河海大学 2018-2019 学年第一学期《概率论与数理统计》(理工类)参考解答（A）

一、填空题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

（1）1/6，5/12【对 1 个给 2 分】;（2）D;（3）C;（4）1/6;（5）B;（6）$\sqrt{2018}$;（7）$F(n_1-1,n_2-1)$

二、（本题满分 10 分）设 $B_1=$“从甲袋中取出的是白球”，$B_2=$“从甲袋中取出的是黑球”，$A=$“从乙袋中取出白球”。则 B_1,B_2 构成一个完备事件组，则由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$ 【5 分】

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{4/12}{5/12}=\frac{4}{5}，\quad P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{3/12}{5/12}=\frac{3}{5}$$ 【4 分】

所以白球可能性大【1 分】。

三、（本题满分 13 分）（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^{\alpha}dx=\frac{k}{a+1}$，$0.75=EX=\int_0^1 xkx^{a}dx=\frac{k}{a+2}$。

$\therefore k=3,a=2$，故 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$ 【4 分】

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^3, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$【3 分】 (3) $P\{\frac{1}{2}<X<1\}=1-F(\frac{1}{2})=\frac{7}{8}$ 【3 分】

（4）$E(X^2)=\int_0^1 x^2 3x^2dx=\frac{3}{5}$，故 $DX=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$ 【3 分】

四、（本题满分 13 分）（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 6xdy=6x(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$；

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 6xdx=3y^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 【6 分】

（2）由于 $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以 X 与 Y 不相互独立【3 分】

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 6x^2(1-x)dx=1/2$，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 6x^3(1-x)dx=3/10$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 3y^3dy=3/4$，$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^1 3y^4dy=3/5$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/20$，$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=3/80$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 6x^2ydy=2/5$，$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1/40$

所以 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【4 分】

五、（本题满分 8 分）联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1,y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$$

$$
=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ \int_0^z dx\int_0^{z-x} e^{-y}dy = z-1+e^{-z}, & 0<z<1 \\ \int_0^1 dx\int_0^{z-x} e^{-y}dy = 1-e^{-(z-1)}+e^{-z}, & z\ge 1 \end{cases} \Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases} (e-1)e^{-z}, & z\ge 1 \\ 1-e^{-z}, & 0<z<1 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}
$$

或者利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$ 直接计算也可。

六、（本题满分 13 分）（1）$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}\Rightarrow \ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}[x_i\ln\lambda-\lambda-\ln(x_i!)]$，

由 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{n}[\frac{x_i}{\lambda}-1]=0\Rightarrow \hat{\lambda}_{MLE}=\bar{x}$【6 分】。又因为 X~$P(\lambda)$，所以 $E(\overline{X})=E(X)=\lambda$，即 $\hat{\lambda}_{ME}$ 为 λ 的无偏估计。【2 分】

（2）令 $E(X)=\overline{X}$，又 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{\theta}{2}$，于是 $\hat{\theta}_M=2\overline{X}$ 【5 分】

七、（本题满分 14 分）（1）总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 μ 未知，所以 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$，又 n=31，$S^2=64$，$\alpha=0.05$，所以 $\chi^2_{0.025}(30)=46.979$，

$\chi^2_{0.975}(30)=16.791$，$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})=(40.869,114.347)$【7 分】

（2）根据题意须检验假设 $H_0:\mu=75, H_1:\mu\ne 75$，由于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知，令检验统计量 $t=\frac{\overline{X}-75}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0}{\sim} t(n-1)$，由 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 得拒绝域为 $|t|>t_{\alpha/2}(n-1)$，又 $\overline{X}=73$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(30)=2.0423$，所以 $|t|=1.392<2.0423$，接受 H_0，即赞同这位老师的说法。【7 分】

八、（本题满分 8 分）（1）$F_Y(y)=P(Y\le y)$。当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$。当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(Y\le y,X\le 1)+P(Y\le y,1<X<2)+P(Y\le y,X\ge 1)$

$=P(Y\le y,1<X\le 2)+P(X\ge 2)=\int_1^y \frac{1}{9}x^2dx+\frac{19}{27}=\frac{y^3}{27}+\frac{18}{27}$。【5 分】

（2）$P(X\le Y)=P(X<Y)+P(X=Y)=P(X\le 1)+P(1<X<2)=P(0<X<2)=\int_0^2\frac{1}{9}x^2dx=\frac{8}{27}$ 【3 分】

河海大学 2018-2019 学年第一学期《概率论与数理统计》参考解答（B）

一、填空题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

（1）1/6，5/12【对 1 个给 2 分】；（2）B；（3）C；（4）B；（5）1/6；（6）$\sqrt{2018}$；（7）$F(n_1-1,n_2-1)$