第六章

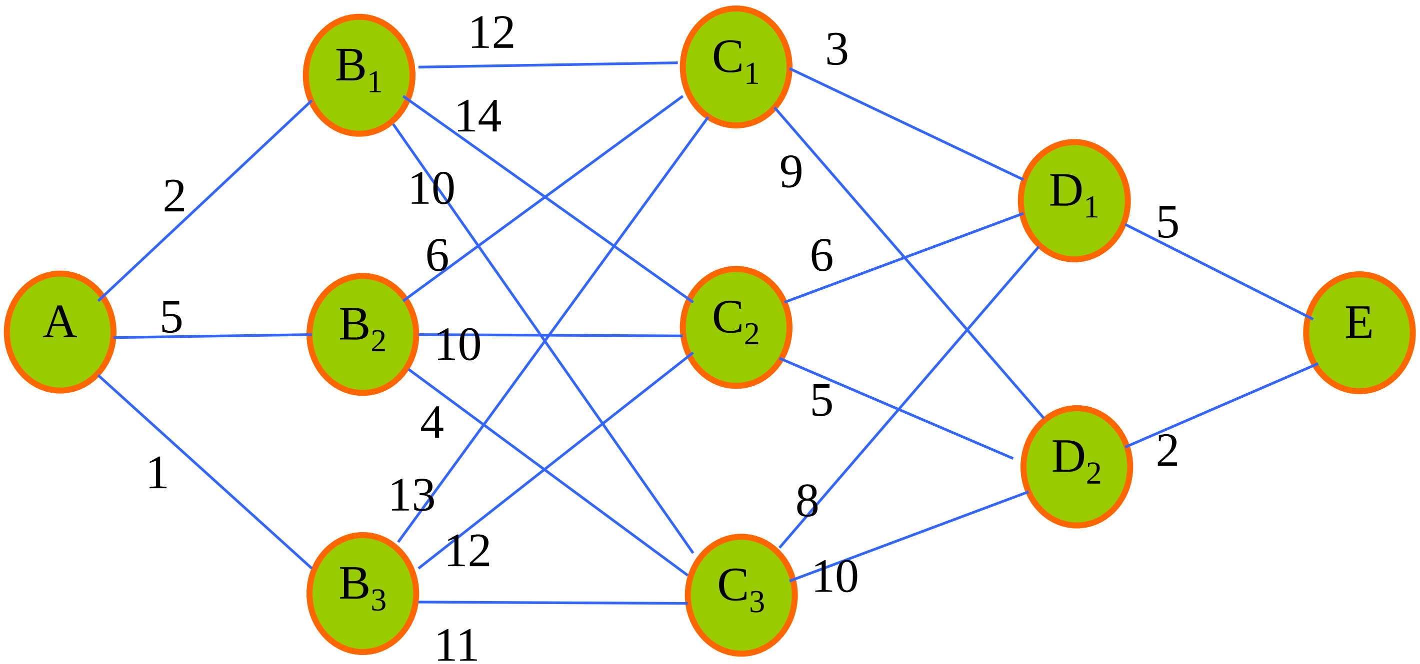
动 态 规 划

第六章之第一节

多阶段决策过程

最短路线问题

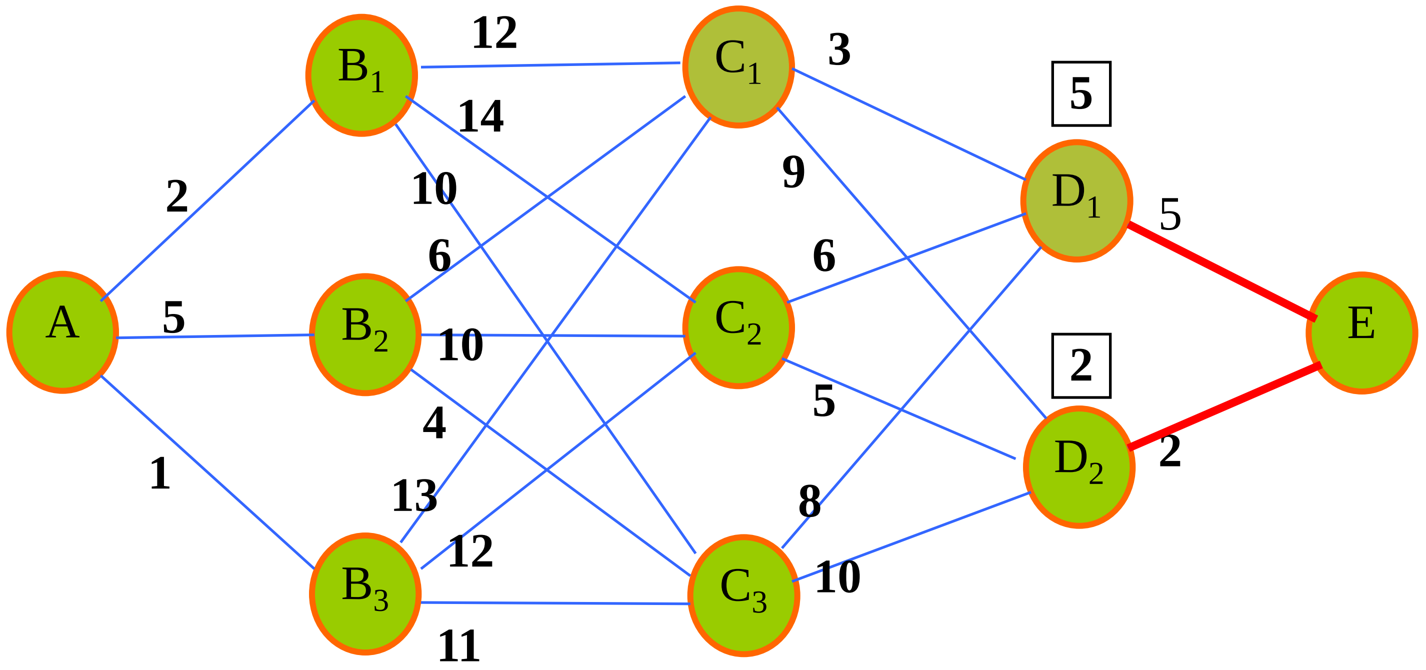
- 求 A 到 E 的铺管线路，使得总距离为最短



- 穷举法
  - 加法：**3×18=54** 次　　　比较：**17** 次

最短路线问题

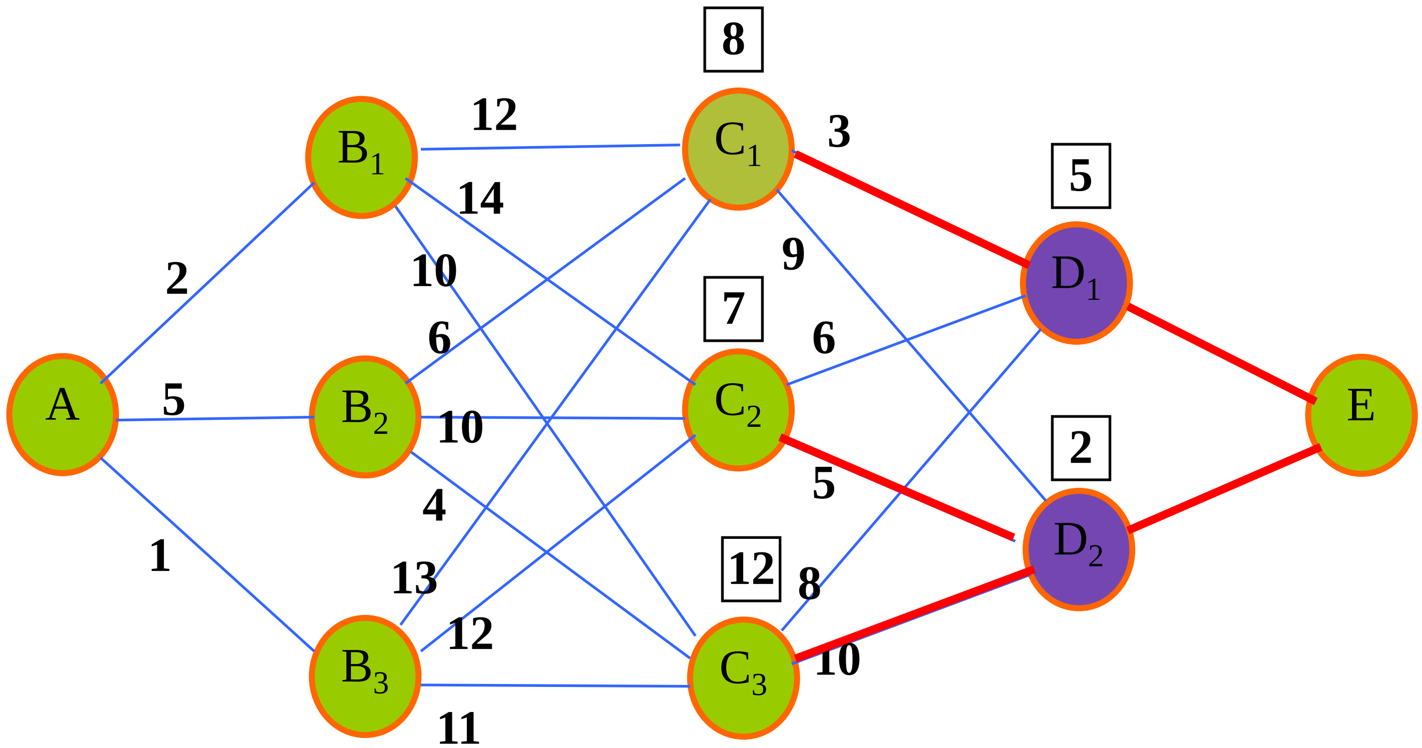
- D_1、D_2 到 E 的最短线路



- 加法：**0** 次　　　比较：**0**次

最短路线问题

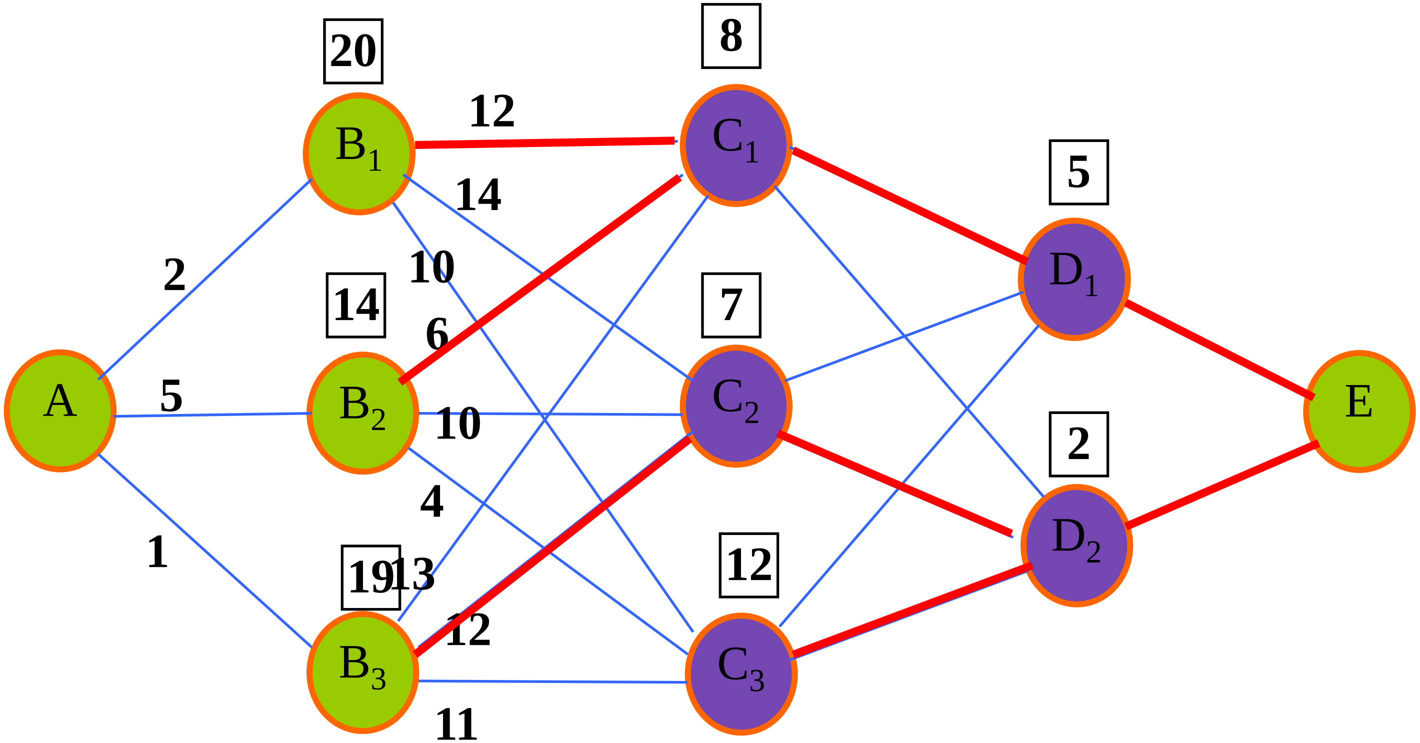
- C_1、C_2、C_3 到 E 的最短线路



- 加法：0+6 次　　　　比较：0+3 次

最短路线问题

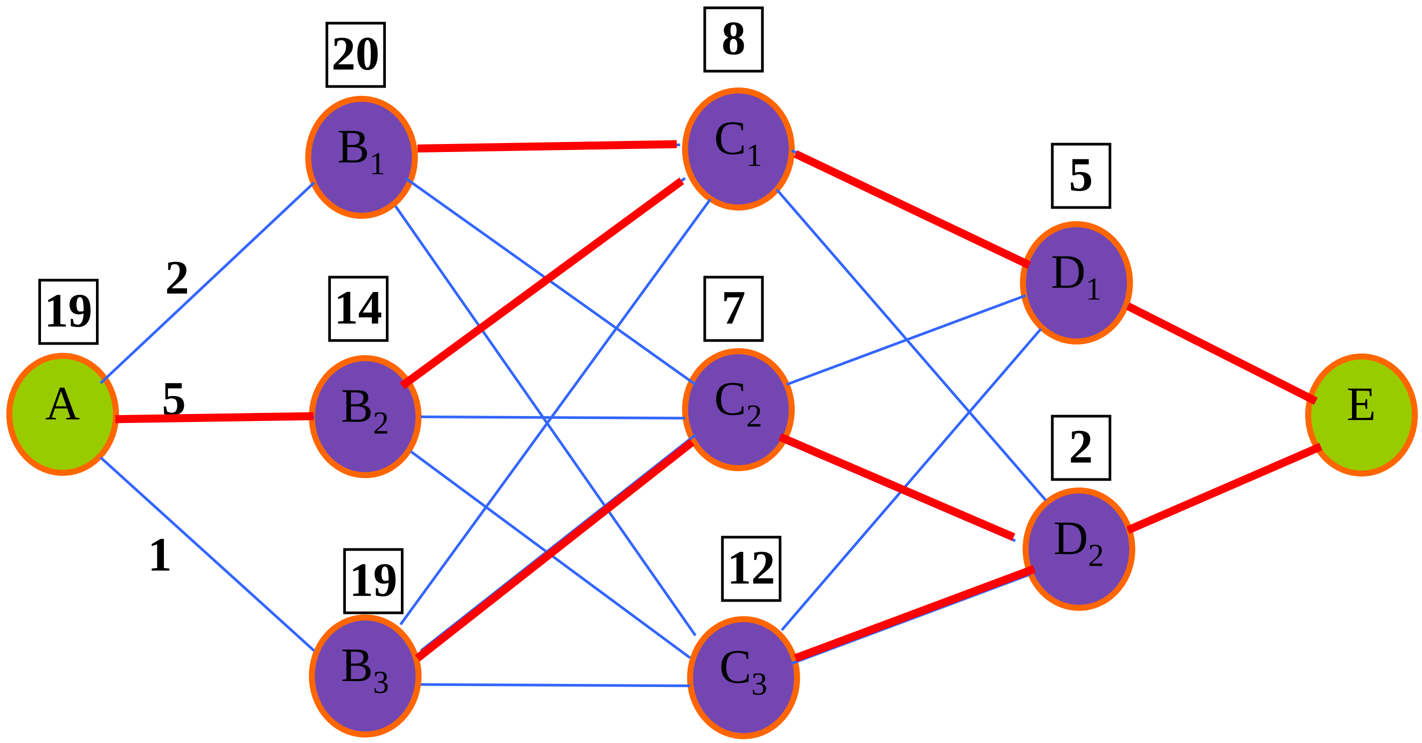
- B_1、B_2、B_3 到 E 的最短线路



- 加法：0+6+9 次　　　比较：0+3+6 次

最短路线问题

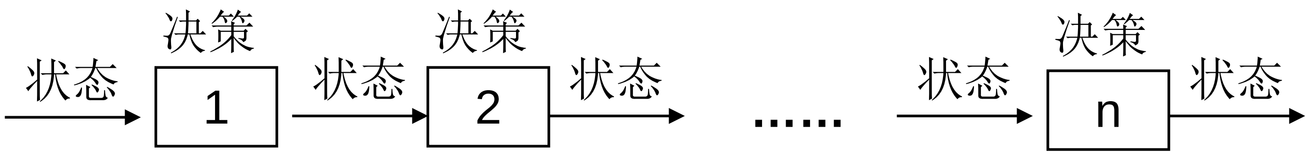
- A 到 E 的最短线路



- 加法：0+6+9+3 次　　比较：0+3+6+2次

多阶段决策过程

- 可将过程分为若干互相联系的阶段，每个阶段均需作出决策，每阶段的决策依赖于当前阶段的初始状态，同时影响下一阶段的初始状态



- 得到一个决策序列，称为策略
- 使整个过程结果最优
- 1951，**R. Bellman** 提出动态规划法

第六章之第二节

基本概念和基本方程

基本概念

- 阶段 k
  - 表示决策顺序的离散量，可按时间或空间划分
- 状态 S_k
  - 表示每个阶段开始时所处的自然状况或条件
  - 可以是数量，也可以是字符；数量状态可以是连续的，也可以是离散的
  - 具有马尔可夫性 (无后效性)
- 状态变量 s_k
  - 描述过程状态的变量

基本概念

- 决策 u_k
  - 从上一状态确定下一状态时所做的选择
  - 是所在状态变量的函数，记为 $u_k(s_k)$
- 允许决策集合 $D_k(s_k)$
  - 第 k 阶段在状态 s_k下，允许采取决策的全体
- 策略 $p_{k,n}(s_k)$
  - 由第k 阶段到终止的每段决策组成的序列
  - 可供选择的策略范围称为允许策略集合，记为 **P**
  - 其中达到最优效果的称为最优策略

基本概念

- 状态转移方程 $s_{k+1}=T_k(s_k, u_k)$
  - 某一状态以及该状态下决策，与下一状态间的函数关系
- 阶段指标函数 $v_k(s_k, u_k)$
  - 从状态 s_k 出发，选择决策 u_k所产生的第 k 阶段数量指标

基本概念

- 指标函数 $V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \ldots, s_{n+1})$
  - 从状态s_k出发，经$s_{k+1}, \ldots, s_{n+1}$产生的过程指标
  - 动态规划要求指标函数具有可分离性
    - 可加性：$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \ldots, s_{n+1}) = v_k(s_k, u_k) + V_{k+1}(s_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, s_{n+1})$
    - 可乘性：$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \ldots, s_{n+1}) = v_k(s_k, u_k) \times V_{k+1}(s_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, s_{n+1})$
- 最优值函数 $f_k(s_k) = \mathrm{opt}\ V_{k,n}(s_k, u_k, \ldots, s_{n+1})$
  - 从状态s_k出发到终止状态的过程，采取最优策略得到的指标函数值

基本方程

$$f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{\text{opt}} [v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})]$$

$$k = n, n-1, \ldots, 1$$

- 边界条件 $f_{n+1}(s_{n+1})=0$

基本思想

- 正确写出基本递推关系和恰当的边界条件
- 多阶段决策过程中，每段的决策选取从全局考虑，与单独该段的最优选择不同
- 由于初始状态已知，最优策略经过的各段状态可逐次变换得到，从而确定最优路线

第六章之第三节

最优性原理和最优性定理

最优性原理

- 作为整个过程的最优策略具有这样的性质：

  无论过去的状态和决策如何，对前面的决策所形成的状态而言，余下的诸决策必须构成最优策略

  - 一个最优策略的子策略总是最优的
  - 是策略最优性的必要条件，而非充分条件！

最优性定理

设阶段编号为 **k = 0,1,…,n-1** 的多阶段决策过程，其允许策略 $p_{0,n-1}^{*} = (u_0^{*}, u_1^{*}, \ldots, u_{n-1}^{*})$ 为最优策略的充要条件是：

对任意一个 ***k*，0<*k*<n-1** 和 $s_0 \in S_0$ 有

$$V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^{*}) = \underset{p_{0,k-1} \in P_{0,k-1}(s_0)}{\operatorname{opt}} \{ V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1} \in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\operatorname{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \}$$

式中 $p_{0,n-1}^{*} = (p_{0,k-1}, p_{k,n-1}), \tilde{s}_k = T_{k-1}(s_{k-1}, u_{k-1})$

第六章之第四节

动态规划与静态规划

逆推解法

- ***n*** **阶段：** $f_n(s_n)=\max\limits_{x_n\in D_n(s_n)} v_n(s_n,x_n)$ $\longrightarrow$ $x_n=x_n(s_n)$
- ***n*-1 阶段：** $f_{n-1}(s_{n-1})=\max\limits_{x_{n-1}\in D_{n-1}(s_{n-1})}[v_{n-1}(s_{n-1},x_{n-1})*f_n(s_n)]$

  其中，$s_n=T_{n-1}(s_{n-1},x_{n-1})$ $\longrightarrow$ $x_{n-1}=x_{n-1}(s_{n-1})$
- ***k*** **阶段：** $f_k(s_k)=\max\limits_{x_k\in D_k(s_k)}[v_k(s_k,x_k)*f_{k+1}(s_{k+1})]$

  其中，$s_{k+1}=T_k(s_k,x_k)$ $\longrightarrow$ $x_k=x_k(s_k)$

- **…**
- **1阶段：** $f_1(s_1)=\max\limits_{x_1\in D_1(s_1)}[v_1(s_1,x_1)*f_2(s_2)]$ $\longrightarrow$ $x_1=x_1(s_1)$

s_1已知，故 $x_1=x_1(s_1)$，$f_1(s_1)$可确定，逆推上去，均可确定。

顺推解法

- **1 阶段：** $f_1(s_2) = \max\limits_{x_1 \in D_1(s_1)} v_1(s_1, x_1)$

  其中， $s_1 = T_1^*(s_2, x_1) \longrightarrow x_1 = x_1(s_2)$

- **2 阶段：** $f_2(s_3) = \max\limits_{x_2 \in D_2(s_2)} [v_2(s_2, x_2) * f_1(s_2)]$

  其中， $s_2 = T_2^*(s_3, x_2) \longrightarrow x_2 = x_2(s_3)$

- **…**
- ***n* 阶段：** $f_n(s_{n+1}) = \max\limits_{x_n \in D_n(s_n)} [v_n(s_n, x_n) * f_{n-1}(s_n)]$

  其中， $s_n = T_n^*(s_{n+1}, x_n) \longrightarrow x_n = x_n(s_{n+1})$

s_{n+1}已知，故 $x_n=x_n(s_{n+1})$，$f_n(s_{n+1})$可确定，逆推上去，各阶段值均可确定。

第六章之第五节

应用举例

资源分配问题

- 总数为 a 的原料用于生产 n 种产品。分配数量 x_i 用于生产第i种产品，收益为$g_i(x_i)$。问如何分配使总收入最大？

$$\max z=g_1(x_1)+g_2(x_2)+\ldots+g_n(x_n)$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a$$

$$x_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,n$$

例子

- 有资金4万元，投资A、B、C三个项目，每个项目的投资效益与投入该项目的资金有关。三个项目A、B、C的投资效益和投入资金的关系见下表

项目 投入资金	A	B	C
1万元	15万吨	13万吨	11万吨
2万元	28万吨	29万吨	30万吨
3万元	40万吨	43万吨	45万吨
4万元	51万吨	55万吨	58万吨

求解

阶段k：每投资一个项目作为一个阶段；
状态变量s_k：投资第 k 个项目前的资金数；
决策变量x_k：第 k 个项目的投资； $0\le x_k\le s_k$
状态转移方程：$s_{k+1}=s_k-x_k$； 递推方程：$f_k(s_k)=\max\{ v_k(s_k, x_k)+f_{k+1}(s_{k+1}) \}$

$k=3$，$0\le x_3\le s_3$，$s_4=s_3-x_3$ ； $f_4(s_4)=0$

背包问题

- 某人背包的承重限度为 a 公斤
- 设有n种物品可选择，第 i 种物品每件重量为 w_i 公斤，每件价值 c_i 元
- 如何装包，使背包中物品的价值最高

机器负荷分配问题

- 某种机器可以在高、低两种负荷下生产。高负荷生产条件下，产量函数为$g=8u$，其中u为投入生产的机器数量，年完好率为$a=0.7$; 低负荷运行时，产量函数为$h=5y$，其中y为投入生产的机器数量，年完好率为$b=0.9$。

  设开始时有1000台完好机器，要制订五年计划，每年年初将完好的机器一部分分配到高负荷生产，剩下的机器分配到低负荷生产，使五年的总产量为最高。

固定资金分配问题

- ***n*种产品均需A,B两种原料，第*k*种产品，用A原料x_k和B原料y_k生产，可获利润 $r_k(x_k, y_k)$**

  若A价格为*a*, B价格为*b*, 总资金 *z*

- 问如何分配，总利润最大？

$$\max \quad \sum_{k=1}^{n} r_k(x_k, y_k)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k = X \\ \sum_{k=1}^{n} y_k = Y \\ aX + bY \le z \\ x_k, y_k \text{为非负整数} \end{cases}$$

生产与存储问题

- 对某产品制定n个阶段的生产计划，满足：
  - 初始库存为零
  - 每阶段最多能生产数量为m
  - 第k阶段对产品的需求量为d_k
  - n 阶段末库存为零
- 如何制定每阶段生产计划，使总成本最小?

设备更新问题

- 一台设备的价格为P，运行寿命为n年
  - 每年维修费用是设备役龄的函数，记为C(t)
  - 旧设备出售的价格记为Q(t)
  - 在n年末，役龄为t的设备残值为R(t)
- 现有一台役龄为T的设备，在使用过程中，使用者每年都面临“继续使用”或“更新”的策略， 如何选择最佳更新策略？

货郎担问题 (TSP)

- 设有n个城市, 其中每两个城市之间都有道路相连,城市i和城市j之间的距离为C_{ij}。
- 从某城市出发周游所有城市,经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发地。
- 求总行程最短的周游路线?

货郎担问题 (TSP)

- **阶段k：** 已经历过的城市个数
- **状态变量：** $s_k=(i, N_k)$，其中i表示当前所在的城市，N_k表示尚未访问过的城市的集合。
- **决策变量：** $u_k=(i, j)$
- **状态转移方程：** $s_{k+1}=T(s_k,u_k)=(j, N_k \setminus \{j\})$
- **最优指标函数：** $f_k(s_k)=f_k(i,N_k)$,表示从城市i出发，经过N_k中每个城市一次且仅一次，最后返回城市1的最短距离。

$$f_k(i, N_k)=\min \{ C_{ij}+f_{k+1}(j, N_{k+1}) \mid j\in N_k \}$$

$$f_{n+1}(s_{n+1})=f_{n+1}(1, \Phi)=0$$

优缺点

- 优点
  - 易于确定全局最优解
  - 能得到一族解
  - 能够利用经验提高求解效率
- 缺点
  - 没有统一模型
  - 应用的局限
  - “维数障碍”