Theorem 2.1

26. Juli 2014

Falls aus $K \to \infty$ auch $n_0^K \to n_0$ folgt, dann lässt sich beweisen, dass das System ν_t^K mit $K \to \infty$ gegen ein deterministisches System konvergiert. Ein solches deterministisches System muss folgende Differentialgleichung erfüllen:

ohne mutation

one line is sufficient, you can precise n=(n^x)_{x\inX}

$$n = \begin{pmatrix} \dot{n}^x \\ \dot{n}^y \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^x \cdot (b(x) - d(x) - \sum_{y \in X} c(x,y) \cdot n^y) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \tag{1}$$
$$n(0) = n_0$$

Die Konvergenz folgt unmittelbar aus [1, **Thm 2.1**], also reicht es die Bedingungen (2.6) und (2.7) in [1, **Thm 2.1**] zu prüfen:

Satz 0.1. *Unser Modell erfüllt die Bedingungen von [1,* ***Theorem 2.1****].*

Beweis. Wir werden x, y weiterhin als Merkmale verwenden und gehen zunächst von einer dimorphen Population $X = \{x, y\}$ aus.
In [1] beschreiben x,y zwei Lösungen

$$\text{x} = n_1 = \begin{pmatrix} n_1^x \\ n_1^y \end{pmatrix}, \text{y} = n_2 = \begin{pmatrix} n_2^x \\ n_2^y \end{pmatrix}$$

der Differentialgleichung

$$F \begin{pmatrix} n^x \\ n^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{n}^x \\ \dot{n}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^x(b(x) - d(x) - c(x,x)n^x - c(x,y)n^y) \\ n^y(b(y) - d(y) - c(y,y)n^y - c(y,x)n^x) \end{pmatrix} \tag{2}$$

ausgewertet zu einem Zeitpunkt $s \in \mathbb{R}_+$.
Endliche Raten:
Bedingung 2.6 aus [1, **Thm 2.1**] zu prüfen ist in unserem Fall sehr einfach. Unser Merkmalsraum und die verwendeten Raten sind endlich. Damit haben wir stets eine endliche Summe über endliche Raten, welche natürlich wieder endlich ist.
Lipschitz-Stetigkeit:
Bedingung 2.7 aus [1, **Thm 2.1**] fordert die Lipschitz-Stetigkeit für

$$\left| F \begin{pmatrix} n_1^x \\ n_1^y \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} n_2^x \\ n_2^y \end{pmatrix} \right| \overset{!}{<} M_K \left| \begin{pmatrix} n_1^x \\ n_1^y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_2^x \\ n_2^y \end{pmatrix} \right|, \quad M_K \in \mathbb{R}_+$$

Zunächst wählen wir $\varepsilon := \frac{|n_1-n_2|^2}{\min(|n_1^x-n_2^x|,|n_1^y-n_2^y|)}$, dann folgt daraus,

$$\begin{aligned} |n_1^x - n_2^x| &\le \varepsilon \\ |n_1^y - n_2^y| &\le \varepsilon \end{aligned} \tag{3}$$

Falls es ein $c \in \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$\begin{aligned} |F(n_1^x) - F(n_2^x)| &\le \varepsilon \cdot c \\ |F(n_1^y) - F(n_2^y)| &\le \varepsilon \cdot c \end{aligned} \tag{4}$$

So folgt wegen

$$\begin{aligned} |F(n_1) - F(n_2)| &= \sqrt{(F(n_1^x) - F(n_2^x)) \cdot (F(n_1^y) - F(n_2^y))} \\ &\le \sqrt{\varepsilon \cdot c \cdot \varepsilon \cdot c} \\ &= \varepsilon \cdot c < \infty \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned} \tag{5}$$

Also bleibt nur noch (4) zu prüfen. Für x und y ist dabei das Vorgehen analog, daher wird nur x vorgestellt:

$$\begin{aligned} |F(n_1^x) - F(n_2^x)| &= |(n_1^x - n_2^x)(b(x) - d(x)) - ((n_1^x)^2 - (n_2^x)^2) \cdot c(x,x) \\ &\quad - ((n_1^y)^2 - (n_2^y)^2) \cdot c(x,y)| \\ &\le |\underbrace{(n_1^x - n_2^x)}_{\le \varepsilon}(b(x) - d(x))| \\ &\quad + |(n_1^x - n_2^x)(n_1^x + n_2^x) \cdot c(x,x)| \\ &\quad + |(n_1^y - n_2^y)(n_1^y + n_2^y) \cdot c(x,y)| \\ &\le \varepsilon \cdot (|b(x) - d(x)| + |\underbrace{n_1^x + n_2^x}_{\text{beschränkt}}| c(x,x) + |n_1^y + n_2^y| \cdot c(x,y)) \\ &\le \varepsilon \cdot (c_1 + c_2 \cdot c(x,x) + c_3 \cdot c(x,y)) \\ &= \varepsilon \cdot c \end{aligned}$$

this is the most important step ! why is it bounded? how do the bounds c2 and c3 depend on K? Precisely here lies the Lipschitz continuity! You can upperbound the system by the one with only birth rates, which grows linearly in K.

wie schon erwähnt folgt durch analoges Vorgehen für y, dass (3) für unser Modell gilt.
Tatsächlich kann für Fälle mit mehr als 2 Merkmalen durch analoges Vorgehen die selben Abschätzungen gemacht werden die alle zum gleichen Ergebnis führen.
Schließlich folgt für alle Fälle durch (5) die Behauptung. □

Literatur

[1] Stewart N Ethier and Thomas G Kurtz. *Markov processes: characterization and convergence*, volume 282. John Wiley & Sons, 2009.