UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA AMAZONÍA PERUANA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA

Métodos Numéricos

REPASO

P01) Graficar $y = \cos x, \forall x \in [-3\pi; 3\pi]$ **y la tangente en el punto** $P(\pi/2\,; 0)$**. Sombrear el área limitada por las curvas** $y = \cos x$ **y el** $eje\ X$ **desde** $-\pi/2$ **hasta** $3\pi/2$**; además calcular el área de** 0 **a** $\pi/2$**.**

P02) Sombrear y halle el área de la región Ω **que se encuentra en el primer cuadrante y que está limitada por las curvas** $xy = 1, xy = 3, x - xy = 1, x - xy = 3$**.** $Respuesta{:}\ Ln(729/256)u^2$**.**

P03) Sombree la región Ω **limitada por las curvas dadas y calcule su área:** $y = 9 - x^2, y = x^2 + 1$**.**

$$Respuesta{:}\ (64/3)u^2$$

P04) La hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 8$ **divide en** 3 **regiones a la circunferencia** $x^2 + y^2 = 16$**. Hallar el área de cada uno de las regiones.**

P05) Hallar el área comprendida entre las gráficas de $y = sech^{-1}x$ **y su asíntota vertical.**

$$R{:}\ \frac{\pi}{2}u^2$$

P06) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 2x^4 - x^2$ **, el eje** X **; y las dos rectas verticales que pasan por los puntos mínimos relativos.**

$$R{:}\ \frac{7}{120}u^2$$

Análisis del error

Definición 1. Supongamos que $\hat{p}$ **es una aproximación a** p **. El error absoluto de la aproximación es** $E_p = |p - \hat{p}|$ **y el error relativo es** $R_p = |p - \hat{p}|/|p|$**, supuesto que** $p \neq 0$**.**

P07) Encontrar el error absoluto y el error relativo en los siguientes casos:

a) $x = 3.141592$ **y** $\hat{x} = 3.14$**.**
b) $y = 1000000$ **e** $\hat{y} = 999996$**.**
c) $z = 0.000012$ **y** $\hat{z} = 0.000009$**.**

Localización de raíces

Consideremos una función $y = f(x)$ **la cual es continua en todo un intervalo** $[a, b]$**, dentro del cual se encuentra por lo menos una raíz o cero para** $f(x) = 0$**.**

Localización gráfica

Para propósitos de la localización gráfica de los ceros de la función dada, debe tenerse en cuenta:

1. La función considerada $f(x) = 0$ **se descompone en otras dos, de modo que pueda expresarse:** $f_1(x) = f_2(x)$**. La elección de estas dos funciones dependerá de la conveniencia del usuario, ya sea por su rapidez de cálculo o por su similitud con las formas geométricas más populares: recta, círculo, parábola, etc.**

Localización gráfica

2. Empleando una escala sencilla, graficar cada una de las funciones halladas.

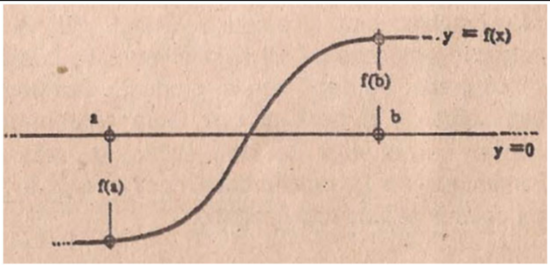
3. Teniendo en cuenta la exactitud que tenga el gráfico y las escalas usadas, será posible ubicar un cierto intervalo $[A, B]$ **dentro del cual se intersectan las gráficas de las funciones halladas. La amplitud del intervalo determinado dependerá de la claridad de las gráficas realizadas.**

P05) Localizar, a través de gráficas, las raíces de

a) $\cos x - x = 0$ **b)** $x - Lnx - 2 = 0$
c) $x^3 - 9x^2 - 9x - 15 = 0$

Localización de raíces: Busca

Sea $y = f(x)$ una cierta función dada la cual es continua en todo el intervalo para el cual se ha definido. Dar solución a las ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ es equivalente a calcular un cierto x tal que $y = 0$; por ello buscaremos un intervalo $[a, b]$ lo suficientemente pequeño (de longitud especificada por el usuario), tal que contenga a dicho valor x buscado. Si interpretamos esto en un gráfico:



Podemos observar, considerando el eje $y = 0$ como sistema referencial, que se cumple: $f(a) < 0; f(b) > 0$; entonces: $f(a) * f(b) < 0$.

Localización de raíces: Busca

Efectuaremos el proceso de búsqueda bajo los siguientes lineamientos:

1. Partimos de un cierto valor inicial A, escogiendo además una determinada longitud H para el intervalo que se esta buscando. Estos valores son escogidos según el criterio del usuario.

2. Calculamos B como la suma de A más el incremento H.

3. Evaluamos la función $f(x)$ en los valores A y B.

Localización de raíces: Busca

4. Establecemos el producto $f(A) * f(B)$, si resultara negativo entonces $[A, B]$ será el intervalo buscado; en caso contrario, es decir que el producto sea positivo, el nuevo valor de A será el que tenía anteriormente B, siendo el nuevo valor de este último, su valor anterior incrementado en H, repitiéndose nuevamente el proceso hasta obtener el producto negativo.

P06) Buscar ceros de la función $f(x) = tan(x) - x$ que sean cercanos a 100.

P07) Buscar ceros de la función

$$f(x) = cos(x)cosh(x) + 1$$

P08) Buscar ceros de la función

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 4 = 0$

Teorema del valor intermedio o de Bolzano

Supongamos que $f \epsilon C[a, b]$ y que L es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = L$.

Ejemplo: $f(x) = cos\, x$ es continua en $[0, \pi/2]$ y la constante $L = 0.8 \in \left(f(0), f(\pi/2)\right)$. La solución de $f(x) = 0.8$ en $[0, \pi/2]$ es $c_1 = 0.6435011$.

Resolución de ecuaciones no lineales

- **Método de bisección**
- **Método Regula Falsi**
- **Método del punto fijo**
- **Método de Newton - Raphson**

Método de bisección

Se basa en el Teorema del Valor Intermedio y sigue los siguientes pasos: Sea $f(x)$ continua:

i) Encontrar los valores iniciales x_a y x_b tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos, es decir: $f(x_a) * f(x_b) < 0$.

ii) La primera aproximación a la raíz se toma igual al punto medio entre x_a y x_b : $x_r = (x_a + x_b)/2$

iii) Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

- $f(x_a) * f(x_r) < 0 \quad \rightarrow \quad x_b = x_r$
- $f(x_a) * f(x_r) > 0 \quad \rightarrow \quad x_a = x_r$
- $f(x_a) * f(x_r) = 0 \quad \rightarrow \quad La\ raíz\ es\ x_r$

iv) El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta obtener la solución deseada.

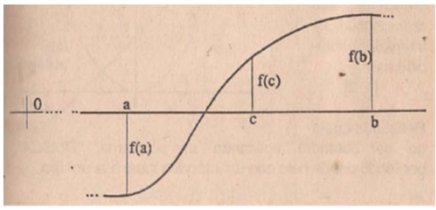
P09) Resolver $f(x) = e^{-x} - Lnx$ empleando el método de bisección. R: $x_r = 1.3097995958$

P10) Resolver $f(x) = \arctan(x) + x - 1$ empleando el método de bisección. R: $x_r = 0.52026899272$

P11) Halle $\sqrt{5}$ empleando el método de bisección.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Considere la curva mostrada como la gráfica de la función $y = f(x)$ la cual es continúa en el intervalo $[a; b]$.



MÉTODO REGULA FALSI

Consideremos $y = f(x)$ una función continúa en todo el intervalo $[a; b]$ donde a y b han sido determinados de modo que el producto de $f(a)$ y $f(b)$ sea menor que cero (esto significa que es negativo): $f(a) * f(b) < 0$

Por consiguiente es factible pensar que dentro de dicho intervalo existe por lo menos un valor x, el cual es solución de $f(x) = 0$. Bajo esta premisa establecemos el proceso de solución a la ecuación $f(x) = 0$, del modo siguiente:

MÉTODO REGULA FALSI

1) Evaluamos la función $f(x)$ en los puntos $x = a$ y $x = b$ hallando de este modo $f(a)$ y $f(b)$.

2) Unimos mediante una línea recta, los puntos de coordenadas $(a; f(a))$ y $(b; f(b))$ los cuales se han determinado respecto a un cierto sistema referencial.

3) Determinamos el valor c, como el punto de intersección de la recta dada con el eje horizontal de referencia el cual esta definido por $y = 0$.

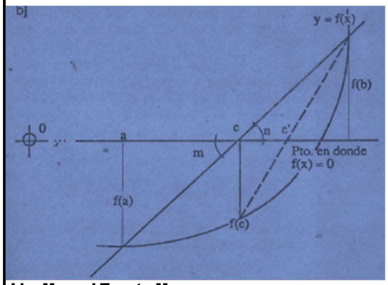
MÉTODO REGULA FALSI

4) Evaluamos la función $y = f(x)$ en el punto C, calculándose así $f(C)$.

5) Reemplazar uno de los extremos del intervalo inicial de solución por el valor C, verificando que se encuentre en el nuevo intervalo, la solución buscada para $f(x) = 0$. Para ello seguir el siguiente procedimiento:

$$Si\ f(a) * f(c) < 0, hacer\ b = c$$
$$Si\ f(a) * f(c) > 0, hacer\ a = c$$

MÉTODO REGULA FALSI
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



$$tg(m) = \frac{f(a)}{a-c},$$
$$tg(n) = \frac{f(b)}{b-c}$$
$$m = n$$
$$\therefore c = \frac{a * f(b) - b * f(a)}{f(b) - f(a)}$$

P-12) Resolver $e^{cos^2 x} - x = 0$ empleando el método de Regula Falsi, en el intervalo $[1,1; 1,2]$. R: $1,166964$.

P-13) Hallar la raíz cercana a tres de: $e^x = 2x + 21$. R: $3,31921$

P-14) Hallar la solución negativa más cercana a cero con tres cifras significativas si la ecuación es:

$$4e^{-x}cosx - 1 = 0$$

R: $-1,5158$

MÉTODOS ITERATIVOS

Consideremos una cierta función continua $f(x) = 0$ de la cual, podemos considerar a r como una de sus raíces (valor para el cual $f(x)$ es igual a cero); además denominemos x_0 a una aproximación a la raíz r. Teniendo en cuenta estas consideraciones iniciales, el método será:

MÉTODOS ITERATIVOS

1) Dada la función $f(x) = 0$. Despejemos de ella, de algún modo, el valor x, obteniéndose entonces: $x = g(x)$.

2) El algoritmo del proceso iterativo estará definido como: $x_{n+1} = g(x_n)$. Es decir, cada nuevo valor de x se obtendrá evaluando la función $g(x)$ en el valor de x obtenido anteriormente.

3) Repetir sucesivamente el segundo paso tantas veces como en la aproximación a la raíz y la convergencia del método lo requieran

MÉTODOS ITERATIVOS

Si bien este método es más simple y rápido en su operatividad, debe tenerse siempre presente que la función $g(x)$ anteriormente mencionada no deberá ser empleada mientras que no haya verificado su convergencia.

Por definición de error absoluto, sabemos que:

$$E_i = |r - x_i|$$

A partir de ello, podemos construir la siguiente sucesión convergente:

$$x_0 = r + E_0; x_1 = r + E_1; x_2 = r + E_2; \ldots; x_n = r + E_n$$

MÉTODOS ITERATIVOS

Por otro lado, teniendo en cuenta el método iterativo de solución podemos plantear:

$$x_1 = g(x_0); x_2 = g(x_1); x_3 = g(x_2); \ldots; x_n = g(x_{n-1})$$

Obviamente, $\{x_n\}$ se aproximará cada vez más a r, conforme la sucesión $\{E_n\}$ tienda a ser cero. Consideremos de la sucesión formada, como término general a: $x_{n+1} = g(x_n)$; $x_{n+1} = r + E_{n+1}$. Desarrollando entonces por medio de la serie de Taylor: $g(x_n) = g(r + E_n)$

$$g(x_n) = g(r) + \frac{g'(r)}{1!}E_n + \frac{g''(r)}{2!}E_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!}E_n^3 + \cdots$$

Teniendo en cuenta que $r = g(r)$ dado que r es una raíz de $f(x) = 0$ y que además $g(x_n) = r + E_{n+1}$ al efectuar los reemplazos correspondientes se obtiene:

$$r + E_{n+1} = r + \frac{g'(r)}{1!}E_n + \frac{g''(r)}{2!}E_n^2 + \frac{g'''}{3!}E_n^3 + \cdots$$

$$E_{n+1} = \frac{g'(r)}{1!}E_n + \frac{g''(r)}{2!}E_n^2 + \frac{g'''}{3!}E_n^3 + \cdots$$

Como al inicio del proceso, hemos aceptado la tendencia de E_n a aproximarse a cero, entonces es posible reducir la expresión despreciando las potencias mayores. De este modo:

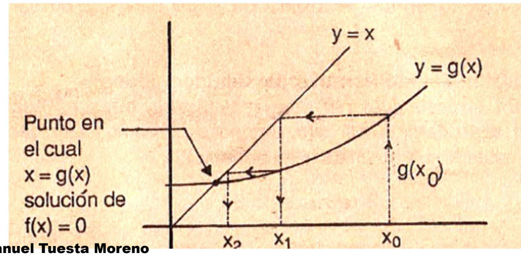
$$E_{n+1} \simeq g'(r)E_n$$

Caso 1. Método iterativo de primer orden. Si consideramos $g'(r)$ diferente de cero podemos aceptar que: $E_{n+1} \simeq g'(r)E_n$. La convergencia del método se asegurará entonces conforme el valor del error E_{n+1} tienda a ser cada vez más pequeño, para ello bastará que: $|g'(r)| < 1$. Con lo cual podemos asegurar que E_{n+1} será vez menor que E_n. Si bien se ha determinado la condición de convergencia del método iterativo, éste presenta un serio inconveniente práctico, $g'(r)$ no puede ser evaluado, puesto que r es la raíz que deseamos encontrar, por esto resulta más conveniente considerar como condición de convergencia: $|g'(x_0)| < 1$; donde x_0 es una aproximación inicial a la raíz buscada.

Caso 2. Método iterativo de segundo orden. En el caso que $g'(r)$ sea igual a cero, mientras que $g''(r)$ sea diferente de cero, entonces podemos plantear, de acuerdo a lo obtenido anteriormente: $E_{n+1} = \frac{g''(r)}{2}E_n^2$. Por lo cual la condición de convergencia es que $g''(r)$ sea finito. Obviamente, por cuestiones prácticas, la condición de convergencia se reducirá a $g''(x_0)$ es finito.

Interpretación geométrica

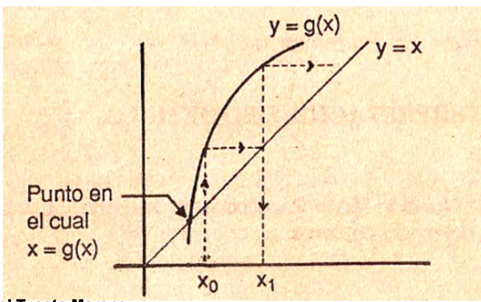
De la función $f(x) = 0$, se obtiene $x = g(x)$, la cual se grafica del modo siguiente:



Interpretación geométrica

En la diapositiva 29, observe que la recta $y = x$ tiene como pendiente uno (1), por ello $g(x)$, de la gráfica notamos que su pendiente $g'(x)$ es menor que la unidad, lo cual corrobora la condición de convergencia, como puede notarse. Notemos que en el caso de que la pendiente $g'(x)$ es mayor que la unidad, la convergencia no se verifica como puede notarse en la gráfica siguiente:

Interpretación geométrica



P15) Dada la ecuación:

$$f(x) = 2x^2 + 6e^{-x} - 4 = 0$$

a) Analice gráficamente donde se ubican las raíces.

b) Use el método del punto fijo (verificando las condiciones) para calcular las raíces cuyos valores debe ser menor o igual que 10^{-12}.

P16) Dada la ecuación:

$$4x^4 - 9x^3 - 1 = 0$$

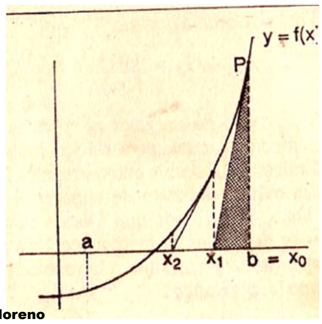
Resolver empleando el método del punto fijo.

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Para una función $y = f(x)$, el método de Newton – Raphson propone localizar la raíz de $f(x) = 0$ mediante el uso del siguiente algoritmo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Modificación del método de Newton - Raphson

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) * \frac{(x_n - x_{n-1})}{\left(f(x_n) - f(x_{n-1})\right)}$$

Condición de convergencia

Para un cierto valor x en el cual se va a emplear el método de Newton – Raphson deberá cumplirse:

$$\left|\frac{f(x) * f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

P17) Resolver $e^x = 1 + 1/x$ mediante el método de Newton – Raphson. R: $0,80647$

P18) Usando el método de Newton – Raphson hallar la raíz real positiva del polinomio: $x^3 + 3x - 1$. R: $0,3221$.

P19) Encontrar todas las raíces del polinomio

$$64x^4 - 112x^3 + 113x^2 - 112x + 49$$

P20) Resolver las siguientes ecuaciones, aplicando el método de Newton – Raphson, con 5 decimales:

a) $x^{10} - 10x + 4 = 0$ **b)** $0.1x^2 - xLnx = 0$

SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

MÉTODO DE ITERACIÓN DE PUNTO FIJO
MÉTODO DE LA DERIVADA PARCIAL
MÉTODO DE LA SERIE DE TAYLOR

1. MÉTODO DE ITERACIÓN DE PUNTO FIJO

Consideremos el problema general dado como el siguientes sistema: $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$

Supongamos además, para consideraciones del método que (x_0,y_0) **es una aproximación inicial a las raíces del sistema enunciado.**
De cada una de las expresiones dadas despejamos "x" e "y" de alguna manera, tal que sea posible escribir: $\begin{cases} x=f(x,y) \\ y=g(x,y) \end{cases}$

Finalmente el algoritmo iterativo del método estará dado: $\begin{cases} x_{n+1}=f(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=g(x_n,y_n) \end{cases}$

CONDICIONES DE CONVERGENCIA

1. En una vecindad de la solución al sistema debe que $f, g, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial g/\partial x, \partial g/\partial y$ **son continuas.**
2. Existe una constante $K<1$ **tal que en todos los puntos de la vecindad de una raíz del sistema se cumplirá:** $\begin{cases} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K \\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| < K \end{cases}$

CONDICIONES DE CONVERGENCIA

3. La aproximación inicial (x_0,y_0) **deben pertenecer a una vecindad de la raíz que cumpla con las dos condiciones anteriores.**

NOTA: Las condiciones enunciadas son suficientes más no necesarias.

2. MÉTODO DE LA DERIVADA PARCIAL

Consideremos el sistema no lineal:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

Y una aproximación inicial (x_0,y_0) **a alguna de las raíces de dicho sistema el algoritmo iterativo estará dado por:**

$$X_{n+1}=X_n-\frac{F(X_n,Y_n)}{\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{(X_n,Y_n)}} \quad ; Y_{n+1}=Y_n-\frac{G(X_{n+1},Y_n)}{\left.\frac{\partial G}{\partial Y}\right|_{(X_{n+1},Y_n)}}$$

La convergencia del método enunciado dependerá sustancialmente de la aproximación inicial (x_0,y_0)**.**

3. MÉTODO DE LA SERIE DE TAYLOR

Consideremos el sistema no lineal:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

Y una aproximación inicial (x_0,y_0) **a alguna de las raíces reales del sistema. Aceptemos entonces la siguientes convención:**
FX **es la derivada de** $F(x,y)$ **respecto a** X
FY **es la derivada de** $F(x,y)$ **respecto a** Y
GX **es la derivada de** $G(x,y)$ **respecto a** X
GY **es la derivada de** $G(x,y)$ **respecto a** Y
$J(F,G)$ **es el jacobiano de** $F(x,y)$ **y** $G(x,y)$

El Jacobiano se define como

$$J(F,G)=\begin{vmatrix} FX & FY \\ GX & GY \end{vmatrix}$$

El algoritmo iterativo para la solución del sistema estará dado por:

$$x_{n+1}=x_n-\left[\frac{F*(GY)-G*(FY)}{J(F,G)}\right]_{\substack{x=x_n\\ y=y_n}}$$

$$y_{n+1}=y_n+\left[\frac{F*(GX)-G*(FX)}{J(F,G)}\right]_{\substack{x=x_n\\ y=y_n}}$$

De los métodos enunciados, el del jacobiano ofrece mayor seguridad en la convergencia, ésta condición mejorará si consideramos a (x_0, y_0) suficientemente aproximado a la solución buscada y manteniendo a F y G como funciones linealmente independientes (para ello bastará que su jacobiano sea diferente de cero).

E-01) Hallar la raíz positiva (en el primer cuadrante): $y=x+1/x^2$ **y** $x^{2/3}+y^{2/3}=4$

Aplicar:

a) Método de la iteración de punto fijo

b) Método de la derivada parcial

c) Método de la serie de Taylor

Respuesta: $x=2,763189697; y=2,894161739$

E-02) Encontrar la solución del sistema

$$\begin{cases} x-e^{-y}=0 \\ e^{-x}-y=0 \end{cases}$$

Respuesta: $x=0,56690; y=0,56725$

E-03) Para el sistema: $\begin{cases} xe^{y}-1=0 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$

a) Localizar todas las soluciones

b) Dar un algoritmo que permita calcular cada solución. Respuestas:

$x_1=0,37448, y_1=0,98231; x_2=1,60844, y_2=-0,47374$

E-04) Hallar la intersección más cercana al origen de las curvas:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=9 \\ y^2-x^2=1 \end{cases}$$

Respuesta: $x=-1,80512; y=2,06360$

E-05) Sea la ecuación no lineal:

$$arc\ senx-cosx+0,001=0$$

a) Poner la ecuación no lineal como un sistema de ecuaciones no lineales

b) Al sistema hallado en (a) aplique iteración de punto fijo para sistemas, encontrando formas de iteración de punto fijo convergente para cualquier valor inicial.

c) Con la forma hallada en (b) encontrar la solución de la ecuación no lineal.

Respuesta: $x=0,6957$

E-06) Hallar una raíz en el primer cuadrante:

$$\begin{cases} xy=1 \\ x^2-2x+2,25y^2=8 \end{cases}$$

Respuesta: $x_3=3,97618; y_3=0,25149$

E-07) Considere: $\begin{cases} 2x+4y=7 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$

Con un método de resolución numérica de un sistema no lineal, aproximar la solución del sistema anterior, teniendo como punto inicial $(x_0, y_0)=(0,0)$.

Respuesta: $x=-0,928; y=2,214$

E-08) Hallar la solución de:

$$\begin{cases} cosx - y = 0 \\ x - seny = 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x_3 = 0,69481; y_3 = 0,76816$

E-09) Hallar una intersección en el primer cuadrante de:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7x + 6y - 10 = 0 \\ 2x^2 + 3xy - y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Respuesta: $x_4 = 0,97266; y_4 = 1,31455$

Este es el Dios o Naturaleza de Spinoza:

Dios hubiera dicho:

Deja ya de estar rezando y dándote golpes en el pecho! Lo que quiero que hagas es que salgas al mundo a disfrutar de tu vida.

Quiero que goces, que cantes, que te diviertas y que disfrutes de todo lo que he hecho para ti.

Deja ya de ir a esos templos lúgubres, obscuros y fríos que tú mismo construiste y que dices que son mi casa.

Mi casa está en las montañas, en los bosques, los ríos, los lagos, las playas. Ahí es en donde vivo y ahí expreso mi amor por ti.

Deja ya de culparme de tu vida miserable; yo nunca te dije que había nada mal en ti o que eras un pecador, o que tu sexualidad fuera algo malo.

El sexo es un regalo que te he dado y con el que puedes expresar tu amor, tu éxtasis, tu alegría. Así que no me culpes a mí por todo lo que te han hecho creer.

Deja ya de estar leyendo supuestas escrituras sagradas que nada tienen que ver conmigo. Si no puedes leerme en un amanecer, en un paisaje, en la mirada de tus amigos, en los ojos de tu hijito... ¡No me encontrarás en ningún libro.

Confía en mí y deja de pedirme. ¿Me vas a decir a mí como hacer mi trabajo?

Deja de tenerme tanto miedo. Yo no te juzgo, ni te critico, ni me enojo, ni me molesto, ni castigo. Yo soy puro amor.

Deja de pedirme perdón, no hay nada que perdonar. Si yo te hice... yo te llené de pasiones, de limitaciones, de placeres, de sentimientos, de necesidades, de incoherencias... de libre albedrío ¿Cómo puedo culparte si respondes a algo que yo puse en ti? ¿Cómo puedo castigarte por ser como eres, si yo soy el que te hice? ¿Crees que podría yo crear un lugar para quemar a todos mis hijos que se porten mal, por el resto de la eternidad? ¿Qué clase de dios loco puede hacer eso?

Olvídate de cualquier tipo de mandamientos, de cualquier tipo de leyes; esas son artimañas para manipularte, para controlarte, que sólo crean culpa en ti. Respeta a tus semejantes y no hagas lo que no quieras para ti. Lo único que te pido es que pongas atención en tu vida, que tu estado de alerta sea tu guía.

Amado mío, esta vida no es una prueba, ni un escalón, ni un paso en el camino, ni un ensayo, ni un preludio hacia el paraíso. Esta vida es lo único que hay aquí y ahora y lo único que necesitas.

Te he hecho absolutamente libre, no hay premios ni castigos, no hay pecados ni virtudes, nadie lleva un marcador, nadie lleva un registro.

Eres absolutamente libre para crear en tu vida un cielo o un infierno.
No te podría decir si hay algo después de esta vida, pero te puedo dar un consejo. Vive como si no lo hubiera. Como si esta fuera tu única oportunidad de disfrutar, de amar, de existir.
Así, si no hay nada, pues habrás disfrutado de la oportunidad que te di.
Y si lo hay, ten por seguro que no te voy a preguntar si te portaste bien o mal, te voy a preguntar ¿Te gustó?... ¿Te divertiste?... ¿Qué fue lo que más disfrutaste? ¿Que aprendiste?...

Deja de creer en mí; creer es suponer, adivinar, imaginar. Yo no quiero que creas en mí, quiero que me sientas en ti. Quiero que me sientas en ti cuando besas a tu amada, cuando arropas a tu hijita, cuando acaricias a tu perro, cuando te bañas en el mar.
Deja de alabarme, ¿Qué clase de Dios ególatra crees que soy?
Me aburre que me alaben, me harta que me agradezcan. ¿Te sientes agradecido? Demuéstralo cuidando de ti, de tu salud, de tus relaciones, del mundo. ¿Te sientes mirado, sobrecogido?... ¡Expresa tu alegría! Esa es la forma de alabarme.

Deja de complicarte las cosas y de repetir como perico lo que te han enseñado acerca de mí. Lo único seguro es que estás aquí, que estás vivo, que este mundo está lleno de maravillas. ¿Para qué necesitas más milagros? ¿Para qué tantas explicaciones?
No me busques afuera, no me encontrarás. Búscame dentro... ahí estoy, latiendo en ti.

Spinoza.