Beweis 2.7 - Lipschitz Stetigkeit

26. Juli 2014

Beh: Es gibt ein $M_K < \infty$ so dass:

$$\left| F\begin{pmatrix} n_1^x \\ n_1^y \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} n_2^x \\ n_2^y \end{pmatrix} \right| \overset{!}{<} M_K \left| \begin{pmatrix} n_1^x \\ n_1^y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_2^x \\ n_2^y \end{pmatrix} \right|$$

mit $n_{1,2}^{x,y} \in K$, K Kompakt, $b(x), c(x,y), d(x) \forall x, y \in X$ endlich und

$$F\begin{pmatrix} n^x \\ n^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^x(b(x) - d(x) - c(x,x)n^x - c(x,y)n^y) \\ n^y(b(y) - d(y) - c(y,y)n^y - c(y,x)n^x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Beweis. Betrachten wir zunächst nur die erste Zeile:

$$\begin{aligned}
& M_K|n_1^x - n_2^x| > |(n_1^x - n_2^x)(b(x) - d(x)) \\
& - ((n_1^x)^2 - (n_2^x)^2)c(x,x) - ((n_1^y)^2 - (n_2^y)^2)c(x,y)| \\
\Leftrightarrow \quad & M_K > \left| b(x) - d(x) - \frac{(n_1^x)^2 - (n_2^x)^2}{|n_1^x - n_2^x|}c(x,x) - \frac{(n_1^y)^2 - (n_2^y)^2}{|n_1^x - n_2^x|}c(x,y) \right| \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{M}_K > \left| \frac{(n_1^x)^2 - (n_2^x)^2}{|n_1^x - n_2^x|} + \frac{(n_1^y)^2 - (n_2^y)^2}{|n_1^x - n_2^x|} \right| \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{M}_K > \left| \underbrace{n_1^x + n_2^x}_{\text{beschränkt}} + \frac{(n_1^y)^2 - (n_2^y)^2}{|n_1^x - n_2^x|} \right|
\end{aligned}$$

somit bleibt nur noch zu zeigen:

$$\left| \frac{(n_1^y)^2 - (n_2^y)^2}{|n_1^x - n_2^x|} \right| < \infty$$

Dank der Ähnlichkeit kann die zweite Zeile identisch umgeformt werden und es bleicht somit zu zeigen:

$$\frac{(n_1^y)^2 - (n_2^y)^2}{|n_1^x - n_2^x|} < \infty \tag{2}$$

$$\frac{(n_1^x)^2 - (n_2^x)^2}{|n_1^y - n_2^y|} < \infty \tag{3}$$

Addition der 1. und 2. Zeile ergibt:

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{(n_1^y)^2 - (n_2^y)^2}{|n_1^x - n_2^x|} + \frac{(n_1^x)^2 - (n_2^x)^2}{n_1^y - n_2^y} \right| < \infty \\
\overset{\text{gleicher Nenner}}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{|((n_1^y)^2 - (n_2^y)^2)(n_1^y - n_2^y)| + |((n_1^x)^2 - (n_2^x)^2)(n_1^x - n_2^x)|}{|n_1^x - n_2^x||n_1^y - n_2^y|} < \infty \\
\overset{\text{3. bin. Formel}}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{|(n_1^y - n_2^y)^2(n_1^y + n_2^y)| + |(n_1^x - n_2^x)^2(n_1^x + n_2^x)|}{|n_1^x - n_2^x||n_1^y - n_2^y|} < \infty \\
\overset{\text{spalten}}{\Leftrightarrow} \quad & \left| \frac{(n_1^y - n_2^y)(n_1^y + n_2^y)}{n_1^x - n_2^x} \right| + \left| \frac{(n_1^x - n_2^x)(n_1^x + n_2^x)}{n_1^y - n_2^y} \right| < \infty \\
\overset{T}{\Leftrightarrow} \quad & \left| \frac{n_1^y - n_2^y}{n_1^x - n_2^x} \right| + \left| \frac{n_1^x - n_2^x}{n_1^y - n_2^y} \right| \cdot \frac{n_1^x + n_2^x}{n_1^y + n_2^y} < \infty \\
\overset{\text{Konstante absch.}}{\Leftrightarrow} \quad & \left| \frac{n_1^y - n_2^y}{n_1^x - n_2^x} \right| + \left| \frac{n_1^x - n_2^x}{n_1^y - n_2^y} \right| < \infty
\end{aligned}
$$

Damit hat sich das Problem bestenfalls dazu verändert dass ich wissen muss dass sich n_1 und n_2 in beiden Traits gleich schnell annähern müssen. Ab hier habe ich etwas Schwierigkeiten. Bin ich vielleicht auf dem falschen Weg oder habe etwas falsch gemacht?

Ich versuche es derzeit argumentativ, aber bin etwas verwirrt durch die Natur von n_1, n_2. Sie lösen also beide in jedem Punkt die Differentialgleichung (1). Aber wenn sie das tun, dann kann sich n_1^y und n_2^y nicht voneinander unterscheiden, wenn $n_1^x = n_2^x$. Oder?

$\square$