

组合数学编程作业

冯巾松

fengjinsong@tongji.edu.cn



■农夫John和他朋友们去参加展览会。展览会 的门票为\$50。John发现一个奇怪的现象: 在排队购票的2n个人中,总有n个人拿的是 面值\$100的钞票,而另外的n个人拿的是面 值为\$50的钞票。农夫相知道的是在这种情 况下这2n个人共有多少种排队方式,使得售 票处不至于出现找不开钱的局面。假设售票 处原本没有预备零钱的。

算法1: 搜索策略

■ 用回溯法来直观的描述所有情况。算法制定一个变量k用于记录售票处有\$50钞票的张数。初始时另k=0,收到一张\$50钞票时k+1。若某人手持\$100钞票且k=0时则回溯,否则继续递归。若第2n个人购完票即递归进行到第2n层时计数器累加1。递归结束后,计数器中的值便为排队的方案数。

算法2: 栈模型

- 分析:在任一时刻,若第n个人手持\$100的钞票购票,则在此之前一定有不少于n个人手持\$50的钞票购票。所以售票处收到的面值为\$50的钞票最终将全部找出,而所有收到的\$100的钞票最终将全部留下。
- 用栈来表示这一过程: 若某人手持\$50的钞票购票,相当于一个元素进栈; 若某人手持\$100的钞票购票,相当于一个元素出栈;
- ■问题转化成: 若1~n个元素依次进栈, 共有 多少种出栈顺序。

算法3: 递归算法

• 令f(m,n)表示m个人手持\$50的钞票, n 个人手持\$100的钞票时共有的方案数。

(1) n=0, 所有人都是拿的\$50的钞票, 所以f(m,0)=1

(2) m<n, 把所有\$50的钞票都找出去也会出现找不开钱的局面, 所以f(m,n)=0

算法3: 递归算法

(3) 其他情况

A, 第(m+n)个人手持\$100的钞票,则在他之前的m+n-1个人中有m个人手持\$50的钞票, n-1个人人手持\$100的钞票, 此种情况共有f(m,n-1)

B, 第(m+n)个人手持\$50的钞票,则在他之前的m+n-1个人中有m-1个人手持\$50的钞票,n个人人手持\$100的钞票,此种情况共有f(m-1,n)

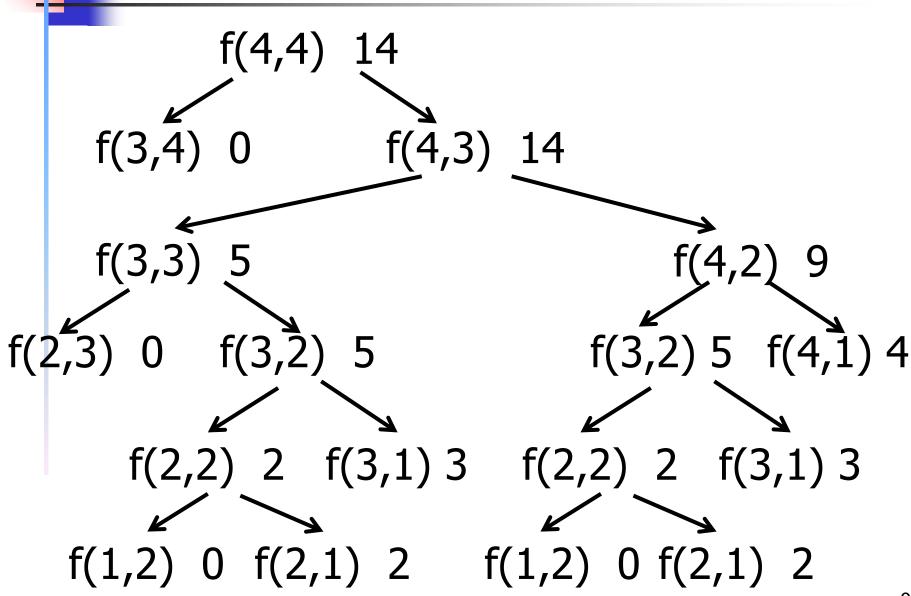
算法3: 递归算法

•
$$f(m,n) = \begin{cases} 0 & m < n \\ 1 & n = 0 \\ f(m,n-1) + f(m-1,n) & \text{others} \end{cases}$$

算法4: 递推算法

■ 依然使用f(m,n)= { 1 由 (f(m,n-1)+f(m-1,n) 由 初始条件向终止条件推导

算法4: 递推算法



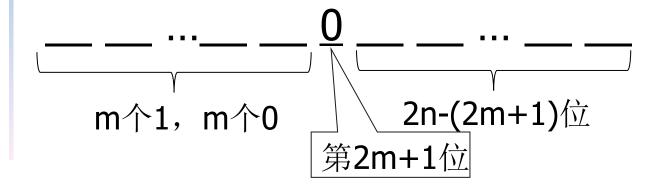
数字1表示有一个人手拿\$50买票数字0表示有一个人手拿\$100买票

n个1和n个0组成一个2n位的二进制数序列,要求从左往右扫描,1的累加数不小于0的累加数,求满足这个条件的二进制数的个数。

 \mathbf{E} 在2n位上填n个1的方案数是 $\binom{2n}{n}$

不填1的其余n位自动填入0.

■ 不符合要求的方案数: 从左往右扫描, 出现0的累计数超过1的累计数



在后面的2n-2m-1位中有n-m个1,和n-m-1个0.如果把这些0和1互换,使之成为n-m个0,和n-m-1个1,结果得到一个由n+1个0和n-1个1组成的2n位数。即一个不符合要求的组合数对应一个由n+1个0和n-1个1组成的排列。

反之,任何一个由n+1个0和n-1个1组成的2n位数,由于0的个数多2个,2n是偶数,所以一定在某一个奇数位上出现0的累计数超过1的累计数。同样后面的部分令0和1互换,使之成为一个由n个0和n个1组成的2n位数,一定存在一个不符合要求的数。这样就建立了一个由n+1个0和n-1个1组成的2n位数,与由n个0和n个1组成的2n位数中从左往右扫描出现0的累计数超过1的累计数的数一一对应。

例如: 1010<u>0</u>101

4个1和4个0组成的8位二进制数,在第5位出现0的累计数3大于1的累计数2,于是后面3位0和1互换: 1010<u>0</u>010

因而不和要求的2n位数与n+1个0, n-1个1组成的排列一一对应。

所以不符合要求的数的总数为 $\binom{2n}{n+1}$

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

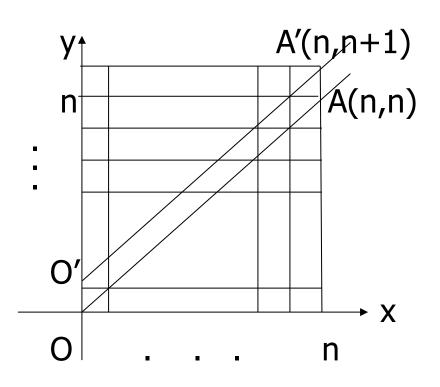
数字1表示有一个人手拿\$50买票数字0表示有一个人手拿\$100买票

从(0,0)点出发,对若遇到1就沿y轴正方向走一格,若遇到0就沿x轴正方向走一格,每一种走法对应一条从(0,0)点到(n,n)点的路径。所以所有满足条件的2n位二进制数都是从(0,0)点对角线及对角线上方到(n,n)点的路径。

从O点出发经过OA及 OA以上的点到达A点的 路径数=

从O'点出发到达A'点的 所有路径数 -

从O'点出发经过OA上的点到达A'点的所有路径数



作业提交说明

- 每一个算法都设置一个计数器,记录程序 执行时间。最终形成一张关于n和用时统计 的对应表。
- 将该表数据和你的分析、总结、说明写在 实验报告里。

作业提交说明

- 最终提交时间是: 2017年1月3日00:00
- 作业提交内容包括:程序的可执行文件,项目源代码,以及项目说明文档。
- 材料统一上交到学院的服务器上,命名规则是:
- □ 学生学号_学生姓名_算法号.exe
- □ 学生学号_学生姓名_算法号.cpp (或:学生学号_学生姓名_算法号.java)
- □ 学生学号_学生姓名_Report.doc