猜数问题的研究

上海市复旦附中　高二(8)　张宁

摘要：

在逻辑推理中有一类比较特殊的问题——“思维嵌套”问题，即在C的脑海中要考虑B是如何思考A的想法。对于这种问题通常非常抽象，考虑情况又十分繁多，思想极其复杂，用一般方法分析效果极差。本文以一个典型的“思维嵌套”问题——猜数问题为出发点，用一种新的方法从问题本质入手分析，很好的解决了问题，并阐述了新思路的优越性。由本质入手分析，避免了表面上的“思维嵌套”，且总结出了许多结论，使得解决问题的效率大幅度上升。在新思路的指引下将原问题向更普遍的情形推广，虽然问题变得更为繁琐复杂，但是由于把握住问题的命脉，有效地解决了问题。

关键字：推理，思维嵌套，终结情形，一类情形，二类情形，分组

正文：

一、问题原形

问题描述：

一位逻辑学教授有三名非常善于推理且精于心算的学生A，B和C。有一天，教授给他们三人出了一道题：教授在每个人脑门上贴了一张纸条并告诉他们，每个人的纸条上都写了一个大于0的整数，且某两个数的和等于第三个。于是，每个学生都能看见贴在另外两个同学头上的整数，但却看不见自己的数。

教授轮流向A，B和C发问：是否能够猜出自己头上的数。经过若干次的提问之后，当教授再次询问某人时，此人突然露出了得意的笑容，把贴在自己头上的那个数准确无误的报了出来。

我们的问题就是：证明是否一定有人能够猜出自己头上的数，若有人能够猜出，则计算最早在第几次提问时有人先猜出头上的数，分析整个推理的过程，并总结出结论。

我们先分析一个简单的例子，观察每个人是如何进行推理的。

假设 A，B 和 C 三人，头上的数分别是 1，2 和 3。

1) 先问 A

这时，A 能看见 B，C 两人头上的数分别是 2，3。A 会发现自己头上只可能为 3+2=5，或者 3-2=1。可到底是 1 还是 5，A 无法判断，所以只能回答“不能”。

2) 再问 B

B 会发现自己头上只可能为 3+1=4，或者 3-1=2。可到底是 2 还是 4，B 只能从 A 的回答中入手分析：（以下为 B 脑中的分析）

1. 如果自己头上是 2。则 A 能看见 B，C 两人头上的数分别是 2，3，A 会发现自己头上只可能为 3+2=5，或者 3-2=1。到底是 1 还是 5，A 无法判断，只能回答“不能”。这与 A 实际的回答相同，并不矛盾，所以 B 无法排除这种情况。
2. 如果自己头上是 4。则 A 能看见 B，C 两人头上的数分别是 4，3，A 会发现自己头上只可能为 4+3=7，或者 4-3=1。到底是 1 还是 7，A 无法判断，只能回答“不能”。这也与 A 实际的回答相同，并不矛盾，所以 B 也无法排除这种情况。

B 无法判断，只能回答“不能”。

3) 再问 C

C 会发现自己头上只可能为 2+1=3，或者 2-1=1。可到底是 1 还是 3，C 只能从 A 或 B 的回答中入手分析：（以下为 C 脑中的分析）

1. 如果自己头上是 1。

   a) A 会发现自己头上只可能为 2+1=3，或者 2-1=1。可到底是 1 还是 3，是无法判断的，只能回答“不能”。这与 A 实际的回答相同，并不矛盾。

   b) B 会发现自己头上只可能为 1+1=2（因为 B 头上是大于 0 的整数，所以 B 头上不能是 1-1=0）。B 应回答“能”。但这与 B 实际的回答矛盾。C 能以此排除头上是 1 这种情况。

2. 如果继续分析 C 头上是 3 这种情况会发现毫无矛盾（因为与实际情况相符）。

C 将准确判断头上的数是 3，所以回答“能”。

所以在第三次提问时有人猜出头上的数。

我们从每个人的角度出发，分析了头上数是 1，2 和 3 的情况。这种方法也是我们解决简单的逻辑推理问题所采用的普遍做法。但如果将问题的规模变大，会发现问题的复杂程度会急剧上升，几乎是多一次推理，问题的复杂度就要变大一倍。更复杂的例子，限于篇幅就不举了，但复杂程度是可以想见的。

靠如此烦琐的推理是不能很好解决问题的。原因在于有大量的“思维嵌套”，即：在 C 的脑海中要考虑 B 是如何思考 A 的想法。此外，这种方法不能够推导出有普遍意义的结论。让我们换一种思路来解决问题。

定义：

下面我们用第一位、第二位、第三位学生分别表示 A，B，C 三人

定义 1： 用四元组 (a_1, a_2, a_3, k)， $a_1, a_2, a_3 \in Z^+$， $k \in \{1,2,3\}$ 来描述推理过程中的一种情形，其中三个人头上数分别为 a_1, a_2, a_3，从第一位学生开始提问，且当前的被提问者为第 k 位学生。

性质 F_1：对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k)，第 k 位学生可以不依靠别人的回答进行推理，能够直接判断出自己头上数，并称四元组描述的情形为“终结情形”。

性质 F_2：对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k)， $a_k < \max\{a_1, a_2, a_3\}$，并称四元组描述的情形为“一类情形”。

性质 F_3：对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k)， $a_k = \max\{a_1, a_2, a_3\}$，并称四元组描述的情形为“二类情形”。

定义 2：集合 $S_1=\{(a_1,a_2,a_3,k)|(a_1,a_2,a_3,k)$满足性质$F_1\}$。

定义 3：集合 $S_2=\{(a_1,a_2,a_3,k)|(a_1,a_2,a_3,k)$满足性质$F_2\}$。

定义 4：集合 $S_3=\{(a_1,a_2,a_3,k)|(a_1,a_2,a_3,k)$满足性质$F_3\}$。

定义 5：若对于四元组(a_1,a_2,a_3,k)

1) 若第 k 位学生不能够猜出头上的数，记 $f(a_1,a_2,a_3,k)=+\infty$。

2) 若第 k 位学生能够猜出头上的数，记 $f(a_1,a_2,a_3,k)$为从第一位学生开始提问直到猜出头上的数的过程中总共的提问次数。

定义 6：对于四元组(a_1,a_2,a_3,k)，记 $g(a_1,a_2,a_3,k,R)\in\{T,F\}$（表示真或假），$R\in Z^+$，表示当三位学生头上的数分别为 a_1,a_2,a_3，第 k 位学生是否在恰在第 R 次提问时最先猜出头上的数为 a_k。

定义 7：对于四元组(a_1,a_2,a_3,k)，记 $h(a_1,a_2,a_3,k,R)\in\{T,F\}$（表示真或假），$R\in Z^+$，表示当三位学生头上的数分别为 a_1,a_2,a_3，第 k 位学生是否能够在第 R 次提问时排除头上的数为 a_k 的情况。

找出问题的前提，即已知条件：

1） 某两个数的和等于第三个

2） 每个人的纸条上都写了一个大于 0 的整数

每个人头上的数不是另两数的和就是另两数的差。由于不能直接判断一定是其中某个数，就只能采取排除法。由于他们不会猜错，因此在下面只需考虑他们如何能够排除头上数不同于实际的可能情况。

考虑四元组$(a_1,a_2,a_3,k)\in S_1$，设 i, j 满足$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$，则第 k 位学生头上的有两种情况$a_k=a_i+a_j$或$a_k=|a_i-a_j|$。其中$a_i+a_j>0$, 不能直接排除。由于$|a_i-a_j|\geq 0$，所以当且仅当$|a_i-a_j|=0$能够直接排除这种情况。即$\forall(a_1,a_2,a_3,k)\in S_1\Leftrightarrow a_i=a_j$，其中$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$。

显然$a_k=a_i+a_j$，$a_k=\max\{a_1,a_2,a_3\}$，因此$S_1\subseteq S_3$。注意到集合S_2与S_3的定义，显然$S_2\cap S_3=\varnothing$，因此必然有$S_1\cap S_2=\varnothing$。

考虑四元组$(a_1,a_2,a_3,k)\notin S_1$，即第 k 位学生不能直接猜出自己头上的数，就需要通过推理来排除头上数的两种情况中的一种。*当第 k 位学生假设自己头上是某数，并通过推理发现别人理应能够在前两次提问中最先猜出头上的数，就可以根据实际上别人并没有猜出这一矛盾来排除其中一种情况。*（可以参考前面例子中对 C 思想的分析）

显然三位学生都不可能通过推理排除自己头上数的实际情况（因为他们是永远不会猜错的）。所以下面仅需考虑如何排除头上数不同于实际的另一种情况。

对于四元组(a_1,a_2,a_3,k)，为了讨论方便，不妨设$a_3=a_1+a_2$。

注:下面的$\vee$为析取符号，即$T \vee T = T, T \vee F = T, F \vee T = T, F \vee F = F$

1) 当 k=1 时

$$g(a_1, a_2, a_3, k, R) = T$$

$$\Leftrightarrow g(a_3 - a_2, a_2, a_3, 1, R_1) = T$$

$$\Rightarrow h(a_2 + a_3, a_2, a_3, 1, R_1) = T$$

$$\Leftrightarrow g(a_2 + a_3, a_2, a_3, 2, R_1 - 2) \vee g(a_2 + a_3, a_2, a_3, 3, R_1 - 1) = T$$

2) 当 k=2 时

$$g(a_1, a_2, a_3, k, R) = T$$

$$\Leftrightarrow g(a_1, a_3 - a_1, a_3, 2, R_2) = T$$

$$\Rightarrow h(a_1, a_1 + a_3, a_3, 2, R_2) = T$$

$$\Leftrightarrow g(a_1, a_1 + a_3, a_3, 1, R_2 - 1) \vee g(a_1, a_1 + a_3, a_3, 3, R_2 - 2) = T$$

3) 当 k=3 时

$$g(a_1, a_2, a_3, k, R) = T$$

$$\Leftrightarrow g(a_1, a_2, a_1 + a_2, 3, R_3) = T$$

$$\Rightarrow h(a_1, a_2, |a_1 - a_2|, 3, R_3) = T$$

$$\Leftrightarrow g(a_1, a_2, |a_1 - a_2|, 1, R_3 - 2) \vee g(a_1, a_2, |a_1 - a_2|, 2, R_3 - 1) = T$$

对于四元组(a_1, a_2, a_3, k)，设 i, j 满足$\{i, j, k\} = \{1,2,3\}$，$a_i' = a_i$，$a_j' = a_j$。 当$a_k = a_i + a_j$时，$a_k' = |a_i - a_j|$，当$a_k = |a_i - a_j|$时，$a_k' = a_i + a_j$。

1. 当$k > i$时，设$V_i = V - (k - i)$，当$k < i$时，设$V_i = V - (n + k - i)$。
2. 当$k > j$时，设$V_j = V - (k - j)$，当$k < j$时，设$V_j = V - (n + k - j)$。

由上面定义可得

$$g(a_1, a_2, a_3, k, V) = T \Rightarrow g(a_1', a_2', a_3', i, V_i) \vee g(a_1', a_2', a_3', j, V_j) = T$$

分别考虑四元组$(a_1, a_2, a_3, k) \in S_2$和$(a_1, a_2, a_3, k) \in S_3$两种情形：

1) 当$(a_1, a_2, a_3, k) \in S_2$，有$a_k < \max\{a_1, a_2, a_3\}$，则$a_k = |a_i - a_j|$。由于$S_1 \cap S_2 = \varnothing$，第 k 位学生须通过推理排除头上数为$a_k' = a_i + a_j$的情况。

若 $\exists(a_1,a_2,a_3,k)\in S_2$ 满足 $g(a_1,a_2,a_3,k,f(a_1,a_2,a_3,k))=T$，记

$V=\min\{f(a_1,a_2,a_3,k)|(a_1,a_2,a_3,k)\in S_2,g(a_1,a_2,a_3,k,f(a_1,a_2,a_3,k))=T\}$

$\exists(a_1,a_2,a_3,k)\in S_2$ 满足 $f(a_1,a_2,a_3,k)=V$，$g(a_1,a_2,a_3,k,V)=T$，

则可以得到 $g(a_1',a_2',a_3',i,V_i)=T$ 或 $g(a_1',a_2',a_3',j,V_j)=T$，因此 $f(a_1',a_2',a_3',i)=V_i$ 或 $f(a_1',a_2',a_3',j)=V_j$。$a_k'=a_i+a_j=a_i'+a_j'$，因此 $(a_1',a_2',a_3',i)\in S_2$，$(a_1',a_2',a_3',j)\in S_2$，而 $V_i<V$，$V_j<V$，矛盾。

结论：对 $\forall(a_1,a_2,a_3,k)\in S_2$，$g(a_1,a_2,a_3,k,R)=F,R\in Z^+$。

2) 当 $(a_1,a_2,a_3,k)\in S_3$，且 $(a_1,a_2,a_3,k)\notin S_1$。有 $a_k=\max\{a_1,a_2,a_3\}$，

$a_k=a_i+a_j$，第 k 位学生须通过推理排除头上数为 $a_k'=|a_i-a_j|$ 的情况。由于 $(a_1,a_2,a_3,k)\notin S_1$，显然 $a_i\neq a_j$。

由前面讨论 1) 可推得 $g(a_1,a_2,a_3,k,V)=T\Leftrightarrow h(a_1',a_2',a_3',k,V)=T$

a) 当 $a_i>a_j$，即 $a_i'>a_j'$，$(a_1',a_2',a_3',i)\in S_3$，$(a_1',a_2',a_3',j)\in S_2$。

因此 $g(a_1',a_2',a_3',j,V_j)=F$，

$g(a_1,a_2,a_3,k,V)=T\Leftrightarrow g(a_1',a_2',a_3',i,V_i)=T$。

b) 当 $a_j>a_i$，即 $a_j'>a_i'$，$(a_1',a_2',a_3',j)\in S_3$，$(a_1',a_2',a_3',i)\in S_2$。

因此 $g(a_1',a_2',a_3',i,V_i)=F$，

$g(a_1,a_2,a_3,k,V)=T\Leftrightarrow g(a_1',a_2',a_3',j,V_j)=T$。

我们可以从考虑四元组 $(a_1,a_2,a_3,k)\in S_3$，变为考虑四元组 $(a_1',a_2',a_3',i)\in S_3$ 或 $(a_1',a_2',a_3',j)\in S_3$。这样就形成了一个线性的推理方式，而非先前分支庞大的推理方式。

由于可以只考虑 $(a_1,a_2,a_3,k)\in S_3$，若 $(a_1,a_2,a_3,k)\notin S_1$，可以转而考虑四元组 $(a_1',a_2',a_3',i)\in S_3$ 或 $(a_1',a_2',a_3',j)\in S_3$。由于三个数不可能无穷的递减因此在有限次转化后必然达到“终结情形”。

结论：无论三个数如何变化，无论从谁开始提问，必然是头上数最大的人

最先猜出自己头上的数。

由上述结论，对于(a_1,a_2,a_3,k)，可以定义$f(a_1,a_2,a_3,k)$的递推式：

1) 当k=1时

1. 当$a_2=a_3$时，$f(a_1,a_2,a_3,1)=1$

2. 当$a_2>a_3$时，$f(a_1,a_2,a_3,1)=f(a_2-a_3,a_2,a_3,2)+2$

3. 当$a_2<a_3$时，$f(a_1,a_2,a_3,1)=f(a_3-a_2,a_2,a_3,3)+1$

2) 当k=2时

1. 当$a_1=a_3$时，$f(a_1,a_2,a_3,2)=2$

2. 当$a_1>a_3$时，$f(a_1,a_2,a_3,2)=f(a_1,a_1-a_3,a_3,1)+1$

3. 当$a_1<a_3$时，$f(a_1,a_2,a_3,2)=f(a_1,a_3-a_1,a_3,3)+2$

3) 当k=3时

1. 当$a_1=a_2$时，$f(a_1,a_2,a_3,3)=3$

2. 当$a_1>a_2$时，$f(a_1,a_2,a_3,3)=f(a_1,a_2,a_1-a_2,1)+2$

3. 当$a_1<a_2$时，$f(a_1,a_2,a_3,3)=f(a_1,a_2,a_2-a_1,2)+1$

由于我们只考虑$(a_1,a_2,a_3,k)\in S_3$，因此k可由a_1,a_2,a_3三个数直接确定，因此$f(a_1,a_2,a_3,k)$可以简化为$f(a_1,a_2,a_3)$。

利用上面的公式，通过计算机编程来解决问题。参见源程序1。

由于建立了线性的递推关系，因此避免了问题规模随着提问次数呈指数型增长。有效的解决了问题，其解决方法是建立在对问题的深入分析之上的。现在让我们总结解决问题中思路的主线：

提炼重要的前提条件→考虑何种情形为“终结情形”→对非“终结情形”建立推理的等价关系→考虑何种情形能归结到“终结情形”→分情况讨论并加以证明→得出结论并改写等价关系→得出公式

整个过程是从分析问题的本质入手，而非一味单纯地从每个人思想出发，并推导出普遍意义的结论。从综观全局的角度分析问题，避免了最烦琐的“思维嵌套”，并且使得问题规模从指数型转变为线性。

二、第一种推广

问题描述：

一位逻辑学教授有 n $(n \geq 3)$ 名非常善于推理且精于心算的学生。有一天,教授给他们 n 人出了一道题：教授在每个人脑门上贴了一张纸条并告诉他们，每个人的纸条上都写了一个大于 0 的整数，且某个数等于其余 n-1 个数的和。于是，每个学生都能看见贴在另外 n-1 个同学头上的整数，但却看不见自己的数。

教授轮流向 n 发问：是否能够猜出自己头上的数。经过若干次的提问之后，当教授再次询问某人时，此人突然露出了得意的笑容，把贴在自己头上的那个数准确无误的报了出来。

我们的问题就是：证明是否一定有人能够猜出自己头上的数，若有人能够猜出，则计算最早在第几次提问时有人先猜出头上的数，分析整个推理的过程，并总结出结论。

我们对 n=3 时的定义加以修改：

定义：

定义 1： 用 n+1 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$， $a_1, a_2, \cdots, a_n \in Z^+$， $k \in \{1,2,\cdots n\}$ 来描述推理过程中的一种情形，其中 n 个人头上数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，从第一位学生开始提问，且当前的被提问者为第 k 位学生。

性质 F_1：对于 n+1 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$，第 k 位学生可以不依靠别人的回答进行推理，能够直接判断出自己头上数，并称 n+1 元组描述的情形为“终结情形”。

性质 F_2：对于 n+1 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$， $a_k < \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，并称 n+1 元组描述的情形为“一类情形”。

性质 F_3：对于 n+1 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$， $a_k = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 并称 n+1 元组描述的情形为“二类情形”。

定义 2：集合 $S_1 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) | (a_1, a_2, \cdots, a_n, k)满足性质F_1\}$。

定义 3：集合 $S_2 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) | (a_1, a_2, \cdots, a_n, k)满足性质F_2\}$。

定义 4：集合 $S_3 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) | (a_1, a_2, \cdots, a_n, k)满足性质F_3\}$。

定义 5：若对于 n+1 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$

1) 若第 k 位学生不能够猜出头上的数，记 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) = +\infty$。

2) 若第 k 位学生能够猜出头上的数，记 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$ 为从第一位学生开始提问直到猜出头上的数的过程中总共的提问次数。

定义 6：对于 n+1 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)$，记 $g(a_1,a_2,\cdots,a_n,k,R)\in\{T,F\}$（表示真或假），$R\in Z^+$，表示当三位学生头上的数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，第 k 位学生是否在恰在第 R 次提问时最先猜出头上的数为 a_k。

定义 7：对于 n+1 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)$，记 $h(a_1,a_2,\cdots,a_n,k,R)\in\{T,F\}$（表示真或假），$R\in Z^+$，表示当三位学生头上的数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，第 k 位学生是否能够在第 R 次提问时排除头上的数为 a_k 的情况。

定义 8：对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)$，记 $M=\sum_{i=1}^{k-1}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i$，

$W=\max\{a_1,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n\}$。

对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)$，$\exists u\in\{1,2,\cdots,n\},a_u=\sum_{i=1}^{u-1}a_i+\sum_{i=u+1}^{n}a_i$，

$\exists v\in\{1,2,\cdots n\}\setminus\{k\},a_v=W$。$a_u=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\max\{a_v,a_k\}$。所以对第 k 位学生而言，

头上的数可能有两种情况：$\sum_{i=1}^{k-1}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i=M$（当 $a_u=a_k$ 时）或

$a_v-(\sum_{i=1}^{k-1}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i-a_v)=W-(M-W)=2W-M$（当 $a_u=a_v$ 时）。

考虑 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)\in S_1$。由于 $\sum_{i=1}^{k-1}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i=M>0$，不能直接排除。

而当且仅当 $a_v-(\sum_{i=1}^{k-1}a_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i-a_v)=W-(M-W)=2W-M\le 0$ 时，能够直接排除这种情况。即 $\forall(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)\in S_1\Leftrightarrow 2W-M\le 0$。

对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)\notin S_1$，即 $2W-M>0$。若有 $a_v=W$，$a_{v'}=W$，其中 $v,v'\in\{1,2,\cdots n\}\setminus\{k\},v\ne v'$，则必然有 $2W=a_v+a_{v'}\le M$，矛盾。所以除第 k 位学生外剩下学生中仅有第 v 位学生头上的数 $a_v=W$。

<u>*当第 k 位学生假设自己头上是某数，并通过推理发现别人理应能够在前 n-1 次提问中最先猜出头上的数，就可以根据实际上别人并没有猜出这一矛盾来排*</u>

除其中一种情况。

1) 当 $k=u$ 时，即 $a_k=M$，因此第 k 位学生需排除头上数是 $2W-M$。令

$\forall i \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{k\}, a_i' = a_i$，$a_k' = 2W-M$

2) 当 $k \neq u$ 时，即 $a_k = 2W-M$，因此第 k 位学生需排除头上数是 M。令

$\forall i \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{k\}, a_i' = a_i$，$a_k' = M$

与 n=3 时的问题原形类似，可以得到如下式子：

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_n,k,R)=T$$

$$\Rightarrow h(a_1',a_2',\cdots,a_n',k,R)=T$$

$$\Leftrightarrow g(a_1',a_2',\cdots,a_n',1,R-(k-1)) \vee g(a_1',a_2',\cdots,a_n',2,R-(k-2)) \vee \cdots$$

$$\vee g(a_1',a_2',\cdots,a_n',k-1,R-1) \vee g(a_1',a_2',\cdots,a_n',k+1,R-(n-1)) \vee \cdots$$

$$\vee g(a_1',a_2',\cdots,a_n',n-1,R-(k+1)) \vee g(a_1',a_2',\cdots,a_n',n,R-k)=T$$

注：上面总共 n-1 项，其中不含 $g(a_1',a_2',\cdots,a_n',k,R)$

分别考虑 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_2$ 和 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_3$ 两种情形：

1) 当 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_2$，有 $a_k < \max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $a_k = 2W-M$。

由于 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$，第 k 位学生须通过推理排除头上数为 $a_k' = M$ 的情况。

若 $\exists (a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_2$ 满足 $g(A_1,A_2,\cdots,A_n,k,f(A_1,A_2,\cdots,A_n,k))=T$，记

$V=\min\{f(a_1,a_2,\cdots,a_n,k) | (a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_2, g(a_1,a_2,\cdots,a_n,k,f(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)$

$\exists (a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_2$ 满足 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)=V$，

$g(a_1,a_2,\cdots,a_n,k,V)=T$，$\exists i \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{k\}$，

$g(a_1',a_2',\cdots,a_n',i,V_i)=T$。因此 $f(a_1',a_2',\cdots,a_n',i)=V_i$，而 $V_i<V$，

矛盾。

结论：对 $\forall (a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_2$，$g(a_1,a_2,\cdots,a_n,k,R)=F, R \in Z^+$。

2) 当 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \in S_2$，且 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,k) \notin S_1$。有

$a_k = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$a_k = M$，第 k 位学生须通过推理排除头上数为 $a'_k = 2W - M$ 的情况。此时有 $a'_v = \max\{a'_1, a'_2, \cdots, a'_n\}$，因此 $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, v, V_v) \in S_3$。

由前面结论 1) 推得 $g(a_1, a_2, \cdots, a_n, k, V) = T \Leftrightarrow h(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, k, V) = T$

由于 $\forall (a_1, a_2, \cdots, a_n, k) \in S_2$，$g(a_1, a_2, \cdots, a_n, k, R) = F, R \in Z^+$。当 $i \neq v$ 时，有 $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, i) \in S_2$，由上述结论得 $g(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, i, V_i) = F$。因此 $g(a_1, a_2, \cdots, a_n, k, V) = T \Leftrightarrow g(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, v, V_v) = T$。

我们可以从考虑 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) \in S_3$，变为考虑 $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, v, V_v) \in S_3$。这样就形成了一个线性的推理方式，而非先前分支庞大的推理方式。

由于可以只考虑 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) \in S_3$，若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) \notin S_1$，可以转而考虑 $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, v, V_v) \in S_3$，$a'_k = 2W - M < M = a_k$。由于 n 个数不可能无穷的递减，因此在有限次转化后必然达到“终结情形”。

结论：无论 n 个数如何变化，无论从谁开始提问，必然是头上数最大的人最先猜出自己头上的数。

由上述结论，对于 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$，可以定义 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n, k)$ 的递推式：

1) 当 $2W - M \leq 0$ 时，$f(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) = k$
2) 当 $2W - M > 0$ 时

   设 $a'_i = a_i$，其中 $i \neq k$，$a'_k = 2W - M$

   a) 当 v<k 时，$f(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) = f(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, v) + k - v$

   b) 当 v>k 时，$f(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) = f(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n, v) + n - k + v$

由于我们只考虑 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, k) \in S_2$，因此 k 可由 n 个数直接确定，因

此 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n,k)$ 可以简化为 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 。

利用上面的公式，通过计算机编程来解决问题。参见源程序 2。

至此，第一种推广情形就解决了。可以发现 n=3 时情形的证明，对解决一般情形提供了很好的对比，使得我们能够较为轻松地解决问题，这其实也是建立在对 n=3 时的情形的分析之上的。

三、第二种推广

问题描述：

一位逻辑学教授有 n $(n \ge 3)$ 名非常善于推理且精于心算的学生。有一天，教授给他们 n 人出了一道题：教授在每个人脑门上贴了一张纸条并告诉他们，每个人的纸条上都写了一个大于 0 的整数，并将他们分成了两组（一组学生有 m 人，且 $m \ge n/2$，且学生并不知道如何分组），且两组学生头上数的和相等。于是，每个学生都能看见贴在另外 n-1 个同学头上的整数，但却看不见自己的数。

教授轮流向 n 发问：是否能够猜出自己头上的数。经过若干次的提问之后，当教授再次询问某人时，此人突然露出了得意的笑容，把贴在自己头上的那个数准确无误的报了出来。

我们的问题就是：证明是否一定有人能够猜出自己头上的数，若有人能够猜出，则计算最早在第几次提问时有人先猜出头上的数，分析整个推理的过程，并总结出结论。

由于当 n=3 时，m 只可能为 2，即为问题原形，而对于 m=n-1，即第一种推广情形。因此在下文只讨论 n>3，m<n-1 时的情形。

对于每个人判断自己头上的数，依据分组情况不同，头上的数就可能不同。

对 $(A_1,A_2,\cdots,A_n,k)$，第 k 位学生可以看见除自己外所有学生头上的数，并假设在某种分组情况下，可以计算出与自己不同组的学生头上数的和，由题目条件“两组学生头上数的和相等”，可以计算出自己头上的数。由于有 C_n^m 种分组情况，因此相对应头上的数有 C_n^m 种（其中可能也包括了一部分重复的数及非正整数）。

定义：

定义 1： 用 n+1 元组 $(A_1,A_2,\cdots,A_n,k)$， $A_1,A_2,\cdots,A_n \in Z^+$， $k \in \{1,2,\cdots n\}$ 来描述推理过程中的一种情形，其中 n 个人头上数分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，从第一位学生开始提问，且当前的被提问者为第 k 位学生。

性质 F_1：对于 n+1 元组 $(A_1,A_2,\cdots,A_n,k)$，第 k 位学生可以不依靠别人的回

答进行推理，能够直接判断出自己头上数，并称 n+1 元组描述的情形为“终结情形”。

性质 F_2：对于 n+1 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，$A_k < \max\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，并称 n+1 元组描述的情形为“一类情形”。

性质 F_3：对于 n+1 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，$A_k = \max\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，并称 n+1 元组描述的情形为“二类情形”。

定义 2：集合 $S_1 = \{(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) | (A_1, A_2, \cdots, A_n, k) 满足性质 F_1\}$。

定义 3：集合 $S_2 = \{(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) | (A_1, A_2, \cdots, A_n, k) 满足性质 F_2\}$。

定义 4：集合 $S_3 = \{(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) | (A_1, A_2, \cdots, A_n, k) 满足性质 F_3\}$。

定义 5：若对于 n+1 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$

1) 若第 k 位学生不能够猜出头上的数，记 $f(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) = +\infty$。
2) 若第 k 位学生能够猜出头上的数，记 $f(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$ 为从第一位学生开始提问直到猜出头上的数的过程中总共的提问次数。

定义 6：对于 n+1 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，记 $g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, R) \in \{T, F\}$（表示真或假），$R \in Z^+$，表示当三位学生头上的数分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，第 k 位学生是否在恰在第 R 次提问时最先猜出头上的数为 a_k。

定义 7：对于 n+1 元组 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，记 $h(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, R) \in \{T, F\}$（表示真或假），$R \in Z^+$，表示当三位学生头上的数分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，第 k 位学生是否能够在第 R 次提问时排除头上的数为 a_k 的情况。

定义 8：对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，记 $M = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$，

$W = \max\{A_1, \cdots, A_{k-1}, A_{k+1}, \cdots, A_n\}$。

定义 9：对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，用 X 指代第 k 位学生推测的任意一种分组情况。定义 $G(X)$ 为第 k 位学生假设分组 X 情况下两组学生头上数的和。

定义 10：对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，当第 k 学生在考虑某一可能分组的情况下，

记 A_k' 为所推测出的头上数的可能值。

定义 11：对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，定义 $At_1 \geq At_2 \geq \cdots \geq At_{n-1}$，其中

$$\{t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}\} = \{1, 2, \cdots n\} \setminus \{k\}$$ 。

定义 12：对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，定义分组 T：选取第 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 位学生为一组，剩下的学生为另一组（第 k 位学生在这一组）。则

$$G(T) = \sum_{i=1}^{m} At_i$$

对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，考虑分组 T 的情况，$G(T) = \sum_{i=1}^{m} At_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i + A_k'$，显然 $A_k' = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i \geq At_1$（第一个求和符号有 m 项，第二个求和符号有 n-1-m 项，由于 $m \geq n/2 \geq n-m > n-1-m$，且 $At_1 \geq At_2 \geq \cdots \geq At_{n-1}$）。

对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$ 任意一个分组 X，设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\} = \{1, 2, \cdots n\} \setminus \{k\}$

1) 当与第 k 位学生不同组的学生有 m 人时，设 $G(X) = \sum_{i=1}^{m} Ax_i$（m 项）。

显然有 $G(T) = \sum_{i=1}^{m} At_i \geq \sum_{i=1}^{m} Ax_i = G(X)$

$$A_k' = \sum_{i=1}^{m} Ax_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} Ax_i = 2\sum_{i=1}^{m} Ax_i - \sum_{i=1}^{m} Ax_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} Ax_i = 2\sum_{i=1}^{m} Ax_i - \sum_{i=1}^{n-1} Ax_i = 2G(X) - M$$

2) 当与第 k 位学生同组的学生有 m 人时，设 $G(X) = \sum_{i=1}^{n-m} Ax_i$（n-m 项）。

显然有 $G(T) = \sum_{i=1}^{m} At_i \geq \sum_{i=1}^{n-m} At_i \geq \sum_{i=1}^{n-m} Ax_i = G(X)$

$$A_k' = \sum_{i=1}^{n-m} Ax_i - \sum_{i=n-m+1}^{n-1} Ax_i = 2\sum_{i=1}^{n-m} Ax_i - \sum_{i=1}^{n-m} Ax_i - \sum_{i=n-m+1}^{n-1} Ax_i = 2\sum_{i=1}^{n-m} Ax_i - \sum_{i=1}^{n-1} Ax_i = 2G(X) - M$$

考虑 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_1$ 的条件：

I. 当 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$ 。

考虑在分组 T 的情况下，$A_k < \max\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} = At_1 \le A'_k$，这种情况不同于实际情况，需要进行推理。得到结论：$\forall (A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$，$(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \notin S_1$。

II. 当 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$。

考虑实际分组 B 的情况

1) 当与第 k 位学生不同一组的学生有 m 人时，$G(B) = \sum_{i=1}^{m} Ab_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} Ab_i + A_k$。在分组 T 的情况下，有

$$A'_k = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i \ge \sum_{i=1}^{m} Ab_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} Ab_i = A_k。$$

2) 当与第 k 位学生同一组的学生有 m 人时，$G(B) = \sum_{i=1}^{n-m} Ab_i = \sum_{i=n-m+1}^{n-1} Ab_i + A_k$。当 $m = n/2$ 时，即为上面一种情况，因此只考虑 $m > n/2$

在分组 T 的情况下，有 $A'_k = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i > \sum_{i=1}^{n-m} Ab_i - \sum_{i=n-m+1}^{n-1} Ab_i = A_k$。

要使得 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_1$，必然要满足 $A_k = A'_k$。因此实际分组 B 只可能是上面第一种情况，且满足 $\sum_{i=1}^{m} Ab_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} Ab_i = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i$，显然 $\sum_{i=1}^{n-1} A_i = \sum_{i=1}^{m} Ab_i + \sum_{i=m+1}^{n-1} Ab_i = \sum_{i=1}^{m} At_i + \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i$，因此可得 $\sum_{i=1}^{m} Ab_i = \sum_{i=1}^{m} At_i$，即 $G(B) = G(T)$。

显然 $G(X) \le G(T) = G(B)$，在此条件下，若存在可能的分组 C 满足 $G(C) < G(B)$，$A'_k = 2G(C) - M < 2G(B) - M = A_k$。显然由于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_1$，必然有 $A'_k \le 0$，即 $2G(C) - M \le 0$。

若不存在可能的分组 C 满足 $G(C) < G(B)$，即任意分组 $G(X) = G(B)$，则 $At_1 = At_2 = \cdots = At_{n-1}$。

进一步分析对可能的分组 C 满足 $G(C) < G(B)$，何时满足

$2G(C)-M\le 0$。分两种情况考虑：

1) 当 $At_2, At_3, \cdots, At_{n-1}$ 不全相等时，必然有 $At_2 > At_{n-1}$，考虑如下分组 C：第 $t_1, t_2, t_4 \cdots, t_{m-1}, t_m, t_{n-1}$ 位学生为一组，第 $k, t_2, t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_{n-2}$ 位学生为一组，此时显然有 $G(C)=At_1+\sum_{i=3}^{m}At_i+At_{n-1}<\sum_{i=1}^{m}At_i=G(B)$。

   需满足 $2G(C)-M\le 0$，即 $G(C)\le M-G(C)$，因此 $At_1+\sum_{i=3}^{m}At_i+At_{n-1}=G(C)\le M-G(C)=At_2+\sum_{i=m+1}^{n-2}At_i$。另一方面，$At_1\ge At_2, At_3\ge At_{m+1}, At_4\ge At_{m+2}, \cdots, At_{n-m}\ge At_{n-2}$，而 $m\ge n-m$

   因此 $At_1+\sum_{i=3}^{m}At_i+At_{n-1}>At_1+\sum_{i=3}^{m}At_i\ge At_1+\sum_{i=3}^{n-m}At_i\ge At_2+\sum_{i=m+1}^{n-2}At_i$

   矛盾。因此，$\forall(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$ 满足 $At_2 > At_{n-1}, (A_1, A_2, \cdots, A_n, k)\notin S_1$。

2) 当 $At_2, At_3, \cdots, At_{n-1}$ 全相等时，不妨设，$At_1=p$，$\forall i\in\{2,3,\cdots,n-1\}, At_i=q$。

   考虑分组C：m个头上数为q的学生为一组，剩下的学生为一组（第k位学生在这组中）。

   由于 $2G(C)-M\le 0$，即 $2mq-[p+(n-2)q]\le 0$，因此 $(2m-n+2)q\le p$。

   1. 当 $m>n/2$ 时，再来考虑分组D：头上数是p的学生与n-m-1个头上数是q的学生在一组，剩下学生为一组。由于 $m>n/2$，因此 $G(D)<G(B)$。

      由于 $2G(D)-M\le 0$，因此 $2[p+(n-m-1)q]\le a+(n-2)b$，因此 $p\le(2m-n)q$，观察得到的两个不等式，显然矛盾，因此当 $m>n/2$ 时，$\forall(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$ 满足 $At_1 > At_{\text{n-1}}, (A_1, A_2, \cdots, A_n, k)\notin S_1$。

   2. 当 $m=n/2$ 时，可以得到 $A_k=\sum_{i=1}^{m}At_i-\sum_{i=m+1}^{n-1}At_i=At_1=p$，且 $2q\le p$。

因此，$(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)\in S_1$ 的条件为：

1. $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)\in S_3$
2. $At_1=At_2=\cdots=At_{n-1}$ 或

$$m=n/2, p,q\in Z^+, 2q\le p, A_k=At_1=p, \forall i\in\{2,3,\cdots,n-1\}, At_i=q$$

分情况进行讨论 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)\notin S_1$ 的情况：

I. 对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)\in S_2$

若 $\exists(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$，$g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, f(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)) = T$，记 $V = \min\{f(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) | (A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2, g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, f(A_1, A_2, \cdots, A_n,$

$\exists(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$ 满足 $f(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) = V$，$g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, V) = T$。

若第 k 位学生能够猜出自己头上的数，则他一定要通过推理排除头上数所有可能情况中与实际不相等的值。

由于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$，即 $A_k < \max\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$，因此 $\max\{A_1, A_2, \cdots A_n\} = \max\{At_1, At_2, \cdots, At_{n-1}\}$。考虑分组 T 的情况，$A_k < \max\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} = \max\{At_1, At_2, \cdots, At_{n-1}\} = At_1 \le A'_k$，因此需要排除这种情况。令 $A'_i = A_i, i \in \{t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}\}$。

$$g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, R) = T$$

$$\Rightarrow h(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, k, R) = T$$

$$\Leftrightarrow g(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_1, Rt_1) \vee g(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_2, Rt_2) \vee \cdots$$

$$\vee g(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_{n-1}, Rt_{n-1}) = T$$

注：上面 $Rt_1, Rt_2, \cdots, Rt_{n-1} \in Z^+$ 为代定变量，显然有

$Rt_1, Rt_2, \cdots, Rt_{n-1} < R$，由于具体值与结论无关，因此不必讨论。

1) 当 $A'_k > At_1$

则可得 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t) \in S_2, t \in \{t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}\}$。

$\exists \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，使得 $g(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_i, Vt_i) = T$，

$f(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_i) = Vt_i$，而 $Vt_i < V$，矛盾。

因此得到结论：对于 $\forall(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$，若在分组 T 的情况下满足 $A'_k > At_1$，则 $g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, R) = F, R \in Z^+$。

2) 当 $A'_k = At_1$

由于，因此等号成立的条件为 $A'_k=\sum_{i=1}^{m}At_i-\sum_{i=m+1}^{n-1}At_i=At_1$，由于 $At_1\ge At_2\ge\cdots\ge At_{n-1}$，因此仅当 $m=n/2$ 存在这种情况，此时 $At_2=At_3\cdots=At_{n-1}$。

1. 若 $At_1=At_2$

考虑实际分组 B 的情况，显然 $Ab_1=Ab_2\cdots=Ab_{n-1}$，

$A_k=\sum_{i=1}^{m}Ab_i-\sum_{i=m+1}^{n-1}Ab_i=Ab_1$，此时 $(A_1,A_2,\cdots,A_n,k)\notin S_2$。

2. 若 $At_1>At_2$

显然 $(A'_1,A'_2,\cdots,A'_n,t_1)\in S_2$，对 $\forall i\in\{2,3,\cdots,n\}$，$(A'_1,A'_2,\cdots,A'_n,t_i)\in S_2$。

若 $\exists i\in\{2,\cdots,n-1\}$，$g(A'_1,A'_2,\cdots,A'_n,t_i,Vt_i)=T$，$f(a'_1,a'_2,\cdots,a'_n,t_i)=Vt_i$，而 $Vt_i<V$，矛盾。

因此 $g(A_1,A_2,\cdots,A_n,k,V)=T\Rightarrow g(A'_1,A'_2,\cdots,A'_n,t_1,Vt_1)=T$。

设 $At_1=p$，$\forall i\in\{2,3,\cdots,n-1\},At_i=q$。

由于 $m=n/2$，对第 k 位学生只有两种本质不同的分组情况，即第 k 位学生与第 t_1 位学生在同一组或不在同一组，两种情况对应头上数的可能值分别是：

$$A_k=\sum_{i=m}^{n-1}At_i-\sum_{i=1}^{m-1}At_i=2q-p \text{ 及 } A'_k=\sum_{i=1}^{m}At_i-\sum_{i=m+1}^{n-1}At_i=p$$

设 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n-1\},A't_i=At_i$，对 $(A'_1,A'_2,\cdots,A'_n,t_1)$，第 t_1 位学生只有两种本质不同的分组情况，两种情况对应头上数的可能值分别是：

$A't_1=p$ 及 $A''t_1=2q-p$

设 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{t_1\}$，$A''_i=A'_i$。

$g(A'_1,A'_2,\cdots,A'_n,t_1,R)=T$

$\Rightarrow h\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', t_1, R\right) = T$

$\Leftrightarrow g\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', k, Rk\right) \vee g\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', t_2, Rt_2\right) \vee \cdots$

$\vee g\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', t_{n-1}, Rt_{n-1}\right) = T$

显然 $\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', k\right) \in S_3$， 对 $\forall t \in \{2, 3, \cdots, n\}$，$\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', t_i\right) \in S_2$。

若 $\exists t \in \{2, \cdots, n-1\}$， $g\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', t_i, V't_i\right) = T$，$f\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', t_i\right) = V't_i$，而 $V't_i < V$，矛盾。

因此 $g\left(A_1', A_2', \cdots, A_n', t_1, Vt_1\right) = T \Rightarrow g\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', k, V'k\right) = T$

考虑 $\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', k\right)$， $A''t_1 = 2q - p$，$\forall i \in \{2, 3, \cdots, n-1\}, A''t_i = q$，对第 k 位学生只有两种本质不同的分组情况，两种情况对应头上数的可能值分别是：

$A_k'' = p$ 及 $A_k''' = 2q - p$

设 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{k\}$，且 $i \neq k$， $A_i''' = A_i''$ 。

$g\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', k, V'k\right) = T$

$\Rightarrow g\left(A_1''', A_2''', \cdots, A_n''', t_2, V''t_2\right) \wedge g\left(A_1''', A_2''', \cdots, A_n''', t_3, V''t_3\right) \wedge \cdots$

$\wedge g\left(A_1''', A_2''', \cdots, A_n''', t_{n-1}, V''t_{n-1}\right) = T$

定义：

$V_{\min} = \min\{ f\left(A_1''', A_2''', \cdots, A_n''', t_2\right), f\left(A_1''', A_2''', \cdots, A_n''', t_3\right), \cdots, f\left(A_1''', A_2''', \cdots$

显然 $f\left(A_1'', A_2'', \cdots, A_n'', k\right) > V_{\min}$

当只有两种本质不同的分组情况时，排除其一即可猜出头上的数，利用上述结论讨论 $f\left(A_1, A_2, \cdots, A_n, k\right)$ 。

a) 当 $k > t_1$

$f\left(A_1, A_2, \cdots, A_n, k\right)$

$$=f\left(A_1',A_2',\cdots,A_n',t_1\right)+k-t_1$$

$$=f\left(A_1'',A_2'',\cdots,A_n'',k\right)+(n-k+t_1)+(k-t_1)$$

$$>V_{\min}+n$$

b) 当$k<t_1$

$$f\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,k\right)$$

$$=f\left(A_1',A_2',\cdots,A_n',t_1\right)+n+k-t_1$$

$$=f\left(A_1'',A_2'',\cdots,A_n'',k\right)+(t_1-k)+(n+k-t_1)$$

$$>V_{\min}+n$$

由于 $f\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,k\right)=V$，$\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,t_1\right)\in S_3$，$\forall i\in\{2,3,\cdots,n\}$，$\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,t_i\right)\in S_2$，因此对$(A_1,A_2,\cdots,A_n,k)$，只有第k位学生和第$t_1$位学生两人可能最先猜出头上的数。

对第t_1位学生也只有两种本质不同的分组情况，即第k位学生与第t_1位学生在同一组或不在同一组，两种情况对应头上数的可能值分别是：

$At_1=p$ 及 $A''''t_1=2q-p$

设$\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{k\}$，$A_i''''=A_i$ 。

比较后可发现$\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$A_i''''=A_i'''$

$$h\left(A_1''',A_2''',\cdots,A_n''',t_1,Vt_1\right)=T$$

$$\Leftrightarrow g\left(A_1''',A_2''',\cdots,A_n''',t_2,V''t_2\right)\wedge g\left(A_1''',A_2''',\cdots,A_n''',t_3,V''t_3\right)\wedge\cdots$$

$$\wedge g\left(A_1''',A_2''',\cdots,A_n''',t_{n-1},V''t_{n-1}\right)=T$$

由于对第t_1位学生只有两种本质不同的分组情况，因此排除其一即可猜出头上的数，即$f\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,t_1\right)=Vt_1$。

因而$f\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,t_1\right)=Vt_1<V_{\min}+n$

显然$f\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,t_1\right)<f\left(A_1,A_2,\cdots,A_n,k\right)$

则说明第 $t_١$ 位学生将在第 k 位学生之前猜出头上的数，说明 $g(A_١, A_٢, \cdots, A_n, k, V) = F$，矛盾。

得到结论：对于 $\forall(A_١, A_٢, \cdots, A_n, k) \in S_٢$，若在分组 T 的情况下满足 $A'_k = At_1$，则 $g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, R) = F, R \in Z^+$。

因此综合考虑上述所有情况，得到结论：对于 $\forall(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$，$g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, R) = F, R \in Z^+$。

II. 对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_3$

并非所有 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_3$，第 k 位学生都能猜出头上的数，下面举一个例子：

当 $n = ٦, m = ٣$ 时，考虑 $(1,1,2,3,3,4,6) \in S_3$（实际分组为 1，3，3 为一组，1，2，4 为一组），对于第 6 位学生须排除头上数是 6 的可能（分组为 2，3，3 为一组，1，1，6 为一组），记 $V = f(1,1,2,3,3,4,6)$，

$g(1,1,2,3,3,4,6,V) = T \Rightarrow h(1,1,2,3,3,6,6,V') = T$，由前面结论可得

$h(١,١,٢,٣,٣,٦,٦,V) = T \Leftrightarrow g(١,١,٢,٣,٣,٦,١,V_١) \vee g(١,١,٢,٣,٣,٦,٢,V_٢) \vee \cdots \vee g(١,١,٢,٣,٣$

而 $\forall t \in \{1,2,\cdots,5\}$，$(١,١,٢,٣,٣,٦,i) \in S_٢$，即 $g(١,١,٢,٣,٣,٦,i,V_i) = F$。

因此 $g(١,١,٢,٣,٣,٤,٦,V) = F$，即第 6 位学生不能最先猜出头上的数。

而 $\forall t \in \{1,2,\cdots,5\}$，$(1,1,2,3,3,4,i) \in S_2$，考虑到前面讨论 I，因此没有人能猜出头上的数。

由于对于能够猜出头上数的情形，在形式上不具特殊性，因此我们只有在推理过程中不断判定是否有可能猜出头上的数。

对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，若 $A_k < \sum_{i=١}^{m} At_i - \sum_{i=m+١}^{n-١} At_i$，则分组 T 的情况下，$A'_k = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i > A_k = \max\{1,2,\cdots,n\}$，

$\forall i \in \{١,٢,\cdots,n-١\}, A't_i = At_i$，则 $\forall t \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，

$(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_i) \in S_2$，由前面讨论 I 可得 $g(A_١, A_٢, \cdots, A_n, k, V) = F$

显 然 有 $A_k \le \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i$， 因 此 判 定 条 件 之 一 为 $A_k = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i$ 。

可能有多个学生头上的数同为最大数，若有多个学生头上的数同为最大数，则 $At_1 = A_k$ 。下面分情况讨论：

1. 当 $At_1 > At_{n-1}$ 或 $m > n/2$

则分组 T 的情况下，$A'_k = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i > At_1 = A_k$，由前面的判定条件，在这种情形下，第 k 位学生不能够最先猜出头上的数。

当 $At_i = A_k$，利用前面结论可知第 t_i 位学生不能够最先猜出头上的数。而当 $At_i < A_k$，$(A_1, A_2, \cdots, A_n, t_i) \in S_2$ 。因此没有人能猜出头上的数。

2. 当 $At_2 = At_1 = A_k$， $m = n/2$

   a) 若 $At_2 > At_{n-1}$，此时即为第 1)种情况。

   b) 若 $At_2 = At_3 = \cdots = At_{n-1}$， 则 所 有 n 个 数 都 相 等 ， 此 时 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_1$ 。

3. 当 $At_1 > At_2$， $m = n/2$， $n \ge 5$

显然当 n 为奇数时，必然有 $m > n/2$，即第 1)种情况。因此下面只考虑 n 为偶数。

   a) 若 $At_2 > At_{n-1}$，此时即为第 1)种情况。

   b) 若 $At_2 = At_3 = \cdots = At_{n-1}$

   对 第 k 位 学 生 只 有 两 种 本 质 不 同 的 分 组 ， 不 妨 设 $A_k = At_1 = p$， $\forall i \in \{2, 3, \cdots, n-1\}, At_i = q$ 。

   i. 若 $2q \le p$， $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_1$ 。

   ii. 若 $2q > p$， 考 虑 须 排 除 的 情 况 ， $A'_k = 2q - p$， 令 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}, A' t_i = At_i$ 。

   显然 $\forall i \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$， $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_i) \in S_2$

$$g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, V) = T \Rightarrow g(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_1, Vt_1) = T$$

考虑 $\left(A_1', A_2', \cdots, A_n', t_1\right)$，则 $A''t_{١} = ٢q - p$，令 $\forall i \in \{٢,٣,\cdots,n-١\}, A''t_i = A't_i$。

显然 $(A_{١}', A_{٢}', \cdots, A_n', k) \in S_{٢}$，$\forall i \in \{2,3,\cdots,n-1\}, A''t_i = At_i = q$。观察 $A_{١}'', A_{٢}'', \cdots, A_n''$，可以发现即为第1)种情况。因此，第k位学生不能够最先猜出头上的数。

当 $At_i = A_k$，利用前面结论可知第 t_i 位学生不能够最先猜出头上的数。而当 $At_i < A_k$，$(A_1, A_2, \cdots, A_n, t_i) \in S_2$。因此没有人能猜出头上的数。

4. 当 $At_{١} > At_{٢}$，且 $n = 4$

则必然有 $m = ٢$，显然可以得到 $At_{٢} = At_{٣}$，不妨设 $A_k = At_{١} = p$，$At_2 = At_3 = q$，并称这种两两相等的情形为“A类情形”。

对第k位学生只有两种本质不同的分组方式，考虑须排除的情况，$A_k' = 2q - p, A't_1 = p, A't_2 = A't_3 = q$。

显然 $\forall t \in \{2,3\}$，$(A_1', A_2', \cdots, A_n', t_i) \in S_2$

$$g\left(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, V\right) = T \Rightarrow g\left(A_1', A_2', \cdots, A_n', t_1, Vt_1\right) = T$$

对第 t_1 位学生只有两种本质不同的分组方式，考虑须排除的情况，$A''t_1 = 2q - p, A_k'' = 2q - p, A''t_2 = A''t_3 = q$。又回到了“A类情形”

又由于四数中始终有一个数在减小，因此有限次推理之后，必然达到“终结情形”，此时满足条件为 $2q \le p$。

因此一定有人能够猜出头上的数。但具体由第k位学生和第 t_1 位学生中哪一人最先猜出头上的数需要具体计算后才能确定。

至此，讨论完所有存在两个以上的学生头上为最大数的情形。

可能的分组C满足 $G(C) < G(B)$，进行讨论。

在这种情况下，$A_k' = ٢G(C) - M < ٢G(B) - M = A_k$。令 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n-1\}, A't_i = At_i$。

1) 当 $A'_k > At_1$ 时

$\forall i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，$(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_i) \in S_2$，由前面讨论 I 可得 $g(A_1, A_2, \cdots, A_n, k, V) = F$。因此第 k 位学生不能够最先猜出头上的数。由 $At_1 < A'_k < A_k$，因此 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，$(A_1, A_2, \cdots, A_n, t_i) \in S_2$。因此没有人能够猜出头上的数。

2) 当 $A'_k = At_1$ 时

此时 $A't_1 = A'_k = \max\{A'_1, A'_2, \cdots, A'_n\}$，可以利用前面对多个学生头上数同为最大数时的讨论的结果：

1. 当 $m > n/2$（讨论多个最大数时的讨论 1）

对 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$，考虑 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, i)$，第 i 位学生不能够最先猜出头上的数。即没人能猜出头上的数。因此，对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，第 k 位学生不能够最先猜出头上的数。

2. 当 $A't_2 = A't_1 = A'_k$，$m = n/2$（讨论多个最大数时的讨论 2）

a) 当 $A't_2 > A't_{n-1}$

对 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$，考虑 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, i)$，第 i 位学生不能够最先猜出头上的数。即没人能猜出头上的数。因此，对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，第 k 位学生不能够最先猜出头上的数。

b) 当 $A't_2 = A't_{n-1}$

由于 $A'_k = A't_1 = A't_2 = \cdots = A't_{n-1}$，因此可以得知 $A_k = At_1 = At_2 = \cdots = At_{n-1}$，即 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_1$。

3. 当 $A't_2 < A't_1$，$n \geq 5$，$m = n/2$（讨论多个最大数时的讨论 3）

a) 当 $A't_2 > A't_{n-1}$

对 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$，考虑 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, i)$，第 i 位学生不能够最先猜出头上的数，即没人能猜出头上的数。因此，对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，第 k 位学生不能够最先猜出头上的数。

b) 当 $A't_2 = A't_{n-1}$

不妨设 $A'_k = A't_1 = p$， $\forall i \in \{2,3,\cdots,n-1\}, A't_i = q$ 。

i. 当 $2q \le p$

可以由之前讨论得到 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, k) \in S_1$，于是第 k 位学生头上的数仅有一种可能情况，不属于讨论的范围。

ii. 当 $2q > p$

对 $\forall t \in \{1,2,\cdots,n\}$，考虑 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, i)$，第 i 位学生不能够最先猜出头上的数，即没人能猜出头上的数。因此，对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k)$，第 k 位学生不能够最先猜出头上的数。

4. 当 $A't_2 < A't_1$，且 $n = 4$（讨论多个最大数时的讨论 4）

显然可以得到 $A't_2 = A't_3$，此时不存在实际划分 B，使得 $G(C) < G(B)$，即这种情况不属于讨论的范围。

3) 当 $A'_k < At_1$ 时

$(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n, t_1) \in S_2$，因此，第 k 位可能最先猜出头上的数，因此需要继续推理。

结论：对于 $(A_1, A_2, \cdots, A_n, k) \in S_2$，第 k 位学生可能最先猜出头上的数，需要继续推理的判定条件为： $A_k = \sum_{i=1}^{m} At_i - \sum_{i=m+1}^{n-1} At_i = 2G(T) - M$， 即 $G(B) = G(T)$，且对任意可能分组 C 符合 $G(C) < G(B)$，满足 $A'_k < At_1$。

当 $n = 4, m = 2$，考虑 $(A_1, A_2, A_3, A_4, k) \in S_3$

1) 当 $A_k = At_1$，由前面讨论多个最大数时的讨论 4，及，一定有人能够猜出头上的数。
2) 当 $A_k > At_1$，显然 $A_k = At_1 + At_2 - At_3$，因此 $At_1 + At_2 - At_3 > At_1$，即 $At_2 > At_3$。第 k 位学生头上数其余两种可能值， $A'_k = At_1 + At_3 - At_2 < At_1$，$A''_k = At_2 + At_3 - At_1 < At_1$。由前面结论，需要继续推理。

由于仅有这两种情况，即不存在情况使得没有人能够猜出头上的数。且推理时四个数始终在减小，因此经过有限次推理之后，必然达到“终结情形”。

而对于第一种推广情形，即$n=4,m=3$，必然有人能猜出自己头上的数。

因此$n=4$时的一切情况，必然有人能猜出自己头上的数。

由于现在的推理在加强判定的情况下，依然可能出现多种考虑情况。所以推理已不是线性的推理，整个推理过程将成为树状结构。

由于分组情况繁多，而且判定方式也比较复杂，因此这时计算$f(A_1,A_2,\cdots,A_n,k)$的值已经非人力能够解决，但是已经可以编程解决问题了参见源程序3。

结束语

本文深入地分析了一个逻辑推理问题，从综观全局的角度来考虑问题的本质联系，而非一味单纯地从每个人思想出发，简化了最烦琐的“思维嵌套”，并在此基础上建立了递推关系，因此避免了问题规模随着推理次数急剧增长，有效地解决了问题。并通过对比将问题推广到更为一般的情形，尤其对于第二种推广情形，存在极为烦琐的讨论，但其讨论问题的核心思想是一致的。对解决逻辑推理的问题提供了一种可以借鉴的方法。

参考文献

《CTSC2001 分析》

《算法与数据结构》　傅清祥　王晓东　编著