数学分析高等数学例题选解-V6

本文内容主要是本人在网上解答的部分数学分析和高等数学题. 原始帖子可以通过查找 ytdwdw 的帖子找. 如果相应帖子中, 在本人给出的解答之前有别的解答, 则它们通常是不正确的.

之所以选择这些问题通常是因为它们有趣味或有点难度. 有些则是因为太多人给出了不正确的解答. 另外, 与最初的解答相比, 本文档的解答可能会有所改进.

感谢提供问题的网友, 但因文中题目通常非原创, 所以不一一指出问题由哪些网友提供.

为保持前后版编号的统一, 从 V6 开始, 编号按题目出现的时间排序, 但采用倒序方式把最新的题目放在最前面.

下载本版本前建议搜索有无更新.

目录

80. 计算 $\int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{2-x}\,dx.$

解: 为了把 V6 凑足 80 题, 把这一题也加上.

一直不曾解答此类问题, 因为其实我非常讨厌在数学分析贴吧或者高等数学贴吧看到此类题目: 包括与多重对数和超几何级数等有关的问题. 如果不是作这方面的研究,一般同学完全没有必要在此类问题上花费时间.

而不加声明地给同学们做此类题目, 我只能认为是一种卖弄. 如果觉得这些结论有意思, 可以把相关结论写出来介绍给大家. 相关问题也可以开设一个"特殊函数吧", 加以好好的讨论.

此类题目很多结果的得到相当偶然, 有些结果是作为科研结果在近年来(比如说十年内)才发表的, 它们是研究过程中的副产品. 大家可以明白, 偶然得到一个积分公式, 代入特殊的值得到结果, 和一开始就给出一个积分, 然后找方法算, 是两个难度完全不同的问题. 比如有的人用某种方法可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n^6}$, 但他可能给不出一般的 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n^m}$—尽管实际上我们可以得到后者的计算公式.

如果解决了吃饭问题, 有兴趣的读者自然可以做这方面的研究, 比如尝试去推导 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})^2}{n^m}$ $(k=2,3,\ldots)$ 的计算公式, 成功了(比如对于 $k=3$ 和所有 $m\geq 2$) 就可以找一个正正规规的杂志发表.

但反对把这类题作为数学分析或高等数学练习来做. 有些用留数定理的, 也不适合放在这里.

本题虽然是一个相对来说基本的题目, 而且看起来和第 79 题相近, 但涉及多重对数这一平时我们不接触的函数. 不加说明地作为练习也是不恰当的. 但如果加以必要的说明或者把题目改成以下形式, 那就可以:

(1) 对于 $p>1$, $|x|\leq 1$, 引入多重对数函数:

$$\mathrm{Li}_p(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}.$$

证明 Euler 公式

$$\operatorname{Li}_2(x)+\operatorname{Li}_2(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln x\ln(1-x),\qquad x\in[0,1].$$

(2) 计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln\frac{1}{x}}{2-x}\,dx$.
具体可以解答如下:

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\ln\frac{1}{x}}{2-x}\,dx=-\int_0^1\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{n-1}\ln x\,dx\\ =\ &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}=\operatorname{Li}_2(\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

得到 $\operatorname{Li}_2(\frac{1}{2})$ 的关键是 Euler 公式. 我们有

$$\begin{aligned}&\operatorname{Li}_2(x)+\operatorname{Li}_2(1-x)=\operatorname{Li}_2(0)+\operatorname{Li}_2(1)+\int_0^x\Big(\operatorname{Li}_2(t)+\operatorname{Li}_2(1-t)\Big)'\,dt\\ =\ &\frac{\pi^2}{6}+\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}-\frac{(1-t)^{n-1}}{n}\Big)\,dx=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^x\Big(-\frac{\ln(1-t)}{t}+\frac{\ln t}{1-t}\Big)\,dt\\ =\ &\frac{\pi^2}{6}-\Big(\ln t\ln(1-t)\Big)\Big|_0^x=\frac{\pi^2}{6}-\ln x\ln(1-x),\qquad x\in[0,1].\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2014 年 07 月 17 日

79. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.

解: 法 I. 记

$$\mathrm{Psi}(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},\qquad x>0.$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx+\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx\\
=\;&2\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx=-\int_0^1\frac{\ln x}{2\sqrt{x}(1-x)}\,dx\\
=\;&-\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}\lim_{\beta\to0^+}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=-\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}\lim_{\beta\to0^+}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\\
=\;&-\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}\lim_{\beta\to0^+}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Big[\mathrm{Psi}(\alpha)-\mathrm{Psi}(\beta+\alpha)\Big]\\
=\;&-\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\frac{1}{2}}\lim_{\beta\to0^+}\frac{1}{\beta}\Big[\mathrm{Psi}(\alpha)-\mathrm{Psi}(\beta+\alpha)\Big]=\frac{1}{2}\mathrm{Psi}'(\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

另一方面, 对

$$\ln\Big(\Gamma(\frac{1}{2}-s)\Gamma(\frac{1}{2}+s)\Big)=\ln\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}-s)\pi)},\qquad a\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

求导两次得到 $\mathrm{Psi}'(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{2}$. 所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

法 II.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx=2\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx\\
=\;&-2\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x\,dx=-2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx\\
=\;&2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2014 年 7 月 13 日

78. 设 $a_n > 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ 收敛.

证明: 法 I. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. 于是 a_n 可从小到大进行重排, 设为 $A_1 \le A_2 \le A_3 \le \ldots$. 而

$$\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1}} \le \frac{2n+1}{A_1 + A_2 + \ldots + A_{2n+1}} \le \frac{2n+1}{(n+2)A_n} \le \frac{2}{A_n},$$

$$\frac{2n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}} \le \frac{2n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_{2n}} \le \frac{2n}{(n+1)A_n} \le \frac{2}{A_n}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{A_n} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty.$$

法 II.

事实上可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$ 收敛. 而

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \le \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}.$$

记 $b_n = \frac{1}{a_n}$. 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n} k b_k}{n!}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k b_k}{n\sqrt[n]{n!}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k b_k}{n\sqrt[n]{n!}}$$

而由 Stirling 公式,

$$\sqrt[n]{n!} = \left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))\right]^{\frac{1}{n}} \sim \frac{n}{e}, \qquad n \to +\infty.$$

所以有常数 $C > 0$ 使得

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n\sqrt[n]{n!}} \le C \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n^2} \le 2C.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \le 2C \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty.$$

注: 因为利用 $\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leq \dfrac{b_1 + \ldots + b_n}{n}$ 来证明行不通, 所以尝试用

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = \frac{\sqrt[n]{b_1 \cdot 2b_2 \cdot \ldots \cdot nb_n}}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n}{n\sqrt[n]{n!}}.$$

ytdwdw 于 2014 年 7 月 9 日

77. 设 $f(x,y,z)$ 是椭球 $E \equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ 上的连续函数$(a,b,c>0)$. 证明对于任何 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x,y,z)$ 使得

$$\Big|f(x,y,z)-P(x,y,z)\big| \le \varepsilon, \qquad \forall\,(x,y,z)\in E.$$

证明: 证明思路是利用 Bernstein 多项式.

(i) 容易证明存在 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数 $F(x,y,z)$ 使得

$$F(x,y,z)=f(x,y,z), \qquad \forall\,(x,y,z)\in G.$$

为方便起见, 记 $M=\max(a,b,c)$,

$$G(x,y,z)=F(2Mx-M,2My-M,2Mz-M), \qquad x,y,z\in[0,1].$$

(ii) 有界闭集上的连续函数一致连续. 特别, G 在 $[0,1]^3$ 上一致连续. 记

$$\omega(r)=\max_{\substack{P,Q\in[0,1]^3\\ |PQ|\le r}}|G(P)-G(Q)|.$$

则 $\omega(r)$ 非负, 单调增加, 且 $\lim\limits_{r\to0^+}\omega(r)=0$.

(iii) 对于 $n\ge2$, 定义

$$g_n(x,y,z)=\sum_{i,j,k=0}^{n} G\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\Big)Q_{n,i}(x)Q_{n,k}(y)Q_{n,k}(z), \qquad x,y,z\in[0,1],$$

其中

$$Q_{n,k}(x)\equiv C_n^k x^k(1-x)^{n-k}, \qquad n\ge k\ge0,\ x\in[0,1].$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}Q_{n,k}(x)=1, \quad \sum_{k=1}^{n}(k-nx)^2Q_{n,k}(x)=nx(1-x), \qquad x\in[0,1].$$

于是取 $\delta=\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

$$\begin{aligned}
& |g_n(x,y,z)-G(x,y,z)| \\
= & \Big|\sum_{i,j,k=0}^{n}\Big(G\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\Big)-G(x,y,z)\Big)Q_{n,i}(x)Q_{n,k}(y)Q_{n,k}(z)\Big| \\
\leq & \sum_{i,j,k=0}^{n}\Big[\omega\Big(\Big|\frac{i}{n}-x\Big|\Big)+\omega\Big(\Big|\frac{j}{n}-y\Big|\Big)+\omega\Big(\Big|\frac{k}{n}-z\Big|\Big)\Big]Q_{n,i}(x)Q_{n,k}(y)Q_{n,k}(z) \\
= & \sum_{k=0}^{n}\Big[\omega\Big(\Big|\frac{k}{n}-x\Big|\Big)Q_{n,k}(x)+\omega\Big(\Big|\frac{k}{n}-y\Big|\Big)Q_{n,k}(y)+\omega\Big(\Big|\frac{k}{n}-z\Big|\Big)Q_{n,k}(z)\Big], \\
& \sum_{k=0}^{n}\omega\Big(\Big|\frac{k}{n}-x\Big|\Big)Q_{n,k}(x) \\
= & \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ |\frac{k}{n}-x|\leq\delta}}\omega\Big(\Big|\frac{k}{n}-x\Big|\Big)Q_{n,k}(x)+\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ |\frac{k}{n}-x|>\delta}}\omega\Big(\Big|\frac{k}{n}-x\Big|\Big)Q_{n,k}(x) \\
\leq & \omega(\delta)+\frac{\omega(1)}{\delta^2}\sum_{0}^{n}\Big|\frac{k}{n}-x\Big|^2Q_{n,k}(x) \\
= & \omega(\delta)+\frac{\omega(1)}{n\delta^2}x(1-x)\leq\omega(\delta)+\frac{\omega(1)}{n\delta^2}=\omega(\frac{1}{\sqrt[4]{n}})+\frac{\omega(1)}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon>0$, 取 n 足够大, 便有

$$|g_n(x,y,z)-G(x,y,z)|\leq\varepsilon,\qquad\forall\,x,y,z\in[0,1].$$

令

$$f_n(x,y,z)=g_n\Big(\frac{x+M}{2M},\frac{y+M}{2M},\frac{z+M}{2M}\Big),\qquad x,y,z\in[-M,M],$$

则

$$|f_n(x,y,z)-F(x,y,z)|\leq\varepsilon,\qquad\forall\,x,y,z\in[-M,M].$$

特别

$$|f_n(x,y,z)-f(x,y,z)|\leq\varepsilon,\qquad\forall\,x,y,z\in E.$$

ytdwdw 于 2014 年 5 月 5 日

76. 设 $n \geq 1$, 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^4 dx < \frac{n^2\pi^2}{4}.$$

证明: 记

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \in (0, \pi), \quad n \geq 0,$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{2n}\Big(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\Big)^2, \quad x \in (0, \pi), \quad n \geq 1,$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\Big)^2 dx = \frac{n\pi}{2}, \quad n \geq 1.$$

另一方面, 易证

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^4 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\,\frac{|\sin nx|}{\sin x}\,|\sin nx|\Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^2 dx \\
&< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \times n \times 1 \times \Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^2 dx \\
&= \frac{n^2\pi^2}{4}, \qquad \forall\, n \geq 1.
\end{aligned}$$

进一步, 可以算得(见第 76 页):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^4 dx = \ln 2.$$

ytdwdw 于 2014 年 5 月 4 日

75. 设 $F(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上有连续的四阶偏导数, 满足

$$|\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}|\le M,\qquad \forall\, x,y\in[0,1],$$

$$F(x,0)=F(x,1)=0,\quad F(0,y)=F(1,y)=0,\qquad \forall\, x,y\in[0,1].$$

证明

$$\Big|\iint_{[0,1]\times[0,1]} F(x,y)\,dxdy\Big|\le\frac{M}{144}.$$

证明: 注意到 $F(x,0)=F(x,1)=0$. 求导两次得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,0)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,1)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\Big|\iint_{[0,1]\times[0,1]} F(x,y)\,dxdy\Big|\\
=&\Big|\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}\Big[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Big]\,dxdy\Big|\\
=&\Big|\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{1}{2}\frac{\partial^3 F(x,y)}{\partial x^2\partial y}\Big[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Big](y-\frac{1}{2})\,dxdy\Big|\\
=&\Big|\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{1}{2}\frac{\partial^3 F(x,y)}{\partial x^2\partial y}\Big[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Big](y-\frac{1}{2})\,dxdy\Big|\\
=&\Big|\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{1}{4}\frac{\partial^4 F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\Big[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Big]\Big[(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Big]\,dxdy\Big|\\
\le&\frac{M}{4}\Big|\iint_{[0,1]\times[0,1]}\Big[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Big]\Big[(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\Big]\,dxdy\Big|\\
=&\frac{M}{144},
\end{aligned}$$

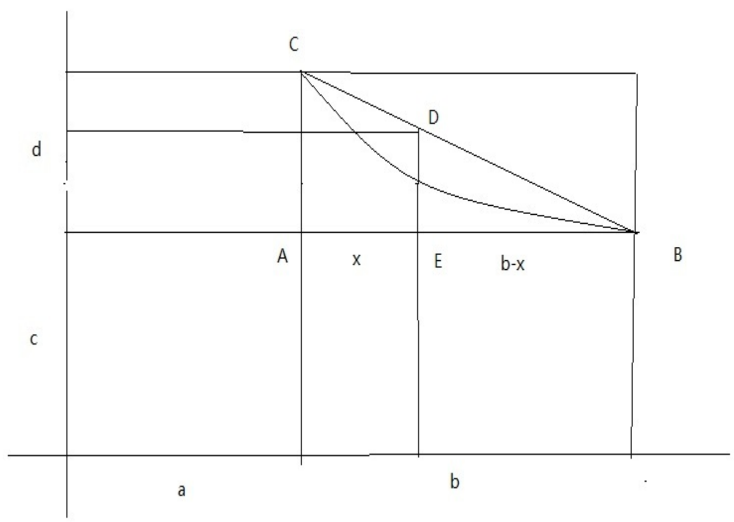
其中前两个等式通过对变量 x 作分部积分得到, 第三第四个等式变量 y 作分部积分得到.

ytdwdw 于 2014 年 5 月 1 日

74. 设 $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上正的单调减少的凸函数. 证明:

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\Big) \leq \frac{[x_n f(x_1) - x_1 f(x_n)]^2}{4(x_n - x_1)(f(x_1) - f(x_n))}. \tag{1}$$

证明:



如图, 曲线 CB 表示函数 f 的图像, 记

$$\begin{aligned} a &= x_1, & b &= x_n - x_1, \\ c &= f(x_n), & d &= f(x_1) - f(x_n), \\ x &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i - a, & h &= DE. \end{aligned}$$

由 f 的凸性知 $(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i))$ 落在曲线 CB 和直线 BDC 围成的(凸)闭区域内. 因此,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) \leq c + h. \tag{2}$$

另一方面, 当 f 在 $[x_1, x_n]$ 为线性函数时, (2) 成为等式. 因此,

$$\begin{gathered}
(1)\ \text{对任何满足条件的 } f \text{ 成立} \\
\Updownarrow \\
(a+x)(c+h) \le \tfrac{[(a+b)(c+d)-ac]^2}{4bd}, \quad h=\tfrac{(b-x)d}{b}, \qquad \forall x\in[0,b]; \quad a,b,c,d>0 \\
\Updownarrow \quad (x \text{ 用 } bx \text{ 替换}) \\
(a+bx)(c+d-dx) \le \tfrac{[(a+b)(c+d)-ac]^2}{4bd}, \qquad \forall x\in[0,1]; \quad a,b,c,d>0 \\
\Updownarrow \quad (a \text{ 用 } ab \text{ 替换}) \\
(a+x)(c+d-dx) \le \tfrac{[(a+1)(c+d)-ac]^2}{4d}, \qquad \forall x\in[0,1]; \quad a,c,d>0 \\
\Updownarrow \quad (c \text{ 用 } cd \text{ 替换}) \\
(a+x)(c+1-x) \le \tfrac{[(a+1)(c+1)-ac]^2}{4}, \qquad \forall x\in[0,1]; \quad a,c>0 \\
\Uparrow \\
(a+x)(c+1-x) \le \tfrac{(a+x+c+1-x)^2}{4}, \qquad \forall x\in[0,1]; \quad a,c>0.
\end{gathered}$$

ytdwdw 于 2014 年 4 月 30 日

73. 设 $a<b<c<d$, $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[b,d]$ 上为凸函数, 证明 $f(x)$ 在 $[a,d]$ 上为凸函数.

解: 对于 $x<y$, 记 k_{xy} 为连接 $(x,f(x))$ 和 $(y,f(y))$ 的直线的斜率. 先作如下观察:

(i) 对于 $x<y<z$,

$$k_{xy}\le k_{yz}\iff k_{xz}\le k_{yz}\iff k_{xy}\le k_{xz}.$$

(ii) 容易证明函数在 $[A,B]$ 上为凸函数, 当且仅当对于任意 $x,y,z\in[A,B]$, $x<y<z$, $k_{xy}\le k_{yz}$.

(iii) 由此还可以证明若 $f(x)$ 是开区间上 (A,B) 内的凸函数, 则它是 (A,B) 内的连续函数.

(iv) 若 f 在 $[A,B]$ 凸, 则 $f(A+)\equiv\lim\limits_{x\to A^+}f(x)$ 和 $f(B-)\equiv\lim\limits_{x\to B^-}f(x)$ 都存在且 $f(A+)\le f(A)$, $f(B-)\le f(B)$.

(v) 若 f 在 (A,B) 凸, 在 $[A,B]$ 上有定义. 则 f 在 $[A,B]$ 凸当且仅当 $f(A+)\le f(A)$, $f(B-)\le f(B)$.

法 I. 现在任取 $x<y<z$, $x,y,z\in[a,d]$.

如果 x,y,z 均在 $[a,c]$ 或均在 $[b,d]$, 则立即得 $k_{xy}\le k_{yz}$ 成立.

否则 $x\in[a,b)$, $z\in(c,d]$. (1) 若 $y\in(a,b)$, 则 $k_{xy}\le k_{yc}\le k_{bc}\le k_{cz}$. 由 (i) 以及 $k_{yc}\le k_{cz}$ 又有 $k_{yc}\le k_{yz}$. 这样就得到 $k_{xy}\le k_{yz}$. (2) 若 $y\in[b,c)$, 则 $k_{xy}\le k_{yc}\le k_{yz}$. (3) 若 $y=c$, 则 $k_{xy}\le k_{bc}\le kyz$. (3) 若 $y\in(c,d)$, 类似 (1) 可证 $k_{xy}\le k_{yz}$.

总之, 对于任何 $x<y<z$, $x,y,z\in[a,d]$, 成立 $k_{xy}\le k_{yz}$. 所以 f 是 $[a,d]$ 上的凸函数.

法 II. 由 (iii)—(v), 只要证明 f 在 (a,d) 凸. 这只要证明对任何 $\varepsilon\in(0,\frac{c-b}{4})$, f 在 $(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 凸. 任取 $\alpha\in(0,\frac{\varepsilon}{4})$, 定义

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha^2}\int_x^{x+\alpha}dt\int_t^{t+\alpha}f(s)\,ds,\qquad x\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon).$$

则 f_α 在 $(a+\varepsilon, c-\varepsilon)$ 和 $(b+\varepsilon, d-\varepsilon)$ 内分别为凸函数, 且有连续的二阶导数. 因此,

$$f_\alpha''(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in (a+\varepsilon, b-\varepsilon).$$

所以 f_α 为 $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ 内的凸函数. 由于 $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} f_\alpha(x) = f(x)$. 所以 f 为 $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ 内的凸函数.

ytdwdw 于 2014 年 4 月 20 日

72. 对于所有有原函数的 g, $f(g)$ 都有原函数，求证 f 是一次函数.

解: 我们分五步证明.

(i) **f 有原函数.**

取 $g(x)=x$. 则得到 f 有原函数. 设 F 为 f 的原函数.

(ii) **F 在 f 有界的区域内满足 Newton-Leibniz 公式.**

若 f 在 (a,b) 内有界. 则 F 在 (a,b) 内满足一致 Lipschitz 条件, 从而绝对连续. 于是对于任何 $x,y\in(a,b)$ 成立 Newton-Leibniz 公式:

$$F(y)-F(x)=\int_x^y f(t)\,dt.$$

注意, 这里的积分是 Lebesgue 积分.

(iii) **设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是非空闭集. 则存在 $x_0\in E$ 以及 $\delta>0$ 使得 f 在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap E$ 上有界[1].**

如若不然, 则对任何 $x\in E$ 和 $\delta>0$, f 在 $[x-\delta,x+\delta]\cap E$ 上无界. 这样, 首先可取到 $x_1\in E$, 使得 $|f(x_1)|\geq 2$. 于是有 $\delta_1>0$ 使得

$$\Big|\frac{F(x_1+\delta_1)-F(x_1-\delta_1)}{2\delta_1}\Big|\geq 1.$$

由于 f 在 $[x_1-\frac{\delta_1}{2},x_1+\frac{\delta_1}{2}]\cap E$ 上无界, 又可以取到 $x_2\in[x_1-\frac{\delta_1}{2},x_1+\frac{\delta_1}{2}]\cap E$ 使得 $|f(x_2)|\geq 4$. 于是有 $\delta_2\in(0,\frac{\delta_1}{2})$ 使得

$$\Big|\frac{F(x_2+\delta_2)-F(x_2-\delta_2)}{2\delta_2}\Big|\geq 2.$$

此时成立

$$[x_2-\delta_2,x_2+\delta_2]\subset(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1).$$

一般地, 有 $x_n\in E$ 以及 $\delta_n>0$ $(n\geq 2)$ 满足

$$\delta_n\leq\frac{\delta_{n-1}}{2},\quad [x_n-\delta_n,x_n+\delta_n]\subset(x_{n-1}-\delta_{n-1},x_{n-1}+\delta_{n-1}),$$

$$\Big|\frac{F(x_n+\delta_n)-F(x_n-\delta_n)}{2\delta_n}\Big|\geq n.$$

[1] 上述结论只有当 E 是完备集(即 E 等于它的导集)时, 才有实质意义.

于是 $[x_n-\delta_n, x_n+\delta_n]$ 有唯一的公共点 ξ, 且 $\xi=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in E$,

$$x_n-\delta_n < x_{n+1}-\delta_{n+1} \le \xi \le x_{n+1}+\delta_{n+1} < x_n+\delta_n, \qquad \forall n \ge 1.$$

而

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{F(x_n+\delta_n)-F(x_n-\delta_n)}{2\delta_n}-f(\xi)\Big| \\
= \ & \Big|\Big(\frac{F(x_n+\delta_n)-F(\xi)}{x_n+\delta_n-\xi}-f(\xi)\Big)\frac{x_n+\delta_n-\xi}{2\delta_n} \\
&\quad +\Big(\frac{F(\xi)-F(x_n-\delta_n)}{\xi-x_n+\delta_n}-f(\xi)\Big)\frac{\xi-x_n+\delta_n}{2\delta_n}\Big| \\
\le \ & \Big|\frac{F(x_n+\delta_n)-F(\xi)}{x_n+\delta_n-\xi}-f(\xi)\Big| \\
&\quad +\Big|\frac{F(\xi)-F(x_n-\delta_n)}{\xi-x_n+\delta_n}-f(\xi)\Big|.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\Big|\frac{F(x_n+\delta_n)-F(x_n-\delta_n)}{2\delta_n}\Big| = |f(\xi)|.$$

另一方面, 由于

$$\Big|\frac{F(x_n+\delta_n)-F(x_n-\delta_n)}{2\delta_n}\Big| \ge n,$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\Big|\frac{F(x_n+\delta_n)-F(x_n-\delta_n)}{2\delta_n}\Big| = +\infty.$$

得到矛盾. 因此要证明的结论成立.

(iv) **函数**

$$g^*(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x\ne 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

有原函数.

取

$$G(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{如果 } x\ne 0, \\ 0, & \text{如果 } x=0, \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}, & \text{如果 } x\ne 0, \\ 0, & \text{如果 } x=0. \end{cases}$$

则

$$\Big(\int_0^x h(t)\,dt - G(x)\Big)' = g^*(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

因此, g^* 有原函数.

(v) **若 f 在 (a,b) 上有界, 则 f 在 (a,b) 内为一次函数.**

任取 y 属于 (a,b), 以及 $\alpha \in (0, \min(y-a, b-y))$. 则函数 $\alpha g^* + y$ 有原函数, $f(\alpha g^* + y)$ 有原函数 H_α. 另一方面,

$$a < \alpha g^*(x) + y \le b, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

因此, $f(\alpha g^*(x) + y)$ 有界. 所以,

$$\begin{aligned} H_\alpha(x) &= H_\alpha(0) + \int_0^x f(\alpha g^*(t) + y)\,dt \\ &= H_\alpha(0) + \int_0^x f(\alpha \cos\frac{1}{t} + y)\,dt, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(y) &= H_\alpha'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(\alpha\cos\frac{1}{t} + y)\,dt \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{f(\alpha\cos t + y)}{t^2}\,dt \\ &= \lim_{x\to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{f(\alpha\cos\frac{t}{x} + y)}{t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos t + y)\,dt \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha\cos t + y)\,dt \qquad (1) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(\alpha t + y)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt. \qquad (2) \end{aligned}$$

以下总设 $x, y \in (a,b)$, $\alpha > 0$ 足够小, z 足够小. 由 (2) ,

$$\begin{aligned} &|f(y) - f(x)| = \frac{1}{\pi}\Big|\int_{-1}^{1} \frac{f(\alpha t + y) - f(\alpha t + x)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\Big| \\ \le\ & \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-1}^{1} \Big|f(\alpha t + y) - f(\alpha t + x)\Big|^4 dt\Big)^{\frac14}\Big(\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-t^2)^{\frac23}}\,dt\Big)^{\frac34}. \end{aligned}$$

由此可见 f 在 (a,b) 连续. 对于 (1) 关于 y 积分, 有

$$F(y)-F(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(F(\alpha\cos t+y)-F(\alpha\cos t+x)\Big)\,dt.$$

两边关于 α 求导得到

$$\int_0^{\pi}\Big(f(\alpha\cos t+y)-f(\alpha\cos t+x)\Big)\cos t\,dt=0.$$

从而

$$\int_0^{\pi}\Big(f(\alpha\cos t+y+z)-f(\alpha\cos t+x+z)\Big)\cos t\,dt=0.$$

再对 z 积分, 得到

$$\int_0^{\pi}\Big(F(\alpha\cos t+y+z)-F(\alpha\cos t+y)-F(\alpha\cos t+x+z)+F(\alpha\cos t+x)\Big)\cos t\,dt=0.$$

再关于 α 求导并令 $\alpha\to 0^+$ 即得

$$\int_0^{\pi}\Big(f(y+z)-f(y)-f(x+z)+f(x)\Big)\cos^2 t\,dt=0.$$

即

$$f(y+z)-f(y)-f(x+z)+f(x)=0.$$

由此可得存在 C_1,C_2 使得

$$f(x)=C_1x+C_2,\qquad \forall\, x\in(a,b).$$

(vi) 记

$$E=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\forall\,\delta>0,\quad s.t.\sup_{|t-x|<\delta}|f(t)|=+\infty\right\}.$$

则易见 E 为闭集.

若 E 非空, 由 (iii), 存在 $x_0\in E$ 以及 $\delta>0$ 使得 f 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有界. 这与 $x_0\in E$ 矛盾.

因此, E 为空集. 即 f 局部有界, 从而在任何有界区间有界.

由 (v), f 在任一有界区间上是一次函数. 自然, 它一定是 $\mathbb{R}$ 上的一次函数.

ytdwdw 于 2014 年 04 月 19 日

71. 求 $n\to+\infty$ 时 $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^a\sin^2 x}\,dx$ 的阶.

解: (i) 若 $a<0$, 则

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^a\sin^2 x}\,dx\sim\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}x\,dx\sim n\pi^2,\quad n\to+\infty.$$

(ii) 若 $a\geq 0$, 则

$$\begin{aligned}
&2n\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n+1)^a\pi^a\sin^2 x}\,dx=n\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+(n+1)^a\pi^a\sin^2 x}\,dx\\
\leq\ &\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^a\sin^2 x}\,dx\\
\leq\ &(n+1)\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+n^a\pi^a\sin^2 x}\,dx=2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+n^a\pi^a\sin^2 x}\,dx.
\end{aligned}$$

对于 $B>0$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+B^2\sin^2 x}\,dx\xlongequal{t=\tan x}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+(1+B^2)t^2}\\
=\ &\frac{1}{\sqrt{1+B^2}}\arctan(\sqrt{1+B^2}\,t)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+B^2}}.
\end{aligned}$$

所以, 若 $a=0$, 则

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^a\sin^2 x}\,dx\sim\frac{\sqrt{2}}{2}n\pi^2,\quad n\to+\infty.$$

若 $a>0$, 则

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^a\sin^2 x}\,dx\sim\pi^{2-\frac{a}{2}}n^{1-\frac{a}{2}},\quad n\to+\infty.$$

ytdwdw 于 2014 年 4 月 6 日

70. 设函数在区间 I 上可导且 $f'(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调.

证明: 本例比较简单, 需要注意的是如何把论证过程讲清楚.

法 I: 利用中值定理证明. 我们依次有

1) 若 $x, y \in I$, $x < y$, 则 $f(x) \neq f(y)$.

   否则, 由中值定理, 存在 $\xi \in (x, y)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. 与假设矛盾.

2) 设 $a < x < b$, $a, x, b \in I$ 我们要证明 $f(a) < f(x) < f(b)$ 或 $f(a) > f(x) > f(b)$ 成立. 由 (1), $f(a) \neq f(x)$, $f(x) \neq f(b)$. 不妨设 $f(a) < f(x)$. 我们要证 $f(x) < f(b)$.

   否则, $f(x) > f(b)$, 记 $\eta = \max(f(a), f(b))$, 则 $\eta < f(x)$. 任取 $\delta \in (\eta, f(x))$. 则存在 $\xi_1 \in (a, x)$ 以及 $\xi_2 \in (x, b)$ 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \delta$. 这与 (1) 矛盾.

3) 一般说来, 证明到上一步就可以直接说 f 严格单调. 严格来讲, 我们需要进一步的说明.

   任取 $a < b$, $x < y$, 我们要证 $f(b) - f(a)$ 与 $f(y) - f(x)$ 同号.

   令 $X = \min(a, b, x, y)$, $Y = \max(a, b, x, y)$. 则由 (1), 不妨设 $f(X) < f(Y)$. 由 (2), $f(Y) > f(a)$. 进而又有 $f(b) > f(a)$. 同样, 成立 $f(y) > f(x)$.

总之 f 在 I 上严格单调.

法 II: 利用 darboux 定理.

由(微分) Darboux 定理 $f'(x)$ 在 I 上恒正或者恒负. 若 $f'(x)$ 恒正, 则立即得到 $f(x)$ 严格单调增加. 若 $f'(x)$ 恒负, 则 $f(x)$ 严格单调减少.

ytdwdw 于 2014 年 2 月 3 日

69. 证明: $x \equiv \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-m}}{7^{\frac{(7k+5)k}{2}}}$ 为无理数.

证明: 有理数可表为有限小数或者无限循环小数. 所以大家都可以看出

$$0.1010010001... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\frac{k(k+1)}{2}}}$$

为无理数. 但不见得可以写出严格的证明. 本题与之类似, 关键在于如何把道理讲清楚.

记 $n_k = \frac{(7k+5)k}{2}$ $(k \geq m)$.

若 x 为有理数 $\frac{q}{p}$, 考虑

$$x, 7x, 7^2x, 7^3x, \ldots, 7^px,$$

写成以 p 为分母的带分数以后, 其中必有两个有相同的分子. 即存在 $p \geq M > N \geq 0$, 使得 $7^Mx - 7^Nx$ 为整数.

特别当 $n_k \geq N$ 时, $7^{M-N+n_k}x - 7^{n_k}x$ 为整数.

另一方面, 当 $n_{k+1} - n_k > M - N$ 时, 易见 $7^{M-N+n_k}x - 7^{n_k}x$ 不为整数.

所以 x 为无理数.

ytdwdw 于 2014 年 1 月 8 日

68. 设 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 以 1 为周期, $f(x) + f(x + \frac{1}{2}) = f(2x)$. 证明: $f(x) \equiv 0$.

证明: 设 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi x + b_k \sin 2k\pi x).$$

则 $f(x) + f(x + \frac{1}{2})$ 的 Fourier 展式为

$$\begin{aligned} & a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(1 + (-1)^k) a_k \cos 2k\pi x + (1 + (1 + (-1)^k) b_k \sin 2k\pi x\Big] \\ = \quad & a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (2a_{2k} \cos 4k\pi x + 2b_{2k} \sin 4k\pi x). \end{aligned}$$

而 $f(2x)$ 的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 4k\pi x + b_k \sin 4k\pi x).$$

比较系数得到 $a_0 = 0$,

$$a_k = 2a_{2k}, \quad b_k = 2b_{2k}, \qquad k \geq 1.$$

从而

$$a_k = 2^n a_{2^n k}, \quad b_k = 2^n b_{2^n k}, \qquad \forall\, k \geq 1, n \geq 1.$$

注意到 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$, 从而

$$\lim_{n \to +\infty} n a_n = \lim_{n \to +\infty} n b_n = 0.$$

所以

$$a_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{k} 2^n k a_{2^n k} = 0, \quad b_k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{k} 2^n k b_{2^n k} = 0, \qquad \forall\, k \geq 1.$$

这样 $f(x)$ 的 Fourier 系数均为零. 所以 $f(x) \equiv 0$. □

注: 关于 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 的条件可以减弱为: 设 $g(x)$ 以 1 为周期, 可积且绝对可积, $\int_0^1 g(x)\, dx = 0$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\, dt$.

ytdwdw 于 2014 年 1 月 6 日

67. 证明: 设 $\alpha \in (0,1]$. 则函数 $f \in C^{2,\alpha}[a.b]$ 的充要条件是存在常数 $C>0$ 使得对于任何 $x \in [a,b]$, 存在二次多项式 P_x 使得

$$|f(y)-P_x(y)| \le C|y-x|^{2+\alpha}, \qquad \forall\, y \in [a,b],\ |y-x| \le 1.$$

证明: **必要性.** 对任何 $x \in [a,b]$, 由 Taylor 展式得到

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\int_x^y (y-t)f'(t)\,dt, \qquad \forall\, y \in [a,b].$$

令

$$P_x(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2.$$

则对任何 $y \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |f(y)-P_x(y)| &= \Big|\int_x^y (y-t)(f'(t)-f''(x))\,dt\Big| \\ \le\ & \int_x^y (y-t)\Big|f'(t)-f''(x)\Big|\,dt \le C\int_x^y (y-t)\,|t-x|^\alpha\,dt \\ \le\ & C|y-x|^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

充分性. 记

$$P_x(t)=p(x)+q(x)(t-x)+Q(x)(t-x)^2.$$

则 $\forall\, y \in [a,b]$, $|y-x| \le 1$,

$$|f(y)-p(x)-q(x)(y-x)-Q(x)(y-x)^2| \le C|y-x|^{2+\alpha}. \tag{1}$$

(i) **首先证明 $f(x)=p(x)$, $f'(x)=q(x)$:** 令 $y=x$ 即得 $f(x)=p(x)$. 从而在 (1) 两边除以 $y-x$, 并令 $y \to x$ 即得 $f'(x)=q(x)$.

(ii) **再来证明 $Q(x) \in C^\alpha[a,b]$:** 任取 $x,y \in [a,b]$, $|y-x| \le 2$, 令 $z=\frac{x+y}{2}$. 则

$$|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)-Q(x)(y-x)^2| \le C|y-x|^{2+\alpha}, \tag{2}$$

$$|f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)-Q(y)(y-x)^2| \le C|y-x|^{2+\alpha}, \tag{3}$$

$$|f(z)-f(x)-f'(x)\frac{y-x}{2}-Q(x)\frac{(y-x)^2}{4}| \le \frac{C|y-x|^{2+\alpha}}{2^{2+\alpha}}, \tag{4}$$

$$|f(z)-f(y)-f'(y)\frac{x-y}{2}-Q(y)\frac{(y-x)^2}{4}| \le \frac{C|y-x|^{2+\alpha}}{2^{2+\alpha}}. \tag{5}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{3|Q(y)-Q(x)|(y-x)^2}{4}=\Big|I-II-2(III-IV)\Big|\\ \leq\quad&(2+\frac{4}{2^{2+\alpha}})C|y-x|^2,\end{aligned}$$

其中 I, II, III, IV 分别表示 (2) – (5) 四个不等式左边绝对值内的部分. 从而

$$|Q(y)-Q(x)|\leq 4C|y-x|^\alpha.$$

即 $Q\in C^\alpha[a,b]$.

(iii) **最后证明** $f''(x)=2Q(x)$**：** 我们有

$$\begin{aligned}&|(f'(y)-f'(x))(y-x)-2(Q(y)+Q(x))(y-x)^2|\\ =\quad&\Big|I+II\Big|\leq 2C|y-x|^{2+\alpha}.\end{aligned}$$

上式两边除以 $(y-x)^2$ 并令 $y\to x$ 即得 $f''(x)=2Q(x)$.

所以 $f\in C^{2,\alpha}[a,b]$.

注：在充分性的证明中，我们没有预先假设 f **有一阶两阶导数**.

ytdwdw 于 2013 年 12 月 31 日

66. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数, 满足

$$|f(x)-f(y)| \le |x-y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

考察函数 $g(x)=x+f(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{g(g(\cdots g}^{n}(x)\cdots))}{n}$$

存在且不依赖于 x 的选择.

证明: 记

$$g_0(x)=x, \quad g_{n+1}(x)=g(g_n(x)), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, n \ge 0.$$

易见

$$\begin{aligned}(g(x)-g(y))(x-y) &= (x-y)^2-(f(x)-f(y))(x-y)\\ &\ge (x-y)^2-(x-y)^2=0, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

因此, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调增加.

另一方面, 易见对于任何整数 k, 成立

$$g_n(x+k)=k+g_n(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, n \ge 0.$$

这样, $\forall\, m, n \ge 0$, 我们有

$$\begin{aligned}&g_{m+n}(0)=g_m(g_n(0))\\ =\ &[g_n(0)]+1+g_m(g_n(0)-[g_m(0)]-1)\\ \le\ &g_n(0)+g_m(0)+1\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&g_{m+n}(0)=g_m(g_n(0))\\ =\ &[g_n(0)]+g_m(g_n(0)-[g_m(0)])\\ \ge\ &g_n(0)-1+g_m(0).\end{aligned}$$

其中 $[r]$ 表示 r 的整数部分. 总之,

$$g_n(0)+g_m(0)-1 \le g_{m+n} \le g_n(0)+g_m(0)+1, \qquad \forall\, m,n \ge 0.$$

于是立即可以得到

$$mg_n(0)-(m-1) \le g_{mn}(0) \le ng_m(0)+n-1, \qquad \forall\, m,n \ge 1.$$

从而

$$\frac{g_n(0)}{n}-\frac{g_m(0)}{m} < \frac{1}{m}+\frac{1}{n}, \qquad \forall\, m,n \ge 1.$$

这表明 $\left\{\dfrac{g_n(0)}{n}\right\}$ 是 Cauchy 列, 从而有极限. 设为 L.

而 $\forall\, x \in \mathbb{R}$, 有

$$\frac{[x]+g_n(0)}{n} \le \frac{g_n(x)}{n} \le \frac{[x]+1+g_n(0)}{n}.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{g_n(x)}{n}=L.$$

注: 题中 Lipshitz 条件可以减弱为

$$(f(x)-f(y))(x-y) \le (x-y)^2, \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

注意这一条件下 f 可以不连续.

ytdwdw 于 2013 年 12 月 29 日

65. 设有界数列 a_n 满足 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n\to 0$, 问是否有 $a_{n+1}-a_n\to 0$?

证明: 给大家提供一个有意思的思路.

对于连续情形, 如果 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两阶导数, 则成立 Landau 不等式(在右端不出现 $0*\infty$ 的状况时)

$$\sup_{x\geq X}|f'(x)|\leq 2\sqrt{\sup_{x\geq X}|f(x)|\cdot\sup_{x\geq X}|f''(x)|},\qquad \forall\, X>0.$$

或等价地,

$$\sup_{x\geq X}|f'(x)|\leq \alpha\sup_{x\geq X}|f(x)|+\frac{1}{\alpha}\sup_{x\geq X}|f''(x)|,\qquad \forall\, X>0,\ \alpha>0.$$

利用 Landau 不等式易得, 如果 $f(x)$ 有界, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

那么对于离散情形是否有类似结论? 我们的回答是肯定的.

记 $\triangle a_n\equiv a_{n+1}-a_n$, $\triangle^2 a_n\equiv\triangle a_{n+1}-\triangle a_n=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$. 则对于任何 $k\geq 2$, $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} a_{n+k}-a_n=\sum_{j=0}^{k-1}\triangle a_{n+j}&=k\triangle a_n+\sum_{j=1}^{k-1}\Big(\triangle a_{n+j}-\triangle a_n\Big)\\ &=k\triangle a_n+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{j-1}\triangle^2 a_{n+i}.\end{aligned}$$

因此,

$$\sup_{n\geq N}|\triangle a_n|\leq\frac{2}{k}\sup_{n\geq N}|a_n|+\frac{k-1}{2}\sup_{n\geq N}|\triangle^2 a_n|,\qquad \forall\, N\geq 1, k\geq 2.$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to+\infty}}|\triangle a_n|&\leq\frac{2}{k}\overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_n|+\frac{k-1}{2}\overline{\lim_{n\to+\infty}}|\triangle^2 a_n|\\ &=\frac{2}{k}\overline{\lim_{n\to+\infty}}|a_n|,\qquad \forall\, k\geq 2.\end{aligned}$$

上式中令 $k\to+\infty$ 就得到 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}|\triangle a_n|\leq 0$. 这就是 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

注: 给了上面的解答, 大家可以轻易地把结论推广为: 如果 a_n 是有界列, 且对于某个 $K \geq 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \triangle^K a_n = 0$. 则对于任何 $k = 1, 2, \ldots, K-1$, 成立 $\lim\limits_{n\to+\infty} \triangle^k a_n = 0$.

ytdwdw 于 2013 年 1 月 15 日

64. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续可导函数, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > f(f(x))$. 证明: $\forall x \geq 0$, $f(f(f(x))) \leq 0$.

证明: 分四步证明结论.

I. 断言 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$.

如若不然, 则存在 $X_0 > 0$ 使得当 $x > X_0$ 时, $f(x) \geq 2$, 进一步有 $X_1 > X_0$ 使得当 $x > X_1$ 时, $f(x) \geq X_0$. 特别, 有

$$f(f(x)) \geq 2, \qquad \forall x \geq X_1.$$

从而

$$f'(x) > f(f(x)) \geq 2, \qquad \forall x \geq X_1.$$

所以

$$f(x) \geq f(X_1) + 2(x - X_1) \geq 2 + 2x - 2X_1 \geq x + 2, \qquad \forall x \geq 2X_1.$$

于是注意到 f 在 $[X_1, +\infty)$ 上单调增加且为正, 对于 $x > 2X_1$, 存在 $\xi \in (x, f(x))$, 使得

$$f(f(x)) - f(x) = f'(\xi)(f(x) - x) \geq f(f(\xi)) \times 2 \geq 2f(f(x)).$$

矛盾.

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$.

II. 若对某个 x_0 成立 $f(f(x_0)) \geq 0$, 我们断言

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0), & \forall x > x_0, \\ f(x) < f(x_0), & \forall x < x_0. \end{cases}$$

首先注意到 $f'(x_0) > f(f(x_0)) \geq 0$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(x) > f(x_0), \qquad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

若存在 $x_1 > x_0$ 使得 $f(x_1) \leq f(x_0)$. 则可定义 $\xi \equiv \min\{x \in (x_0, x_1] | f(x) \leq f(x_0)\}$. 我们有 $f(\xi) = f(x_0)$ 以及

$$f(x) > f(x_0), \qquad \forall x \in (x_0, \xi).$$

于是

$$f'(\xi) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \leq 0.$$

而

$$f'(\xi) > f(f(\xi)) = f(f(x_0)) \geq 0.$$

矛盾. 所以 $f(x) > f(x_0)$, $\forall\, x > x_0$. 类似地证明 $f(x) < f(x_0)$, $\forall\, x < x_0$.

III. 断言 $\forall\, x > 0$, 成立 $f(x) < x$.

如若不然, 则存在 $x_0 > 0$ 使得 $f(x_0) \geq x_0$. 而由于 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$, 所以当 x 充分大时, 必有 $f(x) < x$. 由介值定理, 存在 $a \in [x_0, +\infty)$ 使得 $f(a) = a$. 特别 $f(f(a)) = a > 0$. 由 II,

$$f(x) > f(a) = a, \qquad \forall\, x > a.$$

于是又有

$$f(f(x)) > a, \qquad \forall\, x > a$$

以及

$$f'(x) > f(f(x)) > a > 0, \qquad \forall\, x > a.$$

与 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$ 矛盾.

IV. 断言 $\forall\, x > 0$, 成立, $f(f(f(x))) \leq 0$.

否则存在 $y > 0$ 使得 $f(f(f(y))) > 0$.

(i) 我们先证 $f(f(y)) \leq 0$, 否则 $f(f(y)) > 0$. 则由 II,

$$f(x) > f(y), \qquad \forall\, x > y.$$

再一次利用 II 的结论(取 $x_0 = f(y)$) 得到

$$f'(x) > f(f(x)) > f(f(y)), \qquad \forall\, x > y.$$

这与 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$ 矛盾.

(ii) 因为 $y > 0$, 由 III 得 $f(y) < y$, 于是由 II (取 $x_0 = f(y)$) 得到 $f(f(y)) < f(y)$. 再由 II (仍然取 $x_0 = f(y)$) 得到 $f(f(f(y))) < f(f(y))$. 结合 IV(i) 的结论即得 $f(f(f(y))) < 0$. 与假设矛盾.

总之, 并由 f 的连续性, 可得

$$f(f(f(x))) \le 0, \qquad \forall x \ge 0.$$

□

ytdwdw 于 2013 年 1 月 10 日

63. 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$.

解: 问题很简单. 但我们希望下面的解答是一种能够给人以直觉的解答.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}\\
=\ &\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin 3x}{3x}+\ln 3+\ln x}{\ln\frac{\sin 2x}{2x}+\ln 2+\ln x}\\
=\ &\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln\frac{\sin 3x}{3x}}{\ln x}+\frac{\ln 3}{\ln x}+1}{\frac{\ln\frac{\sin 2x}{2x}}{\ln x}+\frac{\ln 2}{\ln x}+1}=1.
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2013 年 1 月 3 日

62. 设 $n \ge 1$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且满足

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0, \qquad k = 0,1,\dots,n-1,$$

$$\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 1.$$

证明: $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| > 2^n(n+1)$.

证明: 若结论不真, 则

$$|f(x)| \le 2^n(n+1), \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

于是

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \Big(x-\frac{1}{2}\Big)^n f(x)\,dx \le \int_0^1 \Big|x-\frac{1}{2}\Big|^n |f(x)|\,dx \\ &\le 2^n(n+1)\int_0^1 \Big|x-\frac{1}{2}\Big|^n dx = 1. \end{aligned}$$

这意味着

$$|f(x)| = 2^n(n+1), \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

而由 $f(x)$ 的连续性, 可知

$$f(x) = 2^n(n+1), \qquad \forall\, x \in [0,1]$$

或

$$f(x) = -2^n(n+1), \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

这又与 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ 矛盾. 这就证明了结论. □

ytdwdw 于 2012 年 12 月 30 日

可以对上述问题做进一步分析. 如果 $f(x)$ 的连续性改为可积性, 则用前面的方法可以证明 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\ge 2^n(n+1)$.

进一步, 记首项系数为 1 的 n 次多项式全体为 $\mathcal{M}_n$, 则 $\forall P(x)\in\mathcal{M}_n$, 我们有

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^1 P(x)f(x)\,dx \le \int_0^1 \Big|P(x)\Big|\,|f(x)|\,dx\\ &\le \max_{x\in[0,1]}|f(x)|\int_0^1\Big|P(x)\Big|\,dx = 1.\end{aligned}$$

由此可得

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\ge \frac{1}{\inf\limits_{P\in\mathcal{M}_n}\displaystyle\int_0^1\Big|P(x)\Big|\,dx}.$$

我们的问题是上述结果在一定意义上是否为最优. 另外, 使得 $\displaystyle\int_0^1\Big|P(x)\Big|\,dx$ 取到最小的 $P\in\mathcal{M}_n$ 是什么?

为此, 我们待定 $0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}=1$, 并定义

$$g(x)=(-1)^k,\qquad x\in[x_k,x_{k+1});\ k=0,1,\ldots,n.$$

$g(1)$ 可以定义为 1 或 -1.

我们要求

$$\int_0^1 x^k g(x)\,dx=0,\qquad k=0,1,\ldots,n-1.$$

上式等价于

$$\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}x_k^j=\frac{(-1)^{n-1}}{2},\qquad j=1,2,\ldots,n.$$

观察可得(哈, 千万别信这句话!)

$$x_k=\sin^2\frac{k\pi}{2n+2},\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

进一步可得此时

$$c\equiv\int_0^1 x^n g(x)\,dx=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}x_k^{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}\ne 0.$$

现令 $f(x)=\dfrac{g(x)}{c}$. 则 $|f(x)|\equiv\dfrac{1}{|c|}$. 注意到 $f(x)\prod\limits_{k=1}^{n}(x-x_k)$ 保号(其实必为正, 个别点除外, 这也表明 $(-1)^n c>0$),

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^1 x^n f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\,dx=\int_0^1 \Big|f(x)\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\Big|\,dx\\ &= \frac{1}{|c|}\int_0^1\Big|\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\Big|\,dx.\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1\Big|\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\Big|\,dx=\frac{1}{\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|}\le\int_0^1\Big|P(x)\Big|\,dx,\qquad \forall\, P\in\mathcal{M}_n.$$

即对任何首项系数为 1 的 n 次多项式 $P(x)$ 成立

$$\int_0^1\Big|\prod_{k=1}^{n}(x-\sin^2\frac{k\pi}{2n+2})\Big|\,dx\le\int_0^1\Big|P(x)\Big|\,dx,\qquad \forall\, P\in\mathcal{M}_n.$$

同时说明 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\ge\dfrac{1}{\min\limits_{P\in\mathcal{M}_n}\displaystyle\int_0^1\Big|P(x)\Big|\,dx}$ 这个结果不可改进(若假设 f 连续, 则严格不等式成立)

61. 设 $f(0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足: $\forall x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明: 如若不然, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}|f(x)|\ge 3\varepsilon_0$. 任取 $[a_0,b_0]\subset(0,+\infty)$. 则对于 $K_0>\dfrac{a_0}{b_0-a_0}$, 我们有 $kb_0>(k+1)a_0\quad(\forall k>K_0)$. 此时 (ka_0,kb_0) 与 $((k+1)a_0,(k+1)b_0)$ 相交. 因此, $\bigcup\limits_{k=K_0}^{\infty}(ka_0,kb_0)=(K_0a_0,+\infty)$. 于是存在 $k_1\ge K_0$ 以及 $x_1\in(k_1a_0,k_1b_0)$, 使得 $|f(x_1)|\ge 2\varepsilon_0$. 由于 $f(x)$ 连续, 所以存在 $\delta_1\in(0,1)$, 使得 $[\alpha_1,\beta_1]\equiv[x_{n_1}-\delta_1,x_{n_1}+\delta_1]\subset(k_1a_0,k_1b_0)$,

$$|f(x)|\ge\varepsilon_0,\qquad\forall x\in[\alpha_1,\beta_1],$$

这里, 请注意 $[a_1,b_1]\equiv[\frac{\alpha_1}{k_1},\frac{\beta_1}{k_1}]\subset[a_0,b_0]$, $0<b_1-a_1\le\dfrac{2}{k_1}$.

类似地, 可以找到 $k_2>k_1$, $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$, 满足 $0<b_2-a_2\le\frac{2}{k_2}$, 使得

$$|f(x)|\ge\varepsilon_0,\qquad\forall x\in[k_2a_2,k_2b_2].$$

一般地, 依次有 $k_n>k_{n-1}$, $[a_k,b_k]\subset[a_{k-1},b_{k-1}]$ $(n=3,4,\ldots)$, 满足 $0<b_k-a_k\le\frac{2}{k_n}$, 使得

$$|f(x)|\ge\varepsilon_0,\qquad\forall x\in[k_na_n,k_nb_n].$$

由闭区间套定理, 区间列 $[a_n,b_n]$ 有唯一的公共点 $\xi>0$. 因 $k_n\xi\in[k_na_n,k_nb_n]$, 所以

$$|f(k_n\xi)|\ge\varepsilon_0,\qquad\forall n\ge1.$$

与 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n\xi)=0$ 矛盾. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. □

注: 从证明过程易见只要对某个区间 $(a,b)\subset(0,+\infty)$ 成立

$$\lim_{n\to+\infty} f(nx)=0,\qquad\forall x\in(a,b),$$

便有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ytdwdw 于 2012 年 12 月 29 日

60. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上两阶可导, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3.$$

证明: 记 $c=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, $g(x)=-\dfrac{6c}{(b-a)^3}\Big[(x-\dfrac{b+a}{2})^2-(\dfrac{b-a}{2})^2\Big]$. 如果不然, 则由 Darboux 定理,

$$f''(x)>-\frac{12c}{(b-a)^3}=g''(x),\qquad \forall\, x\in(a,b)$$

或

$$f''(x)<-\frac{12c}{(b-a)^3}=g''(x),\qquad \forall\, x\in(a,b)$$

则

$$f(x)<g(x),\qquad \forall\, x\in(a,b)$$

或

$$f(x)>g(x),\qquad \forall\, x\in(a,b).$$

注意到

$$\int_a^b g(x)\,dx=c,$$

我们得到矛盾. 所以反设不真. 即题中要证明的结论成立.

注: 1. $g(x)$ 写成那样是提示为什么要引入这个函数. $g(x)$ 就是边界上为零, 两阶导数为相关常数的那个函数. 显然它是关于 $\frac{b+a}{2}$ 是对称的, 所以有如此表达式. 2. 只要题目是正确的, 这样构造的 $g(x)$ 的积分必须为 c. 3. 这里用到以下性质: 凸函数的最大值在边界上, 凹函数的最小值在边界上. 4. 作为 Darboux 定理的应用, 这题也许太简单了.

ytdwdw 于 2012 年 12 月 24 日

59. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 但不为常数. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f(x)$ 在点 ξ 不取极值.

证明: 由于 $f(x)$ 不为常数, 所以有 $a_0, b_0 \in [a,b]$ 使得 $f(a_0) < f(b_0)$. 不妨设 $a_0 < b_0$. 由于 $f(x)$ 连续, 由介值定理, 可以取到 u, v, w 使得 $a_0 < u < v < w < b_0$,

$$f(a_0) < f(u) < f(v) < f(w) < f(b_0).$$

若 $v - u \le \dfrac{w-u}{2}$, 则令 $a_1 = u, \quad b_1 = v$. 否则, 令 $a_1 = v, \quad b_1 = w$. 则无论哪种情形, 总有

$$[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0], \quad b_1 - a_1 \le \frac{b_0 - a_0}{2},$$

$$f(a_0) < f(a_1) < f(b_1) < f(b_0).$$

一般地, 有一列 $[a_n, b_n]$ 满足

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}], \quad b_n - a_n \le \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2},$$

$$f(a_{n-1}) < f(a_n) < f(b_n) < f(b_{n-1}).$$

由区间套定理, 有唯一的 $\xi \in [a_n, b_n] \subset (a,b)$ $(\forall n \ge 1)$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

另一方面. $f(a_n)$ 严格单增, $f(b_n)$ 严格单减. 从而

$$f(\xi) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(a_k) > f(a_n), \quad \forall n \ge 1,$$

类似地,

$$f(\xi) < f(b_n), \quad \forall n \ge 1.$$

注意到 $b_n - a_n \to 0$, 可见 ξ 不是极值点. □

ytdwdw 于 2012 年 12 月 20 日

58. 设 $f(x) \in C[0,1]$ 在 $(0,1)$ 在可导, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明存在 $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ 使得

$$\frac{1}{f'(\alpha)}+\frac{1}{f'(\beta)}+\frac{1}{f'(\gamma)}=3.$$

证明:

我们给一个更具直觉的证明. 由 Darboux 定理, 导函数具有介值性.

由中值定理, 存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

情形 1. $f(\alpha)=\alpha$. 则由中值定理, 存在 $\beta \in (0,\alpha), \gamma \in (\alpha,1)$ 使得

$$f'(\beta)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=1, \quad f'(\gamma)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}=1.$$

此时结论成立.

情形 2. $f(\alpha)<\alpha$. 则存在 $\eta \in (0,\alpha), \zeta \in (\alpha,1)$ 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}<1, \quad f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}>1.$$

由 Darboux 定理, 只要 $\varepsilon>0$ 充分小, 就存在 $\beta \in (\eta,\alpha)$ 以及 $\gamma \in (\alpha,\zeta)$ 使得

$$f'(\beta)=\frac{1}{1+\varepsilon} \in (f'(\eta), f'(\alpha)) \quad f'(\gamma)=\frac{1}{1-\varepsilon} \in (f'(\alpha), f'(\zeta)).$$

即此时结论也成立.

情形 3. $f(\alpha)>\alpha$. 类似于情形 2 可证.

ytdwdw 于 2012 年 11 月 28 日

57. **问题:** 设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 连续, 且对 $1 \leq k \leq n$ 成立 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx = \int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx = 0$. 证明: $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 至少有 $2n$ 个零点.

证明: 由于 $f(x)$ 连续, 我们只要证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 至少改变符号 $2n$ 次. 为此, 只要说明对于任何给定的 $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < \pi$, $m \leq 2n-1$, 存在形为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的函数恰好在上述点的附近改变符号: 比如在 $(0,x_1)$ 为正, 在 (x_1,x_2) 为负, 在 (x_2,x_3) 为正, 在 (x_3,x_4) 为负, ...

若 $m < 2n-1$, 则记 $x_{m+1} = \ldots = x_{2n-1} = 0$. 令

$$g(x) = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{x-x_k}{2}.$$

我们有

$$g(x) = \prod_{k=1}^{2n-1}\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x_k}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x_k}{2}\right) = C\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\sin\frac{x}{2} - c_k\cos\frac{x}{2}\right),$$

其中 $C > 0$, $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1} \geq 0$. 我们要证明有 $\alpha \in [0,\pi]$ 使得 $f(x) = g(x)\cos\dfrac{x-\alpha}{2}$ 具有形式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

此时 $f(x)$ 满足要求.

注意到利用积化和差公式可知, $g(x)\cos\dfrac{x-\alpha}{2}$ 是一个 n 阶的三角多项式. 所以只要证明存在 $\alpha \in [0,\pi]$ 使得

$$\int_0^{2\pi} g(x)\cos\frac{x-\alpha}{2}\,dx = 0.$$

这只要证明

$$\int_0^{2\pi} g(x)\cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi} g(2x)\cos x\,dx$$

与
$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi} g(2x)\sin x\,dx$$
异号(只要其中某一个为零时也认为是异号).

易见
$$\begin{aligned} g(2x) &= C\prod_{k=1}^{2n-1}\Big(\sin x - c_k\cos x\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k\alpha_k\sin^{2n-1-k}\cos^k x, \end{aligned}$$
其中 α_k 非负. 由此立即得到 $\displaystyle\int_0^{\pi} g(2x)\sin x\,dx$ 非负, $\displaystyle\int_0^{\pi} g(2x)\cos x\,dx$ 非正.

综上所述, 要证的结论成立.

ytdwdw 于 2012 年 11 月 27 日

56. **问题:** 设 n_k 是一列严格单增的自然数列, $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^{n_k}}{n_k!}$. 问 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{\frac{1}{x}}$ 是否存在.

解: 易见相应极限存在的例子很多. 我们接下来构造该极限不存在的例子. 首先, 易见以下引理成立.

引理. 设 $m\geq 0$, $N>m$, 则存在 $x>N$, $n>N$ 使得

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{x^k}{k!}\geq e^x-\Big(\frac{m+2}{m+1}\Big)^x.$$

令 $m_0=0$, $x_0=0$, 则依次可以取到 $m_1,m_2,\ldots$ 以及 $x_1,x_2,\ldots$ 满足

$$m_{j+1}\geq m_j+x_j+2;\quad x_{j+1}\geq m_j+x_j+2,\qquad j=0,1,2,\ldots,$$

以及

$$\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}\frac{x_{j+1}^k}{k!}\geq e^{x_{j+1}}-\Big(\frac{m_j+2}{m_j+1}\Big)^{x_{j+1}},\qquad j=0,1,2,\ldots.$$

现令

$$\{n_k|k=1,2,\ldots\}=\bigcup_{j=0}^{\infty}\{k|m_{2j}+1\leq k\leq m_{2j+1}\}.$$

则

$$\begin{cases} f(x_{2j+1})\geq e^{x_{2j+1}}-\Big(\dfrac{m_{2j+1}+2}{m_{2j+1}+1}\Big)^{x_{2j+1}}, \\ f(x_{2j+2})\leq \big(\frac{m_{2j+2}+2}{m_{2j+2}+1}\big)^{x_{2j+2}}, \end{cases}\qquad j=0,1,2\ldots.$$

注意到 $n_1=1$, 从而

$$x\leq f(x)\leq e^x,\qquad \forall\, x>0.$$

所以

$$\varlimsup_{x\to+\infty}f(x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \varliminf_{x\to+\infty}f(x)^{\frac{1}{x}}=1.$$

此时 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

ytdwdw 于 2012 年 11 月 19 日

55. **问题:** 计算: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sin 2x}$

解: 本题并没有特别的难度, 此题入选主要是为了请读者注意培养解答中利用对称性时的直观感觉:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sin 2x} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sin x} \\
= \quad & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{3-\sin x} + \frac{1}{3+\sin x}\Big)\, dx \\
= \quad & \int_0^{2\pi} \frac{3\, dx}{9-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{12\, dx}{9-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{12\, dx}{9-\cos^2 x} \\
\xlongequal{t=\tan x} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{12\, dt}{8+9t^2} = \frac{12}{\sqrt{8\times 9}} \arctan \frac{3t}{\sqrt{8}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}
\end{aligned}$$

注: 其中某些变换并非必要, 但理解“它们的成立是自然的”很必要.

54. **问题:** 证明: 集合 $A=\left\{\alpha|\,\forall\,\alpha>0,(1+\dfrac{1}{x})^{x+\alpha}>e\right\}$ 有最小值, 并求最小值.

解:

法 1:

$$\begin{aligned} A &= \left\{\alpha|\,\forall\,x>0,(x+\alpha)\ln(1+\frac{1}{x})>1\right\} \\ &= \left\{\alpha|\,\forall\,x>0,(\frac{1}{x}+\alpha)\ln(1+x)>1\right\} \\ &= \left\{\alpha|\,\forall\,x>0,\alpha>\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}. \end{aligned}$$

我们要证 $f(x)\equiv\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ 严格单减, 这样所求最小值就是

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

我们有

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)},\qquad\forall\,x>0.$$

考虑

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}},\qquad x\geq0.$$

则

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}<0,\qquad\forall\,x>0.$$

所以

$$g(x)<g(0)=0,\qquad\forall\,x>0.$$

从而

$$f'(x)<0,\qquad\forall\,x>0.$$

即证.

法 2:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{\alpha | \forall x>0, (x+\alpha)\ln(1+\frac{1}{x})>1\right\} \\
&= \left\{\alpha | \forall x>0, (\frac{1}{x}+\alpha)\ln(1+x)>1\right\} \\
&= \left\{\alpha>0 | \forall x>0, \ln(1+x)>\frac{x}{1+x\alpha}\right\}.
\end{aligned}
$$

令

$$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x\alpha}, \qquad x>0.$$

则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x\alpha)^2}=\frac{(2\alpha-1)x+x^2\alpha^2}{(1+x)(1+x\alpha)^2}, \qquad x>0.$$

若 $\alpha<\frac{1}{2}$, 则在 0 点附近, $f'(x)<0$, 从而 $f(x)$ 在 0 点附近严格单调下降, 由于 $f(0)=0$, 因此对于某个 $\delta>0$, $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内为负. 这说明此时 $\alpha\notin A$

若 $\alpha\geq\frac{1}{2}$, 则当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$, 因此

$$f(x)>f(0)=0, \qquad \forall x>0.$$

此时 $\alpha\in A$.

因此, A 的最小值 $\frac{1}{2}$. □

ytdwdw 于 2012 年 11 月 13 日

53. **问题:** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上两阶可导, $f(0)=2$, $f'(0)=0$, $f(1)=e+e^{-1}$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

证明: 反正法: 不然, 注意到 $f''(x)-f(x)$ 为函数 $f'(x)-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 的导函数, 于是由 Darboux 定理, 必有

$$f''(x)>f(x),\qquad \forall\, x\in(0,1),\tag{1}$$

或

$$f''(x)<f(x),\qquad \forall\, x\in(0,1).\tag{2}$$

令 $F(x)=f'(x)-f(x),\qquad \forall\, x\in[0,1).$

则 $F'(x)+F(x)=f''(x)-f(x)\ \substack{>\\<}\ 0,\qquad \forall\, x\in(0,1),$

即 $\Big(e^xF(x)\Big)'\ \substack{>\\<}\ 0,\qquad \forall\, x\in(0,1).$

所以 $e^xF(x)\ \substack{>\\<}\ e^0F(0)=-2,\qquad \forall\, x\in(0,1).$

类似地, $\Big(e^{-x}f(x)\Big)'=e^{-x}F(x)\ \substack{>\\<}\ -2e^{-2x},\qquad \forall\, x\in(0,1).$

所以 $e^{-x}f(x)\ \substack{>\\<}\ f(0)-\displaystyle\int_0^x 2e^{-2t}\,dt=1+e^{-2t},\qquad \forall\, x\in(0,1].$

特别, $f(1)\ \substack{>\\<}\ e+e^{-1}.$

得到矛盾. $\square$

ytdwdw 于 2012 年 11 月 5 日

52. **问题:** 设 $f(x)$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, $f(0)=f(1)=0$. 假设 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在, 且 $f''(x)+2f'(x)+f(x)\geq 0$. 证明在 $(0,1)$ 中有 $f(x)\leq 0$ 成立.

证明: 希望以下的讨论, 能够给初学者启发.

I. 记 $Dg(x)=g'(x)$, 则 $P(D)\Big(e^{\lambda x}f(x)\Big)=e^{\lambda x}P(D+\lambda)f(x)$, 其中 P 是一个常系数多项式. 因此,

$$f''(x)+2f'(x)+f(x)=(D^2+2D+1)f(x)=(D+1)^2f(x)=e^{-x}D^2\big(e^xf(x)\big).$$

这样问题就化为: 如果 $F(x)=e^xf(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续函数, $F(0)=F(1)=0$, 进一步 $F''(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在, 且 $F''(x)\geq 0$, 是否有

$$F(x)\leq 0,\qquad \forall\, x\in[0,1].$$

最后, 利用凸函数的最大值在边界达到的性质立即得到结论.

II. 一般地, 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=f(1)=0$. 假设 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在, 且 $f''(x)+2af'(x)+bf(x)\geq 0$. 我们的问题是 a,b 满足什么条件时, 由上述条件总能推出

$$f(x)\leq 0,\qquad \forall\, x\in[0,1].$$

(i) 由于

$$\begin{aligned} & f''(x)+2af'(x)+bf(x)=(D^2+2aD+b)f(x)=\Big((D+a)^2+(b-a^2)\Big)f(x) \\ = \;& e^{-ax}\Big(D^2+(b-a^2)\Big)\big(e^{ax}f(x)\big). \end{aligned}$$

因此, 用 $F(x)=e^{ax}f(x)$ 代替 $f(x)$, 记 $c=b-a^2$, 则问题化为:

问题 E. 设 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, $F(0)=F(1)=0$. 假设 $F''(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在, 且 $F''(x)+cf(x)\geq 0$. 当 c 满足什么条件时, 由上述条件总能推出

$$F(x)\leq 0,\qquad \forall\, x\in[0,1].$$

(ii) 利用 Fourier 级数理论不难证明, 对于满足 $F(0)=F(1)$ 的连续可导函数(可以推广到个别点上导数不连续的情形), 成立

$$\int_0^1 F^2(x)\,dx\leq\frac{1}{\pi^2}\int_0^1|F'(x)|^2\,dx,$$

且常数 $C=\dfrac{1}{\pi^2}$ 是最佳的/最小的.

(iii) 我们断言, 当 $c\geq\pi^2$ 时, 问题 E 的回答是否定的. 相应的反例只要取 $F(x)=\sin\pi x$ 即可.

(iv) 而当 $c<\pi^2$ 时, 问题 E 的回答是肯定的.

为此, 用反证法. 如果结论不真, 则有点 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)>0$. 设 α 为 F 在 $[0,x_0)$ 中的最大零点, β 为 F 在 $(x_0,]$ 中的最小零点. 则

$$F(x)>0,\qquad\forall\,x\in(\alpha,\beta).$$

对于 $\delta\in(0,\beta-\alpha)$ (引入 δ 是为了处理 F' 在 0 点附近性质可能不够好的状况), 定义

$$G_\delta(x)=F(x)F'(x)-\int_{\alpha+\delta}^{x}\Big(F'(t)\Big)^2\,dt+c\int_{\alpha+\delta}^{x}F^2(t)\,dt,\qquad x\in[\alpha+\delta,\beta).$$

这里定义区间不包括 β 也是为了处理 F' 在 1 点附近性质可能不够好的状况. 另一方面, $G_\delta(x)$ 的定义来自于当 F'' 可积时,

$$\int_{\alpha+\delta}^{x}\Big(F''(t)+cF(t)\Big)F(t)\,dt=G_\delta(x),\qquad x\in[\alpha+\delta,\beta).$$

则

$$G_\delta'(x)=F(x)\Big(F''(x)+cF(x)\Big)\geq 0,\qquad\forall\,x\in[\alpha+\delta,\beta).$$

因此,

$$G_\delta(x)\geq G_\delta(\alpha+\delta)=F(\alpha+\delta)F'(\alpha+\delta),\qquad\forall\,x\in[\alpha+\delta,\beta).$$

即

$$\int_{\alpha+\delta}^{x}\Big(F'(t)\Big)^2\,dt\leq F(x)F'(x)+c\int_{\alpha+\delta}^{x}F^2(t)\,dt-F(\alpha+\delta)F'(\alpha+\delta),\qquad\forall\,x\in[\alpha+\delta,\beta).$$

注意到 $F(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 非负, $F(\alpha)=0$, 可得

$$\varlimsup_{\delta\to0^+}F(\alpha+\delta)F'(\alpha+\delta)\geq 0.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_\alpha^x \Big(F'(t)\Big)^2 dt = \lim_{\delta\to0^+}\int_{\alpha+\delta}^x \Big(F'(t)\Big)^2 dt = \varliminf_{\delta\to0^+}\int_{\alpha+\delta}^x \Big(F'(t)\Big)^2 dt \\
\le\ & F(x)F'(x) + c\int_\alpha^x F^2(t)\,dt - \varlimsup_{\delta\to0^+} F(\alpha+\delta)F'(\alpha+\delta) \\
\le\ & F(x)F'(x) + c\int_\alpha^x F^2(t)\,dt, \qquad \forall\, x\in(\alpha+\delta,\beta).
\end{aligned}
$$

类似地, 又有

$$
\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta \Big(F'(t)\Big)^2 dt \le \varliminf_{x\to\beta^-} F(x)F'(x) + c\int_\alpha^\beta F^2(t)\,dt \\
=\ & c\int_\alpha^\beta F^2(t)\,dt < \pi^2\int_\alpha^\beta F^2(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&\pi^2\int_\alpha^\beta F^2(t)\,dt = (\beta-\alpha)\pi^2\int_0^1 F^2(\alpha+s(\beta-\alpha))\,ds \\
\le\ & (\beta-\alpha)^3\int_0^1 \Big(F'(\alpha+s(\beta-\alpha))\Big)^2 ds = (\beta-\alpha)^2\int_\alpha^\beta \Big(F'(t)\Big)^2 dt \\
\le\ & \int_\alpha^\beta \Big(F'(t)\Big)^2 dt.
\end{aligned}
$$

得到矛盾.

所以当 $c<\pi^2$ 时, 恒成立 $F(x)\le 0$.

注 1. 若 $c<0$ (或者 $b<0$), 直接反证法可证: 不然, 则最大值为正, 最大值点 ξ 为极大值点, 此时 $F''(\xi)\le 0$, ($f''(\xi)\le 0$, $f'(\xi)=0$). 得到矛盾

注 2. 若 $g(x)\equiv f''(x)+2f'(x)+f(x)$ 可积, 则也可利用常微分方程解得

$$
f(x) = -e^{-x}\Big[\int_0^x (1-x)\tau e^\tau g(\tau)\,d\tau + \int_x^1 x(1-\tau)e^\tau g(\tau)\,d\tau\Big] \le 0.
$$

注 3. 如果 F 在 $[0,1]$ 上的导数可积, 则前面的讨论可以化简很多.

ytdwdw 于 2012 年 10 月 29 日

51. **问题:** 设 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 内有两阶导数, 且满足 $|f(x)| \le 1$, $f^2(0)+\big(f'(0)\big)^2 = 4$. 则存在 $\xi \in (-2,2)$, 使得

$$f''(\xi) + f(\xi) = 0.$$

证明: 对本题, 我们做一个更深入的解答. 我们将寻找最佳的 $a > 1$ 使得把 "$f^2(0) + \big(f'(0)\big)^2 = 4$" 替换成 "$f^2(0) + \big(f'(0)\big)^2 = a^2$" 时结论成立.

由 $f^2(0)+\big(f'(0)\big)^2 = a^2 > 1$ 以及 $|f(x)| \le 1$ 知 $f'(0) \ne 0$. 不妨设 $f'(0) > 0$.

若结论不真, 则由 Darboux 定理, $f(x) + f''(x)$ 恒正或恒负. 注意到对于 $F(x) = -f(-x)$ 成立 $F'(x) = f'(-x)$, $\quad F''(x) + F(x) = -\Big(f''(-x) + f(-x)\Big)$, 因此, 不妨进一步设 $f(x) + f''(x)$ 恒正.

令 $\beta = \inf\{x \in (0,2) | f'(x) \le 0\}$. 规定 $\inf \phi = 2$.

则 $\beta > 0$, 且当 $\beta < 2$ 时, $f'(\beta) = 0$. 而 $f'(x) > 0, (\forall x \in [0,\beta))$. 从而

$$\Big[\big(f'(x)\big)^2 + f^2(x)\Big]' = \big(f''(x) + f(x)\big)f'(x) > 0, \qquad \forall x \in [0,\beta).$$

于是

$$\big(f'(x)\big)^2 + f^2(x) > \big(f'(0)\big)^2 + f^2(0) = a^2, \qquad \forall x \in (0,\beta).$$

所以

$$\big(f'(x)\big)^2 > a^2 - f^2(x), \qquad \forall x \in (0,\beta).$$

由此, $\varliminf\limits_{x \to \beta^-} \big(f'(x)\big)^2 > a^2 - 1 > 0$. 因此必有 $\beta = 2$. 从而又有

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - f^2(x)}} > 1, \qquad \forall x \in (0,2).$$

所以

$$\arcsin \frac{f(x)}{a} > \arcsin \frac{f(0)}{a} + x \ge x - \arcsin \frac{1}{a}, \qquad \forall x \in (0,2).$$

容易证明当且仅当 $a \ge \frac{1}{\sin 1}$ 时, 由上式可以推得 $\sup\limits_{x \in (0,2)} f(x) > 1$. 此时与假设条件 $|f(x)| \le 1$ 矛盾.

因此当 $a \ge \frac{1}{\sin 1}$ 时要证的结论成立.

另一方面, 不难将上述分析过程反过来, 得到条件 $a \geq \frac{1}{\sin 1}$ 是最佳的.

ytdwdw 于 2012 年 10 月 15 日

50. **问题:** 设 $f(u)$ 在 $u=0$ 可导, $f(0)=0$, $\Omega_t: x^2+y^2+z^2\le 2tz$. 求

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^5}\iiint\limits_{\Omega_t} f(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz.$$

解: 作变量代换:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \qquad \theta\in[0,2\pi],\varphi\in[0,\pi],r\ge0.\\ z=t+r\cos\varphi, \end{cases}$$

则当 $t>0$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t^5}\iiint\limits_{\Omega_t} f(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz\\ =\;&\frac{1}{t^5}\int^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{t} f(r^2+t^2+2tr\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr\\ =\;&\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 f(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr. \end{aligned}$$

对于 $t\in(0,1]$, 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 \Big|f(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)-f'(0)(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)\Big|\,r^2\sin\varphi\,dr\\ \le\;&\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 (t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)\,\omega(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr\\ \le\;&2\pi\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 4\,\omega(4t^2)\,dr=8\pi^2\,\omega(4t^2), \end{aligned}$$

其中 $\omega(r)=\sup\limits_{0<|u|\le r}\Big|\dfrac{f(u)}{u}-f'(0)\Big|$ 满足 $\lim\limits_{r\to0^+}\omega(r)=0$. 所以

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 f(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr\\ =\;&\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1 f'(0)(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr\\ =\;&\frac{32\pi}{15}f'(0). \end{aligned}$$

ytdwdw 于 2012 年 10 月 6 日

49. **问题:** 利用中值定理解题中构造辅助函数的一种思想

楼红卫的"微积分进阶"中给出一个纯分析的思考方式. 说是要证明 Lagrange 中值定理, 只要找 F 使得

$$F'(x) = f(b) - f(a) - f'(x)(b-a)$$

且 $F(a) = F(b)$ 成立.

......

因为在百度文库上传文档时总是被询问"文档内容是否涉及版权等侵权争议", 所以为保险起见, 本人将此部分内容移除. 读者可在贴吧搜索有关帖子或参阅: 《微积分进阶》第三章.

ytdwdw 于 2012 年 9 月 16 日

48. **问题:** 设 $f(x)$ 为以 π 为周期的连续偶函数, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx.$$

证明: 我们分三步证明.

I. 收敛性. 首先, $\int_0^{2\pi} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx$ 是一个常义积分. 其次, 由题设, 可见

$$\int_{2\pi}^{2k\pi} f(x)\sin x\,dx = 0, \qquad \forall\, k \geq 1.$$

由此不难得到

$$\Big|\int_{2\pi}^{A} f(x)\sin x\,dx\Big| \leq \int_0^{\pi} |f(x)\sin x|\,dx.$$

于是由 Dirichlet 判别法, $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx$ 收敛, 即原积分收敛.

II. f 为三角多项式情形. 若

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos 2kx,$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{a_n \cos 2kx \sin x}{x}\,dx \\
= \;& \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{a_n \sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x}{x}\,dx \\
= \;& \frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{m} a_n \Big(\operatorname{sgn}(2k+1) - \operatorname{sgn}(2k-1)\Big) = \frac{\pi a_0}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

III. 一般情形. 一般地, 由 Weierstrass 第二逼近定理, 结合题设可得存在一列 $g_n(x)$,

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{m_n} a_{n,k} \cos 2kx,$$

使得

$$\varepsilon_n \equiv \max_{x\in[0,\pi]} |f(x) - g_n(x)| \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

记

$$G_n(x)=\int_0^x (f(t)-g_n(t))\sin t\,dt,\qquad x\ge 0.$$

则 $G_n(2k\pi)=0$, $|G_n(x)|\le\int_0^{\pi}\big|(f(t)-g_n(t))\sin t\big|\,dt\le\varepsilon_n\pi$. 我们有

$$\Big|\int_0^{2\pi}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,dx\Big|\le\int_0^{2\pi}\big|f(t)-g_n(t)\big|\,dt\le 2\pi\varepsilon_n,$$

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,dx\Big|=\Big|\frac{G_n(x)}{x}\Big|_{2\pi}^{+\infty}+\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{G_n(x)}{x^2}\,dx\Big|\\ =\ &\Big|\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{G_n(x)}{x^2}\,dx\Big|\le\varepsilon\pi\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{\varepsilon_n}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^{+\infty}\frac{f(x)\sin x}{x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx\Big|\\ =\ &\Big|\int_0^{+\infty}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-g_n(x))\,dx\Big|\\ \le\ &\Big|\int_0^{2\pi}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,dx\Big|+\Big|\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,dx\Big|\\ &+\Big|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-g_n(x))\,dx\Big|\\ \le\ &2\pi\varepsilon_n+\frac{\varepsilon_n}{2}+\frac{\pi\varepsilon_n}{2}.\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$ 就得到结论.

注. 可以减低关于 f 的连续性要求. 若 $f(x)$ 是周期为 π 的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上 Riemann 可积, 则结论仍然成立. 此时, 以上的 **I** 和 **II** 的证明不受影响. 在第 **III** 部分, 可以有一列 $g_n(x)$,

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{m_n}a_{n,k}\cos 2kx,$$

使得

$$\varepsilon_n\equiv\int_0^{\pi}|f(x)-g_n(x)|\to 0,\qquad n\to+\infty.$$

由上式同样代替 **III** 中的相应不等式, 同样可以得到结论.

类似地,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx.$$

该式的证明在对应的三步中, **I** 和 **III** 更简单, 但 **II** 要复杂一些. 结论源于:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\cos 2kx\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2kx\sin 2x-2k\sin 2kx\sin^2 x}{x}\,dx\\
=\;&\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2(k+1)x-\sin 2(k-1)x-2k\sin 2kx+k\sin 2(k+1)x+k\sin 2(k-1)x)}{2x}\,dx\\
=\;&\frac{\pi}{4}\Big(\operatorname{sgn}(k+1)-\operatorname{sgn}(k-1)-2k\operatorname{sgn}k+k\operatorname{sgn}(k+1)+k\operatorname{sgn}(k-1)\Big)\\
=\;&\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & k=0,\\ 0, & k\ge 1.\end{cases}
\end{aligned}$$

□

ytdwdw 于 2012 年 9 月 13 日

47. **问题:** 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 证明:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1 - \frac{4}{\pi^2}.$$

证明: 定义

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - (1 - \frac{4}{\pi^2}), \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}].$$

则

$$f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2}{\sin^3 x}\big(\frac{\sin^3 x}{x^3} - \cos x\big).$$

考虑

$$g(x) = \ln\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{3}\ln\cos x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

则 $g(0^+) = 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\tan x = -\frac{1}{x\tan x}\big(\tan x - x - \frac{1}{3}x\tan^2 x\big).$$

再考虑

$$h(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x\tan^2 x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

则 $h(0) = 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sec^2 x - 1 - \frac{1}{3}\tan^2 x - \frac{2}{3}x\tan x\sec^2 x \\ &= \frac{2}{3}\tan x\sec^2 x(\sin x\cos x - x) \\ &< 0, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

由此依次得到, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, $h(x) < h(0) = 0$, $g'(x) > 0$, $g(x) > g(0) = 0$, $f'(x) > 0$, $f(x) < f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

顺便证明了几个不等式:

$$x^3\cos x < \sin^3 x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}],$$

$$x^3 < \tan x\sin^2 x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\tan x - x < \frac{1}{3}x\tan^2 x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

ytdwdw 于 2012 年 9 月 2 日

46. **问题:** $0.\dot{9}=1$ 对不对? 其中 $\dot{9}$ 表示数字 9 无限循环.

答: 这个解答用词会很拗口. 费力回答这个问题, 是因为此问题可以作为是否有基本的专业数学素养的一个观察点. 从中也可以看到, 高中生和绝大多数大学生不能称为具备基本的专业数学素养

回答这个问题首先必须搞清楚什么是 $0.\dot{9}$. 能够提出这一问题(但不一定能够解决)的人才可能是有基本的专业数学素养的人, 提不出这一问题就在那里争论的, 基本上可以断定缺乏基本的专业数学素养. 事实上, 这一要求比较高, 很多人没有这样的素养. 也可以这样说, 平时高数能考满分和有没有基本的专业数学修养没有必然的联系.

那么 $0.\dot{9}$ 的定义是什么? 不同的定义会带来不同的回答方式.

I. 在中学, 或者在非专业的大学数学教学中(注意: 不是说凡是数学系的专业教学就是严格意义上的专业的大学数学教学), 无理数被"定义"为"无限不循环小数". 但这在数学上称不上是一个真正的定义. 在建立实数理论之前, "无限不循环小数"不是一个有意义的数.

但是, 循环小数是可以恰当地定义的, 比如 $0.\dot{3}$ **定义为** $1\div 3$ 一直除下去的结果. 这句话和"把 $0.\dot{3}$ 定义为 $\frac{1}{3}$" 没多大区别. 这样, $0.\dot{9}$ 可以**定义为** $1\div 1$ 一直除下去(并在除的过程中刻意让余不为 0)的结果. 所以, $0.\dot{9}$ 在这种意义下, 就是 1 的一个表示方法. 自然, 它就是 1.

看官可以看到这样的说法让人无语之极. 会有人觉得这是狡辩, 也会有人觉得不应该是这样定义的. 其实, 在实数理论之前, 无论怎样定义, 要么是类似我前面提到的情形, 要么就是无效定义. 所以在此之前讨论这个问题, 在数学上毫无意义.

II. 实数应该是先用其他方法建立起来, 而不是直接用(带整数部分的)小数. 直接把小数定义为实数, 可以定义实数的大小, 但难以定义实数的四则运算. 所以教材中凡是用小数来定义实数的, 如果没有讲清楚如何定义四则运算, 都不是真正的实数理论.

在建立实数以后, 不难说明实数可以用小数来表示. 那么一个小数, 尤其是一个无限不循环小数表示的是哪个实数, 是回答 $0.\dot{9}=1$ 是否成立的关键. 很可能, 我们的教科书上没有认认真真地去定义"一个无限不循环小数表示

的是哪个实数", 因为相应的定义应该可以由学生自己写出来. 但任何一个合理的定义都将导致 $0.\dot{9} = 1$.

应该还有很多朋友依然不难理解本问题的上述回答, 我们换一个说法, 请考虑如下问题: 设 a_n 是一列取值为 $0, 1, \ldots, 9$ 的数, 则 $0.a_1a_2a_3\ldots$ 是什么? 注意, 在没有给它明确的定义之前, $0.a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ 没有任何意义. 等搞清楚了 $0.a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ 应该定义为哪个实数以后, 也就明白了为什么 $0.\dot{9}$ 就是 1——除非您定义的数学不是我们常用的数学—没有任何贬低讽刺的意思, 因为可以引入其它的数系. 我们只是说, 在实数范围内, 任何一个合理的定义方式, 且如果允许采用 $0.\dot{9}$ 这样的记号, 都应该导致 $0.\dot{9} = 1$.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 29 日

注: 在标准的实数系中, 如果一个数大于等于任何(有限的)的 0.99999...9 而小于等于 1. 那么这个数必然是 1. 所以只要是标准的实数系, 无论怎么定义(只要是合理的定义), 比如导致 0.99999999........... = 1. 而在非标准分析中, 就会有无穷多个不同的元素, 大于等于任何(有限的)的 0.99999...9 而小于等于 1.

ytdwdw 于 2012 年 11 月 29 日

45. **问题:** 从 1223334444 这 10 个数里面选出 4 个数组成不同 4 位数的个数 ?

解: 记 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$. 则所求 4 位数的个数为多项式 $4!\times P_1(x)P_2(x)P_3(x)P_4(x)$ 的展开式中, x^4 的系数. 计算得: 175.

为说明上述结论的理由, 可以建立这样的模型: 令

$$Q_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=1+\sum_{k=1}^{4}x_k,$$

$$Q_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=1+\sum_{k=1}^{4}x_k+\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{4}x_kx_j,$$

$$Q_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=1+\sum_{k=1}^{4}x_k+\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{4}x_kx_j+\sum_{k=1}^{4}\frac{x_1x_2x_3x_4}{x_k},$$

$$Q_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=1+\sum_{k=1}^{4}x_k+\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{4}x_kx_j+\sum_{k=1}^{4}\frac{x_1x_2x_3x_4}{x_k}+x_1x_2x_3x_4.$$

则在 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的展开式中, $x_1x_2x_3x_4$ 的每一个同类项一一地对应着一个题设中的四位数字. 具体地: 若某个 $x_1x_2x_3x_4$ 产生时, x_j 来自于 Q_k, 则表示对应的数字中, 数字 k 排在第 j 位.

因此不难看到 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 中 $x_1x_2x_3x_4$ 的系数就是要求的不同 4 位数的个数. 进一步, 易见 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 中 $x_1x_2x_3x_4$ 的系数和 $P(x_1+x_2+x_3+x_4)$ 的展开式中 $x_1x_2x_3x_4$ 的系数相同, 而这又与 $P(x)$ 的展开式中 x^4 的系数乘以 4! 相同.

一般地, 若有 n 种不同类的球, 各种球的数列为 $m_1,m_2,m_3,\dots,m_n$, 则要从中取出 N 个球排列, 不同的排列个数为多项式

$$N!\times\prod_{k=1}^{n}P_{m_k}(x)$$

的展开式中 x^N 的系数.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 20 日

44. **问题:** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续一阶导数, 且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(f^2(x)+\big(f'(x)\big)^2\Big)\,dx=1$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

(2) $\forall\, x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x)|<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明: (1) 由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\,dx$ 的收敛性可得存在 $x_n\to+\infty$ 使得 $f(x_n)\to 0$. 于是当 $x>x_n$ 时

$$f^2(x)=f^2(x_n)+\int_{x_n}^{x}2f(t)f'(t)\,dt\le f^2(x_n)+\int_{x_n}^{+\infty}\Big(f^2(t)+\big(f'(t)\big)^2\Big)\,dt.$$

所以

$$\varlimsup_{x\to+\infty}f^2(x)\le f^2(x_n)+\int_{x_n}^{+\infty}\Big(f^2(t)+\big(f'(t)\big)^2\Big)\,dt,\qquad\forall\, n\ge 1.$$

在上式中令 $n\to+\infty$ 得到 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}f^2(x)\le 0$. 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 类似地有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. 从而 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

(2) 由 (1), $f(+\infty)=f(-\infty)=0$. 所以

$$\begin{aligned}f^2(x)&=\frac{1}{2}\Big(f^2(x)-f^2(+\infty)\Big)+\frac{1}{2}\Big(f^2(x)-f^2(-\infty)\Big)\\&=\int_{+\infty}^{x}f(t)f'(t)\,dt+\int_{-\infty}^{x}f(t)f'(t)\,dt\\&\le\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(f^2(t)+\big(f'(t)\big)^2\Big)\,dt=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

进一步, 可以说明上述不等式中必有一个为严格的不等式, 否则假设对某个 $x\in\mathbb{R}$, 上述等式全部成立, 则

$$f'(t)=\begin{cases}-f(x), & \forall\, t\ge x,\\ f(x), & \forall\, t\le x.\end{cases}$$

由此得到

$$f(t)=\begin{cases}f(x)e^{-(t-x)}, & \forall\, t\ge x,\\ f(x)e^{(t-x)}, & \forall\, t\le x.\end{cases}$$

于是由假设条件, 可得 $f(x) \neq 0$. 而这时上式定义的 f 在 x 点不可导, 矛盾. 所以

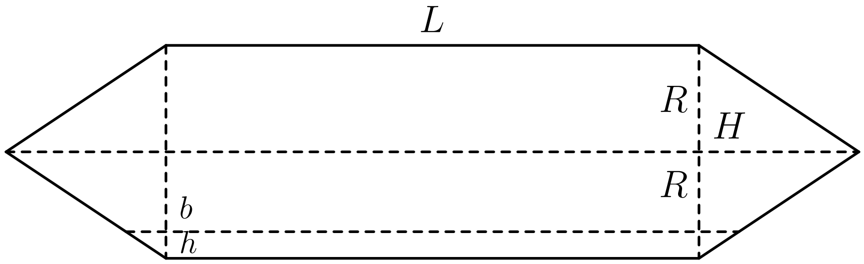
$$|f(x)| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

注: 题中的上界估计 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不可改进.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 17 日

43. **问题:** 设有一容器(如图), 其表面中间是横放的圆柱, 两边是圆锥面. 圆柱截面的半径是 R, 高是 L, 圆锥的高是 H. 试问当容器内液体的高度是 h 时 $(0 \le h \le 2R)$, 液体的体积是多少?



解: 以圆锥的顶点为原点, 顶点到底面圆心方向为 oz 轴方向建立坐标系. 则圆锥面的方程为 $R^2z^2 = H^2(x^2+y^2)$.

现设 $0 < h < R$. 记 $b = R-h$, $\theta = \arccos\frac{b}{R}$. 则液体在圆柱部分垂直截面的面积为

$$S_\perp = R^2(\theta - \cos\theta\sin\theta) = R^2\arccos\frac{b}{R} - b\sqrt{R^2-b^2},$$

而液体在一个锥体部分的水平面面积为

$$\begin{aligned} S_{//} &= \int_{\frac{Hb}{R}}^{H}\sqrt{\frac{R^2z^2}{H^2}-b^2}\,dz = \frac{2Hb^2}{R}\int_1^{\frac{R}{b}}\sqrt{t^2-1}\,dt \\ &= \frac{Hb^2}{R}\Big(t\sqrt{t^2-1}-\ln(t+\sqrt{t^2-1})\Big)\Big|_1^{\frac{R}{b}} = H\sqrt{R^2-b^2} - \frac{Hb^2}{R}\ln\Big(\frac{R}{b}+\sqrt{\frac{R^2}{b^2}-1}\Big). \end{aligned}$$

这样, 圆柱体部分液体体积为

$$V_1 = S_\perp L = R^2L\arccos\frac{b}{R} - b\sqrt{R^2-b^2}L.$$

而两个锥体部分液体体积为

$$V_2 = 2\Big(\frac{1}{3}S_\perp H - \frac{1}{3}S_{//}b\Big) = \frac{2}{3}R^2H\arccos\frac{b}{R} - \frac{4}{3}Hb\sqrt{R^2-b^2} + \frac{2Hb^3}{3R}\ln\Big(\frac{R}{b}+\sqrt{\frac{R^2}{b^2}-1}\Big)$$

余下部分自然可得.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 12 日

42. **问题:** 已知对任何固定的 $n \in \mathbb{Z}^+$, $\dfrac{|f(x)+n|-|f(x)-n|}{2}$ 连续, 证明 $f(x)$ 连续.

证明: 首先我们证明 $f(x)$ 局部有界, 即 $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

否则, 不难证明存在收敛列 $x_k \to x_0$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} |f(x_k)| = +\infty$. 不妨设 $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty$. 则 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|f(x_k)+n|-|f(x_k)-n|}{2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(x_k)+n-(f(x_k)-n)}{2} = n.$$

另一方面, 当 $n > |f(x_0)|$ 时,

$$\frac{|f(x_0)+n|-|f(x_0)-n|}{2} = f(x_0), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+,\ n > |f(x_0)|.$$

因此, 此时 $\dfrac{|f(x)+n|-|f(x)-n|}{2}$ 在 x_0 点不连续. 得到矛盾.

故 $f(x)$ 局部有界.

记 $M_{a,b} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. 则当 $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq M_{a,b}$ 时

$$\frac{|f(x)+n|-|f(x)-n|}{2} = f(x), \qquad x \in [a,b].$$

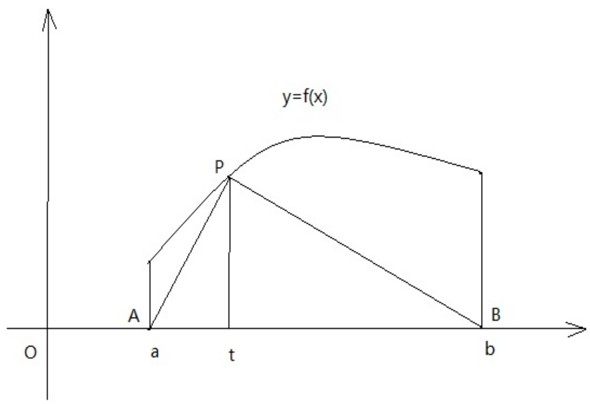
于是由假设, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. 一般地可得 $f(x)$ 连续. $\square$

注. $f(x)$ 为区间上的函数时, 相应的结论也成立.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 11 日

41. **问题:** 设对任意 $x \in [a,b]$ 成立 $f(x) \geq 0$ 以及 $f''(x) \leq 0$. 求证: $\forall t \in [a,b]$, $(b-a)f(t) \leq 2\int_a^b f(x)\,dx$.

证明: 本题的思想和前一题类似, 证明的要点是把握结论的几何意义.



记 $A=(a,0)$, $B=(b,0)$, $P=(t,f(t))$.

分别用 $y=l_1(x)$ 和 $y=l_2(x)$ 表示直线 AP 和 BP. 则由凹函数的性质,

$$f(x) \geq \begin{cases} l_1(x), & x \in [a,t] \\ l_2(x), & x \in (t,b] \end{cases} = \min(l_1(x), l_2(x)), \qquad x \in [a,b].$$

从而

$$(b-a)f(t) = 2S_{\triangle APB} = 2\int_a^b \min(l_1(x), l_2(x))\,dx \leq 2\int_a^b f(x)\,dx.$$

类似地, 可以有以下注记:

注 1: 结论对非负凹函数都成立.

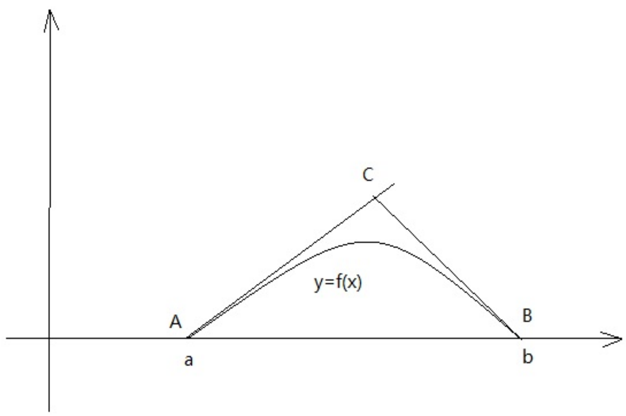
注 2: 当 $f(x)$ 可微时等式不会取到.

注 3: 不等式某种意义上不可改进.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 7 日

40. **问题:** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可微凹函数, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=\alpha>0, f'(b)=\beta<0$. 证明: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}$.

证明: 本题的关键是要有几何直观, 把握结论的几何意义.



由凹函数的性质,

$$f(x)\le \min\Big(\alpha(x-a),\beta(x-b)\Big),\qquad \forall\, x\in[a,b].$$

记 $A=(a,0), B=(b,0)$, C 为 $y=\alpha(x-a)$ 和 $y=\beta(x-b)$ 的交点. 则

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \min\Big(\alpha(x-a),\beta(x-b)\Big)\,dx = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

注 1: 为方便计算, 不妨设 $\beta=-1$, $a=0, b=1$.

注 2: 当 $f(x)$ 不是点点可微的时候, 不等式也成立.

注 3: 可以看到当 $f(x)$ 可微时等式不会取到.

注 4: 不等式某种意义上不可改进, 即(可以选取满足题设的不同的 $f(x)$ 使得) 不等式左右两边的差可以任意小. □

ytdwdw 于 2012 年 8 月 6 日

39. **问题:** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}$ 的问题.

解: 此题好的一个解法自然是利用

$$\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right| \le \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|, \quad \forall\, x\neq 0$$

以及夹逼准则得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x} = 0.$$

但在承认 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$ 的前提下, 对于利用等价关系的算式

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\\
=&\lim_{x\to 0}\left[x\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,
\end{aligned}$$

可以认为是对的, 也可以认为是错的. 本人认为, 过了新生阶段就应该认为是对的, 因为在那些让 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 为零的点上, 不妨认为 $\dfrac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x^2\sin\frac{1}{x}}$ 的值为 1. 过于强调此题不能用等价关系是舍本求末.

这犹如在小学某阶段, "3 乘以 4" 应该是 "3×4", "5 乘 6" 应该是 "6×5". 写成 "4×3" 以及 "5×6" 会判为错. 但到了以后, 由于乘法交换律成立, 不管是 "3 乘以 4" 还是 "4 乘以 3", 写成 "4×3" 都认为是对的.

至于口语中人们通常把 "6 除 3" 理解成 "$6\div 3$", 属于将错就错的约定熟成, 写到正式文献中是不能那样来的.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 3 日

38. **问题:** 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 在 (a,b) 内两阶可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$.

证明: 本题的困难在于 $f'(x)$ 在 a,b 两点不一定连续, 因此不能直接用中值定理得到结论.

记 $\ell=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. 若结论不真, 则由 Darboux 定理, "$f''(x)>\ell\,(\forall x\in(a,b))$" 或 $f''(x)<\ell,\ (\forall x\in(a,b))$".

不妨设第一式成立. 任取 $a<c_1<c_2<b$. 由 Darboux 定理, 存在 $\alpha_n\to0^+$ 以及 $\beta_n\to0^+$ 使得 $f'(a+\alpha_n)\to f'(a),\quad f'(b-\beta_n)\to f'(b)$.
而当 n 充分大时,

$$\begin{aligned}f'(b-\beta_n)-f'(a+\alpha_n) &= f'(b-\beta_n)-f'(c_2)+f'(c_1)-f'(a+\alpha_n)+f'(c_2)-f'(c_1)\\ &> \ell(b-\beta_n-c_2)+\ell(c_1-a-\alpha_n)+f'(c_2)-f'(c_1).\end{aligned}$$

上式中令 $n\to+\infty$ 得到

$$\begin{aligned}f'(b)-f'(a) &\ge \ell(b-c_2)+\ell(c_1-a)+f'(c_2)-f'(c_1)\\ &> \ell(b-c_2)+\ell(c_1-a)+\ell(c_2-c_1)=f'(b)-f'(a).\end{aligned}$$

矛盾. 证毕.

ytdwdw 于 2012 年 7 月 19 日

37. **问题:** 设

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta}{\partial\lambda} &= \sin B\Big(1+\frac{2(1-e^2\sin^2 B)}{1-e^2}\cot^2 B\sin^2\frac{\delta}{2}\Big),\\ \frac{\partial\delta}{\partial B} &= \sin\delta\cot B,\end{aligned}$$

试求 δ 关于 B,λ 的关系.

解: 记

$$\begin{aligned}F(\delta,B) &= \sin B\Big(1+\frac{2(1-e^2\sin^2 B)}{1-e^2}\cot^2 B\sin^2\frac{\delta}{2}\Big)\equiv \sin B+H(B)(1-\cos\delta),\\ G(\delta,B) &= \sin\delta\cot B.\end{aligned}$$

利用 $\dfrac{\partial^2\delta}{\partial\lambda\partial B}=\dfrac{\partial^2\delta}{\partial B\partial\lambda}$ 得到 $F_B(\delta,B)+F_\delta(\delta,B)G(\delta,B)=G_\delta(\delta,B)F(\delta,B)$. 即

$$\begin{aligned}&\cos B+H'(B)(1-\cos\delta)+H(B)\sin^2\delta\cot B\\ =\ &\cos\delta\cot B\sin B+H(B)\cos\delta\cot B(1-\cos\delta).\end{aligned}$$

解得 $\cos\delta=1$. 代入题设条件, 得到矛盾. 因此, 满足题设的函数不存在.

ytdwdw 于 2012 年 5 月 28 日

36. **问题:** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的每一项为正, 如果存在正数 α,β, 其中 $0<\alpha<1$ 使得 $a_n - a_{n+1} \geq \beta a_n^{2-\alpha}$. 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 且 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = O(a_N)$ $(N\to+\infty)$.

解: mscheng19 给出了一个很精彩的解答, 可惜没有用好一点的见面, 下面我把 mscheng19 给出的精彩解答重写一下:

容易得到 a_n 单调下降且极限为 0.

$$
\begin{aligned}
a_n &\leq \frac{1}{\beta}(a_n - a_{n+1})a_n^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta}\int_{a_{n+1}}^{a_n} a_n^{\alpha-1}\,dx \\
&\leq \frac{1}{\beta}\int_{a_{n+1}}^{a_n} x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha\beta}(a_n^{\alpha} - a_{n+1}^{\alpha}).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \frac{1}{\alpha\beta} a_N^{\alpha}, \qquad N \geq 1.
$$

经常会觉得不应该追求太巧妙的方法. 对于这种巧妙的方法不能说不喜欢, 但总觉得需要同时找到常规的方法. 以下证明要比上面的方法繁得多, 但似乎更能让我安心. 从这个证明可以看到可以给出例子, 使得不等式 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \frac{1}{\alpha\beta} a_N^{\alpha}$ 中的阶 a_N^{α} 是不能改进的.

由假设条件, a_n 单调下降且极限为 0, 且 $1-\beta a_1^{1-\alpha} > 0$. 考虑

$$
f(x) = x - \frac{\beta}{2}x^{2-\alpha}, \qquad x \in (0, a_1].
$$

则 $f(x)$ 在 $(0, a_1]$ 上严格单增(为什么要给系数 β 除以 2 就是为了保持单调性).

令 $b_1 = a_1$,

$$
b_{n+1} = b_n - \frac{\beta}{2}b_n^{2-\alpha}, \qquad n = 1, 2, \ldots.
$$

则归纳可证(f 的单调性就用在这里) $b_n \geq a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$

我们有(这是后面为何定义 y_n 的原因)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n^{-\delta}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(b_{n+1}^{-\delta}-b_n^{-\delta}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n^{\delta}-b_n^{\delta}(1-\frac{\beta}{2}b_n^{1-\alpha})^{\delta}}{b_n^{2\delta}(1-\frac{\beta}{2}b_n^{1-\alpha})^{\delta}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(1-\frac{\beta}{2}b_n^{1-\alpha})^{\delta}}{b_n^{\delta}}=\frac{\beta\delta}{2},\qquad \delta=1-\alpha.$$

令 $y_n=b_n^{-\delta}=b_n^{-(1-\alpha)}$, 则 $y_{n+1}=y_n(1-\frac{\beta}{2y_n})^{-\delta}$. 由于 $\delta\in(0,1)$, 易见当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时成立 $1+4\delta x\ge(1-x)^{-\delta}\ge1+\delta x$. 我们依次得到

$$y_n+\frac{\delta\beta}{2}\le y_{n+1}\le y_n+2\delta\beta,\qquad n=1,2,\ldots,$$

$$y_1+\frac{n\delta\beta}{2}\le y_{n+1}\le y_1+2n\delta\beta,\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

$$a_{n+1}\le b_{n+1}\le\left(a_1^{-\delta}+\frac{n\delta\beta}{2}\right)^{-\frac{1}{\delta}}=a_1\left(1+\frac{n\delta\beta a_1^{\delta}}{2}\right)^{-\frac{1}{\delta}},\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

由此得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\le a_1+\int_0^{\infty}a_1\left(1+\frac{x\delta\beta a_1^{\delta}}{2}\right)^{-\frac{1}{\delta}}dx=a_1+\frac{1}{\frac{1}{\delta}-1}\frac{2a_1}{\delta\beta a_1^{\delta}}=a_1+\frac{2a_1^{\alpha}}{\alpha\beta}.$$

一般地成立, $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n\le a_N+\frac{2a_N^{\alpha}}{\alpha\beta}$.

另外, 我们还可以看到

$$b_{n+1}\ge\left(b_1^{-\delta}+2n\delta\beta\right)^{-\frac{1}{\delta}}=b_1\left(1+2n\delta\beta b_1^{\delta}\right)^{-\frac{1}{\delta}},\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

由此得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\ge\int_0^{\infty}b_1\left(1+2x\delta\beta b_1^{\delta}\right)^{-\frac{1}{\delta}}dx=\frac{1}{\frac{1}{\delta}-1}\frac{b_1}{2\delta\beta b_1^{\delta}}=\frac{b_1^{\alpha}}{2\alpha\beta}.$$

ytdwdw 于 2012 年 5 月 19 日

35. **问题:** 设 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x}$.

解:

记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. 则由分部积分法得到

$$\int_0^x tf(t)\,dt = xF(x)-\int_0^x F(t)\,dt,$$

其中上式涉及分部积分公式的推广, 它可用光滑逼近证明, 参见《微积分进阶》第四章, 推论 4.3.1:

> 设 $f(x), g(x)$ 是闭区间 $[a_0,b_0]$ 上的可积函数, $\xi,\eta\in[a_0,b_0]$. 对于 $x\in[a_0,b_0]$, 记 $F(x)=\int_\xi^x f(t)\,dt,\quad G(x)=\int_\eta^x g(t)\,dt$. 则对任何 $a,b\in[a_0,b_0]$,
>
> $$\int_a^b G(x)f(x)\,dx = G(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)F(x)\,dx.$$

最后得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\Big(F(x)-\frac{\int_0^x F(t)\,dt}{x}\Big)\\ &= \lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x F(t)\,dt}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to+\infty}F(x)=0,\end{aligned}$$

这里用到了 L'Hospital 法则以及无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 的收敛性.

ytdwdw 于 2012 年 4 月 16 日

34. **问题:** 设有非负数列 $\{b_n\}$, $(2-b_n)b_{n+1}\geq 1$, $(n=1,2,3,\ldots)$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在，并求此极限值.

解: 法 I: 此题是典型的利用上下极限处理数列极限的问题.

由假设, 得到 $0<b_n<2$. 于是 $L\equiv\varlimsup\limits_{n\to+\infty} b_n$ 有限且非负. 对 $b_n\leq 2-\dfrac{1}{b_{n+1}}$ 两边取上极限得到 $L\leq 2-\frac{1}{L}$. 即 $L^2-2L+1\leq 0$. 从而 $L=1$.

类似地, 通过对 $b_n\leq 2-\dfrac{1}{b_{n+1}}$ 两边取下极限可得 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} b_n=1$.

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1$.

法 II: 利用 $\max\limits_{x\in[0,2]} x(2-x)=1$ 得到

$$b_{n+1}\geq b_n(2-b_n)b_{n+1}\geq b_n.$$

因此 $\{b_n\}$ 单调增加且有界, 从而有极限. 设极限为 ξ, 则 $\xi(2-\xi)\geq 1$. 从而得到 $\xi=1$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=1$.

ytdwdw 于 2012 年 4 月 15 日

33. **问题:** 由积分中值定理, 存在 $\xi_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ 满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{\pi}{2} \sin^n \xi_n$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n$.

解: 由于 $\sin^n x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调, ξ_n 是存在唯一的. 事实上, $\xi_n = \arcsin\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx\Big)^{\frac{1}{n}}$. 有很多方法说明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx\Big) = 0$:

法 I: $\forall \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, 我们有

$$\frac{1}{n}\ln\Big(\frac{2\varepsilon}{\pi}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\Big) \le \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx\Big) \le \frac{1}{n}\ln\frac{2}{\pi}.$$

由此可得结论.

法 II: 用 Stolz 公式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx\Big) = \lim_{n\to+\infty}\ln\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx} = \ln\big(\max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}\sin x\big) = 0.$$

法 III: 用 Stirling 公式或者利用 $\ln\Gamma(x)$ 的凸性可得 $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$, $(n\to+\infty)$. 由此得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx\Big) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{B(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2})}{\pi} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 0,$$

这里 $B(p,q)$ 是 Beta 函数, $\Gamma(p)$ 是 Gamma 函数.

法 IV: 也可以把法 I 改造一下, 变得更为到位:

$$\Big(\frac{2}{n\pi}\Big)^{\frac{1}{n}}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}) \le \Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\, dx\Big)^{\frac{1}{n}} \le \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

不过法 I 包含了基本的分析思想, 改成法 IV 属于雕虫小技. 利用这个思想, 可以得到更一般的结果: 对于 $[a,b]$ 上的连续函数 f, g, 若 $g(x) > 0$, 则成立

$$\lim_{p\to+\infty}\Big(\int_a^b |f(x)|^p g(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

总之, 最后得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$.

ytdwdw 于 2012 年 4 月 10 日

32. **问题:** 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^4\,dx.$

解: 由

$$\lim_{x\to 0} x^2\Big(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\Big)=\frac{2}{3}$$

得存在常数 $C>0$ 使得

$$\Big|\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x}-\frac{\sin^4 nx}{x^3}\Big|\le\frac{C\sin^4 nx}{x}\le Cn,\qquad \forall\, x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

由此得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\Big(\frac{\sin nx}{\sin x}\Big)^4\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\,dx\\
=\ &\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^3 x\cos x}{x^2}\,dx\\
=\ &\int_0^{+\infty}\frac{6\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x}\,dx\\
=\ &\ln 2,
\end{aligned}$$

其上第二个等式为变量代换, 第四第五个等式用了分部积分, 第六个等式是三角函数恒等变换, 第七个等式用了 Frullani 公式(也可以通过对含参变量反常积分求导来计算).

ytdwdw 于 2012 年 4 月 10 日

31. **问题:** 如果 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ Riemann 可积, 则 $|f(x)|$ 是否在 $[a,b]$ 也是 Riemann 可积的.

解: 对于任何 $\varepsilon>0$ 以及 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, 容易证明当 $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)|\geq\varepsilon$ 时

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)|-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)|\leq\frac{1}{\varepsilon}\Big(\sup_{x\in[\alpha,\beta]}f^2(x)-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}f^2(x)\Big).$$

一般地, 就有

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)|-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)|\leq\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\sup_{x\in[\alpha,\beta]}f^2(x)-\inf_{x\in[\alpha,\beta]}f^2(x)\Big).$$

这样对于 $[a,b]$ 的任何划分 P, 都有

$$U(f,P)-L(f,P)\leq\varepsilon(b-a)+\frac{1}{\varepsilon}\big(U(f^2,P)-L(f^2,P)\big).$$

由 $f^2(x)$ 的可积性可以取到 P 使得 $U(f^2,P)-L(f^2,P)\leq\varepsilon^2$. 于是

$$U(f,P)-L(f,P)\leq\varepsilon(b-a+1).$$

由此可得到 $|f(x)|$ 的可积性.

注: 自然, 如果利用有界闭区间上的有界函数 Riemann 可积当且仅当它的不连续点全体是零测度集, 则显然可得 $f^2(x)$ 和 $|f(x)|$ 有相同的 Riemann 可积性.

ytdwdw 于 2012 年 4 月 8 日

30. **问题:** 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\dfrac{1^2}{n^3}\Big)\Big(1+\dfrac{2^2}{n^3}\Big)\dots\Big(1+\dfrac{n^2}{n^3}\Big)$

解:

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $x\in(0,\delta)$ 时, 成立 $\Big|\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\Big|<\varepsilon$, 即 $|\ln(1+x)-x|<\varepsilon x$. 因此, 当 $n>\frac{1}{\delta}$ 时,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k^2}{n^3}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\Big|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}.$$

令 $n\to+\infty$ 得到

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k^2}{n^3}\Big)-\int_0^1 x^2\,dx\Big|\le\varepsilon\int_0^1 x^2\,dx.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k^2}{n^3}\Big)=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}.$$

从而原极限为 $e^{\frac{1}{3}}$.

注: 用上极限只是为了叙述简便. 本题中 $|\ln(1+x)-x|<\varepsilon x$ 不宜换成 $\ln(1+x)=x+o(x)$.

ytdwdw 于 2012 年 4 月 4 日

29. **问题:** 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,dx$.

解:

此类问题可以先尝试用变量代换 $x=\frac{1}{t}$, 看看能不能消去 $\arctan x^2$. 可惜本题不行, 如果分子中 $1-x^2$ 改为 $1+x^2$ 就可以.

设 $\alpha\geq 0$, 可以得到

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &\equiv \int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x^2}{x^2+1}\,dx=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\alpha}\frac{x^2}{(1+t^2x^4)(x^2+1)}\,dt\\
&= \int_0^{\alpha}dt\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1+t^2x^2}{(1+t^2x^4)(t^2+1)}-\frac{1}{(1+t^2)(x^2+1)}\Big)\,dx\\
&= \int_0^{\alpha}dt\int_0^{+\infty}\frac{1+tx^2}{(1+x^4)(t^2+1)\sqrt{t}}\,dx-\int_0^{\alpha}dt\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(x^2+1)}\,dx\\
&= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_0^{\alpha}\frac{1+t}{(t^2+1)\sqrt{t}}\,dt-\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+t^2}\,dt\\
&= \frac{\pi}{2}\Big(\arctan(\sqrt{2\alpha}+1)+\arctan(\sqrt{2\alpha}-1)-\arctan\alpha\Big).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,dx\\
=\ & \int_0^{+\infty}\frac{(\sqrt{3}-1)\arctan x^2}{2(x^2+2-\sqrt{3})}\,dx-\int_0^{+\infty}\frac{(\sqrt{3}+1)\arctan x^2}{2(x^2+2+\sqrt{3})}\,dx\\
=\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(F(2-\sqrt{3})-F(2+\sqrt{3})\Big)\\
=\ & -\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2\alpha}+1)+\arctan(\sqrt{2\alpha}-1)-\arctan\alpha\Big)\Big|_{\alpha=2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\\
=\ & -\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\Big(-\arctan(\sqrt{3}-2)+\arctan(2-\sqrt{3})\Big)=-\frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2012 年 3 月 23 日

28. **问题:** 设 $a_n > 0$, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k} = 1$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

证明: 由假设 a_n 有上界 $M > 0$. 任取 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $N > 0$ 使得当 $n \geq N$ 时, $a_n \geq 1-\varepsilon$, 且 $\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k} \leq 1+\varepsilon$.

所以

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{(n-N)(1-\varepsilon)}{n} = 1-\varepsilon.$$

任取 $\delta > \varepsilon$, 对 $n > N$, 设 $a_{N+1}, \ldots, a_n$ 中大于 $1+\delta$ 数的个数为 $m_{n,\delta}$, 则

$$\ln(1+\varepsilon) \quad \geq \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} \ln a_k + \frac{n-N-m_{n,\delta}}{n}\ln(1-\varepsilon) + \frac{m_{n,\delta}}{n}\ln(1+\delta).$$

由此可得

$$\frac{m_{n,\delta}}{n} \leq \frac{\ln(1+\varepsilon)-\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\delta)-\ln(1-\varepsilon)} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} \ln a_k.$$

因为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} a_k + (1+\delta) + \frac{m_{n,\delta}M}{n}$$

所以

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1+\delta + \frac{\ln(1+\varepsilon)-\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\delta)-\ln(1-\varepsilon)}M.$$

在前述关于下极限的式子中令 $\varepsilon \to 0^+$, 在上式中依次令 $\varepsilon \to 0^+$ 以及 $\delta \to 0^+$ 得

$$1 \leq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

ytdwdw 于 2012 年 3 月 23 日

27. **问题:** 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|a-\sin^2 x|\,dx$, 其中 $a\in[0,1]$.

解:

设 $a=\cos^2\theta$. 则

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|a-\sin^2 x|\,dx \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\ln|\cos\theta-\sin x|+\ln|\cos\theta+\sin x|\Big)\,dx \\
= & \int_0^{\pi} \ln|\cos\theta-\cos x|\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln|\cos\theta-\cos x|\,dx \\
= & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln 2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln|\sin\frac{x-\theta}{2}|\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln|\sin\frac{x+\theta}{2}|\,dx \\
= & \pi\ln 2+\int_0^{2\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\,dx=-\pi\ln 2.
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2012 年 3 月 21 日

26. **问题:** 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-6x})e^{-x}}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,dx$.

解:

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-6x})e^{-x}}{x(1+e^{-2x}+e^{-4x}+e^{-6x}+e^{-8x})}\,dx \\
= & \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-6x})e^{-x}(1-e^{-2x})}{x(1-e^{-10x})}\,dx \\
= & \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-e^{-6x})e^{-(10n+1)x}(1-e^{-2x})}{x}\,dx \\
= & \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-(10n+1)x}-e^{-(10n+7)x})-(e^{-(10n+3)x}-e^{-(10n+9)x})}{x}\,dx \\
= & \sum_{n=0}^{\infty} \ln\frac{(10n+7)(10n+3)}{(10n+1)(10n+9)} = \sum_{n=0}^{\infty} \ln\frac{(\frac{7}{10}+n)(\frac{3}{10}+n)}{(\frac{1}{10}+n)(\frac{9}{10}+n)} \\
= & \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{\Gamma(\frac{1}{10})\Gamma(\frac{9}{10})\Gamma(\frac{3}{10}+n)\Gamma(\frac{7}{10}+n)}{\Gamma(\frac{3}{10})\Gamma(\frac{7}{10})\Gamma(\frac{1}{10}+n)\Gamma(\frac{9}{10}+n)} \\
= & \ln\frac{\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}} = \ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}.
\end{aligned}
$$

ytdwdw 于 2012 年 3 月 20 日

25. **问题:** 设 $u = f(x,y)$ 在区域 $D : x^2 + y^2 < 1$ 内可微, 且满足方程 $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. 证明: $f(x,y)$ 在 D 内恒为常数.

证明: 这是偏微分方程中的基本题. 主要的思想就是此时 $f(x,y)$ 可以表示为 $g(\ln|x| - \ln|y|)$. 而在包含原点的区域 D 内这样的函数只能是常数. 以下证明方法本质上是上述思想的体现:

任取 $\ell > 0$, 考虑

$$g(x) = f(x, \ell x), \qquad x \in \big(0, \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}\big).$$

则 $g(x)$ 有定义且 $g'(x) = \dfrac{1}{x}\Big[x f_x(x,\ell x) + \ell x f_y(x, \ell x)\Big] = 0$. 所以 $g(x)$ 为(可能与 ℓ 有关的)常数. 从而注意到可微函数必连续, 得到

$$f(x, \ell x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(\varepsilon, \ell\varepsilon) = f(0,0), \qquad \forall\, x \in \big(0, \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}\big).$$

这就是说 $f(x,y)$ 在 $\big\{(x,y) | x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\big\}$ 上均取值为 $f(0,0)$.

一般地可以证明 $f(x,y)$ 在 $\big\{(x,y) | x \neq 0, y \neq 0, x^2 + y^2 < 1\big\}$ 内取值为 $f(0,0)$. 利用连续性可得 $f(x,y)$ 在 D 内取值为常数.

ytdwdw 于 2012 年 3 月 13 日

24. **问题:** 证明: 设 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 局部有界, 且对任何 x, y 成立 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $f(x)$ 必为齐次线性函数.

证明:

(a) 先设 $f(x)$ 连续. 对于任何正整数 m, n, 有 $f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n})$. 特别, $f(1) = nf(\frac{1}{n})$. 所以 $f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$. 即对任何正有理数 q 成立

$$f(q) = qf(1). \tag{3}$$

另一方面, $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$. 所以 $f(0) = 0$. 而 $f(-x) + f(x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$. 所以 $f(-x) = -f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$. 从而结合前面的结论. (3) 对所有有理数成立.

最后利用 $f(x)$ 的连续性和有理数在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性可得 $f(x) = f(1)\,x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$. 即 $f(x)$ 为齐次线性函数.

(b) 仅假设 $f(x)$ 在 0 点连续. 此时由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 可知 $f(x)$ 连续. 从而结论也成立.

(c) 现假设 $f(x)$ 局部有界, 其实只要在 0 点附近有界. 则存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上有界, 设 $|f(x)| \le M \quad (|x| \le \delta)$. 则对任何正整数 m,

$$|f(x)| = \frac{1}{m}|f(mx)| \le \frac{M}{m}, \qquad \forall x \in \big[-\frac{\delta}{m}, \frac{\delta}{m}\big].$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. 即 $f(x)$ 在 0 点连续. 从而由前两部分的结论可知 $f(x)$ 是齐次线性函数.

注: 一般认为, 确实有不连续的实值函数 $g(x)$ 满足 $g(x+y) = g(x) + g(y), \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$. 其构造要用到 Zermelo 选择公理. 大家可以查看"张景中, 关于函数方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$,《数学进展》, 1955 年 04 期, 第 795 页–第 800 页."

ytdwdw 于 2012 年 3 月 12 日

23. **问题:** 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 且满足:

1. 存在 $c>0$ 使得 $|f'(x)|\le \dfrac{c}{x}$ 对一切 $x>0$ 成立,
2. $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^R |f(x)|\,dx=0$.

证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明: 任取 $\varepsilon\in(0,1)$, 则 $\forall\, y\in((1-\varepsilon)x,x)$, 存在 $\theta=\theta(\varepsilon,x,y)\in(0,1)$ 使得

$$|f(x)-f(y)|=|f'(y+\theta(x-y))|(x-y)\le\frac{c(x-y)}{y+\theta(x-y)}\le\frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon}.$$

所以

$$|f(x)|\le|f(y)|+\frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon},\qquad \forall\, y\in((1-\varepsilon)x,x).$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\frac{1}{\varepsilon x}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x}|f(x)|\,dt\le\frac{1}{\varepsilon x}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x}\Big(|f(t)|+\frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon}\Big)\,dt\\ &\le \frac{1}{\varepsilon x}\int_0^x|f(t)|\,dt+\frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon},\qquad \forall\, x>0.\end{aligned}$$

于是

$$\varlimsup_{x\to+\infty}|f(x)|\le\frac{\varepsilon c}{1-\varepsilon}.$$

由 ε 的任意性即得结论.

ytdwdw 于 2012 年 3 月 5 日

22. **问题:** 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!})e^{-n}=\frac{1}{2}$.

证明:

法 I. 利用 e^x 在零点的 Taylor 展式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt$$

得到

$$(1+n+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!})e^{-n}=1-e^{-n}\int_0^n\frac{(n-t)^n}{n!}e^t\,dt=1-\frac{1}{n!}\int_0^n t^ne^{-t}\,dt.$$

由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,dt=n!$, 要证明的结论等价于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^n t^ne^{-t}\,dt}{\int_n^{+\infty}t^ne^{-t}\,dt}=1,$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 f^n(t)\,dt}{\int_1^{+\infty}f^n(t)\,dt}=1,$$

其中 $f(t)=te^{1-t}$. 为了证明上述等式, 除了利用积分的收敛性, 我们的证明主要利用以下性质: $\forall\,\beta>1>\gamma>0$,

(1)

$$\begin{cases}\dfrac{f(\beta t)}{f(t)}\le f(\beta)<1, & t\in[1,+\infty),\\ \dfrac{f(\gamma t)}{f(t)}\le f(\gamma)<1, & t\in(0,1].\end{cases}$$

(2) 存在 $\varepsilon=\varepsilon_{\beta,\gamma}\in(0,1)$ 使得

$$f(1+\beta s)\le f(1-s)\le f(1+\gamma s),\qquad\forall\,s\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

上式可由 $f(1+t)=1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\quad(t\to0)$ 推得.

由 (1),

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_\beta^{+\infty} f^n(t)\,dt}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,dt}=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\beta\int_1^{+\infty} f^n(\beta t)\,dt}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,dt}\le\varlimsup_{n\to+\infty}\beta f^n(\beta)=0.$$

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\gamma} f^n(t)\,dt}{\int_0^{1} f^n(t)\,dt}=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\gamma\int_0^{1} f^n(\gamma t)\,dt}{\int_0^{1} f^n(t)\,dt}\le\varlimsup_{n\to+\infty}\gamma f^n(\gamma)=0.$$

于是结合 (2) 得到

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{1} f^n(t)\,dt}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,dt}=\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\int_{1-\varepsilon}^{1} f^n(t)\,dt}{\int_1^{1+\beta\varepsilon} f^n(t)\,dt}=\varliminf_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\varepsilon} f^n(1-t)\,dt}{\beta\int_0^{\varepsilon} f^n(1+\beta t)\,dt}\ge\frac{1}{\beta},$$

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{1} f^n(t)\,dt}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,dt}=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_{1-\varepsilon}^{1} f^n(t)\,dt}{\int_1^{1+\gamma\varepsilon} f^n(t)\,dt}=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{\varepsilon} f^n(1-t)\,dt}{\gamma\int_0^{\varepsilon} f^n(1+\gamma t)\,dt}\le\frac{1}{\gamma},$$

由 $\beta>1>\gamma>0$ 的任意性即得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_0^{1} f^n(t)\,dt}{\int_1^{+\infty} f^n(t)\,dt}=1$. 从而结论得证.

ytdwdw 于 2012 年 3 月 5 日

法 II.

$$\big(1+n+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\big)e^{-n}=\frac{1}{e^n n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\int_0^{+\infty}n^k x^{n-k}e^{-x}\,dx$$

$$=\frac{1}{e^n n!}\int_0^{+\infty}(n+x)^n e^{-x}\,dx=\frac{n^{n+1}}{e^n n!}\int_0^{+\infty}y^n(x)\,dx,$$

其中 $y(x)=(1+x)e^{-x}$ $(x\geq 0)$. 令 $x=x(y)$ $(y\in(0,1])$ 为其反函数, 则

$$\int_0^{+\infty}y^n(x)\,dx=\int_0^1 y^{n-1}\frac{1+x(y)}{x(y)}\,dy=\frac{1}{n}+\int_0^1\frac{y^{n-1}}{x(y)}\,dy.$$

由于函数 $x(y)$ 在 $(0,1)$ 内连续非零, 且

$$\lim_{y\to 0^+}\Big(\frac{1}{x(y)}-\frac{1}{\sqrt{2(1-y)}}\Big)=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to 1^-}\Big(\frac{1}{x(y)}-\frac{1}{\sqrt{2(1-y)}}\Big)\\ =\ &\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{2(1-(1+x)e^{-x})}}\Big)\\ =\ &\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}}\Big)\\ =\ &-\frac{2}{3},\end{aligned}$$

因此, $g(y)\equiv\dfrac{1}{x(y)}-\dfrac{1}{\sqrt{2(1-y)}}$ 可以看做 $[0,1]$ 上的连续函数.

于是

$$\int_0^{\infty}y^n(x)\,dx=\frac{1}{n}+\int_0^1\frac{y^{n-1}}{\sqrt{2(1-y)}}\,dy+\int_0^1 g(y)y^{n-1}\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}B\big(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)+O\big(\frac{1}{n}\big)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}},\qquad(n\to+\infty).$$

最后得到

$$\lim_{n\to+\infty}\big(1+n+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\big)e^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{e^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{2}.$$

ytdwdw 于 2012 年 8 月 10 日

法 III. 我们可以利用以下的中心极限定理:

独立同分布的中心极限定理. 设随机变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ 独立同分布, 且有期望 μ 和方差 $\sigma^2 > 0$. 则对于任何实数 x,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

现在考虑随机变量 x_k 独立同分布, $P(x_k \le x) = 1 - e^{-x}$ $(\forall\, x \ge 0)$. 则 x_k 的期望为 $\mu = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1$, 方差为 $\sigma = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx - 1 = 1 > 0$. 直接计算可得

$$P\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \le x\Big) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}, \qquad \forall\, x \ge 0.$$

由中心极限定理

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\Big(1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}e^{-n}\Big)\\
= &\lim_{n\to+\infty} P\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \le 1\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2012 年 8 月 11 日

21. **问题:** 设 $a_0, a_1 > 0$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+1}}$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2}$.

证明: 令

$$M = \max\left(a_0, a_1, \frac{2}{a_0}, \frac{2}{a_1}\right).$$

则利用递推公式可以归纳地证明 $\dfrac{2}{M} \le a_n \le M$. 设 a_n 的上下极限为 L, ℓ. 则

$$\frac{2}{M} \le \ell \le L \le M,$$

且

$$\ell = \varliminf_{n\to+\infty} a_{n+2} \ge \varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_{n+1}} + \varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{L},$$

$$L = \varlimsup_{n\to+\infty} a_{n+2} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_{n+1}} + \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{\ell}.$$

因此 $L\ell = 2$.

由上极限的性质, 存在子列 a_{m_k+3} 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{m_k+3} = L$. 进一步抽取子列(为简便起见, 子列记号不变), 可以使 $a_{m_k+2}, a_{m_k+1}, a_{m_k}$ 都收敛, 设极限依次为 x, y, z. 则 $\ell \le x, y, z \le L$. 于是由递推公式可得

$$L = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad x = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

由上面第一式结合 $\ell \le x, y \le L$ 以及 $L = \dfrac{2}{\ell}$ 得到 $x = y = \ell$. 类似地, 可再由第二式得到 $y = z = L$. 所以 $L = \ell$. 从而 $L = \ell = \sqrt{2}$.

注: (1) 一般地, 设一个正数列 a_n 满足

$$a_{n+m+1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j}{a_{n+j}},$$

其中 $m \ge 2$ 为固定的整数, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 为正的常数. 则

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \beta_j}.$$

(2) 如果假设非零的数列 a_n 满足 $a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_n}$. 则可以证明 a_n 收敛到 $\sqrt{2}$ 或者 $-\sqrt{2}$, 具体解答见下一页.

ytdwdw 于 2012 年 3 月 1 日

20. **问题:** 设非零数列 a_n 满足 $a_{n+2}=\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_n}$. 则 a_n 收敛到 $\sqrt{2}$ 或者 $-\sqrt{2}$.

证明: 如果对某个 m, a_m 和 a_{m+1} 同号, 则 a_n 当 $n\geq m$ 时保号. 此时由前一题可知结论成立. 以下只要证明这样的 m 存在. 否则, 对任何 $k\geq 0$, a_k 与 a_{k+1} 异号, 与 a_{k+2} 同号. 结合递推公式可推出 $|a_{k+1}|>|a_k|$. 即 $|a_n|$ 严格单调增加, 所以

$$|a_n|\geq|a_0|>0.$$

进一步有

$$|a_{n+2}|=\Big|\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\Big|=\Big|\frac{1}{a_n}\Big|-\Big|\frac{1}{a_{n+1}}\Big|<\Big|\frac{1}{a_n}\Big|\leq\frac{1}{|a_0|}.$$

所以 $|a_n|$ 单调有界, 从而有极限. 易见该极限不为零. 另一方面,

$$\lim_{n\to+\infty}|a_{n+2}|=\lim_{n\to+\infty}\Big(\Big|\frac{1}{a_n}\Big|-\Big|\frac{1}{a_{n+1}}\Big|\Big)=0.$$

矛盾. 所以必有某个 m, 使得 a_m 和 a_{m+1} 同号. 结论得证.

19. **问题:** 设 f 是 $[0,1]$ 上的右连续函数， $\mathbb{Q}$ 是 $[0,1]$ 上的有理数集. 若 f 沿着 $\mathbb{Q}$ 有左极限, 即 $\forall x \in (0,1]$,

$$\lim_{\substack{y\to x^-\\ y\in\mathbb{Q}}} f(y)$$

存在. 证明: f 在任何点 $x \in (0,1]$ 上有左极限.

证明:

任取 $x \in (0,1]$. 记 $a = \lim\limits_{\substack{y\to x^-\\ y\in\mathbb{Q}}} f(y)$. 若 $\lim\limits_{y\to x^-} f(y)$ 不等于 a (此时该左极限必定不存在), 则存在 $\delta > 0$ 以及 $y_n \to x^-$ 使得 $|f(y_n) - a| > \delta > 0$. 由 f 的右连续性, 存在 $\beta_n \in (0, x - y_n)$ 使得

$$|f(y) - f(y_n)| \le \frac{\delta}{2}, \qquad \forall\, y \in (y_n, y_n + \beta_n).$$

任取 $x_n \in \mathbb{Q} \bigcap (y_n, y_n + \beta_n)$, 则 $x_n \to x^-$,

$$|f(x_n) - a| \ge |f(y_n) - a| - |f(x_n) - f(y_n)| \ge \frac{\delta}{2}.$$

与 $a = \lim\limits_{\substack{y\to x^-\\ y\in\mathbb{Q}}} f(y)$ 矛盾.

ytdwdw 于 2012 年 2 月 28 日

18. **问题:** 设 $a_n > 0$, 且 $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = 1$. 证明

$$F \equiv \left\{ \sum_{n\in A} a_n : A \subset \mathbb{N} \right\}$$

是一个闭集(注: A 可以取空集), 其中 $\mathbb{N}$ 为正整数集.

证明: 设 $s \in \overline{F}$, 则有 $\mathbb{N}$ 的子集列 $A_1, A_2, \ldots$ 使得 $F(A_n) \to s$. 我们按以下方式来构造 A:

若 1 含于无限多个 A_n, 则取 A_n 的子列, 使得每一个都包含 1, 否则取 A_n 的子列, 使得每一个都不包含 1, 把该子列记作

$A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, \ldots$

根据其是否包含 1 来规定 $1 \in A$ 或 $1 \notin A$;

若 2 含于无限多个 $A_{1,n}$, 则取 $A_{1,n}$ 的子列, 使得每一个都包含 2, 否则取 $A_{1,n}$ 的子列, 使得每一个都不包含 2, 把该子列记作

$A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}, \ldots$

根据其是否包含 2 来规定 $2 \in A$ 或 $2 \notin A$;

依次类推, 可以定义出 $A \subseteq \mathbb{N}$, 且

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{\substack{n\in A\\ n\leq m}} a_n + \sum_{\substack{n\in A\\ n>m}} a_n \\ &= \sum_{\substack{n\in A_m\\ n\leq m}} a_n + \sum_{\substack{n\in A\\ n>m}} a_n \\ &= f(A_m) - \sum_{\substack{n\in A_m\\ n>m}} a_n + \sum_{\substack{n\in A\\ n>m}} a_n. \end{aligned}$$

两边关于 m 取极限就可以得到

$$f(A) = \lim_{m\to+\infty} f(A_m) = s.$$

这就证明了 F 是闭集.

ytdwdw 于 2012 年 2 月 28 日

17. **问题:** 定义

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x^2+1-\cos x)} \frac{x}{\operatorname{sh} x} \, dx, \qquad \lambda > 0.$$

求 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \sqrt{\lambda}\, F(\lambda)$.

解:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to+\infty} \sqrt{\lambda}\, F(\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-\lambda(1-\cos\frac{x}{\sqrt{\lambda}})} \frac{x}{\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{\lambda}}} \, dx \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2}} \frac{\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha x} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\alpha\to 0^+} \left(e^{-x^2} e^{-\frac{1-\cos\alpha x}{\alpha^2}} \frac{\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha x} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \frac{\sqrt{6\pi}}{3}.
\end{aligned}$$

第二个等式是为了看起来方便, 第三个等式是因为相应的无穷积分关于 $\alpha \in (0, 1]$ 一致收敛, 这里请注意

$$0 \le \frac{x}{\operatorname{sh} x} \le 1, \qquad \forall\, x \neq 0.$$

注: 类似地可以计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n} \, dx$.

ytdwdw 于 2012 年 2 月 28 日

16. **问题:** 设 f 是 $[-1,1]$ 上的非负连续函数, 满足

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1.$$

证明

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x+y|f(x)f(y)\,dxdy \geq \int_{-1}^{1} |x|f(x)\,dx.$$

证明: 令 $g(x) = f(-x), \quad (x \in [0,1])$. 则

$$\int_{0}^{1} xf(x)\,dx = \int_{0}^{1} xg(x)\,dx, \qquad \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx = 1.$$

这样,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x+y|f(x)f(y)\,dxdy \\
= \ & \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x+y|f(x)f(y)\,dxdy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x+y|g(x)g(y)\,dxdy \\
& +2\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x-y|f(x)g(y)\,dxdy \\
\geq \ & \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x+y|f(x)f(y)\,dxdy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x+y|g(x)g(y)\,dxdy \\
= \ & 2\int_{0}^{1} xf(x)\,dx \int_{0}^{1} f(y)\,dy + 2\int_{0}^{1} xg(x)\,dx \int_{0}^{1} g(y)\,dy \\
= \ & 2\int_{0}^{1} xf(x)\,dx \Big(\int_{0}^{1} f(y)\,dy + \int_{0}^{1} g(y)\,dy\Big) \\
= \ & 2\int_{0}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x|f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2012 年 2 月 28 日

15. 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

解: 法 I.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\,dy \\
= \;& \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\,dx = \int_0^1 dy \int_0^1 \Big(-\frac{y}{(1+xy)(1+y^2)} + \frac{x+y}{(1+y^2)(1+x^2)} \Big)\,dx \\
= \;& \frac{\pi \ln 2}{4} - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}\,dy.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{8}.
$$

ytdwdw 于 2012 年 2 月 26 日

法 II.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx \;\overset{x=\tan t}{=\!=\!=\!=}\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt \\
= \;& \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\ln(\cos t + \sin t) - \ln\cos t\Big)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\ln\sqrt{2} + \ln\cos(\frac{\pi}{4} - t) - \ln\cos t\Big)\,dt \\
= \;& \frac{\pi \ln 2}{8}.
\end{aligned}
$$

14. **问题:** 若 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, $f(x)=F'(x)$. 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

对于任何 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, 若 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上保号, 则

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)-\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)=\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)|-\inf_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)|;$$

若 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上变号, 则根据 Darboux 定理, $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可以取到 0 值, 于是

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)-\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\le 2\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)|=2\Big(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)|-\inf_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)|\Big).$$

这样对于 $[a,b]$ 的任何划分 P, 都有

$$U(f,P)-L(f,P)\le 2\big(U(|f|,P)-L(|f|,P)\big).$$

由此可得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

注: 类似地, 利用 Darboux 定理可以证明当 $f(x)$ 是导函数时, $f(x)$ 和 $|f(x)|$ 有相同的连续点. 根据有界闭区间上的有界函数 Riemann 可积当且仅当它的不连续点全体是零测度集, 也可以得到此时 $f(x)$ 和 $|f(x)|$ 有相同的 Riemann 可积性.

ytdwdw 于 2012 年 2 月 26 日

13. **问题:** 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(e^2-\big(1+\frac{1}{n}\big)^{2n}\Big)$$

解: 这种问题算平常题. 但有些技巧可供使用. 在不利用 Taylor 展开式时, 计算稍复杂的极限可常用以下三招:

第一招: f^g 一律化为 $e^{g\ln f}$.

第二招: 先尽可能用等价关系化简, 包括能够计算出来极限的部分要算出来.

第三招: 必要时做适当的代换

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\Big(e^2-\big(1+\frac{1}{n}\big)^{2n}\Big)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}\\
=\ &-e^2\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}=-e^2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}{x}\\
=\ &2e^2\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=e^2.
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2012 年 2 月 25 日

12. **问题:** 求解一个数列题. 已知：$f(n)$ 是 n 的有理函数, 并且满足：$\dfrac{1}{n^2} = \tan\Big(\arctan f(n) - \arctan f(n-1)\Big)$. 求：$f(n)$ 的表达式.

解: 满足题意的函数不存在. 否则, $f(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)}$, 其中 $p(x), q(x)$ 是既约的实系数多项式. 则

$$\frac{1}{n^2} = \frac{f(n) - f(n-1)}{1 + f(n)f(n-1)} = \frac{p(n-1)q(n) - p(n)q(n-1)}{p(n)p(n-1) + q(n)q(n-1)}.$$

由上式不难得到 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的次数之差为 $-1, 0$ 或 1. 注意到 $f(x)$ 用 $-1\phi(x)$ 代替时, 上式不变, 所以不妨设 $p(x)$ 的次数不小于 $q(x)$ 的次数. 此时由于 $f(x)$ 不是常数, $p(x)$ 不可能是常数. 整理上式得到

$$p(n)\big(p(n-1) + n^2 q(n-1)\big) = q(n)\big(n^2 p(n-1) - q(n-1)\big).$$

所以 $p(n)\Big|\big(n^2 p(n-1) - q(n-1)\big)$, 由于右边多项式的次数比左边的次数高 2, 且首项系数相同, 因此 $x^2 p(x-1) - q(x-1) = (x-\alpha)(x-\beta)p(x)$. 于是又有 $x^2 q(x-1) + p(x-1) = (x-\alpha)(x-\beta)q(x)$. 上两式中代入 $x = \alpha$ 得到

$$\alpha^2 p(\alpha-1) - q(\alpha-1) = \alpha^2 q(\alpha-1) + p(\alpha-1) = 0.$$

由于 p, q 是既约的, 所以 $(q(\alpha-1), p(\alpha-1)) \neq (0,0)$, 从而 $\alpha^4 + 1 = 0$. 因此, $\alpha = e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4}$. 对应地有

$$(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 \pm \sqrt{2}x + 1.$$

于是可得 $x^2(p(x-1) - p(x)) - q(x-1) = (\pm\sqrt{2}x + 1)p(x)$. 设 $p(x)$ 的最高次项为 $a_m x^m$, 其中 $a_m \neq 0$, m 为正整数. 注意到 $p(x)$ 的次数不低于 $q(x)$ 的次数, 比较前式两边 x^{m+1} 的系数可得 $-m a_m = \pm\sqrt{2} a_m$. 这与 m 是正整数, a_m 非零矛盾.

因此, 满足题设要求的 $f(n)$ 不可能是 $f(n)$ 的有理函数.

ytdwdw 于 2012 年 2 月 25 日

11. **问题:** 有这么一个游戏: 一桌人，某一个人想一个数, 范围是 1 到 999 的整数(包含 1, 999), 然后按某种顺序大家来猜数. 比如说该数为 314，第一个人猜 100，出数者说 101 到 999, 于是第二个人猜 456，出数者说 101 到 455, 依次类推，直到有人猜中. 现在假设该数为 k, 每个人在所给范围内猜任意一个数的概率相同, 在第 n 个人处猜中. 问: 1. 求 n 的期望值; 2. 若 k 也是任意的，求 n 的期望值.

解: 1. 设数的范围为 1 到 m, 出数为 k $(1 \le k \le m)$ 时猜中次数的期望值为 $p(m,k)$. 则

$$p(m,k) = 1 + \frac{1}{m}\sum_{j=k+1}^{m} p(j-1,k) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{k-1} p(m-j,k-j).$$

(1) 记 $a_m = p(m,1)$. 则 $a_m = 1 + \frac{1}{m}\sum_{j=2}^{m} a_{j-1} = 1 + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} a_j$. 于是

$$ma_m = m + \sum_{j=1}^{m-1} a_j; \qquad (m-1)a_{m-1} = m-1 + \sum_{j=1}^{m-2} a_j.$$

由此解得

$$a_m = a_{m-1} + \frac{1}{m} = a_{m-2} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} = \ldots = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}.$$

(2) 记 $b_m = p(m,2)$. 则

$$b_m = 1 + \frac{1}{m}\sum_{j=3}^{m} b_{j-1} + \frac{1}{m}a_{m-1} = 1 + \frac{1}{m}\sum_{j=2}^{m-1} b_j + \frac{1}{m}a_{m-1}$$

于是

$$mb_m = m + \sum_{j=2}^{m-1} b_j + a_{m-1}; \qquad (m-1)b_{m-1} = m-1 + \sum_{j=1}^{m-2} b_j + a_{m-2}.$$

由此解得

$$b_m = b_{m-1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m}(a_{m-1} - a_{m-2}) = b_{m-1} + \frac{1}{m-1}.$$

递推得到 $b_m = b_2 + \sum_{j=2}^{m-1} \frac{1}{j}$.

(3) 一般地, 可以得到

$$p(m,k) = p(k,k) + \sum_{j=2}^{m-k+1} \frac{1}{j}.$$

注意到 $p(k,k) = p(k,1) = a_k$, 可得

$$p(m,k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{m-k+1} \frac{1}{j} - 1.$$

2. 当 k 也是随机的时候, 数的范围为 1 到 m 时猜到那一次的次数的期望值为

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} p(m,j) = \frac{2(m+1)}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j} - 3.$$

当 $m = 999$ 时, 期望值约为

$$\frac{2000}{999}\big(\ln 999 + \gamma\big) - 3 \approx \frac{2000}{999}\big(6.9068 + 0.5772\big) - 3 \approx 11.983.$$

ytdwdw 于 2012 年 2 月 22 日

10. **问题:** 关于二重极限存在, 但二次极限可能不存在, 但后者存在时一定与二重极限相等.

《微积分进阶》中有一个很好的描述：如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 存在, 则

$$\lim_{x\to x_0}\overline{\lim_{y\to y_0}}\, f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\underline{\lim_{y\to y_0}}\, f(x,y)=A.$$

从这一结果出发, 对二重极限和二次极限的关系就容易理解.

ytdwdw 于 2012 年 2 月 18 日

9. **问题:** 关于极坐标的二重积分换元问题我书上的证明看懂了，但是我不知道我的一种方法哪里有错： $dx = d(r\cos\theta) = -r\sin\theta d\theta + \cos\theta dr; dy = d(r\sin\theta) = r\cos\theta d\theta + \sin\theta dr$. 所以 $dxdy = r\cos 2\theta d\theta dr$. 但是书上是 $dxdy = r\,drd\theta$. 我不知道哪里错了. (其中已经舍弃了 $dr\,dr$ 和 $d\theta\,d\theta$ 项了）

   答: 教材中为了简洁, 所用记号不是很恰当, 这样就造成很多人不理解. 这是因为 dx, dy 等微元在某些时候是理解成无方向的, 有的时候又需要理解成有方向的.

   具体地, 如果用 $\overrightarrow{dx}$, $\overrightarrow{dy}$ 表示有方向的长度元, dx, dy 表示无方向的长度元, 等等, 则

   $$dS = |\overrightarrow{dS}| = |\overrightarrow{dx} \times \overrightarrow{dy}| = r|\overrightarrow{dr} \times \overrightarrow{dA}| = r\,dr\,dA.$$

   体积元可以利用混合积, 为解决更一般性的问题, 人们引入楔积.

   ytdwdw 于 2012 年 2 月 18 日

   补充: 基本上可以这样讲, 高等数学或数学分析的绝大多数教材中, 关于重积分变量代换都没有给出严格意义上的证明. 原因很简单, 要给出一个完整的证明, 需要涉及一系列的东西, 绝不是几页纸就可以搞定的.

   大致说来, 要给出一套关于重积分变量代换的理论, 需要涉及以下几个方面:

   (a) 体积(面积)的定义. 首先应该定义的是各棱平行于坐标轴的正方体的体积, 然后再给出一般物体(集合)的“体积”的“新的”定义, 这里会牵涉到是否可求体积的问题. 还有就是正方体作为一般物体的特例, 在新的定义下和原先的定义下其值保持一致.

   (b) **需要推导斜的平行多面体的体积公式**. 本人认为这一公式应该是以后很多概念的基础. 值得注意的是哪怕是一个正立方体, 当它平移旋转以后的物体的体积保持不变远不是平凡的. 上面这个体积公式的直接推论是平行多面体的体积在旋转和平移下保持不变性.

   (c) 然后可以建立线性变换下的换元公式.

   (d) 再建立非线性变换的换元公式. 这里严格的证明应该需要一个逼近过程. 即用分块的线性变换去“一致逼近”一个非线性变换.

至于楔积, 应该看作是在上述**平行多面体的体积公式**基础上引入的一个方便的符号系统. 其运算性质完全来源于该体积公式.

ytdwdw 于 2012 年 8 月 30 日

8. **问题:** 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内三阶可导，且 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2, f(1)=1, f(2)=6$. 证明, 存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f'''(\xi)=9$.

证明: 如果结论不对, 则由 Darboux 定理, $f'''(x)>9$ 恒成立或者 $f'''(x)<9$ 恒成立. 以下证明我们只考虑 $f'''(x)>9$ 恒成立的情形, 另一种情形类似可证. 此时记 $g(x)=f'''(x)-9$.

(i) 先考虑 $f'''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续的情形.对于这种情形的证明包含了本解答的主要思想. 如果纯粹要一个证明的话, 可以略去这一步. 将 $f(x)$ 在 0 点用带积分型余项的 Taylor 展式展开:

$$f(x)=2x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+G(x),\qquad \forall\, x\in[0,2],$$

其中

$$G(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}g(t)\,dt,\qquad \forall\, x\in[0,2].$$

由 $f(1)=1, f(2)=6$ 解得 $G(2)=4G(1)$. 而

$$\begin{aligned}G(2)\ &=\ \int_0^2\frac{(2-t)^2}{2}g(t)\,dt>\int_0^1\frac{(2-t)^2}{2}g(t)\,dt\\ &>\ \int_0^1\frac{(2-2t)^2}{2}g(t)\,dt=4G(1).\end{aligned}$$

矛盾.

(ii) 一般地, 考虑(由于 $f''(0)$ 不一定存在, 所以下式中没有出现相应的项)

$$H(x)=f(x)-\Big(2x+\frac{3}{2}x^3\Big),\qquad \forall\, x\in[0,2],$$

则 $H(0)=H'(0)=0$, $H'''(x)>0$ $(x\in(0,2))$, 从而又知 $H''(x)$ 在 $(0,2)$ 内严格单增. 由 $f(1)=1, f(2)=6$ 解得 $H(2)=4H(1)$. 考虑

$$F(x)=H(2x)-4H(x),\qquad \forall\, x\in[0,1].$$

则 $F(0)=F'(0)=0$, $F''(x)=4\big(H''(2x)-H''(x)\big)>0$ $(x\in(0,1))$. 由此可得 $F(x)>F(0)=0$ $(x\in(0,1])$. 这与 $F(1)=H(2)-4H(1)=0$ 矛盾. 结论得证.

ytdwdw 于 2012 年 2 月 17 日

7. **问题:** 一排8个广告牌，有红蓝两种，两红不能相邻，问有多少种方法？

解: 设 E_n 表示一排 n 个广告牌，有红蓝两种，两红不能相邻时的排法总数则 $E_0=1, E_1=2$ (如果觉得 $E_0=1$ 不好理解就计算 $E_2=3$),

$$E_{n+1}=E_n+E_{n-1},$$

上式右边的理解: E_n 对应于第一个广告牌为蓝的总数, E_{n-1} 对应于第一个广告牌为红的总数.

于是 $E_2=3, E_3=5, E_4=8, E_5=13, E_6=21, E_7=34, E_8=55.$

ytdwdw 于 2012 年 2 月 17 日

6. **问题:** 计算:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{t}^{+\infty} dw \int_{w}^{+\infty} e^{-(u^2+t^2+\frac{1}{2}w^2)}\, du.$$

解: 记 $\Omega = \{(u,w,t)| -\infty < t \le w \le u < +\infty\}$, 做广义球面坐标变换

$$\begin{cases} u = r\cos\theta\sin\varphi, \\ w = \sqrt{2}r\sin\theta\sin\varphi, \\ t = r\cos\varphi, \\ r \ge 0, \theta \in [-\pi,\pi], \varphi \in [0,\pi]. \end{cases}$$

设 $\alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$ 满足 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi(\theta) \in (0,\pi)$ 满足 $\cot\varphi(\theta) = \sqrt{2}\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}
\text{原积分} &= \iiint\limits_{\Omega} e^{-(u^2+t^2+\frac{1}{2}w^2)}\, dudwdt \\
&= \int_0^{+\infty} dr \int_{-\pi+\alpha}^{\alpha} d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{\pi} \sqrt{2}\, e^{-r^2} r^2 \sin\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \int_{-\pi+\alpha}^{\alpha} d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \int_{-\pi+\alpha}^{\alpha} (1+\cos\varphi(\theta))\, d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \int_{-\pi+\alpha}^{\alpha} \big(1+\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{1+2\sin^2\theta}}\big)\, d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\Big(\pi - 2\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\, ds\Big) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\Big(\pi - 2\arcsin\frac{2}{3}\Big) = \sqrt{2\pi}\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

ytdwdw 于 2012 年 2 月 12 日

5. **问题:** 导函数在一点可导, 是否意味着导函数在该点的某个领域内连续.

解: 不一定.

反例: 令

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

则

$$g'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\ 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

因此, g 可导但导数在 0 点不连续. 进一步,

$$|g(x)|\le 16,\qquad |g'(x)|\le 9,\qquad \forall\, x\in[-4,4].$$

特别, 注意到 g 在 0 点以外有连续的两阶导数, 可见

$$\begin{aligned} M_n &\equiv \sup_{0<|x|\le 1}\Big|\frac{g'\big(x+\frac{1}{2^n}\big)-g'\big(\frac{1}{2^n}\big)}{x}\Big| \\ &= \max\Big(\sup_{0<|x|\le\frac{1}{2^{n+1}}}\Big|\frac{g'\big(x+\frac{1}{2^n}\big)-g'\big(\frac{1}{2^n}\big)}{x}\Big|,\sup_{\frac{1}{2^{n+1}}<|x|\le 1}\Big|\frac{g'\big(x+\frac{1}{2^n}\big)-g'\big(\frac{1}{2^n}\big)}{x}\Big|\Big) \\ &\le \max\Big(\sup_{0<|x|\le\frac{1}{2^{n+1}}}\Big|g''\big(x+\frac{1}{2^n}\big)\Big|, 18\cdot 2^{n+1}\Big)<+\infty. \end{aligned}$$

考虑

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(M_n+1)}g\big(x+\frac{1}{2^n}\big),\qquad x\in[-1,1].$$

则可证

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(M_n+1)}g'\big(x+\frac{1}{2^n}\big),\qquad x\in[-1,1],$$

$$f''(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(M_n+1)}g''\big(\frac{1}{2^n}\big),\qquad x\in[-1,1],$$

但 f' 在 $-\frac{1}{2^n}$ 这些点上不连续.

ytdwdw 于 2012 年 1 月 21 日

4. **问题:** 设 $\mu > 0$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $c \in (a,b)$ 且 $f'(c) = 0$. 求证: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \mu(f(\xi) - f(a))$.

证明: 给大家一把牛刀—Darboux 定理. 今后此类问题用不着灵机一动.

由于 $\Big(f(x) - \int_a^x \mu(f(t) - f(a))\,dt\Big)' = f'(x) - \mu(f(x) - f(a))$, 因此由 Darboux 定理, $f'(x) - \mu(f(x) - f(a))$ 在 (a,b) 内满足介值性.

于是若结论不成立, 则 $f'(x) - \mu(f(x) - f(a))$ 在 (a,b) 内恒正或恒负. 不妨设 $f'(x) - \mu(f(x) - f(a))$ 恒正, 则

$$\Big(e^{-\mu x}(f(x) - f(a))\Big)' = e^{-\mu x}\Big(f'(x) - \mu(f(x) - f(a))\Big) > 0, \qquad \forall\, x \in (a,b)$$

所以

$$e^{-\mu x}(f(x) - f(a)) > e^{-\mu a}(f(a) - f(a)) = 0, \qquad \forall\, x \in (a,b].$$

即

$$f(x) - f(a) > 0, \qquad \forall\, x \in (a,b].$$

所以

$$\Big(f'(x) - \mu(f(x) - f(a))\Big)\Big|_{x=c} = -\mu(f(c) - f(a)) < 0.$$

与 $f'(x) - \mu(f(x) - f(a))$ 恒正矛盾. 证毕.

ytdwdw 于 2012 年 1 月 20 日

3. **问题:** 证明: $\cos n^2$ 发散.

证明: 给一个不太漂亮的证明. 假设已经证明 $\{\cos(2n+1)|n=1,2,3,\ldots\}$ 的导集为 $[-1,1]$, 这一点不难证明.

现在, 反设 $\cos n^2$ 收敛, 则 $|\cos n^2|$, $|\sin n^2|$ 均收敛, 设极限为 α,β. 则 $\alpha^2+\beta^2=1$. 由和角公式,

$$\cos(n+1)^2=\cos(n^2+2n+1)=\cos n^2\cos(2n+1)-\sin n^2\sin(2n+1).$$

所以

$$|(1-\cos(2n+1))\cos n^2+\cos(n+1)^2-\cos n^2|=|\sin n^2\sin(2n+1)|.$$

由于当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
& |(1-\cos(2n+1))\cos n^2+\cos(n+1)^2-\cos n^2|=|(1-\cos(2n+1))\cos n^2+o(1)| \\
= \ & |(1-\cos(2n+1))\cos n^2|+o(1)=(\alpha+o(1))(1-\cos(2n+1))+o(1) \\
= \ & \alpha(1-\cos(2n+1))+o(1), \\
& |\sin n^2\sin(2n+1)|=(\beta+o(1))|\sin(2n+1)|=\beta|\sin(2n+1)|+o(1),
\end{aligned}$$

可得

$$\alpha(1-\cos(2n+1))=\beta|\sin(2n+1)|+o(1),\qquad n\to\infty.$$

利用 $\{\cos(2n+1)|n=1,2,3,\ldots\}$ 的导集为 $[-1,1]$, 对任何 $s\in[-1,1]$, 对上式在子列意义上求极限可得: $\alpha(1-s)=\beta\sqrt{1-s^2}$. 取 $s=-1$ 得 $\alpha=0$, 再取 $s=0$ 得 $\beta=0$, 与 $\alpha^2+\beta^2=1$ 矛盾.

所以原数列 $\cos n^2$ 发散.

ytdwdw 于 2012 年 1 月 20 日

2. **问题:** 证明: $\{\cos n|n=1,2,\dots\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密.

证明: 法 I. 利用一维开集的构造. 考虑 $E=\{e^{in}|n=1,2,3,\dots\}$. 记 F 为 E 在 $\mathbb{C}$ 中的闭包. 只要证明 $F=S^1=\left\{e^{i\theta}|\theta\in[0,2\pi)\right\}$.

否则 $U\equiv S^1\setminus F$ 非空. 此时, 容易依次证明以下结论:

(1) 对于 $e^{i\theta}\in U$, 存在最大的 β 和最小的 α 使得 $e^{i\theta}\in I_\theta\equiv\{e^{it}|\alpha<t<\beta\}\subseteq U$ 成立. 了解一点拓扑的会知道 U 是 S^1 中的相对开集. 了解一点实变函数的知道 I_θ 就是开集 U 的"构成区间".

(2) 对于 $e^{i\theta}\in U$, I_θ 的弧长 $\ell_\theta\in(0,2\pi)$.

(3) 对于 $e^{i\theta},e^{i\beta}\in U$, I_θ 和 I_β 要么重合, 要么不想交.

(4) ℓ_θ $(e^{i\theta}\in U)$ 的最大值可以取到. 否则有 $\theta_1,\theta_2,\dots$ 使得 $\ell_{\theta_1}<\ell_{\theta_2}<\ell_{\theta_3}<\dots$. 从而 $I_{\theta_1},I_{\theta_2},I_{\theta_3},\dots$ 两两不同, 进而由 (3) 知他们两两不交. 注意到 S^1 中只能放下有限个弧长不小于 ℓ_{θ_1} 的这种构成区间, 我们就会得到矛盾. 所以相应的最大值一定取到.

(5) $e^iF\equiv\{e^iz|z\in F\}\subseteq F$. 从而 $e^iU\supseteq U$, 进而 $e^{-i}U\subseteq U$.

(6) 设 θ 使得 I_θ 的弧长达到最大. 考虑 $e^{-i}I_\theta,e^{-2i}I_\theta,e^{-3i}I_\theta,\dots$. 则其中必有两个会相交. 若相交则必定重合, 否则与弧长最大的假设矛盾. 而其中的两个集合 $e^{-mi}I_\theta$ 和 $e^{-ni}I_\theta$ $(m\neq n)$ 重合的充要条件是 $m-n$ 为 2π 的整数倍. 这与 π 为无理数矛盾.

因此, $F=S^1$. 所以 E 在 S^1 中稠密. 从而 $\{\cos n|n=1,2,\dots\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密.

ytdwdw 于 2012 年 1 月 20 日

法 II. 利用"抽屉原理: m个箱子中放入$m+1$个球，则必有一个箱子当中至少有两个球".

抽屉原理第一个有趣而非平凡的结果是: 若 x 是正无理数, 则 $\forall N \in \mathbb{Z}_+$, 存在正整数 $p > N$, 以及正整数 q, 使得 $|\frac{q}{p} - x| < \frac{1}{p^2}$.

(以上结论的证明: 任取正整数 M, 考虑 $Mx, (M+1)x, \dots, 2Mx$. 由于这些数有 $M+1$ 个, 所以必有其中两个不同的数, 其对应的小数部分落在同一个 $[\frac{k}{M}, \frac{k+1}{M}]$ $(k = 0, 1, 2, \dots, M-1)$ 上. 设这两个数为 mx, nx, 且设 $m > n$. 则 $m - n \le M$. 注意到这些数的小数部分不会取值 $\frac{k}{M}$, 我们有正整数 q, 使得

$$|mx - nx - q| = |\,\{mx\} - \{nx\}\,| < \frac{1}{M}.$$

从而取 $p = m - n$ 得到

$$|x - \frac{q}{p}| < \frac{1}{Mp} \le \frac{1}{p^2}.$$

注意到 p 在有界范围变化时, $|x - \frac{q}{p}|$ 有正的下界, 所以要使得上式第一个不等式成立, 我们知当 $M \to +\infty$ 时, 相应的 p 必然也趋于 $+\infty$. 因此, 可以取到充分大的 p 使得 $|x - \frac{q}{p}| < \frac{1}{p^2}$ 成立.)

现任取 $\alpha \in (0, 2\pi]$. 取 $x = 2\pi$. 则对于任何 $N > \frac{1}{\alpha}$, 存在整数 $m > N$ 以及整数 n 使得

$$0 < |\frac{n}{m} - 2\pi| < \frac{1}{m^2}.$$

即有 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$n = 2m\pi \pm \frac{\theta}{m}.$$

易见有正整数 k 使得 $m\alpha \le k\theta < m\alpha + 1$. 则

$$nk = 2mk\pi \pm \Big(\alpha + \frac{k\theta - m\alpha}{m}\Big).$$

从而

$$\cos nk = \cos\Big(\alpha + \frac{k\theta - m\alpha}{m}\Big).$$

即知 $\cos\alpha$ 是 $\{\cos n | n = 1, 2, \dots\}$ 的聚点.

ytdwdw 于 2012 年 12 月 25 日

法III. 避开抽屉原理, 而直接使用 Weierstrass 致密性定理的方法. 对于 $n \in \mathbb{Z}_+$, 设 $r_n \in (-\pi, \pi)$ 满足

$$n = 2k\pi + r_n,$$

其中 k 是整数. 则由 Weierstrass 致密性定理, 存在 r_{n^2} 的子列 $\left\{r_{n_k^2}\right\}$ 收敛. 设其极限为 r.

令

$$m_k = n_{k+1}^2 - n_k^2, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

则 $m_k \to +\infty$, 且注意到 $r_{n_{k+1}^2} - r_{n_k^2} \to 0$, 我们知当 k 充分大时,

$$r_{m_k} = r_{n_{k+1}^2} - r_{n_k^2}.$$

任取 $\alpha \in (0, 2\pi]$. $\forall \varepsilon > 0$, 有 $K > 0$ 使得当 $k > K$ 时, $|r_{m_k}| < \varepsilon$. 此时注意到 r_{m_k} 是无理数(从而非零), 知存在正整数 ℓ_k 使得

$$\alpha \leq \ell_k |r_{m_k}| < \alpha + \varepsilon,$$

最后由

$$\cos(\ell_k m_k) = \cos(\ell_k |r_{m_k}|) = \cos\Big(\alpha + (\ell_k |r_{m_k}| - \alpha)\Big)$$

知 $\cos\alpha$ 是 $\{\cos n | n = 1, 2, \ldots\}$ 的聚点.

其实, 还有其他 N 多方法, 不再一一列出.

类似地可以证明对于任何实数 α, β, 当 $\dfrac{\alpha}{\pi}$ 是无理数时, $\{\sin(\alpha n + \beta) | n = 1, 2, \ldots\}$ 在 $[-1, 1]$ 中稠密.

ytdwdw 于 2012 年 12 月 25 日

1. **问题:** 设 $a_0 = 1, a_1 = \frac{2}{3}$,

$$(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} = \frac{2}{3}a_n.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{3}} a_n = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$

证明: 设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. 可得收敛域内 $[(1-x^2)S(x)]' = \dfrac{2}{3}S(x)$. 解得 $S(x) = \dfrac{2}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{4}{3}}$. 利用 Cauchy 乘积并比较系数得到, 当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{3n\,\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})} \sum_{\substack{k+j=n-1\\k,j\geq 0}} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\frac{2}{3})\Gamma(j+\frac{4}{3})}{k!j!} \\
&= \frac{2}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \sum_{\substack{k+j=n-1\\k,j\geq 0}} (-1)^k n C_{n-1}^k \int_0^1 t^{k-\frac{1}{3}}(1-t)^{j+\frac{1}{3}}\,dt \\
&= \frac{2}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 (1-2t)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt[3]{t}}\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{1+s}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,ds + \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+s}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \int_{-1}^0 \frac{\sqrt[3]{1+s}}{\sqrt[3]{1-s}} s^{n-1}\,ds \\
&\equiv F_n + G_n + H_n.
\end{aligned}$$

接下来说明 $n\,G_n, nH_n$ 有界, $n^{\frac{2}{3}} F_n \to \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$.

ytdwdw 于 2011 年 11 月 24 日