国家理科基地教材

微积分进阶

楼红卫　编

微积分进阶教学注记

楼红卫　编

目　　录

♣ 表示一个话题

★ 表示这个话题难度超出了一般数学分析的要求

♣ 本教材的习题解答已经基本完成, 习题解答主要作为教师的参考用书, 对于有需要的教师单独赠送. 需要者可直接通过 email (hwlou@fudan.edu.cn) 向本人索取. 来函请使用能够足以表明自己教师身份的邮箱(比如以自己名字开头的学校邮箱).

鉴于习题解答流传于学生之间, 对学生的学习有较大的负面作用, 因此, 习题解答的索取者**需保证对习题解答加以妥善保管, 不以任何方式外传给其他人.**

♣ 请不要转载本资料到其他网站.

课程实际进展情况

因本课程的特殊性, 课程内容的实际进展会有很大的不同. 内容的篇幅与实际花费的时间也不是那么成比例. 因此, 以下将罗列一些本人各学期上该课的授课情况, 以供参考.

2011 年秋, 主要对象: 有一年高等数学基础的(且基础较好)刚转入数学类专业的大学第三学期的学生. 每次课为两节, 共约 90 分钟

	章节	详细情况
第一次	Ch. 0: 绪论	
第二次	§1.1: 数的发展,有理数的基本性质	
第三次	§1.2: 实数系的建立	
第四次	§1.3: 实数系基本定理及其等价性	大部分
第五次	§1.3: 实数系基本定理及其等价性	小部分
	§2.1: 极限定义	
第六次	§2.2: 数列收敛准则及其	到例7
第七次	§2.2: 数列收敛准则及其	例8,例9
	§2.3: 上下极限及其应用	到例3
第八次	§2.3: 上下极限及其应用	
	§2.4: 一致连续,一致收敛性	讲到一致连续
第九次	§2.4: 一致连续,一致收敛性	
第十次	§2.5: Teoplitz定理、Stolz定理、L'Hospital法则	一节课
	§3.1: 微分中值定理和Taylor 展式	讲到Lagrange型
第十一次	§3.1: 微分中值定理和Taylor 展式	
第十二次	§3.2: Darboux 定理	
	§3.3: 极值、零点、不等式	
第十三次	§4.1: Riemann积分定义、Darboux和	
第十四次	§4.2: 积分中值定理	
	§4.3: 函数的光滑逼近	讲到注4.3.3

	章节	详细情况
第十五次	§4.3: 函数的光滑逼近	
第十六次	§4.4: Riemann引理及其推广	
	§4.5: 一些重要不等式	
第十七次	§5.1: 正项级数	因时间不讲命题 5.1.1
第十八次	§5.2: 任意项级数	因时间不讲命题 5.2.1
第十九次	§5.3: 函数项级数的基本性质	
	补讲命题 5.1.1 和命题 5.2.1	
第二十次	§5.4: 幂级数的基本性质	
第二十一次	§5.5: Fourier 级数的基本性质	讲到定理 5.5.4
第二十二次	§5.5: Fourier 级数的基本性质	视时间补充其他内容
第二十三次	§6.1: 一些基本概念的辨析	加混合偏导不相等例子
第二十四次	§6.2: 重积分、曲线曲面积分	可省略一些例题
第二十五次	§7.1: 反常积分	
第二十六次	§7.2: 含参变量反常积分的一致收敛性	
	§7.3: 含参变量积分的连续性、微分及积分	常义部分
第二十七次	§7.3: 含参变量积分的连续性、微分及积分	反常部分
第二十八次	§7.4: 含参变量积分的计算	一节课
	§7.5: Arzelà定理	引理1和定理1
第二十九次	§7.5: Arzelà定理	增拓展内容

绪　论

♣ 本章主要介绍课程目的. 提出一些学习方法.

♣ 其他注意点：

时常提醒学生养成良好的书写习惯，包括遵循学科的书写习惯. 例如, a,b,c 等常作为常系数， x,y,z等常作为自变量, 而f,g等常用来表示函数. 不必要地违反这些习惯会带来很大的不便. 有物理意义的公式更是如此.

$$f = ma \qquad (\text{力}=\text{质量}\cdot\text{加速度})$$

如果非要用a 表示力, 用 f 表示质量, m 表示加速度, 写为

$$a = fm,$$

会带来很多困扰.

♣ 习题0.3提示：

$$b_n = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix}$$

对于奇素数n,

$$\begin{aligned}
2^n(b_n-\gamma) &= (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} - \gamma \\
&= (1 \quad 0)\left[\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 2 & -\alpha \end{pmatrix} + \alpha I\right]^n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} - \gamma \\
&\equiv (1 \quad 0)\left[\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 2 & -\alpha \end{pmatrix}^n + \alpha I\right] \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} - \gamma \\
&= (1 \quad 0)\left[(\alpha^2+4\beta)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 2 & -\alpha \end{pmatrix} + \alpha I\right] \begin{pmatrix} b_0 \\ b_{-1} \end{pmatrix} - \gamma \\
&= (\alpha b_0 + 2\beta b_{-1})(\alpha^2+4\beta)^{\frac{n-1}{2}} + \alpha(b_0-\gamma) \\
&\equiv AB^{\frac{n-1}{2}} + C, \qquad (\bmod n).
\end{aligned}$$

从而

$$n \Big| b_n - \gamma \Longleftrightarrow AB^{\frac{n-1}{2}} + C \equiv 0, \qquad (\bmod n).$$

最后说明相应的充要条件是下述之一成立:

(i) $B = C = 0$;

(ii) $A = C = 0$;

(iii) B 为某个非零整数的平方, $A + C = 0$.

注: 设整数 a 不是其他整数的平方. 则对于任何 $N > 0$, 存在素数 $m, n > N$ 使得

$$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1, \qquad (\bmod n),$$

$$a^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1, \qquad (\bmod m).$$

第一章　分析基础，实数系基本定理

§1. 数的发展、有理数的基本性质

§2. 实数系的建立

♣ 利用无限小数建立定义实数, 容易定义序, 但是对于定义加减乘除都有困难.

♣ 利用 Dedekind 的分划和 Cantor 的 Cauchy 列的等价类定义实数之比较:

	Dedekind 的方法	Cantor 的方法
定义的直观性	较直观	不直观
序	容易	较不容易
加法	容易	容易
负元	不容易	容易
乘法	不容易	容易
乘法逆元	不容易	较容易
全序域	容易证明	容易证明
有理数域作为子域	容易	容易
Archimedes 性	容易	容易
有理数域的稠密	容易	容易
定理	确界定理天然成立	易得 Cauchy 准则

§3. 实数系基本定理

♣ 本节内容不求学生很快掌握, 需要在今后的学习中时常温习.

♣ 习题1.3.12 提示.

若结论不真, 则存在一列区间长度趋于零的闭区间套 $[a_n, b_n]$ 使得

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right| \geq n.$$

记 ξ 为a_n 的极限, 则

$$\left|\frac{f(b_n)-f(\xi)}{b_n-\xi}\right| \geq n$$

或

$$\left|\frac{f(\xi)-f(a_n)}{\xi-a_n}\right| \geq n.$$

第二章　极限与连续

§1. 极限定义

♣ 习题 2.1.7 提示：主要讨论 $a=0$ 时, 可能的极限

♣ 习题 2.1.7 提示：注意需要证明两个函数同周期

§2. 数列收敛准则及其应用

♣ 习题2.2.4 提示.

(i) 首先容易证明 $f(x)=x$ 有唯一解 c.

(ii) 说明 $|x_n-c|$ 收敛(到 α)

(iii) 若 x_n 的一个子列收敛到 $\bar{x}$, 则 $|\bar{x}-c|=\alpha$. 而 $f(x_n)$ 也是 x_n 的一个收敛子列, 从而, $|f(\bar{x})-c|=\alpha$, 即 $|f(\bar{x})-f(c)|=|\bar{x}-c|$, 由此推得 $\bar{x}=c$.

♣ 习题 2.2.22 提示.

(i) 把 0 和 n 看作同一个点, 这样 f 就是定义在一个长为 n 的圈上的连续函数, 证明必有相距为 1 的两个点使得 f 在这两点的值相等.

(ii) 把圈中, 上面得到两点间的段截去, 再次应用 (i) 的结论

★ 习题 2.2.18 (ii) 以及习题 2.2.26 提示.

与 Zermelo 选择公理有关, 有兴趣的读者可以查看有关资料, 例如可以参看“张景中, 关于函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,《数学进展》, 1955 年 04期, pp. 795–800.”

§3. 上、下极限及其应用

♣ 以后可经常利用

$$\overline{\lim}\,|f(x)| = 0$$

说明

$$\lim f(x) = 0.$$

特别, 可常用

$$\overline{\lim}\,|f(x)| \le \alpha, \qquad \forall\, \alpha > 0$$

说明

$$\lim f(x) = 0.$$

♣ 在例 2.3.5 的证明中, 第二部分有一个疏漏.

问题出在积分

$$\int_{\{f<M-2\varepsilon\}} \varphi(x) f^n(x) dx$$

需要在 Lebesgue 积分的意义下理解, 因为它在 Riemann 积分的意义下可能是不可积的.

我们改写这一段如下:

证明

(i) 我们有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\, dx} \le \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\int_a^b M^n \varphi(x)\, dx} = M. \tag{2.3.4}$$

另一方面, 由连续函数的性质, 存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = M$. 于是 $\forall\, \varepsilon \in (0, \frac{M}{2})$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, 使得当

$$x \in J_\varepsilon \triangleq (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \bigcap [a,b]$$

时, 有 $f(x) > M - \varepsilon$. 这样, 我们有

$$\begin{aligned} & \underline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\, dx} \\ \ge\ & \underline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\int_{J_\varepsilon} (M-\varepsilon)^n \varphi(x)\, dx} = M - \varepsilon. \end{aligned}$$

于是由 ε 的任意性得到

$$\varliminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,dx}\geq M.$$

结合 (2.3.4) 式, 即知 (2.3.2) 式成立.

(ii) 类似 (2.3.4) 式, 易见

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b \varphi(x)f^{n+1}(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,dx}\leq M. \tag{2.3.5}$$

另一方面, $\forall\,\varepsilon\in(0,\dfrac{M}{2})$, 令 J_ε 如 (i) 的证明中所定义. 记:

$$g(x)=\max(f(x),M-2\varepsilon),\qquad x\in[a,b],$$

则 $g(x)$ 连续且

$$|g^k(x)-f^k(x)|\leq (M-2\varepsilon)^k,\qquad \forall\,x\in[a,b];k=1,2,\dots.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\left|\int_a^b \varphi(x)\big(f^{n+1}(x)-g^{n+1}(x)\big)\,dx\right|}{\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,dx}\\ \leq\ &\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{(M-2\varepsilon)^{n+1}\int_a^b \varphi(x)\,dx}{(M-\varepsilon)^n\int_{J_\varepsilon}\varphi(x)\,dx}=0.\end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned}&\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b \varphi(x)f^{n+1}(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,dx}\\ =\ &\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b \varphi(x)g^{n+1}(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,dx}\\ \geq\ &M-2\varepsilon.\end{aligned}$$

这样, 由 ε 的任意性得到

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b \varphi(x)f^{n+1}(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,dx}\geq M.$$

结合 (2.3.5) 式, 即知 (2.3.3) 式成立. □

当我们允许在证明过程中使用 Lebesgue 积分时, 则 $g(x)$ 可以定义为

$$g(x)=f(x)\chi_{\{f\geq M-2\varepsilon\}}=\begin{cases} f(x), & \text{如果 } f(x)\geq M-2\varepsilon, \\ 0, & \text{如果 } f(x)<M-2\varepsilon. \end{cases}$$

则上述证明过程可以一模一样地搬过来.

对于函数 $g(x)$ 的定义, 后一个要比前面一个自然, 但它可能不是 Riemann 可积的. 下面我们给出一个例子.

♣ 可以找到 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 使得$f(x)\chi_{\{f>1\}}$ 不是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数.

为此, 不妨设 $[a,b]=[0,1]$, 考虑点列 $x_1,x_2,x_3,\ldots$ 为:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\ldots.$$

则该点列包含了 $(0,1]$ 上的所有有理数.

记

$$h(x)=\begin{cases} |1-x|, & \text{如果 } |x|\leq 1, \\ 0, & \text{如果 } |x|>1. \end{cases}$$

令

$$f_n(x)=\frac{h\big(4\times 4\times 2^n(x-x_n)\big)}{2^n}$$

则 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且易见

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

关于 $x\in[0,1]$ 一致收敛, 从而

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在 $[0,1]$ 上连续. 另一方面, 可见 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的有理点上大于 1.

如果 $f(x)\chi_{\{f>1\}}$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 则积分等于上积分. 而显见 $f(x)\chi_{\{f>1\}}$ 在 $[0,1]$ 的上积分大于 1. 所以

$$\int_0^1 f(x)\chi_{\{f>1\}}\,dx > 1.$$

另一方面, 令

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } x \in \bigcup_{k=1}^{n}(x_n - \frac{1}{4\times 2^n}, x_n + \frac{1}{4\times 2^n}), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 $0 \le g_n(x) \le \frac{3}{2}$ 且 $g_n(x)$ 点点收敛到 $f(x)\chi_{\{f>1\}}$. 由第 7 章第 5 节的 Arzelá 定理,

$$\int_0^1 f(x)\chi_{\{f>1\}}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx \le \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3/2}{2\times 2^n} = \frac{3}{4}.$$

矛盾. 所以 $f(x)\chi_{\{f>1\}}$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的.

如果有实变函数的基础, 则 $f(x)\chi_{\{f>1\}}$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积是比较显然的, 原因在于该函数的上积分和 Lebesgue 积分不相等. 也可以利用以下事实: 在 $\{f \le 1\}$ 中的点都可以用 $[0,1]$ 中的有理数逼近, 但 $[0,1]$ 中的有理数均包含在 $\{f > 1\}$ 中. 因此在一个非零测度集 $\{f \le 1\}$ 上, $f(x)\chi_{\{f>1\}}$ 不连续, 所以它不是 Riemann 可积的(参见 §4.1 的注记).

§4. 函数的一致连续性和函数列的一致收敛性

♣ 习题 1.3.12 提示.

说明 $f(x)$, $\dfrac{|g(x)|}{|x|+1}$ 有界

♣ 习题 2.4.7 提示.

说明 f 非一致连续, 或说明 $f'(x)$ 无界

♣ 习题 2.4.9 提示.

结论为 Arzelá-Ascoli 定理.

§5. Stolz 定理、L'Hospital 法则、Teoplitz 定理

♣ 本节内容主要需要强调的是以下几点: (i) 在 L'Hospital 法则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的使用中, 等式后的极限的存在性保证了等式前得极限存在且和后者相同, 这既是一种计算, 也包含着一种证明.

Stolz 定理的情况类似.

(ii) L'Hospital 法则是大家熟悉的工具, 只是对于很多学生来讲, 在计算中需要注意灵活性, 不能一味地不加化简地用 Stolz 定理或 L'Hospital 法则

第三章 微分

§1. 微分中值定理和Taylor 展式

♣ 关于 Lipschitz 条件和 Hölder 条件, 有时间的话可以适当展开, 时间不足时可以把相应内容留作习题: 1) 当函数可微时, 通常的区域中, Lipschitz 条件等价于导数(或梯度)有界, 高维非凸区域略有不同. 2) Hölder 条件的指数为什么不考虑为 0 和大于 1 的情形. 3) 局部范围内, Hölder 条件的指数越大, 则函数性质越好.

Taylor 展式唯一性的应用方面可以补充一个例子, 比如将 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 在 0 点附件展开到 x^{12}.

♣ 一个重要的证明方法—"连续性方法"

这是分析中一个非常有用的方法. 本教材初稿含有相应的的例题. 后因削减篇幅, 把该类例题编入了习题. 比如习题 3.1.6(i), 3.1.19, 3.2.25, 3.2.26.

在习题 3.1.16 中用到类似思想.

如果要证明关于某个性质 P 对所有参数 $\alpha\in[a,b]$ 成立, 则可以通过证明使得性质 P 成立的所有 α 是 $[a,b]$ 的既开又闭的非空集. 这里, $[a,b]$ 的一个子集 E 是"开的", 定义为存在包含于(c,d) (其中$(c,d)\supset[a,b]$) 的开集, U, 使得 $E=U\cap[a,b]$. 这等价于 $\forall x\in E\setminus\{a,b\}$, x 是 E 的内点, 即 $E\setminus\{a,b\}=\overset{\circ}{E}$.

命题 3.1.1. 在 $\mathbb{R}$ 中, 既开又闭的集合只有空集和 $\mathbb{R}$.

证明 设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 非空且既开又闭.

由非空性, 存在 $x_0\in E$. 记

$$F=\{h\geq x_0|[x_0,h]\subseteq E\}.$$

则 F 非空. 我们要证 $\sup F=+\infty$, 即 $E\supseteq[x_0,+\infty)$. 若不然, 存在 $h_1,h_2,\ldots\in F$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=\sup F$. 由 F 的定义, $[x_0,\sup F)\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[x_0,h_n]\subseteq E$. 于是由 $E\subseteq\mathbb{R}$ 为闭的假设, $\sup F\in F$. 从而 $[x_0,\sup F]\subseteq E$.

又由 E 为开集的假设, 存在 $\delta>0$, 使得 $(\sup F-d,\sup F+\delta)\subseteq E$. 因此, $\sup F+\frac{\delta}{2}\in F$. 得到矛盾.

这就证明了 $[x_0, +\infty) \subseteq E$. 类似地, 可以证明 $(-\infty, x_0] \subseteq E$. 从而 $E = \mathbb{R}$.
□

推论 3.1.1. 在 $[a, b]$ (或 $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)) 中, 既开又闭的集合只有空集和全集.

推论 3.1.2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 既开又闭的集合只有空集和全集.

在今后不同问题的证明中, 若要使用上述结论, 在数学分析中, 不我们建议不直接利用命题的结论, 而是在证明中重复上面的证明过程.

♣ 对于积分

$$\int_0^x (x-t)^n g(t)\,dt$$

的求导公式

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^n g(t)\,dt = \int_0^x n(x-t)^{n-1} g(t)\,dt \tag{3.1.1}$$

自然可以看作是积分号下求导公式

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x,t)\,dt = Q(x,x) + \int_0^x Q_x(x,t)\,dt$$

的特例. 但是我们可以通过

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^x x^k g(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\Big(x^k \int_0^x g(t)\,dt\Big) \\
&= x^k g(x) + k x^{k-1}\int_0^x g(t)\,dt \\
&= x^k g(x) + \int_0^x k x^{k-1} g(t)\,dt \\
&= (x^k g(t))|_{t=x} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\big(x^k g(t)\big)\,dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

直接说明 (3.1.1) 成立.

♣ 插值多项式可以看作 Taylor 展式的一种推广.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有 K 阶导数, 对于 $a \le x_0 < x-1 < x_2 < \ldots < x_m \le b$, 存在唯一的 n 次多项式 $P(x)$ 使得

$$P^{\langle l \rangle}(x_j) = f^{\langle l \rangle}(x_j), \qquad 0 \le l \le k_j - 1; j = 0, 1, \ldots, m, \tag{3.1.2}$$

其中 $m \ge 0$, $k_j \ge 1$, $n = k_0 + k_2 + \ldots + k_m - 1$.

则 $m = 0$ 时的插值多项式即为 Taylor 展式.

进一步, 若 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数, 则有误差估计

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_m)^{k_m}, \tag{3.1.3}$$

其中$\xi \in [a,b]$. 更确切地, $\xi \in [\min(a,x), \max(b,x)]$

♣ 值得注意的是 (3.1.3) 蕴含了满足 (3.1.2) 的 n 次插值多项式的唯一性.

证明 (3.1.3) 时需要注意把 x 看作一个常数. 换言之, 如果把 (3.1.3) 写成

$$\big(f(c) - P(c)\big)(n+1)! = f^{n+1}(\xi)(c-x_0)^{k_0}(c-x_1)^{k_1}\ldots(c-x_m)^{k_m}, \tag{3.1.4}$$

就会更容易想到应该构造以下形式的辅助函数

$$F(t) \equiv \big(f(c) - P(c)\big)Q(t) - (f(t) - R(t))(c-x_0)^{k_0}(c-x_1)^{k_1}\ldots(c-x_m)^{k_m}, \tag{3.1.5}$$

使得 F 至少有 $n+2$ 个零点(含重数), 其中 $Q(t)$, $R(t)$ 均为 n 次多项式. 易见取 $Q(t) = (t-x_0)^{k_0}(t-x_1)^{k_1}\ldots(t-x_m)^{k_m}$, $R(t) = P(t)$ 可以满足要求.

♣ 我们称 x_0是 $f(x)$ 的 k 重零点, 如果 $f(x_0) = \ldots = f^{\langle k-1 \rangle}(x_0) = 0$.

容易证明, 若在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 有 $n+1$ 阶导数的函数 $f(x)$, 在 $[a,b]$ 区间至少有 $n+1$ 个零点(含重数), 则 $f'(x)$, 在 $[a,b]$ 区间至少有 n 个零点(含重数). 归纳地可得, 存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f^{\langle n \rangle}(\xi) = 0$.

♣ n 次插值多项式的存在性可以归纳地证明. 若 $k_0 = k_1 = \ldots = k_m = 1$, 则直接利用 Lagrange 多项式说明存在性. 一般地, 假设有 $n-1$ 次多项式 Q 使得

$$Q^{\langle l \rangle}(x_j) = f^{\langle l \rangle}(x_j), \qquad 0 \le l \le k_j - 1; j = 1, \ldots, m,$$

$$Q^{\langle l \rangle}(x_0) = f^{\langle l \rangle}(x_0), \qquad 0 \le l \le k_0 - 2;$$

(若 $k_0=1$, 则上面第二式自然成立或者说不做要求). 记

$$h=f^{\langle k_0-1\rangle}(x_0)-Q^{\langle k_0-1\rangle}(x_0),$$

以及

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^{k_0-1}(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_m)^{k_m}}{(k_0-1)!(x_0-x_1)^{k_1}\dots(x_0-x_m)^{k_m}},$$

则

$$P(x)=Q(x)+hR(x)$$

为所求的 n 次插值多项式.

♣ 关于习题 3.1.5

严格说来, 满足条件的函数只能恒为 0. 该题理解为题设条件在 0 点的一个适当的领域内成立.

♣ 习题 3.1.6 (i). 我们给出几种解法.

证明 法 I. 讲义中的方法.

法 II. 任取 $n>2M(b-a)$. 记

$$\delta=\frac{b-a}{n},\quad m=\max_{x\in[a,a+\delta]}|f(x)|.$$

由中值定理以及题设条件, $\forall x\in[a,a+\delta]$, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x)-f(a)|=|f'(\xi)(x-a)|\\ &\le M|f(\xi)|\,|x-a|\le Mm\alpha\\ &\le \frac{m}{2},\qquad \forall x\in[a,a+\delta].\end{aligned}$$

所以

$$m\le\frac{m}{2}.$$

这与 $m=0$. 即 $f(x)$ 在 $[a,a+\delta]$ 上为零. 依次类推可得$f(x)$ 在 $[a+\delta,a+2\delta],\dots[a+(n-1)\delta,a+n\delta]$ 上为零. 从而 $f(x)\equiv 0$.

上述证明中, 我们比较容易地取到了与端点无关的 $\delta>0$, 如果这一点不容易做到, 则宜采取"连续性方法的思想", 其写法可以参见第 3.1.19 的法 IV.

法 III. 若 $f'(x)$ 连续, 我们有

$$\begin{aligned}
&|f(x)| = |f(x)-f(a)| \\
= \ & |\int_a^x f'(t)\,dt| \le \int_a^x |f'(t)|\,dt \\
\le \ & \int_a^x M|f(t)|\,dt, \qquad \forall\, x\in[a,b].
\end{aligned}$$

由上式可以进一步可以证明结论. 但是例题中没有假设 $f'(x)$ 的连续性, 鉴于一个可导函数的导函数可能不是 Riemann 可积的, 所以我需要们做以下改造: 考虑

$$F(x) = f(x) - \int_a^x M|f(t)|\,dt, \qquad \forall\, x\in[a,b].$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且

$$F'(x) = f'(x) - M|f(x)| \le 0.$$

所以 $F(x)$ 单调减少, 从而

$$f(x) \le \int_a^x M|f(t)|\,dt, \qquad \forall\, x\in[a,b].$$

类似地

$$-f(x) \le \int_a^x M|f(t)|\,dt, \qquad \forall\, x\in[a,b].$$

这样, 我们可以得到

$$|f(x)| \le \int_a^x M|f(t)|\,dt, \qquad \forall\, x\in[a,b]. \tag{3.1.6}$$

利用上式得到结论是 Grönwall-Bellman 不等式积分形式的一个特例. 下面的证明本质上就是证明 Grönwall-Bellman 不等式的一种方法. 设 m 为 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值. 我们有:

$$|f(x)| \le \int_a^x Mm\,dt = Mm(x-a), \qquad \forall\, x\in[a,b].$$

从而又有

$$|f(x)| \le \int_a^x M\cdot Mm(t-a)\,dt = \frac{M^2m(x-a)^2}{2}, \qquad \forall\, x\in[a,b].$$

归纳地, 可以得到

$$|f(x)| \le \frac{M^n m(x-a)^n}{n!}, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

在上式中令 $n \to +\infty$ 即得 $f(x) \equiv 0$.

另外, 可以利用 (3.1.6) 以及下面的方法 IV, 即定义

$$G(x) = e^{-Mx} \int_a^x |f(t)|\, dt$$

并证明其单调下降得到证明.

法 IV. 本方法本质上是利用证明 Grönwall-Bellman 不等式的另一种方法. 易见

$$\Big(f^2(x)\Big)' = 2f(x)f'(x) \le 2\Big|f(x)f'(x)\Big| \le 2Mf^2(x).$$

令

$$F(x) = e^{-2Mx} f^2(x), \qquad x \in [a,b].$$

则

$$F'(x) = e^{-2Mx}\Big[\Big(f^2(x)\Big)' - 2Mf^2(x)\Big] \le 0.$$

于是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 单调减少. 由 $F(a) = 0$ 以及 $F(x) \ge 0$ 即得 $F(x) \equiv 0$. 即 $f(x) \equiv 0$. □

♣ 习题 3.1.13 提示.

记$M = \dfrac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$. 若结论不真. 则

$$|f''(x)| \le M, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

不妨设 $f(b) > f(a)$. 我们有

$$f'(x) \le M(x-a), \qquad \forall\, x \in [a, \frac{a+b}{2}]. \tag{3.1.7}$$

$$f'(x) \ge -M(b-x), \qquad \forall\, x \in [\frac{a+b}{2}, b]. \tag{3.1.8}$$

从而

$$f(x) - f(a) \le \frac{M(x-a)^2}{2}, \qquad \forall\, x \in [a, \frac{a+b}{2}], \tag{3.1.9}$$

$$f(b)-f(x)\le\frac{M(b-x)^2}{2},\qquad \forall x\in[\frac{a+b}{2},b]. \tag{3.1.10}$$

于是

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f(b)-f(\frac{a+b}{2})+f(\frac{a+b}{2})-f(a)\\ &\le \frac{M(b-\frac{a+b}{2})^2}{2}+\frac{M(\frac{a+b}{2}-a)^2}{2}\\ &= f(b)-f(a). \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

上述过程表明 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 时, (3.1.9) , (3.1.10) 均为等式. 由此可以证明 (3.1.7) 和 (3.1.8) 中等式恒成立. 从而 (3.1.9) , (3.1.10) 均在相应区间上为等式, 即

$$f(x)-f(a)=\frac{M(x-a)^2}{2},\qquad \forall x\in[a,\frac{a+b}{2}],$$

$$f(b)-f(x)=\frac{M(b-x)^2}{2},\qquad \forall x\in[\frac{a+b}{2},b].$$

这与 f 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 有两阶导数矛盾.

♣ 习题 3.1.16 提示

其证明也可用类似连续性方法的思想:

任取 $x\in\mathbb{R}$, 考虑集合

$$F_x\equiv\{y\ge x|f'(y)=f'(x)\}.$$

则由 f' 的连续性, F_x 为闭集. 然后结合题设条件证明 F_x 无界并得到结果.

♣ 思考: 习题 3.1.16 中条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=c$ 改为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=c$ 结论会如何?

♣ 习题 3.1.19 解答.

证明法 I. 考虑

$$F(x)=\begin{pmatrix} f(x)\\ f'(x)\end{pmatrix},\qquad x\in[a,b].$$

则

$$\begin{aligned}|F'(x)| &= \left|\begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(f'(x))^2+(f''(x))^2} \\ &\le (M+1)\sqrt{(f'(x))^2+(f(x))^2} = (M+1)|F(x)|, \qquad x\in[a,b].\end{aligned}$$

任取 $\varepsilon>0$, 考虑

$$G(x)=\sqrt{|F(x)|^2+\varepsilon^2}-(M+1)\int_a^x |F(t)|\,dt.$$

则

$$G'(x)=\frac{\langle F(x),F'(x)\rangle}{\sqrt{|F(x)|^2+\varepsilon^2}}-(M+1)|F(x)|\le 0,\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

从而

$$\sqrt{|F(x)|^2+\varepsilon^2}-(M+1)\int_a^x |F(t)|\,dt\le G(a)=\varepsilon,\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 得到

$$|F(x)|\le (M+1)\int_a^x |F(t)|\,dt,\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

余下部分可以参照习题 3.1.6 进行.

注: (1) 若 $F'(x)$ 有可积性, 可记

$$N=\max_{x\in[a,b]}|F(x)|=\max_{x\in[a,b]}\sqrt{f^2(x)+f'(x))^2}.$$

则我们有

$$|F(x)|=\left|\int_a^x F'(t)\,dt+F(0)\right|\le\int_0^x |F'(t)|\,dt\le (M+1)\int_a^x |F(t)|\,dt.$$

(2) 也可以考虑 $|F(x)|^2$ (见下面的法II).

法 II. 可以直接考虑

$$G(x)=f^2(x)+(f'(x))^2,\qquad x\in[a,b].$$

则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 可导, 且

$$\begin{aligned}G'(x) &= 2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)\\ &\le f^2(x)+2(f'(x))^2+(f''(x))^2\\ &\le (M^2+1)f^2(x)+2(f'(x))^2\le (M^2+2)G(x),\qquad x\in[a,b].\end{aligned}$$

从而

$$\left(e^{-(M^2+2)x}G(x)\right)' \le 0, \qquad x \in [a,b].$$

于是

$$e^{-(M^2+2)x}G(x) \le G(0) = 0, \qquad x \in [a,b].$$

即

$$f(x) = f'(x) = 0, \qquad x \in [a,b].$$

法 III. 考虑

$$\pm f'(x) - M\int_a^x |f(t)|\,dt$$

可以得到

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le M\int_a^x |f(t)|\,dt \\ &= M\int_a^x \left|\int_a^t f'(s)\,ds\right| dt \\ &\le M\int_a^x dt\int_a^x |f'(s)|\,ds \\ &= M(x-a)\int_a^x |f'(t)|\,dt. \end{aligned}$$

由此可得 $f'(x) \equiv 0$. 从而得到最后结论.

法 IV. 记

$$c = \sup\left\{\alpha \in [a,b] | f(x) = 0, \quad \forall\, a \le x \le \alpha\right\}.$$

则 $c \in [a,b]$ 适定且

$$f(x) = 0, \qquad \forall\, a \le x \le c.$$

易见无论 $c > a$ 是否成立都可得

$$f(c) = f'(c) = 0.$$

若 $c = b$, 则结论得证. 否则, 取 $\delta = \min(\dfrac{1}{M+1}, b-c) > 0$, 并记 $m = \max\limits_{s\in[0,\delta]} |f(c+s)|$. 则当 $h \in (0,\delta)$ 时, 存在 $\xi \in (0,h)$ 使得

$$|f(c+h)| \;=\; |f(c) + f'(c)h + \frac{f''(c+\xi)}{2}h^2|$$

$$\begin{aligned} &= \left|\frac{f''(c+\xi)}{2}h^2\right| \le \frac{1}{2}M|f(c+\xi)|h^2 \\ &\le \frac{1}{2}Mm\delta^2 \le \frac{1}{2}m. \end{aligned}$$

从而 $m \le \frac{m}{2}$. 由此即得 $m = 0$. 即

$$f(x) = 0, \qquad \forall x \in [a, c+\delta].$$

与 c 的定义矛盾. 所以 $f(x) \equiv 0$. □

§2. Darboux 定理

♣ **本节安排:** 本节内容应该基本可以在 1 个学时内完成.

♣ 易见利用 Darboux 定理和反证法可得 Lagrange 中值定理, 且这一证明给予 Lagrange 中值定理一种(新的)直觉. 时常, 利用 Darboux 定理更能够看清楚问题.

§3. 极值、零点、不等式

♣ **本节安排:** 本节内容应该基本可以在 1 个学时内完成. 可以与前一节内容合在一起构成一次课.

也可以通过选择某些习题作为例题, 用 2 个学时讲解此节.

♣ 习题 3.3.1 提示.

根据题意有 $a \le a_1 < b_1 \le b$, 使得 $f(a_1) \ne f(b_1)$. 不妨设 $f(a_1) < f(b_1)$.

说明存在一列长度趋于零的区间套 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, 使得

$$f(a_{n-1}) < f(a_n) < f(b_n) < f(b_{n-1}).$$

♣ 习题 3.3.3: 注意闭区间上的凸函数在边界点可以不连续.

♣ 习题 3.3.4 提示.

利用习题 3.3.2 说明多元凸函数关于每个变量连续, 且局部一致连续

而对于二元函数 $f(x,y)$, 若 $f(x,y)$ 关于 x 连续, 关于y 一致连续, 则 $f(x,y)$ 二元连续(参见习题 6.1.9).

♣ 习题 3.3.7 提示.

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(xt)\,dt.$$

也可以先对 f 光滑的情形先证明结论.

♣ 习题 3.3.15 提示.

考虑 $Y(x) = y'(x) - y(x)$. 则 $Y'(x) - Y(x) \geq 0$.

♣ 习题 3.3.16 提示.

考虑

$$\frac{1}{x^k}\Big(x^2 + 3x^3 + 7x^4 - 5x^6 - 8x^7\Big),$$

其中 $k \in [4,6]$.

♣ 习题 3.3.20 提示.

若 n 次多项式 $P_n(x)$ 有n 个实零点: $P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. 则在有定义的范围内,

$$\Big(\ln|P(x)|\Big)'' < 0,$$

展开后得到

$$P''(x)P(x) - [P'(x)]^2 \leq 0.$$

♣ 习题 3.3.25 提示.

(i). 可用有限覆盖定理或"连续性方法" 证明:

用有限有限覆盖定理: 固定 $A < B$, 然后证明 $f(A) < f(B)$.

用"连续方法"证明: 固定 $A < B$, 依次证明 $\{x \in (A,B] | f(x) > f(A)\}$ 非空, 包含上界, 且上界为 B.

(ii) 对 $f(x) + \varepsilon x$ 用 (i) 的结论取极限可得 (ii), 这种思想对于处理一些退化情形非常重要.

♣ 习题 3.3.26 提示.

情形(ii)结论肯定, 可以仿上一题的“连续方法” 证明

♣ 类似问题.

(i) 设 $f \in C(a,b)$. 若

$$\overline{\lim_{y\to x^+}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0, \qquad \forall\, x \in (a,b),$$

则 f 严格单调增加.

(ii) 设

$$\overline{\lim_{y\to x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0, \qquad \forall\, x \in (a,b),$$

是否有 f 严格单调增加?

(iii) 设 f 有介值性. 若

$$\overline{\lim_{y\to x^+}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0, \qquad \forall\, x \in (a,b),$$

是否有 f 严格单调增加?

(iv) 设 $f \in C(a,b)$. 若

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} > 0, \qquad \forall\, x \in (a,b),$$

则 f 严格单调增加.

(v) 设 $f \in C(a,b)$. 若

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} > 0, \qquad \forall\, x \in (a,b),$$

是否有 f 严格单调增加? (注意(ii)的条件强于(v)的条件)

(iv) 的提示: 先证明单调性, 然后可轻易得到严格单调性. 任取 $a < A < B < b$. 研究集合

$$\left\{h \middle| f(C+t) \geq f(C-t), \quad \forall\, t \in [0,h]\right\}$$

的大小, 说明 $\dfrac{B-A}{2}$ 包含于上述集合.

♣ 习题 3.3.28 提示.

关于$f(x)g'(x)$ 的介值性, 考虑 $f(a)g'(a) < \eta < f(b)g'(b)$.

尽量把问题化为 f 保号的情形. 归化到利用 $g'(x) - \dfrac{\eta}{f(x)}$具有介值性.

第四章　积分

§1. Riemann积分定义、Darboux和

♣ 通过本节不难看到用 Riemann 和定义可积性时, 关于划分的任意性可以减弱, 我们只需要考虑任何一列范数趋于零的划分就可以. 比如我们只需要考虑等分.

♣ 如果用 Riemann 和定义可积性时, 代表点总是取成左端点, 而划分保持任意性, 则可积的定义也是等价的. 具体地, 若对任何划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

$[a,b]$ 上有界函数 $f(x)$ 的 Riemann 和

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.1}$$

当 $\|P\| \triangleq \max\limits_{0\le k\le n-1}(x_{k+1} - x_k)$ 趋于零时的极限为常值 γ, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

证明 我们的思路是对于任何 $\delta > 0$, 都有满足 $\|P\| < \delta$ 的划分 P 使得 (4.1.1) 中的 Riemann 和(在此记为 $W(f,P)$)与相应的上和 $U(f,P)$ 很接近.

为此, 任取一个划分 P_0, 使得 $\|P_0\| < \delta$.

设 $[\alpha,\beta]$ 为该划分划出的一个小区间. 我们要在 $[\alpha,\beta]$ 中插入有限个点:

$$\alpha = y_{m+1} < y_m < y_{m-1} < \ldots < y_2 < y_1 < y_0 = \beta$$

使得对于任何 k 成立

$$f(y_{k+1}) \ge \sup_{x\in[y_{k+1},y_k]} f(x) - \delta$$

或者

$$y_k - y_{k+1} \le \frac{(\beta-\alpha)\delta}{2^{k+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

我们按下述方式寻找 $y_1, y_2, \ldots$, 为叙述方便, 我们按一对一对的方式选取:

第一步: 选取 y_1, y_2. 记 $M_0 = \sup\limits_{x\in[\alpha,y_0]} f(x)$,

$$y = \inf\left\{x \in [\alpha,\beta] \middle| f(x) \ge M_0 - \delta\right\}.$$

取 $y_2 = \max\big(\alpha, y - \dfrac{(\beta-\alpha)\delta}{2^4}\big)$. 则当 $y_2 > \alpha$ 时, 有 $\sup\limits_{x\in[\alpha,y_2]} f(x) \le M_0 - \delta$.

若 $y = y_0$, 则任取 $y_1 \in (y_2, y_0)$.

若 $y = \alpha$, 则任取 $y_1 \in (y_0 - \frac{(\beta-\alpha)\delta}{2^4}, y_0)$.

若 $\alpha < y < y_0$, 则可取到 $y_1 \in [y, y_0)$ 使得 $y_1 < y + \dfrac{(\beta-\alpha)\delta}{2^4}$, 且

$$f(y_1) \ge M_0 - \delta \ge \sup_{x\in[y_1,y_0]} f(x) - \delta.$$

如果 $y_2 = \alpha$, 则终止. 否则, 进入下一步.

第二步: 类似地, 在 y_2 的基础上选取 y_3, y_4.

依次, 注意到每一轮选取都可以使得余下的区间中, 上确界至少下降 δ, 因此由 f 的有界性, 可以得到这一选取过程会在有限步内结束.

我们把经过对 P_0 的每一个划出的小区间作插入如上新的分点后产生的新划分记作 P.

我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m} f(y_{j+1})(y_j - y_{j+11}) \\
\ge\ & U_{[\alpha,\beta]}(f,P) - \delta(\beta-\alpha) - 2M\sum_{j=0}^{m}\frac{(\beta-\alpha)\delta}{2^{j+1}} \\
\ge\ & U_{[\alpha,\beta]}(f,P) - (M+1)\delta(\beta-\alpha),
\end{aligned}$$

这里 $U_{[\alpha,\beta]}(f,P)$ 表示相应于划分 P, 函数 f 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的 Darboux 上和, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. 于是

$$W(f,P) \ge U(f,P) - (M+1)\delta(b-a).$$

来似地, 有划分 Q 满足 $\|Q\| < \delta$ 使得

$$W(f,P) \le L(f,P) + 2\delta(b-a).$$

令 $\delta \to 0^+$, 即得

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \gamma \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

从而 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

♣ 前面已经提到, 一个可积函数截断以后不一定是可积的. 即当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积时, 对于给定常数 c,

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{如果 } f(x)\ge c,\\ 0, & \text{如果 } f(x)<c \end{cases}$$

不一定可积. 这样的例子用实变函数的知识来构造比较容易, 但也可以在数学分析框架内得到解决.

♣ 利用测度可以容易地证明有界区间 $[a,b]$ 上的有界函数 Riemann 可积的充要条件是其不连续点为零测度集. 证明如下:

证明 (i) 充分性. 设 $[a,b]$ 上有界函数 $f(x)$ 不是 Riemann 可积的. 则

$$\delta \triangleq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx>0.$$

设 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 此时必有 $M>0$. 令 P_n 表示 $[a,b]$ 的 2^n 等分, 则

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)\ge\delta. \tag{4.1.2}$$

令 $\mathcal{F}_n$ 表示由划分 P_n 划出的小区间中(均约定为闭区间), f 的振幅不小于 $\varepsilon=\frac{\delta}{2(b-a)}$ 的全体, 并设这些小区间的并 E_n 的总长度为 $|E_n|$. 则由 (4.1.2)

$$\delta\le(b-a)\varepsilon+2M|E_n|.$$

从而

$$|E_n|\ge\frac{\delta}{4M}.$$

不难看到 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 中的点都是 $f(x)$ 的不连续点. 为证明这一点, 任取 $\bar{x}\in E$. 则对于任何 n, 存在 $\mathcal{F}_n$ 的一个元 $I_{n,\bar{x}}$ 使得 $\bar{x}\in I_{n,\bar{x}}$. 由于 f 在 $I_{n,\bar{x}}$ 上的振幅不小于 ε, 这表明有 (x_n,y_n) 满足 $|y_n-\bar{x}|\le\dfrac{b-a}{2^n}$, $|x_n-\bar{x}|\le\dfrac{b-a}{2^n}$ 使得 $|f(y_n)-f(x_n)|\ge\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此, $\bar{x}$ 必是 $f(x)$ 的不连续点.

另一方面, 注意到 E_n 是单调下降的集合列, 即:

$$E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq\dots,$$

我们得到 E 的测度

$$|E|=\lim_{n\to+\infty}|E_n|\geq\frac{\delta}{4M}>0.$$

即函数 $f(x)$ 的不连续点不是零测度集合.

(ii) 必要性. 设 $[a,b]$ 上有界函数 $f(x)$ 的不连点是零测度集. 设 M,P_n 如(i)中所定义. 任取 $\varepsilon>0$, , $\mathcal{F}_n$ 表示由划分 P_n 划出的小区间中, f 的振幅不小于 ε 的全体, E_n 为这些小区间的并. 则

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)\leq(b-a)\varepsilon+2M|E_n|.$$

但此时从 (i) 的证明可见, 作为 $f(x)$ 不连续点全体的子集 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 它是零测度集. 所以

$$\bar{\int_a^b}f(x)\,dx-\underline{\int_a^b}f(x)\,dx\leq(b-a)\varepsilon.$$

由此可得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. □

以下几点虽然通常在实变函数论中讲解, 但是在数学分析中讲解没有障碍. 当然, 需要关于有理数的全体是可列的知识.

♣ 设闭集列 $\{E_n\}$ 的并是区间 $[a,b]$, 则可以证明必有一个 E_n 包含内点.

证明 假设结论不真. 则首先, 每一个 E_n 均不包含内点. 这样 $E_1\not\supseteq[a,b]$. 于是有 $x_1\in[a,b]\setminus E_1$. 进而有闭区间 $[\alpha_1,\beta_1]\subset[a,b]$ 使得 $[\alpha_1,\beta_1]\bigcap E_1=\emptyset$. 同理, $E_2\not\supseteq[\alpha_1,\beta_1]$, 并可找到闭区间 $[\alpha_2,\beta_2]\subset[\alpha_1,\beta_1]$ 使得 $[\alpha_2,\beta_2]\bigcap E_2=\emptyset$.

一般地, 有闭区间 $[\alpha_n,\beta_n]\subset[\alpha_{n-1},\beta_{n-1}]$ 使得

$$[\alpha_n,\beta_n]\cap E_n=\emptyset.$$

于是 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n]$ 非空且该集中的点均不属于 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 得到矛盾. □

♣ 可以证明, 若 $\mathbb{R}$ 上一列连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 点点收敛到 $f(x)$, 则 $f(x)$ 的不连续点全体是一列不包含内点的闭集$\{E_n\}$ 的并. 从而 $f(x)$ 必有连续点, 进一步, 它的连续点还在 $\mathbb{R}$ 稠密. 自然这里将定义域换成一般区间也对.

这里证明的关键是两点. 一是对于 $p<q$,

$$f^{-1}\Big((p,q)\Big)\triangleq\{s\in\mathbb{R}|f(s)\in(p,q)\}$$

为一列闭集的并. 这是因为

$$\begin{aligned}f^{-1}\Big((p,q)\Big)&=\Big\{s\in\mathbb{R}|\exists n,k\geq 1,\ s.t.\,p+\frac{1}{n}\leq f_j(s)\leq q-\frac{1}{n},\forall j\geq k\Big\}\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty}\Big\{s\in\mathbb{R}|p+\frac{1}{n}\leq f_j(s)\leq q-\frac{1}{n}\Big\}.\end{aligned}$$

二是 $f(x)$ 的不连续点的全体可以表示为(这一点的证明不依赖于 $f(x)$ 作为连续函数列的极限)

$$\bigcup_{\substack{p<q\\p,q\in\mathbb{Q}}}\Big[f^{-1}(p,q)\setminus\Big(f^{-1}(p,q)\Big)^o\Big],$$

其中 E^o 表示 E 的内部. 由第一点可以得到它是一列不含内点的闭集的并.

♣ 若 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 点点可导, 则由于

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}n\Big[f(x+\frac{1}{n})-f(x)\Big],$$

从而它是一列连续函数列的极限. 因此, $f'(x)$ 必有连续点, 即不存在处处可导但导数处处不连续的例子.

♣ 不难构造 $[a,b]$ 上点点可导的函数 $f(x)$, 其导函数 $f'(x)$ 不是 Riemann 可积的, 这只要构造一个导函数无解的例子即可.

★ 但我们还可以构造出例子, 使得导函数有界, 但导函数不是 Riemann 可积的. 具体构造如下, 设 $x_1,x_2,x_3,\dots$ 为 $[0,1]$ 区间中的所有有理数点. 令

$$U=\bigcup_{k=1}^{\infty}\big(x_k-\frac{1}{4\times 2^k},x_k+\frac{1}{4\times 2^k}\big).$$

则 U 的 Lebesgue 测度不超过 $\frac{1}{2}$, 从而 $E=[0,1]\setminus U$ 的测度不小于 $\frac{1}{2}$. 可以证明 $\mathbb{R}$ 中的开集可以表示成至多可列个互不相交的开区间的并. 因此可以设

$$U=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n).$$

其中 $\{(\alpha_n,\beta_n)\}$ 两两不交(由于 U 的闭包包含 $[0,1]$, 而其测度小于 1, 易见 U 不会是有限个开区间的并).

易见对任何 $\delta>0$, $x^2\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,\delta)$ 内有无穷多个极大值点. 对每一个 k, 任取 $\sigma_k\in\big(0,\dfrac{\beta_k-\alpha_k}{3}\big)$ 为这样一个极大值点, $\xi_k=\sigma_k^2\cos\dfrac{1}{\sigma_k}$ 为相应的极大值.

定义

$$f(x)=\begin{cases}(x-\alpha_k)^2\cos\frac{1}{x-\alpha_k}, & \text{如果}\,\alpha_k<x<\alpha_k+\sigma_k,\quad k=1,2,\dots,\\ \xi_k, & \text{如果}\,a_k+\sigma_k\le x\le\beta_k-\sigma_k,\quad k=1,2,\dots,\\ (x-\beta_k)^2\cos\frac{1}{x-\beta_k}, & \text{如果}\,\beta_k-\sigma_k<x<\beta_k,\quad k=1,2,\dots,\\ 0, & \text{如果}\,x\notin U.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 U 内可导且导数有界. 对于 $x_0\in E$, 若 $x<x_0$, 且 x 属于某个 (α_k,β_k),

则 $x<b_k<x_0$,

$$|f(x)|\le(x-\beta_k)^2\le(x-x_0)^2;$$

若 $x>x_0$, 且 x 属于某个 (α_k,β_k), 则 $x>\alpha_k>x_0$,

$$|f(x)|\le(x-\alpha_k)^2\le(x-x_0)^2;$$

而若 $x\notin U$, 则 $f(x)=0$. 因此, 无论怎样都有

$$|f(x)|\le(x-x_0)^2,\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

由此可得 $f'(x_0)=0$.

注意到 E 中的点可以用 α_k,β_k 逼近, 而在 α_k,β_k 的任意小邻域内, $f'(x)$ 均可取到大于 $\frac{1}{2}$ 的值. 所以正测度集 E 中任何一点都不是 $f'(x)$ 的连续点. 从而 $f'(x)$ 在 $[0,]$ 上不是 Riemann 可积的.

§2. 积分中值定理

♣ 积分第二中值定理的另一个证明.

不妨设 $g(x)$ 单调下降, 记 $h(x)=g(x)-g(b)$, 则 $h(x)\ge h(b)=0$.

记

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\qquad x\in[a,b].$$

对于 $n \geq 2$, 令划分 P_n 表示 $[a,b]$ 的 n 等分, $x_j = a + \dfrac{j(b-a)}{n}$ $(j = 0,1,2,\dots,n)$. 则利用 Abel 变换, 有

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)h(x_k)\frac{b-a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(S_k - S_{k-1}\Big)h(x_k) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n-1} S_k h(x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} S_{k-1}h(x_k) \\
= \ & S_{n-1}h(x_{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-2} S_k\Big(h(x_k) - h(x_{k+1})\Big) \\
\leq \ & \Big[h(x_{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-2}\Big(h(x_k) - h(x_{k+1})\Big)\Big]\max_{0\leq k\leq n-1} S_k \\
= \ & h(a)\max_{0\leq k\leq n-1} S_k \\
\leq \ & h(a)\max_{a\leq s\leq b}\int_a^s f(t)\,dt + h(a)\Big(U(f,P_n) - L(f,P_n)\Big),
\end{aligned}$$

其中

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} f(x_j)\frac{b-a}{n}, \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1,$$

规定 $S_{-1} = 0$. 令 $n \to +\infty$ 得到

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx \leq h(a)\max_{a\leq s\leq b}\int_a^s f(t)\,dt.$$

类似地, 有

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx \geq h(a)\min_{a\leq s\leq b}\int_a^s f(t)\,dt.$$

从而有 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = h(a)\int_a^\xi f(t)\,dt.$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

$\square$

§3. 函数的光滑逼近

♣ 利用光滑逼近证明一些结论的时候, 相应的叙述往往不是最简洁的. 但是由于其中“逼近”部分的证明往往是“标准的”, 在这种意义下, 利用光滑逼近证明不失为一种简单的证明. ♣ 关于讲义中提到的可积函数用连续函数逼近的另一种证

明: 令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{如果 } x\in[a,b], \\ f(a), & \text{如果 } x<a, \\ f(b), & \text{如果 } x>b. \end{cases}$$

对于$\alpha>0$, 定义

$$f_\alpha(x) \;=\; \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha}\tilde{f}(t)\,dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\tilde{f}(x+t)\,dt.$$

设 P 为 $[a,b+1]$ 的一个划分

$$a, a+\alpha, a+2\alpha, \ldots, N\alpha, (N+1)\alpha, b+1,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$, N 满足 $N\alpha<b<(N+1)\alpha$. 不难看到

$$\begin{aligned} & U_{[a,b+1]}(|f_\alpha-\tilde{f}|,P) \\ \le\; & \frac{U_{[a,b+1]}(\tilde{f},P_1)-L_{[a,b+1]}(\tilde{f},P_1)}{2} \\ & +\frac{U_{[a,b+1]}(\tilde{f},P_2)-L_{[a,b+1]}(\tilde{f},P_2)}{2}, \end{aligned}$$

其中上下和均在区间 $[a,b+1]$ 上考虑, P_1, P_2 分别为划分

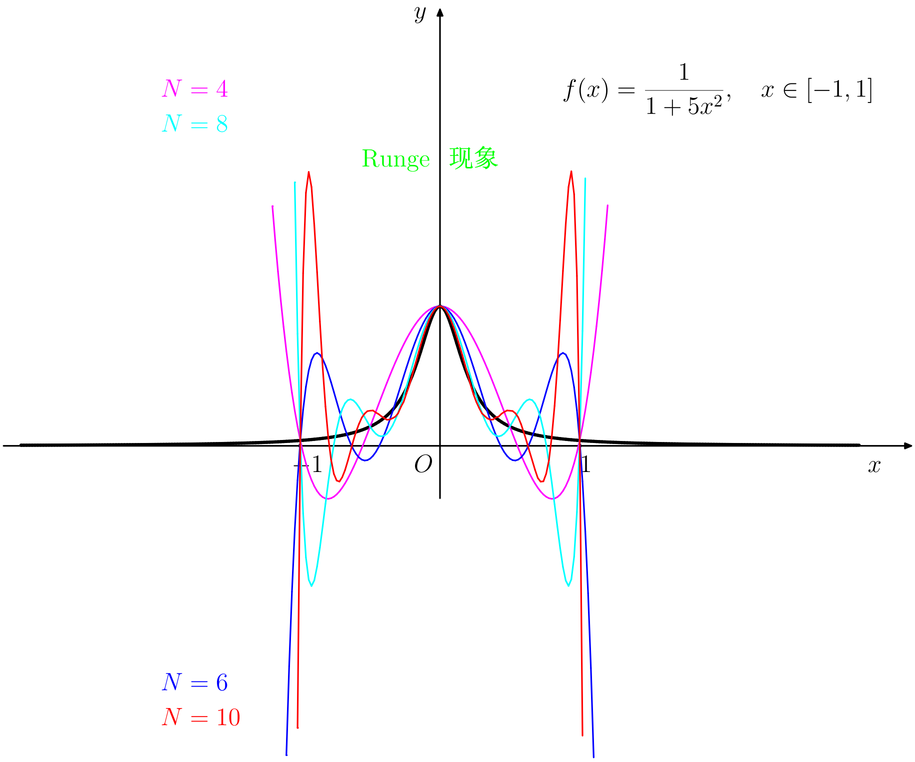
$$a, a+2\alpha, a+4\alpha, \ldots, b+1,$$

和

$$a, a+\alpha, a+3\alpha, \ldots, b+1.$$

♣ 可积函数也可以利用分段常值函数逼近. 有时候比光滑函数更方便

♣ 闭区间上的一个连续函数, 其插值多项式可以不收敛到它, 这就是所谓的Runge现象,



♣ 关于习题 4.3.1, 利用习题 5.3.3 可得更一般的结论.

♣ 习题 4.3.8 提示.

若 φ 是常值函数, ψ 是一次函数, 则 $B_n(\varphi; x) = \varphi$, $B_n(\psi; x) = \psi$. 这样

$$\frac{d}{dx}B_n(f;x) = \frac{d}{dx}B_n(f-\varphi;x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}B_n(f;x) = \frac{d^2}{dx^2}B_n(f-\psi;x).$$

当f是单调函数时, 选择适当的常值函数 φ使得

$$\frac{d}{dx}B_n(f-\varphi;x)$$

的展式中每一项为非负.

当f是凸函数时, 选择适当的一次函数 ψ使得

$$\frac{d^2}{dx^2}B_n(f-\psi;x)$$

的展式中每一项为非负.

注意, φ和ψ的取法依赖于x.

♣ 习题 4.3.10 提示.

不妨设 $\int_0^\pi f(x)\,dx=0$. 然后说明

$$\int_0^\pi f(x)\cos^n x\,dx=0,\qquad \forall\, n=0,1,2,\ldots.$$

变量代换后化为

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}t^n\,dt=0,\qquad \forall\, n=0,1,2,\ldots.$$

最后对 $f(\arccos t)$ 用多项式一致逼近.

自然, 今后也可以用Weierstrass 第二逼近定理.

♣ 习题 4.3.12 提示.

先对 $f(x)$ 充分光滑的情形证明. 此时固定 x 并令 $x_2=x+\delta$, $x_1=x-\delta$. 令 $\delta\to 0^+$ 得到 $f''(x)$ 的估计.

♣ 习题 4.3.13 提示.

对于凹函数 $f(x)$, 其非负当且仅当 $f(0),f(1)\ge 0$.

先考虑 $f(x)$ 有连续的两阶导数, 且$f(0)=f(1)=0$. 此时

$$f''(x)\le 0.$$

则由Taylor 展式,

$$f(x)=f'(0)x+\int_0^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

由 $f(1)=0$ 解出

$$f'(0)=-\int_0^1 (1-t)f''(t)\,dt.$$

从而

$$f(x) = -\int_0^1 G(x,t)\, f''(t)\, dt,$$

其中

$$G(x,t) = t(1-x)\chi_{[0,x]}(t) + x(1-t)\chi_{(x,1]}(t), \qquad t, x \in [0,1].$$

由Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned} \Big(\int_0^1 f^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} &= \Big[\int_0^1 \Big(\int_0^1 G(x,t)\, f''(t)\, dt\Big)^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \ & \int_0^1 \Big(\int_0^1 |G(x,t)\, f''(t)\,|^2\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} dt \\ = \ & \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1 t(1-t)|f''(t)|\, dt, \end{aligned}$$

而

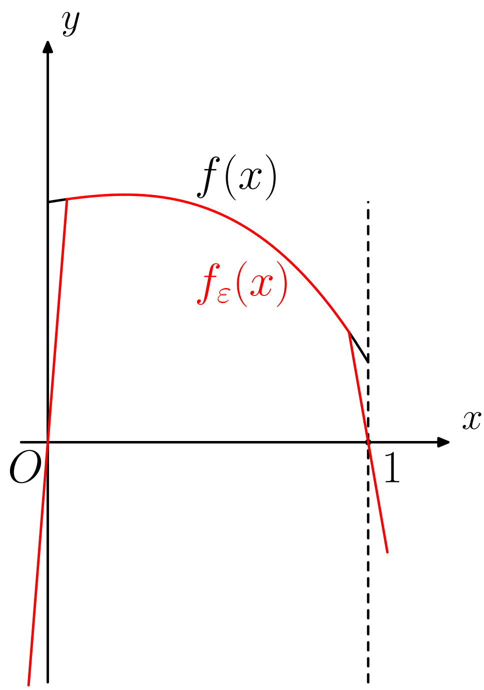
$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\, dx &= \int_0^1 dx \int_0^1 G(x,t)\, f''(t)\, dt \\ = \ & \frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)|f''(t)|\, dt, \end{aligned}$$

结合上两式得到这种情形下结论成立.

一般的情形可以通过逼近得到: 先在左右边界附近分别用直线连接原点和点$(1,0)$, 并延长到 $[0,1]$ 外, 得到近似函数 f_ε, 再用

$$F_\alpha(x) \triangleq \frac{1}{4\alpha^2}\int_{-\alpha}^{\alpha} dt \int_{-\alpha}^{\alpha} f_\varepsilon(t+s+x)\, ds$$

来逼近 f_ε, 这样得到的 F_α 是两阶连续可微的凹函数, 且 α 充分小的时候, $F_\alpha(0) = F_\alpha(1) = 0$.



也可以利用其他形式的光滑凹函数逼近.

♣ 习题 4.3.14 提示.

利用 Darboux 定理说明 $f'(x)$ 连续.

把 x 的范围限制在 $[a, A] \subset (0, +\infty)$ 上. 记

$$\omega(r) = \sup_{\substack{x,y\in[a,A+1] \\ |x-y|\le r}} |f'(x) - f'(y)|, \qquad \forall\, r \in (0, 1).$$

利用

$$\Big(\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f'(t)\,dt\Big)' \ge \int_x^{x+\alpha} \frac{f'(t) - f'(x+\alpha)}{x\alpha}\,dt$$

得到

$$\Big(\frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha} f'(t)\,dt + \omega(\alpha)\ln x\Big)' \ge 0.$$

§4. Riemann 引理及其推广

♣ 可以介绍以下方法证明推广的Riemann引理:

方法I. 利用分段常值函数证明结论:

(i) 先对 $\chi_{[c,d]}$, $[c,d]\subseteq[a,b]$ 验证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \chi_{[c,d]}(x)g(px)\,dx=\frac{d-c}{T}\int_0^T g(x)dx. \tag{4.4.1}$$

(ii) 说明对于形为 $f(x)=\sum_{j=1}^m \chi_{I_j}(x)$ 的函数，成立

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.2}$$

(iii) 最后说明利用可积函数可以用(ii) 中的函数类逼近说明 (4.4.2) 对任何可积函数 f 成立.

方法II. 通过对 $f(x)$ 连续的情形直接证明

(i) 若f连续，且当 $x\ge b$ 时， $f(x)=0$, 则对于 $p>0$，记$M_p=\left[\frac{p(b-a)}{T}\right]$,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(px)\,dx=\sum_{k=0}^{M_p}\int_{a+\frac{kT}{p}}^{a+\frac{(k+1)T}{p}} f(x)g(px)\,dx\\
=\ &\sum_{k=0}^{M_p} f(a+\frac{kT}{p})\frac{1}{p}\int_0^T g(x)\,dx+\sum_{k=0}^{M_p}\int_{a+\frac{kT}{p}}^{a+\frac{(k+1)T}{p}}\Big(f(x)-f(a+\frac{kT}{p})\Big)g(px)\,dx\\
\to\ &\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx. \qquad (4.4.3)
\end{aligned}$$

(ii) 通过上式得到f为可积时的一般结论.

♣ 通过以上两种方法和教材中的方法都可以把定理 4.4.2 推广到高维情形

♣ 习题 4.4.1 提示

1) 可以用连续函数的性质, 提过逼近得到结果

2) 可以定义 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 以及 $G(x)=\int_0^x F(t)\,dt$, 将等式两边都用函数 G 表示出来.

§5.一些重要不等式

♣ 需要特别注意, 本节的证明中省略了许多细节. 以下是其中的一部分.

♣ 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则对任何 $\alpha>0$, $|f(x)|^{\alpha}$ 可积.

Proof. (i) $\alpha=1$. 此时可积性由

$$U(|f|,P)-L(|f|,P)\le U(f,P)-L(f,P)$$

得到.

(ii) $\alpha>1$, 可积性由

$$U(|f|^{a},P)-L(|f|^{\alpha},P)\le \alpha\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|^{\alpha-1}\Big(U(f,P)-L(f,P)\Big)$$

得到. 上式易利用微分中值定理得到. 可以把 $\alpha=1$ 的情形包含进去作为特例.

(iii) $\alpha\in(0,1)$, 此时固定 $\delta>0$, 注意到当 $\alpha\ge b\ge 0$ 且$a>\delta$ 时

$$a^{\alpha}-b^{\alpha}\le \frac{a^{1-\alpha}}{\delta^{1-\alpha}}(a^{\alpha}-b^{\alpha})=\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}\Big(a-a^{1-\alpha}b^{\alpha}\Big)\le\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}\Big(a-b\Big).$$

由此得到

$$U(|f|^{a},P)-L(|f|^{\alpha},P)\le\delta^{\alpha}(b-a)+\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}\Big(U(f,P)-L(f,P)\Big)\tag{4.5.1}$$

并推得 $|f|^{\alpha}$ 可积. □

♣ 定理4.5.3 的结论和证明中涉及到的二次积分的可积性参见上一条以及第56 页

♣ 关于Hölder 不等式证明中用到的 $\int_a^b|f(x)|^p\,dx=0$ 导致 $\int_a^b|f(x)|\,dx=0$ 可以参看 (4.5.1) 式, 对上和建立类似的估计.

♣ 习题 4.5.4 提示.

$$\begin{aligned}&\int_a^b\frac{f(x)}{\sqrt{Mm}}\,dx\cdot\int_a^b\frac{\sqrt{Mm}}{f(x)}\,dx\\ \le\ &\frac{1}{4}\Big(\int_a^b\frac{f(x)}{\sqrt{Mm}}\,dx+\int_a^b\frac{\sqrt{Mm}}{f(x)}\,dx\Big)^2.\end{aligned}$$

第五章　级数

§1. 正项级数

♣ 定理5.1.4, 一些同学对“ $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ 不意味 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散” 理解上有困难.

类似地, $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 不意味 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

♣ 下式成立需要一些说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n-\ln a_{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln(1+\frac{1}{n})}>1$$

$$\Uparrow$$

$$\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)>1.$$

事实上, 若

$$\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)$$

有限, 则

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=0,$$

结论成立. 否则

$$\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=+\infty.$$

注意到

$$\ell\equiv\inf_{x\in(0,1)}\frac{\ln(1+x)}{x}>0,$$

以及

$$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq n\min\Big[\ell\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big),n\ln 2\Big]$$

可得我们所需的推导.

♣ 习题 5.1.7 提示.

求得 α 为非负整数情形的结果, 并以此猜测 α 为一般非负数情形的结果.

最后把问题化为计算

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\dots(n+\alpha)}{n^{\alpha}n!}.$$

♣ 习题 5.1.11 提示.

利用证明Cauchy 积分判别法的思想给出估计.

§2. 任意项级数

♣ 习题 5.2.5 提示.

记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ 为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n|$ 的Cauchy 乘积. 先利用夹逼准则证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\Big).$$

再利用

$$\left|\sum_{n=0}^{m} c_n-\Big(\sum_{n=0}^{m} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{m} b_n\Big)\right|\leq\Big(\sum_{n=0}^{m}|a_n|\Big)\Big(\sum_{n=0}^{m}|b_n|\Big)-\sum_{n=0}^{m} C_n$$

说明结论成立.

§3. 函数项级数的基本性质

♣ 习题 5.3.3 表明任何幂级数都是某个函数的Taylor 展式(但收敛半径可以为零).

§4. 幂级数的基本性质

♣ **Euler 公式** 一些数学分析教材和高等数学教材中没有提及Euler 公式, 在此对此做一梳理.

(i) e^z **的定义.** 对于复数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n)$ 定义其收敛性为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}ib_n$均收敛, 此时定义其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n+i\sum_{n=0}^{\infty}b_n.$$

类似地定义其他相关概念. 利用幂级数对于复数 z 可定义

$$e^z\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\tag{5.4.1}$$

则类似于实数情形, 可以证明上述级数关于$z\in\mathbb{C}$ 内闭一致收敛, 且绝对收敛.

由绝对收敛性得到 $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$.

而直接计算并比较 (5.4.1) 和 $\cos x$, $\sin x$ 的幂级数表示可得 Euler 公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\qquad\forall\,\theta\in\mathbb{R}.$$

结合上述结果, 得到

$$e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta),\qquad\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\tag{5.4.2}$$

(ii) 我们有

$$\cos x=\operatorname{Re}e^{ix}=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x=\operatorname{Im}e^{ix}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2},$$

(iii) **Euler 公式的应用**

无论是利用 (5.4.1) 还是 (5.4.7) 都可以证明对于$\lambda\in\mathbb{C}$, 也成立

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x}.\tag{5.4.3}$$

利用上式可以按以下方式计算

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\operatorname{Re}\int e^{(a+ib)x}\,dx=\operatorname{Re}\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+C,$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\operatorname{Im}\int e^{(a+ib)x}\,dx=\operatorname{Im}\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+C,$$

以及

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(e^{ax}\sin bx\big) = \operatorname{Im}\frac{d^n}{dx^n}e^{(a+ib)x} = \operatorname{Im}\Big((a+ib)^n e^{(a+ib)x}\Big),$$

等等. 利用 Euler公式对于统一处理常微分方程中的一些问题有很大便利.

♣ 指数函数和三角函数在以下方程中得到统一:

$$y''(x) = y(x), \tag{5.4.4}$$

$$y''(x) = -y(x). \tag{5.4.5}$$

$y = e^x, e^{-x}$ 满足 (5.4.9) , 而$y = \cos x, \sin x$ 满足 (5.4.10) .

♣ 在Euler 公式下, 三角级数和幂级数得到统一, 但需要注意, 通常三角级数转化而来的(复值)幂级数, 我们的关注点往往在其收敛域边界. 此时Abel 第二定理可以发挥作用.

♣ 关于教材 (5.4.4) 式和习题 5.4.5 的提示

自然, 这两式都可以由第 5 节的定理直接得到.

以下是利用现有知识的一个证明. 这里给出的关于习题 5.4.5 的证明有一定难度和复杂度.

由教材 (5.4.3),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} = -\ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big), \qquad \forall\, x\in(0,2\pi). \tag{5.4.6}$$

而对任何 $\delta\in(0,\pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

关于 $x\in[\delta, 2\pi-\delta]$ 一致收敛. 因此

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)\,dx = -\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^{2\pi-\delta}\ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)\,dx\\
=&\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^{2\pi-\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\,dx = \lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{\cos nx}{n}\,dx\\
=&-\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\delta}{n^2}\,dx = 0.
\end{aligned}$$

由此可得教材 (5.4.4) 式.

类似地, 我们来计算 $\int_0^\pi \ln^2\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx$.

法 I.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \ln^2\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^\pi \ln^2\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx \\
=\ & \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx \\
=\ & \lim_{\delta\to 0^+}\sum_{n=1}^\infty \int_\delta^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{\cos nx}{n}\,dx \qquad (5.4.7)\\
=\ & \sum_{n=1}^\infty \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{\cos nx}{n}\,dx \qquad (5.4.8)\\
=\ & \sum_{n=1}^\infty \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx \\
=\ & \sum_{n=1}^\infty \lim_{\delta\to 0^+}\sum_{k=1}^\infty \int_\delta^\pi \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx \qquad (5.4.9)\\
=\ & \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^\pi \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx \qquad (5.4.10)\\
=\ & \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx \\
=\ & \sum_{n=1}^\infty \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi^3}{12}.
\end{aligned}$$

(5.4.7) 和 (5.4.9) 成立均主要是由于 $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}$ 关于 $x\in[\delta,\pi]$ 一致收敛. 其中 (5.4.7) 成立是由于 $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$ 关于 $x\in[\delta,\pi]$ 一致收敛; (5.4.9) 成立是由于对于固定的 n, $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}$ 关于 $x\in[\delta,\pi]$ 一致收敛.

(5.4.8) 成立是由于级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_\delta^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx$ 关于 $\delta\in(0,\pi)$ 一

致收敛. 这是因为, 由 $|\sin x| \le \sqrt{x}$ 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\delta^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right| \\
= &\left|\frac{\sin n\delta}{n^2}\ln\left(2\sin\frac{\delta}{2}\right)+\frac{1}{n^2}\int_\delta^\pi \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\sin nx\,dx\right| \\
\le &\frac{1}{n\sqrt{n}}\left|\sqrt{\delta}\ln\left(2\sin\frac{\delta}{2}\right)\right|+\frac{1}{n\sqrt{n}}\int_0^\pi \frac{\sqrt{x}}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx \\
\le &\frac{C}{n\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

其中 $C>0$ 为一常数.

(5.4.10) 成立则是由于对固定的 n, 级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \int_\delta^\pi \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx$ 关于 $\delta\in(0,\pi)$ 一致收敛:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\delta^\pi \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx\right| \\
= &\left|-\frac{\cos n\delta\ \sin k\delta}{nk^2}+\int_\delta^\pi \frac{n\sin nx\ \sin kx}{nk^2}\,dx\right| \\
\le &\frac{\pi+1}{k^2},
\end{aligned}$$

法 II. 本方法与法 I 类似, 但过程略有不同.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \ln^2\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx = \lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^\pi \ln^2\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx \\
= &\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx \\
= &\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^\infty\int_\delta^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{\cos nx}{n}\,dx \\
= &\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^\infty\int_\delta^\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx \\
= &\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\int_\delta^\pi \frac{\cos nx\ \cos kx}{nk}\,dx \\
= &\lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\int_\delta^\pi \frac{\cos(n+k)x+\cos(n-k)x}{nk}\,dx
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta\to0^+}\sum_{n=1}^\infty\Big[-\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin(n+k)\delta}{nk(n+k)}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^\infty\frac{\sin(n-k)\delta}{nk(n-k)}+\frac{\pi-\delta}{2n^2}\Big].$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n=1}^\infty\Big[-\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin(n+k)\delta}{nk(n+k)}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^\infty\frac{\sin(n-k)\delta}{nk(n-k)}\Big]\Big|\\
\le\ &\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\frac{\sqrt{\delta}}{nk\sqrt{n+k}}+\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{\delta}}{nk\sqrt{n-k}}+\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=n+1}^\infty\frac{\sqrt{\delta}}{nk\sqrt{k-n}}\\
=\ &\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\frac{\sqrt{\delta}}{nk\sqrt{n+k}}+2\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=n+1}^\infty\frac{\sqrt{\delta}}{nk\sqrt{k-n}}\\
=\ &\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\frac{\sqrt{\delta}}{nk\sqrt{n+k}}+2\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\frac{\sqrt{\delta}}{n(n+k)\sqrt{k}}\\
\le\ &3\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty\frac{\sqrt{\delta}}{nk\sqrt{n+k}}\\
\le\ &3\sqrt{\delta}\sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\int_1^\infty\frac{1}{nx\sqrt{n+x}}\,dx\Big)\\
=\ &3\sqrt{\delta}\sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\int_{\frac1n}^\infty\frac{1}{n\sqrt{n}x\sqrt{1+x}}\,dx\Big)\\
\le\ &3\sqrt{\delta}\sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\int_1^\infty\frac{1}{n\sqrt{n}x\sqrt{x}}\,dx+\int_{\frac1n}^1\frac{1}{n\sqrt{n}x}\,dx\Big)\\
\le\ &3\sqrt{\delta}\sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{3}{n\sqrt{n}}+\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\Big)\to0.
\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^\pi\ln^2\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)\,dx=\frac{\pi+1}{k^2}.$$

法 III.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi\ln^2\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)\,dx=\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^\pi\ln^2\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)\,dx\\
=\ &\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^\pi\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^n\frac{\cos kx}{k}\Big)^2\,dx=\lim_{\delta\to0^+}\lim_{n\to+\infty}\int_\delta^\pi\Big(\sum_{k=1}^n\frac{\cos kx}{k}\Big)^2\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\Big[\int_0^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\Big)^2dx-\int_0^{\delta}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\Big)^2dx\Big]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2k^2}-\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\Big)^2dx.
\end{aligned}$$

记

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},\qquad x\in(0,\pi),n\geq 1.$$

则当 $\delta>0$ 足够小的时候, 成立

$$\begin{aligned}
|S_n(x)|&\leq\frac{1}{2}+\frac{\Big(\frac{(2n+1)x}{2}\Big)^{\frac{3}{4}}}{2\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}}\\
&\leq \frac{1}{2}+\frac{\pi(n+1)^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt[4]{x}}\leq\frac{\pi n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{x}},\qquad \forall\, n\geq 1,x\in(0,\delta).
\end{aligned}$$

由 Abel 变换,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\Big|&=\Big|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k(x)}{k(k+1)}+\frac{S_n(x)}{n}\Big|\\
&\leq \Big|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k(x)}{k(k+1)}+\frac{S_n(x)}{n}\Big|\leq\frac{\pi}{\sqrt[4]{x}}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\sqrt[4]{k}}+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big)\\
&\leq \frac{C}{\sqrt[4]{x}},\qquad \forall\, n\geq 1,x\in(0,\delta).
\end{aligned}$$

因此,

$$\int_0^{\delta}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\Big)^2dx\leq 2C^2\sqrt{\delta},\qquad \forall\, n\geq 1,x\in(0,\delta).$$

所以

$$\lim_{\delta\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k}\Big)^2dx=0,$$

从而

$$\int_0^{\pi}\ln^2\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

法 IV. 自然, 今后可以直接利用 Fourier 级数的 Parseval 等式.

§5. Fourier 级数的基本性质

♣ 关于逐项可积性推论 5.5.1 可以假设 f 为可积且平方可积.

另外, 可以将一般的结果利用习题 5.5.5 的提示证明一下. 同时解决掉习题 5.5.6.

♣ 连续函数加上一些较弱的其他条件后, 其 Fourier 级数收敛到该函数. 但要保证 Fourier 级数的收敛性, 仅仅有连续性条件是不够的. 一个连续周期函数, 其 Fourier 级数不能点点收敛到该函数, 称为 Fourier 级数的一种奇异性.

从 Г. М. Фихтенгольц 的《微积分教程》可知, 关于 Fourier 级数奇异性的例子最早由 du Bois-Reymond 于1876 年给出(参见 Mark A. Pinsky, Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, Brooks/Cole series in advanced mathematics, 2002, 第一章第六节). Lebesgue 则于 1906 年给出了一个连续函数的例子, 其 Fourier 级数处处收敛, 但不一致收敛.

然而, 这些例子的作法不容易为学生接受, 原因在于其构造方法不够直观, 学生很难理解为什么会想到那样的构造方法.

为此, 我们将构造一些新的例子, 尽管书写起来要复杂一些, 但基本的构造思想显得相对简单和直观. 具体地, 我们将用比较直观的思想构造出所谓具有 "du Bois-Reymond 奇异性质" 以及具有"Lebesgue 奇异性质"的一些通常教材中未见的例子. 详细情况请参见教学研究栏目中的文章"Fourier 级数奇异性的直观例子".

♣ 习题 5.5.5 和 5.5.6

证明 由题设,

$$F(x+2\pi)-F(x)=\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt=\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0.$$

故再由 $f(x)$ 的可积性即可得 $F(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 设 $f(x), F(x)$ 的

Fourier 展开分别为:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$F(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

直接计算 $F(x)$ 的 Fourier 系数得

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\int_0^x f(t)\cos nx\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dt\int_0^x f(t)\cos nx\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin nx}{n}\,dt \\
&= -\frac{b_n}{n}, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

类似地可得 $\beta_n = \dfrac{a_n}{n}$.

因为 $F(x)$ 可以写成

$$F(x) = \int_0^x \frac{|f(t)| + f(t)}{2}\,dt + \int_0^x \frac{f(t) - |f(t)|}{2}\,dt,$$

其中前一项为单调递增函数, 后一项为单调递减函数. 因此由定理 5.5.2 知

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\big), \qquad \forall\, x \in [0, 2\pi].$$

上式中令 $x = 0$ 可得

$$\frac{\alpha_0}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}.$$

这里我们同时得到了 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛. 于是有

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\, dt.
\end{aligned}$$

即对于以 2π 为周期的在 $[0,2\pi]$ 上可积且绝对可积的函数, 若函数在 $[0,2\pi]$ 上的积分为 0, 则其 Fourier 展式可逐项积分.

一般地, 对于在 $[0,2\pi]$ 上的积分不一定为 0 的可积且绝对可积的以 2π 为周期的周期函数, 只需对

$$\tilde{f}(x) \triangleq f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

施行上述结果, 便可得到 Fourier 级数的逐项可积性即教材第五章的 (5.26) 式对可积且绝对可积的函数成立. □

♣ 本节内容表明, 固定$\alpha \in (0,\pi]$, 可以得到, 对于任何 $f \in C^1[-\alpha,\alpha]$, 成立

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}f(x)\, dx = f(0). \tag{5.5.1}$$

特别, 对于$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 成立

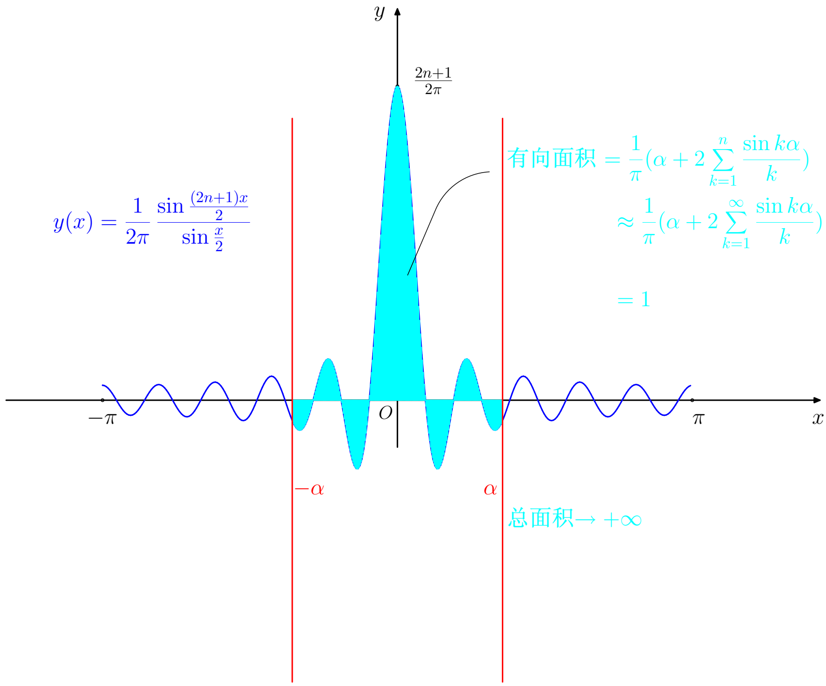
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)f(x)\, dx = f(0). \tag{5.5.2}$$

因此从广义函数的角度看, 函数 $\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)$ 收敛到$\delta(x)$.

而连续周期函数的Fourier 级数不一定点点收敛的反例表明 (5.5.2) 并不对 $\mathbb{R}$ 上所有有紧致集的连续函数都成立. 即函数 $\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)$ 不在测度意义下收敛到 $\delta(x)$. 即

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x)\, dx = f(0), \qquad \forall f \in C_c(\mathbb{R})$$

可以在某些情况下不成立.



一般地,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = f(0), \qquad \forall\, f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \tag{5.5.3}$$

不蕴含在测度意义下成立 $\varphi_n(x) \to \delta(x)$. 但不难证明 (5.5.3) 和

$$\sup_n \int_{-R}^{R} |\varphi_n(x)|\,dx < +\infty, \qquad \forall\, R > 0 \tag{5.5.4}$$

蕴含 $\varphi_n(x) \to \delta(x)$ 在测度意义下成立, 即

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = f(0), \qquad \forall\, f \in C_c(\mathbb{R}) \tag{5.5.5}$$

若 (5.5.4) 成立, 且对任何 $\alpha \in (0, R)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(x)\,dx = 1, \tag{5.5.6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha\le|x|\le R} |\varphi_n(x)|\,dx = 0, \tag{5.5.7}$$

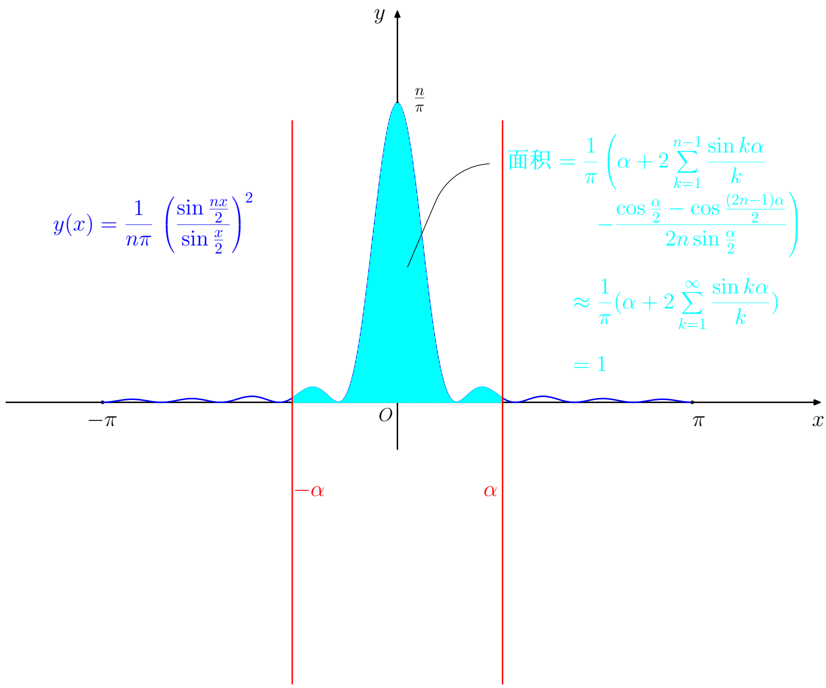
则 (5.5.5) 成立.

限制在 $[-\pi,\pi]$ 上的Fejér 核

$$\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$$

满足 (5.5.4)，(5.5.6)，(5.5.7).

因此限制在 $[-\pi,\pi]$ 上的Fejér 核在测度意义上收敛于 $\delta(x)$.



♣ 习题 5.5.1 和习题 5.5.2 给出了证明Weierstrass 第二定理的另外两种途径.

具体地, 法I：容易证明连续周期函数可用连续可导的周期函数逼近, 连续可导的周期函数一定是Lipschiz 连续的, 这样再利用习题 5.5.1, 可得Weierstrass 第二定理. 法II：连续周期函数可用分段线性的周期函数逼近, 这样再利用习题 5.5.2, 也可得Weierstrass 第二定理.

若有实变函数基础, 则立即能够看到 Lipschiz 连续的函数必然是两个单调函数的和. 证明是容易的: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$上满足 Lipschiz 条件, 且 Lipschiz 常数为 L, 则 $f(x)+Lx$ 单调增加而 $f(x)-Lx$ 单调减少.

♣ 习题 5.5.3 提示.

对于 $[0,1]$上的连续函数 f, 考虑 $F(x)=f(|\cos x|)$.

♣ 习题 5.5.4 提示.

(i) 问题分析: 假设Weierstrass 第一定理成立, 要证明 Weierstrass 第二定理成立, 即 $\forall \varepsilon>0$, 有三角多项式使得

$$\left|f(x)-\left(a+\sum_{n=0}^{N}(\cos nx+\sin nx)\right)\right|\le\varepsilon,$$

自然的需要把三角多项式化为关于$\sin t,\cos t$ 的多项式, 即化为

$$a+\sum_{n=0}^{N}(\cos nx+\sin nx)=P(\sin x,\cos x).$$

不难看到, 比如利用

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx,$$

可知三角多项式中的 $\cos nx$ 可以表示成 $\cos x$ 的多项式 $P(\cos x)$; $\sin(2n+1)x$ 可以表示成 $\sin x$ 的多项式: $Q(\sin x)$; 而 $\sin 2nx$ 可以表示成 $\cos x$ 乘以一个关于 $\sin x$ 的多项式: $R(\sin x)\cos x$.

(ii) 因此我们需要将 $f(x)$ 分成三部分:

$$f(x)\approx P(\cos x)+Q(\sin x)+R(\sin x)\cos x.$$

从以上分析还可以看到 $P(\cos x)$ 可以包含三角多项式中所有的余弦项, 对应于偶函数部分, 所以可以取:

$$P(\cos x)\approx\frac{f(x)+f(-x)}{2}\equiv F(x).$$

此时

$$Q(\sin x)+R(\sin x)\cos x\approx\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

注意到$Q(\sin x)$ 关于 $\dfrac{\pi}{2}$ 对称, 因此

$$Q(\sin x)\approx\frac{f(x)+f(\pi-x)-f(x-\pi)-f(-x)}{4}\equiv G(x),$$

$$R(\sin x) \approx \frac{f(x)+f(x-\pi)-f(-x)-f(\pi-x)}{4\cos x} \equiv H(x).$$

(iii) 说明上面的 $F(x)$ 可以用 $P(\cos x)$ 逼近; $G(x)$ 可以用 $Q(\sin x)$ 逼近; 当 f 连续可导时, $H(x)$ 连续, 且可以用 $R(\sin x)$ 逼近(因此, 先对 f 用周期的连续可导函数逼近).

♣ 习题 5.5.9

先对 f 为 $\cos 2n\pi x$ 或 $\sin 2n\pi x$ 的情形证明结论成立. 从而当 $f = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{m}(a_k\cos 2k\pi x + b_k \sin 2k\pi x)$ 时结论成立.

然后对 $f(0) = f(1)$ 时的连续函数证明结论.

再证明当 μ 是无理数的时候, $\{k\mu\}$ 在 $[0,1]$ 上是均匀分布的. 即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\#\left\{\{k\mu\}\in[a,b]\middle|k=1,2,\ldots,n\right\} = b-a, \qquad 0\le a<b\le 1,$$

其中 $\#E$ 表示集合 E 中元素的个数. 为此, 设 $0<a<b<1$ (其他情形类似可证), 任取 ε 充分小, 可以令 $f_\varepsilon(x)$ 为在 $[0,a-\varepsilon]$ 以及 $[b+\varepsilon,1]$ 上为零, 在 $[a,b]$ 上为 1, 在 $[a-\varepsilon,a]$ 以及 $[b,b+\varepsilon]$ 上分别为线性函数的连续函数. 而令 $g_\varepsilon(x)$ 为在 $[0,a]$ 以及 $[b,1]$ 上为零, 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上为 1, 在 $[a,a+\varepsilon]$ 以及 $[b-\varepsilon,b]$ 上分别为线性函数的连续函数. 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g_\varepsilon(\{k\mu\}) \le \frac{1}{n}\#\left\{\{k\mu\}\in[a,b]\middle|k=1,2,\ldots,n\right\} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\varepsilon(\{k\mu\}).$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_\varepsilon(x)\,dx &\le \varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\#\left\{\{k\mu\}\in[a,b]\middle|k=1,2,\ldots,n\right\}\\ \le&\quad \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\#\left\{\{k\mu\}\in[a,b]\middle|k=1,2,\ldots,n\right\} \le \int_0^1 f_\varepsilon(x)\,dx.\end{aligned}$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$ 即得结论.

最后直接证明 f 为 Riemann 可积的情形.

第六章 多元函数微积分

§1. 一些基本概念的辨析

♣ 关于混合偏导数不可交换的反例. 我们用 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 以及 f_{xy} 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$

我们要构造 $(0,0)$点附近的函数使得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Big)\\ &= \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)}{xy}.\end{aligned}$$

类似地有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)}{xy}.$$

这样, 要使上述两个极限不相等, 一个简单而自然例子便是

$$f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)-f(0,0)+\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{如果 }(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果 }(x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

特别, 可取

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{如果 }(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{如果 }(x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

可以看到, 上面的例子是某种意义上最简单的一个.

♣ 如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的两个混合偏导都存在, 且其中之一在 $(0,0)$ 点连续, 我们可以证明 $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

比如, 设 f_{xy} 在 $(0,0)$ 点连续, 则由微分中值定理,

$$\frac{f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)}{xy}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{xy}\Big[\big(f(x,y)-f(0,y)\big)-\big(f(x,0)-f(0,0)\big)\Big]\\
&= \frac{1}{x}\Big(f_y(x,\theta y)-f_y(0,\theta y)\Big)\\
&= f_{xy}(\sigma x,\theta y),
\end{aligned}
$$

其中 $\theta,\sigma\in(0,1)$. 于是由 f_{xy} 在 $(0,0)$ 点连续可得二重极限

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)}{xy}=f_{xy}(0,0).
$$

这样, 利用二重极限和二次极限之间的关系可得 $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

♣ 习题 6.1.1—6.1.3

分析上，可以把两条直线上的点分别用参数表示出来, 然后利用求两个动点间距离的最小值可以得到两个垂点. 由于是出现两个参数，这里需要用到偏导数. 几何上也可以这样考虑, 如果P_1,P_2分别是公垂线在两条直线上ℓ_1,ℓ_2上的垂足，则$\overrightarrow{P_1P_2}\perp\ell_1,\ell_2$, 由此利用内积, 得到两个关系式, 可以将两个垂足解出来(两直线平行时则有无穷多解). 从而得到空间直线间的距离或公垂线.

同样地, 可以把平面上的点写成含两个参数的动点后, 求之与固定点之间的距离的最小值来求点到平面的距离.

§2. 重积分、曲线曲面积分

♣ 对重积分可以建立相应的 Darboux上和、下和理论

♣ 重积分化为累此积分时的可积性

若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 可积, 对每个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则 $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ 在$[a,b]$上可积, 且

$$
\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.
$$

证明 任取 $[a,b]$ 的划分 $P: a=x_0<x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}=b$ 以及 $[c,d]$ 的划分 $Q: c=y_0<y_1<\ldots<y_m<y_{m+1}=d$, 则 (P,Q) 构成 $[a,b]\times[c,d]$ 的一个

划分. 我们有

$$
\begin{aligned}
U\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy, P\Big) &= \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \int_c^d f(x,y)\,dy\,(x_{i+1}-x_i) \\
&\le \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\,dy\,(x_{i+1}-x_i) \\
&\le \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \sup_{y\in[y_j,y_{j+1}]} f(x,y)(y_{j+1}-y_j)(x_{i+1}-x_i) \\
&= \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} \sup_{\substack{x\in[x_i,x_{i+1}]\\ y\in[y_j,y_{j+1}]}} f(x,y)(y_{j+1}-y_j)(x_{i+1}-x_i) \\
&= U(f,(P,Q)).
\end{aligned}
$$

同理,

$$L\Big(\int_c^d f(x,y)\,dy, P\Big) \ge L(f,(P,Q)).$$

由此及 f 的二重积分存在得结论. □

♣ 关于两个二次积分相等的条件

如果二重积分存在, 两个二次积分也都存在, 由上述结论, 这两个二次积分一定相等.

更一般地, 与直觉有所不同的是, 若两个二次积分都存在, 则它们一定相等. 即不需要假设相应的二重积分存在. 相应的证明可以参看教材之定理 7.5.3.

♣ 关于曲面积分的计算

第二型曲面积分在化为重积分时, 如何选取符号是容易搞错的地方. 宜先以相应的坐标变量为参数化为重积分, 此时容易确定符号. 然后再考虑用坐标变换来计算. 换言之, 我们不建议通过一般的参数方程去计算第二型曲线积分.

当然, 有些情况下, 可以先化为第一型曲面积分后再来进行计算.

第七章　反常积分和含参变量积分

§1. 反常积分

♣ 反常重积分有其特别之处, 它的收敛性等价于绝对收敛. 因此判断一个反常重积分是否收敛, 只要估计被积函数加绝对值后的积分是否有界.

§2. 含参变量反常积分的一致收敛性

§3. 含参变量积分的连续性、微分及积分

§4. 含参变量积分的计算

7.5 Arzelà定理