2018年《概率论与数理统计》试卷（理工）

一、填空题（每小题3分，本题满分21分）

1. 设 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(AB)=$ ________；P（$A\cup B$）= ________。

2. 设每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，则在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为（　　）。

（A）p^3　　（B）$1-p^3$　　（C）$(1-p)^3$　　（D）$1-(1-p)^3$

3. 若随机变量 $X\sim N(1,1)$，其概率密度函数为 $f(x)$，则下列结论正确的是（　　）。

（A）$P\{X\le 0\}=P\{X\ge 0\}=0.5$　　（B）$f(x)=f(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

（C）$P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}=0.5$　　（D）$F(x)=1-F(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

4. 设随机变量 $X\sim U(0,4)$，则 $P\{D(X)<X<E(X)\}=$ ________。

5. 设随机变量 X, Y 独立同分布且方差都大于0，令 $\xi=X+aY$，$\eta=X+bY$，其中 a、b 为常数且 $ab\neq 0$，则当 ξ,η 不相关时，有（　　）。

（A）$ab=1$　　（B）$ab=-1$　　（C）$a=b$　　（D）a,b 为任意非零常数

6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{2019}$ 为来自标准正态总体的简单随机样本，已知统计量 $Y=\dfrac{cX_{2019}}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{2018}^2}}$ 服从 t 分布，则常数 $c=$ ________。

7. 设两独立样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，令 $\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$，$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2$，则 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim$ ________。（写出分布和参数）

二、（本题满分10分）有两个袋子，甲袋中有2只白球，1只黑球；乙袋中有1只白球，2只黑球。从甲袋中任取一只球放入乙袋，再从乙袋中任取一只球。（1）求从乙袋中取出的球为白球的概率；（2）若发现从乙袋中取出的是白球，问从甲袋中取出放入乙袋的球，黑、白哪种颜色可能性大？

三、（本题满分13分）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}kx^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 k、α 为常数且 $k>0$，$\alpha>0$，又已知 $E(X)=0.75$。（1）求常数 k 和 α；（2）求 X 的分布函

数 $F(x)$；（3）求概率 $P\{\frac{1}{2}<X<1\}$；（4）求 $D(X)$。

四、（本题满分 13 分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$。（1）求 X 和 Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$；（2）问 X 与 Y 是否独立？为什么？（3）求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}。

五、（本题满分 8 分）设 X、Y 是相互独立的随机变量，密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

六、（本题满分 13 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$x_1, x_2,\cdots, x_n$ 为对应的样本值。

（1）若总体 $X\sim P(\lambda)$，其分布律为 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$， $k=0,1,2,\cdots$， $\lambda>0$ 为未知参数。求参数λ的极大似然估计量 $\hat{\lambda}_{MLE}$，并判断 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 是否为 λ 的无偏估计。

（2）若总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 未知。求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$。

七、（本题满分 14 分）某高校 2017 级《概率论与数理统计》期末考试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，为了评估考试成绩，现从所有考生中抽取了 31 名考生，算得他们的平均成绩为 73 分，标准差为 8 分。（1）求总体方差 σ^2 的置信度为 95%的双侧置信区间。（2）某位老师说这次考试的年级平均成绩为 75 分，你赞同这位老师的观点吗？（$\alpha=0.05$）

（参考数据： $z_{0.05}=1.645$， $z_{0.025}=1.960$， $t_{0.025}(30)=2.0423$， $t_{0.05}(30)=1.6973$， $t_{0.025}(31)=2.0395$， $t_{0.05}(31)=1.6955$， $\chi^2_{0.025}(30)=46.979$， $\chi^2_{0.025}(31)=48.232$， $\chi^2_{0.975}(30)=16.791$， $\chi^2_{0.975}(31)=17.539$， $\sqrt{30}=5.477$， $\sqrt{31}=5.568$）

八、（本题满分 8 分）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$。求（1）$Y$ 的分布函数；（2）$P\{X\le Y\}$。