UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA AMAZONÍA PERUANA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
MÉTODOS NUMÉRICOS

MÉTODOS NUMÉRICOS INTERPOLACIÓN

"Cuando podemos medir aquello a que nos referimos y expresarlo en números, entonces sabemos algo acerca de ello; pero cuando no es posible medirlo ni expresarlo en números, nuestro conocimiento es insuficiente y poco satisfactorio".
Lord Kelvin

Lic. Mg. Manuel Tuesta Moreno
Docente FISI - UNAP

INTERPOLACIÓN

Estimar valores que estén dentro de las tablas obtenidas experimentalmente y que son estimaciones de valores entre puntos discretos bien conocidos y que se usan para mejorar la estimación de valores en el ajuste de curvas.

EXTRAPOLACIÓN

Estimación de una variable dependiente para valores (de la variable dependiente) que están localizados fuera del conjunto de observaciones.

1. Parábolas de interpolación.

Para hallar las derivadas aproximadas de una serie de puntos donde se ha construido una tabla, se debe sustituir la función por una parábola que pase por un número discreto de puntos pivótales. Suponga que conoce tres puntos consecutivos uniformemente espaciados.

$$y_p = Ax^2 + Bx + c$$

2. Diferencias finitas.

El método consiste en determinar las diferencias entre los valores dependientes o de "Y" sucesivos hasta que sean iguales o sensiblemente iguales. Por otro lado, también se usan para poder hallar derivadas e integrales numéricas. La principal característica del uso de las diferencias finitas es que deben ser uniformemente espaciadas.

Tipos:

i) **Diferencias hacia adelante.**
ii) **Diferencias retrospectivas.**
iii) **Diferencias directas.**
iv) **Diferencias intermedias.**

2.1 Diferencias hacia adelante.

X	Y	$\Delta^1 Y$	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$	...	$\Delta^n Y$
X_0	Y_0					
		$a_0=Y_1-Y_0$				
			$b_0=a_1-a_0$			
X_0+H	Y_1					
		$a_1=Y_2-Y_1$		$c_0=b_1-b_0$		
			$b_1=a_2-a_1$			$n_0=(n-1)_1-(n-1)_0$
X_0+2H	Y_2					
		$a_2=Y_3-Y_2$		$c_1=b_2-b_1$		
			$b_2=a_3-a_2$			$n_1=(n-1)_2-(n-1)_1$
X_0+3H	Y_3					
		$a_3=Y_4-Y_3$		$c_2=b_3-b_2$		
			$b_3=a_4-a_3$			
.	.					
.	.					$n_n=(n-1)_n-(n-1)_{n-1}$
.	.			$c_n=b_n-b_{n-1}$		
			$b_n=a_n-a_{n-1}$			
		$a_n=Y_n-Y_{n-1}$				
X_n+nH	Y_n					

2.2 Diferencias retrospectivas.

n	Yn	∇Yn	$\nabla^2 Yn$	$\nabla^3 Yn$	$\nabla^4 Yn$
0	Y_0				
1	Y_1	$\nabla Y_1 = Y_1-Y_0$			
2	Y_2	$\nabla Y_2 = Y_2-Y_1$	$\nabla^2 Y_2 = \nabla Y_2-\nabla Y_1$		
3	Y_3	$\nabla Y_3 = Y_3-Y_2$	$\nabla^2 Y_3 = \nabla Y_3-\nabla Y_2$	$\nabla^3 Y_3 = \nabla^2 Y_3-\nabla^2 Y_2$	
4	Y_4	$\nabla Y_4 = Y_4-Y_3$	$\nabla^2 Y_4 = \nabla Y_4-\nabla Y_3$	$\nabla^3 Y_4 = \nabla^2 Y_4-\nabla^2 Y_3$	$\nabla^4 Y_4 = \nabla^3 Y_4-\nabla^3 Y_3$
5	Y_5	$\nabla Y_5 = Y_5-Y_4$	$\nabla^2 Y_5 = \nabla Y_5-\nabla Y_4$	$\nabla^3 Y_5 = \nabla^2 Y_5-\nabla^2 Y_4$	$\nabla^4 Y_4 = \nabla^3 Y_5-\nabla^3 Y_4$
6	Y_6	$\nabla Y_6 = Y_6-Y_5$	$\nabla^2 Y_6 = \nabla Y_6-\nabla Y_5$	$\nabla^3 Y_6 = \nabla^2 Y_6-\nabla^2 Y_5$	$\nabla^4 Y_4 = \nabla^3 Y_6-\nabla^3 Y_5$

2.3 Diferencias directas.

n	Y_n	ΔY_n	$\Delta^2 Y_n$	$\Delta^3 Y_n$	$\Delta^4 Y_n$	$\Delta^5 Y_n$
0	Y_0	ΔY_0	$\Delta^2 Y_0$	$\Delta^3 Y_0$	$\Delta^4 Y_0$	$\Delta^5 Y_0$
1	Y_1	ΔY_1	$\Delta^2 Y_1$	$\Delta^3 Y_1$	$\Delta^4 Y_1$	
2	Y_2	ΔY_2	$\Delta^2 Y_2$	$\Delta^3 Y_2$		
3	Y_3	ΔY_3	$\Delta^2 Y_3$			
4	Y_4	ΔY_4				
5	Y_5					

2.4 Diferencias intermedias.

n	Yn	δYn	$\delta^2 Yn$	$\delta^3 Yn$	$\delta^4 Yn$	$\mu\delta Yn$	$\mu\delta^3 Yn$
0	Y_0	$\delta Y_{1/2}$					
1	Y_1	$\delta Y_{3/2}$	$\delta^2 Y_1$	$\delta^3 Y_{3/2}$		$\mu\delta Y_1$	
2	Y_2	$\delta Y_{5/2}$	$\delta^2 Y_2$	$\delta^3 Y_{5/2}$	$\delta^4 Y_2$	$\mu\delta Y_2$	$\mu\delta^3 Y_2$
3	Y_3	$\delta Y_{7/2}$	$\delta^2 Y_3$	$\delta^3 Y_{7/2}$	$\delta^4 Y_3$	$\mu\delta Y_3$	$\mu\delta^3 Y_3$
4	Y_4	$\delta Y_{9/2}$	$\delta^2 Y_4$			$\mu\delta Y_4$	
5	Y_5						

3. Interpolación.
3.1. Interpolación de Newton.
Se hace uso de las diferencias finitas hacia adelante, es decir, que los valores de x deben estar uniformemente espaciados. La fórmula:

$$Y_k = Y_0 + k.\Delta^1 Y + \frac{k(k-1)}{2!}.\Delta^2 Y + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}.\Delta^3 Y +$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{n!}.\Delta^n Y$$

$$k = \frac{x_k - x_0}{\Delta x}$$

3. Interpolación.
3.1. Interpolación de Newton.
Donde:

- Y_k =**valor de Y para X_k que corresponde al valor que se quiere interpolar.**
- X_k =**valor de X que se da y sirve para encontrar Y_k.**
- X_0 =**valor inmediato anterior a X_k.**
- Y_0 =**valor inmediato anterior a Y_k.**
- ΔY =**diferencias finitas encontradas para Y.**
- k =**constante.**
- Δx =**incrementos o decrementos en X.**

3. Interpolación.
3.2. Interpolación de Gregory - Newton.
3.2.1 Interpolación con diferencias directas.

$$Y(a+x) = y_0 + x\Delta y + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y +$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 y + \cdots$$

$$\ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!}\Delta^n y$$

3. Interpolación.
3.2. Interpolación de Gregory - Newton.
3.2.2 Interpolación con diferencias retrospectivas.

$$Y(a-x) = y_0 - x\Delta y + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y +$$

$$-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 y + \cdots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!}\Delta^n y$$

3. Interpolación.
3.2. Interpolación de Gregory - Newton.

Donde:

a**: abscisa que une los puntos**

$a - x$**: abscisa del punto que desea hallar**

3. Interpolación.
3.3. Interpolación de Lagrange
Cuando en una tabla de valores discretos se ve que los datos correspondientes a los valores de x no están uniformemente espaciados se usa la interpolación de Lagrange, que es una fórmula general que se puede también usar en el caso que los valores de x sean uniformemente espaciados. Implica usar todos los valores dados en la tabla.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n

3. Interpolación.
3.3. Interpolación de Lagrange

$$y_k = \frac{(x_k - x_2)(x_k - x_3)(x_k - x_4)\ldots(x_k - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_n)}y_1 +$$

$$+\frac{(x_k - x_1)(x_k - x_3)(x_k - x_4)\ldots(x_k - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)}y_2 +$$

$$+\frac{(x_k - x_1)(x_k - x_2)(x_k - x_4)\ldots(x_k - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots(x_3 - x_n)}y_3 + \cdots +$$

$$+\frac{(x_k - x_1)(x_k - x_2)(x_k - x_3)\ldots(x_k - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1})}y_n$$

3. Interpolación.
3.3.1 Interpolación inversa usando Lagrange

La interpolación inversa sirve para encontrar los valores de X correspondientes dado un Y que se conoce. En esas condiciones se invierte la tabla, pasando las X a las Y y las Y a las X.

3. Interpolación.
3.4 Interpolación lineal.

Cuando en una tabla discreta se quiere simplificar y hallar de una manera rápida una aproximación entre dos valores, se usa la interpolación lineal que no es la mejor aproximación sino la que contiene la menor aproximación, es decir, el error obtenido es mayor. El polinomio de aproximación es:

$$y = a_0 + a_1x$$

3. Interpolación.
3.5 Interpolación parabólica.

Si se dispone de tres datos discretos conocidos, lo anterior se puede llevar a cabo con un polinomio de segundo orden, llamado también polinomio cuadrático o parábola.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

3. Interpolación.
3.6 Interpolación por mínimos cuadrados
3.6.1 Mínimos cuadrados para una recta.

$$y = a_0 + a_1 x$$

Determinar a_0 y a_1 resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sum y = n a_0 + a_1 \sum x \\ \sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 \end{cases}$$

Donde n es el número de datos.

3. Interpolación.
3.6 Interpolación por mínimos cuadrados
3.6.2 Mínimos cuadrados para una parábola:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Determinar a_0, a_1 y a_2 resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sum y = n a_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 \\ \sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 \\ \sum x^2 y = a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 \end{cases}$$

Donde n es el número de datos.

3. Interpolación.
3.7 Interpolación de Splines
La interpolación de splines o interpolación segmentaria está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo, que se unen entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad.
Dado la tabla de datos:

X	x_0	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

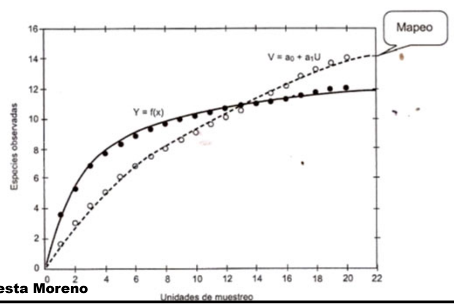
3. Interpolación.
3.7 Interpolación de Splines
Donde suponemos que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ y dado K un número entero positivo, una función de interpolación de splines de grado K, para la tabla de datos, es una función $S(x)$ tal que:

- **$S(x_i) = y_i$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.**
- **$S(x)$ es un polinomio de grado $\leq K$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.**
- **$S(x)$ tiene derivada continua hasta de orden $K - 1$ en $[x_0, x_n]$.**

4. Extrapolación.

El caso más simple de extrapolación es cuando se puede reconstruir la tabla al inicio o al final. Cuando los valores se encuentran al inicio o al final de la tabla y los valores no pueden ser encontrados, entonces se reconstruye a partir de la última diferencia, considerando que las diferencias son constantes.

5. Transformaciones o mapeo (maping)



PROBLEMAS PROPUESTOS

P-1) Por una parábola de interpolación

X	-1	0	1
y	4	2	1

Hallar y´´ en x=0 (x tiene espaciados uniformes)

P-2) Aplicando diferencias finitas, encontrar un polinomio para calcular y en x=5.5

X	1	2	3	4	5	6
y	1	9	36	100	225	441

P-3) Aplicando la interpolación de Newton, hallar y para x=3.2; x=9.2

X	0	2	4	6	8	10
y	2	8	62	212	506	992

Rpta: y=31.568; y=771.488

P-4) Aplicar la interpolación de Gregory – Newton (con diferencias directas o retrospectivas) hallar el valor de 10°20´

x	10	11	12	13
$y = senx$	0.17365	0.19081	0.20791	0.22495

Rpta: y=0.17938

P-5) Aplicando la interpolación de Lagrange (los valores de x no están espaciados uniformemente). Estimar el valor de x para 17.5

x	15	20	25	14
y	16.3665	38.3376	86.7362	13.7435

R: $y = 25.043$

P-6) Interpolación inversa de Lagrange. Encontrar x para y=9

x	2	5	11	20
y	7	14	27	50

R: $x_k = 2.83$

P-7) Interpolación Lineal. Determinar el valor de "y" cuando $x = 2$ tomando los valores discretos indicados: $P_1(0,2)\ y\ P_2(3,5)$. R: $y = 4$

P-8) Interpolación parabólica. Determinar el valor de "y" cuando $x = 2$ tomando los valores discretos indicados: $P_1(0,2)\ P_2(3,5)\ P_3(6,12)$. R: $y = 3.54$.

P-9) Mínimos cuadrados para una recta. Dados los siguientes valores, determinar "y" para $x = 3.5$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	6.5

$R: 3.304$

P-10) Mínimos cuadrados para una parábola. Dados los siguientes valores, determinar "y" para $x = 3.5$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	6.5

$R: 2.99$

P-11) Funciones Splines de grado 2. Determinar "y" para $x = 6.5$.

x	0	2	4	6	8	10
y	2	-6	10	98	306	682

P-12) En un estudio de la relación entre la publicidad por radio y las ventas de un producto, durante 10 semanas se han recopilado los tiempos de duración en minutos de la publicidad por semana (X), y el número de artículos vendidos (Y), resultando:

Semana	1	2	3	4	5
Publicidad X	20	30	30	40	50
Ventas Y	50	73	69	87	108

Semana	6	7	8	9	10
Publicidad X	60	60	60	70	80
Ventas Y	128	135	132	148	170

a) Trazar el diagrama de dispersión e indicar la tendencia
b) Calcular la recta de regresión de mínimos cuadrados con el fin de predecir las ventas.
c) Estimar la venta si en una semana se hace 100 minutos de propaganda.
d) Calcular el coeficiente de correlación.
e) Si en la novena semana se incrementa la publicidad en 5 minutos, ¿en cuánto se estima se incrementen las ventas?

NOCIONES DE REGRSIÓN NO LINEAL

Ecuación no lineal	Transformación lineal
Exponencial $Y = A.B^X$	$LogY = LogA + (LogB).X$
Potencia $Y = A.X^B$	$LogY = LogA + B.LogX$
Hiperbólica $Y = \frac{1}{A+BX}$	$Y' = A + BX$ **Siendo:** $Y' = \frac{1}{Y}$

P-13) Ajustar por el método de mínimos cuadrados una curva de la forma

$$Y = A.X^B$$

a los siguientes pares de datos

X	1.5	2	3	3.5	4	5
Y	2.6	2.4	1.2	1.8	1.6	1.4

P-14) Para los siguientes datos experimentales

X	1	2	3	4	5	6
Y	10	40	120	300	800	1500

Se plantean los modelos

$$Y = A.e^{BX} \quad e \quad Y = a + bX$$

para relacionar Y con X, ¿cuál de los dos modelos se ajusta mejor a los datos?

P-15) Encontrar la conductividad eléctrica del vidrio a partir del conjunto de valores de la tabla, donde C es la conductividad en $^{Siemens}/_{metros}$ y T la temperatura en $°F$ del vidrio.

T	58	86	148	166
C	0.000	0.114	0.018	0.029

T	188	204	210
C	0.051	0.073	0.090

PARCIAL N° 02

P-01) ¿Qué modelo representa mejor la relación entre x e y de los siguientes datos experimentales

X	12	8	10	7	6	5	5
Y	4	5	6	7	8	9	10

P-02) Determinar "y" para $x = 6.5$.

x	0	2	4	6	8	10
y	2	-6	10	98	306	682