文章编号:1009-427X(2003)01-0039-04

有理函数模型的解算与应用

巩丹超, 张永生
(信息工程大学 测绘学院,河南 郑州 450052)

摘要:有理函数模型是各种传感器几何模型更广义和更完善的一种表达形式,它适用于各种不同的传感器。许多卫星影像供应商考虑使用这种模型作为影像数据的传递标准。文中在分析 RFM 的基础上,结合航空影像和 SPOT 影像数据对 RFM 进行了研究。试验结果表明有理函数模型可以达到严格成像模型的精度,并且有能力替代严格成像模型完成摄影测量处理,同时无物理意义的有理函数系数可有效地实现传感器成像参数的隐藏。

关 键 词:传感器几何模型;有理函数模型;共线方程;线阵列推扫式影像
中图分类号:P231.5 **文献标识码:**A

传感器有多种类型,不同类型的传感器由于成像的几何特性不同,采用不同的传感器模型。通常的传感器模型都是以共线方程为理论基础的,要建立这类严格的传感器模型,必须获取各种成像参数,对航空影像来说包括内方位元素和外方位元素初值,对卫星影像来说包括轨道参数和传感器平台的方位参数以及焦距等。当使用一个新的传感器时,必须有一个新的传感器模型支持它。遥感卫星影像成像机理通常远比航空影像复杂得多,随着各种新型传感器的不断出现,现有的摄影测量软件在原有的基础上改进或建立新的传感器模型将变得越来越困难,而且并非总能获得各种精确的传感器成像参数,那么引入一种独立于传感器平台的广义传感器模型是很有意义的。

1 广义传感器模型 RFM

在有理函数模型(Rational Function Model, RFM)中,像素坐标(r, c)表示为含地面坐标(X, Y, Z)多项式的比值。

$$\left.\begin{aligned} r_n &= \frac{p_1(X_n, Y_n, Z_n)}{p_2(X_n, Y_n, Z_n)} \\ c_n &= \frac{p_3(X_n, Y_n, Z_n)}{p_4(X_n, Y_n, Z_n)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中,r_n、c_n 分别为像素的行列数;(X_n, Y_n, Z_n)是目标点的地面坐标。多项式中每一项的各个坐标分量 X、Y、Z 的幂最大不超过 3,每一项各个坐标分量幂的总和也不超过 3(通常取 1,2,3)。另外,分母项 p_2 和 p_4 的取值可以有两种情况:$p_2 = p_4$(可以是一个多项式,也可以是常量 1);$p_2 \neq p_4$。每个多项式的形式为

$$\begin{aligned} p = \sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2}\sum_{k=0}^{m_3} a_{ijk}X^iY^jZ^k = {} & a_0 + a_1 Z + a_2 Y + \\ & a_3 X + a_4 ZY + a_5 ZX + a_6 YX + a_7 Z^2 + \\ & a_8 Y^2 + a_9 X^2 + a_{10} ZYX + a_{11} Z^2 Y + a_{12} Z^2 X + \\ & a_{13} Y^2 Z + a_{14} Y^2 X + a_{15} ZX^2 + a_{16} YX^2 + \\ & a_{17} Z^3 + a_{18} Y^3 + a_{19} Z^3 \end{aligned} \tag{2}$$

式中,a_{ijk} 是多项式的系数。(1) 式也可写成

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{(1\ Z\ Y\ X\ \cdots\ Y^3\ X^3)\cdot(a_0\ a_1\ \cdots\ a_{19})^{\mathrm T}}{(1\ Z\ Y\ X\ \cdots\ Y^3\ X^3)\cdot(1\ b_1\ \cdots\ b_{19})^{\mathrm T}} \\ c &= \frac{(1\ Z\ Y\ X\ \cdots\ Y^3\ X^3)\cdot(c_0\ c_1\ \cdots\ c_{19})^{\mathrm T}}{(1\ Z\ Y\ X\ \cdots\ Y^3\ X^3)\cdot(1\ d_1\ \cdots\ d_{19})^{\mathrm T}} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中多项式的系数称为有理函数的系数(Rational Function Coefficient, RFC)。在模型中由光学投影引起的畸变表示为一阶多项式,而地球曲率、大气折射、镜头畸变等的改正,可由二阶多项式趋近,高阶部分的其它未知畸变可用三阶多项式模拟。(1) 式是 RFM 的正解形式,其反解公式为

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{p_1(r_n, c_n, Z_n)}{p_2(r_n, c_n, Z_n)} \\ Y_n &= \frac{p_3(r_n, c_n, Z_n)}{p_4(r_n, c_n, Z_n)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

RFM 实质上是多项式模型的扩展,它适用于多种传感器,因此它提供了一种通用的转换标准。

共线方程作为一种物理传感器模型,它描述了投影中心、地面点和相应像点共线的几何关系,因此它考虑成像时的几何条件,如投影中心(卫

收稿日期:2002-05-22;**修回日期:**2002-09-24

作者简介:巩丹超(1975—),男,陕西丹凤人,博士生,主要从事数字摄影测量研究。

星)的姿态和位置。传统的框幅式影像成像的共线方程为

$$\left.\begin{aligned} r &= -f\frac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ c &= -f\frac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

对于线阵列推扫式的扫描图像来说,以SPOT为例,每一行图像的外方位元素是随时间变化的。通常可以用时间多项式来描述。由于卫星在高空飞行时大气干扰很少,又加上采用惯性平台、跟踪恒星的姿态控制系统以及跟踪观测等先进技术,其姿态变换可认为是相当平稳的。假设每一幅图像的像平面坐标原点在中央扫描行的中点,则可认为每一扫描行的外方位元素是随着 y 值(飞行方向)变化的,成像方程式可用数学模型描述

$$\left.\begin{aligned} r_i &= -f\frac{a_1(X-X_{S_i})+b_1(Y-Y_{S_i})+c_1(Z-Z_{S_i})}{a_3(X-X_{S_i})+b_3(Y-Y_{S_i})+c_3(Z-Z_{S_i})} \\ 0 &= -f\frac{a_2(X-X_{S_i})+b_2(Y-Y_{S_i})+c_2(Z-Z_{S_i})}{a_3(X-X_{S_i})+b_3(Y-Y_{S_i})+c_3(Z-Z_{S_i})} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_0 + \varphi \cdot c \\ \omega_i &= \omega_0 + \dot{\omega} \cdot c \\ \kappa_i &= \kappa_0 + \dot{\kappa} \cdot c \\ X_{S_i} &= X_{S_0} + X_S \cdot c \\ Y_{S_i} &= Y_{S_0} + Y_S \cdot c \\ Z_{S_i} &= Z_{S_0} + Z_S \cdot c \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中,$(X_{S_0}, Y_{S_0}, Z_{S_0}, \varphi_0, \kappa_0, \omega_0)$ 为中央扫描行的外方位元素;$(\varphi、\dot{\omega}、\dot{\kappa}, X_S, Y_S, Z_S)$ 为外方位元素的一阶变率。从(5)式可以推出直接线性变换(DLT)的公式

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1}{A_3X+B_3Y+C_3Z+1} \\ c &= \frac{A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2}{A_3X+B_3Y+C_3Z+1} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

将(7)式代入(6)式,然后将外方位元素按泰勒级数展开,取一次项即可以推出(9)式,即

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1+e_1c}{a_3X+b_3Y+c_3Z+d_3+e_3c} \\ 0 &= a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2+e_2c \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

从(8)、(9)式中可以发现RFM的雏形。另外当(1)式中的 $p_2 = p_4 = 1$,此时的RFM也就变为一般的多项式。因此可以说RFM是一种广义的传感器模型。

2 RFM的答解

为了采用最小二乘原理求解RFC,需要将(1)式线性化得出误差方程

$$\left\{\begin{aligned} v_r &= \left(\frac{1}{B}\ \ \frac{Z}{B}\ \ \frac{Y}{B}\ \ \frac{X}{B}\cdots\frac{Y^3}{B}\ \ \frac{X^3}{B}\ \ \frac{-rZ}{B}\ \ \frac{-rY}{B}\cdots\frac{-rY^3}{B}\ \ \frac{-rX^3}{B}\right)\cdot \boldsymbol{J}-\frac{r}{B} \\ v_c &= \left(\frac{1}{D}\ \ \frac{Z}{D}\ \ \frac{Y}{D}\ \ \frac{X}{D}\cdots\frac{Y^3}{D}\ \ \frac{X^3}{D}\ \ \frac{-rZ}{D}\ \ \frac{-rY}{D}\cdots\frac{-rY^3}{D}\ \ \frac{-rX^3}{D}\right)\cdot \boldsymbol{K}-\frac{c}{D} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

式中

$$B = (1\ Z\ Y\ X\cdots Y^3\ X^3)\cdot(1\ b_1\cdots b_{19})^{\mathrm{T}}$$

$$D = (1\ Z\ Y\ X\ Y^3\ X^3)\cdot(1\ d_1\cdots d_{19})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{J} = (a_0\ a_1\cdots a_{19}\ b_1\ b_2\cdots b_{19})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{K} = (c_0\ c_1\cdots c_{19}\ d_1\ d_2\cdots d_{19})^{\mathrm{T}}$$

写成矩阵形式

$$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{MJ}-\boldsymbol{R} \tag{11}$$

法方程式则为

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_r\boldsymbol{MJ}-\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_r\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$$

其中

$$\boldsymbol{W}_r = \begin{pmatrix} \frac{1}{B_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_2^2} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{B_n^2} \end{pmatrix}$$

由于原始方程式是非线性的,故最小二乘的答解需要迭代进行,其中取 $\boldsymbol{W}_r$ 为单位阵,可以解算出 $\boldsymbol{J}$ 的初值,然后迭代求解,直至各改正数小于限差为止。

这是答解行方向的过程,列方向与之类似。行列同时答解的误差方程为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_r\\ \boldsymbol{V}_c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & 0\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}\\ \boldsymbol{K}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix} \tag{12}$$

即

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{TI}-\boldsymbol{G}$$

法方程式为

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WTI}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WG}=\boldsymbol{0} \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{W}_c\end{pmatrix}$$

整体答解过程为:首先取 $\boldsymbol{W}$ 为单位矩阵,求

解出 $\boldsymbol{I}$ 的初值,然后由(12) 式迭代求解直至各改正数小于限差为止。

3　实验方法

RFM 的未知参数解算可以在严格的传感器几何模型已知的条件下,也可以在未知的条件下进行,因此它的解算有与地形无关和与地形相关的两种方案。如果有严格的传感器模型可以利用,就可以采用与地形无关的方案,否则 RFM 的解算只能采用与地形相关的方案而严格依靠控制点。下面针对 RFM 反解(4) 式,介绍两种解算方案。

3.1　与地形无关的解算方案

如果有严格的传感器模型,可以用该模型建立一组 3 维的目标格网点作为控制点来解算 RFC。这些格网点的坐标可以利用严格的传感器模型来计算(通常是利用像坐标和高程值计算地面坐标的平面位置。其中高程值的确定是通过估计地面的起伏,在地面的起伏范围内,取若干高程面),而不需要实际的地形信息,因此这种解算方案与实际的地形无关。该方法的解算步骤为:

1) 影像空间格网点的选取。格网点应均匀分布在像平面空间的整个区域。若格网的行列数各取 10,则有 100 个点。

2) 地面 3 维格网点的解算。对于影像上均匀分部的格网点,给定高程值,然后利用严格的传感器模型可以解算它们相应地面点的平面位置。由于地面控制点应该在平面位置和高程位置上遍布整个影像区域,因此可通过估计地面的起伏确定高差,按高差分成若干层。也就是格网点应该包含若干个高度层,并且位于每个高度层的点都具有相同的高程。若分为 5 层,若每层按上述 100 个点计算,总共有 500 个点。

3) RFM 系数的解算。用上述的层状控制点格网来解算 RFM 的系数。

4) 精度检查。可以用相同的方法获取另外一些检查格网点,这些点的密度可以是控制点的 2 倍,这些检查点的高程值则要利用实际的 DTM 来获取。用解算出来 RFM 的系数计算这些目标格网点的位置或者相应像点的位置。通过比较 RFM 的解算结果和严格模型的解算结果就可以确定精度。

3.2　与地形相关的方案

如果没有严格的传感器模型数据,为了解算 RFM 的未知系数,必须从图像、DEM 或地图上量测像点坐标和地面点坐标。在这种情况下,解法完全决定于实际的地形起伏以及控制点的数量与分布,因此这种方法与地形严格相关。当传感器的模型过于复杂很难建立时,或者精度要求不是很高的时候,常采用这种方法来建立传感器模型。

4　实验结果

文中以 SPOT 影像和航空影像为实验数据(SPOT 影像数据由 ERDAS 公司的 Yang Xinghe 博士提供,覆盖区域的高差为 3 500 m,航空影像为郑州市区 1∶2 750 的航空影像,覆盖区域的高差为 300 m),采用与地形无关的解算方案(可以避免大量的控制点采集工作),其中有理函数多项式的阶数取 3 次和 2 次,分母的取值有 $p_2 = p_4$ 和 $p_2 \neq p_4$ 两种情况。几种情况对控制点的数目要求列于表 1,实验结果列于表 2 ～ 表 5。

表 1　RFM 的系数和必需的控制点

阶数	分母	未知数个数	必须控制点
3	$p_2 \neq p_4$	78	39
	$p_2 = p_4$	59	30
2	$p_2 \neq p_4$	38	19
	$p_2 = p_4$	29	15

表 2　航空影像像方精度

阶 数	分 母	控制点 RMS(点数 500)		检查点 RMS(点数 500)	
		m_x/mm	m_y/mm	m_x/mm	m_y/mm
3	$p_2 \neq p_4$	0.000 283 25	0.000 279 39	0.000 292 82	0.000 299 60
	$p_2 = p_4$	0.000 283 75	0.000 281 06	0.000 291 77	0.000 297 20
2	$p_2 \neq p_4$	0.000 285 61	0.000 282 82	0.000 289 65	0.000 295 99
	$p_2 = p_4$	0.000 286 23	0.000 283 90	0.000 288 41	0.000 296 13

表 3　航空影像物方精度

阶 数	分 母	控制点 RMS(点数 500)		检查点 RMS(点数 500)	
		m_x/m	m_y/m	m_x/m	m_y/m
3	$p_2 \neq p_4$	0.000 777 96	0.000 774 04	0.000 810 70	0.000 835 94
	$p_2 = p_4$	0.000 781 71	0.000 780 28	0.000 803 42	0.000 830 04
2	$p_2 \neq p_4$	0.000 787 54	0.000 785 30	0.000 799 75	0.000 823 71
	$p_2 = p_4$	0.000 789 45	0.000 788 44	0.000 795 71	0.000 820 26

表4 SPOT影像像方精度

阶数	分母	控制点RMS(点数605)		检查点RMS(441)	
		m_x/mm	m_y/mm	m_x/mm	m_y/mm
3	$p_2 \neq p_4$	0.000 015 24	0.000 004 82	0.015 765 71	0.007 961 74
	$p_2 = p_4$	0.000 087 06	0.000 060 58	0.015 764 71	0.007 962 24
2	$p_2 \neq p_4$	0.000 920 85	0.000 365 73	0.015 574 02	0.007 975 05
	$p_2 = p_4$	0.178 114 61	0.204 084 54	0.161 182 22	0.187 112 21

表5 SPOT影像物方精度

阶数	分母	控制点RMS(605)		检查点RMS(441)	
		m_x/m	m_y/m	m_x/m	m_y/m
3	$p_2 \neq p_4$	0.000 218 58	0.000 199 33	0.151 150 59	0.102 988 44
	$p_2 = p_4$	0.001 132 60	0.000 396 23	0.151 060 76	0.103 030 13
2	$p_2 \neq p_4$	0.549 186 31	0.009 119 42	0.567 283 08	0.103 933 61
	$p_2 = p_4$	2.000 229 82	1.969 941 17	1.834 564 51	1.791 733 06

5 分析与结论

5.1 RFM的特点

1) 采用一般的多项式作为模型时,它在确定系数的点(GCP)拟和很好,但在其它点的内插值可能有明显偏离,而与相邻GCP不协调,即在某些点处产生振荡现象。这导致了多项式近似计算中误差的界限明显超出平均误差,而RFM可以更均匀地分布近似误差。

2) RFM具有独立性,它拥有一个可变的坐标系,也就是说,它可以适应任何系统中的物方坐标,例如地心坐标、地理坐标或地图投影坐标系。RFM允许有不同的地理参考坐标系,并且不需要成像参数,这也是其能在遥感中得到广泛应用的重要原因。

3) RFM与精确传感器模型的本质差别:精确传感器模型对于每一个地面点和其相应的像点都是严格成立,而RFM的函数关系从理论上讲只在确定系数的点(控制点)上是严格成立的,而在其它点是不成立的。实际中,由于有理函数的系数是通过GCP数据利用最小二乘法原理确定的,因此RFM的函数关系在所有的点都不严格成立,即有理函数的拟和曲面并不严格通过GCP,也就不真实代表地表的起伏,而是纯以数学模式来套合地形。因此有理函数的模型精度与地面控制点的精度、分布和数量(即纠正范围)密切相关。

5.2 结果分析

从文中的实验结果来看,对于航空影像和SPOT影像,有理函数模型可以达到子像素的精度。由于航空影像不含高阶的变形,因此三阶和二阶拟和精度相当,对于行中心投影的SPOT影像来说,$p_2 \neq p_4$的精度比$p_2 = p_4$的精度要好。

为了进一步提高传感器模型的精度,可以在影像空间增加更多的改正项目。这种改正能减少畸变对模型的影响,如对称和非对称的辐射变形、切向变形和仿射变形。例如可以采用如下改造后的有理函数模型:

$$u_1 r_n + v_1 c_n + w_1 = \frac{p_1(X_n, Y_n, Z_n)}{p_2(X_n, Y_n, Z_n)}$$

$$u_2 r_n + v_2 c_n + w_2 = \frac{p_3(X_n, Y_n, Z_n)}{p_4(X_n, Y_n, Z_n)}$$

但是,当等式右边的系数和有理函数本身的系数相关时,将会使整个模型计算稳定性差,以致于无法答解系数或者解的误差较大。

在地势起伏较大地区,如本试验所用的SPOT影像,仅用一般低阶多项式无法正确地纠正影像,尤其在扫描线方向(垂直飞行方向)其误差更为严重。因此当卫星的轨道参数无法获得时,RFM可取代严格的光束法,但RFM需要较多的控制点,当控制点数目不足时,可视当地地形变化程度,考虑仅使用RFM二阶两种模式。

5.3 应用前景

在实际应用中,传感器几何模型的选择主要取决于精度要求和实际情况。广义的传感器模型不考虑实际成像过程,它表示了像方和物方空间之间的函数关系。通常精确的真实模型非常准确,但是过程很复杂,且要求较长的计算时间。对于实时应用,常使用的是广义模型,这样计算时间就缩短了很多。另外很多影像供应商,对一些高精度的卫星影像产品,通常不提供给用户各种成像参数,而只提供给用户一组广义模型的系数,这样既维护了自己的商业利益,又实现了精确传感器模型的保密。随着越来越多的高精度成像传感器的投入使用,独立于传感器平台的传感器广义模型应用将是非常广泛的。

(下转第46页)

用,本文主要目的是完善多边形的裁剪算法,指出调用 VC 的库函数并不能满足所有的情况,应当编写自己的函数来判断点与多边形的包含关系,来确定出点或入点,完成多边形的裁剪。经验证,不论两个多边形的相关位置如何,也不论凸的、凹的或带“岛”的多边形,都能得到正确的结果。同时,指出可以利用求取多边形面积的方法对多边形顶点按顺时针(或逆时针)方向排序,并给出了具体的步骤。这使得算法程序与原始数据有良好的接口,进一步增强了算法的适应性。

参 考 文 献:

[1] 武志强,杨哲海,吴官祥.基于 Visual C++平台的多边形裁剪算法实现[J].测绘学院学报, 2000,17(4).

Perfection of Clipping Polygon Method

YANG Zhe-hai[1], ZHONG Hai-yun[2], WU Guan-xiang[1]
(1.*Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou* 450052, *China*;
2.65015 *Troops*, *Dalian* 116023, *China*)

Abstract: The paper analyses the error which is made in realization of clipping polygon method based on visual C ++. Then specific processing method about how to deal with it is provided. At the same time the author points out that the polygon vertexes can be sorted clockwise or anticlockwise by judging the sign of the vector polygon area.

Key words: polygon; terrain analyzing; ray; intersecting point

责任编辑 李慧典

(上接第 42 页)

参 考 文 献:

[1] S Fraser Clive. High-Resolution satellite Imagery: A Review of Metric Aspects[A]. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing[C]. Amsterdam, 2000, XXXIII(B7): 452-459.

[2] Dowan Ian, Jogn Dolloff. An Evaluation of Rational Functions For Phtogrammetric Restitution [A]. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing [C]. Amsterdam, 2000, XXXIII (B3): 254-266.

[3] Yang Xing, Accuracy of Rational Function Approximation in photogrammetry[A]. ASPRS 2000 Annual Conference Proceeding[C]. Washington D C American Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ASPRS), 2001: 23-27.

The Solving and Application of Rational Function Model

GONG Dan-chao, ZHANG Yong-sheng
(*Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou* 450052, *China*)

Abstract: The Rational Function Model has recently gained interests in remote sensing community. It is a kind of generic and expressive model, and it is applicable to all types of sensors. Due to these attractive characteristic, many satellite imagery vendors have considered this model as an image data transfer standard. The RFM was presented ten years ago, however publications regarding the theoretical properties and empirical experiment about the use of RFM have hardly been found. For better understanding of RFM, we discuss their properties. The experiment with aerial images and SPOT images has been carried out and summarized, which shows that the accuracy of RFM is as the rigorous model, and that RFM can take place of the rigorous model to complete the Photogrammetrc processing, at the same time the meaningless ration coefficients can hide the sensor's imaging information effectively.

Key words: sensor geometric model; rational function model; collinearity equation; linear pushbroom images

责任编辑 李慧典