河海大学 2017-2018 学年第一学期

《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 3 分，本题满分 15 分）

1. 设某人射击的命中率为 0.7，则他独立射击 3 次至少命中 2 次的概率为________；

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ Ax^2, & 0<x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$，则常数 $A=$________，随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=$ ____________；

3. 随机变量 X 和 Y “独立”与“不相关”的关系是________________________；

4. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 是来自 X 的简单随机样本，检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2$ （σ_0^2 为已知常数）的拒绝域为____________（显著性水平为 α）；

5. 二项分布的可加性为：若随机变量 $\xi\sim B(k,p)$ $\eta\sim B(l,p)$，且 ξ 和 η 相互独立，则 $\xi+\eta\sim B(k+l,p)$。设总体 X 服从 $B(m,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本，则根据二项分布的可加性有样本均值 $\bar{X}$ 的分布律为________________________。

二、（本题满分 12 分）电源电压在不超过 200 伏，200~240 伏和超过 240 伏三种情况下，元件损坏的概率分别为 0.2，0.001，0.3。设电源电压服从正态分布 $N(220,100)$。（1）求元件损坏的概率 α；（2）元件损坏时，求电源电压在 200~240 伏间的概率 β。（参考数据：若 $Z\sim N(0,1)$，则 $P\{Z\le 2\}\approx 0.98$）

三、（本题满分 15 分）已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ce^{-x}, & x>0 \\ ce^{x}, & x\le 0 \end{cases}$。（1）求常数 c；（2）求期望 $E(X)$；（3）求 $Y=\dfrac{1}{4}X^2$ 的概率密度函数。

四、（本题满分 18 分）设二维连续型随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<2(1-x)\}$ 上服从均匀分布。（1）求 X 与 Y 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；（2）求关于 Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$；（3）求条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$；（4）求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$。

五、（本题满分 16 分）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{3}{\theta^3}x^2, & 0<x\le\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未

知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本。（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；（2）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$；（3）求常数 C，使 $\hat{\theta} = C\hat{\theta}_M$ 为 θ 的无偏估计。

六、（本题满分 14 分）自动包装机将大米装袋，每袋额定重量为 50 公斤，某天开工后随机抽检了某自动包装机包装的 9 袋，计算得平均重量为 49.9（公斤），重量标准差为 0.5362（公斤），设每袋重量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。（1）问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下该天包装机工作是否正常?（2）若已知该天包装机包装的大米重量的方差 $\sigma^2 = 0.3$，求大米重量均值 μ 的置信度为 95%的双侧置信区间。

（参考数据：$z_{0.1} = 1.283$，$z_{0.05} = 1.645$，$z_{0.025} = 1.960$；$t_{0.1}(8) = 1.3968$，$t_{0.1}(9) = 1.3830$，$t_{0.1}(10) = 1.3722$，$t_{0.05}(8) = 1.8695$，$t_{0.05}(9) = 1.8331$，$t_{0.05}(10) = 1.8125$，$t_{0.025}(8) = 2.3060$，$t_{0.025}(9) = 2.2622$，$t_{0.025}(10) = 2.2280$）

七、（本题满分 10 分）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，取值均为 0 或 1，且 $P\{X_i = 0\} = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{2} (i = 1, \cdots, n)$，记 Y 为 $X_1, \cdots, X_n$ 中取 1 的个数，定义 $Z = \begin{cases} 0, & Y > 1 \\ 1, & Y \le 1 \end{cases}$。（1）求 (Y, Z) 的联合分布律；（2）求 $\mathrm{Cov}(Y, Z)$。