基于整数规划的绿化喷洒车作业任务优化问题

摘要

**随着现代城市生活质量与居民需求层次的提高，美化城市景观，改善城市生态，积极推进城市绿地系统的建设，已成为当前城市可持续发展战略的重要内容之一。为更高效地实现城市绿化，本文基于相关要素名称及位置坐标数据，结合实际情况，对于不同问题建立了不同的数学模型进行求解。**

**针对问题一：**

**针对问题二：**

**针对问题三：**

**针对问题四：**

**关键词：**图论，聚类思想 整数规划

一、问题重述

1.1问题背景

“绿水青山就是金山银山”。为了美化城市环境，有效维护城市资源，有效阻滞粉尘作用，适当调节空气湿度、温度，造林绿化快速发展，喷洒车就是绿化的有效途径之一。某城市需要喷洒车对其进行绿化，现有A、B两类共20台喷洒车，其中A类有12辆，B类8辆，A类在主干道路上的平均行驶速度为60公里/小时，在其他道路上的平均行驶速度是 45 公里/小时；B类在主干道路上的平均行驶速度是50 公里/小时，在其他道路上的平均行驶速度是30 公里/小时。在执行任务前将分布于D1、D2两个停靠点，且在其所属区域内有Z01~ Z06六个给水站，F01~ F60 共60 个喷洒作业点，每一个喷洒作业点只需一台喷洒车进行一次作业。各给水站最多可以给八台喷洒车加水，不计加水时间。喷洒车装满水停靠在停靠点，接到喷洒任务后驶向喷洒作业点喷洒作业。每辆喷洒车完成一次喷洒任务后，需要到给水站加水再进行下次喷洒作业。一次喷洒作业A、B两类喷洒车分别需要用时20分钟、15分钟。

1.2问题提出

为更好地完成喷洒任务从而实现高效绿化，我们建立数学模型解决以下问题：

1. 给出每辆喷洒车只执行一次喷洒作业的最短时间及相应的最优喷洒作业方案。
2. 给出每辆喷洒车执行两次次喷洒作业的最短时间 及相应的最优喷洒作业方案。
3. 给出完成所有 60 个喷洒作业点（F01~ F60）的喷洒任务的最短时间及相应的最优喷洒作业方案。
4. 在道路节点 J01~J62 中的某两个节点处分别增建一个给水站的条件下，根据附件1，重新考虑问题（3），并给出增建给水站的最佳位置。

二、问题分析

* 1. 问题一的分析

在问题一中，我们引入了决策变量，基于这个思想，后面的问题都采用通过决策变量来求解指派问题。将原问题转化为线性规划问题。其中目标函数为使得最长洒水任务的那个洒水车的任务时间最小化，即



鉴于存在不同洒水车车型，并且洒水车速度因车型、主支道影响。我们通过主支道的速度，将距离矩阵除以速度，从而将权值转化为时间。但是距离矩阵并不能直接使用，因为从图中可以看出，有些顶点之间并不直接可达。所以，再通过顶点之间的关联矩阵



其中表示端点由构成的边。即如果两个点在图中直达，则矩阵元素值为1，否则为0。

至此，构建出了两种车型的可达距离矩阵，其中



这便是真正需要的邻接矩阵(Ajadancy Matrix)。借助求解多源点之间最短路径的*Floyd*算法，由此分别构建了A型洒水车、B型洒水车的最短路径矩阵，也就是得到了不同车型的代价矩阵，。

* 1. 问题二的分析

如果以表示的最优解 ，以表示，那么原优化目标为



可知算法的时间复杂度是



尽管线性规划有成熟的理论求解，但这显然不是一个好的优化目标。而且从题中可以看出，可选的喷洒作业点是很多的，是比较大的，那么以上算法的时间复杂度很高。

分析可知，上述方法未充分利用第一次已经执行了洒水任务的信息，而造成了对一些不必要的情况迭代。显然，随着问题规模的增大，随着任务越来越复杂，暴力求解并不是个好的方法。

因此考虑优化



其中表示在第一步求解的局部最优解的情况下，再去求解两部的全局最优解。也就是说第二次执行作业与第一次执行作业时的返回的补给点位置有关。

算法时间复杂度为



这将算法复杂度下降一阶。

* 1. 问题三的分析

仿照问题二的思路，也采用分段决策。具体来说，这里需要三段决策变量。第一段决策变量，第二段决策变量，第三段决策变量。也就是说第三次执行作业与第二次执行作业时的返回点位置有关。

* 1. 问题四的分析

可知需要在道路节点J01~J62中新增两次补给点，以满足8个补给点的要求。对于如何选取补给点，我们依然通过引入决策变量，使用线性规划求解。其中决策变量有，，且满足。候选集用表示，其包括了原先的补给点，和可选的道路点。这两个决策变量其分别表示建议选取的补给点，以及最终决定的补给点，此时会有。特别的，当，必有

此外，引进符号，用于刻画了每个候选点可行性的强度。具体来说，以该候选补给点到各作业点的代价和作为度量。它们（时间开销）之和为目标，也就是，让它尽可能小。



这相当于从类内元素到类中心距离最小化的方面考虑。

三、基本假设

1、假设对于绿化喷洒优化问题，模型所确立的指标，能够准确地代表喷洒作业的好坏；

2、假设题目附件所给的相关位置坐标数据真实有效；

3、假设喷洒车加水不计时间，且喷洒途中不发生任何意外；

4、假设不考虑给水站、喷洒车出现故障，对于喷洒作业的完成，除去本文提到的指标因素，对其他因素所造成的影响忽略不计。

四、符号说明

|  |  |
| --- | --- |
| **符号** | **解释说明** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

五、模型的建立与求解

* 1. 问题一模型的建立与求解
     1. 问题一模型的建立
        1. 决策变量的建立

问题一要求求出每辆喷洒车只执行一次喷洒作业所需的最短时间及相应的最优喷洒作业方案，我们将一次完整的喷洒任务看成由前去作业点、洒水作业、返回给水站三部分构成，那么，完成一次任务的时间即前去作业点，洒水与前往给水站的用时之和。

构建决策变量为：



固定一组，若它是对应于问题可行的方案，则，否则。对于满足约束条件，且使得最远时间最小（目标函数）的，所有，那么表示由一组的可行方案构成的解。

* + - 1. 记号引入

为了编码方便，洒水车的出发点跟编号大小有关系，比如编号为在1-10的洒水车从出发。

为了记号方便，在不引起混淆的情况下，记表示决策变量中出现的洒水车，也就是这个决策中待执行洒水任务的洒水车。其中*u*代表车型。

那么初始时，停靠在,两个站点的洒水车如下：



引入以下记号方便说明。

使用来获取车型



其中。

使用



获取每辆洒水车的出发点

使用



这个获取每辆洒水车的洒水作业时间。

为了方便，也常记为。

* + - 1. 问题一模型的约束条件建立

待优化的目标函数是，为使得最长洒水任务的那个洒水车的任务时间最小化，即



现列出为满足题意的约束条件：

***Step 1.***每辆洒水车只能去喷洒点执行喷洒作业一次。



***Step 2.***每个喷洒点只能被喷洒一次。



***Step 3.***每个补给点不能补给超过8次。



***Step 4.***额外的约束，最长任务时间肯定超过每辆车本身大于等于自身执行任务的时间。当它是最长的执行任务时间时取等。



其中每辆洒水车执行的任务时间，由上述分析可知：

任务时间=前去作业点的时间+喷洒作业的时间+返回补给点的时间

也就是



* + - 1. 问题一线性规划模型的建立









其中表示，构建了以任意两点可达距离为权值（并非直接距离）的邻接矩阵，通过*Floyd*算法求解出的代价矩阵。

由于不同类型的车行驶速度不同，并且在支道和主道的行驶速度也不同。所以对于每一种车型都有其代价矩阵。其权值表示时间开销。比如就代表类型为*u*的汽车，从它的停靠点（起点）到作业点的时间开销。

其中表示，在部分决策i确定的（即此时i为已知），而其他决策j,k的所有情况下的洒水时间。所以这是一个集合。

* + 1. 问题一模型的求解

任务完成用时：



平均用时：2.46 h

编号：A-1用时：2.2ht路线：D1 -> F58(作业点) -> Z03(补水点)

编号：A-2用时：2.42ht路线：D1 -> F32(作业点) -> Z04(补水点)

编号：A-3用时：2.43ht路线：D1 -> F30(作业点) -> Z04(补水点)

编号：A-4用时：2.27ht路线：D1 -> F34(作业点) -> Z04(补水点)

编号：A-5用时：2.24ht路线：D1 -> F42(作业点) -> Z05(补水点)

编号：A-6用时：2.33ht路线：D1 -> F39(作业点) -> Z05(补水点)

编号：B-7用时：2.72ht路线：D1 -> F35(作业点) -> Z04(补水点)

编号：B-8用时：3.04ht路线：D1 -> F43(作业点) -> Z05(补水点)

编号：B-9用时：1.96ht路线：D1 -> F57(作业点) -> Z03(补水点)

编号：B-10用时：2.93ht路线：D1 -> F40(作业点) -> Z05(补水点)

编号：A-11用时：2.24ht路线：D2 -> F49(作业点) -> Z02(补水点)

编号：A-12用时：2.21ht路线：D2 -> F48(作业点) -> Z02(补水点)

编号：A-13用时：2.15ht路线：D2 -> F25(作业点) -> Z01(补水点)

编号：A-14用时：2.5ht路线：D2 -> F44(作业点) -> Z01(补水点)

编号：A-15用时：2.21ht路线：D2 -> F26(作业点) -> Z01(补水点)

编号：A-16用时：2.42ht路线：D2 -> F45(作业点) -> Z01(补水点)

编号：B-17用时：2.87ht路线：D2 -> F46(作业点) -> Z01(补水点)

编号：B-18用时：2.37ht路线：D2 -> F47(作业点) -> Z01(补水点)

编号：B-19用时：2.84ht路线：D2 -> F24(作业点) -> Z01(补水点)

编号：B-20用时：2.8ht路线：D2 -> F50(作业点) -> Z01(补水点)

* 1. 问题二模型的建立与求解
     1. 问题二模型的决策变量的建立

引入分段决策变量。具体来说，第一段决策变量同问题1，，第二段决策变量为。

分析题意可知，每辆洒水车执行完作业后，都会回到补给点，以备下次洒水作业。那么第二次执行洒水任务，只依赖于第一次洒水任务执行完时，洒水车所在的补给点位置。

* + 1. 问题二模型约束条件的建立

待优化目标：



现对目标函数进行条件约束：

***Step 1.***第一阶段每个洒水车只能喷洒一次



***Step 2.***第二阶段每个洒水车只能喷洒一次



***Step 3.***第二阶段的起点是第一次喷洒后前往的补给点。



***Step 4.***对于每辆洒水车，不能喷洒同一个作业点



这个条件隐含了下两个条件：

第一阶段每个喷洒点至多被喷洒一次。

第二阶段每个喷洒点至多被喷洒一次。

***Step 5.***在这两次作业中，补给点仍然只能最多补给8辆



***Step 6.***对于每辆洒水车，其任务完成时间，为从出发到第二次到达补给点所经历的时间

，

因此，线性规划模型如下：

目标：



约束条件：



















* + 1. 问题二模型的求解

任务完成用时



平均用时：4.46 h

编号：A-1t用时：4.56ht路线：D1 -> F20(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F19(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-2t用时：4.41ht路线：D1 -> F38(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F34(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-3t用时：4.68ht路线：D1 -> F36(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F13(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-4t用时：4.62ht路线：D1 -> F30(作业点 1) -> Z04(补水点 1) -> F11(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-5t用时：4.5ht路线：D1 -> F37(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F12(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-6t用时：4.65ht路线：D1 -> F39(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F23(作业点 2) -> Z05(补水点 2)

编号：B-7t用时：4.63ht路线：D1 -> F43(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F41(作业点 2) -> Z05(补水点 2)

编号：B-8t用时：4.38ht路线：D1 -> F42(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F40(作业点 2) -> Z05(补水点 2)

编号：B-9t用时：4.49ht路线：D1 -> F57(作业点 1) -> Z03(补水点 1) -> F58(作业点 2) -> Z03(补水点 2)

编号：B-10t用时：4.06ht路线：D1 -> F35(作业点 1) -> Z04(补水点 1) -> F33(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-11t用时：4.64ht路线：D2 -> F49(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F28(作业点 2) -> Z02(补水点 2)

编号：A-12t用时：4.65ht路线：D2 -> F27(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F51(作业点 2) -> Z03(补水点 2)

编号：A-13t用时：4.16ht路线：D2 -> F45(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F52(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

编号：A-14t用时：4.57ht路线：D2 -> F01(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F10(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-15t用时：4.49ht路线：D2 -> F25(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F31(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-16t用时：4.42ht路线：D2 -> F44(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F53(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

编号：B-17t用时：4.16ht路线：D2 -> F24(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F47(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

编号：B-18t用时：4.37ht路线：D2 -> F26(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F48(作业点 2) -> Z02(补水点 2)

编号：B-19t用时：4.69ht路线：D2 -> F29(作业点 1) -> Z04(补水点 1) -> F32(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：B-20t用时：4.12ht路线：D2 -> F46(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F50(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

* 1. 问题三模型的建立与求解
     1. 决策变量的建立

引入三段决策变量。第一段决策变量，第二段决策变量，第三段决策变量

* + 1. 约束条件的建立

问题三线性规划模型有以下约束条件：

***Step 1.***第一阶段每个洒水车只能喷洒一次



***Step 2.***第二阶段每个洒水车只能喷洒一次



***Step 3.***第三阶段每个洒水车只能喷洒一次



***Step 4.***第二阶段的起点是第一次喷洒后前往的补给点。



***Step 5.***第三阶段的起点是第二次喷洒后前往的补给点。



***Step 6.***对于每辆车，三次作业不能喷洒同一个作业点



这个条件隐含了下一组约束：

第一/二/三阶段每个喷洒点至多被喷洒一次。

第一/二/三阶段每个喷洒点至多被喷洒一次。

***Step 7.***在这三次作业中，补给点仍然只能最多补给8辆



***Step 1.***对于每辆洒水车，其任务完成时间，为从出发到第二次到达补给点所经历的时间。



故针对问题三列出如下规划：

目标：



约束：





















* + 1. 问题三模型的求解

任务完成用时：4.69 h

平均用时：4.46 h

编号：A-1t用时：4.56ht路线：D1 -> F20(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F19(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-2t用时：4.41ht路线：D1 -> F38(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F34(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-3t用时：4.68ht路线：D1 -> F36(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F13(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-4t用时：4.62ht路线：D1 -> F30(作业点 1) -> Z04(补水点 1) -> F11(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-5t用时：4.5ht路线：D1 -> F37(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F12(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-6t用时：4.65ht路线：D1 -> F39(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F23(作业点 2) -> Z05(补水点 2)

编号：B-7t用时：4.63ht路线：D1 -> F43(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F41(作业点 2) -> Z05(补水点 2)

编号：B-8t用时：4.38ht路线：D1 -> F42(作业点 1) -> Z05(补水点 1) -> F40(作业点 2) -> Z05(补水点 2)

编号：B-9t用时：4.49ht路线：D1 -> F57(作业点 1) -> Z03(补水点 1) -> F58(作业点 2) -> Z03(补水点 2)

编号：B-10t用时：4.06ht路线：D1 -> F35(作业点 1) -> Z04(补水点 1) -> F33(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-11t用时：4.64ht路线：D2 -> F49(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F28(作业点 2) -> Z02(补水点 2)

编号：A-12t用时：4.65ht路线：D2 -> F27(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F51(作业点 2) -> Z03(补水点 2)

编号：A-13t用时：4.16ht路线：D2 -> F45(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F52(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

编号：A-14t用时：4.57ht路线：D2 -> F01(作业点 1) -> Z06(补水点 1) -> F10(作业点 2) -> Z06(补水点 2)

编号：A-15t用时：4.49ht路线：D2 -> F25(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F31(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：A-16t用时：4.42ht路线：D2 -> F44(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F53(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

编号：B-17t用时：4.16ht路线：D2 -> F24(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F47(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

编号：B-18t用时：4.37ht路线：D2 -> F26(作业点 1) -> Z02(补水点 1) -> F48(作业点 2) -> Z02(补水点 2)

编号：B-19t用时：4.69ht路线：D2 -> F29(作业点 1) -> Z04(补水点 1) -> F32(作业点 2) -> Z04(补水点 2)

编号：B-20t用时：4.12ht路线：D2 -> F46(作业点 1) -> Z01(补水点 1) -> F50(作业点 2) -> Z01(补水点 2)

* 1. 问题四模型的建立与求解
     1. K-Means聚类模型的建立

对于需要新增的补给点，

* + - 1. 决策变量的建立及方案可行性度量

'J28', 'J14'

暂时不要

根据先前分析，即是要优化以下目标



其中为候选集，有，即其包括了原先的补给点集合，和可选的道路点集合。

此目标，相当于从类内元素到类中心距离最小化的方面考虑。

引入决策变量，表示从（考虑了候选点集合，作业点集合的因素）那些建议的补给点。当表示建议作为补给点的候选点。

特别的，如果，那么，表示确实被选中作为了补给点。



* + - 1. 约束条件的建立

***Step 1.***最终需要有8个补给点，很容易写出



***Step 2.***对于每个候选点的可行性度量，其具体写为



***Step 3.***每个候选的补给点只能给8个作业点供水。



***Step 4.***至于



可以理解为当时，候选点必须pass，故。此外，对于那些而的，说明不建议选择，但是由于，说明，是已存在的补给点，那么必须得选择。

***Step 5.***对于每个作业点来说，他只能归给一个区域（类）的补给点范围的洒水车来执行任务。



* + - 1. 线性规划模型的建立

至此，按照如上规划，就可以选出新的补给点。

列出规划：



















* + - 1. 线性规划模型的求解

于是问题变为补给点为8个的60个作业点的任务安排。仿照问题三便可求解。

* + 1. 建立XXXXXX模型