可以这样计算

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2} && (\text{化简})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x} && (\text{L'Hospital 法则})\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

这对于不熟悉求导公式 $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$ 的同学不失为一个简便的方法.

法 II.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}{\sin^3 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1}{x^3} && **\,(\ln(1+y)\sim y,\ \sin x\sim x)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)} && (\text{整理})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} && (\text{化简})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2} && (\text{L'Hospital 法则})\\
&= \frac{1}{2}. && (\text{见法 I})
\end{aligned}
$$

法 III.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}{\sin^3 x} \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1}{x^3} && (\ln(1+y)\sim y, \sin x\sim x) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)} && (\text{整理}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} && *(\tan x\sim x) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} && (\text{L'Hospital 法则}) \\
=\ &\frac{1}{2}. && (\sin x\sim x)
\end{aligned}$$

从这个例子我们可以看出, 早一点使用等价关系，可以化简计算。法 III 的等价关系运用得比法 II 彻底, 所以也更简捷，更容易避免计算错误.

最后我们有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

例 5.8. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}.$$

解. 法 I. 大着胆子用 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3} \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos x-1}{3x^2} && (\text{L'Hospital 法则}) \\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos^2 x-\cos(\sin x)\sin x}{6x} && (\text{L'Hospital 法则}) \\
=\ &-\tfrac{1}{3}. && (\sin\sin x\sim x, \sin x\sim x)
\end{aligned}$$

下面的方法则是比较有技巧性的解法:

法 II*.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3} && *(\text{拆项})\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sin^3 x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3} && *(\sin x\sim x)\\
=\ &2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3} && *(\text{代换})\\
=\ &\ldots=-\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

法 III.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arcsin x}{(\arcsin x)^3} && (\text{代换})\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arcsin x}{x^3} && (\arcsin x\sim x)\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} && (\text{L'Hospital 法则})\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x(1-x^2)^{-3/2}}{6x} && (\text{L'Hospital 法则})\\
=\ &-\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

例 5.9. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}.$$

解：法 I.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1+x^2}}{\sec^2 x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} && (\text{L'Hospital 法则})\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{2\sec^2 x\cdot\tan x-\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}} && (\text{L'Hospital 法则})\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{(1+x^2)^2}}{2\sec^2 x\cdot\frac{\tan x}{x}-\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}} && (\text{整理})\\
=\ &1. && (\sin x\sim x,\ \tan x\sim x)
\end{aligned}
$$

虽然这一题第一次使用 L'Hospital 法则后的表达式很繁. 但是就 L'Hospital 法则的应用而言, 这样的算式要比通分后的算式运用 L'Hospital 法则简单. 关键是不要就此止步, 要有信心做下去. 同样的情形在上一题的法 I 和法 III 中也已出现.

当然, 如果我们熟悉极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

和

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

这两个极限, 就可以有下面的解法:

法 II*.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)+(x-\arctan x)}{(\tan x-x)+(x-\arcsin x)}\\
=\ &\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-x}{x^3}+\frac{x-\arctan x}{x^3}}{\frac{\tan x-x}{x^3}+\frac{x-\arcsin x}{x^3}} && \text{(拆项)}\\
=\ &\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}}\\
=\ &\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}} && \text{(代换)}\\
=\ &\left(\frac{-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\right)=1.
\end{aligned}$$

这一方法中, 起作用的不仅是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ 的存在性, 很重要的还在于两者不相等。

例 5.10.* 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}.$$

解:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)+\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x} \\
& \hfill (\text{分析}) \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(\tan x-\sin x)}{\cos(\tan x)\cos(\sin x)}+\tan(\sin x)\big(1-\cos(\sin x)\big)}{\tan x-\sin x} \\
& \hfill (\text{整理}) \\
= & 1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{1-\cos x} \\
& \hfill (\text{等价关系}) \\
= & 1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{\sin x} \\
& \hfill (\text{L'Hospital 法则}) \\
= & 2.
\end{aligned}
$$

习题 2.5.

1. 试寻找三题有一定难度的计算极限的例子, 用本节的方法求解.

§6. 和的极限

数列极限问题中有时候数列的一般项以和的形式出现. 我们对此在本节作一简单介绍. 和的极限中有很大一部分问题与级数有关, 相应的内容我们留待以后讨论.

例 6.1. $S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

解. 法 I. 利用 $\frac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上的可积性.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}S_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\Big) \\
&= \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.
\end{aligned}
$$

法 II. 利用序列

$$a_n\triangleq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$$

收敛到 Euler 常数 γ, 我们有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}S_n &= \lim_{n\to+\infty}\Big(a_{2n}-a_n+\ln 2n-\ln n\Big) \\
&= \ln 2.
\end{aligned}
$$

例 6.2. $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

解. 由

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{i}{n}}} \geq \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

得

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\Big) \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\ldots+\int_{\frac{n}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{n}{n}}} \\ &\geq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{dx}{\sqrt{x}}+\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} \frac{dx}{\sqrt{x}}+\ldots+\int_{\frac{n}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

类似地,

$$S_n \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

从而由夹逼准则,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

例 6.3. 设

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}.$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

解. 这是一个简单的例子, 我们有

$$a_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

本题也可以利用幂级数进行求解.

习题 2.6.

1. 在例题 6.2 中为什么不直接用数列是 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $[0,1]$ 上的 Riemann 和得到结论? 该题如何得到一般化的结论.

2. 试寻找例题 6.2 的其他解法.

3. 计算
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^4+3^4+\ldots+(2n-1)^4}{n^5}.$$

4. 求
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

5. 计算
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^4+3^4+\ldots+(2n-1)^4}{n^5}.$$

6. 求
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}.$$

7. 求
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\left[1^3a^{\frac{1}{n}}+2^3a^{\frac{2}{n}}+\ldots+n^3a^{\frac{n}{n}}\right].$$

8. 设
$$a_n=\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}.$$
求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

§7. 极限和连续性的的一些有趣的问题

例 7.1. 设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，$\int_a^b f(x)dx>0$. 试证：存在 $(c,d)\subset(a,b)$ 使 $f(\cdot)$ 在 (c,d) 上有 $f(x)>0$.

证明. 本题的证明并没有什么难度，利用反证法直接利用 Riemann 积分的定义就可以. 但是结果却是有趣的. 我们把详细的证明留给读者. □

例 7.2. 设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上**上半连续**: $\forall\, x\in[a,b]$, $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 使得 $f(t)\le f(x)+\varepsilon$ 对任何 $t\in(x-\delta,x+\delta)$ 成立[1]. 证明: $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到上确界.

证明. 上半连续和下半连续是很重要的概念, 不难看到一个有限值的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上半连续的当且仅当
$$\overline{\lim_{y\to x}}\,f(y)\le f(x),\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

一个典型的上半连续的例子是
$$g(x)=\begin{cases}1, & x\ne 0,\\ 0, & 0<|x|\le 1.\end{cases}$$

[1] 一般, 在没有特别说明的时候, 这里的 x,t 总是指在 $[a,b]$ 中取值, 亦即 $(x-\delta,x+\delta)$ 事实上应该用 $(x-\delta,x+\delta)\bigcap[a,b]$ 代替. 同样, 在考虑极限时, 在左端点 a 总是考虑右极限, 在右端点 b 考虑左极限.

读者可以类似地给出下半连续的定义和例子.

有了上极限定义的上半连续性, 本题的结论很容易证明. 我们取 $x_n \in [a,b]$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

由上确界的定义, 易见这样的序列 x_n 总是存在的.

由于 x_n 有界, 所以由 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在它的子列 x_{n_k} 收敛, 设其极限为 ξ. 则 $\xi \in [a,b]$ 且

$$\begin{aligned} f(\xi) &\geq \varlimsup_{x\to\xi} f(x) \\ &\geq \varlimsup_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x). \end{aligned}$$

这样 $f(\xi)$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值. □

例 7.3. 设 $f_n(\cdot)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对固定的 $x\in[a,b]$, $\{f_n(x)\}$ 有界. 证明: 存在 $[a,b]$ 的一个子区间, 在其中 $\{f_n(\cdot)\}$ 一致有界.

证明. 这类问题, 反证法是首选. 反设 $\{f_n(\cdot)\}$ 在 $[a,b]$ 的任何子区间上不一致有界. 则, 首先, $\{f_n(\cdot)\}$ 在 $[a,b]$ 上不一致有界. 所以存在 n_1 以及 $x_1\in[a,b]$ 使得

$$|f_{n_1}(x_1)| > 1.$$

由 $f_{n_1}(\cdot)$ 的连续性, 存在包含 x_1 的一个子区间 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ 使得

$$|f_{n_1}(x)| > 1, \qquad \forall\, x\in[a_1,b_1].$$

对于固定的 n, 由于 $f_n(\cdot)$ 是连续的, 从而在 $[a,b]$ 上是有界的. 特别,

$$f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots, f_{n_1}(\cdot)$$

在 $[a_1,b_1]$ 上一致有界. 于是由假设,

$$f_{n_1+1}(\cdot), f_{n_1+2}(\cdot), \ldots$$

在 $[a_1,b_1]$ 上不一致有界. 这样又有 $n_2>n_1$ 以及 $x_2\in[a_1,b_1]$ 使得

$$|f_{n_2}(x_2)| > 2.$$

从而又有 $[a_1,b_1]$ 的包含 x_2 的一个子区间 $[a_2,b_2]$ 使得

$$|f_{n_2}(x)| > 2, \qquad \forall\, x\in[a_2,b_2].$$

一般地, 有 $n_1 < n_2 < \ldots$ 以及

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots$$

满足

$$|f_{n_k}(x)| > k, \qquad \forall\, x \in [a_k, b_k].$$

这样, 记

$$E \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{x | \lim_{k\to+\infty} a_k \le x \le \lim_{k\to+\infty} b_k\},$$

则 E 非空. 我们有

$$|f_{n_k}(x)| > k, \qquad \forall\, x \in E, k = 1, 2, \ldots.$$

所以 $f_{n_k}(x)$ 对于任何 $x \in E$ 都是无界的, 特别 $f_n(x)$ 对于任何 $x \in E$ 都是无界的, 这与题设矛盾.

所以一定存在 $[a,b]$ 的一个子区间, 使得 $\{f_n(\cdot)\}$ 在该子区间一致有界. □

例 7.4. 设 $\{f_n(\cdot)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛, $f_n(\cdot)$ 可微, 且 $|f_n'(x)| \le M < +\infty$. 试证: $\{f_n(\cdot)\}$ 一致收敛.

证明. 所谓 $\{f_n(\cdot)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 是指 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n, m > N$ 时,

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

也就是

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)| = 0. \tag{7.1}$$

对于任何正整数 K, 我们有

$$\begin{aligned}
& |f_m(x) - f_n(x)| \\
\le\ & |f_m(x) - f_m(a + \frac{j(b-a)}{K})| + |f_n(a + \frac{j(b-a)}{K}) - f_n(x)| \\
& + |f_m(a + \frac{j(b-a)}{K}) - f_n(a + \frac{j(b-a)}{K})| \\
\le\ & 2M|x - (a + \frac{j(b-a)}{K})| \\
& + \sum_{i=1}^{N} |f_m(a + \frac{i(b-a)}{K}) - f_n(a + \frac{i(b-a)}{K})|, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, x \in [a,b],\ j = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}$$

从而, 对上述不等式两边关于 j 取最小值得到

$$\begin{aligned}&|f_m(x)-f_n(x)|\\ \le\quad&\frac{2M(b-a)}{K}+\sum_{i=1}^{K}|f_m(a+\frac{i(b-a)}{K})-f_n(a+\frac{i(b-a)}{K})|,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\forall\ x\in[a,b].\end{aligned}$$

于是

$$\varlimsup_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sup_{x\in[a,b]}|f_m(x)-f_n(x)|\le\frac{2M(b-a)}{K}.$$

令 $K\to+\infty$ 即得

$$\varlimsup_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\max_{x\in[a,b]}|f_m(x)-f_n(x)|\le 0.$$

即 (7.1) 成立. 这就证明了结论. □

例 7.5. 试证:

(i) $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}+\frac{\theta_m}{m!\cdot m},\quad 0<\theta_m<1,$

(ii) e 为无理数.

证明.

(i) 我们要证明的是: 对任何正整数 m,

$$r_m\triangleq m!\cdot m\Big[e-\Big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}\Big)\Big]\in(0,1).$$

由于

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

所以

$$\begin{aligned}r_m&=m!\cdot m\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\\ &=\frac{m}{m+1}\Big(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\ldots\Big)\\ &<\frac{m}{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^{k-1}}\\ &=1.\end{aligned}$$

另外, 易见 $r_m>0$.

(ii) 由 (i) 可见, 对任何正整数 m,

$$m!\,e = m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} + \frac{\theta_m}{m}.$$

其中第一项是整数, 第二项是一个 $(0,1)$ 内的小数. 所以 $m!\,e$ 永远不会是整数. 这就表明 e 是无理数. □

例 7.6. 求:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi en!).$$

解. 由上一题的结论,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi en!)\\
=\;&\lim_{n\to+\infty} n\sin\Big[2\pi n!\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\Big)\Big]\\
=\;&\lim_{n\to+\infty} n\sin\Big(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\Big)\\
=\;&\lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{2\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\Big)=2\pi.
\end{aligned}$$

例 7.7. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$, 且 $|f(x)|\le|\sin x|$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 求证: $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$.

证明. 我们有

$$\Big|\frac{f(x)}{x}\Big|\le\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|,\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

在上式中令 $x\to 0$ 即得结论. □

例 7.8. 设 $\varphi(\cdot),\psi(\cdot)$ 是连续的周期函数, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, $\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-\psi(x))=0$. 证明: $\varphi(\cdot)\equiv\psi(\cdot)$.

证明. 设 $T>0, S>0$ 分别是 $\varphi(\cdot),\psi(\cdot)$ 的周期. 则 $\forall\, x\in\mathbb{R},\, n\in\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned}
&\psi(x+T)-\psi(x)=\psi(x+T+nS)-\psi(x+nS)\\
=\;&\psi(x+T+nS)-\varphi(x+T+nS)+\varphi(x+nS)-\psi(x+nS).
\end{aligned}$$

在上式中令 $n\to+\infty$, 即得

$$\psi(x+T)-\psi(x)=0,\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

即 T 也是 $\psi(\cdot)$ 的周期.

所以 $T>0$ 是 $\varphi(\cdot)-\psi(\cdot)$ 的一个周期. 进一步, $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(x)-\psi(x) &= \lim_{n\to+\infty}\Big(\varphi(x)-\psi(x)\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\Big(\varphi(x+nT)-\psi(x+nT)\Big)=0.\end{aligned}$$

即

$$\varphi(\cdot)\equiv\psi(\cdot).$$

□

例 7.9. 设函数 $f(\cdot)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上连续并有界. 证明: 对任何实数 T, 可求得序列 $x_n\to+\infty$ 使

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0. \tag{7.2}$$

证明. 不妨设 $T>0$. 我们只要证明

$$\varliminf_{x\to+\infty}\Big|f(x+T)-f(x)\Big|=0. \tag{7.3}$$

如果上式不成立, 则

$$\varliminf_{x\to+\infty}\Big|f(x+T)-f(x)\Big|\equiv\ell>0.$$

所以存在 X, 当 $x\geq X$ 时,

$$\Big|f(x+T)-f(x)\Big|\geq\frac{\ell}{2}.$$

由连续函数的介值性, 可知此时 $f(x+T)-f(x)$ 保号. 不妨设恒正. 则可得

$$\begin{aligned}f(nT+X) &\geq f((n-1)T+X)+\frac{\ell}{2}\geq\dots\\ &\geq f(X)+\frac{n\ell}{2},\qquad\forall\, n=1,2,\dots.\end{aligned}$$

这与 $f(x)$ 的有界性矛盾.

因此, (7.3) 成立. 从而例题的结论成立. □

例 7.10. 证明: 对任何 x,y 成立 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的连续函数, 必为齐次线性函数.

证明. 由假设, 对于如何正整数 m,n, 我们有

$$f(\frac{m}{n})=mf(\frac{1}{n}).$$

特别,

$$f(1) = nf(\frac{1}{n}).$$

所以

$$f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1).$$

即对任何正有理数

$$f(q) = qf(1). \tag{7.4}$$

另一方面,

$$f(0) = f(0+0) = 2f(0).$$

所以 $f(0) = 0$. 而

$$f(-x) + f(x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0.$$

所以

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

从而结合前面的结论. (7.4) 对所有有理数成立.

最后利用 $f(x)$ 的连续性和有理数在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性可得

$$f(x) = f(1)\, x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

即 $f(x)$ 为齐次线性函数. □

例 7.11. 证明: $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$ 不是周期函数.

证明. 易见 $f(x)$ 是连续可微函数, 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数. 于是结合连续性可得 $f'(x)$ 有界. 然而很明显

$$f'(x) = 2\sin x\cos x + 2x\cos x^2,$$

是无界函数 (可考虑 $f'(\sqrt{2n\pi})$), 所以 $f(x)$ 不是周期函数. □

例 7.12. 设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 但不为常数. 求证: $\exists\, \xi \in (a,b)$ 使 $f(\cdot)$ 在点 ξ 不取极值.

证明. 由于 $f(x)$ 不为常数, 所以有 $a_0, b_0 \in [a,b]$ 使得 $f(a_0) < f(b_0)$. 不妨设 $a_0 < b_0$.

由于 $f(x)$ 连续, 由介值定理, 可以取到 u, v, w 使得 $a_0 < u < v < w < b_0$,

$$f(a_0) < f(u) < f(v) < f(w) < f(b_0).$$

若 $v-u \le \frac{w-u}{2}$, 则令

$$a_1 = u, \quad b_1 = v.$$

否则, 令

$$a_1 = v, \quad b_1 = w.$$

则无论哪种情形, 总有

$$[a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0], \quad b_1 - a_1 \le \frac{b_0 - a_0}{2},$$

$$f(a_0) < f(a_1) < f(b_1) < f(b_0).$$

一般地, 有一列 $[a_n, b_n]$ 满足

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}], \quad b_n - a_n \le \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2},$$

$$f(a_{n-1}) < f(a_n) < f(b_n) < f(b_{n-1}).$$

由区间套定理, 有惟一的 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

另一方面. $f(a_n)$ 严格单增, $f(b_n)$ 严格单减. 从而

$$f(\xi) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(a_k) > f(a_n), \quad \forall\, n \ge 1,$$

类似地,

$$f(\xi) < f(b_n), \quad \forall\, n \ge 1.$$

注意到 $b_n - a_n \to 0$, 可见 ξ 不是极值点. □

习题 2.7.

1. 给出例 7.1 的详细证明.
2. 设 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 是实值函数，试证存在 $x, y \in [0,1]$ 使 $|xy - f(x) - g(y)| \ge \frac{1}{4}$.
3. 设 $x_n \ne 0$，$x_n \to a$. 请问 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 是什么?
4. 在例 7.10 中, $f(x)$ 的连续性可以用 $f(x)$ 在 0 点的连续性来代替. 进一步, 证明, $f(x)$ 的连续性用局部有界性代替时, 结论仍然成立.
5. 设 $f(x) \in C^\infty[-a, a]$, 并且序列 $f^n(x)$ 在 $(-a, a)$ 上一致收敛，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(0) = 1$. 试求:
$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x).$$
6. 设 $f(x)$ 是可微函数, 满足
$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}.$$
试求 $f(x)$.

7. 设函数 $f(x) \in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$. 而且 $\forall\, x \in (-\infty,+\infty)$ 有:
$$|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2}.$$
则
$$\lim_{n\to+\infty} f^{\langle n\rangle}(x) = Ce^x.$$

8. 若 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 若 $f(x)$ 局部有界,
   (i) 证明: 存在常数 A 使得
   $$f(x) = A^x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
   (ii) 若 $f(x)$ 是复值函数, 情况又如何?

9. 设 $f(\cdot)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足条件:$f(x^2)=f(x)$. 证明:$f(\cdot)$ 为一常数.

10. 设 $0<q_n<1$, $(1-q_n)q_{n+1}>\frac{1}{4}$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \dfrac{1}{2}$.

11. 构造一列 $[a,b]$ 上的连续函数 $f_n(x)$, 使得对每一个 $x\in[a,b]$, $\{f_n(x)\}$ 有界, 但 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上非一致有界.

12. 思考: 若 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 在什么条件下可以保证 $f(x)$ 是齐次线性函数?

第三章　微分

§1. 微分中值定理和 Taylor 展式

在微分问题中, 中值定理起着极为重要的作用. 而 Taylor 展式则是微分中值定理的一种推广. 进一步, 把函数表达为 Taylor 级数, 使得我们可以将复杂的函数变成比较容易处理的幂函数.

首先我们介绍几个基本的定理和它们的证明.

定理 1.1. (**Roll 定理**) 设 $f(\cdot)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)$, 则在区间 (a,b) 内必有一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

证明. 若 $f(x)$ 是常数, 则结论显然成立. 否则, 存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$. 不妨设 $f(x_0) > f(a)$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因而它在 $[a,b]$ 上有最大值. 设 $\xi \in [a,b]$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值点. 则 $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$. 从而

$$\xi \in (a,b).$$

所以 ξ 是极大值点[1] 于是利用可导函数在极值点上导数为零的性质得到定理的证明. □

Roll 定理的几何意义是当可微函数在端点的值相等的时候, 则该函数的曲线一定有一条切线斜率为零, 即该切线平行于曲线端点的连线. 根据这一几何解释, 我们将坐标平面旋转, 就可以得到更一般的结论: 一个可微函数, 其函数图像必定有一条切线平行于曲线的端点的连线. 这就是如下的 Lagrange 中值定理:

定理 1.2. (**Lagrange 定理**) 设函数 $f(\cdot)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可微. 则在区间 (a,b) 内必有一点 ξ, 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

证明. 我们可以根据前面的几何解释, 来构造辅助函数并利用 Roll 定理来证明结论.

仅仅从分析的角度来看, 我们可以套用 Roll 定理来证明 Lagrange 定理. 可以这样来寻找辅助函数: 我们希望证明的是存在 $\xi \in (a,b)$,

$$f(b)-f(a)-f'(\xi)(b-a)=0.$$

所以只要构造一个在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微的函数 $F(x)$ 使得

$$F'(x) = f(b)-f(a)-f'(x)(b-a) \tag{1.1}$$

[1]通常, 我们讲极值点总是指它是一个内点.

且

$$F(a) = F(b). \tag{1.2}$$

而事实上条件 (1.2) 不是用来构造的, 是用来验证的. 基本上, 如此一般性的结论, 如果根据 (1.1) 构造出辅助函数后, (1.2) 不能同时成立, 则这样的结论是不会成立的.

有了不定积分的思想, 我们就不难找到一个辅助函数 F 满足 (1.1):

$$F(x) = (f(b) - f(a))x - f(x)(b - a).$$

容易验证 $F(a) = F(b) = a(f(b) - f(a))$, 且 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可微. 于是根据 Roll 定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$F'(\xi) = 0.$$

此即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

□

注 1.1. 在证明中, 为了验算时计算简单, 显然取 $F(x)$ 为

$$F(x) = (f(b) - f(a))(x - a) - (f(x) - f(a))(b - a)$$

更好. 此时有 $F(a) = F(b) = 0$.

注 1.2. Lagrange 中值定理常常有其他的表述形式. 比如

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

直接表示了割线斜率与切线斜率之间的关系. 而对于 $\xi \in (a, b)$, 经常用 $a + \theta(b - a)$ 或 $\theta b + (1 - \theta)a$ 表示, 其中 $\theta \in (0, 1)$. 特别当不知道 a, b 的大小关系时, 这一表示更为方便.

如果将 Lagrange 中值定理运用到用参数表示的函数, 则可以得到以下的中值定理:

定理 1.3. (**Cauchy 定理**) 设函数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可微. 则在区间 (a, b) 内必有一点 ξ, 使

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi). \tag{1.3}$$

特别, 若 $g(b) \neq g(a)$, $g'(\cdot) \neq 0$, 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明. 法 I. 我们证明 $g'(x) \neq 0$ 的情形. 根据前面的几何描述, 即 Cauchy 中值定理是参数化的 Lagrange 中值定理, 我们令

$$X = g(x), Y = f(x).$$

由于 $g(x)$ 的导数不为零, 根据后面的 Darboux 定理, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的导数必然恒正或恒负, 从而 $g(x)$ 是严格单调的. 不妨设 $g(x)$ 严格单增.

则 Y 作为 X 的函数是在 $[g(a), g(b)]$ 上连续, 在 $(g(a), g(b))$ 上可微的函数. 由此由 Lagrange 中值定理知存在 $\eta \in (g(a), g(b))$ 使得

$$Y(g(b)) - Y(g(a)) = \frac{dY}{dX}(\eta)(g(b) - g(a)).$$

由 $g(x)$ 的连续性和单调性, 存在惟一的 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$g(\xi) = \eta.$$

从而

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= Y(g(a)) - Y(g(b)) \\ &= \frac{dY}{dX}(g(\xi))(g(b) - g(a)) \\ &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(b) - g(a)). \end{aligned}$$

这就证明了结论.

法 II. 从分析的角度来看, 我们可以直接寻找辅助函数, 并利用 Roll 定理或 Lagrange 定理来证明 Cauchy 定理. 我们希望证明的是存在 $\xi \in (a,b)$,

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

所以只要构造一个在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微的函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$

且

$$F(a) = F(b).$$

令

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $F(a) = F(b) = 0$. 由 Roll 定理, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. 此即 (1.3) 成立. □

作为微分中值定理的推广, Taylor 展式有以下常用的几种类型:

定理 1.4. (**Peano 型的 Taylor 展式**) 设函数 $f(\cdot)$ 在 0 点有 n 阶导数, 则:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{\langle n\rangle}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

证明. 我们只要反复利用 L'Hospital 法则:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\left(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{\langle n\rangle}(0)}{n!}x^n\right)}{x^n}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\left(f'(0)+f''(0)x+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right)}{nx^{n-1}}\\
=&\ \ldots\ldots\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{f^{\langle n-1\rangle}(x)-f^{\langle n-1\rangle}(0)-f^{\langle n\rangle}(0)x}{n!x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{f^{\langle n-1\rangle}(x)-f^{\langle n-1\rangle}(0)}{n!\,x}-\frac{f^{\langle n\rangle}(0)}{n!}=0.
\end{aligned}$$

□

定理 1.5. (**Lagrange 型的 Taylor 展式**) 设函数 $f(\cdot)$ 在 0 点的某邻域内有 $n+1$ 阶导数, 则在此邻域内:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{\langle n\rangle}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{\langle n+1\rangle}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 是介于 0 和 x 之间的一个点.

证明. 对于定理中提及的 0 点的这个邻域内的非零点 x, 反复运用 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)-\left(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{\langle n\rangle}(0)}{n!}x^n\right)}{x^{n+1}}\\
=&\frac{f'(\xi_1)-\left(f'(0)+f''(0)\xi_1+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{(n-1)!}\xi_1^{n-1}\right)}{(n+1)\xi_1^n}\\
=&\ \ldots\ldots\\
=&\frac{f^{\langle n\rangle}(\xi_n)-f^{\langle n\rangle}(0)}{(n+1)!\,\xi_n}\\
=&\frac{f^{\langle n+1\rangle}(\xi)}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

其中 ξ_1 介于 0 与 x 之间, ξ_2 介于 0 和 ξ_1 之间, ……, ξ 介于 0 和 ξ_n 之间. 从而 ξ 介于 0 和 x 之间. □

在很多场合, 把 $f(b)-f(a)$ 表示成一个积分形式是非常有用的, 如果 $f'(x)$ 连续, 我们有

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx. \tag{1.4}$$

也可以表示为

$$f(b)-f(a)=\int_0^1 f'(a+t(b-a))\,dt\,(b-a).$$

类似地, 如果, $f^{\langle n+1\rangle}(x)$ 连续, 则我们有如下带有积分型余项的 Taylor 展式:

定理 1.6. **设函数 $f(\cdot)$ 在 0 点的某邻域内有 $n+1$ 阶连续导数, 则在此邻域内:**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{\langle n\rangle}(0)}{n!}x^n \\ &\quad+\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{\langle n+1\rangle}(t)}{n!}\,dt. \end{aligned} \tag{1.5}$$

证明. 法 I. 利用归纳法. 当 $n=0$ 时, (1.5) 即为 (1.4).

设 $n=k\geq 0$ 时 (1.5) 对 0 点一邻域内有 $k+1$ 阶连续导数的函数成立. 则当 $f(x)$ 在 0 点一邻域内有 $k+2$ 阶连续导数时, 则在该邻域内,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{k}\frac{f^{\langle j\rangle}(0)x^j}{j!}+\int_0^x \frac{(x-t)^k f^{\langle k+1\rangle}(t)}{k!}\,dt \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}\frac{f^{\langle j\rangle}(0)x^j}{j!}+\int_0^x dt\int_0^t \frac{(x-t)^k f^{\langle k+2\rangle}(s)}{k!}\,ds \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}\frac{f^{\langle j\rangle}(0)x^j}{j!}+\int_0^x ds\int_s^x \frac{(x-t)^k f^{\langle k+2\rangle}(s)}{k!}\,dt \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}\frac{f^{\langle j\rangle}(0)x^j}{j!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{k+1} f^{\langle k+2\rangle}(s)}{(k+1)!}\,ds. \end{aligned}$$

即 (1.5) 对 $n=k+1$ 也成立.

于是由归纳法即得定理成立.

法 II. 记

$$F(x)=f(x)-\Big[\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{\langle k\rangle}(0)x^k}{k!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{\langle n+1\rangle}(t)}{n!}\,dt\Big].$$

则我们要证 $F(x)$ 在 0 点的那个邻域内恒为 0. 通过直接求导容易验证 $F(x)$ 有 $n+1$ 阶的连续导数, 且

$$F^{\langle n+1\rangle}(x)\equiv 0.$$

所以存在常数 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 使得

$$F(x)\equiv C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n.$$

由 $F(x)$ 的定义直接验算可得

$$F(0) = F'(0) = \ldots = F^{\langle n\rangle}(0) = 0.$$

由此即得

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 0.$$

即

$$F(x) \equiv 0.$$

□

一般说来, 一个可微函数的导数并不一定连续, 但有趣的是它像连续函数一样, 具有介值性, 这就是著名的 Darboux 定理.

定理 1.7. (**Darboux 定理**) *设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f'(a) < f'(b)$. 则对任何 $\lambda \in (f'(a), f'(b))$, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \lambda$.*

证明. 令

$$F(x) \overset{\triangle}{=} f(x) - \lambda x.$$

则

$$F'(a) = f'(a) - \lambda < 0, \quad F'(b) = f'(b) - \lambda > 0.$$

由于

$$\lim_{x\to a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) < 0.$$

所以存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 时,

$$F(x) - F(a) < 0.$$

所以 a 不是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点. 同理可证 b 不是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值点.

另一方面, 由于 $F(x)$ 连续, 它在 $[a,b]$ 上有最小值, 设 $\xi \in [a,b]$ 是一个最小值点, 则 $\xi \in (a,b)$, 从而它是极小值点. 于是

$$F'(\xi) = 0.$$

亦即

$$f'(\xi) = \lambda.$$

□

注 1.3. 有例子表明, 可微函数的导函数不一定连续. 例如对于

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

不难证明 $f(x)$ 是可微的, 且

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

由此可以看到 $f'(x)$ 在 0 点不连续.

导数与函数的单调性有着直接的联系, 我们有

定理 1.8. 设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微. 则

(i) $f'(\cdot)\geq 0 \Longleftrightarrow f(\cdot)$ 单增. 而 $f'(\cdot)>0 \Longrightarrow f(\cdot)$ 严格单增.
(ii) $f'(\cdot)\leq 0 \Longleftrightarrow f(\cdot)$ 单减. 而 $f'(\cdot)<0 \Longrightarrow f(\cdot)$ 严格单减.
(iii) $f'(\cdot)=0 \Longleftrightarrow f(\cdot)\equiv C$.

注 1.4. $f(\cdot)$ 严格单增不能推出 $f'(\cdot)>0$.

例 1.1. 设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 且满足 $Lip\,\alpha$ 条件, 即存在 $M>0$, $\forall\, x,y\in[a,b]$, 有

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^{\alpha}.$$

若 $\alpha>1$, 则 $f(\cdot)\equiv C$.

证明. 证明是简单的. 利用假设条件立即可得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且导数为零. 从而它一定是常函数. □

例 1.2. 设 f 在 $[a,b]$ 可导, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

证明. 下面的过程类似于一个解常微分方程的过程.

至少在形式上, 要找 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=0,$$

相当于要使

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+1=0,$$

亦即

$$(\ln f(x)+x)'\Big|_{x=\xi}=0$$

化为

$$[\ln(e^x f(x))]'\Big|_{x=\xi} = 0,$$

即

$$\frac{(e^x f(x))'}{e^x f(x)}\Big|_{x=\xi} = 0,$$

相当于

$$(e^x f(x))'\Big|_{x=\xi} = 0.$$

令

$$F(x) = e^x f(x).$$

上面的过程展示了我们是为何要引入 (或如何找到) 这个辅助函数的.

接下来, 容易由 $F(a) = F(b)$ 运用 Rolle 定理得到结论. □

例 1.3. 设 $f(\cdot)$ 在原点的邻域内二次可导, 且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}\right) = 0.$$

试求:

(i) $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$,

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2}.$$

解: 由假设,

$$\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = o(1), \qquad (x\to 0).$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\sin 3x}{x} + o(x^2) \\ &= -3 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2), \qquad (x\to 0). \end{aligned}$$

另一方面, 由 $f(x)$ 的 Taylor 展式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2), \qquad (x\to 0)$$

的惟一性可得

$$f(0) = -3, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 9.$$

进一步,

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2} \\ = &\lim_{x\to 0}\frac{-3+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)+3}{x^2} \\ = &\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

本题中, 我们特别要注意避免如下的推导:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f''(x)=f''(0),$$

这是因为题中没有假设 $f''(x)$ 的连续性.

例 1.4. 设 $f(\cdot)$ 是 $(a,+\infty)$ 上有界的可微函数. $|f'(\cdot)|$ 单调. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0.$$

证明. 由 Darboux 定理可知 $|f'(\cdot)|$ 的单调性蕴涵着 $f'(x)$ 的保号性. 不妨设 $f'(x)$ 非负. 此时 $f'(x)$ 必然单调减少. 否则有 $x_2>x_1\geq a$ 使得 $f'(x_2)>f(x_1)\geq 0$. 则由中值定理, 当 $x>x_2$ 时,

$$f(x)-f(x_2)=f'(x_2+\theta(x-x_2))(x-x_2)\geq f'(x_2)(x-x_2),$$

其中 $\theta\in(0,1)$ 与 x 有关. 从而

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

这与假设矛盾.

于是 $f'(x)$ 非负且单调减少. 由中值定理,

$$2\Big(f(x)-f(\frac{x}{2})\Big)=f'\Big(\frac{x}{2}+\alpha\frac{x}{2}\Big)x\geq f'(x)x\geq 0,$$

这里 $\alpha\in(0,1)$ 为与 x 有关的一个数. 由于 $f(x)$ 有界, 而由 $f'(x)$ 非负知 $f(x)$ 单调增加, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

存在. 于是由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0.$$

□

例 1.5. 设 $f(\cdot)$ 在无穷区间 $(a,+\infty)$ 内二次可微，且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

存在. 则

(i) 在 $(a,+\infty)$ 内, 至少有一 ξ 使 $f'(\xi)=0$.
(ii) 在 $(a,+\infty)$ 内, 至少有一点 η 使 $f''(\eta)=0$.

证明. 我们可以寻找两个不同的点, 使 $f(x)$ 在这两个点的值相等来证明第一部分. 类似地证明第二部分.

现在我们用 Darboux 定理证明.

(i) 反证法. 若 $\forall\, x \in (a,+\infty)$, $f'(x) \neq 0$. 则由 Darboux 定理, $f'(x)$ 恒正或恒负. 不妨设 $f(x)$ 恒正. 则 $f(x)$ 严格单增加. 所以

$$f(x) > f(a+2) > f(a+1) > f(y), \quad \forall\, x > a+2, y \in (a, a+1).$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq f(a+2) > f(a+1) \geq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

这与假设矛盾.

所以必然存在 $\xi \in (a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

(ii) 我们仍用反证法. 若对任何 $x \in (a,+\infty)$, $f''(x) \neq 0$. 则 $f''(x)$ 恒正或恒负. 不妨设 $f''(x)$ 恒正.

由 (i), $\exists \xi \in (a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. 于是

$$f'(x) > f'(\xi+1) > f'(\xi) = 0, \qquad \forall\, x > \xi + 1.$$

所以

$$f(x) \geq f(\xi+1) + f'(\xi+1)(x-\xi-1), \qquad \forall\, x > \xi+1.$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > \lim_{x\to a^+} f(x).$$

与假设矛盾.

因此必然存在 $\eta \in (a,+\infty)$ 使得 $f''(\eta) = 0$. □

例 1.6. 设 $f(\cdot)$ 在 (a,b) 内存在二阶导数, c 为 (a,b) 内一点, 满足 $f''(c) \neq 0$. 则在 (a,b) 内存在 $x_1 \neq x_2$ 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c).$$

证明. 记

$$F(x) \triangleq f(x) - f'(c)\,x.$$

则

$$F'(c) = 0, \quad F''(c) = f''(c) \neq 0.$$

所以 c 是 $F(x)$ 的严格极大值点或严格极小值点. 不妨设 c 为严格极大值点. 则 $\exists \delta > 0$ 使得

$$F(x) < F(c), \qquad \forall\, x \in [c-\delta) \bigcup (c, c+\delta].$$

任取 α 满足 $F(c) > \alpha > \max(F(c-\delta), F(c+\delta))$, 由连续函数的介值定理, 存在

$$x_1 \in (c-\delta, c), \quad x_2 \in (c, c+\delta),$$

使得

$$F(x_1) = F(x_2) = \alpha.$$

则

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

此即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

□

例 1.7. 设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且满足 $|f'(x)| \le M|f(x)|$, $f(a) = 0$. 则 $f(\cdot) \equiv 0$.

证明. 我们准备用多种方法证明本题.

法 I. 反证法. 若 $f(x) \not\equiv 0$. 则存在 $x_0 \in (a,b]$ 使得

$$f(x_0) \neq 0.$$

不妨设 $f(x_0) > 0$. 记

$$c = \sup\{x \in [a, x_0] | f(x) \le 0\}.$$

则 c 适定, 且 $f(c) = 0$, $c \in [a, x_0)$,

$$f(x) > 0, \qquad \forall\ x \in (c, x_0).$$

在 (c, x_0) 内, 我们有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \le M.$$

即

$$\Big(\ln f(x)\Big)' \le M, \qquad \forall\ x \in (c, x_0).$$

所以由中值定理可得

$$\ln f(x_0) - \ln f(x) \le M(x_0 - c), \qquad \forall\ x \in (c, x_0).$$

在上式中令 $x \to c^+$, 并注意到 $f(c) = 0$ 得到

$$+\infty \le M.$$

矛盾.

所以 $f(x) \equiv 0$.

法 II. 记

$$c = \sup\{s \in [a,b] | f(x) = 0, \qquad \forall\ a \le x \le s\}.$$

易见 c 适定. 我们要证 $c=b$. 如若不然, 则 $a\le c<b$. 令

$$\alpha=\min(b-c,\frac{1}{2M},\quad m=\max_{x\in[c,c+\alpha]}|f(x)|.$$

则 $\alpha>0$. 由中值定理以及题设条件, $\forall\, x\in[c,c+\alpha]$, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x)-f(c)|=|f'(\xi)(x-c)|\\ &\le M|f(\xi)|\,|x-c|\le Mm\alpha\\ &< m,\qquad \forall\, x\in[c,c+\alpha].\end{aligned}$$

这与 m 为 $f(x)$ 在 $[c,c+\alpha]$ 上的最大值矛盾.

所以 $c=b$, 即 $f(x)\equiv 0$.

法 III. 设 m 为 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值.

若 $f'(x)$ 连续, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(a)| &= |\int_a^x f'(t)\,dt|\\ &\le \int_a^x |f'(t)|\,dt\\ &\le \int_a^x M|f(t)|\,dt,\qquad \forall\, x\in[a,b].\end{aligned}$$

由上式可以进一步可以证明结论. 但是我们没有假设 $f'(x)$ 的连续性, 所以我们做以下改造: 考虑

$$F(x)=f(x)-\int_a^x M|f(t)|\,dt,\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且

$$F'(x)=f'(x)-M|f(x)|\le 0.$$

所以 $F(x)$ 单调减少, 从而

$$f(x)\le\int_a^x M|f(t)|\,dt,\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

类似地

$$-f(x)\le\int_a^x M|f(t)|\,dt,\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

这样, 我们可以得到

$$|f(x)|\le\int_a^x M|f(t)|\,dt,\qquad \forall\, x\in[a,b]. \tag{1.6}$$

进一步有:

$$|f(x)|\le\int_a^x Mm\,dt=Mm(x-a),\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

从而又有

$$|f(x)| \le \int_a^x M \cdot Mm(t-a)\,dt = \frac{M^2 m(t-a)^2}{2}, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

归纳地, 可以得到

$$|f(x)| \le \frac{M^n m(t-a)^n}{n!}, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

在上式中令 $n \to +\infty$ 即得 $f(x) \equiv 0$. □

例 1.8. 设 $f(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶导数, 且 $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$. 则 $\exists\, \xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) \ge 8$.

证明. 设 x_0 为最小值点. 则利用 Lagrange 型的 Taylor 展式, 我们有

$$f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(0-x_0)^2,$$

以及

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{f''(\eta)}{2}(1-x_0)^2,$$

其中 ξ, η 分别为介于 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 内的一个点. 我们有

$$f''(\xi) = \frac{2}{x_0^2}, \quad f''(\eta) = \frac{2}{(1-x_0)^2}.$$

如果 $x_0 \le \frac{1}{2}$, 则易见, ξ 满足 $f''(\xi) \ge 8$. 否则, $1 - x_0 \le \frac{1}{2}$, 此时. η 满足 $f''(\eta) \ge 8$. □

例 1.9. 设 $f(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 则 $\exists\, \xi \in (a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \ge \frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

证明. 由 Lagrange 型的 Taylor 展式, 存在 $\xi \in (a, \frac{a+b}{2})$ 和 $\eta \in (\frac{a+b}{2}, b)$ 使得

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2}\frac{(b-a)^2}{4},$$
$$f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + \frac{f''(\eta)}{2}\frac{(b-a)^2}{4},$$

两式相减得到

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi) - f''(\eta))$$

所以

$$\frac{8|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \le |f''(\xi)| + |f''(\eta)|.$$

从而 ξ, η 中必有一个满足要求. □

例 1.10. 设 $f(\cdot)$ 在 $[0,2]$ 上存在二阶导数, $\forall\ x \in [0,2]$, $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 1$. 则 $|f'(x)| \leq 2$.

证明. 由 Lagrange 型的 Taylor 展式,,

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2,$$

两式相减得到

$$2f'(x) = f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2.$$

于是

$$2|f'(x)| \leq 2 + \frac{x^2 + (2-x)^2}{2} \leq 4.$$

从而结论成立. □

例 1.11. 设 $f(\cdot)$ 为在 $(-\infty,+\infty)$ 上的二次可微函数. 记 $M_0 = \sup\limits_x |f(x)|$, $M_1 = \sup\limits_x |f'(x)|$, $M_2 = \sup\limits_x |f''(x)|$. 则若 M_0, $M_2 < +\infty$, 我们有

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

证明. 对于任何 $x \in \mathbb{R}$ 以及 $y > 0$, 利用 Lagrange 型的 Taylor 展式, 可得

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{f''(x+\alpha y)}{2}y^2, \tag{1.7}$$

$$f(x-y) = f(x) - f'(x)y + \frac{f''(x-\beta y)}{2}y^2, \tag{1.8}$$

其中 $\alpha, \beta \in (0,1)$. 两式相减, 得到

$$2yf'(x) = f(x+y) - f(x-y) + \frac{f''(x-\beta y) - f''(x+\alpha y)}{2}y^2.$$

从而

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{y} + \frac{M_2 y}{2}, \qquad \forall\ y > 0.$$

上式两边关于 $y > 0$ 取最小值即得

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{\frac{M_0M_2}{2}}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

从而

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

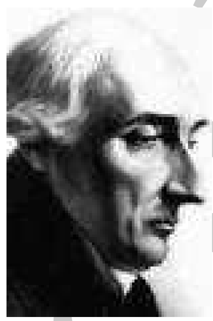
□

注 1.5. 如果我们只利用 (1.7) 或 (1.7), 可以得到

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

上式称为 Landau 不等式.

法国数学家 Darboux, Jean Gaston (1842.8.14—1917.2.23)



法国数学家 Lagrange, Joseph Louis Comte de(1736.1.25—1813.4.10)

习题 3.1.

1. 设 f 在 $[a,b]$ 可导, $f(a)=f(b)=0$. 又设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个连续函数.
   (a) 如果要证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
   $$g(\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0,$$
   该如何找辅助函数.
   (b) 如果要证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
   $$g(\xi)f^2(\xi)+f'(\xi)=0,$$
   该如何找辅助函数.
2. 若例题 1.5 中, $f(x)$ 有足够的光滑性, 你可以得到什么进一步的结论?
3. 设 $f(\cdot)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数, 且 $f(2)=0$, 令 $F(x)=(x-1)^2f(x)$, 则在 $(1,2)$ 内存在一点 ξ, 使 $F''(\xi)=0$.

4. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot), \psi(\cdot), \beta(\cdot)$ 是 $[0,T]$ 上的连续函数，$\psi(\cdot)$ 非负. 如果

$$\varphi(t) \le \alpha + \int_0^t \Big[\psi(s)\varphi(s) + \beta(s)\Big]\, ds,\ t \in [0,T],$$

证明

$$\varphi(t) \le \alpha e^{\int_0^t \psi(s)ds} + \int_0^t e^{\int_s^t \psi(r)dr}\beta(s)\, ds,\ t \in [0,T].$$

5. 设 $f(\cdot)$ 在 $[0,a]$ 上存在二阶导数, $\forall\, x \in [0,a]$, $|f''(x)| \le M$, 且 $f(\cdot)$ 在 $(0,a)$ 内存在最大值. 则

$$|f'(0)| + |f'(a)| \le Ma.$$

6. 设 $f(\cdot)$ 在 x 点有直到 $n+1$ 阶的导数,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{\langle n\rangle}(x+\theta_h\, h),$$

其中 $\theta_h \in (0,1)$ 与 h 的选取有关. $f^{\langle n+1\rangle}(x) \ne 0$, 则

$$\lim_{h\to 0}\theta_h = \frac{1}{n+1}.$$

7. 设 $f(\cdot)$ 在原点的邻域内二次可导, 且

$$\lim_{x\to 0}(1 + x + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = e^3。$$

试求：

(a) $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两阶导数, $f(a) = 0$, 且存在常数 $M > 0$ 使得

$$|f''(x)| \le M|f(x)|.$$

证明

$$f(x) \equiv 0.$$

§2. 极值、零点、不等式

函数的微分与函数的单调性和凹凸性，乃至极值、零点和不等式有着紧密的联系.

寻找函数零点的常用方法有：利用连续函数的介值定理、利用微分中值定理以及利用 Darboux 定理, 尤其以前两者为常用. 而要证明零点的惟一性, 则常常借助于函数的严格单调性.

而对于不等式的证明. 通常最简单就是运用函数的单调性, 稍微复杂一点, 可以运用函数的凹凸性: 在闭区间上, 凸函数的最大值在端点取到, 凹函数的最小值在端点取到. 另外, 我们也可以利用求函数的最大最小值来证明不等式.

注 2.1. 凹凸的概念有些混乱. 在一些教材中被称为凹的函数在另一些教材中被称为凸. 另外也有上 (下) 凸, 上 (下) 凹的说法. 但是就笔者所知, 在大学数学专业的教材中，没有发现类似的混乱. (国际) 数学界统一的定义是: 设 $f(x)$ 是 (a,b)(或 $[a,b],(a,b),(a,b]$) 上的实值函数, 如果对任何 $\alpha\in(0,1)$, 以及 $x,y\in(a,b)$ 成立着

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\ (\geq)\,\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),$$

则称 f 是 (a,b) 上的凸 (凹) 函数. 如果上式当且仅当 $x=y$ 时等号成立, 则称 f 为是严格凸 (凹) 的. 这里定义中的 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$.

按照凸函数这一定义, 立即可得若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数, 则对任何满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 的 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\geq 0$ 以及 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$ 成立着所谓的 Jensen 不等式:

$$f(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)\leq\ \alpha_1f(x_1)+\ldots+\alpha_nf(x_n).$$

这可以看作凸函数的一个等价定义.

例 2.1. 证明: 当 $x>0$ 时有不等式:

$$(1+\frac{1}{x})^x<e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}.$$

证明. 本例表明进行适当变换的重要性. 我们有

$$\begin{aligned}
&\big(1+\frac{1}{x}\big)^x<e<\big(1+\frac{1}{x}\big)^{x+1}, && \forall\ x>0\\
&\Updownarrow\\
&x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)<1<(x+1)\ln\big(1+\frac{1}{x}\big), && \forall\ x>0\\
&\Updownarrow\\
&\frac{1}{x+1}<\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)<\frac{1}{x}, && \forall\ x>0\\
&\Updownarrow\\
&1-\frac{1}{x+1}<\ln(1+x)<x, && \forall\ x>0.
\end{aligned}$$

而最后一式的证明是容易的.

事实上, 我们还可以有这样的转换:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x+1}<\ln\big(1+\frac{1}{x}\big), && \forall\ x>0\\
&\Updownarrow\\
&\ln\big(1-\frac{1}{1+x}\big)<-\frac{1}{x+1}, && \forall\ x>0\\
&\Updownarrow\\
&\ln(1+x)<x, && \forall\ x\in(-1,0).
\end{aligned}$$

这样, 本例原先要证明的不等式事实上等价于

$$\ln(1+x) < x, \qquad \forall\, x > -1, x \neq 0.$$

□

例 2.2. 求出使不等式 $\frac{B}{\sqrt{x}} \leq \ln x \leq A\sqrt{x}$ $(x > 0)$ 成立的最小正数 A 与最大负数 B.

解. 易见,

$$B = \inf_{x>0} \sqrt{x}\ln x = \inf_{x>0} 2x\ln x.$$

而

$$A = \sup_{x>0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \sup_{x>0}(-2x\ln x) = -\inf_{x>0} 2x\ln x.$$

于是问题就化为求 $x\ln x$ 的下确界问题. 不难求得

$$\inf_{x>0} x\ln x = -\frac{1}{e}.$$

所以

$$A = \frac{2}{e}, \quad B = -\frac{2}{e}.$$

例 2.3. 设 $f(\cdot)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 证明 $f(x) - xf'(x)$ 单调下降的充要条件为 $f'(x)$ 单调增加.

证明. 在证明之前, 我们做一个简要的分析. 如果 $f(x)$ 是两阶可导的. 则

$$\begin{gathered} f(x) - xf'(x) \quad \text{单调下降} \\ \Updownarrow \\ \Big(f(x) - xf'(x)\Big)' \leq 0 \\ \Updownarrow \\ xf''(x) \geq 0 \\ \Updownarrow \\ f'(x) \quad \text{单调上升}. \end{gathered}$$

现在的问题是 $f(x)$ 不一定是两阶可导的. 而这正是问题的难点.

尽管如此, 本例中, 充分性的证明是简单的: 设 $f'(x)$ 单调增加, 则对任何 $y > x > 0$, 存在 $\xi \in (x,y)$ 使得

$$\begin{aligned} & \Big(f(y) - yf'(y)\Big) - \Big(f(x) - xf'(x)\Big) \\ = \;& f'(\xi)(y-x) - yf'(y) + xf'(x) \\ = \;& y(f'(\xi) - f'(y)) + x(f'(x) - f'(\xi)) \\ \leq \;& 0. \end{aligned}$$

即 $f(x)-xf'(x)$ 单调下降.

关于必要性, 我们将给出两种解答. 下设 $f(x)-xf'(x)$ 单调下降.

法 I. $f(x)-xf'(x)$ 单调下降即为

$$\frac{\Big(f(y)-yf'(y)\Big)-\Big(f(x)-xf'(x)\Big)}{y-x}\le 0,\qquad \forall\ x,y>0,\ y\neq x.$$

亦即

$$\frac{1}{y}\Big(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-f'(x)\Big)\le\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x},\qquad \forall\ x,y>0,\ y\neq x.$$

令 $y\to x$ 并取下极限, 可得

$$\varliminf_{y\to x}\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}\ge 0.$$

由上式可以证明 $f'(x)$ 是单调增加的. 我们把详细的证明留作习题.

法 II. 既然当 $f'(x)$ 可导时, 证明是简单的, 我们就利用函数的光滑化来解决这一问题.

令

$$G(x)=2\int_1^x f(t)\,dt-xf(x),\qquad \forall\ x>0.$$

则

$$G'(x)=f(x)-xf'(x),\qquad \forall\ x>0.$$

这样, 由 Darboux 定理, $f(x)-xf'(x)$ 具有介值性. 另一方面, $f(x)-xf'(x)$ 单调下降, 从而结合介值性, $f(x)-xf'(x)$ 还必然是连续的. 由此可得 $f'(x)$ 是连续的.

$\forall\ \alpha>0$, 考虑

$$F_\alpha(x)\triangleq\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha}\Big(f(t)-tf'(t)\Big)\,dt,\qquad \forall\ x>0.$$

则对于固定的 $\alpha>0$, $F_\alpha(x)$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 是单调下降的. 从而

$$\frac{d}{dx}F_\alpha(x)\le 0,\qquad \forall\ x>0.$$

即 $\forall\ x>0$,

$$x\Big(\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha}f'(t)\,dt\Big)'\ge\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}-f'(x+\alpha).\tag{2.1}$$

为了处理上述不等式的右端, 我们先把 x 的范围限制在 $[a,A]\subset(0,+\infty)$ 上. 记

$$\omega(r)=\sup_{\substack{x,y\in[a,A+1]\\|x-y|\le r}}|f'(x)-f'(y)|,\qquad \forall\ r\in(0,1).$$

则由连续函数在有界闭区间上的一致连续性知 $\omega(r)$ 有限且

$$\lim_{r\to 0^+}\omega(r)=0.$$

由 (2.1),

$$\Big(\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f'(t)\,dt\Big)'\ge \int_x^{x+\alpha}\frac{f'(t)-f'(x+\alpha)}{x\alpha}\,dt\ge -\frac{\omega(\alpha)}{x},$$
$$\forall\, x\in[a,A],\alpha\in(0,1).$$

所以

$$\Big(\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f'(t)\,dt+\omega(\alpha)\ln x\Big)'\ge 0,\qquad \forall\, x\in[a,A],\alpha\in(0,1).$$

从而当 $\alpha\in(0,1)$ 时,

$$\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f'(t)\,dt+\omega(\alpha)\ln x$$

在 $[a,A]$ 上单调增加. 即

$$\frac{1}{\alpha}\int_y^{y+\alpha} f'(t)\,dt+\omega(\alpha)\ln y\ge \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f'(t)\,dt+\omega(\alpha)\ln x,$$
$$\forall\, x,y\in[a,A],\ y>x.$$

上式中令 $\alpha\to 0^+$, 即得

$$f'(y)\ge f'(x),\qquad \forall\, x,y\in[a,A],\ y>x.$$

最后由 $[a,A]\subset(0,+\infty)$ 的任意性得到 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加. □

例 2.4. 设 $y(\cdot)$ 两次可导,

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)\ge 0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)\ge 0.$$

求证: 当 $x\ge 0$ 时, $y(x)\ge 0$.

证明. 记 $Y(x)=y'(x)-y(x)$. 则

$$Y'(x)-Y(x)=y''(x)-2y'(x)+y(x)\ge 0.$$

从而

$$\Big(e^{-x}Y(x)\Big)'=e^{-x}\Big(Y'(x)-Y(x)\Big)\ge 0.$$

另一方面,

$$e^{-x}Y(x)\Big|_{x=0}=y'(0)\ge 0.$$

因此,

$$e^{-x}Y(x)\ge 0,\qquad \forall\, x\ge 0.$$

即

$$Y(x) \geq 0, \qquad \forall\ x \geq 0.$$

由上式及 $y(0) = 0$ 类似地可以证明

$$y(x) \geq 0, \qquad \forall\ x \geq 0.$$

□

例 2.5. 证明 $x^2 + 3x^3 + 7x^4 - 5x^6 - 8x^7 = 0$ 有且仅有一个正实根。

证明. 我们只需证明

$$F(x) \equiv \frac{x^2 + 3x^3 + 7x^4 - 5x^6 - 8x^7}{x^4} = x^{-2} + 3x^{-1} + 7 - 5x^2 - 8x^3$$

在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点.

由于 $F(0^+) = +\infty$, 而 $F(+\infty) = -\infty$, 因此, F 在 $(0, +\infty)$ 内至少有一个零点. 另一方面,

$$F'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-2} - 10x - 24x^2 < 0, \qquad \forall\ x > 0.$$

因此, F 在 $(0, +\infty)$ 内严格单减. 从而 F 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点. 这就证明了本题结论. □

例 2.6. 设 $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$, 证明:

1) 当 n 为偶数时, $f_n(x)$ 在实轴上有正的最小值.

2) 当 n 为奇数时, $f_n(x)$ 有且仅有一个实根.

证明. 我们对 $k \geq 0$ 归纳证明如下结论: 当 $n = 2k$ 时, $f_n(x)$ 在实轴上有正的最小值; 当 $n = 2k + 1$ 时, $f_n(x)$ 有且仅有一个实根.

易见当 $k = 0$ 时, 上述结论处理.

假设 $0 \leq k \leq m$ 时结论成立. 我们要证 $k = m + 1$ 时结论也成立. 注意到

$$f'_{2m+1}(x) = f_{2m}(x) > 0, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

我们知 f_{2m+1} 严格单增, 所以它至多有一个实根. 结合 $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$ 可得 f_{2m+1} 有且仅有一个实根. 设该实根为 ξ_{2m+1}. 由于 $f_{2m+1}(0) = 1$, 所以 $\xi_{2m+1} \neq 0$.

另一方面, 由于

$$f'_{2m+2}(x) = f_{2m+1}(x),$$

且

$$f''_{2m+2}(x) = f_{2m}(x) > 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

因此, $f_{2m+2}(x)$ 在 ξ_{2m+1} 取到最小值. 从而

$$\begin{aligned} f_{2m+2}(x) &\geq f_{2m+2}(\xi_{2m+1}) \\ &= f_{2m+1}(\xi_{2m+1}) + \frac{\xi_{2m+1}^{2m}}{(2m+2)!} \\ &= \frac{\xi_{2m+1}^{2m}}{(2m+2)!} > 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

这样, 我们证明了当 $k = m+1$ 时, 结论成立.

因此, 由数学归纳法, 本题结论成立. □

例 2.7. 设 $f(x) \in C^1[0,1]$, 且 $0 \leq f'(x) \leq 1$, $f(0) = 0$。求证:

$$\int_0^1 f^3(x)dx \leq \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

证明. 由假设, 易见

$$f(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

记

$$F(x) = \int_0^x f^3(t)\,dt - \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2, \qquad x \in [0,1].$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微. $F(0) = 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= f^3(x) - 2f(x)\int_0^x f(t)\,dt \\ &= f(x)\Big(f^2(x) - 2\int_0^x f(t)\,dt\Big) \\ &= f(x)G(x), \qquad \forall\, x \in [0,1]. \end{aligned}$$

而 $G(0) = 0$,

$$G'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) \leq 0, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

因此,

$$G(x) \leq 0, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

从而

$$F'(x) \leq 0, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

于是又有

$$F(x) \leq F(0) = 0, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

这就证明了结论. □

例 2.8. 设 $a_m > 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

定义 $G(x) = (g(x))^2 - g'(x)$. 证明: 若 $g(x)$ 有 m 个不相同的实零点, 则

1) 当 m 为正奇数时, $G(x)$ 有且仅有 $m+1$ 个实零点.

2) 当 m 为正偶数时, $G(x)$ 有且仅有 m 个实零点.

证明. 设 $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ 为 $g(x)$ 的零点. 则

$$g(x) = a_m(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m).$$

易见

$$(-1)^{m-k}g'(x_k) > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

于是

$$(-1)^{m-k}G(x_k) = (-1)^{m-k+1}g'(x_k) < 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

这表明 $G(x_k)$ 与 $G(x_{k+1}$ 异号. 因此 $G(x)$ 在每个 (x_k, x_{k+1}) 内至少有一个零点.

1) 当 m 为正奇数时,

$$G(x_1) < 0, \quad G(x_m) < 0.$$

另一方面,

$$G(-\infty) = G(+\infty) = +\infty.$$

因此, $G(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_m, +\infty)$ 又各至少有一个零点. 所以 $G(x)$ 至少有 $m+1$ 个零点.

下面我们证明在 $I = (-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, x_{m+1}), (x_{m+1}, +\infty)$ 内, $\dfrac{G(x)}{g^2(x)}$ 是严格单调的. 为此, 注意到

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \Big(\ln|g(x)|\Big)' = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{x - x_k}, \quad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_m,$$

我们有

$$\Big(\frac{g'(x)}{g(x)}\Big)' = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(x - x_k)^2} < 0, \quad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_m.$$

由此立即得到,

$$g(x)g''(x) - \big(g'(x)\big)^2 < 0, \quad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_m.$$

于是

$$\left(\frac{G(x)}{g^2(x)}\right)' = \frac{2\big(g'(x)\big)^2 - g(x)g''(x)}{g^3(x)}, \qquad x \in I.$$

因为

$$2\big(g'(x)\big)^2 - g(x)g''(x) \geq \big(g'(x)\big)^2 - g(x)g''(x) > 0, \qquad x \in I,$$

而 $g(x)$ 在 I 内恒正或恒负, 因此

$$\frac{G(x)}{g^2(x)}$$

在 I 内严格单调.

综上所述, $G(x)$ 在以下每个区间 $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, x_{m+1}), (x_{m+1}, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 而 $G(x_k) \neq 0$. 因此, $G(x)$ 有且仅有 $m+1$ 个实零点.

2) 当 m 为偶数时,

$$G(x_1) > 0, \quad G(x_m) < 0.$$

因此, $G(x)$ 在 $(x_m, +\infty)$ 至少有一个零点. 而由 1) 中的讨论, $G(x)$ 在每个区间 $I = (-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, (x_m, x_{m+1}), $(x_{m+1}, +\infty)$ 内严格单调, 因此, $G(x)$ 在以下每个区间 (x_1, x_2), $\ldots$, (x_m, x_{m+1}), $(x_{m+1}, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 而在 $(-\infty, x_1)$ 内恒正. 结合

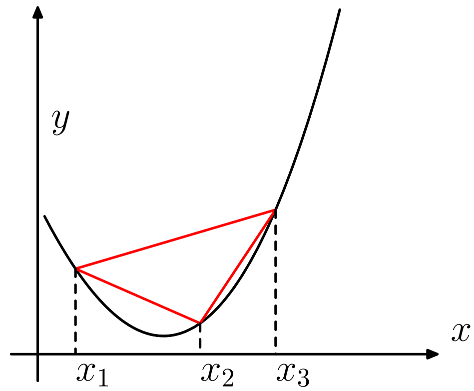
$$G(x_k) \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

可得 $G(x)$ 有且仅有 m 个实零点. □

丹麦数学家 Jensen, Johan Ludwig William Valdemar (1859.5.8—1925.3.5)

习题 3.2.

1. 证明区间 (a,b) 内的函数 $f(x)$ 为凸函数等价于下列任一条:



(i) 对任何 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 成立
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$
(ii) 对任何 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 成立
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$
(iii) 对任何 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 成立
$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

2. 若 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 内的凸函数, 证明它一定是连续的.

3. 如果 $f(x)$ 是凸区域 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 内的凸函数, 问: $f(x)$ 是否是 Ω 内的多元连续函数?

4. 设 $f(x)$ 是 (a,b)(或 $[a,b],(a,b),(a,b]$) 上的实值函数，如果对任何 $x,y\in(a,b)$ 成立着
$$f(\frac{x+y}{2})\le\ (\ge)\ \frac{f(x)+f(y)}{2},$$
则称 $f(x)$ 是 (a,b) 上的中点凸 (凹) 函数.

   易见凸 (凹) 函数一定是中点凸 (凹) 函数, 但一般说来, 反之不然.

   证明: 若 $f(x)$ 在是中点凸的连续函数, 则 $f(x)$ 一定是凸的.

   进一步, 若 $f(x)$ 是中点凸的有界函数, 考虑 $f(x)$ 是否一定凸.

5. 证明区间 (a,b) 内两阶可导的函数 $f(x)$ 为凸函数的充分必要条件是 $f''(x)\ge0$.

6. 设 $f(\cdot)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, $f(0)=1$, $|f'(x)|\le f(x)$. 求证: 当 $x\ge0$ 时, $e^{-x}\le f(x)\le e^{x}$.

7. 推广例题 2.4.

8. 设 $f(\cdot)$ 在实轴上有界且可微，并满足：
$$|f(x)+f'(x)|\le1,\quad\forall\ x\in(-\infty,+\infty).$$
求证: $|f(x)|\le1$.

9. 设 $f(\cdot)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且 $f'(\cdot)$ 递增. 又
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^p}=1,\quad(p\ne0).$$
   1) 求证: $x>0$ 时, 对 $h>0$ 有:
$$f(x)-f(x-h)\le hf'(x)\le f(x+h)-f(x),$$

上面第一个不等式自然要求 $h < x$.

2) 求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{px^{p-1}} = 1.$$

10. 设 $P(x) = x^n - p_1x^{n-1} - p_2x^{n-2} - \cdots - p_n$, 其中 $p_i \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum_{i=1}^n p_i > 0$。试证: $P(x)$ 有且只有一个单重正根。

11. 对于区间 (a, b) 内的实函数 $f(x)$, 定义

$$F(x) \triangleq \varliminf_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

这里 $F(x)$ 的取值可以是 $\pm\infty$. 依次证明

(i) 如果

$$F(x) > 0, \qquad \forall\, x \in (a, b),$$

则 $f(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加.

(ii) 如果

$$F(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in (a, b),$$

则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

12. 对于区间 (a, b) 内的实函数 $f(x)$, 定义

$$G(x) \triangleq \varliminf_{y\to x^+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

这里 $G(x)$ 的取值可以是 $\pm\infty$. 依次研究

(i) 如果

$$F(x) \geq \alpha > 0, \qquad \forall\, x \in (a, b),$$

$f(x)$ 是否在 (a, b) 内严格单调增加?

(ii) 如果 $f(x)$ 具有介值性质, 即 $\forall\ a < x_1 < x_2 < b$, $f(x)$ 可以在 $[x_1, x_2]$ 上取到介于 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 间的任何值. 此时 (i) 的结论又如何?

13. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, $g(x)$ 在 (a, b) 可导. 证明 $f(x)g'(x)$ 和 $f(x) + g'(x)$ 在 (a, b) 内均有介值性质.

14. 思考, 设 $f(x)$, $g(x)$ 均在 (a, b) 上有介值性, 问 $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上的介值性如何?

第四章　积分

§1. Riemann 积分定义, Darboux 和

通常 Riemann 积分采用两种方式定义. 一是利用 Riemann 和来定义, 二是利用 Darboux 上和、下和来定义. 利用 Riemann 和定义 Riemann 积分, 直观、容易接受, 但从数学理论上来讲, 利用 Darboux 上和、下和可能更有利一些.

首先我们回顾一下如何用 Riemann 和定义 (常义) 定积分.

定义 1.1. 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 对于 $[a,b]$ 的划分[1]

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b.$$

任取一列 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, 作 Riemann 和

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

如果上述和式当划分 P 的**范数**

$$\|P\| \triangleq \max_{0 \le i \le n} (x_{i+1} - x_i)$$

趋于 0 时的极限存在, 且极限与 ξ_i 的选取无关, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积[2]. 上述极限称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分, 记为

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

用 Riemann 和定义积分时由于选取**代表点**x_i 时有一定的随意性, 从而 Riemann 和并非由划分惟一确定, 这在考虑 Riemann 和的极限时是一个麻烦的地方.

这种不确定可以通过 Darboux 上和与和 Darboux 下和来避免.

从定义 1.1 来看, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则 Riemann 和当划分的范数趋于 0 时的极限存在且与代表点的选取无关. 因此, 不难看到, 函数可积的充分必要条件是 Riemann 和的 (对应同一个划分的) 上确界和下确界都收敛且极限相同.

更确切地, 我们有

[1] $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为划分 P 的分点.

[2] 没有特别说明时, 本书中的可积总是指 Riemann 可积.

定理 1.2. 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 对于 $[a,b]$ 的划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b.$$

定义

$$U(f,P) = \sum_{i=0}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

与

$$L(f,P) = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

为 f 相应于划分 P 的 **Darboux 上和**与 **Darboux 下和**, 其中

$$M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), i = 0, 1, \ldots, n.$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} L(f,P). \tag{1.1}$$

Darboux 上和、下和的优点之一是它们只依赖于函数和划分, 而不需要选择代表点. 事实上, 对于

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b,$$

成立

$$U(f,P) = \sup_{\substack{\xi_i\in[x_i,x_{i+1}] \\ i=0,1,\ldots,n}} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

和

$$L(f,P) = \inf_{\substack{\xi_i\in[x_i,x_{i+1}] \\ i=0,1,\ldots,n}} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

另外, 很明显, Darboux 和具有某种单调性: 如果划分 Q 是划分 P 的一个**加细**, 即划分 P 的所有分点都是划分 Q 的分点, 则

$$U(f,P) \geq U(f,Q) \geq L(f,Q) \geq L(f,P).$$

更重要地, 我们将看到对于有界闭区间上的有界函数, 在 (1.1) 中出现的 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} U(f,P)$ 和 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} L(f,P)$ 事实上总是存在的. 具体地, 我们有

定理 1.3. 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 则

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \inf_{P} U(f,P), \tag{1.2}$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \sup_{P} L(f,P). \tag{1.3}$$

证明. 注意到

$$L(f,P) = -U(-f,P),$$

我们只需要证明 (1.2).

记

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

以 Q_n 表示将区间 $[a,b]$ n 等分的划分:

$$a < a + \frac{1}{n}(b-a) < a + \frac{2}{n}(b-a) < \ldots < b.$$

则

$$M(b-a) \geq U(f,Q_1) \geq U(f,Q_2) \geq \ldots \geq U(f,Q_n) \geq -M(b-a).$$

由单调有界定理,

$$\lim_{n\to+\infty} U(f,Q_n)$$

存在, 记为 S.

下面我们首先证明

$$U(f,P) \geq S, \qquad \forall\ P. \tag{1.4}$$

为此, 设划分 P 有 m 个分点, 用 $P\cup Q$ 表示以 P 和 Q 的所有分点为分点的划分. 则 $P\cup Q$ 既是 P 的加细又是 Q 的加细. 我们有

$$U(f,P) \geq U(f,P\cup Q_n).$$

直接从上和的定义可以看到在计算 $U(f,Q_n)$ 与 $U(f,P\cup Q_n)$ 的和式中, 只有包含 P 的分点的那些小区间上是可能有区别的, 而这些小区间的总长度不会超过

$$m\|Q_n\| = \frac{m(b-a)}{n}.$$

从而

$$\begin{aligned} & U(f,P) \geq U(f,P\cup Q_n) \\ \geq\ & U(f,Q_n) - \frac{2Mm(b-a)}{n} \\ \geq\ & S - \frac{2Mm(b-a)}{n}, \qquad \forall\ n \geq 1. \end{aligned}$$

上式中令 $n \to +\infty$ 即得 (1.4).

类似地,

$$\begin{aligned} U(f,P) &\le U(f,P\cup Q_n)+2Mn\|P\| \\ \le \quad & U(f,Q_n)+2Mn\|P\|, \qquad \forall\ n\ge 1. \end{aligned}$$

从而

$$\overline{\lim_{\|P\|\to 0}}\, U(f,P)\le U(f,Q_n), \qquad \forall\ n\ge 1.$$

上式中令 $n\to+\infty$ 得到

$$\overline{\lim_{\|P\|\to 0}}\, U(f,P)\le S.$$

结合 (1.4) 可得 (1.2). □

今后我们分别称 $\inf\limits_P U(f,P)$ 和 $\sup\limits_P L(f,P)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下积分和上积分, 记为

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

和

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

这样, 定理 1.1 可以描述为有界函数 $f(x)$ 在给定区间 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

进一步, 易见

定理 1.4. 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在划分 P 使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

德国数学家 Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826.9.17—1866.7.20)

习题 4.1.

1. 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 利用定理 1.4 证明
$$|f|, \quad f+g, \quad f\cdot g$$
可积. 进一步, 若 $f(x) \geq c > 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.
2. 证明闭区间上单调函数一定可积.
3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 有界. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

§2. 积分中值定理

类似于微分中值定理, 我们有如下积分第一中值定理:

定理 2.1. 设 $f(x), g(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 非负, 则存在 η 满足
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \eta \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$
使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \eta\int_a^b g(x).$$
特别, 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x). \tag{2.1}$$

以下是积分第二中值定理,

定理 2.2. 设函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $g(\cdot)$ 单调. 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{2.2}$$
特别, 若 $g(\cdot)$ 单调减少, $g(\cdot) \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx. \tag{2.3}$$
而当 $g(\cdot)$ 单调增加, $g(\cdot) \geq 0$ 时, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{2.4}$$

证明. 本定理有一个传统的利用 Riemann 和的证明, 篇幅不长, 但有一定难度 (参见 [6] 第二卷第九章第二节). 下面我们利用函数的光滑逼近来证明. 即先对比较光滑的函数来证明第二积分中值定理, 然后再利用它将结果推广到一般情形.

首先我们对 $f(x)$ 连续, $g(x)$ 连续可导的情形来证明定理. 此时

$$g'(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

从而利用分部积分法, 并由积分第一中值定理, 知存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)\,dx \\
= \;& g(b)F(b) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \\
= \;& g(b)F(b) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\,dx \\
= \;& g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

其中

$$F(x) \triangleq \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

即 (2.2) 成立.

接下来, 我们利用上述结论来证明一般的结论.

由下一节定理 3.1 及其注, 我们可以找到一族 $[a,b]$ 上的连续函数 $f_\alpha(x)$ 和连续可导的单调函数 $g_\alpha(x)$ 使得

$$\max_{x\in[a,b]} |f_\alpha(x)| \leq M_f \triangleq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

$$\max_{x\in[a,b]} |g_\alpha(x)| \leq M_g \triangleq \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|,$$

$$g_\alpha(a) = g(a),\ g_\alpha(b) = g(b),$$

且

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_a^b |f_\alpha(x) - f(x)|\,dx = 0,$$

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_a^b |g_\alpha(x) - g(x)|\,dx = 0.$$

而由前面已经证明的结果, 知存在 $\xi_\alpha \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f_\alpha(x)g_\alpha(x)\,dx = g_\alpha(a)\int_a^{\xi_\alpha} f(x)\,dx + g_\alpha(b)\int_{\xi_\alpha}^b f_\alpha(x)\,dx,$$

由于 $\xi_\alpha \in [a,b]$, 所以它有收敛子列, 不放设它本身收敛, 且极限为 ξ. 则由

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f_\alpha(x)g_\alpha(x)\,dx - \int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big| \\
\le\ & \int_a^b \Big|(f_\alpha(x)-f(x))g_\alpha(x)\Big|\,dx \\
&+\int_a^b \Big|(g_\alpha(x)-g(x))f(x)\Big|\,dx \\
\le\ & M_g\int_a^b |f_\alpha(x)-f(x)|\,dx \\
&+M_f\int_a^b |g_\alpha(x)-g(x)|\,dx
\end{aligned}$$

可证

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_a^b f_\alpha(x)g_\alpha(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

类似地, 可以证明

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\to 0^+}\Big[g_\alpha(a)\int_a^{\xi_\alpha} f_\alpha(x)\,dx + g_\alpha(b)\int_{\xi_\alpha}^b f_\alpha(x)\,dx\Big] \\
=\ & g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

从而得到 (2.2).

最后, 若 $g(\cdot)$ 单调减少, $g(\cdot)\ge 0$, 则

$$\begin{aligned}
& g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx \\
=\ & \Big(g(a)-g(b)\Big)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_a^b f(x)\,dx \\
\in\ & [g(a)m, g(a)M],
\end{aligned}$$

其中

$$M=\max_{x\in[a,b]}\int_a^x f(t)\,dt,\quad m=\min_{x\in[a,b]}\int_a^x f(t)\,dt.$$

由此可得 (2.3). 类似地可以证明当 $g(x)$ 单调增加，$g(x)\ge 0$ 时 (2.4) 成立. □

§3. 函数的光滑逼近

在上一节积分第二中值定理和第三章例 2.3 的证明中, 我们用函数的光滑逼近来将光滑函数所具有的性质转移到一般的函数中去. 通常, 如果某个函数等式 (不等式) 对于光滑函数成立, 而该等式 (不等式) 中又只涉及到函数的 n 阶导数, 则在许多情形, 我们将可以证明该等式 (不等式) 对于仅具有 n 阶导数的函数也成立. 这里包含的思想就是函数的光滑逼近的思想.

鉴于这种思想的重要性，我们在本节建立一些常用的光滑函数逼近的结论.

定理 3.1. 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得

$$\int_a^b \Big|g(x)-f(x)\Big|\,dx<\varepsilon. \tag{3.1}$$

证明. 可以用很多方式构造满足条件的 $g(x)$. 我们提供两种方法.

法 I. 由定理 1.4, 存在 $[a,b]$ 的划分 P 使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

设 P 的分点依次为

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}=b.$$

令

$$g(x)=f(x_i)+\frac{f(x_{i+1}-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i),\\ x\in[x_i,x_i+1],\ i=0,1,\ldots,n.$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上适定, 其图像为依次连接 $(x_i,f(x_{i+1})$ 的折线. 易见 $g(x)$ 连续. 且易证

$$U(|g-f|,P)\le U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

从而

$$\int_a^b|g(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon.$$

法 II. 令

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{如果 } x\in[a,b],\\ f(a), & \text{如果 } x<a,\\ f(b), & \text{如果 } x>b.\end{cases}$$

对于 $\alpha>0$, 定义

$$f_\alpha(x)\ =\ \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha}f^*(t)\,dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}f^*(x+t)\,dt,\\ \forall\ x\in(-\infty,+\infty).$$

易见 $f_\alpha(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 设 P 为 $[a,b+1]$ 的一个划分

$$a,a+\alpha,a+2\alpha,\ldots,N\alpha,(N+1)\alpha,b+1,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$, N 满足 $N\alpha<b<(N+1)\alpha$. 注意到

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in[a+k\alpha,a+(k+1)\alpha]}|f_\alpha(x)-f^*(x)|\\ \leq\quad&\sup_{x\in[a+k\alpha,a+(k+2)\alpha]}f^*(x)-\inf_{x\in[a+k\alpha,a+(k+2)\alpha]}f^*(x)\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}&U_{[a,b+1]}(|f_\alpha-f^*|,P)\\ \leq\quad&\frac{U_{[a,b+1]}(f^*,P_1)-L_{[a,b+1]}(f^*,P_1)}{2}\\ &+\frac{U_{[a,b+1]}(f^*,P_2)-L_{[a,b+1]}(f^*,P_2)}{2},\end{aligned}$$

其中上下和均在区间 $[a,b+1]$ 上考虑, P_1, P_2 分别为划分

$$a,a+2\alpha,a+4\alpha,\ldots,b+1,$$

和

$$a,a+\alpha,a+3\alpha,\ldots,b+1.$$

由此由定理 1.2 和 $f^*(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上的可积性, 可得当 $\alpha\to0^+$ 时,

$$\int_a^b|f_\alpha(x)-f(x)|\,dx\leq U_{[a,b+1]}(|f_\alpha-f^*|,P)\to0.$$

这样对于给定的 $\varepsilon>0$, 只要取足够小的 $\alpha>0$ 并取 $g(x)=f_\alpha(x)$ 即可得到 (3.1). □

注 3.1. 上面两种构造方法中, 无论是哪一种, 都保持了一种稳定性, 即

$$\inf_{t\in[a,b]}f(t)\leq g(x)\leq\sup_{t\in[a,b]}f(t),\qquad\forall\,x\in[a,b].$$

进一步, 两种构造方法都保持单调性, 即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则定理证明中构造的 $g(x)$ 也单调.

注 3.2. 以方法 II 构造的函数光滑性通常要好于按方法 I 构造的函数. 事实上当原来的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时, 按方法 II 构造的 $f_\alpha(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导. 因此我们更常用 $f_\alpha(x)$ 来逼近 $f(x)$.

注 3.3. 在作逼近时, 有时候我们需要一些特殊的要求: 比如逼近函数的上界不增大, 下界不减少; 端点上值不变; 保持单调性: 即如果 $f(x)$ 是单调的, 构造的逼近函数也单调; 等等.

可以看到以方法 I 构造时, 构造的函数保持了端点的值不变, 即 $g(a)=f(a),g(b)=f(b)$. 这点在方法 II 中没有做到. 但是我们只要将 $f^*(x)$ 的定义

稍加修改也可以达到这个要求:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{如果 } x\in[a+2\alpha,b],\\ f(a), & \text{如果 } x<a+2\alpha,\\ f(b), & \text{如果 } x>b.\end{cases}$$

这时, 相应的 $f_\alpha(x)$ 连续, 保持单调性, 且端点的值不变. 如果进一步定义

$$f_{\alpha,2}(x)=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} f_\alpha(t+x)\,dt$$

则 $f_{\alpha,2}(x)$ 具有连续的一阶导数, $f_{\alpha,2}(a)=f(a), f_{\alpha,2}(b)=f(b)$, 且

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int_a^b |f_{\alpha,2}(x)-f(x)|\,dx=0.$$

一般地, 给定 N, 我们可以按上述方法找到具有 N 阶连续导数的逼近函数使得类似的结论成立. 我们甚至可以找到无穷次可导的函数满足这种性质 (参见命题 3.3).

对于有界闭区间上的连续函数, 其实我们还可以有更强的结论.

定理 3.2. (**Weierstrass 定理**) 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的多项式 $Q(x)$ 使得

$$|Q(x)-f(x)|<\varepsilon,\qquad \forall\, x\in[a,b]. \tag{3.2}$$

换言之, 有界闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近.

证明. 不失一般性, 假设 $a=0, b=1$.

我们介绍 Bernstein 的构造性证明. 记

$$M=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|,\quad \omega(r)=\max_{\substack{x,y\in[0,1]\\|x-y|\le r}}|f(x)-f(y)|.$$

对于 $n\ge1$, $k=0,1,\dots,n$, 记

$$P_{n,k}(x)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\qquad x\in[0,1].$$

则

$$\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x)\equiv 1.$$

作

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big)P_{n,k}(x),\qquad x\in[0,1].$$

则

$$|Q_n(x)| \le M \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = M, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

我们要证明 $Q_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

对于 $x \in [0,1]$, 记

$$I_n(x) = \{k \big| \, 0 \le k \le n, |\frac{k}{n} - x| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\},$$

$$J_n(x) = \{k \big| \, 0 \le k \le n, |\frac{k}{n} - x| \ge \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\}.$$

则

$$\begin{aligned}
|Q_n(x) - f(x)| &= \sum_{k=0}^{n} \Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\Big) P_{n,k}(x) \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \big|f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\big| P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k\in I_n(x)} \big|f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\big| P_{n,k}(x) + \sum_{k\in J_n(x)} \big|f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\big| P_{n,k}(x) \\
&\le \sum_{k\in I_n(x)} \omega\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big) P_{n,k}(x) + 2M \sum_{k\in J_n(x)} P_{n,k}(x) \\
&\le \omega\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big) + \frac{2M}{n\sqrt{n}} \sum_{k\in J_n(x)} (k - nx)^2 P_{n,k}(x), \qquad \forall\, x \in [0,1].
\end{aligned}$$

而对

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \qquad \forall\, x \in [0,1]$$

求导并乘以 $x(1-x)$ 可得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k - nx) x^k (1-x)^{n-k} = 0, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

对上式求导后再乘以 $x(1-x)$ 可得

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 P_{n,k}(x) = nx(1-x) \le \frac{n}{4}, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

于是

$$|Q_n(x) - f(x)| \le \omega\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big) + \frac{M}{2\sqrt{n}}, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

这就证明了 $Q_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. □

注 3.4. 对于 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 及其函数图像上的点 $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^N$ $(x_i \neq x_j)$, 称经过这些点的那个惟一的 N 次多项式为 $f(x)$ 的一个插值多项式. 有例子表明, 当相邻的 x_i 之间的距离趋于零时, 插值多项式并不一定收敛到 $f(x)$.

上面的 $Q_n(x)$ 称为 Bernstein 多项式. 它保持了函数在端点的值, 以及上下界界于 $f(x)$ 的上下界之间这样一些比较好的性质. 但是它没有保持函数的单调性. 为了保持单调性, 我们引入下面的命题.

命题 3.3. 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 上的光滑函数 $Q(x)$ 使得

$$|Q(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in [a,b], \tag{3.3}$$

且

$$Q(a) = f(a), Q(b) = f(b),$$

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \le Q(x) \le \max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

进一步, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加, 则选取的 $Q(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

证明. 为书写简单起见, 不妨设 $a = 0$. 记 $\omega_0(r)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上的连续模. 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, \frac{b}{3})$ 使得 $\omega_0(3\delta) \le \frac{\varepsilon}{4}$. 定义

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in [3\delta, b], \\ f(0) + \frac{f(3\delta)-f(0)}{\delta}(x-2\delta), & \text{如果 } x \in (2\delta, 3\delta), \\ f(0), & \text{如果 } x \le 2\delta, \\ f(b), & \text{如果 } x > b. \end{cases}$$

则

$$|f^*(x) - f(x)| = |f(0) - f(x)| \le \omega_0(2\delta), \qquad \forall\, x \in [0, 2\delta],$$

$$|f^*(x)-f(x)| = |f^*(x)-f(0)|+|f(0)-f(x)| \le 2\omega_0(3\delta) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, x \in [2\delta, 3\delta].$$

由此可见

$$|f^*(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, x \in [0,b]. \tag{3.4}$$

进一步, 易见 $f^*(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 记 $\omega(r)$ 为 $f^*(x)$ 的连续模. 为方便起见, 对于 $\mathbb{R}$ 上的连续函数以及 $\alpha > 0$, 定义

$$\Big(T_\alpha g\Big)(x) \triangleq \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} g(t)\,dt, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

取 $\alpha \in (0,\delta)$, 令

$$f_{\alpha,0}(x) = f^*(x),$$

$$f_{\alpha,n+1}(x) = \Big(T_{\frac{\alpha}{2^n}} f_{\alpha,n}\Big)(x), \qquad \forall\, n \ge 0.$$

则对任何 $n \geq 1$,

$$f_{\alpha,n}(x) = \frac{2^{n-1}}{\alpha} \ldots \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{2^{n-1}}} dt_n \ldots \int_0^{\alpha} f^*(x + t_1 + \ldots + t_n)\, dt_1.$$

由此立即可得

$$|f_{\alpha,n}(x) - f^*(x)| \leq \omega(2\alpha), \qquad \forall\ x, \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

$$f_{\alpha,n}(x) = f(b), \qquad \forall\ x \geq b, \tag{3.6}$$

$$f_{\alpha,n}(x) = f(0), \qquad \forall\ x \leq 0, \tag{3.7}$$

$$\min_{x\in[0,b]} f(x) \leq f_{\alpha,n}(x) \leq \max_{x\in[0,b]} f(x), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

进一步,

$$|f'_{\alpha,1}(x)| = \Big|\frac{f^*(x+\alpha) - f^*(x)}{\alpha}\Big| \leq \frac{\omega(\alpha)}{\alpha}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

由于 $f_{\alpha,n}(x)$ 当 $n \geq 1$ 时连续可导, 易证

$$f'_{\alpha,n+1}(x) = \Big(T_{\frac{\alpha}{2^n}} f'_{\alpha,n}\Big)(x), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}, n \geq 1. \tag{3.9}$$

从而类似于 (3.8) 有

$$|f'_{\alpha,n}(x)| \leq \frac{\omega(\alpha)}{\alpha}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

于是

$$\begin{aligned}
& |f_{\alpha,n+1}(x) - f_{\alpha,n}(x)| \\
= \quad & \Big|\frac{2^n}{\alpha}\int_0^{\frac{\alpha}{2^n}} \Big(f_{\alpha,n}(x+t) - f_{\alpha,n}(x)\Big)\, dt\Big| \\
\leq \quad & \frac{\alpha}{2^n} \max_{t\in\mathbb{R}} |f'_{\alpha,n}(t)| \\
\leq \quad & \frac{\omega(\alpha)}{2^n}, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}, n \geq 1.
\end{aligned}$$

这表明 $f_{\alpha,n}(x)$ 一致收敛, 设其极限为 $f_\alpha(x)$. 则 $f_\alpha(x)$ 连续, 且由 (3.5)—(3.8), 我们有

$$|f_\alpha(x) - f^*(x)| \leq \omega(2\alpha), \qquad \forall\ x, \in \mathbb{R},$$

$$f_\alpha(x) = f(b), \qquad \forall\ x \geq b,$$

$$f_\alpha(x) = f(0), \qquad \forall\ x \leq 0,$$

$$\min_{x\in[0,b]} f(x) \leq f_{\alpha,n}(x) \leq \max_{x\in[0,b]} f(x), \qquad \forall\ x, \in \mathbb{R}.$$

于是结合 (3.4) 式, 取 α 足够小就可以保证

$$|f_\alpha(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\ x, \in \mathbb{R}.$$

另一方面, 由 (3.9), 类似地可以证明 $f'_{\alpha,n}(x)$ 一致收敛. 从而 $f_\alpha(x)$ 连续可导. 一般地, 可以证明, 对任何 $k\geq 1$, $f^{\langle k\rangle}_{\alpha,n}(x)$ 一致收敛. 从而 $f_\alpha(x)$ 具有任意阶的连续导数.

最后, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $f^*(x)$ 单调, 从而 $f_{\alpha,n}(x)$ 单调. 所以最后得到的 $f_\alpha(x)$ 也是单调的.

另外, 事实上我们还有

$$f^{\langle n\rangle}_\alpha(0)=f^{\langle n\rangle}_\alpha(b)=0, \qquad \forall\ n\geq 1.$$

□

推论 3.4. 设 $a<b$, 则存在在 $[a,b]$ 上无限次可导的函数 $\eta(x)$, 满足

$$\eta(a)=0, \quad \eta(b)=1,$$

$$\eta^{\langle n\rangle}(a)=\eta^{\langle n\rangle}(b)=0, \qquad \forall\ n\geq 1,$$

且 $\eta(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

苏联数学家 Bernstein, Sergi Natanovich (1880.3.6—1968.10.26)

习题 4.3.

1. 设 $f(x)$ 为有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty,\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ 满足

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}<+\infty, \quad \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\beta_n|}<+\infty.$$

证明: 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在一个在 $[a,b]$ 上无限次可导的函数 $g(x)$, 使得

$$|g(x)-f(x)|<\varepsilon, \qquad \forall\ x\in[a,b],$$

且

$$g^{\langle n\rangle}(a)=\alpha_n,\quad g^{\langle n\rangle}(b)=\beta_n,\qquad \forall\ n\geq 1.$$

2. 证明: 对于有界闭区间 $[a,b]$, 存在一列在 $[a,b]$ 上无限次可导的函数 $g_n(x)$, 满足

$$0\leq g_n(x)\leq 1,\qquad \forall\ x\in[a,b],\ n\geq 1,$$

$$g_n(x)=1,\qquad \forall\ x\in[a+\frac{2}{n},b-\frac{2}{n}],\ n\geq 1,$$

$$g_n(x)=0,\qquad \forall\ x\in[a,a+\frac{1}{n}\bigcup[b-\frac{1}{n},b],\ n\geq 1,$$

以及

$$|g'(x)|\leq nM,\qquad \forall\ x\in[a,b],\ n\geq 1,$$

其中 M 是与 n 无关的一个常数.

3. 思考: 对于有界闭区间 $[a,b]$ 上单调增加的连续函数 $f(x)$, 是否一定存在一列在 $[a,b]$ 上单调增加的多项式一致逼近 $f(x)$.

§4. Riemann 引理及其推广

在 Fourier 级数理论中, 有一个基础性的定理叫做 Riemann 引理. 这一引理可以推广到更一般的情形. 本节对此作一简单的介绍.

定理 4.1. (**Riemann 引理**) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px dx=\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px dx=0.$$

定理 4.2. (**推广的 Riemann 引理**) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 函数 $g(x)$ 以 $T\ (>0)$ 为周期, 且在 $[a,b]$ 上可积. 则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\ \int_a^b f(x)dx.$$

与积分第二中值定理一样, Riemann 引理也有一个传统的利用 Riemann 和的证明 (参见 [6] 第三卷第十九章第二节). 本书中, 我们将利用函数逼近的思想来证明 Riemann 引理. 我们直接证明定理 4.2.

证明. 第一步. 首先, 设 $f(x)$ 连续可导, $g(x)$ 连续, 且 $g(x)$ 以 $T>0$ 为周期,

$$\int_0^T g(x)\,dx=0.$$

记

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt,\qquad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

则易见, $G(x)$ 是以 T 为周期的函数, 从而它在 $\mathbb{R}$ 上有界.

我们有

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)g(px)\,dx\\ = \ & \frac{1}{p}\Big(f(b)G(pb)-f(a)G(pa)\Big)-\frac{1}{p}\int_a^b f'(x)G(px)\,dx.\end{aligned}$$

由于 $f(x), f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, $G(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 我们得到

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,dx=0.$$

第二步. 设 $f(x), g(x)$ 可积, 且 $g(x)$ 以 $T>0$ 为周期,

$$\int_0^T g(x)\,dx=0.$$

取 $[a,b]$ 上连续可导的函数列 $f_n(x)$ 使得

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx\to 0.$$

令

$$g_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}} g(t)\,dt, \qquad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

则 $g_n(x)$ 连续, 以 $T>0$ 为周期, 且不难证明

$$\int_0^T g_n(x)\,dx=0.$$

由于

$$\begin{aligned}&\Big|f(x)g(px)-f_n(x)g_n(px)\Big|\\ \le\ & |f(x)(g(px)-g_n(px))|+|g_n(px)(f(x)-f_n(x)|\\ \le\ & M|g(x)-g_n(x)|+M|f(x)-f_n(x)|, \qquad \forall\ x\in[a,b],\end{aligned}$$

其中,

$$M\overset{\triangle}{=}\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[0,T]}|g(x)|.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{p\to\infty}\Big|\int_a^b f(x)g(px)\,dx\Big|\\ \le\ & \varlimsup_{p\to\infty}\Big|\int_a^b f_n(x)g_n(px)\,dx\Big|+\varlimsup_{p\to\infty}\int_a^b M|g(px)-g_n(px)|\,dx\\ &+\int_a^b M|f(x)-f_n(x)|\,dx\\ \le\ & \frac{(b-a)M}{T}\int_0^T |g(x)-g_n(x)|\,dx+\int_a^b M|f(x)-f_n(x)|\,dx\end{aligned}$$

上式两边令 $n \to +\infty$ 即得

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,dx = 0.$$

第三步. 一般地, 在定理的假设下, 由第二步的结果, 我们有

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\Big(g(px) - \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt\Big)\,dx = 0.$$

此即

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,dx = \frac{1}{T}\int g(x)\,dx\,\int_a^b f(x)g(px)\,dx.$$

□

注 4.1. 定理的结果可以简单地推广到 $f(x)$ 为广义可积, 且绝对可积的情形, 我们把详细证明留给读者.

例 4.1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上广义可积, 且绝对可积, 则由定理 4.2 及注 4.1

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\,dx\\
=\ &\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx\,\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx,\\
&\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin^2 nx\,dx\\
=\ &\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx\,\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

例 4.2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上广义可积, 且绝对可积, $g(x) = 4\{x\} - 2\{2x\} - 1$, 这里 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分. 则 $g(x)$ 以 1 为周期,

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, \frac{1}{2}),\\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1).\end{cases}$$

因此由定理 4.2 及注 4.1

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,dx = 0.$$

习题 4.4.

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的任何有界闭区间 $[a,b]$ 上可积. 证明对于任何 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x+t)\,dt = \int_c^d dt\int_a^b f(x+t)\,dx.$$

2. 利用定理 4.2 本身的结论证明定理 4.2 中 $f(x)$ 的常义可积性可以减弱为 $f(x)$ 为广义可积, 且绝对可积的情形.
3. 将定理 4.2 推广到允许 $f(x)$, $g(x)$ 均无界的情形.
4. 将定理 4.2 推广到区域无界的情形.

§5. 一些重要不等式

不等式与函数的单调性、凸性密切相关, 从而与函数的一阶导数、两阶导数密切相关. 而当这一切和积分结合在一起的时候, 又可以产生很多重要的积分不等式. 本节将介绍 Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式、Minkowski 不等式、Poincaré 不等式等.

首先我们有

定理 5.1. (**Cauchy-Schwarz 不等式**) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big| \le \Big(\int_a^b f^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_a^b g^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.1}$$

证明. 任取 $\alpha \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\int_a^b \Big(f(x)+\alpha g(x)\Big)\,dx \ge 0.$$

从而 $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha^2\int_a^b g^2(x)\,dx + 2\alpha\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \ge 0.$$

这样由二次函数的性质知

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 - \int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx \le 0.$$

即 (5.1) 成立. □

Cauchy-Schwarz 不等式的一个推广是所谓的 Hölder 不等式:

定理 5.2. (**Hölder 不等式**) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $p,q>1$ 满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

则

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big| \le \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.2}$$

定理中的 p,q 称为对偶数, q 常常用 p' 表示. 为了证明定理 5.2, 我们先证明如下引理:

引理 5.3. (**Young 不等式**) 设 $p,q>1$ 为对偶数, $a,b\ge 0$, 则

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{5.3}$$

证明. 不妨设 $a>0, b>0$. 考虑

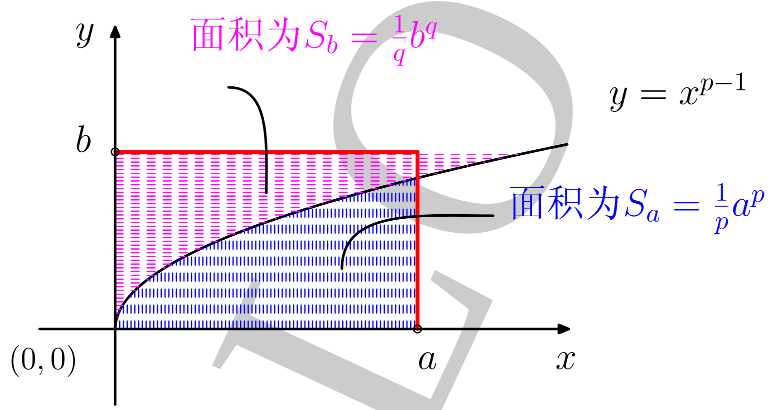
$$f(x)=\ln x, \qquad x>0。$$

则 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凹函数, 从而

$$\begin{aligned}\ln(ab) &= \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q\\ &\le \ln\big(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\big).\end{aligned}$$

由此立即得到 Young 不等式. □

事实上，Young 不等式具有如下的几何意义，从示图中还可以清楚地看到 (5.3) 中的等号当且仅当 $b=a^{p-1}$(亦即 $a=b^{q-1}$) 时成立.



Young 不等式示意图

Young 不等式可以推广到更一般的形式: 设 $\varphi(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续的严格单调函数, $\varphi(0)=0$, 设 $\psi(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的反函数, 令

$$\Phi(x) \triangleq \int_0^x \varphi(t)\,dt, \quad \Psi(x)=\int_0^x \psi(t)\,dt, \qquad \forall\, x\ge 0.$$

则 $\forall\, a,b>0$, 我们有

$$ab \le \Phi(a)+\Psi(b),$$

且等号当且仅当 $b=\varphi(a)$ 时成立.

定理 5.2 的证明. 不妨设

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx \neq 0, \int_a^b |g(x)|^q\,dx \neq 0.$$

记

$$F(x) \triangleq \frac{f(x)}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad G(x) \triangleq \frac{g(x)}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

由 Young 不等式, 我们有

$$|F(x)G(x)| \leq \frac{1}{p}|F(x)|^p + \frac{1}{q}|G(x)|^q, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

上式两边在 $[a,b]$ 上积分得到

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b F(x)G(x)\,dx\Big| &\leq \int_a^b |F(x)G(x)|\,dx \\ \leq\ & \frac{1}{p}\int_a^b |F(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b |G(x)|^q\,dx \\ =\ & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

此即 (5.2) 成立. □

Hölder 不等式的证明所利用的是 Young 不等式, 而 Young 不等式由 $\ln x$ 的凹性 (也可以由 e^x 的凸性) 得到. 当 $p = q = 2$ 时, Hölder 不等式成为 Cauchy-Schwarz 不等式, 此时对应的是 $\ln x$ 的中点凹性. 既然对于连续函数, 中点凹 (凸) 可以推出凹 (凸). 自然也可以期望由 Cauchy-Schwarz 不等式以及连续性得到 Hölder 不等式. 我们将它留作习题.

在泛函分析中, 我们时常会用到 Minkowski 不等式, 它是使得

$$\|f\|_p \triangleq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

成为所谓范数的重要定理.

定理 5.4. (**Minkowski 不等式**) 设 $p > 1$, 函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且 $\forall\, x \in [a,b]$,

$$\int_c^d f(x,y)\,dy$$

存在, 而 $\forall\, y \in [c,d]$,

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

存在. 则

$$\left(\int_c^d \Big|\int_a^b f(x,y)\,dx\Big|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} dx. \tag{5.4}$$

简言之, (5.4) 表示积分的范数小于等于范数的积分.

证明. 在定理的假设之下, 下面涉及的积分都是有意义的. 记

$$F(y) = \Big|\int_a^b f(x,y)\,dx\Big|^{p-1},$$

q 为 p 的对偶数, 则

$$\begin{aligned}
& \int_c^d \Big|\int_a^b f(x,y)\,dx\Big|^p dy \\
= \;& \int_c^d F(y)\Big|\int_a^b f(x,y)\,dx\Big|\,dy \\
\le \;& \int_c^d dy \int_a^b F(y)|f(x,y)|\,dx \\
= \;& \int_a^b dx \int_c^d F(y)|f(x,y)|\,dy \\
\le \;& \int_a^b \Big(\int_c^d |F(y)|^q\,dy\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_c^d |f(x,y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} dx \\
= \;& \Big(\int_c^d \Big|\int_a^b f(x,y)\,dx\Big|^p dy\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_a^b \Big(\int_c^d |f(x,y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} dx\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

由此立即可得 (5.4). □

推论 5.5. 设 $p>1$, 函数 $f(x), g(x)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{5.5}$$

证明. 在定理 5.4 中取 $a=-1, b=1$, 并令

$$G(x,y) = \begin{cases} f(y), & \text{如果 } x\in[-1,0), \\ g(y), & \text{如果 } x\in[0,1]. \end{cases}$$

对 $G(x,y)$ 运用 (积分型的)Minkowski 不等式 (5.4) 即得 (5.5). □

最后我们介绍 Poincaré 不等式的一个特例.

定理 5.6. (**Poincaré 不等式**) 设函数 $f(x)\in C^1[a,b]$, $f(a)=0$. 则:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx. \tag{5.6}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^2(x)\,dx &= \int_a^b \Big(\int_a^x f'(t)\,dt\Big)^2 dx \\
&\le \int_a^b \Big(\int_a^x |f'(t)|^2\,dt \int_a^x dt\Big)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_a^b \left((x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,dtt\right)dx \\
&= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

□

一般地, 对于 $x_0 \in [a,b]$, 有常数 $C = C(a,b) > 0$, 使得当 $f(x) \in C^1[a,b]$ 时候, 有

$$\int_a^b |f(x)-f(x_0)|^2\,dx \leq C\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

由此又可得

$$\int_a^b |f(x)-\bar{f}|^2\,dx \leq C\int_a^b |f'(x)|^2\,dx,$$

其中

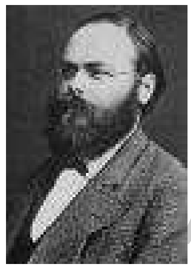
$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

数学家 Hölder, Otto Ludwig (1859—1937)

德国数学家 Minkowski, Hermann (1864.22.6—1909.12.1)

法国数学家 Poincaré, Jules Henri (1854.4.29—1912.7.17)



德国数学家 Schwarz, Karl Herman Amandus (1843.1.25—1921.11.30)

英国数学家 Young, William Henry (1863.10.20—1942.7.7)

习题 4.5.

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, $f(x)\geq\alpha>0$. 利用函数的凹凸性证明

$$\int_0^1 \ln f(x)dx \leq \ln\int_0^1 f(x)dx.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积. 利用函数的凹凸性证明

$$\exp\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big) \leq \int_0^1 e^{f(x)}dx.$$

3. 按下列步骤, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式证明 Hölder 不等式:

考虑使 Hölder 不等式成立的 p 的全体 P. 证明

(i) $2\in P$.

(ii) 如果 $p\in P$, 则 $p'=\dfrac{p}{p-1}\in P$,

(iii) 如果 $p\in P$, 则 $2p\in P$.

利用上述结果说明对所有正整数 n 和 $k=1,2,\dots,2^n-1$ 有 $\dfrac{2^n}{k}\in P$. 最后利用连续性证明 $(1,+\infty)\subseteq P$.

4. 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 求证:

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2+\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2\le\left(\int_a^b\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx\right)^2.$$

5. 利用本节定理证明离散情形的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|a_kb_k\Big|\le\Big(\sum|a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum|b_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

和

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{l=1}^{\infty}a_{k\ell}\Big|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{\ell=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{k\ell}|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $p>1$, $q=\dfrac{p}{p-1}$.

特别

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|.$$

6. 利用函数的 Fourier 级数证明: 若 $f(x)\in C^1[0,2\pi]$, $f(0)=f(2\pi)$. 则

$$\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt\right|^2dx\le C\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,dx,$$

其中常数 $C=1$ 不能改进.

7. 思考: 本节各定理中, 涉及到的函数的可积性可以如何放宽?

§6. 微分问题变体

许多积分问题可以转换为微分问题. 下面我们列举一些例子. 请读者自行设计一些其他问题.

例 6.1. 设 $f(\cdot)\in C[a,b]$, $f(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. 证明: $f(\cdot)\equiv 0$.

考虑 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, 则本题可以看为第三章例题 1.7 的一个特例.

例 6.2. 设 $f(\cdot)\in C[a,b]\cup C^1(a,b)$, 且 $|f'(\cdot)|\le M$, $f(a)=0$. 试证:

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M.$$

考虑 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, 则 $|F''(x)|\le M$, $F(a)=F'(a)=0$. 由此很容易利用函数单调性证明

$$-\frac{M(x-a)^2}{2}\le F(x)\le\frac{M(x-a)^2}{2},\qquad \forall\, x\ge a.$$

例 6.3. 对于 $[a,b]$ 上的连续可微函数 $f(x)$, 若 $f(a)=f(b)=0$, 则:

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big|.$$

易见这是第三章例题 1.9 的一个变体.

例 6.4. 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且有 $\delta>0$ 使对任何子区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,

$$\Big|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\Big|\le M|\beta-\alpha|^{1+\delta}.$$

则在 $[a,b]$ 上, $f(\cdot)\equiv 0$.

易见这是第三章例题 1.1 的一个变体.

§7. 积分技巧

计算中的技巧不是本书的重点, 但是有些技巧还是很有用的. 尽管现在有很发达的软件来计算积分, 我们仍然认为在今后的数学研究或应用中, 撇开计算机的直接计算是重要的.

对称性的运用 在计算积分时, 对称性的运用非常重要. 请看以下例题.

例 7.1. 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx.$$

解. 由对称性,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx.$$

不难用变量代换得到上述等式, 但我们鼓励读者从积分的几何意义出发寻求那种能看到上式成立的直觉.

于是

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\, dx \\
=\ & \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\Big)\, dx \\
=\ & \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

例 7.2. 计算

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{1+x^2+x^4} dx.$$

解. 被积函数是奇函数, 而积分区间关于原点对称, 从而显然有

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{1+x^2+x^4} dx = 0.$$

例 7.3. 计算

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^4 x+\sin^3 x\big)\, dx.$$

解. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^4 x+\sin^3 x\big) dx \\
=\ & 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \\
=\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x+\sin^4 x) dx \\
=\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos^2 x\sin^2 x) dx \\
=\ & \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x) dx \\
=\ & \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\
=\ & \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x+\cos^2 x) dx = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

有理函数积分

在 (不定) 积分的计算中, 有理函数的积分是很重要的一类, 如果有理函数的分母能够进行因式分解, 则我们就可以将有理函数化为最简形式, 从而计算归结为多项式以及型为

$$\int \frac{1}{(x+a)^n}\, dx$$

和

$$\int \frac{Ax+B}{(x+a)^2+b^2}\,dx$$

的积分.

下面我们介绍最简分式的计算. 把有理函数分拆成为最简分式之和, 除了在不定积分、定积分起着重要作用外, 在幂级数展开以及利用 Laplace 变换求微分方程的解当中也起着重要的作用. 将有理函数化为最简分式是既难又容易的问题. 容易在于它有一套规范的解法, 难在通常容易计算错误. 下面我们通过例题来说明最简分式中系数的计算方法.

例 7.4. 求

$$f(x) = \frac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

的最简分式.

解. 首先, 题中分式分子的次数小于分母的次数, 我们知道可以设

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

问题是如何求 A, B, C. 我们有

$$x^2+x+5 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1).$$

在上式中分别代入 $x=-1,1,2$ 可得 A, B, C. 但是我们更愿意把它们写成

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to -1}\big[(x+1)f(x)\big] = \left.\frac{x^2+x+5}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x-2)}\right|_{x+1=0} = \frac{5}{6},\\
B &= \left.\frac{x^2+x+5}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x-2)}\right|_{x-1=0} = -\frac{7}{2},\\
C &= \left.\frac{x^2+x+5}{(x+1)(x-1)\cancel{(x-2)}}\right|_{x-2=0} = \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

例 7.5. 求

$$f(x) = \frac{x^3+x+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

的最简分式.

解. 这里分子的次数等于分母的次数, 我们可以设

$$f(x) = D + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

利用多项式除法易见 $D=1$, 从而类似地, 我们有

$$\frac{x^3+x+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\left(\frac{x^3+x+5}{\cancel{(x+1)}(x-1)(x-2)}\Big|_{x+1=0}\right)\frac{1}{x+1} \\
&\quad +\left(\frac{x^3+x+5}{(x+1)\cancel{(x-1)}(x-2)}\Big|_{x-1=0}\right)\frac{1}{x-1} \\
&\quad +\left(\frac{x^3+x+5}{(x+1)(x-1)\cancel{(x-2)}}\Big|_{x-2=0}\right)\frac{1}{x-2} \\
&= 1+\frac{3}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{7}{(-2)}\frac{1}{x-1}+\frac{15}{3}\frac{1}{x-2}.
\end{aligned}
$$

易见, 这种方法可以推广到分子多项式的次数大于分母次数的情形 (分式部分的计算式一样的).

例 7.6. 求

$$f(x)=\frac{x^2+5x}{(x-1)(x^2+1)}$$

的最简分式.

解. 可以设

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

不难得到

$$A=\frac{x^2+5x}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)}\Big|_{x-1=0}=3.$$

$$Bi+C=\frac{x^2+5x}{(x-1)\cancel{(x^2+1)}}\Big|_{x=i}=-2i+3,$$

从而 $B=-2, C=3$. 读者也可以利用 $-i$ 来计算.

例 7.7. 求

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

的最简分式.

解. 这一题中 (x^2+x+1) 在实数范围内已经不可分解. 可以设

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}. \tag{7.1}$$

我们完全可以仿照上一题来计算 A,B,C. 但计算 B,C 时要利用的是 $x^2+x+1=0$ 的一个 (复) 根, 计算比较麻烦. 为此, 我们不直接计算, 而采用如下方法

法 I: 设 x 为 $x^2+x+1=0$ 的一个解. 由 (7.1) 可得

$$\begin{aligned}
& Bx+C \\
= \;& \frac{2x^2+1}{(x+1)\cancel{(x^2+x+1)}} \\
= \;& \frac{-2x-1}{x+1} && disp(x^2=-x-1) \\
= \;& \frac{-(2x+1)x}{(x+1)x} && (\text{让分母前两项等于 } x^2+x) \\
= \;& -(x+2).
\end{aligned}$$

从而 $B=-1, C=-2$. 这里我们利用了如下结果: 如果 B, C, α, β 为实数, 而 x 为虚部非零的复数, 则 "$Bx+C=\alpha+\beta x$" 蕴涵 "$B=\alpha$, $C=\beta$". 最后得到

$$\frac{2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{3}{x+1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

法 II: B, C 还可以利用 A 比较容易计算来得到. 我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)} \\
= \;& \frac{3}{x+1}+\left[\frac{2x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}-\frac{3}{x+1}\right] \\
= \;& \frac{3}{x+1}+\frac{2x^2+1-3(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)} \\
= \;& \frac{3}{x+1}-\frac{x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} \\
= \;& \frac{3}{x+1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}.
\end{aligned}$$

上述过程中, 我们事先已可断定 $2x^2+1-3(x^2+x+1)$ 一定含有因式 $(x+1)$, 这一事实同时也帮助我们得到后面的计算 (因式分解部分).

例 7.8. 求

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(2x^2+x+1)}$$

的最简分式.

解. 这一题中与前例一样, 可以设

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{2x^2+x+1}.$$

$$A=\left.\frac{x^2+3x+1}{2x^2+x+1}\right|_{x=1}=\frac{5}{4}.$$

法 I: 当 $2x^2+x+1=0$ 时,

$$\begin{aligned}
& Bx+C \\
= \quad & \frac{x^2+3x+1}{x-1} \\
= \quad & \frac{5x+1}{2(x-1)} \\
= \quad & \frac{(5x+1)(x+3/2)}{2(x-1)(x+3/2)} \quad (\text{使分母前两项等于 } 2x^2+x) \\
= \quad & \frac{5x^2+\frac{17}{2}x+\frac{3}{2}}{(-4)} \\
= \quad & -\frac{6x-1}{4}.
\end{aligned}$$

从而 $B=-\frac{3}{2}, C=\frac{1}{4}$. 最后得到

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(2x^2+x+1)}=\frac{5}{4(x-1)}-\frac{6x-1}{4}.$$

法 II:

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2+3x+1}{(x-1)(2x^2+x+1)} \\
= \quad & \frac{5}{4(x-1)}+\left[\frac{x^2+3x+1}{(x-1)(2x^2+x+1)}-\frac{5}{4(x-1)}\right] \\
= \quad & \frac{5}{4(x-1)}-\frac{6x^2-7x+1}{4(x-1)(2x^2+x+1)} \\
= \quad & \frac{5}{4(x-1)}-\frac{6x-1}{4(2x^2+x+1)}.
\end{aligned}$$

上题中, 法 II 不适用于分母项数比较多的情形, 例如对于

$$\frac{4x^4+3x^3+2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+x+1)}$$

和

$$\frac{x^4+x+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

宜用法 I 来做. 例如:

例 7.9. 求

$$f(x)=\frac{4x^4+3x^3+2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+x+1)}$$

的最简分式.

解. 易得

$$f(x)=\frac{-11/6}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}+\frac{33/7}{x-2}+\frac{Ax+B}{x^2+x+1}.$$

下面计算 A,B, 设 $x^2+x+1=0$, 则

$$\begin{aligned}&Ax+B\\=&\frac{4x^4+3x^3+2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}\\=&\frac{3x+2}{x+5}\\=&\frac{(3x+2)(x-4)}{(x+5)(x-4)}\\=&\frac{13x+11}{21}.\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=\frac{-11}{6(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{33}{7(x-2)}+\frac{13x+11}{21(x^2+x+1)}.$$

例 7.10. 求

$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-x+1)^6}$$

的最简分式.

解. 易得当 $x^2-x+1=0$ 时,

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{x^2}{x(x-1)}=\frac{x-1}{-1}=-x+1, \tag{7.2}$$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x(x-1)}=\frac{x}{-1}=-x, \tag{7.3}$$

于是由 (7.2) 可得

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2-x+1}, \tag{7.4}$$

而由 (7.3) 可得

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x}{x^2-x+1}. \tag{7.5}$$

由此, 由 (7.4) 并反复利用 (7.5), 有

$$\begin{aligned}&f(x)=\frac{1}{(x^2-x+1)^5}\Big(\frac{2}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2-x+1}\Big)\\=&\frac{1}{(x^2-x+1)^4}\Big(\frac{2}{x-1}+\frac{-2x}{x^2-x+1}+\frac{-x+1}{(x^2-x+1)^2}\Big)\\=&\cdots\cdots\\=&\frac{2}{x-1}-\frac{2x}{x^2-x+1}-\frac{2x}{(x^2-x+1)^2}-\cdots-\frac{2x}{(x^2-x+1)^5}-\frac{x-1}{(x^2-x+1)^6}.\end{aligned}$$

例 7.11. 求

$$f(x)=\Big[\frac{x}{(x^3-1)}\Big]^2$$

的最简分式.

解.

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

当 $x^2+x+1=0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}&=\frac{x+2}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+2}{x^2+x-2}=-\frac{x+2}{3},\\ \frac{x}{x-1}&=\frac{x(x+2)}{(x-1)(x+2)}=-\frac{x-1}{3}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{x}{(x^3-1)}\Big]^2=\Big[\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}\Big]^2\\ =\ &\Big[\frac{1/3}{x-1}-\frac{(x-1)/3}{x^2+x+1}\Big]^2\\ =\ &\frac{1}{9}\Big[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{(x-1)^2}{(x^2+x+1)^2}-\frac{2}{x^2+x+1}\Big]\\ =\ &\frac{1}{9}\Big[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{3x}{(x^2+x+1)^2}-\frac{2}{x^2+x+1}\Big]\\ =\ &\frac{1}{9}\Big[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{3x}{(x^2+x+1)^2}\Big].\end{aligned}$$

例 7.12. 求

$$f(x)=\frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x^2+2x+2)}$$

的最简分式.

解. 易见 $f(x)$ 的分子为 6 次多项式, 分母仅为 5 次多项式, 因而最简分式中含有多项式部分, 从本题来看, 这一部分仅与分子的前两项 x^6+x^5 与分母的前两项 x^5-4x^4 有关. 事实上, 我们有

$$x^6+x^5+\ldots=x(x^5-4x^4+\ldots)+5(x^5-4x^4+\ldots)+\ldots.$$

由此易得

$$f(x)=x+5+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2},$$

其中

$$A\ =\ \frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x-2)(x-3)(x^2+2x+2)}\Big|_{x=1}=\frac{7}{10},$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x-1)(x-3)(x^2+2x+2)}\Big|_{x=2} = -\frac{127}{10}, \\ C &= \frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x^2+2x+2)}\Big|_{x=3} = \frac{1093}{34}, \end{aligned}$$

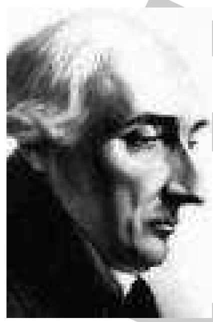
而当 $x^2+2x+2=0$,

$$\begin{aligned} Dx+E &= \frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= -\frac{5x}{34}-\frac{3}{85}, \end{aligned}$$

从而

$$f(x) = x+5+\frac{7}{10(x-1)}-\frac{127}{10(x-2)}+\frac{1093}{34(x-3)}-\frac{\frac{5}{34}x+\frac{3}{85}}{x^2+2x+2}.$$

一般说来, 若源分式的分子分母均为整系数多项式, 则最简分式中出现的系数中, 分母的素因子是有一定规律的. 通常同一个因子应该至少在两个地方出现. 例如因子"2" 出现在四个地方, 因子"5"和因子"17"都分别出现在三个地方. 这也可作为判断计算是否有错误的一个参考.



法国数学家 Laplace, Pierre Simon (1749.3.23—1827.3.5)

习题 4.7.

1. 求:
$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,dx.$$

2. 设 $f(x)$ 连续, $a>1$, 求证:
$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

3. 求证
$$\left(\iint_{x^2+y^2\le\frac{4}{\pi}} e^{x^2+y^2}\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}} < 2\int_0^1 e^{x^2}\,dx.$$

4. 构造三个将有理分式化为最简分式的习题并求解.

习题 4.

1. 设函数 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $0 < m \le f(x) \le M$ ($\forall\ x \in [a,b]$). 证明:

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

2. 设函数 $f(x) > 0$ 单调下降. 试证:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 xf(x)\,dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

3. 在 $[0,2]$ 上是否存在满足下列条件的函数:

$$f(x) \in C^1[0,2], \quad f(0) = f(2) = 1, \quad |f'(x)| \le 1, \quad \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| \le 1.$$

4. 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且 $f(x) > 0$. 若对任何 t:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,dx \le 1,$$

则 $\forall\ b > a$ 有:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{2} + 1.$$

5. 证明:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,dx > 0.$$

6. 对于 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 定义它的 n 次矩为 $\int_a^b f(t)t^n\,dt$, 如果 $f(x)$ 的所有次矩都为 0, $f(x)$ 连续, 则 $f(x) \equiv 0$.

7. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数,

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 1.$$

证明: 在 $[0,1]$ 的某一部分上, $f(x) \ge 2^n(n+1)$.

8. 证明:

(i)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 0.$$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n\,dx = 0.$$

第五章　级数

§1. 正项级数

正项级数 (严格意义上应该称为非负项级数) 的重要性主要在于以下两点: 一是所谓**正项级数收敛原理**(又称**正项级数收敛的基本定理**) 表明正项收敛的充分必要条件是它的部分和有界; 另外就是绝对收敛导致收敛的性质使得我们在很多情况下可以利用正项级数去研究任意项级数.

定义 1.1. 如果对于任何 $n \geq 0$,

$$a_n \geq 0,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

定理 1.2. (**正项级数收敛原理**) 正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当它的部分和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

有上界.

定理 1.2 可以由单调有界定理得到. 它表明正项级数的和不外两种情形 — 一个有限数或 $+\infty$. 所以正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛也可以等价地写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty.$$

正项级数收敛原理立即导致研究正项级数收敛性的比较判别法.

定理 1.3. (**比较判别法**) 设有正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

$$a_n \leq b_n, \qquad \forall\ n \geq 0. \tag{1.1}$$

则

(i) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.

(ii) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 发散.

由于级数的每一项乘以一个非零常数不影响其收敛性, 所以 (1.1) 可以用

$$a_n \le C b_n, \qquad \forall\, n \ge 0$$

代替, 其中 $C > 0$ 为一个非零常数. 由于级数的前有限项不影响级数的收敛性, 所以比较判别法有以下的极限形式:

定理 1.4. 设有正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

(i) 若 $0 < \ell < +\infty$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 有相同的收敛性.

(ii) 若 $\ell = 0$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛蕴涵 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.

(iii) 若 $\ell = +\infty$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 发散蕴涵 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散.

对以上定理的掌握, 都不应该只满足于记住定理, 而应该培养出一种直觉.

经常用来比较的级数是几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 和 p– 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. 容易证明, 当且仅当 $|q| < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 特别当 $q \in [0,1)$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 而当 $q \ge 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 发散. 而对于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当且仅当 $p > 1$ 时它是收敛的.

与几何级数的比较导致两个常用的判别法:

定理 1.5. (**D'Alembert 判别法**) 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 满足 $a_n > 0$.

(i) 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.

(ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 1.6. (**Cauchy 判别法**) 对于正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, 记

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

若 $L < 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛; 若 $L > 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散.

利用 Cauchy 判别法可以得到计算幂级数收敛半径的 **Cauchy - Hadamard** 公式. 在第二章, 讲述 Stolz 定理的时候, 我们曾经得到这样的结论: 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell,$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell.$$

而反之不然. 所以理论上, 在极限都存在的前提下, Cauchy 判别法要优于 D'Alembert 判别法.

在与 $p-$ 级数比较时, 如果一个正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 要通过与 $p-$ 级数比较得到收敛性, 则应该有 $p>1$, 常数 $M>0$ 以及 $N>0$, 成立

$$a_n\le\frac{M}{n^p},\qquad \forall\, n>N.$$

我们有 (记 $\ln 0=-\infty$)

$$\begin{gathered}
\exists p>1, M>0, N>0,\quad \text{s.t.}\quad \forall\, n>N,\quad a_n\le\frac{M}{n^p}\\
\Updownarrow\\
\exists p>1, M>0, N>0,\quad \text{s.t.}\quad \forall\, n>N,\quad \ln a_n\le \ln M-p\ln n\\
\Updownarrow\\
\exists p>1, M>0, N>0,\quad \text{s.t.}\quad \forall\, n>N,\quad p\le\frac{\ln M-\ln a_n}{\ln n}\\
\Updownarrow\\
\varliminf_{n\to\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}>1\\
\Uparrow\\
\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n-\ln a_{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln(1+\frac{1}{n})}>1\\
\Uparrow\\
\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)>1.
\end{gathered}$$

这样, 我们就得到利用 $p-$ 级数判断正项级数收敛的一个充分条件. 相应地, 可以得到利用 $p-$ 级数判断正项级数发散的一个充分条件. 这就是以下的 Raabe 判别法:

定理 1.7. (**Raabe 判别法**) 设正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 满足 $a_n>0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=\ell.$$

(i) 若 $\ell>1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

(ii) 若 $\ell < 1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散.

(iii) 若 $\ell = 1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 可能收敛也可能发散.

可以看出, 凡是用几何级数做比较可以判断出收敛性的级数一定也可以用 p– 级数加以比较来判断出收敛性. 事实上, 对于任何 $q \in [0,1)$, 以及 $p \in \mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1/n^p} = 0.$$

而对于 $q > 1$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1/n^p} = +\infty.$$

上面的事实可以表示为: 任何一个收敛的 (正项) 几何级数要比任何一个收敛的 p– 级数收敛得快, 而任何一个发散的 (正项) 几何级数要比任何一个发散的 p– 级数发散得快. 换言之, 利用 p– 级数的敛散性和比较判别法可以判断 (正项的) 几何级数的敛散性, 但我们不能用比较判别法和几何级数的敛散性来判断 p– 级数的敛散性. 这就是为什么 D'Lambert 判别法和 Cauchy 判别法对 p– 级数失效的原因. 同样, 用与 p– 级数比较来判断收敛性时, 对下述级数 $(p > 1)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

是失效的. 事实上,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

是比所有发散的 p– 级数发散得更慢的发散级数, 而

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

是比所有收敛的 p– 级数收敛得更慢的收敛级数. 进一步, 利用后面的 Cauchy 积分判别法, 我们还可以发现这一过程是没有穷尽的. 更一般地, 我们有

命题 1.8. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $a_0 \neq 0$.

(i) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 记

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

为其部分和, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

也发散.

(ii) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在收敛的正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

证明.

(i) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

任取 $n \ge 1$, 以及 $N > n$, 我们有

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{S_k} \ge \sum_{k=n}^{N} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{S_N - S_{n-1}}{S_N},$$

上式中令 $N \to +\infty$ 得到

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{S_k} \ge 1.$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

发散.

(ii) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在 $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ 使得

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} a_n \le \frac{1}{4^k}, \qquad \forall\, k = 1, 2, \dots.$$

令

$$b_n = 2^k a_n, \qquad n_k \le n < n_{k+1}, k = 0, 1, \dots.$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

而

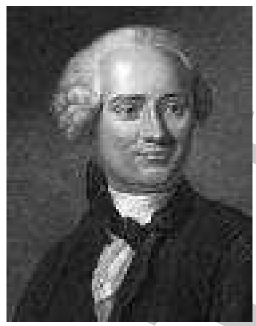
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} b_n \\
\le\ & \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^{n_2-1} 2a_k + \sum_{k=n_2}^{n_3-1} 2^2 a_k + \dots \\
\le\ & \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^k} \\
=\ & \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k + 1,
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛. □

上述命题表明, 任何发散的正项级数都有比它发散得更慢的发散级数; 而对任何收敛的正项级数, 也有比它收敛得更慢的收敛级数.

最后, 我们以 Cauchy 的积分判别法结束本节.

定理 1.9. (**Cauchy 积分判别法**) 设 $f(x)$ 是 $x>0$ 上非负的单调非增函数。则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛当且仅当 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 收敛.



法国数学家 D'Alembert - Jean Le Rond (1717.11.16—1783.10.29)

瑞士数学家 Raabe, Joseph Ludwig (1801.5.15—1859.1.22)

习题 5.1.

1. 设 a_n 为一正数列. 证明:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2. 举例说明, 在定理 1.5 中, 当 $\ell = 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 既可能收敛也可能发散.

3. 设 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛.

4. 设 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则
$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n\to\infty} n a_n = a$. 证明: $a = 0$.

6. 讨论下列级数的收敛性
$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \cdots.$$

7. 研究数列
$$\frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{2}{2+\alpha}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+\alpha}$$
当 n 趋于无穷时候的阶, 其中 α 是一个非负常数.

8. 证明定理 1.9.

9. 考虑级数
$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}$$
的敛散性. 其中 p, q, r 为实数.

10. 利用与级数
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$$
比较, 仿 Raabe 判别法给出一个判别定理.

§2. 任意项级数

所谓任意项级数, 我们指的是一般项的符号不确定的级数. 在收敛性方面, 判断任意项级数的收敛性要比判断正项级数的收敛性困难许多. 这方面常用的是判别方法是利用正项级数的判别法以及用 Abel 判别法或 Dirichlet 判别法.

我们之所以可以利用正项级数的结果来讨论任意项级数的收敛性, 主要在于有以下的结果.

定义 2.1. *如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.*

定理 2.2. *若级数绝对收敛, 则它一定收敛.*

定义 2.3. 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 发散, 而 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛. 则称 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 条件收敛[1]

定理 2.2 可以简单地用数列 (级数) 收敛的 Cauchy 准则来证明. 有了这个定理, 我们判断一个任意项级数是否收敛, 大致可以按三个步骤. 第一步是看一般项是否趋于零, 在第一步结论为肯定的情况下, 第二步是看它是否绝对收敛, 然后在第二步结论为否定的情况下, 考虑 Abel 判别法或 Dirichlet 判别法等用于判断任意项级数收敛性的判别方法.

定理 2.4. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和 S_n 有界, 数列 b_n 单调有界.

1. **(Abel 判别法)** 如果 S_n 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.
2. **(Dirichlet 判别法)** 如果 b_n 收敛到 0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明. Abel 判别法和 Dirichlet 判别法的证明都基于所谓的 Abel 变换: 对于 $m>n\geq 1$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k\\
=\ &\sum_{k=n+1}^{m}(S_k-S_{k-1})b_k\\
=\ &\sum_{k=n+1}^{m}\big((S_k-S_n)-(S_{k-1}-S_n)\big)b_k\\
=\ &\sum_{k=n+1}^{m}(S_k-S_n)b_k-\sum_{k=n+1}^{m}(S_{k-1}-S_n)b_k\\
=\ &\sum_{k=n+1}^{m}(S_k-S_n)b_k-\sum_{k=n}^{m-1}(S_k-S_n)b_{k+1}\\
=\ &(S_m-S_n)b_m+\sum_{k=n+1}^{m-1}(S_k-S_n)(b_k-b_{k+1}).
\end{aligned}$$

这样, 当 b_n 单调时,

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k\Big|\\
\leq\ &|S_m-S_n|\,|b_m|+\sum_{k=n+1}^{m-1}|S_k-S_n|\,|b_k-b_{k+1}|
\end{aligned}$$

[1]因此, 按定义, 绝对收敛的级数一定不是条件收敛的.

$$\begin{aligned}&\le |S_m - S_n|\,|b_m| + \max_{n+1\le k\le m-1}|S_k - S_n|\,|b_{n+1}-b_m|\\&\le \max_{n+1\le k\le m}|S_k - S_n|\,(2|b_m|+|b_{n+1}|).\end{aligned}$$

由上式以及 S_n, b_n 的有界性, 易见无论是 S_n 收敛还是 b_n 收敛到 0, 都可以得到

$$\lim_{n,m\to\infty}\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\Big| = 0.$$

这样由 Cauchy 准则得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

Dirichlet 判别法有一个常用的推论:

推论 2.5. (Leibniz 判别法) 设 a_n 单调非增, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 则交错项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

以下我们看几个利用定理 2.4 的典型例题:

例 2.1. 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^p}$ 的收敛性.

解. 显然, 当 $p \le 0$ 时, 级数的一般项不趋于零, 从而级数发散. 而当 $p > 1$ 时, 由

$$\Big|\frac{\sin n}{n^p}\Big| \le \frac{1}{n^p}$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

的收敛性知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^p}$ 绝对收敛.

当 $p \in (0,1]$, 我们有 $b_n \triangleq \dfrac{1}{n^p}$ 单调趋于零, 而

$$\Big|\sum_{n=1}^{m}\sin n\Big| = \Big|\frac{\cos\frac{2m+1}{2} - \cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}\Big| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

从而由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^p}$ 收敛.

类似地可以得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n^p}$ 收敛. 利用这一点, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\frac{\sin n}{n^p}\Big| \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^p}$$

$$\geq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{2n^p} = +\infty.$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ 条件收敛.

总之, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ 当 $p \leq 0$ 时发散, 当 $p \in (0,1]$ 时条件收敛, 当 $p > 1$ 时绝对收敛.

例 2.2. 考察 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p} \arctan n$ 的收敛性.

解. 由于 $\arctan n$ 单调有界, 所以由 Abel 判别法, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p} \arctan n$ 也收敛.

更细致地, 我们有如下结论, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p} \arctan n$ 当 $p \leq 0$ 时发散, 当 $p \in (0,1]$ 时条件收敛, 当 $p > 1$ 时绝对收敛.

容易证明, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = +\infty,$$

这里, a^+, a^- 分别表示 a 的正部和负部:

$$a^+ = \begin{cases} a, & \text{如果 } a \geq 0 \\ 0, & \text{如果 } a < 0 \end{cases} = \frac{|a| + a}{2},$$

$$a^- = \begin{cases} 0, & \text{如果 } a \geq 0 \\ -a, & \text{如果 } a < 0 \end{cases} = \frac{|a| - a}{2}.$$

我们有

命题 2.6. 设有级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的任何重排级数都收敛, 且收敛于同一值.

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 经过重排可以收敛到任何预先给定的数.

证明. 所谓级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排, 是指存在 $1, 2, \ldots$ 的一

个重排

$$n_1, n_2 \dots$$

(即 $1, 2, 3, \dots$ 在 $n_1, n_2 \dots$ 中都恰好出现一次), 使得

$$b_k = a_{n_k}, \qquad \forall\ k = 1, 2, \dots.$$

(i) 记 m_k 为使得 $1, 2, \dots, m$ 都在 $n_1, n_2 \dots, n_k$ 中出现的最大的指标 m, 即

$$m_k = \max\{m | 1, 2 \dots, m \in \{n_1, n_2, \dots, n_k\}\}.$$

则

$$\lim_{k\to\infty} m_k = +\infty.$$

我们有

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} b_j - \sum_{n=1}^{m_k} a_n\Big| \le \sum_{n=m_k+1}^{\infty} |a_n|$$

从而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的绝对收敛性得到

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

即

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(ii) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 记 α_n 表示 $a_1, a_2, \dots$ 中第 n 个非负数. $-\beta_n$ 表示 $a_1, a_2, \dots$ 中第 n 个负数. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

现设 ξ 为一个任意给定的实数. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty,$$

存在 n_1 使得

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_1} > \xi.$$

而由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty,$$

必存在 $m_1 \geq 1$ 使得

$$\Big(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1}\Big)-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{m_1})<\xi,$$

而

$$\Big(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1}\Big)-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{m_1-1})\geq\xi.$$

类似地, 可以找到

$$n_2>n_1,$$

使得

$$\begin{aligned}&\Big(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1}\Big)-\Big(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{m_1}\Big)\\&+\Big(\alpha_{n_1+1}+\alpha_{n_1+2}+\ldots+\alpha_{n_2}\Big)>\xi,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\Big(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1}\Big)-\Big(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{m_1}\Big)\\&+\Big(\alpha_{n_1+1}+\alpha_{n_1+2}+\ldots+\alpha_{n_2-1}\Big)>\xi.\end{aligned}$$

依次, 定义 $m_2, n_3, m_3, \ldots$. 并令级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n_1}\\&-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_{m_1}\\&+\alpha_{n_1+1}+\alpha_{n_1+2}+\ldots+\alpha_{n_2}\\&-\beta_{m_1+1}-\beta_{m_1+1}-\ldots-\beta_{m_2}\\&+\ldots.\end{aligned}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 的一个重排, 而

$$\xi<\sum_{n=1}^{n_k+m_{k-1}} b_n\leq\xi+\alpha_{n_k},$$

$$\xi-\beta_{m_k}\leq\sum_{n=1}^{n_k+m_k} b_n<\xi.$$

于是由

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=0.$$

可得

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{n_k+m_{k-1}} b_n=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{n_k+m_k} b_n=\xi. \tag{2.1}$$

注意到当 $n_k + m_{k-1} \le j \le n_k + m_k$ 时,

$$\sum_{n=1}^{n_k+m_k} b_n \le \sum_{n=1}^{j} b_n \le \sum_{n=1}^{n_k+m_{k-1}} b_n,$$

而当 $n_k + m_k \le j \le n_{k+1} + m_k$ 时,

$$\sum_{n=1}^{n_k+m_k} b_n \le \sum_{n=1}^{j} b_n \le \sum_{n=1}^{n_{k+1}+m_k} b_n,$$

结合 (2.1), 我们可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \xi.$$

$\square$

挪威数学家 Abel, Niels Henrik (1802.8.5—1829.4.6)

德国数学家 Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (1805.2.13—1859.5.5)

德国数学家 Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646.6.21—1716.11.14)

习题 5.2.

1. 证明对任何 x,
$$\sin x - \sin\sin x + \sin\sin\sin x - \sin\sin\sin\sin x + \dots$$
收敛

2. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 加括号得到, 即 $A_n = \sum\limits_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $p_{n+1} - p_n$ 有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

3. 级数
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$
是否收敛?

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 的敛散性如何?

5. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 经过重排可以发散到 $+\infty$ 以及 $-\infty$.

6. 试利用 Dirichlet 判别法证明 Abel 判别法.

§3. 函数项级数的基本性质

函数项级数涉及的一个重要概念就是一致收敛性. 在数学分析中, 一致收敛性之所以重要是因为它事关函数极限的连续性、可积性和可微性. 简单地讲一致收敛性是保证两种极限能够交换次序的关键条件. 从某种意义上, 数学分析就是一门关于极限的课程. 整个课程是一门对极限概念的理解逐步深入的过程. 但是, 对单个极限的理解只是这个过程最初的一步, 限于单个极限

的处理, 对极限概念是很难真正把握好的. 只有经过二重、二次极限的洗礼, 才有可能真正地把握好极限, 从而使数学分析的学习真正过关. 所以即使在实变函数论中有更好的工具处理类似问题, 这部分训练对于读者打好数学基础还是极为重要的.

定义 3.1. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$, $u_n(x), S(x)$ 是 I 上的一列函数. 如果 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N < 0$, 使得 $\forall\, x \in I$ 以及 $m > N$, 有

$$\Big|\sum_{n=1}^{m} u_n(x) - S(x)\Big| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

则称[1]函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

当我们不直接写出和函数 $S(x)$ 时, (3.1) 可以等价地写为

$$\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(x)\Big| < \varepsilon.$$

我们也可以把一致收敛性等价地描述为

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in I} \Big|\sum_{n=m}^{\infty} u_n(x)\Big| = 0.$$

不难得到以下的 Cauchy 准则:

定理 3.2. (Cauchy 准则) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上一致收敛当且仅当 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使得当 $m > n > N$ 时, 对任何 $x \in I$ 成立着

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\Big| < \varepsilon.$$

我们指出, 一个收敛的常数项级数作为函数项级数总是在任何集合上一致收敛的. 另一方面, 当 $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 为有限集时, I 上的一致收敛性与 I 上的收敛性等价. 因此, 一致收敛性只对 I 为无限集的情形才有本质的意义.

判断函数项级数一致收敛性的判别法与判断任意项级数收敛性的判别法有可比之处. 首先, 类似于任意项级数的绝对收敛性, 利用 Cauchy 准则, 我们有如下的 Weierstrass 判别法:

定理 3.3. (Weierstrass 判别法) 若 $\forall\, x \in I$, $|u_n(x)| \le c_n$, 且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 关于 $x \in I$ 一致收敛.

---

[1]或称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 关于 $x \in I$ 一致收敛于 $S(x)$.

同样, 我们有 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法:

定理 3.4. 考虑 I 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和 $S_n(x)$ 在 I 上一致有界, 函数列 $v_n(x)$ 关于 n 单调, 且在 I 上一致有界.

(i) **(Abel 判别法)** 如果 $S_n(x)$ 关于 $x \in I$ 一致收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$$

关于 $x \in I$ 一致收敛.

(ii) **(Dirichlet 判别法)** 如果 $v_n(x)$ 关于 $x \in I$ 一致收敛到 0, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$$

关于 $x \in I$ 一致收敛.

我们指出, $v_n(x)$ 关于 n 的单调性对 $x \in I$ 不必是一致的, 即允许对某些 x, $v_n(x)$ 关于 n 单增, 而对另一些 x, $v_n(x)$ 关于 n 单减.

例 3.1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 的一致收敛性.

解.

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

例 3.2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的一致收敛性.

解. 当 $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{m} \sin nx \\ = & \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{m} 2\sin nx \sin\frac{x}{2} \\ = & \frac{\cos\frac{2m-1}{2}x - \cos\frac{2m+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

这样对于固定的 $\delta > 0$, 在 $|\sin\frac{x}{2}| \ge \delta > 0$ 的范围内, $\sum_{k=1}^{\infty} \sin nx$ 的部分和是一致有界的. 而 $\frac{1}{n}$ 显然关于 x 在任何范围内都是一致收敛到 0, 所以由 Dirichlet

判别法, 对于任何 $\delta>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $I_\delta=\{x\big|\,\big|\sin\frac{x}{2}\big|\geq\delta\}$ 上一致收敛. 特别, 对于任何 $\delta>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

尽管不难证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 对每个 x 都是收敛的, 但可以证明, 在包含 $2k\pi$ 这样的点的区间上, 它是非一致收敛的. 以 0 点为例, 可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,\delta]$ 上非一致收敛.

为此, 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$, 则对任何 $N>0$, 取 $n\geq N+\frac{1}{\delta}$, $m=2n$, $x=\frac{1}{2n}\in[0,\delta]$, 我们有

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\geq\varepsilon_0.$$

从而由 Cauchy 准则知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,\delta]$ 上非一致收敛.

下面我们证明一致收敛级数的几个重要性质.

定理 3.5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 关于 $x\in(a,b)$ 一致收敛, $\lim_{x\to a^+}u_n(x)$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a^+}u_n(x)$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to a^+}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a^+}u_n(x). \tag{3.2}$$

证明. 补充定义

$$u_n(a)=\lim_{x\to a^+}u_n(x),\qquad\forall\ n=1,2,\ldots.$$

由于 $u_n(x)$ 关于 $x\in(a,b)$ 一致收敛, 从而 $\forall\ \varepsilon>0,\exists N>0$, 使得当 $m>n>N$ 时,

$$\Big|\sum_{k=n}^{m}u_k(x)\Big|\leq\varepsilon,\qquad\forall\ x\in(a,b).$$

上式中令 $x\to a^+$ 可得

$$\Big|\sum_{k=n}^{m}u_k(a)\Big|\leq\varepsilon.$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 收敛. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 关于 $x\in[a,b)$ 一致收敛.

进一步, $\forall\, m \ge 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)\Big| &\le \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(x)\Big| \\ &+\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(a)\Big| + \Big|\sum_{n=1}^{m} u_n(x) - \sum_{n=1}^{m} u_n(a)\Big|.\end{aligned}$$

对上式关于 $x \to a^+$ 取上极限, 可得

$$\varlimsup_{x\to a^+}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)\Big| \le 2\sup_{t\in[a,b)}\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(t)\Big|.$$

于是, 由一致收敛性并在上式中令 $m \to +\infty$ 即得

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{x\to a^+}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)\Big| \\ \le\ &\lim_{m\to+\infty} 2\sup_{t\in[a,b)}\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(t)\Big| = 0.\end{aligned}$$

即 (3.2) 成立. □

我们提请读者注意, 在上述定理中, 事实上假设了 $u_n(x)$ 在 a 点的右连续性, 但没有假设 $u_n(x)$ 整体的连续性; 另外,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a^+} u_n(x)$$

的收敛性是定理结论的一部分.

由定理 3.5 立即可得

推论 3.6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛 (或内闭一致收敛), $u_n(x)$ 在 (a,b) 连续, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 内连续.

关于函数项级数的积分, 我们有:

定理 3.7. 设 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ 是一有限区间, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 关于 $x \in (a,b)$ 一致收敛, $u_n(x)$ 在 (a,b) 上可积. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上可积, 且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx. \tag{3.3}$$

证明. 在定理的假设中, 我们没有强调这里的可积性是常义的还是广义的. 事实上, 我们马上可以看到, 一致收敛性使得这里遇到的可积性本质上是常义的.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 关于 $x \in (a,b)$ 一致收敛, 所以 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m \geq n \geq N$ 时,

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\Big| \leq \varepsilon, \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

特别,

$$|u_n(x)| \leq \varepsilon, \qquad \forall\, x \in (a,b).$$

从而当 $n \geq N$ 时候 $u_n(x)$ 在 (a,b) 上的可积性必然是常义的. 下面, 不妨设对所有 $n \geq 1$, $u_n(x)$ 都在 (a,b) 上常义可积.

我们有

$$\begin{aligned}
& \overline{\int_a^b} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx - \underline{\int_a^b} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx \\
\leq\ & \overline{\int_a^b} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\,dx - \underline{\int_a^b} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\,dx \\
& + \overline{\int_a^b} \sum_{n=1}^{N} u_n(x)\,dx - \underline{\int_a^b} \sum_{n=1}^{N} u_n(x)\,dx \\
=\ & \overline{\int_a^b} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\,dx - \underline{\int_a^b} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\,dx \\
\leq\ & 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

于是, 由 ε 的任意性可得

$$\overline{\int_a^b} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \underline{\int_a^b} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx.$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上可积.

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
& \Big|\sum_{n=1}^{m} \int_a^b u_n(x)\,dx - \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx\Big| \\
\leq\ & \Big|\int_a^b \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(x)\,dx\Big|
\end{aligned}$$

$$\le \quad (b-a)\sup_{t\in(a,b)}\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n(t)\Big|.$$

由一致收敛性,

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in(a,b)}\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n(t)\Big|=0,$$

所以 (3.3) 成立. □

作为上述定理的一个推论, 我们可得关于函数项级数可微性的结论:

定理 3.8. 设 $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项在 (a,b) 内连续可导, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 对每个 $x\in(a,b)$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 关于 $x\in(a,b)$ 一致收敛. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内连续可导, 且

$$\Big(\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x),\qquad\forall\, x\in(a,b). \tag{3.4}$$

证明. 由推论 3.6, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 (a,b) 内连续. 任取 $x_0\in(a,b)$, 由定理 3.7, 对任何 $x\in(a,b)$, 有

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)\,dt&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n'(t)\,dt\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0).\end{aligned}$$

对上式关于 x 求导即得定理结论. □

最后, 我们指出, 绝对收敛与一致收敛之间没有必然的联系. 事实上, 任何一个收敛的常数项级数都是一致收敛的, 特别, 任何一个条件收敛的常数项级数是一致收敛的. 另一方面, 我们很容易找到绝对收敛而非一致收敛的例子. 例如级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛, 但它的和在 $[0,1]$ 不连续, 所以它不是一致收敛的. 另一方面, 一致收敛性只是本节定理成立的充分条件, 而不是必要条件. 但是, 以下的 Dini 定理表明, 在某些情况下, 它是必要的.

定理 3.9. (Dini 定理) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 每一项和该级数的和均

在 $[a,b]$ 上连续, 对每个固定的 $x\in[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是正项级数或负项级数. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛.

证明. 分别以 $S(x)$, $S_n(x)$ 表示级数的和以及部分和. 由假设, $S_n(x)$ 关于 n 单调. $\forall\,\varepsilon>0$, 由于 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而一致连续, 可知存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-y|<\delta$, $x,y\in[a,b]$ 时, 成立

$$|S(x)-S(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

任取 $x\in[a,b]$, 由极限的定义, 存在 $N_x>0$, 使得

$$\left|S_{N_x}(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

进一步, 由 S_N 的连续性, 存在 $\delta_x>0$ 使得当 $|y-x|<\delta_x$, $y\in[a,b]$ 时,

$$\left|S_{N_x}(x)-S_{N_x}(y)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 取 $\beta_x=\min(\delta,\delta_x)>0$, 我们有

$$\begin{aligned}
&|S_{N_x}(y)-S(y)|\\
\le\;& |S_{N_x}(y)-S_{N_x}(x)|+|S_{N_x}(x)-S(x)|+|S(x)-S(y)|\\
\le\;& \varepsilon, \qquad \forall\, y\in(x-\beta_x,x+\beta_x)\cap[a,b].
\end{aligned}\tag{3.5}$$

由于

$$\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\beta_x,x+\beta_x)\supseteq[a,b],$$

由有限覆盖定理, 存在有限个 $x_1,x_2,\ldots,x_m\in[a,b]$, 使得

$$\bigcup_{1\le k\le m}(x_k-\beta_{x_k},x_k+\beta_{x_k})\supseteq[a,b]$$

令 $N=\max\limits_{1\le k\le m}N_{x_k}$, 则当 $n\ge N$ 时, 对任何 $x\in[a,b]$, 有 $1\le k\le m$ 使得 $|x-x_k|<\beta_{x_k}$, 从而由 $S_n(x)$ 关于 n 的单调性以及 (3.5),

$$|S_n(x)-S(x)|\le|S_{N_{x_k}}(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

这就表示 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛. □

意大利数学家 Dini, Ulisse (1845.11.14—1918.10.28)

习题 5.3.

1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$ 的一致收敛性.

2. 对于固定的 n, $f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(a)|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(b)|$ 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

3. 设 $\alpha>1$, $\{P_n\}$ 是一列正的单调增加数列. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n-P_{n-1}}{P_n\cdot P_{n-1}^{\alpha}}\sin nx$ 一致收敛.

4. 利用本节结论推导 (证明) 幂级数的主要性质. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $r>0$.

 (i) $\forall\,\delta\in(0,r)$, 该级数在 $[-\delta,\delta]$ 上一致收敛;
 (ii) 级数在 $(-r,r)$ 内连续, 无限次可导, 且可逐项求导;
 (iii) 若级数在 $x=r$ 收敛, 则级数在 $[0,r]$ 上一致收敛;
 (iv) $\forall\,\delta\in(0,r)$, 该级数在 $[-\delta,\delta]$ 上可积, 且可逐项积分.
 (v) (**Abel 定理**) 若级数在 $x=r$ 收敛, 则级数在 r 左连续.

§4. 级数求和法

前面讲过求和可以利用积分, 而在无穷级数的求和中, 常用的是利用幂级数、Fourier 级数求和.

利用已知结果求和 有些级数可以通过简化, 利用已知结果求和. 我们略举如下几个例子.

例 4.1. 求
$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots.$$

解.
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\dots\\
=\ &\Big(1-\frac{1}{2}\Big)-\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)-\dots\\
=\ &-1+2\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\dots\\
=\ &2\ln 2-1.
\end{aligned}$$

例 4.2. 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$.

解.
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}\\
=\ &\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\\
=\ &1.
\end{aligned}$$

例 4.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

解.
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\\
=\ &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+e=2e.
\end{aligned}$$

利用幂级数求和 利用幂级数求数项级数的和除了需要构造一个幂级数外, 一般的过程粗略地讲就是以下三种: 先求导后积分、先积分后求导以及通过求导得到关于幂级数和的微分方程[1]. 在求出幂级数的和函数后, 根据要计算的数项级数是不是对应于相应幂级数收敛域的边界点, 采用直接代入或利用 Abel 定理[2]得到结果.

[1]这里求导或积分可能需要多次, 第一种情形也可以看作第三种情形的特例.

[2]该定理导致幂级数在收敛域内的连续性, 即在内部连续, 左右边界点上如果收敛, 则为右连续和左连续.

例 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$.

解. 考虑级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n}.$$

易见幂级数的收敛半径为 1, 于是

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x^3}{1-x^2},\qquad \forall\ |x|<1.$$

于是

$$f(x)=\Big(\frac{x^3}{1-x^2}\Big)'=\frac{3x^2}{1-x^2}+\frac{2x^4}{(1-x^2)^2}.$$

当我们对此步骤非常熟悉时, 可以写为: 在 $|x|<1$ 内

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n+1}\Big)' \\ &= \Big(\frac{x^3}{1-x^2}\Big)'=\frac{3x^2}{1-x^2}+\frac{2x^4}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

于是所求级数的值为

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{2/3}+\frac{2/9}{4/9}=2.$$

例 4.5. 利用幂级数求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

解. 显然, 本题利用例 4.3 中的解法比较好. 这里只是作为一个例子提供如何利用幂级数求解. 类似于前一题, 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}\Big|_{x=1}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}\Big)'\Big|_{x=1} \\ =&\ \Big[x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big)'\Big]'\Big|_{x=1}=\Big[x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big)'\Big]'\Big|_{x=1} \\ =&\ \Big(x\big(e^x\big)'\Big)'\Big|_{x=1}=(x+1)e^x\Big|_{x=1}=2e. \end{aligned}$$

例 4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2n+1)}$.

解. 考虑级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

我们有 (注意到 $f(0)=0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n}dt \\ &= \int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=\int_0^x\frac{t^2}{(1-t)(1+t)}dt \\ &= \int_0^x\big(-1+\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\big)dt \\ &= -x-\frac{\ln(1-x)}{2}+\frac{\ln(1+x)}{2} \\ &= -x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

从而所求数项级数的和为

$$\sqrt{3}f\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\big)=\sqrt{3}\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}\big)=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

注意原级数的和不是

$$f(3^{-n/(2n+1)}).$$

例 4.7. 计算 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.

解. 考虑级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

则该级数在 $[-1,1]$ 上收敛. 由于系数有分母 $2n+1$, 我们通过求导去掉它, 但此时级数可导的范围是 $(-1,1)$. 我们有

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\qquad\forall\ x\in(-1,1).$$

从而

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\,dt=\arctan x,\qquad\forall\ x\in(-1,1).$$

最后, 由 Abel 定理, 可得幂级数在点 1 左连续, 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

注 4.1. 幂级数在收敛域内, 除了端点外, 其逐项可导、逐项可积性都是不成问题的. 由 Abel 定理, 我们得到了幂级数在收敛域内的收敛性. 由此, 若一个幂级数在 $[a,b]$ 上收敛, 则它在 $[a,b]$ 上连续, 且必有

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt.$$

在上式中出现的积分可能是一个常义积分, 也可能是一个收敛的广义积分 (瑕积分).

利用三角级数求和 下面我们考虑的是利用三角级数来计算一些级数. 在名称上, 三角级数和 Fourier 级数略有区别. Fourier 级数是由一个函数形式展开而得到的三角级数. 由 Riemann 引理 (见第四章定理 4.1), Fourier 级数的系数需要满足一定的条件. 因此, 不是所有的三角级数都是 Fourier 级数. 通常, 利用三角级数求和也就是利用 Fourier 级数求和. 但是一般的微积分教材中, 利用 Fourier 级数往往是单向的. 也就是通过对已知函数展开成 Fourier 级数来得到一些特殊的数项级数的和. 这里我们将反其道而行, 而考虑问题的思路则是将三角级数看作复数意义上的幂级数.

例 4.8. 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$ 的和.

解.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!} = \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}\\
= &\operatorname{Im}\,(e^{e^{ix}}-1) = \operatorname{Im}\,e^{\cos x+i\sim x}\\
= &e^{\cos x}\sin\sin x.
\end{aligned}
$$

例 4.9. 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

解. 熟悉 Fourier 级数的读者会知道这是一个函数的 Fourier 展开式. 在讲授 Fourier 级数时, 我们是首先给出那个函数, 然后展开得到上述级数. 现在, 我们希望直接来寻找那个函数.

法 I. 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}.$$

则当 $e^{ix}\neq 1$ 时, 即 $x\neq 2k\pi$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\\
= &\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}\\
= &-\operatorname{Im}\,\ln(1-e^{inx})\\
= &-\operatorname{Im}\,\ln(1-\cos x-i\sin x)\\
= &-\operatorname{Im}\,\Big(\ln|1-\cos x-i\sin x|+i\arg(1-\cos x-i\sin x)\Big)\\
= &-\arctan\frac{-\sin x}{1-\cos x}\\
= &\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}\\
= &\arctan\cot\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \arctan\tan\frac{\pi-x}{2}\\
&= \frac{\pi-x}{2}, \qquad \forall\ x\in(0,2\pi).
\end{aligned}
$$

上面的推导需要学习过复数的对数函数. 当然, 我们也可以借鉴实数情形直接建立相应理论, 但此时就涉及到一些比较复杂的理论的东西, 例如复数的对数函数如何定义、如何计算以及有关它的幂级数展开等问题.

下面我们提供一种理论上涉及的东西较为简单的方法.

法 II. 考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n e^{inx}}{n}, \qquad t\in[0,1].$$

不难看到, 对于任何 x, 上式作为 t 的幂级数, 在 $[0,1]$ 上都是收敛的.

于是 (参见注 4.1),

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\\
= \quad &\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}\\
= \quad &\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n e^{inx}}{n}\Big|_{t=0}^{1}\\
= \quad &\mathrm{Im}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}e^{inx}dt\\
= \quad &\mathrm{Im}\int_0^1\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\,dt\\
= \quad &\int_0^1\frac{\sin x}{(t-\cos x)^2+\sin^2 x}\,dt\\
= \quad &\int_{-\cot x}^{\frac{1-\cos x}{\sin x}}\frac{1}{t^2+1}\,dt\\
= \quad &\arctan\frac{1-\cos x}{\sin x}-\arctan(-\cot x)\\
= \quad &\arctan\tan\frac{x}{2}-\arctan\tan(x-\frac{\pi}{2})\\
= \quad &\frac{\pi-x}{2}, \qquad \forall\ x\in(0,2\pi).
\end{aligned}
$$

例 4.10. 试求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

解. 如果我们直接用幂级数来计算, 就会有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\Big|_{x=0}^{1} \\
&= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\,dx \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{x}\,dt \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

这样, 由于计算上述积分遇到困难, 这一方法在这里不能起作用. 下面, 我们考虑三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

该级数的形式导数是

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

由于上述级数在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛, 因而在 $(0,2\pi)$ 上, 确实有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^2}\Big)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n}.$$

这样, 类似于注 4.1 所指出的, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin t}{n}\,dt \\
&= -\int_0^x \frac{\pi - t}{2}\,dt \\
&= -\frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}, \qquad \forall\, x \in [0, 2\pi].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

在 (4.1) 中取 $x = \pi$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

即

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

我们也可以对 (4.1) 在 $[0,2\pi]$ 上积分直接得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{\pi^2}{6}.$$

习题 5.4.

1. 计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.
2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2}$.
3. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$
4. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$
5. 思考: 在例 4.8 中, 你能否利用逐项求导的方法得到结果?

第六章　多元函数微积分

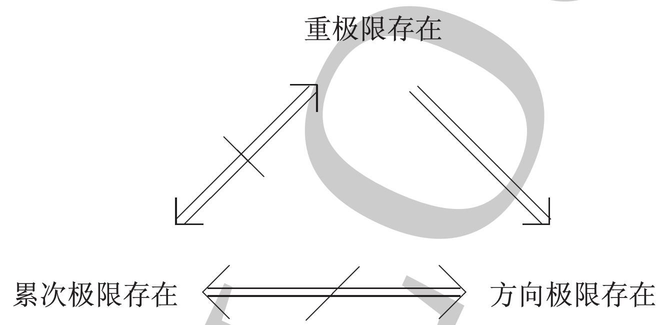
在数学分析课程中, 多元微积分与一元微积分相比, 困难的地方其实并不多. 许多同学对这部分内容感到困难甚至有恐惧感主要是在于这部分内容通常计算较繁琐, 另外也是由于许多同学的空间想象能力不够.

鉴于本书的主要目的在于弥补高等数学和数学分析要求上的差距, 同时帮助学过数学分析的同学更好地掌握一些不易掌握的知识. 因此, 本章我们将只简单地涉及一些我们认为需要注意的地方.

§1. 一些需要注意的小点

多元函数各种极限之间的关系是一个很关键而不易把握的知识点. 从定义上看, 多重极限与一元函数极限的定义没有什么不同. 但是由于当我们考虑多元函数极限时, 自变量趋于极限点的路径比单变量情形复杂许多, 所以我们可以看到多元函数的极限、导数、积分会与单变量情形有一些本质的不同.

下面是各类极限之间的相互关系:



重极限与方向极限 重极限存在导致方向极限的存在且相等是非常简单的事情. 但是各方向极限存在且相等却不能导致重极限的存在性.

以二元函数在原点的极限为例. 二重极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = A$$

表示 $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0$ 使得当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时,

$$|f(x,y) - A| \le \varepsilon.$$

而所有相应的方向极限存在且等于 A, 即

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\theta, t\sin\theta) = A, \qquad \forall\,\theta \in [0, 2\pi]$$

表示的是 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在与 θ 有关的 $\delta_\theta > 0$ 使得当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta_\theta$, 且 (x,y) 落在以 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 为斜率的过原点的直线时, 有

$$|f(x,y) - A| \le \varepsilon.$$

由此可以看到方向极限存在相等不能导致二重极限存在的关键在于上述 δ_θ 关于 θ 没有一致性.

另一方面, 从另一个角度来看, 改变某些曲线上的函数值, 不会改变函数的方向极限. 例如改变函数在曲线 $y = x^2$ 上的值不会改变趋于 $(0,0)$ 点的方向极限的存在性和值. 但这足以使相应的二重极限不存在.

重极限与累次极限 以二元函数在原点的极限为例, 累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$$

以及

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

均与函数 $f(x,y)$ 在两个坐标轴上的函数值无关, 因此累次极限的存在 (及相等) 不能导致重极限的存在是平凡的. 事实上, 改变任意有限条光滑曲线上函数的值, 并不会改变累次极限的存在性和值.

重极限存在不能保证累次极限存在是一件令人感到有点奇怪的事. 下面的定理也许可以让我们把问题看清楚:

定理 1.1. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有定义,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

则

$$\lim_{x\to x_0} \overline{\lim_{y\to y_0}}\, f(x,y) = \lim_{x\to x_0} \underline{\lim_{y\to y_0}}\, f(x,y) = A, \tag{1.1}$$

$$\lim_{y\to y_0} \overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x,y) = A, \tag{1.2}$$

定理的证明非常简单, 我们把具体过程留给读者. 定理 1.1 表明二重极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

存在时, 相应的累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

不存在只能是因为

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

在 $x = 0$ 的附近不总是存在的.

推论 1.2. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有定义,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

若对任何 $y\neq y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 在, 则

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A. \tag{1.3}$$

类似地, 若对任何 $x\neq x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 在, 则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A, \tag{1.4}$$

推论 1.2 给了我们说明否定二重极限存在的一个方法, 即二个二次极限都存在但不相等时, 相应的二重极限一定不存在. 另外两个常用的否定二重极限存在的判据就是方向极限不存在或存在但不全相等, 以及沿着曲线的极限不存在或存在但不想等.

下面一些例子有利于读者加深对这部分内容的理解.

例 1.1. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 以及 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在

例 1.2. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$$

则函数在 $(0,0)$ 点的累次极限为零, 但二重极限不存在.

例 1.3. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

则函数在 $(0,0)$ 点的累次极限为零, 但二重极限不存在.

例 1.4.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则函数在 $(0,0)$ 点的各方向极限为零, 但二重极限不存在. 二重极限的不存在性由

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=\sqrt{x}}} f(x,y)=1\neq 0$$

得到.

例 1.5.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

则函数在 $(0,0)$ 点的两累次极限都存在，但不相同

函数的连续性、可微性、可 (偏) 导性和连续可导性等之间的关系与前述极限之间的的关系有着类似的问题.

多元函数连续性和可微性之间有如下关系:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{偏导数连续} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \text{可微} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{连续} \arrow[rr, Leftrightarrow, "/" marking] & & \text{偏导数存在}
\end{tikzcd}$$

有例子表明混合导数的次序不能随意交换，**混合导数的计算中，一个常用的保证求导可以交换次序的条件是：相应阶数的偏导数都是连续的**. 对于 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 和 $f_{yx}(x_0,y_0)$, 如果 $f_{xy}(x,y)$ 以及 $f_{xy}(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 连续, 就能够保证 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$. 但是对于 $f_{yxx}(x_0,y_0)$ 和 $f_{xxy}(x_0,y_0)$, 仅有 $f_{yxx}(x,y)$ 和 $f_{xxy}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的连续性并不能保证 $f_{yxx}(x_0,y_0)=f_{xxy}(x_0,y_0)$. 但如果所有的三阶偏导数都在 (x_0,y_0) 连续, 则一定有 $f_{yxx}(x_0,y_0)=f_{xxy}(x_0,y_0)$. 这就是为什么, 在计算高阶导数时候, 为了不过分考虑对求导次序的依赖性, 我们通常假设所有的同阶高阶导数都连续.

注 1.1.

(i) 在不同的教材中 $f_{xy}(x,y)$ 的意义 (包括 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$) 可能正好是相反的, 即: 在某些书上, $f_{xy}(x,y)$ 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$, 而在另外一些书上, $f_{xy}(x,y)$ 表示的却是 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

(ii) 符号 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{xy}(x,y)$ 都可用来表示 f 关于 x,y 的混合偏导, 大家可以择一使用. 但要注意, 不要一会儿用前者, 一会儿用后者, 更不要出

现诸如 $f'_{xy}(x,y)$ 这样带有撇但撇的个数与导数的次数不统一的情况.

例 1.6. 可微不能导致偏导数的连续性是与维数无关的问题. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在 0 点可微, 但偏导不连续.

例 1.7. 可偏导不能保证可微和连续是多维特有的情况, 设

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

则在 $(0,0)$ 点, f_x, f_y 为 0, 但函数不可微, 事实上也不连续.

隐函数存在定理、隐函数和反函数的求导 (尤其是相应的高阶导数) 是学习中的又一些难点. 但这部分内容在高等数学和数学分析课程的要求中并没有太大区别.

对于隐函数存在定理, 对于单个方程 $F(x,y)=0$ 的情形, 条件 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 其实是保证了 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近关于 y 的一种严格单调性. 另外, 我们需要注意的是理解隐函数存在定理是在 (x_0,y_0) 附近成立而不是指在 x_0 附近成立. 例如 $(0,1)$ 满足方程 $x^2+y^2=1$, 而 $F(x,y)\equiv x^2+y^2$ 满足 $F_y(0,1)\neq 0$. 隐函数存在定理断言 $x^2+y^2=1$ 在 $(x_0,y_0)=(0,1)$ 附近确定了一个隐函数 $y=y(x)$. 但是我们不能说 $x^2+y^2=1$ 在 $x_0=0$ 附近确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

在隐函数求导方面, 我们以下例作些简单的说明.

例 1.8. 设

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x+y+z+u=0\\ x^2+y^2+z^2+u^4=1.\end{cases}$$

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

对于上述问题, 具体的计算并不困难. 关键是要把什么是自变量, 什么是因变量搞清楚. 通常, 两个方程应该可以确定两个因变量, 这样留下的就是自变量.

从题意来看, 要计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 就意味着 x 是一个自变量, 而 z 是一个因变量. 而要计算 $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 又表明 y 是一另个因变量. 因而本题中 x,u 是自变量, y,z 是因变量.

这可以看作是在出题者没有明确指出哪些是自变量时候的一种约定俗成.

大家可以想象, 如果硬要说 x,y 是自变量, z,u 是因变量, 则

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

结论与原来视 x,u 为自变量的情形是完全不一样的. 这正是我们在这个例题中想要表明的, 对于一个方程和方程组, 对变量是否为自变量的不同理解会导致隐函数偏导计算结果的不同.

最后我们以多元函数极值的例子作为本节的结束.

例 1.9. 证明

$$f(x,y)=yx^y(1-x)<e^{-1},\quad 0<x<1,\, y>0.$$

证明.

I. **错误的证明.** 区域有四条边界

$$1.\, x=0,\quad 2.\, x=1,\quad 3.\, y=0,\, (0<x<1)$$

$$4.\, y=+\infty,\, (0<x<1).$$

考虑边界 $x=0$ 和 $x=1, y=0$ 在这三条边界上都有

$$f=0.$$

而在第四条边界上

$$f(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=0.$$

现在考虑驻点的情况

$$\begin{cases} f_x(x,y)=yx^{y-1}(y-xy-x)=0,\\ f_y(x,y)=x^y(1-x)(1+y\ln x).\end{cases}$$

从以上方程得出

$$\begin{cases} y(1-x)=x,\\ x^y=e^{-1}.\end{cases}$$

于是在这样的点上

$$f(x,y)=yx^y(1-x)=xe^{-1}<e^{-1}.$$

由于函数的最大值在边界点或驻点达到, 这就表明结论成立.
分析: 上面的证明过程有几个错误.

(i) 函数在边界点 $(0,0)$ 点是没有定义的, 所以 $f(0,0)$ 没有意义, 需要考虑极限

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(x,y).$$

幸运的是

$$0\le yx^y(1-x)=ye^{y\ln x}(1-x)\le y,$$

从而

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} yx^y(1-x)=0.$$

因而这一缺陷可以弥补.

(ii) 在第四条边界, 即无穷远处, "边界值"并不能如此计算, 我们应该计算

$$\lim_{\substack{y\to +\infty\\ 0<x<1}} f(x,y)$$

或

$$\overline{\lim_{\substack{y\to +\infty\\ 0<x<1}}} f(x,y).$$

事实上, 前者不存在, 而后者并不等于 0.

(iii) 为了把问题看得更清楚一点, 我们指出其实驻点方程

$$\begin{cases} y-xy-x=0,\\ 1+y\ln x=0. \end{cases}$$

是无解的. 否则如果 (x,y) 是驻点, 则由第一式得到 $x=\dfrac{y}{1+y}$, 从而代入第二式得到

$$\frac{1}{y}-\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)=0.$$

而这是不可能的. 这样, 如果前面解题的过程正确的话, 意味着函数在边界上为零, 又没有驻点, 从而函数应该小于等于零. 显然这是不对的.

下面我们给出一些正确的证明方法:

II. **法 I:** 由于

$$|f(x,y)|\le y,\qquad 0<x<1, y>0.$$

因而

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} f(x,y)=0.$$

这样,$f(x,y)$ 的定义域可以延拓到 $[0,1]\times[0,+\infty)$, 且在其上连续. 对于延拓后的这个函数, 我们仍用 f 表示. 此时

$$f(0,y)=0, f(x,0)=0, f(1,x)=0.$$

亦即在三条边界上,

$$f(x,y) < e^{-1}$$

成立. 如果 f 在内部点 (x,y) 取到最大值, 则

$$\begin{cases} f_x(x,y) = yx^{y-1}(y - xy - x) = 0, \\ f_y(x,y) = x^y(1-x)(1+y\ln x). \end{cases}$$

从以上方程得出

$$\begin{cases} y - xy - x = 0, \\ 1 + y\ln x = 0. \end{cases}$$

于是在这样的点上 (或者说明满足上述条件的点不存在)

$$f(x,y) = yx^y(1-x) = xe^{-1} < e^{-1}.$$

下面是关键的, 尽管我们容易得到

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

但是不能因此得到要证明的结论. 为了结束证明, 我们需要证明

$$\varlimsup_{\substack{y\to+\infty \\ 0<x<1}} f(x,y) \le e^{-1}.$$

亦即

$$\varlimsup_{y\to+\infty} \sup_{x\in(0,1)} f(x,y) \le e^{-1}.$$

注意到 (通过一元函数的求导就可以)

$$\sup_{x\in(0,1)} f(x,y) = \left(\frac{y}{y+1}\right)^{y+1},$$

我们有

$$\varlimsup_{y\to+\infty} \sup_{x\in(0,1)} f(x,y) = \varlimsup_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{y+1} = e^{-1}.$$

这样, 我们就真正证明了函数在边界上都小于等于 e^{-1}, 而驻点不存在 (或在可能的驻点上函数值也不大于 e^{-1}), 从而我们可得结论.
(**注:** 以上讨论首先表明的是函数值**小于等于**e^{-1}, **但是进一步可以说明**函数在所讨论的区域内不可能达到 e^{-1}).

III. **法 II: 其实, 本题只要简单地把问题看作一元函数的问题来讨论**. 固定 $y \in (0,+\infty)$, 考察 $f(x,y)$ 的最大值情况, 此时

$$f(0,y) = 0, f(1,y) = 0.$$

亦即在区域的边界上函数值为 0, 在 $(0,1)$ 内, 考虑可能的极值点 $\bar{x}$, 我们有

$$y\bar{x}^{y-1}(y - \bar{x}y - \bar{x}) = 0.$$

从而

$$\bar{x} = \frac{y}{y+1}.$$

在该点上,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, y) &= \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{y+1} \\ &= e^{(y+1)\ln(1-1/(y+1))} \\ &< e^{(y+1)[-1/(y+1)]} = e^{-1}. \end{aligned}$$

因而对于任何 $x \in (0,1)$,

$$f(x,y) \le \max(0, 0, f(\bar{x}, y)) = \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{y+1} < e^{-1}.$$

这就证明了结论.

如果最后一步使用常用不等式的方法想不到, 则需要采用以下过程并利用一元函数的极值问题来说明其中的第二式:

$$f(x,y) \le \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)^{y+1} < e^{-1}, \qquad \forall\, x \in (0,1),\, y > 0.$$

类似地, 我们也可以把问题先看作关于 y 的一元函数来讨论.

我们强调，多元函数的极值问题，有时候不妨看作一元函数的极值问题来对待。

IV. **法 III:** 下一个解法是通过变量代换来化简原不等式:

$$\begin{gathered} yx^y(1-x) < e^{-1}, \quad \forall\, 0 < x < 1,\, y > 0 \\ \Updownarrow \quad (t = x^y) \\ t \ln t \frac{1-x}{\ln x} < e^{-1}, \quad \forall\, 0 < x < 1,\, 0 < t < 1 \\ \Uparrow \\ 0 < -t\ln t \le e^{-1}, \quad 0 < \frac{1-x}{-\ln x} < 1, \quad \forall\, 0 < x < 1,\, 0 < t < 1. \end{gathered}$$

□

习题 6.1.

1. 证明定理 1.1
2. 给出一个使二重极限存在, 而相应的二次极限一个存在, 另一个不存在的例子.
3. 试举一例, 使函数的累次极限存在, 但所有方向极限不存在.

4. 当考虑方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

的隐函数存在定理时, 条件

$$\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0$$

表明什么?

5. 设

$$f(x,y)=xy-x\ln x+x-e^y, \qquad 1x\geq 1, y\geq 0.$$

证明

$$f(x,y)\leq 0, \qquad \forall\ x\geq 1, y\geq 0.$$

§2. 重积分、曲线曲面积分

这部分内容的要点是计算: 五大类积分的计算. 五类积分为重积分、第一类曲线积分、第二类曲线积分, 第一类曲面积分和第二类曲面积分. 从难度上来讲, 自然重积分的计算是最基本的, 也是最简单的. 但是, 由于后四类积分本身太过复杂, 因而对学生的要求不高. 从教学要求上, 反倒只有重积分部分是真正具有难度的. 然而, 通常许多同学仍然感到曲线、曲面积分挺难. 其实这一方面是被吓的, 另一方面是因为没有好好地总结、整理和比较这四种积分.

在学习曲线、曲面积分中有一个非常明显的相象就是一开始学习某一类积分时, 感到概念很清楚、计算也很简单, 但是一旦几种积分都学了, 反而感觉糊里糊涂 (或者平时没有感觉到，一到真正用时就糊涂). 这固然说明很多同学自以为学得不错, 但事实上没有学得很扎实. 另一方面也说明了总结整理在本章的特别重要性. 因此, 本节将着重对这些积分作一些总结.

重积分. 意义: 质量、体积、面积等. 重积分的计算主要是二重积分和三重积分的计算. 尽管本质上没有什么区别, 但自然三重积分要复杂一些.

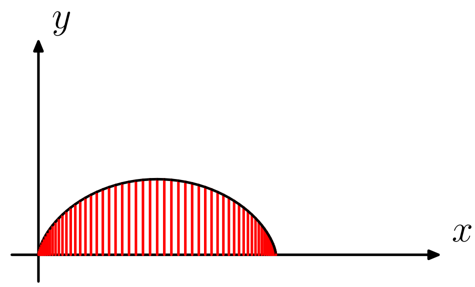
在计算中, 无论是在直角坐标下的计算, 还是通过变量代换计算, 难点是确定积分限. 而对于应该先对谁积分 (直角坐标下的计算) 和应该采用什么样的变换, 宜优先考虑被积函数的情况, 然后考虑区域的情况.

以下是一些计算重积分的例子.

例 2.1. 计算 $\iint\limits_D y dxdy$, 其中 D 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $(0\leq t\leq 2\pi)$ 与 x 轴所围区域.

解. 先画出区域的草图. 我们可以看到 $x(t)$ 是单调增加的, $y(t)$ 是非负

的. 区域是一个 $X-$ 型区域. 因而宜先对 y 积分.



设摆线方程为 $y=Y(x)$. 注意到 x 的变化范围是 0 到 $2\pi a$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D ydxdy\\
=&\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{Y(x)}y\ dy=\int_0^{2\pi a}\frac{1}{2}Y^2(x)\ dx\\
=&\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}y^2(t)x'(t)\ dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^3(1-\cos t)^3\ dt\\
=&\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^3\Big[(1-\cos t)^3+(1+\cos t)^3\Big]\ dt\\
=&\int_0^{\pi}a^3(1+3\cos^2 t)\ dt=\frac{5\pi}{2}a^3.
\end{aligned}$$

例 2.2. 计算 $\iiint\limits_\Omega xdxdydz$, 其中 Ω 由坐标面和 $x+2y+z=1$ 围成.

解. 积分区域比较简单, 可以用各种方法计算. 一般说来, 被积函数含有 x, 我们应该尽量后对 x 积分. 但是, 这里其实对 x 先积分更加方便.

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_\Omega xdxdydz\\
=&\int_0^1 dz\int_0^{\frac{1-z}{2}}dy\int_0^{1-2y-z}xdx\\
=&\int_0^1 dz\int_0^{\frac{1-z}{2}}\frac{1}{2}(1-2y-z)^2dy\\
=&\int_0^1 dz\int_0^{\frac{1-z}{2}}\frac{1}{12}(1-z)^3dy=\frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

注意计算过程中不要展开被积项.

利用坐标变换计算重积分要注意以下几点：1. 选择适当的坐标变换. 坐标变换的选择首先要看被积函数, 其次看区域形状; 2. 要把握如何确定变换后的区域是什么; 3. 能够事先化简的要注意先化简. 这里的难点在变换后区域的确定. 需要注意的变换有以下几类: 1. 极坐标变换、柱面坐标变换; 2. 球面

坐标变换, 3. 广义极坐标变换、广义柱面坐标变换、广义球面坐标变换以及其他简单的容易想到的变换. 这里要注意的是 1. 前三大类变换的形式、Jacobi 行列式以及变换本身附带的对新变量的限制条件必须记住; 2. 一般变换下的 Jacobi 行列式是哪一个要清楚, $|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}|$ 与 $|\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}|$ 之间恰好成倒数关系.

例 2.3. 计算 $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$, D 为 $x^2+y^2=x+y$ 所围区域.

解. 法 I. 易见本题可以采用极坐标变换.

原区域为

$$x^2+y^2 \le x+y.$$

极坐标变换为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

附带的限制是

$$\begin{cases} r \ge 0, \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

这样变换后的区域为

$$\begin{cases} r^2 \le r(\cos\theta+\sin\theta), & \text{来自于原区域的限制条件} \\ r \ge 0, & \text{来自于变量代换附带的限制条件} \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

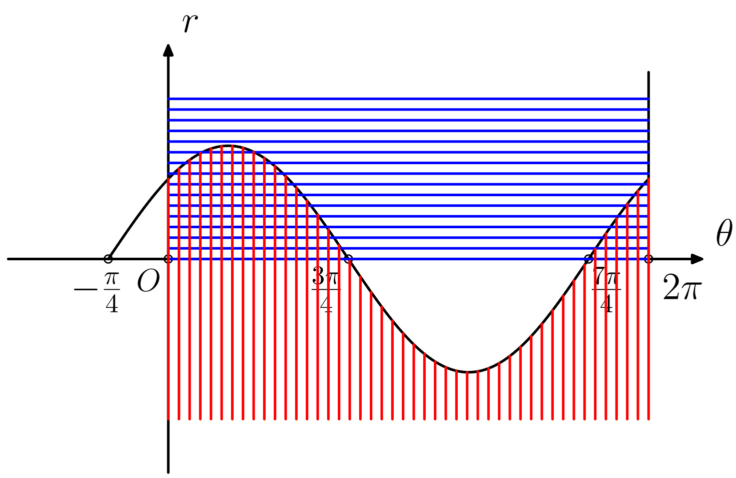
即

$$\begin{cases} r \le \sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4}), \\ r \ge 0, \\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

需要注意原积分并不等于

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r(\cos\theta+\sin\theta)\cdot r\,dr.$$

通常, 应该通过画一个草图, 来看出新变量真正的取值范围:



从图中可以看到新的积分区域为红色阴影区域和蓝色阴影区域相交部分, 即

$$\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}), \\ \theta \in [0, \frac{3\pi}{4}] \cup [2\pi-\frac{\pi}{4}, 2\pi]. \end{cases}$$

由于 θ 在 $[2\pi-\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ 这一段可以看作与 θ 在 $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ 的那一段是一样的, 所以新区域又可以写成

$$\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}), \\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

如果你未卜先知, 可一开始就将变量代换中 θ 的范围定为 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ 或 $[-\pi, \pi]$.

于是

$$\begin{aligned} & \iint\limits_D (x+y)\,dxdy \\ = & \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int^{\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)} \sqrt{2}\, r^2 \sin(\theta+\pi/4)\,dr \\ = & \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{4}{3}\sin^4(\theta+\pi/4)d\theta \\ = & \int_0^{\pi} \frac{4}{3}\sin^4\theta d\theta \\ = & \int_0^{\pi} \frac{1}{3}(1-\cos 2\theta)^2 d\theta \\ = & \int_0^{\pi} \frac{1}{3}(1-2\cos 2\theta+\frac{1-\cos 4\theta}{2})d\theta \\ = & \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

或

$$
\begin{aligned}
& \iint\limits_D (x+y)\,dxdy \\
= & \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{-\pi/4+\arcsin\frac{r}{\sqrt{2}}}^{3\pi/4-\arcsin\frac{r}{\sqrt{2}}} \sqrt{2}\, r^2 \sin(\theta+\pi/4)\,d\theta \\
= & \int_0^{\sqrt{2}} 2r^2\sqrt{2-r^2}\,dr \\
= & \int_0^1 8t^2\sqrt{1-t^2}dt \\
= & \int_0^{\pi/2} 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi \\
= & \int_0^{\pi/2} (1-\cos 4\varphi)\,d\varphi \\
= & \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

法 II. 单单从如何解题来看, 上面的方法不是好方法. 以下是比较简便的方法:

$$
\begin{aligned}
& \iint\limits_D \ (x+y)\ dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le x+y} (x+y)\ dxdy \\
= & \iint\limits_{(x-\frac12)^2+(y-\frac12)^2\le\frac12} \left[(x-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{2})+1\right]\,dxdy \\
= & \iint\limits_{u^2+v^2\le\frac12} (u+v+1)\ dudv = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

注意这里 $\iint\limits_{u^2+v^2\le\frac12} u\ dudv = 0$ 是很明显的. 而 $\iint\limits_{u^2+v^2\le\frac12} dudv$ 则是圆的面积.

上面这种计算方法利用了被积函数、积分区域的对称性. 这不仅在定积分、重积分中有用, 在曲线曲面积分中也非常有用.

例 2.4. 比较定积分的变量代换与重积分的变量代换.

考虑

$$\int_{-1}^2 f(x)dx$$

如果作变换 $x=-t$, 则按原先定积分的变换方式, 我们写

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_1^{-2} f(-t)\times(-1)\,dt.$$

而按照重积分变量代换中的观点, 我们也可以如此看: 变换后新的区域是 $[-2,1]$, 而 Jacobi 行列式为 -1, 其绝对值为 1, 从而

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(-t) \times \big|-1\big| dt.$$

例 2.5. 求三页玫瑰线 $(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$ 所围图形 D 的面积.

解. 首先需要搞清楚区域 D 是由怎样的不等式确定的. 这里关键是确定不等号的方向. 一般地, 我们可以通过验证无穷远处对应的是大于号还是小于号来确定:

$$D: (x^2+y^2)^2 \le a(x^3-3xy^2).$$

由于上式左端是 4 次方, 右端是 3 次方, 可以看到无穷远处确实在上述不等式确定的区域外. 令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r \ge 0,\ \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

则新区域为 (原区域 D 为 $(x^2+y^2)^2 \le a(x^3-3xy^2)$)

$$\begin{cases} r^4 \le ar^3(\cos^3\theta - 3\cos\theta\ \sin^2\theta) \\ r \ge 0,\ \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} r \le a\cos\theta\ (4\cos^2\theta - 3), \\ r \ge 0,\ \theta \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

注意到

$$\cos\theta\ (4\cos^2\theta - 3) = \cos\theta\ (2\cos\theta - \sqrt{3})\ (2\cos\theta + \sqrt{3}).$$

上式非负当且仅当

$$\cos\theta \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0] \cup [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1].$$

因而新的区域是

$$\begin{cases} \theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}] \cup [-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}], \\ \\ 0 \le r \le a\cos\theta(4\cos^2\theta - 3). \end{cases}$$

这里, 我们又将 θ 在某一部分的值变化了 2π. 于是

$$S \quad = \quad \iint\limits_{D} dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\bigcup[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]\bigcup[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}]} d\theta \int_0^{a\cos\theta(4\cos^2\theta-3)} r\ dr \\
&= \int_{[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\bigcup[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]\bigcup[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}]} \frac{1}{2}a^2\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2 d\theta.
\end{aligned}
$$

由于

$$\cos^2\theta\ (4\cos^2\theta-3)^2 = \frac{1}{2}(\cos 6\theta+1).$$

我们可得

$$S = \frac{a^2}{4}\times 3\times\frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

注意: 应该自然地看到 $\cos 6\theta$ 在长为 $\frac{\pi}{3}$ 的区间上积分为零, 而不是具体计算出来后才看到这一点.

例 2.6. 求曲线 $\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^4 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(h,k,a,b>0)$ 在第一象限与坐标轴所围区域 D 的面积.

解. 同样, 这里首先需要搞清楚区域 D 是由怎样的不等式确定的. 我们有:

$$D:\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^4 \le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\quad x\ge 0, y\ge 0.$$

令

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = ar\sin\theta, \\ r\ge 0, \theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

则新区域为

$$\begin{cases} r^2\left(\frac{a}{h}\cos\theta+\frac{b}{k}\sin\theta\right)^4 \le 1, \\ ar\cos\theta\ge 0,\quad ar\sin\theta\ge 0, \\ \theta\in[0,2\pi],\ r\ge 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 0\le r\le \left(\frac{a}{h}\cos\theta+\frac{b}{k}\sin\theta\right)^{-2}, \\ \theta\in[0,\pi/2]. \end{cases}$$

于是 (易见变换的 Jacobi 行列式为 abr),

$$
\begin{aligned}
S &= \iint\limits_D dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{(\frac{a}{h}\cos\theta+\frac{b}{k}\sin\theta)^{-2}} abr\ dr \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}ab\left(\frac{a}{h}\cos\theta+\frac{b}{k}\sin\theta\right)^{-4} d\theta.
\end{aligned}
$$

记

$$A=\frac{a}{h},\ B=\frac{b}{k},\ C=\sqrt{A^2+B^2},\ \alpha=\arccos\frac{A}{C},$$

则

$$\cos\alpha = \frac{A}{C},\ \ \tan\alpha = \frac{B}{A},\ \ \cot\alpha = \frac{A}{B}.$$

而

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi/2} \frac{ab}{2C^4\cos^4(\theta-\alpha)}\ d\theta \\
&= \int_{-\alpha}^{\pi/2-\alpha} \frac{ab}{2C^4\cos^4 t}\ dt \\
&= \int_{-\tan\alpha}^{\cot\alpha} \frac{ab}{2C^4}(s^2+1)\ ds \\
&= \frac{ab}{4C^4}\Big(\frac{\cot^3\alpha}{3} + \frac{\tan^3\alpha}{3} + \cot\alpha + \tan\alpha\Big) \\
&= \frac{ab}{4(A^2+B^2)^2}\Big(\frac{A^3}{3B^3} + \frac{3B^3}{A^3} + \frac{A}{B} + \frac{B}{A}\Big) \\
&= \frac{abh^4k^4}{4(a^2k^2+b^2h^2)^2}\Big(\frac{a^3k^3}{3b^3h^3} + \frac{3b^3h^3}{3a^3k^3} + \frac{ak}{bh} + \frac{bh}{ak}\Big).
\end{aligned}$$

例 2.7. 已知球体 $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$, 在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方, 求球体的质量与重心.

解. 球体质量为

$$\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2Rz} (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz \\
&= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} (x^2+y^2+(z+R)^2)\ dxdydz \\
&= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} (x^2+y^2+z^2+R^2)\ dxdydz \\
&= 2\pi\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R (r^2+R^2)\ r^2\sin\varphi\ dr = \frac{32\pi R^5}{15}.
\end{aligned}$$

物体的重心坐标其实就是物体各点坐标分量的加权平均值. 我们有: 重心的横坐标为

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2Rz} x(x^2+y^2+z^2)\ dxdydz \\
&= 0. \qquad\qquad \text{(利用对称性)}
\end{aligned}$$

同理, 重心的纵坐标为 $\bar{y}=0$. 最后,

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2Rz} z(x^2+y^2+z^2)\ dxdydz \\
&= \frac{1}{M} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} (z+R)\ \left[x^2+y^2+(z+R)^2\right]\ dxdydz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{M} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \left[2z^2 + R\,(x^2+y^2+z^2+R^2)\right] dxdydz \\
&= \frac{1}{M} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)\, dxdydz \\
&\quad + \frac{1}{M} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} R\,(x^2+y^2+z^2+R^2)\; dxdydz \\
&= \frac{5R}{4}.
\end{aligned}
$$

注: 预先应该可以估计出 $\bar{z}$ 在 $(R, 2R)$ 内. 对于这种容易发生计算错误的问题, 预先的估计是必要的.

积分次序的交换 重积分积分次序的交换、特别是三次积分积分次序的交换是一个比较困难的问题. 原因在于往往我们的空间想像能力不够. 但是一般说来, 二次积分的交换是比较简单的, 应该可以准确地把握. 三次积分交换次序一个没有办法的办法是通过二次积分交换次序来解决.

例 2.8. 在下列积分中改变累次积分的次序:

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$,

(ii) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$,

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$.

解.

(i)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy \\
= &\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\; dx \\
&-\int_{-1}^0 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\; dx;
\end{aligned}
$$

注意: π 到 2π 之间的这块区域是“负”的; y 在 $(-1,0)$ 内变化时, $\arcsin y$ 是负的.

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)\; dz \\
= &\int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x,y,z)\; dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\ dy \\
&= \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y,z)\ dy \\
&\quad + \int_0^1 dz \int_0^x dx \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\ dy.
\end{aligned}
$$

其他三种类型可以通过互换 x, y 得到. 这里第一个等式进行第一次交换, x 视为固定, 而 y, z 交换积分次序. 第二个等式进行第二次交换, y 视为固定, 而 x, z 交换积分次序.

(iii)

$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\ dz \\
= & \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\ dy \\
= & \int_0^1 dz \int_{-z}^z dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\ dy.
\end{aligned}
$$

其他三种类型可以通过互换 x, y 得到.

曲线曲面积分 数学分析课程对曲线曲面积分部分内容的要求基本上以计算为主. 在本书中我们对此没有多少特别的内容要补充或强调. 把握这部分内容需要对各类积分多比较.

以下总是假设涉及到的区域是足够光滑的.

Green 公式自然可以看作 Stokes 公式的特例, 而将 Green 公式用第一型曲线积分的形式写出则也可以看成是 Ostrogradskiy-Gauss 公式的特例:

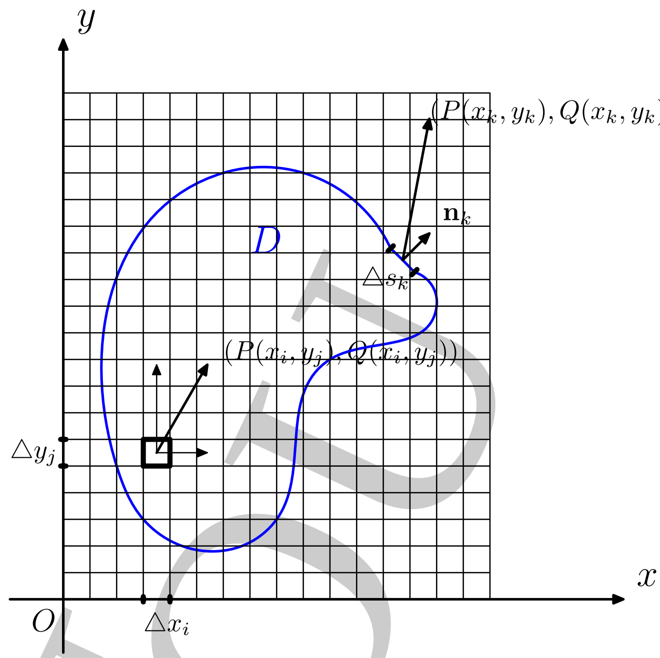
$$
\begin{aligned}
& \int_{\partial D} (P, Q) \cdot \mathbf{n}\, ds \\
= & \int_{\partial D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta) ds \\
= & \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 表示区域 D 的的边界曲线 ∂D 的单位外法向量, 这与 Ostrogradskiy-Gauss 公式

$$
\begin{aligned}
& \iint\limits_{\partial\Omega} (P, Q, R) \cdot \mathbf{n}\, dS \\
= & \iint\limits_{\partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS \\
= & \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz
\end{aligned}
$$

是一致的, 其中 $\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 表示区域 Ω 的的边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 这时 Ostrogradskiy-Gauss 公式 (或 Green 公式) 的物理意义是一个封闭区域 Ω(或 D) 中各点流速为 (P,Q,R)(或 (P,Q)) 的不可压缩流体单位时间内流出区域 Ω(或 D) 的流量的两种不同算法结果相同.

以 Green 公式为例, 考虑一种不可压缩的 "平面流体"(例如没有上下流动的流体), 假设其在每一点的流速是 $(P(x,y),Q(x,y))$.



Green 公式物理意义示意图

则将区域 D 分成很多小的矩形区域后, 流体在单位时间内流出每个小矩形的流量约为

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_i,y_j)\triangle x_i\triangle y_j+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_i,y_j)\triangle x_i\triangle y_j,$$

上面第一项表示沿 x 轴方向流出的量, 第二项为沿 y 轴方向流出的量. 从而单位时间内流出区域 D 的总流量约为

$$\sum_{i,j}\Big(\frac{\partial P}{\partial x}(x_i,y_j)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_i,y_j)\Big)\triangle x_i\triangle y_j,$$

其极限即为单位时间内流出区域 D 的总流量

$$\iint\limits_D\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\,dxdy.$$

另一方面, 由于流体不可压缩, 单位时间流出区域 D 的流量就是单位时间内通过区域 D 边界流出到 D 外的量, 在边界的一个小段 $\triangle s_k$ 上, 单位时间内

流过该小段边界的流量约为

$$\big(P(x_k,y_k),Q(x_k,y_k)\big)\cdot\mathbf{n}_k\triangle s_k,$$

从而总流量约为

$$\sum_k\big(P(x_k,y_k),Q(x_k,y_k)\big)\cdot\mathbf{n}_k\triangle s_k,$$

其极限为

$$\iint\limits_{\partial D}(P,Q)\cdot\mathbf{n}\,ds.$$

这样, 从物理意义上, 可以看到

$$\int_{\partial D}(P,Q)\cdot\mathbf{n}\,ds=\iint\limits_D\big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\big)\,dxdy.$$

利用外微分可以将 Green 公式、Ostrogradskiy - Gauss 公式、Stokes 公式以及 Newton - Leibniz 公式表述为区域上的积分和边界上积分的一个统一的关系式:

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_\Omega d\omega. \tag{2.1}$$

对此, 我们不准备在此展开讨论, 有兴趣的读者可以参看有关流形上的微积分的内容.

利用 Green 公式和 Ostrogradskiy-Gauss 公式可以得到二维和三维情形的分部积分公式. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上的连续可微函数. 则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\partial\Omega}f(x,y,z)g(x,y.z)\cos\alpha\,dS\\=&\iiint\limits_\Omega\big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\big)dxdydz.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_\Omega\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz\\=&-\iiint\limits_\Omega\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz\\&+\iint\limits_{\partial\Omega}f(x,y,z)g(x,y.z)\cos\alpha\,dS.\end{aligned}$$

特别当 f 或 g 在 Ω 的边界上为零时, 有

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_\Omega\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz\\=&-\iiint\limits_\Omega\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz.\end{aligned}$$

在公式记忆方面, Stokes 公式比较难于记忆, 通常采用 (2.1) 或以下的行列式来记忆:

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint\limits_D \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint\limits_D \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

但是这些记忆方法不适合按行立即写出该公式. 下面我们介绍一种 "倒写法":

首先, 我们要注意曲线积分的各项的正常次序是 "dx, dy, dz", 而第二型曲面积分的正常次序是 "$dydz, dzdx, dxdy$". 对于

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz$$

我们先写

$$\iint\limits_\Sigma \Big(\qquad\Big)dydz + \Big(\qquad\Big)dzdx + \Big(\qquad\Big)dxdy.$$

我们知道括号里面是两个偏导数的差, 求导时变量的次序恰好与后面积分元中变量的次序是一致的, 于是再填入:

$$\iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)dxdy.$$

最后需要填入 P, Q, R, 这只要倒着写两次 PQR—"R, Q, P, R, Q, P":

$$\iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

我们以两个例题结束本节:

例 2.9. 证明 Poisson 公式:

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,ds = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\,du.$$

证明. 如果 $a = b = c = 0$, 则结论成立. 以下设 a, b, c 不全为零.

则可以做坐标旋转 (以及翻转) 变换 (正交变换), 使新的坐标系 $Ouvw$ 满足

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

例如当 $a\neq 0$ 时, 可以令

$$\begin{cases} u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ v=\dfrac{-bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ w=\dfrac{cax+cby-(a^2+b^2)z}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}. \end{cases}$$

由于正交变换不改变面积元, 从而

$$\begin{aligned} & \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,ds \\ = & \iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\,ds \\ = & \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\,\sin\varphi\,d\varphi \\ = & \ 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\,du, \end{aligned}$$

这里在化曲面积分为二重积分时, 我们用了球面坐标变换,

$$\begin{cases} v=\cos\theta\sin\varphi, \\ w=\sin\theta\sin\varphi, \qquad \theta\in[0,2\pi],\varphi\in[0,\pi], \\ u=\cos\varphi, \end{cases}$$

此时,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left|\frac{d(u,v,w)}{d\theta}\right|^2\left|\frac{d(u,v,w)}{d\varphi}\right|^2-\left|\frac{d(u,v,w)}{d\theta}\cdot\frac{d(u,v,w)}{d\varphi}\right|^2} \\ = & \ \sin\varphi, \end{aligned}$$

从而

$$dS=\sin\varphi\,d\theta d\varphi.$$

□

例 2.10. 利用 Ostrogradskiy-Gauss 公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ds}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0)$.

解. 椭球面 Σ 在点 (x,y,z) 的外法向量为

$$\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right).$$

从而单位外法向量为

$$\frac{\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

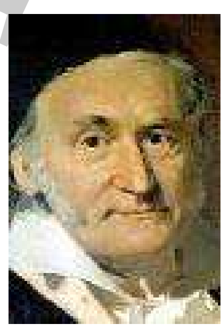
我们有

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}\frac{ds}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\\
=\ &\iint\limits_{\Sigma}\frac{ds}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{x\cdot\frac{x}{a^2}+y\cdot\frac{y}{b^2}+y\cdot\frac{z^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\\
=\ &\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

利用 Ostrogradskiy-Gauss 公式不难得到

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
=\ &\iint\limits_{S^2}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
=\ &\iint\limits_{S^2}x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy\\
=\ &\iiint\limits_{B_1}3\,dxdydz=4\pi,
\end{aligned}$$

其中 S^2, B_1 分别表示 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面和球体.



德国数学家 Gauss, Carl Friedrich (1777.4.30—1855.2.23)

英国数学家 Green, George (1793.7—1841.3.31)

俄国数学家 Ostrogradskiy, Michail Vasilevich (1801.9.24—1862.1.1)

法国数学家 Poisson, Simón Denis (1781.6.21—1840.4.25)

英国数学家 Stokes, George Gabriel (1819.8.13—1903.2.1)

习题 6.2.

1. 计算
$$\iiint\limits_{4x^2+9y^2+16z^2\le 4x+18y+16z}(4x^2+9y^2+16z^2)\,dxdydz.$$

2. 求均匀薄片 $\begin{cases} x^2+y^2\le a^2, \\ z=0 \end{cases}$ 对 z 轴上一点 $(0,0,c)$ $(c>0)$ 处的单位质量的质点的引力, 并思考为什么当 $c=0$ 时, 引力为零, 而当 $c\to 0^+$ 时, 引力的极限不为零.

第七章　广义积分和含参变量积分

§1. 广义积分

通常的 Riemann 积分, 即常义积分只对有界区间上的有界函数来定义. 也就是说常义积分的积分区域和被积函数都是有界的. 所谓广义积分就是在缺乏两个有界性时所考虑的积分. 积分区域无限的广义积分称为无穷积分, 而被积函数无界的广义积分称为瑕积分. 若被积函数在积分区域的某一点附近无界, 该点就称为瑕点. 自然广义积分也包括既是无穷积分又是瑕积分的混合型.

定义 1.1. 我们定义广义积分的收敛性如下.

(i) 设对任何 $A \in (a, +\infty)$, $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上有界. 如果

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\, dx = B,$$

则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ 收敛 (到 B), 也称 $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ 存在.

(ii) 设对任何 $\alpha \in (a, b)$, $f(x)$ 在 $[\alpha, b]$ 上有界. 如果

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\, dx = B,$$

则称 $\int_a^b f(x)\, dx$ 收敛 (到 B), 也称 $\int_a^b f(x)\, dx$ 存在.

(iii) 设对任何 $A, B \in (a, +\infty)$ $(A < B)$, $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上有界. 任取 $c \in (a, +\infty)$, 如果

$$\int_c^{+\infty} f(x)\, dx,$$

和

$$\int_a^c f(x)\, dx$$

均收敛, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ 收敛 (存在). 此时, 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

的值为

$$\int_c^{+\infty} f(x)\, dx + \int_a^c f(x)\, dx.$$

广义积分可以与数项级数相类比, 而含参变量的广义积分则可以与函数项级数相类比. 某种程度上, 它们的理论是等价的. 但是, 具体来说, 有关广义积分的论述还是会有与无穷级数有一些不同.

同级数一样, 广义积分的收敛性以及含参变量积分的一致收敛性都是重要的问题. 结果也是类似的.

以无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 为例, 被积函数 f 非负的积分相当于正项级数, 其收敛性等价于部分积分 $\int_a^A f(x)\,dx$ 的有界性. 在被积函数符号不定时, 通常应先判断其是否绝对收敛, 即 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 是否收敛. 然后, 对于非绝对收敛的积分, 常用 Cauchy 收敛准则, Abel 判别法和 Dirichlet 判别法来判断积分是否收敛.

在级数中 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法的证明依赖于相当于分部积分的 Abel 变换. 因而本质上, 广义积分的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法应该可以用分部积分法加以证明.

定理 1.2. *考虑无穷积分 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$. 设积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 的部分积分 $\int_a^A f(x)\,dx$ 有界, 函数 $g(x)$ 单调有界.*

(i) **(Abel 判别法)** *如果 $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.*

(ii) **(Dirichlet 判别法)** *如果函数 $g(x)$ 到 0, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.*

证明. 如果 $g(x)$ 连续可导, 则 $g'(x)$ 保号, 此时记

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

则由假设, 有 $M > 0$ 使得

$$|F(x)| \le M, \qquad \forall\ x \ge a.$$

利用分部积分法,

$$\begin{aligned} & \int_a^A f(x)g(x)\,dx \\ = \ & g(A)F(A) - \int_a^A g'(x)F(x)\,dx. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_a^{\infty} |g'(x)|\,dx = \Big|\int_a^{\infty} g'(x)\,dx\Big| \\ = \ & |g(a+) - g(+\infty)|, \end{aligned}$$

以及

$$|g'(x)F(x)| \le M|g'(x)|,$$

所以当 $A \to +\infty$ 时,

$$\int_a^A g'(x)F(x)\,dx$$

收敛. 另一方面, 无论是 $g(A)$ 单调趋于零或 $F(A)$ 收敛, 在定理条件下, 均保证了 $g(A)F(A)$ 收敛. 从而, 在 (i), (ii) 中都可得到

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

收敛.

上面的证明是在 $g(x)$ 连续可导的假设下得到的. 它事实上表明通常对于广义积分, 我们可以避开直接运用 Abel 判别法或 Dirichlet 判别法, 而用分部积分法讨论其收敛性.

一般情形的证明可以利用对 $g(x)$ 作光滑逼近后运用分部积分来证明. 通常分析教材中, Abel 判别法或 Dirichlet 判别法的证明都基于积分第二中值定理. 而我们在前面的章节已经看到积分第二中值定理可看作是光滑逼近加分部积分的产物. 所以利用光滑逼近加分部积分证明本定理与利用积分第二中值定理证明本质上是一致的. 在此不再赘述. □

以下是一些判断广义积分收敛性和计算广义积分的例子.

例 1.1. 设 $f(x)>0$, 单调下降, 且 $f(a)$ 有限. 试证无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$ 同时收敛或同时发散.

证明. 若

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛, 则显然有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$$

收敛. 余下部分我们给出两种证明方法.

设

$$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$$

收敛.

法 I. 由于 $f(x)>0$, 我们只需要证明

$$\int_a^A f(x)\,dx$$

有界. 为此, 只要证明

$$\int_{m\pi}^{k\pi} f(x)\,dx$$

关于 $k \geq m$ 有界, 其中 m 是满足 $m\pi \geq a$ 的一个整数. 我们有

$$\begin{aligned}
\int_{m\pi}^{k\pi} f(x)\,dx &= \sum_{j=m}^{k-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} f(x)\,dx \\
&\leq \sum_{j=m}^{k-1} \Big(\int_{(j+\frac{1}{4})\pi}^{(j+\frac{3}{4})\pi} f(x)\,dx + \int_{(j+\frac{5}{4})\pi}^{(j+\frac{7}{4})\pi} f(x)\,dx \Big) \\
&\leq 2\sum_{j=m}^{k+1} \int_{(j+\frac{1}{4})\pi}^{(j+\frac{3}{4})\pi} f(x)\,dx \\
&\leq 4\sum_{j=m}^{k+1} \int_{(j+\frac{1}{4})\pi}^{(j+\frac{3}{4})\pi} f(x)\sin^2 x\,dx \\
&\leq 4\int_{(m+\frac{1}{4})\pi}^{(k+\frac{7}{4})\pi} f(x)\sin^2 x\,dx.
\end{aligned}$$

从而由 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$ 的收敛性得到要证的有界性, 并得到 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 的收敛性.

法 II. 由于 $f(x)$ 单调有界, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$. 则容易证明 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$ 均发散到无穷大.

以下设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 我们有

$$f(x)\sin^2 x = \frac{f(x)}{2} - \frac{f(x)\cos 2x}{2}. \tag{1.1}$$

由假设, $f(x)$ 单调有界并趋于 0, 而积分

$$\int_a^A \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2A - \sin 2a}{2}$$

关于 $A \geq a$ 一致有界, 从而由 Dirichlet 判别法,

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)\cos 2x}{2}\,dx$$

收敛. 于是由 (1.1), 可知

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛当且仅当

$$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,dx$$

收敛. $\square$

例 1.2. 讨论积分 $\int_0^{+\infty} e^{\sin x}\sin(\sin x)\,\frac{dx}{x}$ 的敛散性.

解. 首先本题的积分可能的瑕点是 0 点, 但注意到 0 点是

$$e^{\sin x}\frac{\sin(\sin x)}{x}$$

的可去间断点, 因此本题中的积分仅仅是一个无穷积分.

考虑其部分积分

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2n\pi} e^{\sin x}\sin(\sin x)\,\frac{dx}{x}\\
=\ &\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{\sin x}\sin(\sin x)\,\frac{dx}{x}\\
=\ &\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin(\sin x)\,\frac{dx}{2k\pi+x}\\
&-\int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin(\sin x)\,\frac{dx}{2k\pi+\pi+x}\Big)\\
=\ &\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(e^{\sin x}-e^{-\sin x}\right)\sin(\sin x)\,\frac{dx}{2k\pi+x}\\
&-\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} e^{-\sin x}\sin(\sin x)\,\frac{\pi dx}{(2k\pi+x)(2k\pi+\pi+x)}.
\end{aligned}$$

易见, 当 n 趋于无穷时, 上式两个和式中第一式发散, 第二式收敛, 从而部分积分发散, 即原无穷积分发散.

例 1.3. 讨论积分 $\int_\pi^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 的敛散性.

解. 本题中的积分既是瑕积分又是无穷积分. 进一步, 这里的瑕点有无穷多个: $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. 严格地讲, 这种积分的收敛性定义在一般的教材中没有定义. 对于任何有限的 $A>\pi$, 积分 $\int_\pi^{A}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 是一个含有有限个瑕点的瑕积分. 因而不难定义广义积分 $\int_\pi^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 收敛当且仅当对每个 $A>0$, 瑕积分 $\int_\pi^{A}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_\pi^{A}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 存在.

由于在瑕点 $k\pi$ $(k\neq 0)$ 附近, 被积函数 $\frac{1}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 与 $|x-k\pi|^{-\frac{2}{3}}$ 同阶, 因而由比较判别法立即可得对于任何 $A>\pi$, 瑕积分 $\int_\pi^{A}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 是收敛的.

另一方面, 由于当 $k\to+\infty$ 时, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 与 k^{-p} 同阶, 因而

$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 收敛当且仅当 $p>1$. 注意到被积函数 $\frac{1}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 非负, 因而当且仅当 $p>1$ 时, $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 收敛.

例 1.4. 利用分部积分证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x}$ 收敛.

证明. 由于惟一可能的瑕点 0 点是 $\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 因而本题中的积分仅仅是无穷积分. 考虑

$$\int_1^A\frac{\sin x\,dx}{x}.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_1^A\frac{\sin x\,dx}{x}\\ =\;&\frac{\cos x}{x}\Big|_A^1-\int_1^A\frac{\cos x}{x^2}\,dx\\ =\;&\cos 1-\frac{\cos A}{A}-\int_1^A\frac{\cos x}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

于是由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ 收敛, 可得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x}$ 收敛. □

例 1.5. 设 $A,B>0$ 为常数, 证明:

$$\int_0^{+\infty}f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx=\frac{1}{A}\int_0^{+\infty}f(x^2)\,dx. \tag{1.2}$$

证明. 首先, 本题要证的是如果

$$\int_0^{+\infty}f(x^2)\,dx$$

收敛, 则

$$\int_0^{+\infty}f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx$$

也收敛, 且等式 (1.2) 成立.

以下设

$$\int_0^{+\infty}f(x^2)\,dx$$

收敛. 由于 $Ax-\frac{B}{x}$ 严格单调, 我们可以作变量代换

$$t=Ax-\frac{B}{x},\qquad x>0.$$

即

$$Ax^2 - tx - B = 0, \qquad x > 0.$$

从而

$$x = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4AB}}{2A}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

请读者思考这里为什么不是

$$x = \frac{t - \sqrt{t^2 + 4AB}}{2A}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

我们有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2)\, \frac{1 + \frac{2t}{\sqrt{t^2+4AB}}}{2A}\, dt \\
= & \frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2)\, dt + \frac{1}{2A}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2) \frac{2t}{\sqrt{t^2+4AB}}\, dt \\
= & \frac{1}{A}\int_0^{+\infty} f(x^2)\, dx,
\end{aligned}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2) \frac{2t}{\sqrt{t^2+4AB}}\, dt$$

的收敛性由

$$\int_0^{+\infty} f(t^2)\, dt$$

的收敛性和

$$\frac{2t}{\sqrt{t^2+4AB}}$$

的单调有界性并利用 Abel 判别法得到. □

例 1.6. 设 $f(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ 及 $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ 存在, 且对任何 $0 < \varepsilon < A < +\infty$, $\displaystyle\int_\varepsilon^A \frac{f(x)}{x}\, dx$ 存在, 试求 Frullani 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx,$$

其中 $a, b > 0$ 为常数.

解. 不妨设 $a > b$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ A\to+\infty}} \int_\varepsilon^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ A\to+\infty}} \Big(\int_\varepsilon^A \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^A \frac{f(bx)}{x}\,dx\Big) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ A\to+\infty}} \Big(\int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx\Big) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ A\to+\infty}} \Big(\int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx\Big).
\end{aligned}
$$

注意到对于 $B>0$,

$$
\inf_{x\in[aB,bB]} f(x)\,\ln\frac{a}{b} \le \int_{bB}^{aB} f(x)\,\frac{f(x)}{x}\,dx \le \sup_{x\in[aB,bB]} \ln\frac{a}{b},
$$

我们有

$$
\lim_{A\to+\infty}\int_{bA}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,dx = f(+\infty)\ln\frac{a}{b},
$$

以及

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx = f(0+)\ln\frac{a}{b}.
$$

从而

$$
\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \Big(f(+\infty)-f(0+)\Big)\ln\frac{a}{b}.
$$

注 1.1.

(i) 若 $\forall\, A>0$, $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$ 收敛, 则

$$
\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = -f(0+)\ln\frac{a}{b},
$$

其成立与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在与否无关.

(ii) 若 $\forall\, \varepsilon>0$, $\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx$ 收敛, 则即使 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ 不存在，我们也有

$$
\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.
$$

习题 7.1.

1. 研究积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^p+\sin x}(p>0)$ 的敛散性.

2. 考察积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^\lambda}$ 的敛散性.

3. 试证积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\,dx$ 收敛

§2. 含参变量广义积分的一致收敛性

在数学分析中, 一致收敛性是一个非常重要的概念. 其重要性质我们将在下一节给予介绍. 本节介绍一致收敛性的概念和判别法.

一致收敛性的定义

首先我们考虑含参变量的无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx. \tag{2.1}$$

如果对任何 $y\in[c,d]$, 上述无穷积分都收敛, 那么用 ε–δ 语言写出来就是: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0(\varepsilon,y)>a$, 使得当 $A>A_0(\varepsilon,y)$ 时,

$$\Big|\int_a^A f(x,y)\,dx-F(y)\Big|<\varepsilon, \tag{2.2}$$

其中 $F(y)$ 就是 (2.1) 中无穷积分的值. 如果用 Cauchy 准则写出来就是: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0(\varepsilon,y)>a$, 使得当 $A',A>A_0(\varepsilon,y)$ 时,

$$\Big|\int_A^{A'} f(x,y)\,dx\Big|<\varepsilon. \tag{2.3}$$

在上面的叙述中, $A(\varepsilon,y)$ 是与 $y\in[c,d]$ 有关的. 如果我们能够找到只依赖于 ε 而不依赖于 y 的 A_0, 则相应的收敛性就称为一致收敛. 确切地讲, 我们定义如下:

定义 2.1. (含参变量无穷积分的一致收敛性) 如果 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,A_0(\varepsilon)>a$, 当 $A>A_0(\varepsilon)$ 时, 成立

$$\Big|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\Big|<\varepsilon,\qquad \forall\,y\in[c,d], \tag{2.4}$$

则称无穷积分 $\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

读者也可以按 Cauchy 准则的形式写出相应的等价定义. 这里参变量 y 所在的区间 $[c,d]$ 可以换成 $[c,d)$, $(-\infty,+\infty)$ 等, 甚至可以是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个一般的集合.

接下来, 我们来给出含参变量瑕积分的一致收敛性定义.

定义 2.2. (含参变量瑕积分的一致收敛性) 设对于任何 $y \in [c,d]$, $\int_a^b f(x,y)\,dx$ 是以 $x=a$ 为瑕点的瑕积分, 且该瑕积分收敛. 进一步, 如果 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ (该 δ 仅与 ε 有关), 使得当 $\eta \in (0,\delta)$ 时, 成立

$$\Big|\int_a^{a+\eta} f(x,y)\,dx\Big| < \varepsilon, \qquad \forall\, y \in [c,d], \tag{2.5}$$

则瑕积分 $\int_a^b f(x,y)\,dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

如果一个含参变量积分既是无穷积分又是瑕积分, 比如, 对于 $y \in [c,d]$, 点 a 是广义积分积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

惟一的瑕点, 则我们称

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 当且仅当对于某个 $A \in (a,+\infty)$, 无穷积分

$$\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

和瑕积分

$$\int_a^{A} f(x,y)\,dx$$

均关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛. 显然, 这一定义与 A 的选取无关.

一致收敛性的判别法 基本上, 含参变量广义积分可以与函数项积分相类比. 广义积分一致收敛性的判别法也就与函数项级数一致收敛性的判别法类似. 主要有 Weierstrass 判别法, Abel 判别法和 Dirichlet 判别法. 以单纯的无穷积分为例, 我们有

定理 2.3. (**Weierstrass 判别法**) 若函数 $F(x)$ 相对应的无穷积分

$$\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$$

收敛,

$$|f(x,y)| \le F(x), \qquad \forall\, (x,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]. \tag{2.6}$$

则

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

例 2.1. 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dxx$$

关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛.

证明. 注意到 $x=0$ 点是被积函数 $e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点, 且被积函数在 $x=0$ 附近一致有界, 因而这个积分只是一个含参变量的无穷积分. 我们有

$$\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right| \le e^{-x}, \qquad \forall\ (x,\alpha)\in(0,+\infty)\times[1,+\infty).$$

由于

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dxx$$

收敛, 因此由 Weierstrass 定理,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dxx$$

关于 $\alpha \in [1,+\infty)$ 一致收敛. □

在上面的讨论中, 我们指出我们所考虑的广义积分只是一个无穷积分, 而并不同时是瑕积分. 但事实上, 在利用 Weierstrass 定理判断广义积分的一致收敛性时, 我们并不需要搞清楚该广义积分究竟有没有瑕点、有多少瑕点. 另一方面, 对于什么是瑕点, 一般教材中讲得不是很明确, 本书认为, 对于

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

当我们考虑参数 y 的范围在集合 I 上时，如果 $f(x,y)$ 在 $x=a$ 附近是一致有界的, 即存在 $\delta>0$ 使得 $f(x,y)$ 在 $[a,\delta]\times I$ 上有界, 那么, 即使 $f(a,y)$ 对于某些 $y\in I$ 没有定义, 我们都可以把 a 看作不是瑕点. 反过来, 如果 $f(x,y)$ 在 $x=a$ 附近不是一致有界的, 即 $\forall\ \delta>0$, $f(x,y)$ 在 $(a,\delta]\times I$ 上无界, 则即使对每个 $y\in I$, $f(x,y)$ 关于 x 在 a 点是连续的, 我们也应该把点 a 看作是一个瑕点. 例如, 按照上述观点, 在考虑含参变量 $\alpha\in(0,1]$ 的积分

$$\int_0^1 \frac{x}{\alpha^2+x^2}\,dx$$

时, 我们宜将它看作一个以 0 为瑕点的含参变量的瑕积分. 容易看到, 0 点是该积分惟一的瑕点.

定理 2.4. 设 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上有定义.

(i) (**Abel 判别法**) 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 对

于固定的 $y \in [c,d]$, $g(\cdot, y)$ 单调, 且关于 y 一致有界[1], 则积分

$$\int^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

(ii) (**Ditichlet 判别法**) 若积分 $\int_a^A f(x,y)\,dx$ 的部分积分关于 $(A,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]$ 一致有界, 且对于固定的 $y \in [c,d]$, $g(\cdot,y)$ 单调, 且当 $x \to +\infty$ 时, $g(x,y)$ 关于 y 一致收敛于 0, 则积分

$$\int^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

例 2.2. 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

证明. 正如我们在例题 2.1 中所指出的, $x=0$ 不是瑕点. 因而这是一个含参变量无穷积分. 由于积分

$$\int^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

收敛, 该积分不含参数 α, 自然关于 α 是一致收敛的[2]. 另一方面, 对于固定的 $\alpha \in [0,+\infty)$, $e^{-\alpha x}$ 关于 x 都是单调有界的, 因此由 Abel 定理,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

本题, 也可以用 Dirichlet 判别法来判断. 由于我们考虑的是仅仅是一个无穷积分 (注意 $e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}$ 在整个 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上是有界的) , 因此, 我们只需要考察

$$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 的一致收敛性. 注意到

$$\int_1^A \sin x\,dx$$

[1] 函数一致有界的概念不如一致连续、一致收敛等概念复杂. 这里, $[a,+\infty)$ 上的函数 $g(\cdot,y)$ 关于 y 一致有界其实就是 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上有界.

[2] 一般地, 若广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 对每个 $y \in I$ 收敛, 而 I 只有有限个元素, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 $y \in I$ 一致收敛. 因此, 一致收敛本质上是当参数有无限个取值时, 积分关于参数的一种性质.

关于 $A \geq 1$ 一致有界, 而函数 $\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}$ 关于 x 单调, 且当 $x \to +\infty$ 时, 它关于 $\alpha \in [0, +\infty)$ 一致地收敛到 0, 所以由 Dirichlet 判别法,

$$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

关于 $\alpha \in [0, +\infty)$ 的一致收敛. $\square$

正如我们在介绍数项级数的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法时指出, Abel 判别法可以由 Dirichlet 判别法简单地导出, 而对于广义积分, 两种判别法本质上是利用了分部积分. 这一特性在研究广义积分的一致收敛性的时候仍然有效. 特别, 一般说来, 利用上一节介绍的方法, 我们可以有效地利用分部积分来研究一致收敛性.

习题 7.2.

1. 给出含参变量无穷积分一致收敛的 Cauchy 准则.
2. 若 $x = 0$ 是积分
$$\int_{-1}^1 f(x, y) \, dx$$
的 (惟一的) 瑕点, 写出该积分关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛的定义.
3. 证明定理 2.3.
4. 证明定理 2.4.
5. 设 $f(t)$ 当 $t > 0$ 时连续, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) \, dt$ 当 $\lambda = a, \lambda = b$ 时都收敛. 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) \, dt$ 关于 $\lambda \in [a, b]$ 一致收敛.
6. 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} \, dx$ 在下列区间的一致收敛性.
   (a) $0 < a \leq \alpha \leq b < +\infty$,
   (b) $0 < \alpha \leq b < +\infty$,
   (c) $0 < a \leq \alpha < +\infty$.
7. 研究
$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
关于 $y \in (-\infty, +\infty)$ 的一致收敛性.
8. 证明对任何 $y \neq 0$, 积分
$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
收敛. 并讨论该积分关于 y 在下述区间的一致收敛性.
   (a) $y \in (0, 1)$,
   (b) $y \in (1, +\infty)$

9. 证明积分
$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$$
关于 $s\in(0,+\infty)$ 内闭一致收敛, 即对于 $(0,+\infty)$ 任何紧子集 $[a,b]$, 该积分关于 s 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

10. 证明积分
$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$
关于 $(p,q)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 内闭一致收敛.

11. 讨论积分
$$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2x^2}\,dx$$
在下列区间的一致收敛性.
   (a) $\delta<\alpha<+\infty$, 其中 $\delta>0$.
   (b) $0<\alpha<+\infty$.

12. 研究
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x}$$
的收敛性.

13. 证明
$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$
关于 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛.

§3. 含参变量积分的连续性、微分及积分

本节研究含参变量积分的基本性质. 对于一个收敛的含参变量积分, 它是关于参变量的一个函数, 我们要研究的是这个函数的连续性, 可微性和可积性, 以及相应的计算方法.

首先, 我们考虑常义积分. 我们有

定理 3.1. (**含参变量积分的连续性**) *设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则函数*
$$F(y)\triangleq\int_a^b f(x,y)\,dx$$
在 $[c,d]$ 上连续.

证明. 记
$$\omega(r)=\sup_{\substack{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in[a,b]\times[c,d]\\|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|<r}}|f(x,y)-f(\tilde{x},\tilde{y})|$$
为 $f(x,y)$ 的连续膜. 由于 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 从而一致连续. 于是
$$\lim_{r\to0^+}\omega(r)=0.$$

我们有

$$\begin{aligned} |F(\tilde{y})-F(y)| &= \Big|\int_a^b f(x,\tilde{y})\,dx-\int_a^b f(x,y)\,dx\Big| \\ &\le \int_a^b \Big|f(x,\tilde{y})-f(x,y)\Big|\,dx \\ &\le \int_a^b \omega(|\tilde{y}-y|)\,dx \\ &= \omega(|\tilde{y}-y|)(b-a), \qquad \forall\, y,\tilde{y}\in[c,d]. \end{aligned}$$

由此, 即得 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. □

含参变量积分的连续性可以理解为积分与极限两种运算交换次序:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx. \tag{3.1}$$

下面的定理则叙述了积分与积分交换次序、积分与求导交换次序的性质.

定理 3.2. (**积分和求导交换次序**) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上有界, $f_y(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 且对每个 $y\in[c,d]$,

$$F(y)\overset{\triangle}{=}\int_a^b f(x,y)\,dx$$

存在. 则 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续可导, 且

$$\frac{dF(y)}{dy}=\int_a^b f_y(x,y)\,dx.$$

即

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b f_y(x,y)\,dy. \tag{3.2}$$

证明. 对于任何 $y\in[c,d]$ 以及 $\triangle\ y\neq 0$, 当 $y+\triangle\ y\in[c,d]$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{F(y+\triangle\ y)-F(y)}{\triangle\ y} \\ =\ & \int_a^b \frac{f(x,y+\triangle\ y)-f(x,y)}{\triangle\ y}\,dx \\ =\ & \int_a^b f_y(x,y+\theta\triangle\ y)\,dx, \end{aligned}$$

其中 $\theta=\theta(x,y,\triangle\ y)\in(0,1)$. 于是仿定理 3.1 的证明, 不难得到

$$\lim_{\triangle\ y\to 0}\int_a^b f_y(x,y+\theta\triangle\ y)\,dx=\int_a^b f_y(x,y)\,dx.$$

上面的极限当 $y=c$ 或 d 时, 分别理解为右侧极限和左侧极限. 这样就得到了 3.2. 至于 $\dfrac{dF}{dy}$ 的连续性, 可利用定理 3.1 得到. □

定理 3.3. (**积分次序的交换性质**) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则函数

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{3.3}$$

证明. 考虑

$$G(x)=\int_a^x dt\int_c^d f(t,y)\,dy,\qquad \forall\ x\in[a,b].$$

和

$$F(x)=\int_c^d dy\int_a^x f(t,y)\,dt,\qquad \forall\ x\in[a,b].$$

由定理 3.1, $\int_c^d f(x,y)\,dy$ 在 $x\in[a,b]$ 上连续. 从而

$$\frac{dG(x)}{dx}=\int_c^d f(x,y)\,dy,\qquad \forall\ x\in[a,b].$$

另一方面, 利用定理 3.2,

$$\begin{aligned}\frac{dG(x)}{dx} &= \int_c^d \frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_a^x f(t,y)\,dt\Big)\,dy\\ &= \int_c^d f(x,y)\,dy\\ &= \frac{dF(x)}{dx},\qquad \forall\ x\in[a,b].\end{aligned}$$

从而结合 $F(a)=G(a)=0$ 得到

$$F(x)=G(x),\qquad \forall\ x\in[a,b].$$

特别, $F(b)=G(b)$. 这就是 (3.3). □

接下来, 介绍广义积分的相关性质. 我们认为, 对含参变量广义积分，极限与积分交换次序的条件、积分与积分交换次序的条件以及积分与求导交换次序的条件是否能够正确理解把握, 是一位学生是否学好数学分析的一个重要指标.

我们以含参变量无穷积分为例叙述相应定理.

定理 3.4. (**含参变量广义积分的连续性**) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛, 则

$$F(y)\triangleq\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

是 $[c,d]$ 上的连续函数.

证明. 任取 $y_0 \in [c,d]$. 不失一般性, 设 $y_0 \in (c,d)$. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\varlimsup_{y\to y_0} |F(y)-F(y_0)| \\
= &\varlimsup_{y\to y_0} \left| \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx \right| \\
\le &\varlimsup_{y\to y_0} \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| + \varlimsup_{y\to y_0} \left| \int_A^{+\infty} f(x,y_0)\,dx \right| \\
&+ \varlimsup_{y\to y_0} \left| \int_a^{A} (f(x,y)\,dx - \int_a^{A} f(x,y_0))\,dx \right| \\
= &\varlimsup_{y\to y_0} \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| + \varlimsup_{y\to y_0} \left| \int_A^{+\infty} f(x,y_0)\,dx \right| \\
\le &\ 2 \sup_{t\in[c,d]} \left| \int_A^{+\infty} f(x,t)\,dx \right|, \qquad \forall\ A > a.
\end{aligned}
$$

于是, 令 $A \to +\infty$, 利用一致收敛性, 即得

$$\varlimsup_{y\to y_0} \Big| F(y) - F(y_0) \Big| \le 0.$$

这就证明了定理. □

下面我们先介绍积分次序可交换性的条件.

定理 3.5. (**含参变量广义积分积分次序的可交换性**) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty) \times [c,d]$ 上连续, 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛. 则

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{3.4}$$

证明. 由定理 3.4, 可见 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 连续, 从而

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

存在. 我们有 (请读者补充以下每一步推导成立的理由)

$$
\begin{aligned}
&\varlimsup_{A\to+\infty} \left| \int_a^{A} dx \int_c^d f(x,y)\,dy - \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| \\
= &\varlimsup_{A\to+\infty} \left| \int_c^d dy \int_a^{A} f(x,y)\,dx - \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| \\
= &\varlimsup_{A\to+\infty} \left| \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx \right|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\le (d-c)\varlimsup_{A\to+\infty}\sup_{y\in[c,d]}\Big|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\Big| \\ &= 0. \end{aligned}$$

这就证明了 (3.4) 成立. □

定理 3.6. (**含参变量广义积分的连续可微性**) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上有定义, 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

对每个 $y\in[c,d]$ 都收敛, 进一步, $f(x,y)$ 关于 y 的导数存在, 且 $f_y(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续,

$$\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,dx$$

关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛. 则

$$F(y)\triangleq\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

在 $[c,d]$ 上连续可微, 且

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,dy. \tag{3.5}$$

证明. 由定理 3.5, 对任何 $y\in[c,d]$, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_c^y dt\int_a^{+\infty} f_y(x,t)\,dx \\ =&\int_a^{+\infty} dx\int_c^y f_y(x,t)\,dt \\ =&\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_a^{+\infty} f(x,c)\,dx. \end{aligned}$$

上述等式两边关于 y 求导, 即得 (3.5). □

易见, 定理 3.1—3.3 包含在定理 3.4—3.6 中.

习题 7.3.

1. 设 $p(y),q(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续可导,

$$p(y),q(y)\in[\alpha,\beta],\qquad \forall\, y\in[c,d],$$

$f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上有界, 且关于 y 的导数 $f_y(x,y)$ 连续. 若对每一个 $y\in[c,d]$,

$$F(y)=\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx$$

存在, 证明 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续开导. 并计算 $F'(y)$.

2. 证明

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx$$

在 $y=0$ 连续当且仅当 $f(0)=0$, 其中 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

3. 考察

$$f(p)=\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}}\,dx$$

的连续性.

4. 证明

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续.

5. 证明积分

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

关于 $s\in(0,+\infty)$ 无限次可导.

6. 证明积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

关于 $(p,q)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 任意次连续可微.

7. 思考: 为什么定理 3.2 的证明中, 我们说 "仿定理 3.1 的证明", 而不是直接说利用定理 3.1?

§4. 含参变量积分的计算

含参变量积分, 特别是含参变量广义积分的计算除了用第一节介绍的方法计算外, 其他常用的方法是利用上一节的定理, 通过交换计算次序来得到结果. 其中利用积分交换次序本质上与计算重积分时选取积分次序的情况相同, 而利用求导与积分交换次序, 则可能进一步利用常微分方程求得最后结果. 必要的时候, 我们也可以通过人为地引入参数来计算广义积分. 另外, 利用 Euler 函数等进行计算也是非常有效的方法. 最后, 另一个重要的方法是利用复变函数论中的**留数**进行计算[1].

例 4.1 计算

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$$

[1]留数与复积分相关, 而复积分其实就是第二型曲线积分, 因此, 其基本性质已经包含在数学分析之中. 关于利用留数计算和 Euler 积分计算的知识我们将在下一章 (在编) 进行介绍.

解. 首先注意, 所求积分本质上是一个常义积分, 尽管这与我们能否计算关系不大. 我们用两种方法计算.

法 *I*. 注意到 x^y 在 $[0,1]\times[a,b]$ 连续, 利用定理 *3.3*, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx &= \int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy \\ &= \int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln\frac{b+1}{a+1}.\end{aligned}$$

法 *II*. 固定 $a>0$, 记

$$F(b)=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx, \qquad b\geq a.$$

则由定理 *3.2*,

$$\frac{dF(b)}{db}=\int_0^1 x^b\,dx=\frac{1}{b+1}.$$

于是

$$F(b)=\ln(b+1)+C, \qquad \forall\ b\geq a.$$

这样, 由 $F(a)=0$ 得到

$$F(b)=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

我们看到这两种方法在这里并没有本质的不同.

例 4.2 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

解. 考虑

$$f(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \forall\ \alpha\geq 0.$$

则由于

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛, 利用定理 *3.4* 知 $f(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

进一步,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$

关于 $\alpha\in(0,+\infty)$ 内闭一致收敛, 从而由定理 *3.6* 可得

$$f'(\alpha)=-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

于是

$$f(\alpha) = -\arctan\alpha + C, \qquad \forall\ \alpha > 0.$$

由 $f(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的连续性, 得到

$$f(\alpha) = -\arctan\alpha + C, \qquad \forall\ \alpha \geq 0.$$

另一方面, 易见当 $\alpha \to +\infty$ 时

$$|f(\alpha)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \to 0.$$

从而

$$C = \lim_{\alpha\to+\infty} \Big(f(\alpha) + \arctan\alpha\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

这样

$$f(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha, \qquad \forall\ \alpha \geq 0.$$

特别,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

尽管积分交换次序和积分号下求导是计算积分一个非常有效的方法, 但是被积函数对称性的利用在一些情形仍然是非常有意义的.

例 4.3 设 $\alpha \in (-\infty,+\infty)$. 计算

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx.$$

解. 积分可能的瑕点是 $0, \pi$. 利用 *Weierstrass* 判别法, 不难证明

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx.$$

关于 $\alpha \in (-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛. 于是

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx$$

在 $\alpha \in (-\infty,+\infty)$ 上连续.

我们有

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= F(-\alpha) = \frac{1}{2}(F(\alpha) + F(-\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\Big((1+\alpha^2)^2 - 4\alpha^2\cos^2 x\Big) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\Big((1+\alpha^2)^2 - 2\alpha^2\cos 2x - 2\alpha^2\Big) dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \ln\Big(1+\alpha^4-2\alpha^2\cos x\Big)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\Big(1+\alpha^4-2\alpha^2\cos x\Big)dx \\
&= \frac{1}{2}F(\alpha^2).
\end{aligned}
$$

一般地得到,

$$F(\alpha) = \frac{1}{2^n}F(\alpha^{2^n}) \to 0 \cdot F(0) = 0, \qquad \forall\ |\alpha| < 1.$$

即

$$F(\alpha) = 0, \qquad \forall\ |\alpha| < 1.$$

进一步, 利用上述结果可以得到

$$F(\alpha) = 2\pi \ln|\alpha|, \qquad \forall\ |\alpha| > 1.$$

习题 7.4.

用尽可能多的方法计算以下积分.

1. 试用 Frullani 公式计算本节例题 4.1
2. 设 $\alpha > 0, \beta > 0$, 计算
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx.$$
3. 设 $\alpha > 0$, 计算
$$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin bx\,dx.$$
4. 设 $\alpha \geq 0$, 计算
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x}\,dx$$
5. 利用
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy, \qquad \forall\ x > 0.$$
计算积分
$$F = \int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$$
以及
$$F_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx.$$
6. 计算
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

7. 计算

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}\,dx.$$

8. 计算

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2-\sin^2 x)\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,dx.$

参 考 文 献

[1] 陈纪修, 於崇华, 金路, 数学分析. 北京: 高等教育出版社. 1999

[2] 欧阳光中, 秦曾复, 朱学炎, 数学分析. 上海: 上海科技出版社. 1983

[3] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmsted, Counterexamples in Analysis, Holden-Day, Inc., 1964. 中译本：分析中的反例, 高枚译, 上海: 上海科技出版社. 1980

[4] G. Klambauer, Mathematical Analysis, Marcel Dekker, Inc, New York, 1975. 中译本：数学分析, 庄亚栋译, 上海: 上海科技出版社. 1981.

[5] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Third edition, McGraw Hill, 1976. 中译本：数学分析原理, 机械工业出版社, 2003.

[6] Г. М. 菲赫金哥尔茨, 微积分学教程, 中译本：高等教育出版社. 2005