Guia 0

Repaso matemático

① Hallar el módulo del vector de origen en $(20,-5,8)$ y extremo en $(-4,-3,2)$

Primero lo llevo al origen

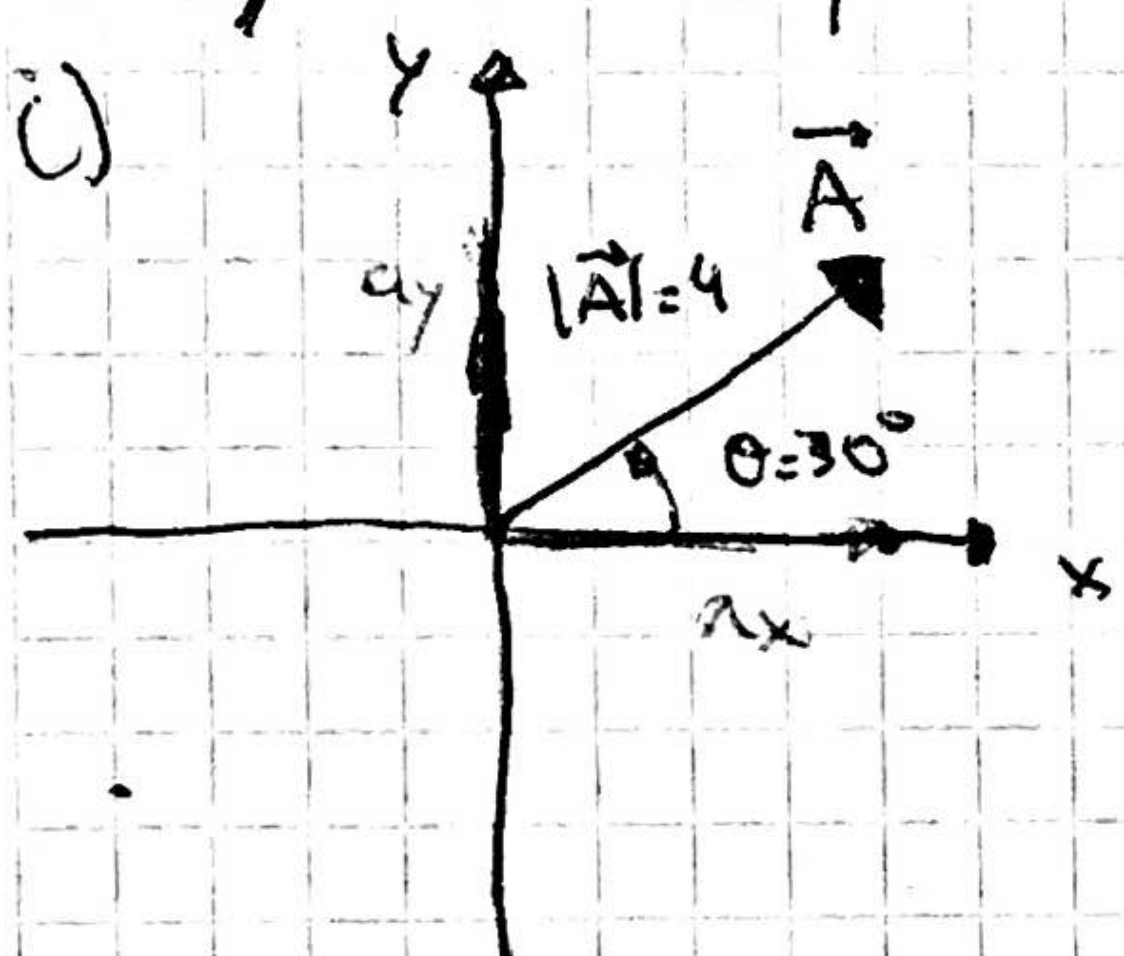
$(20,-5,8)-(-4,-3,2)=(24,-2,6)=\bar{v}'$

Modulo de $\bar{v}$ = Módulo de $\bar{v}'$ =

$|\bar{v}'| = \sqrt{24^2+(-2)^2+(6)^2} = \sqrt{576+4+36} = \boxed{2\sqrt{154}}$

② a) Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores

i)



$tg\,\theta = \frac{ay}{ax}$ $\cancel{\cos\theta}\,|\vec{A}|$.

$ax = \cos\theta . |\vec{A}|$ $ay = \operatorname{sen}\theta . |\vec{A}|$

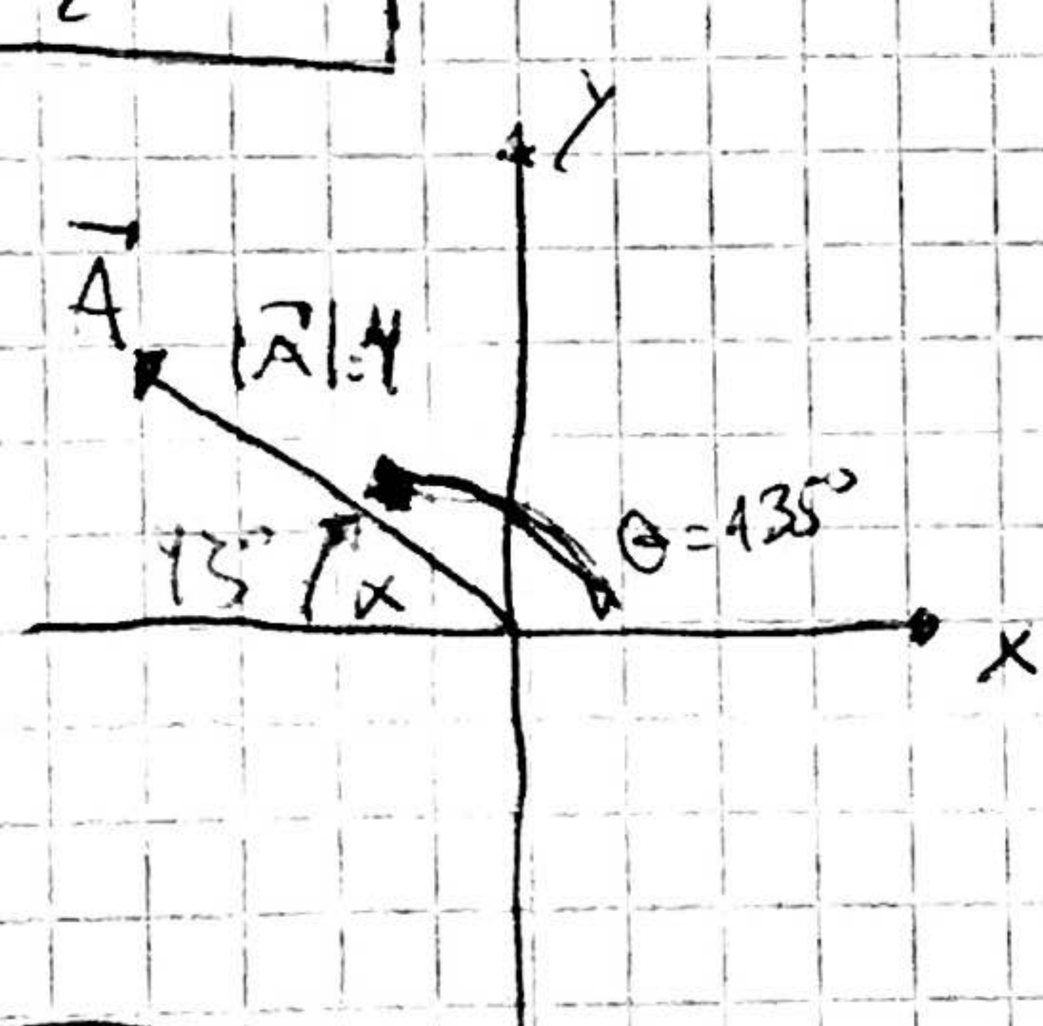
$ax = \cos 30° . 4$

$ax = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cancel{4} = 2\sqrt{3}$

$ay = 2$

$\boxed{\text{Rta: } ax = 2\sqrt{3} \quad ay = 2}$

ii)



$ay = \operatorname{sen}\alpha . 4$ $ay = \operatorname{sen}45° . 4$

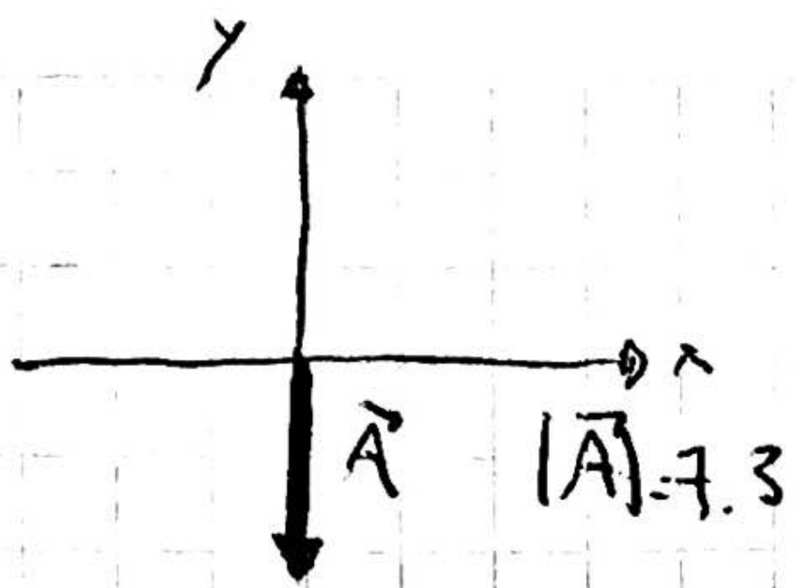
$ay = 2\sqrt{2}$

$ax = -\cos 45° . 4$

$ax = -2\sqrt{2}$

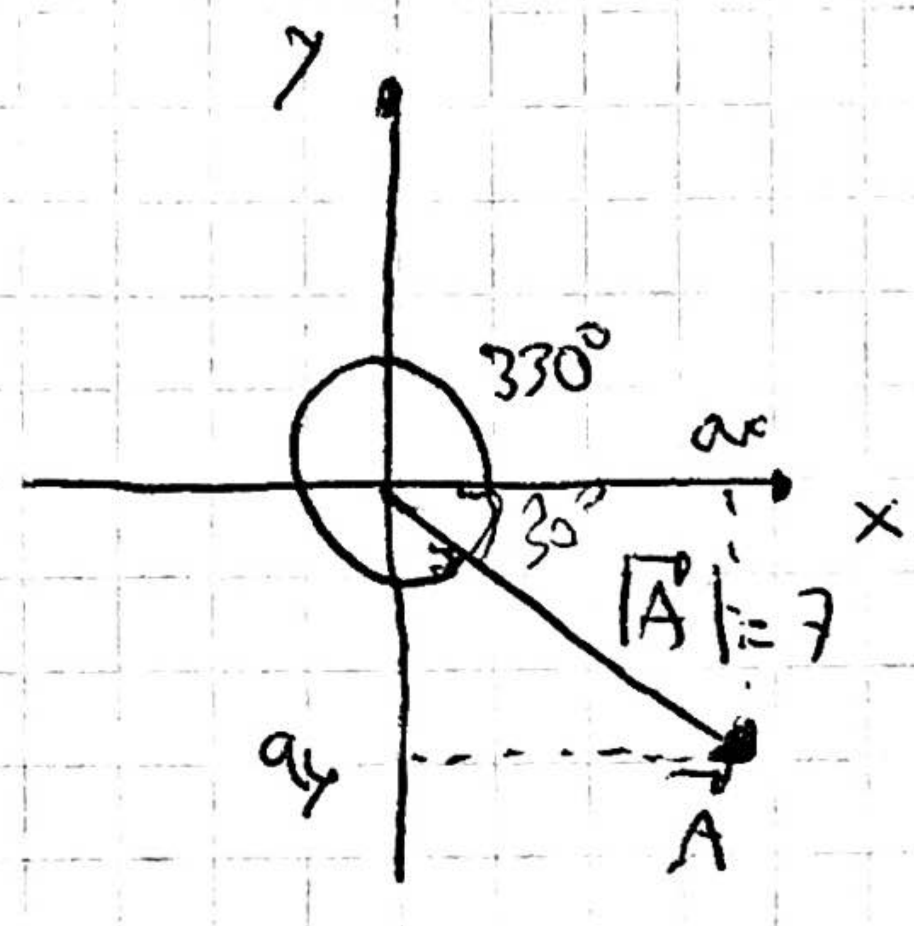
$\boxed{\text{Rta: } ay = 2\sqrt{2} \quad ax = -2\sqrt{2}}$

iii)



$\vec{A} = 7,3\,\hat{j}$.

iv)



$a_x = \cos 30° \cdot 7 = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

$a_y = -\operatorname{sen} 30° \cdot 7 = -\frac{7}{2}$

v) $\vec{A} = -2,25\,\hat{i}$

b) Hallar el módulo y dirección de los siguientes vectores y representarlos en la gráfico.

i) $\vec{A} = (3,3)$ $|\vec{A}| = \sqrt{18}$ $tg\,\alpha = \frac{3}{3} = 1$ $arc\,tg\,1 = 45°$

ii) $\vec{B} = (-1,25,-2,16)$ $|\vec{B}| = 2,495$ $tg\,\alpha = \frac{-1,25}{-2,16}$ $\alpha = 60°$

iii) $\vec{C} = (-2,5\,,4,33)$ $|\vec{C}| = 5$ $tg\,\alpha = \frac{-2,5}{4,33}$ $\alpha = 330°$

$c_x = \cos c \cdot |\vec{C}|$

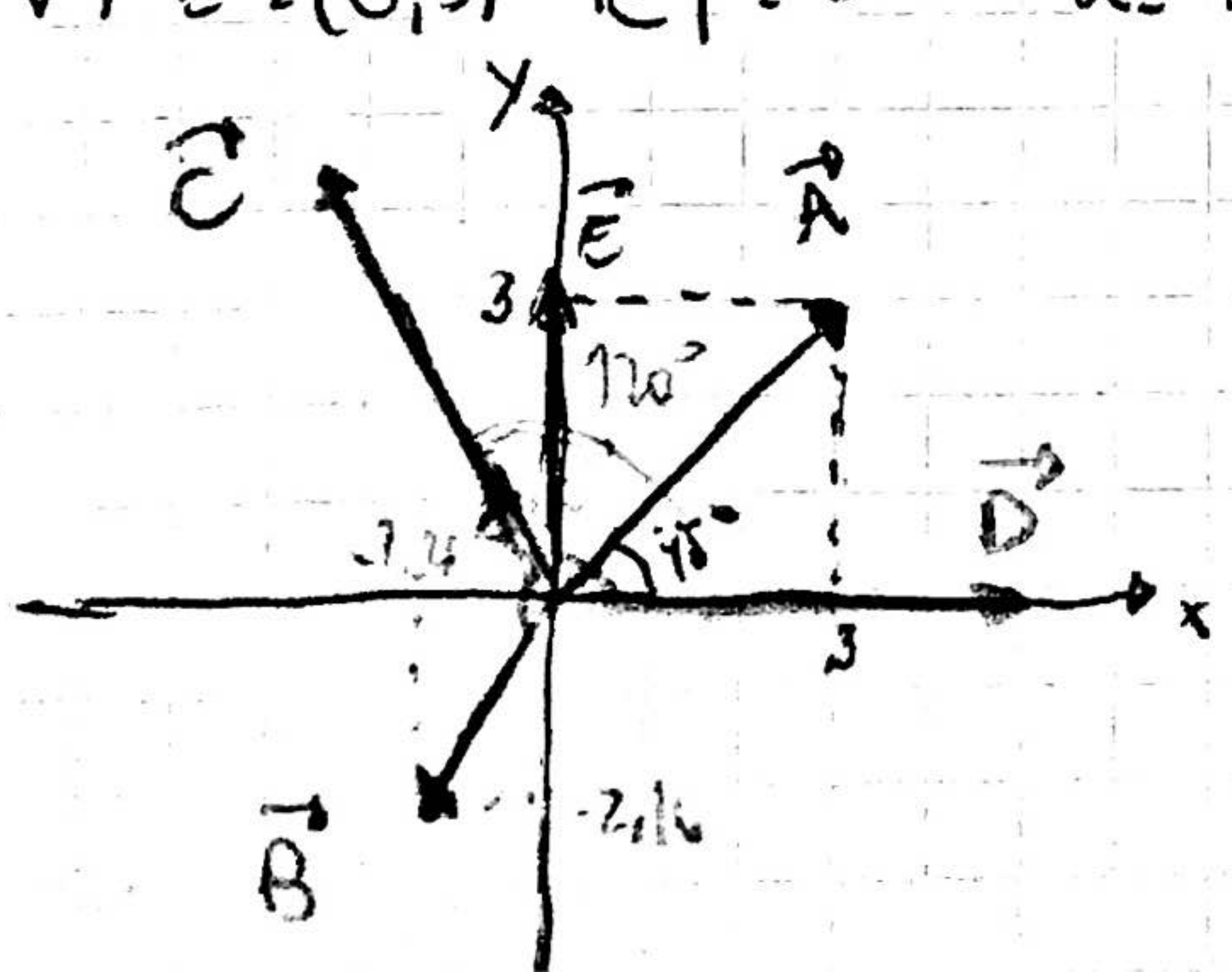
$-2,5 = \cos c \cdot 5$

$\arccos -\frac{1}{2} = c$

$c = 120°$

iv) $\vec{D} = (5,0)$ $|\vec{D}| = 5$ $\alpha = 0°$

v) $\vec{E} = (0,3)$ $|\vec{E}| = 3$ $\alpha = 90°$



③ Que propiedades tienen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tales que:

a) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ y $|\vec{A}|+|\vec{B}|=|\vec{C}|$

b) $\bar{A}+\bar{B}=\bar{A}-\bar{B} \Rightarrow B=(0,0,0)$

c) $\bar{A}+\bar{B}=\bar{C}$ y $A^2+B^2=C^2$

④ Usando producto escalar

a) $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=(1,0,0)\cdot(0,1,0)=1.0+0.1+00=0$

b) $\hat{\imath}\cdot\hat{k}=0$

c) $\hat{\jmath}\cdot\hat{k}=0$

d) $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}=1$

e) $\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}=1$

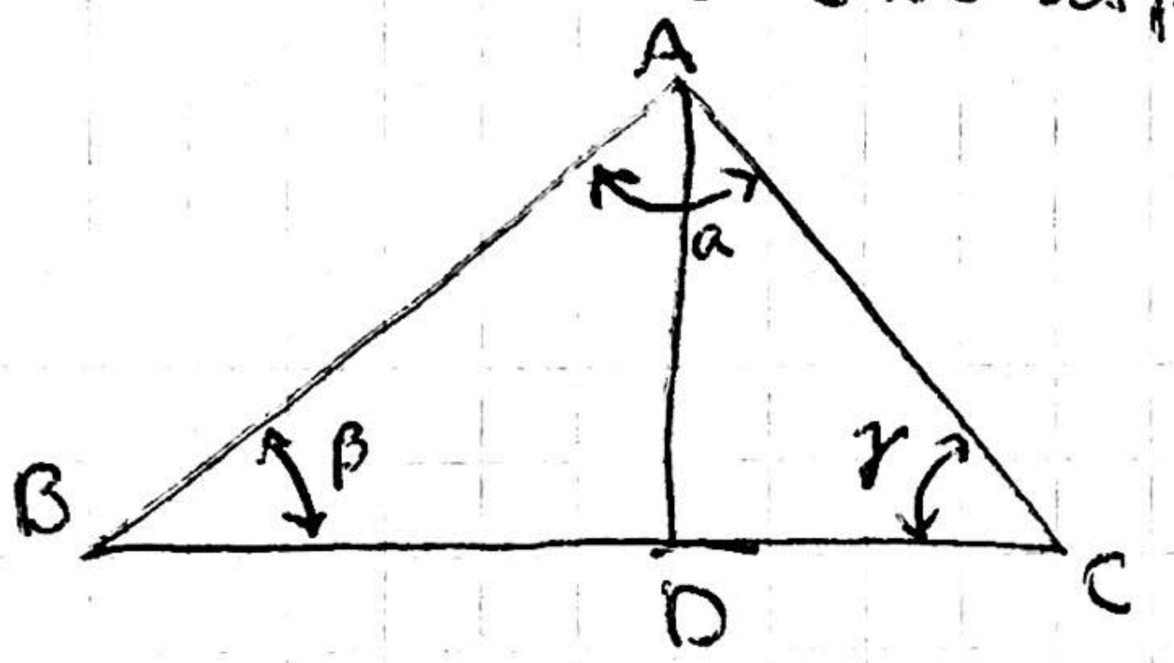
f) $\hat{k}\cdot\hat{k}=1$

g) $\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}=0$

⑤

-a) Usando el teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas, demostrar en el triángulo de la figura el "Teorema del coseno"

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,BC\cos\beta$,



Pitágoras

$a = AB$

$b = BC$

$c = CA$

$\cancel{a^2 = (b^2+c^2)^2}$

$\cancel{AB^2 = BC^2 + CA^2}$

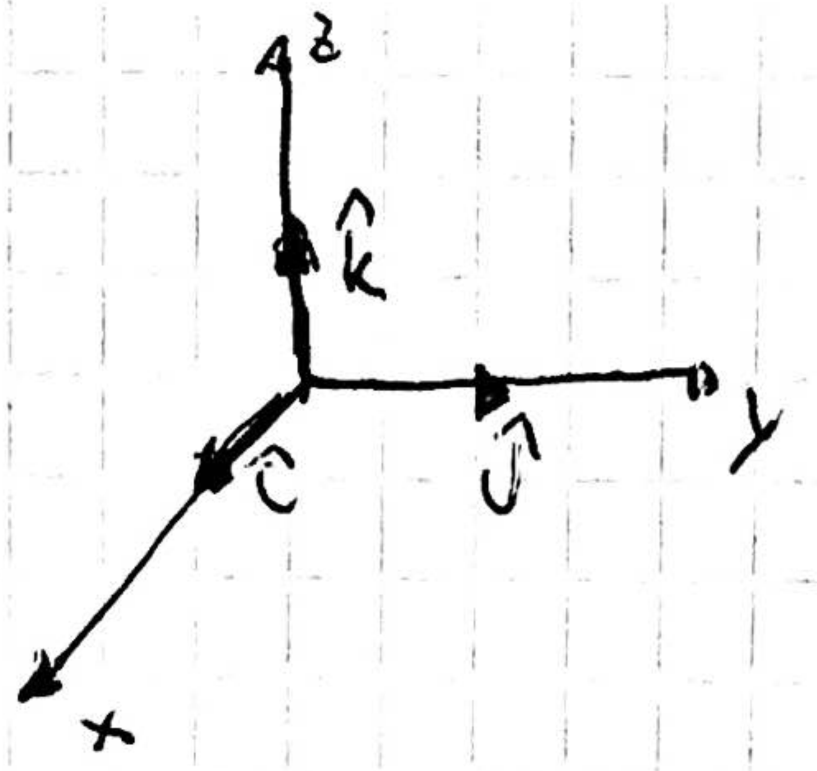
$a = b + c$

$a^2 = (b+c)(b+c)$

$a^2 = b^2 + 2bc + c^2$

$AB^2 = BC^2 + 2BC\,CA + CA^2$

(7) a) Sean $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ los versores de la terna mostrada en la figura. Usando producto vectorial, calcular:



i) $\hat{i} \times \hat{j}$

i) $(1,0,0)\times(0,1,0)$

$=(0,0,1)$

ii) $\hat{k}\times\hat{i} = (0,0,1)(1,0,0) = (0,1,0)$

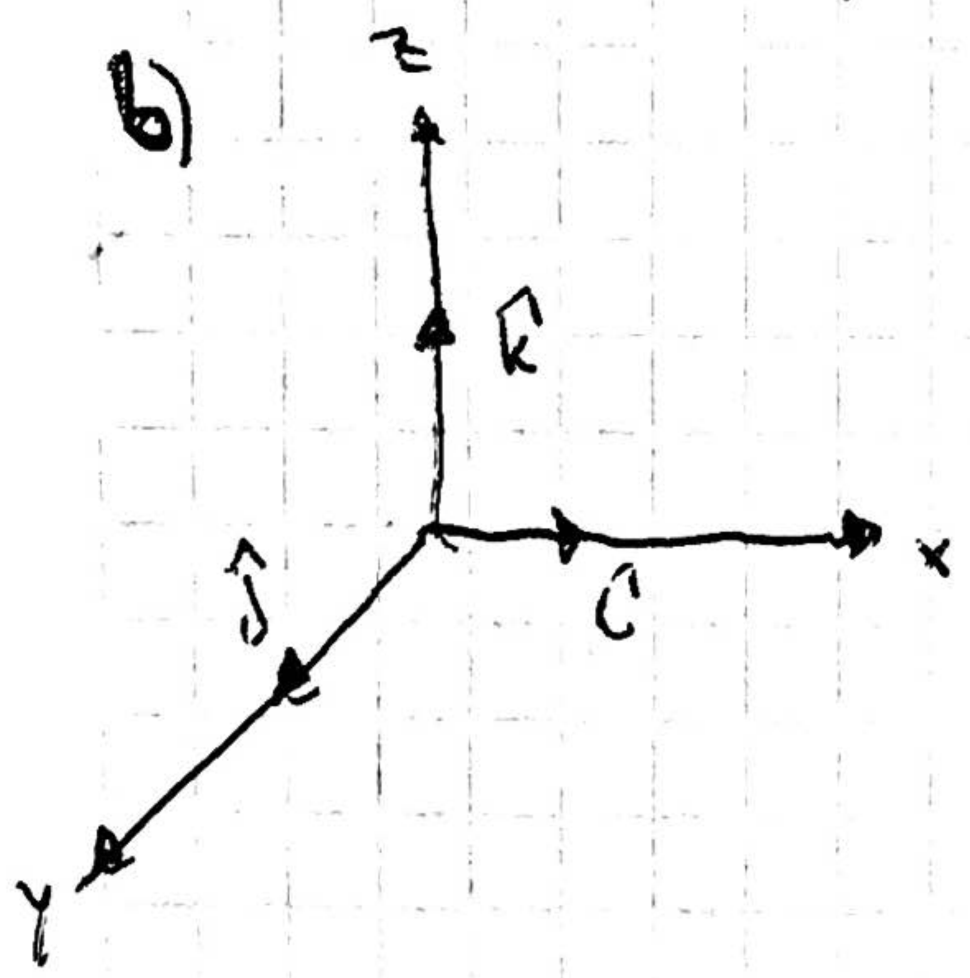
iii) $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$

iv) $\hat{i}\times\hat{i} = (1,0,0)(1,0,0) = (0,0,0)$

v) $\hat{j}\times\hat{j} = (0,1,0)(0,1,0) = (0,0,0)$

vi) $\hat{k}\times\hat{k} = (0,0,0)$

b)



i) $\hat{i}\times\hat{j} = (0,1,0)\times(1,0,0) = (0,0,-1)$

ii) $\hat{k}\times\hat{i} = -\hat{j} = (0,0,1)(0,1,0) = (-1,0,0)$

iii) $\hat{j}\times\hat{k} = -\hat{i}$

iv) $\hat{i}\times\hat{i} = (0,0,0)$

v) $=(0,0,0)$

vi) $=(0,0,0)$

(8) Demostrar que el producto vectorial no es asociativo y que dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ se cumple:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ $\quad$ $\vec{B}\times\vec{C} = (B_x,B_y,B_z)(C_x,C_y,C_z) = (b_yc_z-b_zc_y,\ b_zc_x-b_xc_z,\ b_xc_y-b_yc_x)$

$(a_x,a_y,a_z)\times(b_yc_z-b_zc_y,\ b_zc_x-b_xc_z,\ b_xc_y-b_yc_x) =$

Cinemática

10) Un cuerpo en $t=0$ se encuentra en $x_0=A$, viaja recto con $V=cte$ de módulo desconoc
Cuando transcurre un tiempo T el móvil pasa por el punto B que esta a distancia
d de A

a) Halle $\vec{v}$

b) De dos expresiones para la posición del cuerpo en función del tiempo, una considerando un sistema de coordenadas con su origen en A y otra considerando un sistema de coordenadas con origen en B, grafiquelas

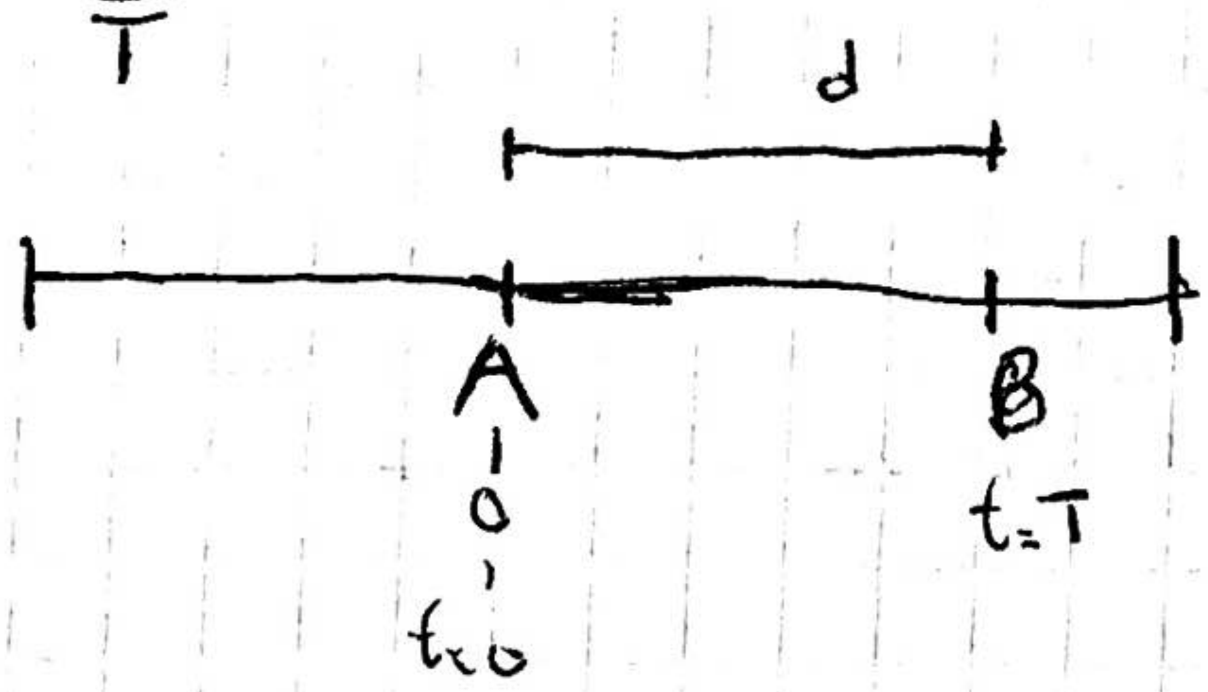
a) $v = v_0$

$x = x_0 + v_0 . t$

$\Rightarrow B = v_0 . T + A$

$v = \frac{B-A}{T} = \frac{d}{T}$

b)



$x(t) = v . t$

$x(t) = v.(t-T)$

11) Un automóvil viaja en línea recta con velocidad constante desde A a C pasando por B. Se sabe que por A pasa a las 12hs, por B a las 13hs y por C a las 15hs. (AB = 50km, BC = desconocido)

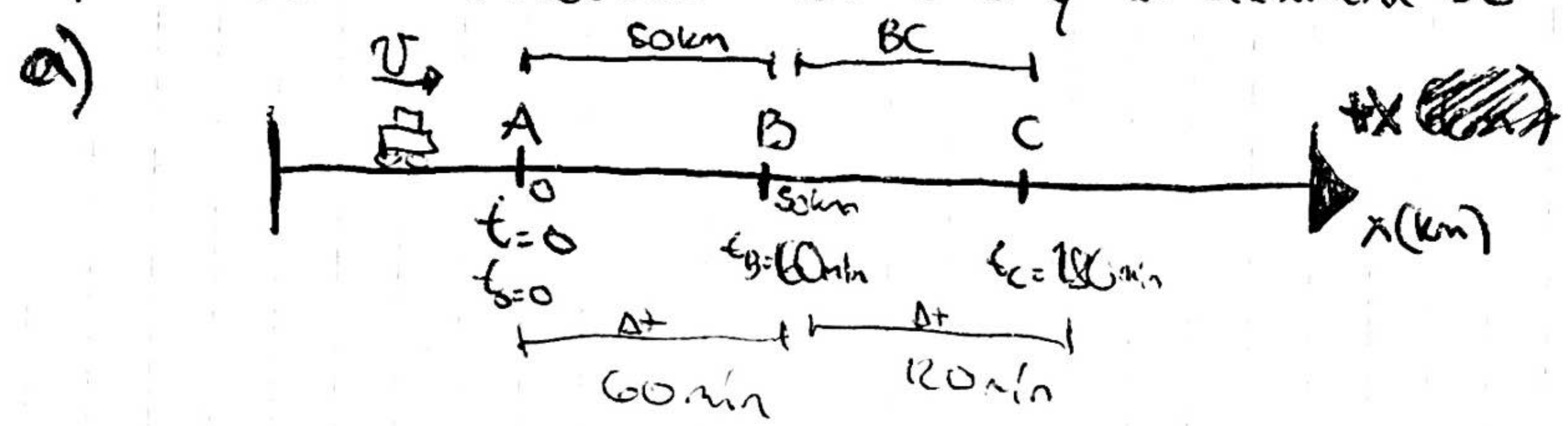
a) Elija un origen de tiempo y un sistema de referencia

b) Elija un instante t_0 ¿Cuando vale x_0? Escriba la ecuación del movimiento

c) Elija otro instante t_0 ¿Cuando vale x_0? Escriba la ecuación de movimiento

d) Calcule la velocidad del auto y la distancia BC

a)

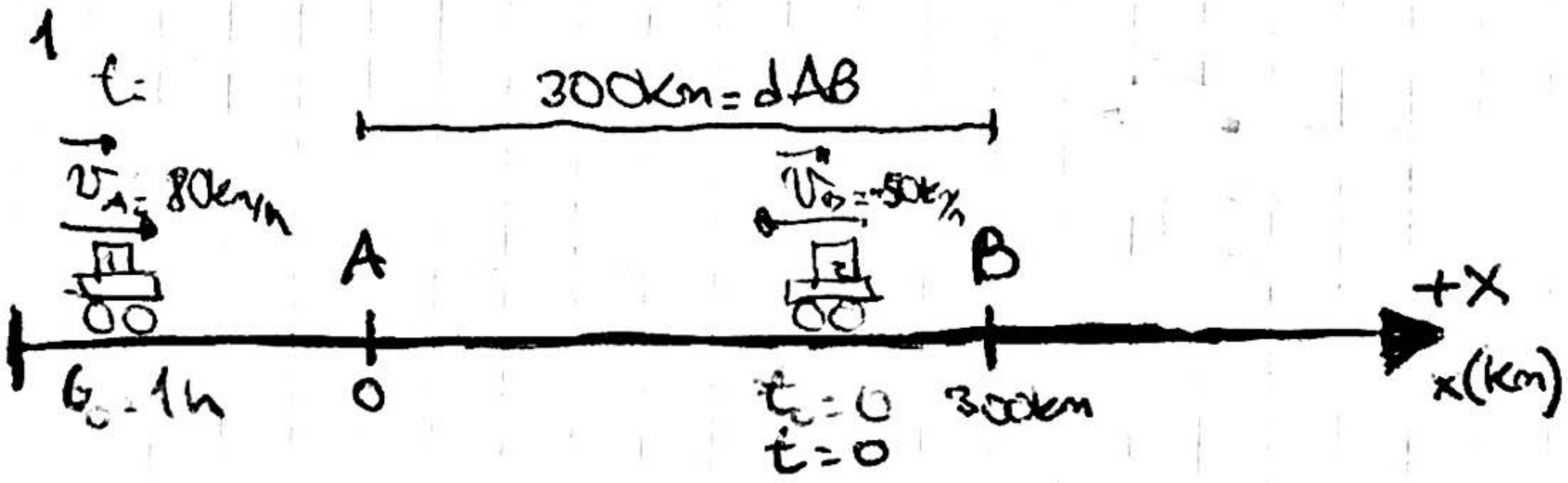


b) $x_0 = 0 \Rightarrow x = v \cdot t$

$v = \frac{50km}{60min} = 50km/h$ $\qquad$ $BC = 50km/h \cdot 3h = 150km \Rightarrow BC = 150km - 50km = 100km$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Rta: } v = 50km/h,\ BC = 100km \\ b)\ x(t) = 50km/h\ t \\ c)\ x(t) = 50km + 50km/h \cdot (t - 1h) \end{array}}$$

12) Un móvil 1 viaja en línea recta desde A hacia B (distancia AB = 300km) a 80km/h y otro móvil 2 lo hace desde B hacia A a 50km/h. El móvil 2 parte 1 hora antes que el móvil 1



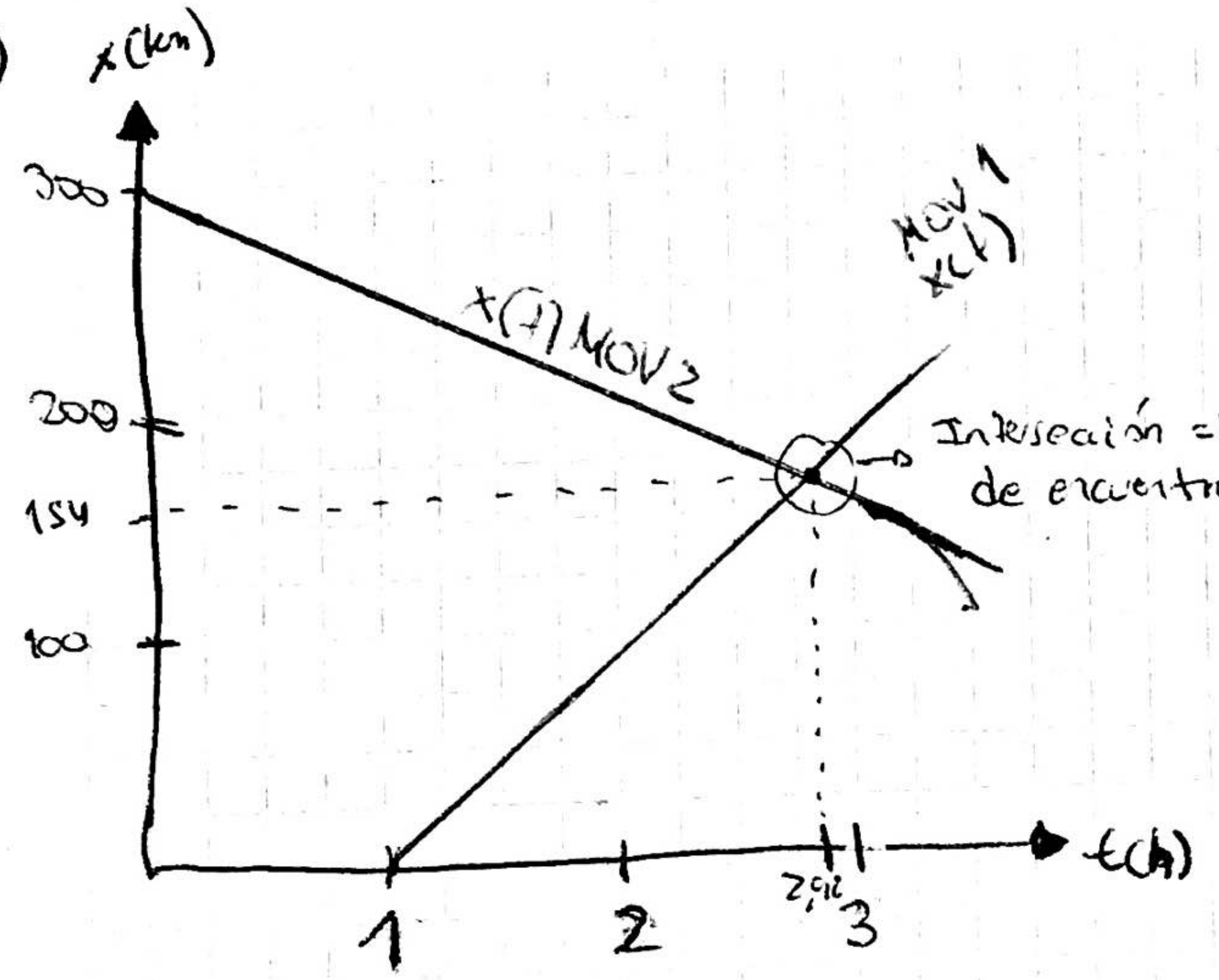
a) Elija un origen de tiempo y un sistema de referencia

b) Escriba los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de los móviles 1 y 2.

c) En un mismo gráfico represente x vs t para ambos móviles. Interprete el significado del punto de intersección de ambas curvas.

d) En un mismo gráfico represente v vs t para los móviles ¿Como encontrará t_e en este gráfico?

c)



Móvil 1

$v_1 = 80 km/h$

$x(t) = 80 km/h\,(t - 1h)$

Móvil 2

$v_2 = 50 km/h$

$x(t) = 300 km - 50 km/h\,(t)$

encuentro

$80 km/h\,(t_e - 1h) = 300 km - 50 km/h\, t_e$

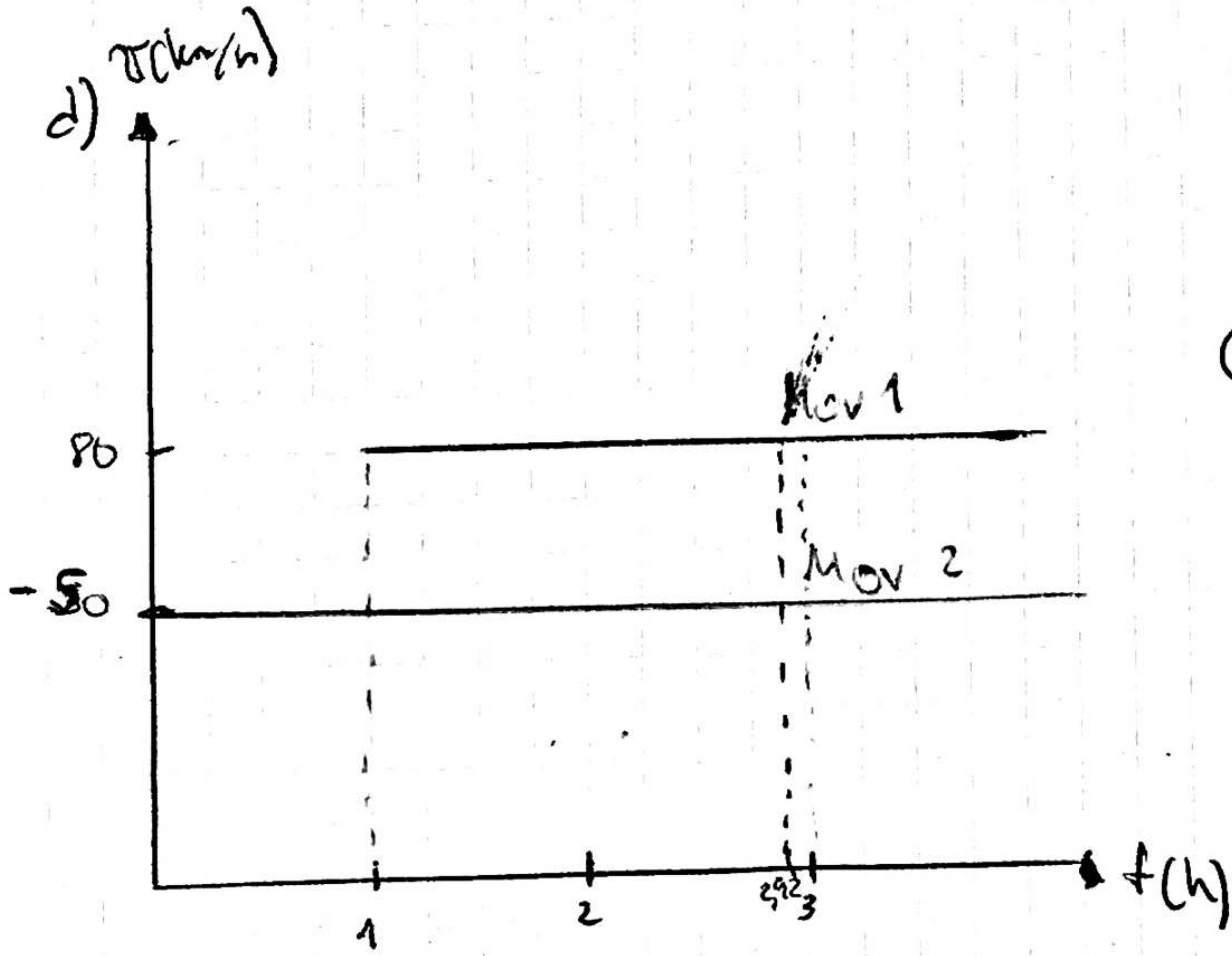
$80 km/h\, t_e + 50 km/h\, t_e = 300 km + 80 km$

$130 km/h\, t_e = 380 km$

$\boxed{t_e = 2,92 h}$

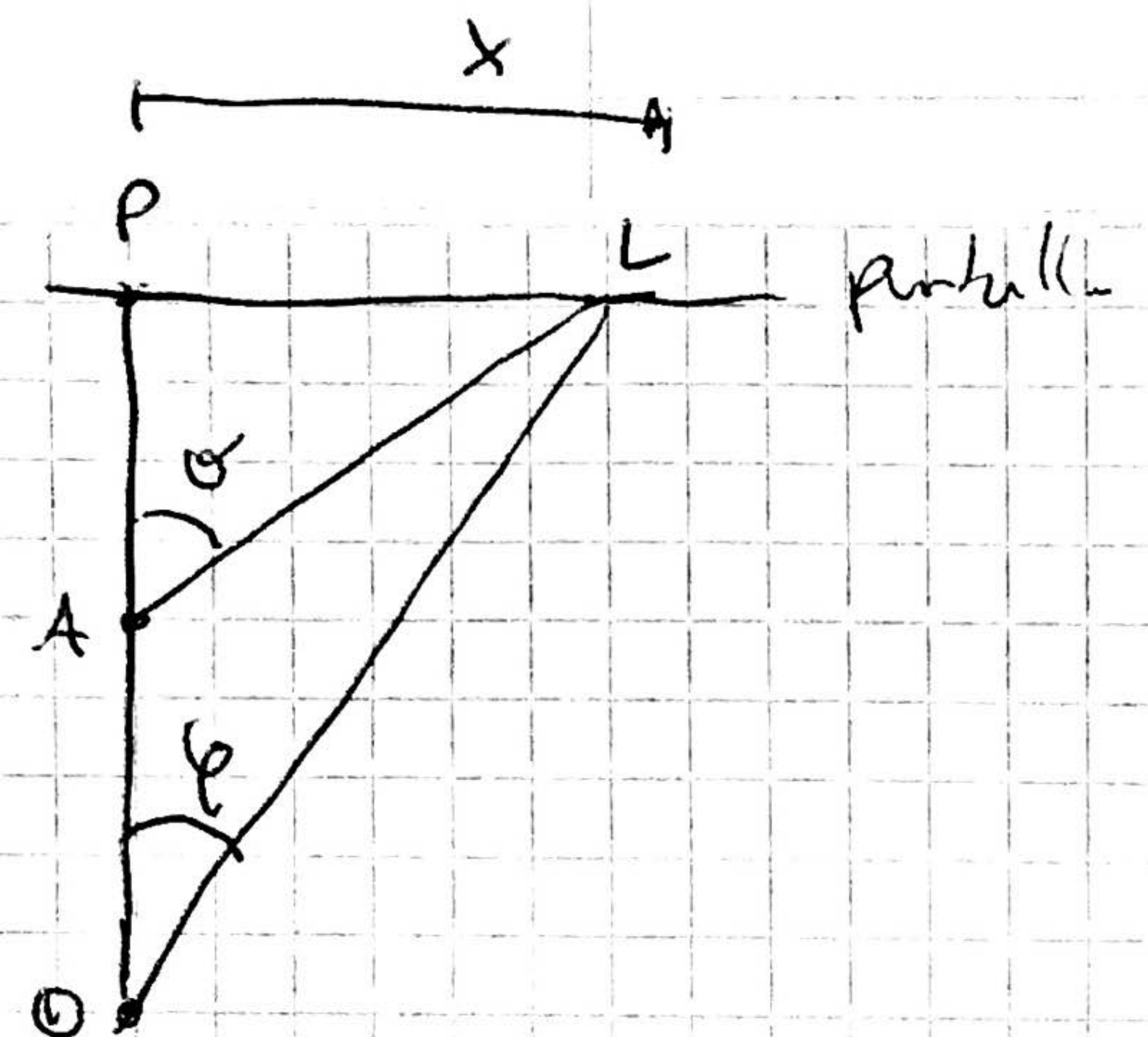
$\boxed{x_E = 154 km}$

d)



(no esta a escala)

17



Datos

$D = OP$

$d = AP$

a) Halle velocidad lineal del punto luminoso sobre la pantalla en función de datos y x

$$\frac{x}{D} = tg\,\varphi \qquad x = tg\,\varphi \cdot D$$

$$\dot{x} = \frac{D}{\cos^2\varphi} \cdot \boxed{\dot{\varphi}} \quad \text{dato}$$

$$x = tg\,\varphi \cdot D$$

$$x = \frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi} \cdot D$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$tg^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\frac{x^2}{D^2} + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\boxed{\dot{x} = \frac{D}{\cos^2\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \left(\frac{x^2}{D^2} + 1\right) D\,\dot{\varphi}}$$

b) $\dot{\theta}$ para d en función de datos y x