Theorem 2.1

2. August 2014

1 LPA für zwei Merkmale ohne Mutation

Falls mit $K \to \infty$ auch $n_0^K \to n_0$ folgt, dann lässt sich beweisen, dass das System gegen ein deterministisches System konvergiert $\nu_t^K \xrightarrow{K} n_t$. Exemplarisch gehen wir von einem Fall von zwei Merkmalen ohne Mutation aus, jedoch lässt es sich auf d Merkmale auch mit Mutation erweitern. Dieses Beispiel ist für den TSS-Fall besonders interessant.
Ein solches deterministisches System muss folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} \dot{n}(x) &= n(x)\left(b(x) - d(x) - c(x,x)n(x) - c(x,y)n(y)\right), \quad n_0(x) = n_{0,x} \\ \dot{n}(y) &= n(y)\left(b(y) - d(y) - c(y,y)n(y) - c(y,x)n(x)\right), \quad n_0(y) = n_{0,y} \end{aligned} \tag{1}$$

Um die Konvergenz zeigen zu können verwenden wir das [1, Kapitel 11, Thm 2.1].
Dafür wird zunächst erläutert, ob unser Modell die Bedingungen aus [1] erfüllt. Zu diesem Zweck wird unser mutationsfreies Modell in eine passende Notation aus [1] übersetzt.
Sei $l \in \mathbb{Z}^2$ und $\beta_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$. Mit l kann man das Merkmal und Ereignis auffassen, während β_l eine Ratenfunktion ist, welche die Raten eines Merkmals und Ereignissen einer Population darstellt.
Natürlich kann bei uns nur einem Merkmal, ein Ereignis wiederfahren. Deswegen werden unsere l stets Einheitsvektoren sein die auf das Merkmal verweisen und Vorzeichen die auf das Ereignis deuten.
Z.B. $l = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ meint einen Tod im zweiten Merkmal.
Da β_l eine Population als Vektor erwartet, werden wir unsere Population mit $n_t = \begin{pmatrix} n_t(x) \\ n_t(y) \end{pmatrix}$ beschreiben. Daraus ergibt sich für das β mit obigem Beispiel:

$$\beta_{\binom{0}{-1}}(n_t) = \beta_{\binom{0}{-1}} \begin{pmatrix} n_t(x) \\ n_t(y) \end{pmatrix} = d(y) \cdot n(y) + \left(\sum_{x \in X} c(y,x) n(x) \right) \cdot n(y)$$

dementsprechend ist:

$$\beta_{\binom{1}{0}}(n_t) = b(x)n(x)$$

Diese Raten lassen sich mit einer Funktion q_L auch für ν_t^K formulieren [1, Kapitel 11 - (1.12)]:

$$q_l : \frac{\mathbb{N}}{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$q_l : \nu_t^K \longmapsto K\beta_l\left(\frac{\nu_t}{K}\right)$$

Daran erkennt man, dass sich auch die Wettbewerbsrate zu unserer verändert:

$$\begin{aligned}
K\beta_{\binom{-1}{0}}\left(\frac{\nu_t}{K}\right) &= K \cdot d(y)\frac{\nu_t(y)}{K} + K \cdot \left(\sum_{x\in X} c(y,x) \cdot \frac{n(x)}{K}\right) \cdot \frac{n(y)}{K} \\
&= d(y)\nu_t(y) + \left(\sum_{x\in X} \frac{c(y,x)}{K} \cdot n(x)\right) \cdot n(y) \\
&= d(y)\nu_t(y) + \left(\sum_{x\in X} \boldsymbol{c^K(y,x)} \cdot n(x)\right) \cdot n(y)
\end{aligned}$$

Die vorherigen Übersetzungen lassen sich leicht anhand des Generators nachvollziehen, wobei unser Generator (**??**), nur ohne Mutation, das selbe ergeben soll wie:

$$\sum_l \beta_l(n_t)(f(n_t + l) - f(n))$$

Als nächstes kommen wir zur Definition des F welche sich aus der Gleichung [1, Kapitel 6 - (2.2)] ergibt:

$$F(n_t) = \sum_l l\beta_l(n_t)$$

Wenn man die Summe für $l = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, l = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ betrachtet, so beschränkt man sich auf die erste Zeile der Funktion, also:

$$F(n_t)_1 = 1 \cdot \underbrace{b(x)n(x)}_{\beta_{\binom{1}{0}}(n_t)} + (-1) \cdot \underbrace{(d(x)n(x) + \sum_{y\in X} c(x,y)n(x))}_{\beta_{\binom{-1}{0}}(n_t)}$$

was mit (1) übereinstimmt. Also gilt $F_k(n_t) = \dot{n}_t(x_k)$, wobei $x_k \hat{=}$k-te Merkmal. Kommen wir nun zu dem eigentlich Theorem.

Satz 1 ([1], Kapitel 11 - Theorem 2.1)**.** *Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ kompakt,*

$$\sum_l |l| \sup_{n_t\in V} \beta_l(n_t) < \infty \tag{2}$$

und es existiert ein $M_V > 0$, so dass

$$|F(n_t) - F(\tilde{n}_t)| \leq M_V |n_t - \tilde{n}_t|, \qquad n_t, \tilde{n}_t \in V \tag{3}$$

Angenommen ν_t^K erfüllt [1, Kapitel 11 - (2.3)] und $\lim_{K\to\infty} \nu_0^K = n_0$, und n erfüllt

$$n_t = n_0 + \int_0^t F(n_s)ds, \qquad t \geq 0 \tag{4}$$

Für jedes $t > 0$,

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{s\leq t} |\nu_t^K - n_t| = 0 \quad f.s. \tag{5}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass unser Modell die Bedingungen aus Satz 1, bzw. aus [1, Kap. 11 - **Theorem 2.1**] erfüllt.

Satz 2. *Unser mutationsfreies Modell erfüllt die Bedingungen von [1, Kap. 11 - **Theorem 2.1**].*

Beweis. Wir gehen zunächst von einer dimorphen Population $X = \{x, y\}$ aus. Seien

$$n_1 = \begin{pmatrix} n_1(x) \\ n_1(y) \end{pmatrix}, \quad n_2 = \begin{pmatrix} n_2(x) \\ n_2(y) \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$F\begin{pmatrix} n(x) \\ n(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{n}(x) \\ \dot{n}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(x)(b(x) - d(x) - c(x,x)n(x) - c(x,y)n(y)) \\ n(y)(b(y) - d(y) - c(y,y)n(y) - c(y,x)n(x)) \end{pmatrix} \tag{6}$$

ausgewertet zu einem Zeitpunkt $s \in \mathbb{R}_+$.

Bedingung (2) bzw. [1, Kapitel 11 - **Thm 2.1** (2.6)] zu prüfen ist in unserem Fall sehr einfach. Unser Merkmalsraum und die verwendeten Raten sind endlich. Damit haben wir stets eine endliche Summe über endliche Raten, welche natürlich wieder endlich ist. Das gilt für jedes $n_t \in V$, da wir wie in [2], nur endliche Raten zulassen.

Bedingung (3) bzw. [1, Kapitel 11 - **Thm 2.1** (2.7)] fordert

$$\left| F\begin{pmatrix} n_1(x) \\ n_1(y) \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} n_2(x) \\ n_2(y) \end{pmatrix} \right| < M_V \left| \begin{pmatrix} n_1(x) \\ n_1(y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_2(x) \\ n_2(y) \end{pmatrix} \right|, \quad M_V \in \mathbb{R}_+$$

für $n_1, n_2 \in V$. Es ist klar dass

$$\begin{aligned} |n_1(x) - n_2(x)| &\leq |n_1 - n_2| \\ |n_1(y) - n_2(y)| &\leq |n_1 - n_2| \end{aligned} \tag{7}$$

Falls es ein $c_V \in \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$\begin{aligned} |F(n_1)_1 - F(n_2)_1| &\leq |n_1 - n_2| \cdot c_V \\ |F(n_1)_2 - F(n_2)_2| &\leq |n_1 - n_2| \cdot c_V \end{aligned} \tag{8}$$

So folgt wegen

$$\begin{aligned} |F(n_1) - F(n_2)| &= \sqrt{(F(n_1)_1 - F(n_2)_1)^2 + (F(n_1)_2 - F(n_2)_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(|n_1 - n_2| \cdot c_V)^2 + (|n_1 - n_2| \cdot c_V)^2} \\ &= |n_1 - n_2| \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot c_V}_{<\infty} = |n_1 - n_2| \cdot M_V \Rightarrow (3) \end{aligned} \tag{9}$$

Also bleibt nur noch (8) zu prüfen. Dabei benötigen wir, dass $|n_1(x)|+|n_2(x)|$ beschränkt ist. Das ergibt sich aus der Voraussetzung, dass V kompakt ist und wir $n_1, n_2 \in V$ wählen. Diese Wahl ist für unser Modell sinnvoll, weil unsere Population mit einer endlichen Anfangsbedingung startet und bis zu einem festen Zeitpunkt $t > 0$ stets endliche Werte annimmt. Dass unsere Population durch die selbe ohne Todesraten zu jedem Zeitpunkt endlich beschränkt ist (also $n_t(x) = b(x) \cdot t$) begründet diese Endlichkeit.
Für F_1 und F_2 ist dabei das Vorgehen analog, daher wird nur F_1 vorgestellt:

$$\begin{aligned} |F(n_1)_1 - F(n_2)_1| &= |(n_1(x) - n_2(x))(b(x) - d(x)) \\ &\quad - ((n_1(x))^2 - (n_2(x))^2) \cdot c(x,x) \\ &\quad - ((n_1(y))^2 - (n_2(y))^2) \cdot c(x,y)| \\ &\leq |\underbrace{(n_1(x) - n_2(x))}_{\leq |n_1 - n_2|}(b(x) - d(x))| \\ &\quad + |(n_1(x) - n_2(x))(n_1(x) + n_2(x)) \cdot c(x,x)| \\ &\quad + |(n_1(y) - n_2(y))(n_1(y) + n_2(y)) \cdot c(x,y)| \\ &\leq |n_1 - n_2| \cdot |b(x) - d(x)| \\ &\quad + |n_1 - n_2| \cdot |\underbrace{n_1(x) + n_2(x)}_{\text{beschränkt}}| c(x,x) \\ &\quad + |n_1 - n_2| \cdot |n_1(y) + n_2(y)| \cdot c(x,y) \\ &\leq |n_1 - n_2| \cdot (c_1 + c_{2,V} \cdot c(x,x) + c_{3,V} \cdot c(x,y)) \\ &= |n_1 - n_2| \cdot c_V \end{aligned}$$

wie schon erwähnt folgt durch analoges Vorgehen für y, dass (7) für unser Modell gilt.
Tatsächlich kann für Fälle mit mehr als 2 Merkmalen durch analoges Vorgehen die selben Abschätzungen gemacht werden, die ebenso (3) bestätigen.

[1, Kapitel 11 - **(2.3)**] bleibt dem Leser überlassen, folgt aber aus [1, Kapitel 6 - (2.1)].
Und **Bedingung (4)** folgt direkt aus unserer Definition

$$n_t = n_0 + \int_0^t \dot{n}_s ds = n_0 + \int_0^t F(n_s) ds$$

womit alle Bedingungen für (1) erfüllt sind und wir die Konvergenz (5) nachgewiesen haben. □

Literatur

[1] Stewart N Ethier and Thomas G Kurtz. *Markov processes: characterization and convergence*, volume 282. John Wiley & Sons, 2009.

[2] Nicolas Fournier and Sylvie Méléard. A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4):1880–1919, 2004.