NOMBRE: Emiliano Fortes LIBRETA: 126/14

CARRERA: Cs. Físicas

TURNO: 11-14 (TEÓRICA 1) / 11-14 (TEÓRICA 2) / 14-17HS / 19-22HS

1	2	3	4	Calif.
B	M	R	B-	A

Análisis II / Análisis Matemático II / Matemática 3

Primer Parcial - 11 de Octubre de 2014

1. Sea C el segmento de curva $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+(y-1)^2+z^2=4\}$ que conecta los puntos $(0,1/2,\sqrt{15}/2)$ y $(0,1/2,-\sqrt{15}/2)$. Calcular la longitud de C.

2. Sea $C_1 = \{(x,y) : (x-x_0)^2+y^2=1\}$ y C_2 una curva cerrada y suave que rodea a C_1, ambas orientadas en el sentido contrario a las agujas del reloj. Si $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ es la región delimitada por C_1 y C_2, calcular

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds\,,$$

sabiendo que se verifica simultáneamente que:

(a) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial C^1 y $Q_x - P_y = 2$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,0)\}$.

(b) $Area(\mathcal{R}) = 5$.

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x) \quad \forall (x,y) \in C_1$.

3. Sea C la curva que se obtiene de la intersección de las superfícies $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$, orientada segun las agujas del reloj mirando desde arriba. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por $F(x,y,z) = (e^x \sin(x) + y, e^{y^2}\cos(y), z^2 e^z)$. Calcular

$$\int_C F \cdot \mathrm{ds}.$$

4. Sea S la superfície lateral de una piramide cuadrangular con base $[-1,1] \times [-1,1]$ en el plano xy y altura 3, contenida en el semiespacio superior. Calcular el flujo entrante del campo

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2+y^2} - \frac{x}{z+1}, \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}, \ln(z+1) \right).$$

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE SUS RESULTADOS

1) Sea $\mathcal{C}$ el segmento de curva $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=4,$

$x^2+(y-1)^2+z^2=4\}$ que conecta $(0, 1/2, \sqrt{15}/2)$ y

$(0, 1/2, -\sqrt{15}/2)$

Hallo $\cap$

$x^2+z^2 = 4 - y^2$

$x^2+z^2 = 4-(y-1)^2$

$\Rightarrow \cancel{4} - y^2 = \cancel{4} - (y-1)^2$

$-y^2+(y-1)^2 = 0$

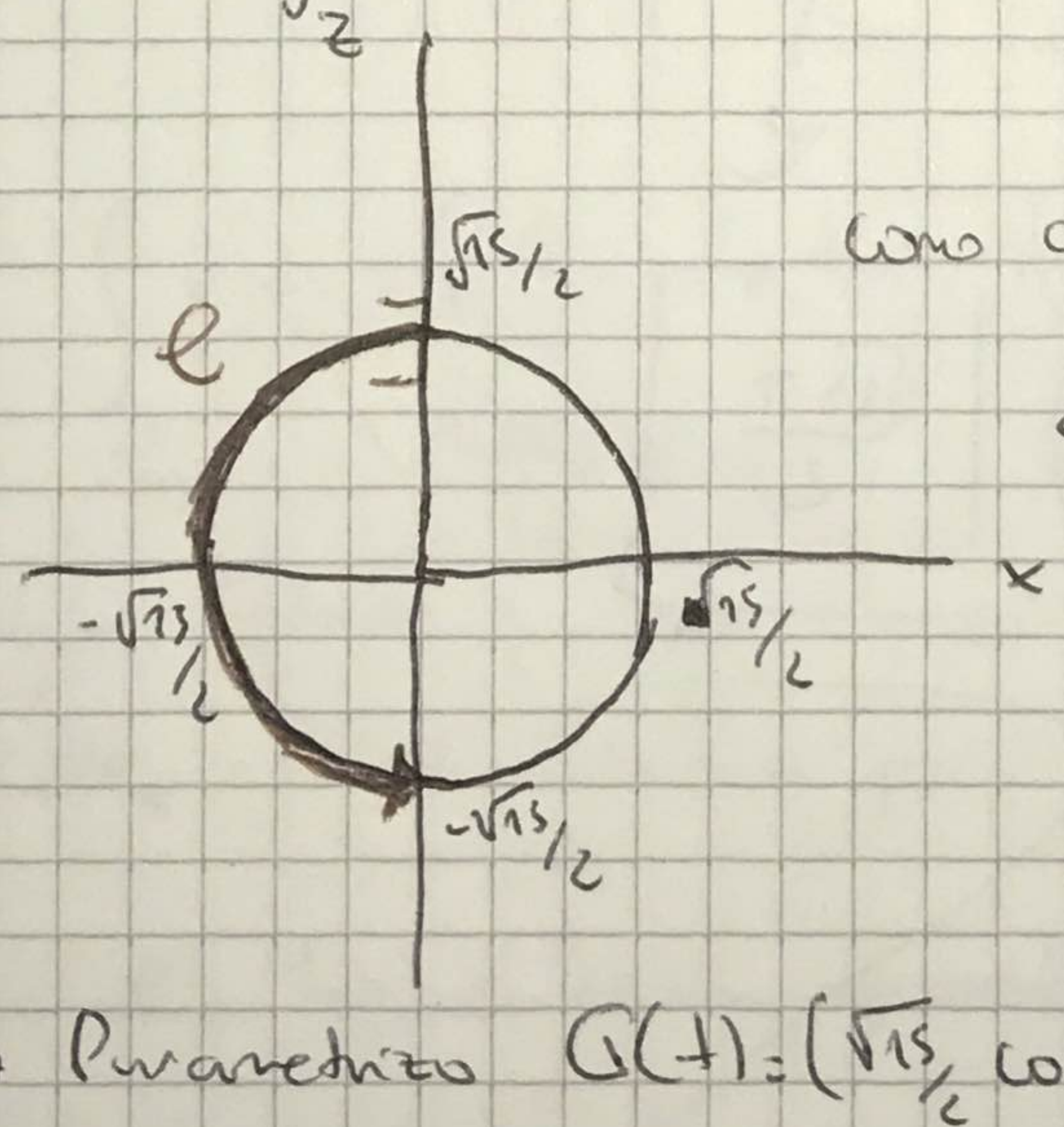
$\cancel{-y^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1 = 0$

$y = 1/2$

Bien $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$: $x^2+z^2 = 4 - \frac{1}{4}$ y^2

$x^2+z^2 = \frac{15}{4}$

~~Luego~~ Grafico



Como quiero $(0, 1/2, \sqrt{15}/2)$ a $(0, 1/2, -\sqrt{15}/2)$

$\Leftarrow$

Parametrizo $G(t) = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\cos(t), \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\sin(t)\right)$

$G'(t) = \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\sin(t), 0, \frac{\sqrt{15}}{2}\cos(t)\right)$

G: $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\quad \|G'(t)\| = \sqrt{\frac{15}{4}\sin^2(t) + \frac{15}{4}\cos^2(t)}$

$= \sqrt{15}/2$

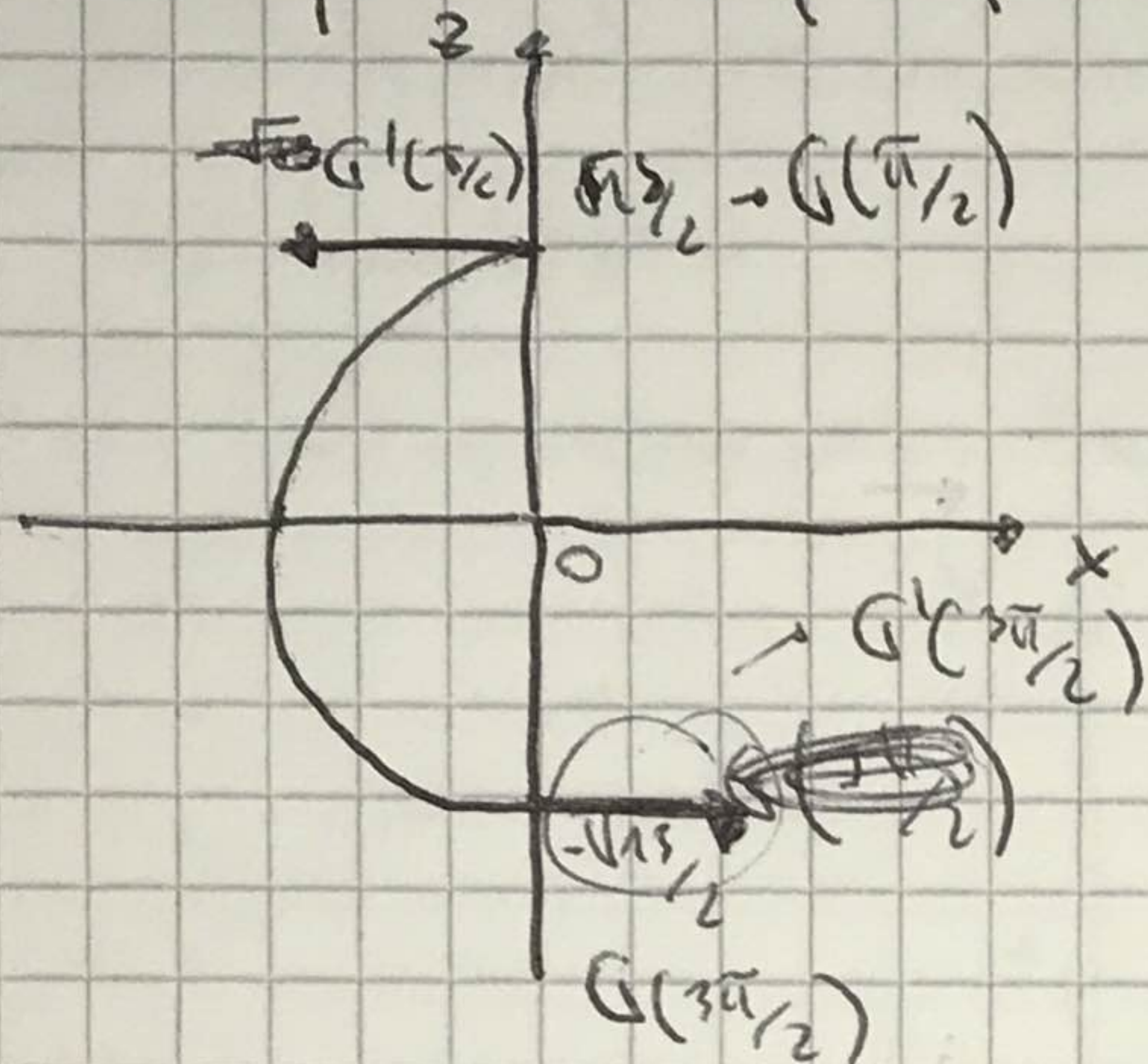
$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0, 0\right)$$

$$G\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$G'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0, 0\right)$$

Gráfico para ver que parametriza bien



$\Rightarrow$ La parametrización sirve

Luego

Longitud de $\mathcal{C}$ $= \displaystyle\int_{\mathcal{C}} 1\, ds = \int_{\mathcal{C}} \|G'(t)\|\, dt$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sqrt{15}}{2}\, dt = \frac{\sqrt{15}}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{15}\,\pi}{2}}$$

2) Sea $\mathcal{C}_1=\{(x,y)/(x-x_0)^2+y^2=1\}$ y $\mathcal{C}_2$ curva cerrada y suave que rodea a $\mathcal{C}_1$, ambas orientadas en sentido antihorario. Si $R\subset\mathbb{R}^2$ es la región delimitada por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$

Calcular

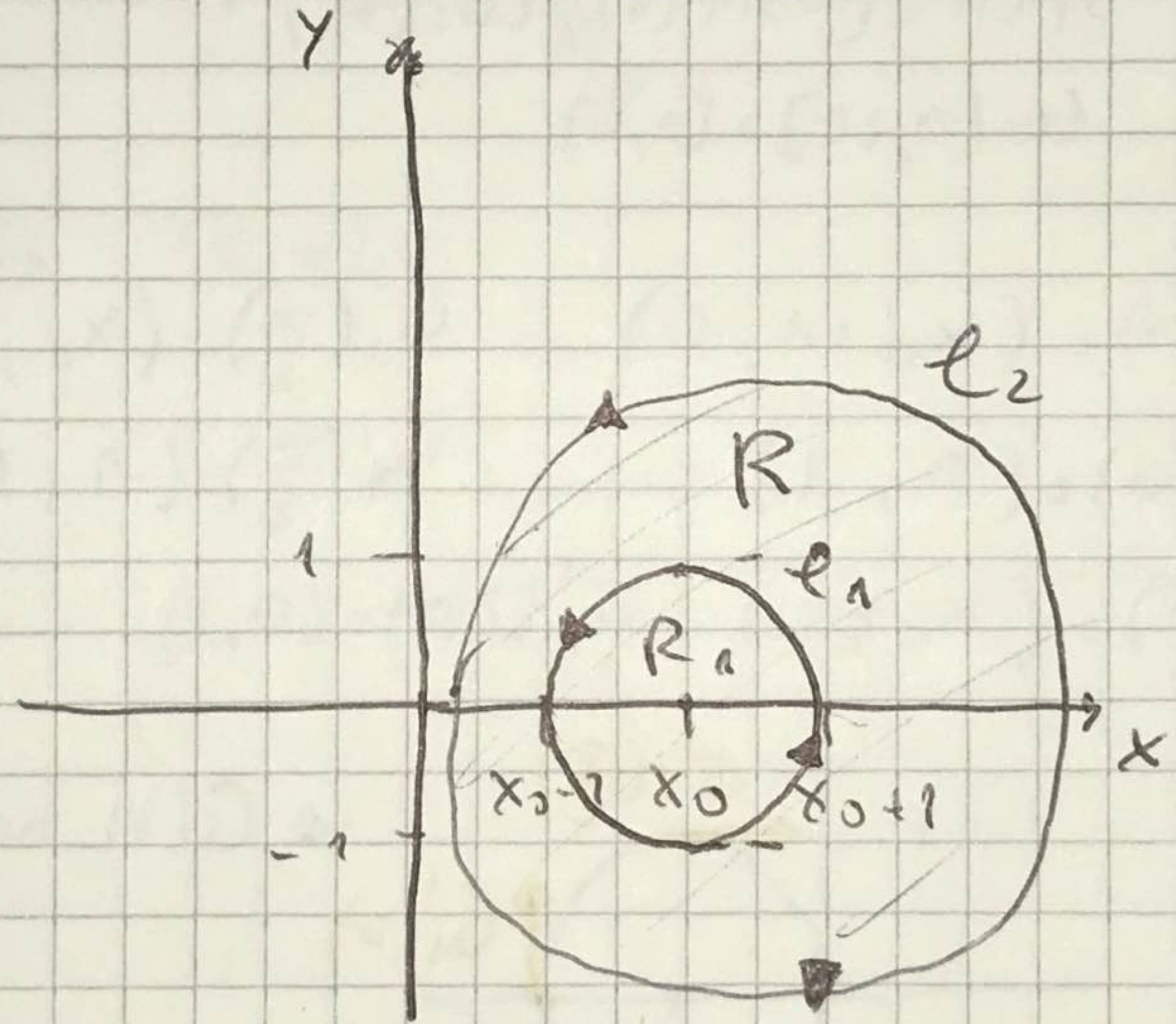
$$\int_{\mathcal{C}_2} F\cdot ds,$$

Sabiendo que

a) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es un c.v C^1 y $Q_x-P_y=2$ en $\mathbb{R}^2 - \{(x_0,0)\}$

b) Area $(R)=5$

c) $F(x,y)=(-y,x)\ \forall (x,y)\in\mathcal{C}_1$



$$\int_{\mathcal{C}_2^+} F\cdot ds = \iint_{R\cup R_1} Q_x-P_y\,dxdy = \int_{\mathcal{C}_2^+} Pdx+Qdy$$

No! F no es C^1 en $(x_0,0)$

~~Vale Green~~ ya que $\mathcal{C}_2$ está orientada positiva, cerrada y suave y $R_1\cup R$ = Región delimitada por $\mathcal{C}_2^+$

Pero $\mathcal{C}_1$ también es una ~~región delimitada~~ curva orientada positivamente y delimita una región denominada R_1, ($\mathcal{C}_1$ es cerrada y suave)

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_1^+} F\cdot ds = \cancel{\iint_{R_1} Q_x-P_y\,dxdy = \int_{\mathcal{C}_1^+} Pdx+Qdy}$$

Luego $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2^+} F\,ds = \iint_R Q_x - P_y\,dx\,dy + \iint_{R_1} Q_x - P_y\,dx\,dy$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_2^+} F.ds = \iint_R Q_x - P_y\,dx\,dy + \int_{\mathcal{C}_1^+} F.ds$$

$$\int_{\mathcal{C}_1^+} F.ds = \int_{\mathcal{C}_1^+} F(G_1(t)).G_1'(t)\,dt$$

$G_1(t) : [a,b] \to \mathcal{C}_1^+ \;/\; G_1(t) = (x_0 + \cos(t), \sin(t))$

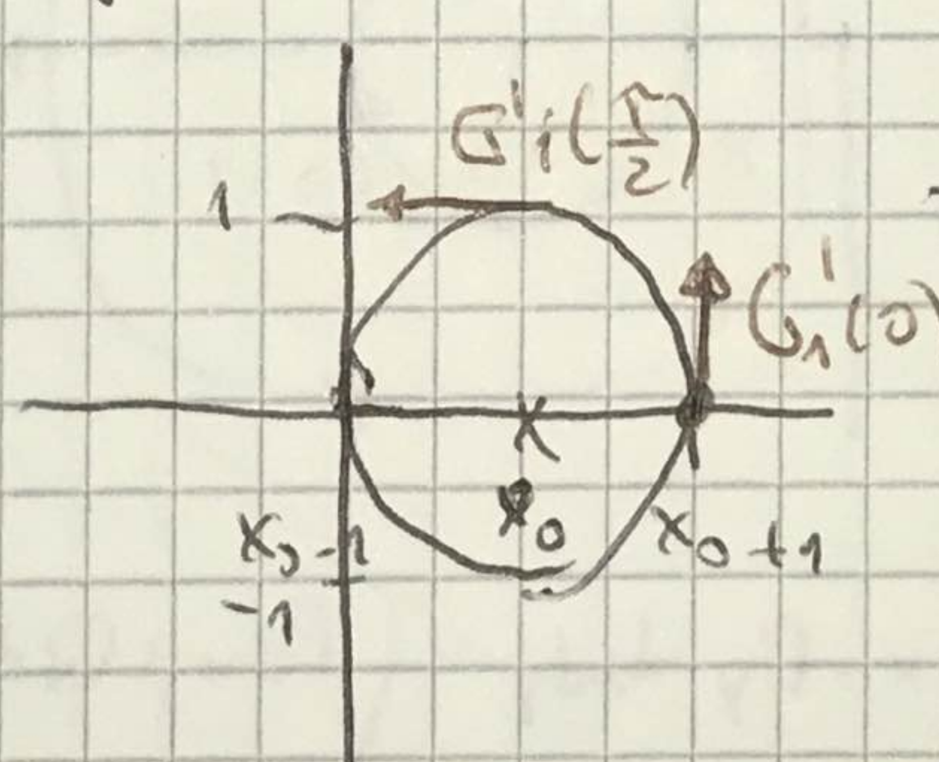
$G_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$t \in [0, 2\pi] = [a,b]$

$\Rightarrow G_1(0) = (x_0 + 1, 0)$ $\quad G_1(\frac{\pi}{2}) = (x_0, 1)$

$G_1'(0) = (0, 1)$ $\quad G_1'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$

$G_1(2\pi) = (x_0 + 1, 0)$ $\quad G_1'(2\pi) = (0, 1)$



$\Rightarrow G_1(t)$ orienta bien

$$= \int_{\mathcal{C}_1^+} F.ds = \int_0^{2\pi} (\underbrace{-\sin(t)}_{-y}, \underbrace{x_0 + \cos(t)}_{x}).(-\sin(t), \cos(t))\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} + x_0 \cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + x_0 \cos(t)\,dt$$

$$= 2\pi + (x_0 \sin(t))\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_2^+} F \cdot ds = \iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy + \boxed{2\pi}$$

Trabajemos $\iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy$

Se que $Q_x - P_y = 2$ si $(x,y) \neq \{(x_0, 0)\}$

Pero como $\mathcal{C}_2$ cubre a $\mathcal{C}_1$ y ya calculamos la región cubierta por $\mathcal{C}_1$ (R_1)

Vale que

$$\iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy = \iint_R 2\,dx\,dy = 2A(R) = 10$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_2^+} F \cdot ds = 10 + 2\pi$$

3) Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene de la intersección de

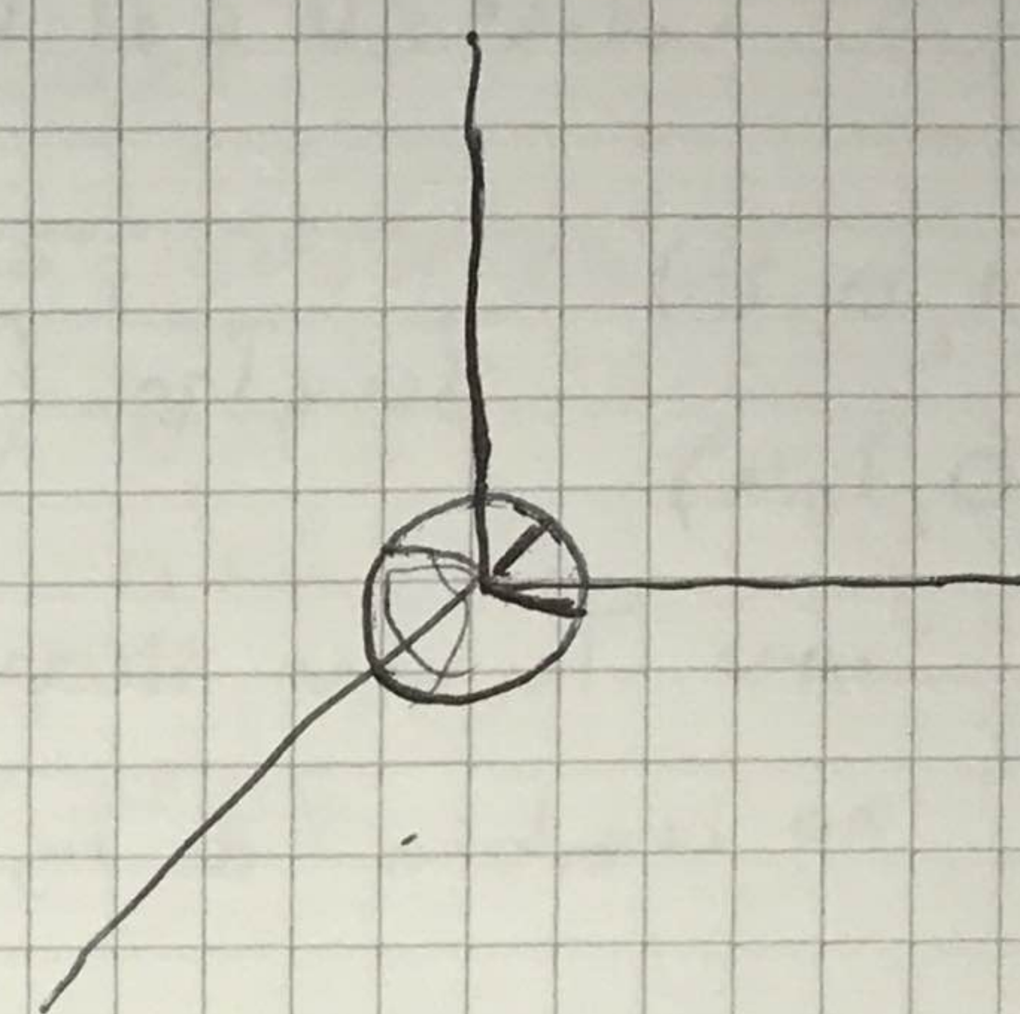
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = xy\}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2=1\}$ cilindro

orientada según las agujas del reloj vista desde arriba

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el c.v definido por

$$F(x,y,z) = \left(e^x \sin(x) + y,\ e^{y^2}\cos(y),\ z^2 e^z\right)$$

Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$



~~Stokes dice que~~ Por Stokes

$$\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds = \int_S (\nabla \times F) \cdot dS$$

A nosotros nos piden la curva orientada horariamente, pero trabajo con la positiva y se que al final vale que

$$\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds = -\int_{\mathcal{C}^-} F \cdot ds$$

tiene que coincidir con la orientacion de la sup ...

$$\Rightarrow \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (0, 0, -1)$$

Parece bueno

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds = \int_S (0,0,-1) \cdot dS$$

Parametrizo S

~~Sea~~ $T(u,v) = (u, v, uv)$

con $D_{(u,v)} \,/\, u^2 + v^2 \leq 1$

Luego $-1 \leq u \leq 1$

$-\sqrt{1-u^2} \leq v^2 \leq \sqrt{1-u^2}$

$T_u = (1, 0, v)$ $\quad T_u \times T_v = (-v, -u, 1)$

$T_v = (0, 1, u)$

como $T_u \times T_v$ siempre $\neq \overline{0} \Rightarrow$

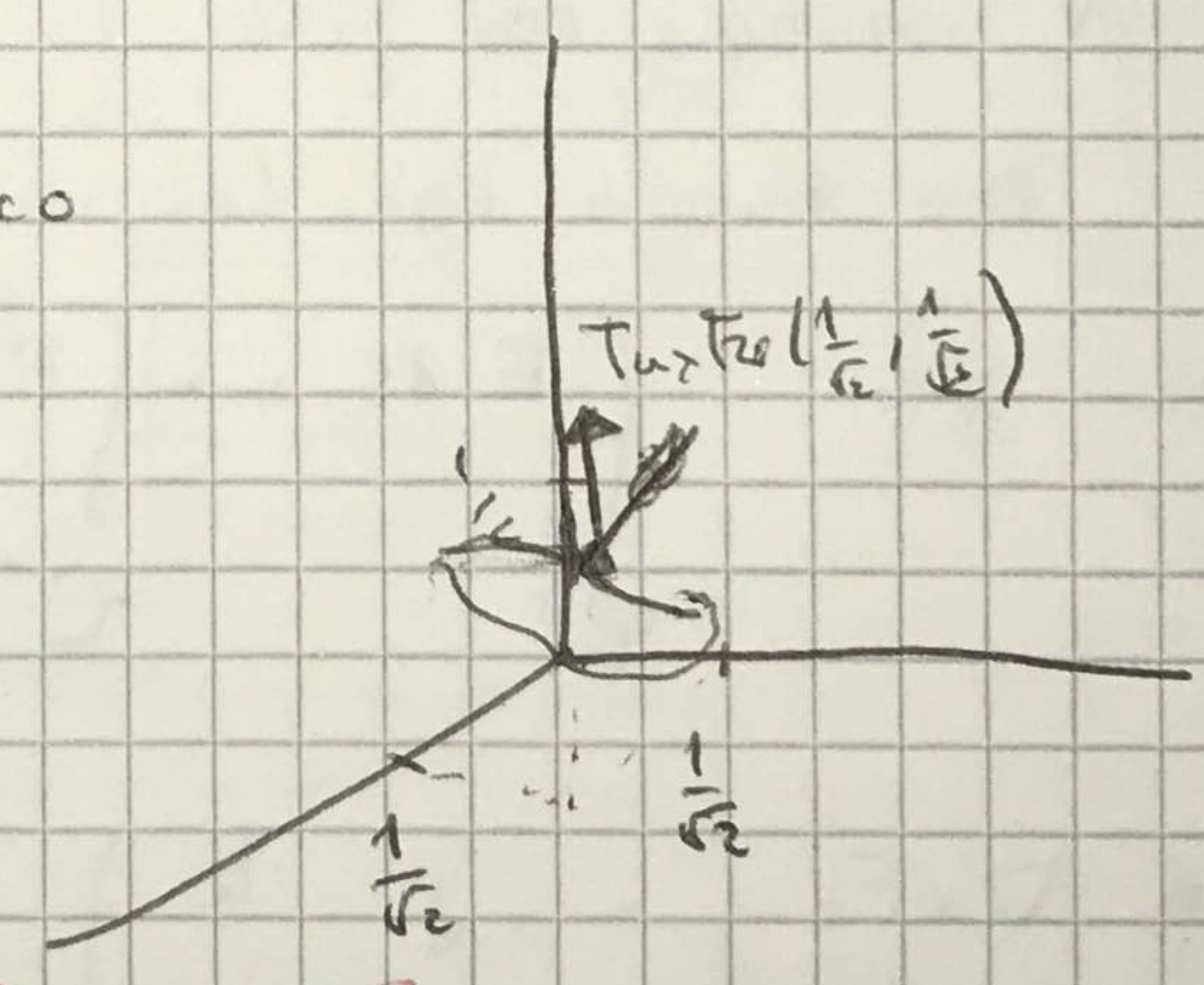
no cambia de signo, veo un punto

si $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ ~~$T(u,v)$~~ $= T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

$T_u \times T_v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

Graficando un poco



La normal es exterior, ~~$\Rightarrow$ vale~~ Stokes   Eso es para Gauss!

$$\int_{C^+} F \cdot ds = \iint_D \left((\nabla \times F)(T(u,v))\right) \cdot (T_u \times T_v)\, du\, dv$$

$$= \iint_D (0, 0, -1)(-v, -u, 1)\, du\, dv =$$

$$= \iint_D -1 \, du \, dv$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} -1 \, dv \, du$$

es molesto, cambio a polares

$u = r\cos(\varphi)$ como $u^2 + v^2 \leq 1$

$v = r\sin(\varphi)$ $\Rightarrow r$ $0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Luego $\displaystyle\iint_D -1 \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} -r \, dr \, d\varphi$

$$= -2\pi \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \right) = -2\pi \left(\frac{1}{2} \right) = -\pi$$

Pero a mi me pedían la curva orientada antihoraria

Finalmente

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \pi}$$

4) Sea S la sup lateral sin la base de una piramide cuadrangular de base $[-1,1] \times [-1,1]$ en el plano xy, altura 3 y el semiespacio mayor

Calcular el flujo entrante

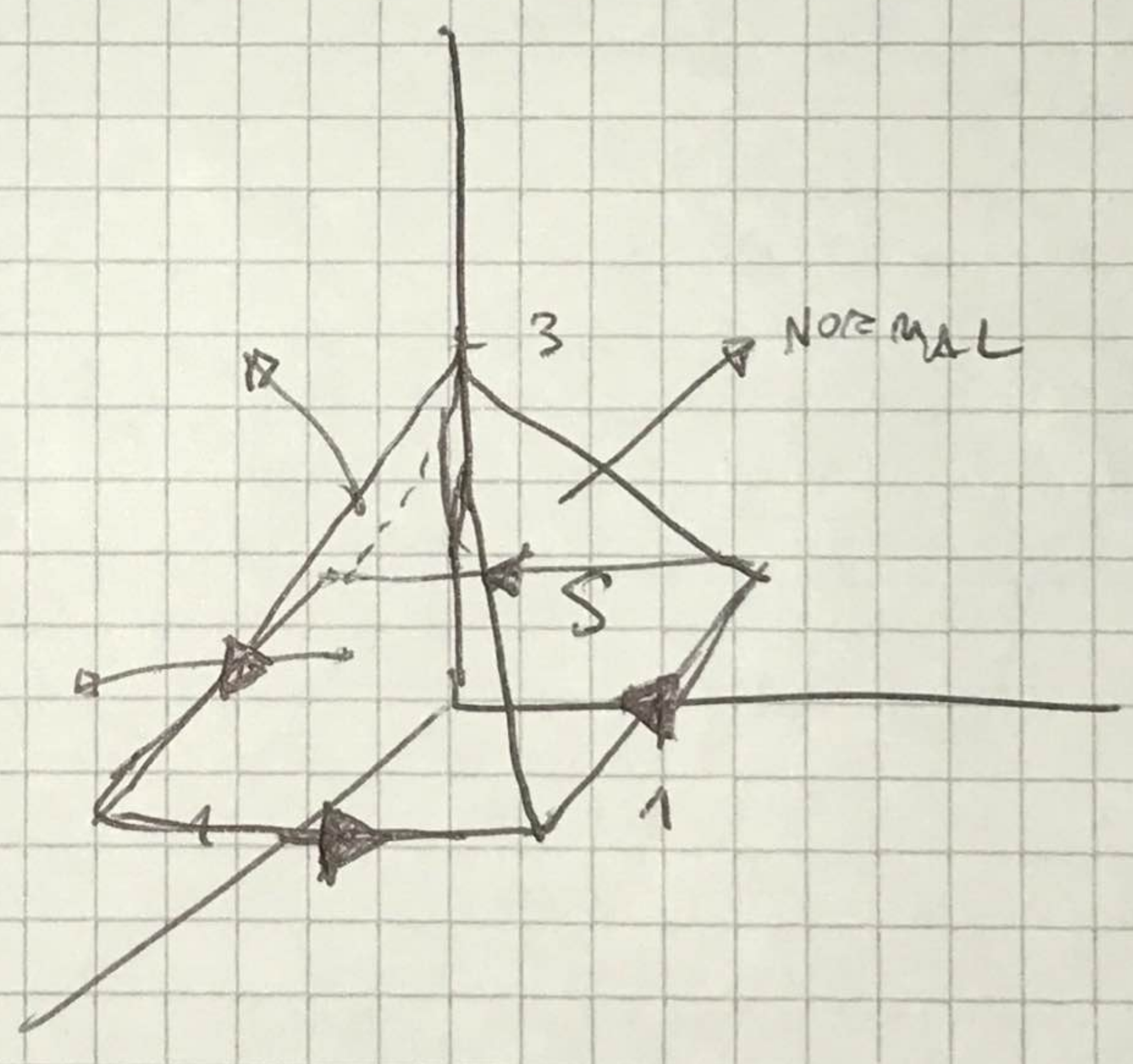
$$F(x,y,z) = \Bigg(\underbrace{\frac{-y}{(x-2)^2+y^2} - \frac{x}{z+1}}_{F_1}, \underbrace{\frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}}_{F_2}, \underbrace{\ln(z+1)}_{F_3} \Bigg)$$

~~Quiero $\iint_S F \cdot dS$~~ Quiero flujo entrante

Por Gauss

$$\cancel{\int_W \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_S F \cdot dS}$$ Aca S no es cerrado!

con normal exterior, pero S no es cerrado falta la tapa de abajo



Tomo $S \cup Tapa$

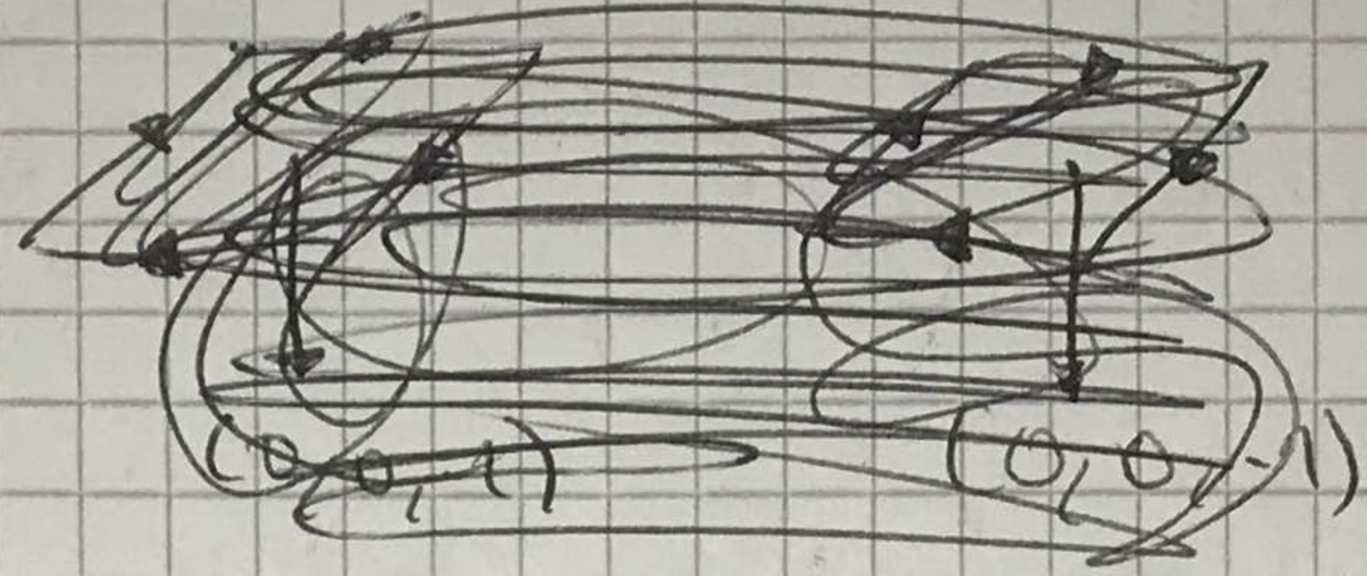
$$\Rightarrow \int_{S \cup Tapa} F \cdot dS = \iiint_W \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz$$ · orientacion?

$$\operatorname{div} F = F_{1x} + F_{2y} + F_{3z} = \frac{2y(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} - \frac{1}{z+1} - \frac{2y(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} + \frac{1}{z+1} = 0$$

$$\Rightarrow \int_S F \cdot dS + \int_{Tapa} F \cdot dS = 0$$

Luego $\displaystyle\int_S F \cdot dS = -\int_{Tapa} F \cdot dS$

a la tapa le pongo normal exterior, $\Rightarrow \eta_{TAPA} = (0,0,-1)$



No hacía falta

Pero $\displaystyle\int_{Tapa} F \cdot dS = \int_{TAPA} (F \cdot \eta)\, dS = \int_{Tapa} (0,0,-1) \cdot F \, dS$

$\displaystyle = \int_{Tapa} -\ln(z+1)\, dS$ pero en la tapa $z=0$

$\displaystyle \Rightarrow = \int_{Tapa} -\ln(1)\, dS = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\int_S F \cdot dS = 0 \quad \therefore \text{ no entra ni sale}}$

alentación?