

Teoría de dinamo y varios modelos

Trabajo Final Estructura de la materia 1 - Emiliano Fortes

Si bien algunas cuentas en el trabajo no aportan física y podrían omitirse en una publicación, se desarrollan de todas formas pues se toma en cuenta el trabajo como una evaluación final del curso.

1. Introducción

Resulta muy común en el cosmos la presencia de efectos magnéticos sea para estrellas, nubes interestelares, galaxias. El Sol en particular ha sido un cuerpo de extenso estudio, presentando actividades magnéticas en un rango muy amplio de escalas de energía, espacial y temporal. Una característica muy estudiada del mismo es el conocido ciclo solar, durante el cual la cantidad de puntos solares que se observan en la superficie varían en cantidad y se propagan en la dirección polar. El ciclo presenta un periodo de 11 años, con mínimos de 8 años y máximos de 14 años. Físicamente se interpreta que la propagación latitudinal de los puntos solares son ondas magnéticas que se propagan en el interior del Sol.

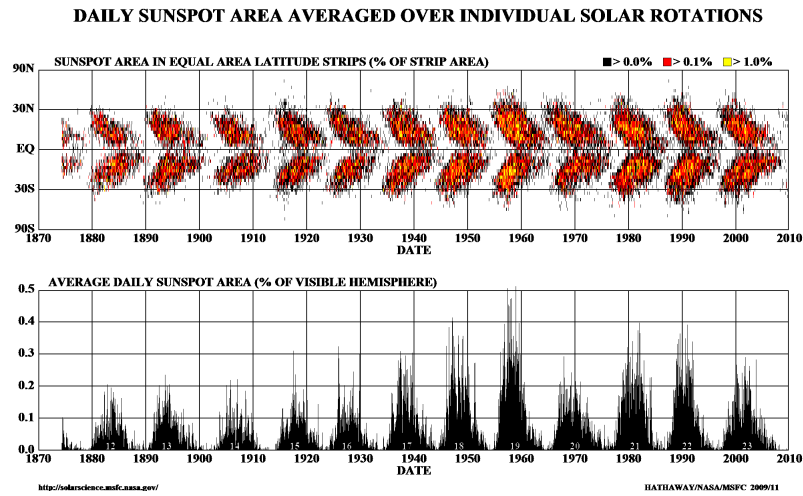


Figura 1: Ciclo solar y evolución de puntos solares a lo largo de los últimos años.

Directamente relacionado con el ciclo solar se observa que el campo magnético del sol presenta un ciclo de 22 años en el cual el campo magnético cambia su polaridad a mitad del periodo y luego regresa a su polaridad inicial.

En 1950 Elsasser encuentra que es posible existan movimientos de fluidos que dan lugar a campos magnéticos como el de la Tierra. Este mecanismo es lo que hoy se conoce como un dinamo hidromagnético. La teoría del dinamo da buena explicación a la fenomenología que presenta el Sol (y otras estrellas), con las ondas del dinamo siendo el resultado del movimiento turbulento dado por la helicidad del fluido (efecto α) y la rotación diferencial de la estrella (efecto Ω). El objetivo final de la teoría es explicar el origen de los campos magnéticos que se observan en el Sol y sus propiedades, entre ellas el ciclo solar, y dar así una extensión a los objetos cósmicos como planetas y galaxias.

2. Teoría de Dinamo

Supongamos un volumen compuesto de un fluido conductor caracterizado por su conductividad eléctrica σ , que ocupa un volumen V en el espacio delimitado por la superficie $S(V)$. El punto de partida serán las ecuaciones de Maxwell para electromagnetismo, que escritas en el sistema internacional de unidades toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

donde μ es la permeabilidad magnética y ϵ es la permitividad eléctrica. Si bien las ecuaciones de Maxwell son invariantes relativistas, en el estudio de la magnetohidrodinámica (MHD) se asume que la velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz $\left(\frac{|\mathbf{u}|}{c} \ll 1\right)$. Bajo esta condición resulta una excelente aproximación despreciar los efectos dados por las corrientes de desplazamiento, simplificando la ecuación (1) del sistema anterior

$$\nabla \times \mathbf{B} \cong \mu \mathbf{J}. \quad (3)$$

Una excelente demostración cualitativa de la aproximación anterior utilizando radios estelares se encuentra en el libro de Jones [3]. Si el campo eléctrico y magnético son generados por la inducción del movimiento en el medio conductor entonces la densidad de corriente sigue la Ley de Ohm. Además, si el medio conductor se encuentra en movimiento, debemos tomar en cuenta esta ley en el sistema de referencia móvil con el fluido

$$\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$$

donde $\bar{\mathbf{J}}$ y $\bar{\mathbf{E}}$ denotan los campos en el sistema de referencia móvil. Cómo tratamos el movimiento del fluido no relativista y además el medio conductor no tiene magnetización ni otra fuerza electromotriz entonces la transformación al sistema en reposo es prácticamente $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{J}$ y el campo solo recibe contribución del termino Lorentziano de la ley de Ohm $\bar{\mathbf{E}} = (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Por lo tanto

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

Utilizando las ecuaciones (2), (3) y (4) podemos despejar de manera sencilla la ecuación para la evolución del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\ (4) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \\ (3) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

de donde es usual definir la difusividad magnética $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$, nombre asignado por el hecho que dado el caso $\mathbf{u} = 0$ entonces la ecuación anterior se transforma en una conocida ecuación de difusividad, por lo tanto materiales de baja conducción tienen un valor de η grande mientras que el conductor perfecto $\eta \rightarrow 0$.

Esta ecuación para la evolución temporal se denota ecuación de inducción para el dinamo. El primer término es la inducción que recibe el cuerpo debido al movimiento del fluido conductor mientras que el segundo término es el generado por la Ley de Ohm. Para completar el conjunto de ecuaciones del sistema falta agregar las ecuaciones de movimiento para el fluido estudiadas en el curso de la materia, es decir, Navier-Stokes, continuidad y energía interna

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_V + \mathbf{J} \times \mathbf{B},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos, \mathbf{f}_V es la fuerza en volumen externa por unidad de volumen y se ha omitido la escritura de la ecuación de energía interna para no introducir demasiadas variables en el trabajo que no serán analizadas. En el trabajo de Ossendrijver se encuentran todas las nombradas previamente junto con una tabla de datos solares muy completa [5].

Existe un conjunto muy grande de restricciones que deben ser impuestas al conjunto para excluir casos problemáticos, algunos ejemplos son:

- Los efectos inducidos están confinados en el volumen compacto V previamente mencionado, para que el campo magnético \mathbf{B} sea generado en V .
- El flujo de velocidades \mathbf{u} sea regular.
- Para que la forma del cuerpo se conserve se pide además $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = 0$ en S .

Tanto el libro de Krause [2] como de Jones [3] entran en más detalle acerca de esto, sin embargo no resulta productivo agregarlo en el trabajo debido a la extensión del mismo.

3. Electrodinámica de campo medio

Para concentrarse en los efectos a grandes escalas, el paso siguiente consiste en encontrar una solución para la inducción del dinamo en términos del campo magnético medio, tratamiento conocido como electrodinámica de campo medio. Consideramos entonces una solución en términos de un campo magnético medio y un campo de velocidades medio

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b} \quad \mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{v}$$

donde $\langle \mathbf{B} \rangle$ se toma como un valor medio de ensamble y \mathbf{b} denota las fluctuaciones del valor medio, por lo tanto $\langle \mathbf{b} \rangle = 0$. Una condición muy importante consiste en asumir que la operación valor medio de ensamble conmuta con las operaciones derivación e integración. Por otro lado $\langle \mathbf{u} \rangle$ es el campo de velocidades medio del cuerpo mientras que \mathbf{v} nota el movimiento convectivo. En nuestro problema interesa el caso donde $\langle \mathbf{u} \rangle$ da referencia a la rotación diferencial del cuerpo.

El tratamiento típico consiste en dar un campo de velocidades media \mathbf{u} como dato e independiente de \mathbf{B} , con el objetivo de estudiar exclusivamente a este último. Introduciendo la expresión para los campos medios en la ecuación de inducción (5) obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \boldsymbol{\epsilon} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times [\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{b} + \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{G} - \eta \nabla \times \mathbf{b}],$$

donde se definieron los campos $\boldsymbol{\epsilon} = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$ y $\mathbf{G} = \mathbf{v} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$. Es importante notar que el campo magnético medio sufre ahora no solo una contribución debida al campo de velocidad media del fluido sino también del campo eléctrico medio $\boldsymbol{\epsilon}$ producto de la parte residual del campo de velocidades medio, o lo que es lo mismo, por las fluctuaciones. Conocer el valor de $\boldsymbol{\epsilon}$ es muy complicado salvo en casos particulares, en su lugar el procedimiento consiste en usar las ecuaciones anteriores para inferir la existencia de una relación lineal entre \mathbf{b} y $\langle \mathbf{B} \rangle$ y de esta forma la existencia de una relación lineal entre $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\langle \mathbf{B} \rangle$ que es posible escribir cómo

$$\epsilon_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle + \beta_{ijk} \frac{\partial \langle B_j \rangle}{\partial x_k} + \dots$$

Estos coeficientes α_{ij} y β_{ij} son pseudotensores pues vinculan un vector axial $\langle \mathbf{B} \rangle$ con un vector polar $\boldsymbol{\epsilon}$. En el caso donde \mathbf{v} representa una turbulencia isotrópica débil (caso donde \mathbf{v} es invariante ante rotaciones pero generalmente no ante reflexiones) se tiene que

$$\boldsymbol{\epsilon} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \beta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle + \dots \quad (7)$$

con

$$\alpha = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \times (\mathbf{v}(t-t')) \rangle dt' \quad \beta = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t-t') \rangle dt'$$

Reemplazando (7) en (6) se obtiene que

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - (\eta + \beta) \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (8)$$

que es lo que previamente nombramos en la introducción como una ecuación de inducción con efecto α . El termino α se asegura de que la solución para la ecuación de inducción media no este sujeta a un conjunto de teoremas anti dinamo, como por ejemplo:

Teorema de Cowling: Un campo magnético simétrico sobre un eje que decae en el infinito no puede ser mantenido en el tiempo por el mecanismo de dinamo.

Teorema: Un campo de velocidades puramente toroidal no puede mantener en el tiempo un mecanismo de dinamo.

Demostraciones de los teoremas anteriores se encuentran en el libro de Jones [3], junto con algunos teoremas más. Resulta conveniente además definir la cantidad $\eta_t = \eta + \beta$, como una difusividad turbulenta. Analizando datos solares se llega a la conclusión que el termino β aumenta la difusividad por ordenes de magnitud pues resulta $\beta \gg \eta$ y por lo tanto $\eta_t \approx \beta$, se dará un poco más de información sobre este último al analizar un dinamo no lineal al final del trabajo.

El efecto α se estudió exhaustivamente en la literatura, y si bien es capaz de generar un campo magnético medio, resulta mucho más interesante lo que se denomina el dinamo con efecto $\alpha\Omega$, que combina el efecto α con la rotación diferencial de la estrella. Tanto α como Ω suelen darse como datos para analizar el campo generado. Determinar el valor de α es un problema de por sí, conclusiones obtenidas en el libro de Stix [1] llevan a la condición de que sea independiente del ángulo azimutal y sea antisimétrico respecto al plano ecuatorial $\alpha(r, \pi - \theta) = -\alpha(r, \theta)$.

Por otro lado, se considera la velocidad angular como una función simétrica respecto al ecuador, independiente del ángulo azimutal y de forma tal que sea la unica causa de movimiento en el campo medio de velocidades

$$\Omega(r, \theta) = \Omega(r, \pi - \theta) \quad \langle \mathbf{u} \rangle = (0, 0, \Omega r \sin(\theta)).$$

Una idea muy popular inspirada por los diagramas mariposa de los puntos solares y la forma de la corona solar en momentos de actividad mínima sugiere que una buena primera aproximación del campo magnético a grandes escalas es simétrico con respecto al eje de rotación del Sol y antisimétrico con respecto del plano ecuatorial. Con esta idea puede modelarse el campo magnético medio completo mediante una descomposición toroidal \mathbf{B}_t y poloidal \mathbf{B}_p

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p.$$

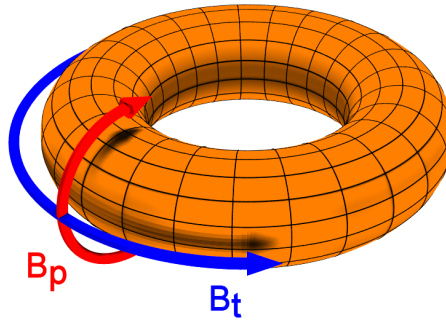


Figura 2: Representación gráfica de la descomposición del campo magnético medio en la dirección poloidal (rojo) y toroidal (azul).

La descomposición sigue una regla de ortogonalidad en la cual dados dos campos toroidal y poloidal se cumple que $\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{B}_p = 0$ para todo punto. Se enuncian además las siguientes propiedades de la descomposición pues serán de utilidad mas adelante:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_t = 0 \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_t \text{ es poloidal} \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_p \text{ es toroidal} \quad (11)$$

Del curso de electromagnetismo sabemos que el campo magnético puede escribirse como el rotor de un potencial vector $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. En particular el tratamiento que haremos es el siguiente: En lugar de tomar todo el campo magnético como rotor de un potencial vector, nos interesa tomar solo la componente poloidal (11) como un rotor $\mathbf{B}_p = \nabla \times \mathbf{A}$ para un campo $\mathbf{A} = A(r, \theta) \hat{\phi}$ puramente toroidal mientras que la componente toroidal la trataremos de manera directa $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}$, es decir:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{A}.$$

Escribiendo todos los campos en coordenadas esféricas tenemos las tiras de vectores:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = (0, 0, \Omega r \sin(\theta)) \quad \langle \mathbf{B} \rangle = (0, 0, B(r, \theta, t)) + \nabla \times (0, 0, A(r, \theta, t)).$$

Es importante notar un par de cosas antes de proseguir con las cuentas. Primero, esta descomposición satisface la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que desarrollamos en esféricas como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (0, 0, B(r, \theta, t)) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial B(r, \theta, t)}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado en el primer paso el hecho de que la divergencia de un rotor es siempre cero y además hemos demostrado en consecuencia la propiedad (9). Por otro lado, recordamos la Guía 0 del curso donde se demostró como ejercicio práctico que para un campo vectorial \mathbf{G} genérico:

$$\nabla^2 \mathbf{G} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}).$$

De la propiedad (9) para campos toroidales (es decir tanto para \mathbf{A} como para \mathbf{B}) el operador Laplaciano se simplifica:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (12)$$

Insertando la descomposición toroidal y poloidal en la ecuación de inducción (8) obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times [\langle \mathbf{u} \rangle \times (\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{A}) + \alpha (\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{A}) - \eta_t \nabla \times (\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{A})].$$

El objetivo ahora consiste en separar estas ecuaciones para obtener la evolución temporal de \mathbf{A} y \mathbf{B} por separado. Empecemos estudiando el primer término de la evolución temporal, notemos que $\langle \mathbf{u} \rangle = (0, 0, \Omega r \sin(\theta))$ es un campo de velocidad media toroidal, por lo tanto

$$\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B} = (0, 0, \Omega r \sin(\theta)) \times (0, 0, B) = 0$$

y de lo cual se sigue automáticamente que

$$\nabla \times [\langle \mathbf{u} \rangle \times (\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{A})] = \nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle \times \nabla \times \mathbf{A}.$$

A su vez utilizando las propiedades (10) y (11) enunciadas anteriormente permiten separar las ecuaciones en cada dirección

$$\text{En la dirección poloidal} \rightarrow \frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \left(\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - \eta_t \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \right) \quad (13)$$

$$\text{En la dirección toroidal} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \nabla \times \mathbf{A} + \alpha \nabla \times \mathbf{A} - \eta_t \nabla \times \mathbf{B})$$

La ecuación en la dirección poloidal contiene la operación rotor en todos sus términos y por lo tanto admite una integración, simplificando la ecuación a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B - \eta_t \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \stackrel{(12)}{=} \alpha B + \eta_t \nabla^2 A.$$

En cuanto a la dirección toroidal, tenemos que arremangarnos y calcular explícitamente. A continuación se desarrolla el termino más laborioso de la ecuación:

$$\begin{aligned} \nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (0, 0, \Omega r \sin(\theta)) \times \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)), -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA), 0 \right) \\ &= \nabla \times \left(\Omega \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} (rA), \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)), 0 \right) \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Omega \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) \right] \hat{\phi} \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) + \Omega \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} (rA) - \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) \right] \hat{\phi} \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (rA \sin(\theta)) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Reemplazando todo en la ecuación toroidal y utilizando la propiedad (12):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (rA \sin(\theta)) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\alpha}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) \right) + \eta_t \nabla^2 B.$$

Con todo esto tenemos las dos ecuaciones para trabajar, sin embargo, se realizan varias aproximaciones más para tener un sistema sencillo. Supongamos que la rotación diferencial Ω es más intensa que la helicidad α y que Ω depende débilmente de la latitud. En consecuencia la primer condición permite despreciar los términos que contienen α en la ecuación para la evolución de B , en particular

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\alpha}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) \right) \ll \text{términos que contienen } \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \text{ y } \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

mientras que con la segunda condición simplemente se desprecia el termino con $\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$. Para seguir con la notación usual del campo de estudio se define $G(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r}$. Con todo esto y desarrollando los operadores laplacianos en coordenadas esféricas se llega al conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \alpha B + \frac{\eta_t}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) + \frac{\eta_t}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) \right], \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= rG(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) + \frac{\eta_t}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rB) + \frac{\eta_t}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin(\theta)) \right]. \end{aligned}$$

Antes de continuar haciendo aproximaciones, haremos los cambios de variables que se suelen utilizar en la literatura para adimensionalizar las ecuaciones dadas las magnitudes de los efectos que tiene este tipo de fenómeno. La coordenada radial se mide en unidades del radio de la estrella en cuestión, por lo tanto pasamos de $r \rightarrow rR$ donde ahora r es adimensional. De manera similar la unidad del tiempo se cambia de forma tal que $t \rightarrow t \frac{R^2}{\eta_t}$. El valor de la helicidad no es conocido a priori pero es posible medirlo en función de su valor máximo o de su valor típico según convención del autor, en este trabajo se toma el caso del valor típico $\alpha \rightarrow \alpha \alpha_0$ y se realiza el mismo proceso para $G \rightarrow G G_0$. Reescribiendo las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \left(\frac{\alpha_0 R^2}{\eta_t} \right) \alpha B + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) \right], \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{R^3 G_0}{\eta_t} \right) rG(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rB) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin(\theta)) \right]. \end{aligned}$$

Parker [6] noto que si el mecanismo de dinamo se genera en una superficie delgada, el sistema anterior de dos dimensiones (r, θ) se puede reducir a una única ecuación para θ al tomar el valor medio sobre r .

Para no contaminar la notación usada hasta ahora simplemente se explica el proceso de valores medios y no se cambia ninguna notación; se toma entonces

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) \right\rangle_r = -\mu^2 A \quad \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rB) \right\rangle_r = -\mu^2 B$$

$$\langle \alpha(r, \theta) \rangle_r = \alpha(\theta) \quad \langle A(r, \theta) \rangle_r \frac{\eta_t}{\alpha_0 R} = A(\theta) \quad \langle B(r, \theta) \rangle_r = B(\theta) \quad \langle G(r, \theta) \rangle_r = G(\theta)$$

donde $\langle \dots \rangle_r$ denota que el promedio en los valores de r y μ^2 define una difusividad radial efectiva producto de la dirección promediada. De esta manera se tiene el conjunto

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \left(\frac{\alpha_0 R^2}{\eta_t} \right) \alpha(\theta) B + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) \right] - \mu^2 A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{\alpha_0 G_0 R^3}{\eta_t^2} \right) G(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin(\theta)) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin(\theta)) \right] - \mu^2 B. \end{aligned}$$

Con todo esto se define el número de dinamo $D = \frac{\alpha_0 G_0 R^3}{\eta_t^2}$ como una medida de las dos magnitudes que inducen un efecto de dinamo relativos a la difusividad efectiva. Si alguna de las dos α_0 o $\nabla \Omega$ son cero, entonces la solución decae exponencialmente. Se ha confirmado mediante diferentes esquemas que D debe ser mayor que un valor crítico para poder evitar el decaimiento, al final del trabajo haremos un ejercicio sencillo para ilustrar esta idea. La aproximación más simple del sistema de ecuaciones anterior la obtuvo Parker de manera fenomenológica en [6]. Resultan como una aproximación a primer orden para caso de ondas de dinamo cortas y reduce el sistema anterior al conjunto

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \alpha(\theta) B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \mu^2 A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= DG(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - \mu^2 B. \end{aligned}$$

Quedó pendiente la forma de α ; es común en la literatura sobre esta teoría proponer que sea de la forma

$$\alpha(\theta) \propto \frac{1}{1 + \tau B^2} \cos(\theta)$$

que cumple con la condición de anti simetría respecto del plano ecuatorial propuesta previamente. Para tratar el caso lineal del sistema se toma el caso $\tau = 0$. A su vez, se toma el caso mas sencillo posible para $G(\theta) = 1$. Finalmente se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} = \cos(\theta) B + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \mu^2 A} \quad \boxed{\frac{\partial B}{\partial t} = D \sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - \mu^2 B}. \quad (14)$$

Jennings [7] propuso un conjunto de soluciones para el modelo unidimensional de Parker las cuales podemos extender al nuestro. En particular el modelo del trabajo de Jennings consiste en un dinamo no lineal con ecuaciones de inducción dadas por

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{DB \cos(x)}{1 + \tau B^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\sin(x)}{1 + \kappa B^2} \frac{\partial A}{\partial x} - \lambda B^3 + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (15)$$

donde se obtiene el sistema lineal de ecuaciones al tomar $\tau = \kappa = \lambda = 0$ y por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial t} = DB \cos(x) + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \sin(x) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

que es efectivamente el mismo sistema en el caso que $\mu^2 = 0$. La simetría de los campos toroidal y poloidal respecto al eje requieren la condición de que tanto A como B se anulen en los polos. En consideración de lo anterior se propone una solución en forma de serie

$$A(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx) \quad B(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$$

para el modelo de Jennings y por extensión al nuestro con el cambio $x \rightarrow \theta$. Además hay dos condiciones más que dependen de si estamos interesados en soluciones de simetría estrictamente dipolar o cuadrupolar, veremos que como consecuencia de estas posibilidades se terminan restringiendo los valores de n de forma diferente. Se realiza además un método de diferencias finitas para estudiar el modelo no lineal de Jennings y se hace una pequeña comparación con el campo magnético Solar.

Por último, para analizar el hecho de que D en general debe ser mayor que un valor crítico, resolveremos de forma exacta el modelo unidimensional de Parker en coordenadas cartesianas y haremos una extensión al modelo que planteamos inicialmente, cuya solución no será desarrollada por completo pues es un problema muy avanzado.

4. Soluciones del problema

4.1. Sistema principal

Se propone como solución al sistema de ecuaciones (14) una solución en forma de serie infinita

$$A(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\theta) \quad B(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\theta).$$

Luego podremos tomar los casos particulares donde el campo es estrictamente dipolar o cuadrupolar. Conviene antes de proseguir enunciar las propiedades trigonométricas

$$\cos(\theta)\sin(n\theta) = \frac{1}{2} [\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta)], \quad (16)$$

$$\sin(\theta)\cos(n\theta) = \frac{1}{2} [-\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta)]. \quad (17)$$

Empezando por la ecuación para A introducimos la solución en forma de serie y desarrollamos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} - \cos(\theta)B - \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \mu^2 A = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dot{a}_n + \overset{\equiv \mu_n^2}{(n^2 + \mu^2)} a_n - \cos(\theta)b_n \right) \sin(n\theta) \right] = 0 \\ (16) \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\dot{a}_n + \mu_n^2 a_n) \sin(n\theta) - \frac{b_n}{2} [\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta)] \right] = 0 \end{aligned}$$

condición de la cual es posible reescribir los primeros términos para mayor claridad

$$\left(\dot{a}_1 + \mu_1^2 a_1 - \frac{b_2}{2} \right) \sin(\theta) + \left(\dot{a}_2 + \mu_2^2 a_2 - \frac{b_1 + b_3}{2} \right) \sin(2\theta) + \left(\dot{a}_3 + \mu_3^2 a_3 - \frac{b_2 + b_4}{2} \right) \sin(3\theta) \dots = 0$$

y como se debe cumplir para todo valor de θ y t no queda otra opción que los términos que acompañan a los senos se anulen, obteniendo un conjunto de ecuaciones diferenciales infinito. Por supuesto, será necesario truncar la serie para algún valor N a la hora de buscar una solución. Realizando el mismo procedimiento para la ecuación de B se obtiene que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B}{\partial t} - D \sin(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \mu^2 B = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n + \mu_n^2 b_n) \sin(n\theta) - n D \sin(\theta) a_n \cos(n\theta)] = 0 \\ (17) \Leftrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} \left[(b_n + \mu_n^2 b_n) \sin(n\theta) - n D \frac{a_n}{2} [-\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta)] \right] = 0. \end{aligned}$$

Nuevamente escribiendo los primeros términos

$$\left(\dot{b}_1 + \mu_1^2 b_1 + 2D \frac{a_2}{2} \right) \sin(\theta) + \left(\dot{b}_2 + \mu_2^2 b_2 - D \frac{a_1}{2} + 3D \frac{a_3}{2} \right) \sin(2\theta) + \left(\dot{b}_3 + \mu_3^2 b_3 - 2D \frac{a_2}{2} + 4D \frac{a_4}{2} \right) \sin(3\theta) \dots = 0$$

y ahora se tien el conjunto de ecuaciones diferenciales a integrar completo. Antes de proseguir a la resolución del conjunto anterior es importante estudiar la polaridad de las soluciones.

Para obtener un campo estrictamente dipolar se deben añadir las condiciones $B = 0$ y $\frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$ en el ecuador. Introduciendo la serie en estas condiciones

$$B\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{2} = m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow B(\theta, t) = \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} b_n(t) \sin(m\theta),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta}\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow n = 2m' - 1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow A(\theta, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n(t) \sin(n\theta),$$

restrigiendo los valores posibles de cada n en las sumatorias. De manera completamente análoga si estudiamos el caso estrictamente cuadrupolar se llega a las condiciones invertidas

$$B(\theta, t) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n(t) \sin(m\theta),$$

$$A(\theta, t) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} a_n(t) \sin(n\theta),$$

y por lo tanto se concluye que las soluciones de serie sin restricción son una suma de la contribución de un campo estrictamente dipolar y otro cuadrupolar

$$A = A_{Dipolar} + A_{Cuadrupolar} \quad B = B_{Dipolar} + B_{Cuadrupolar}.$$

No solo eso, si no que es posible identificar en las sumatorias obtenidas para la serie completa que términos pertenecen a que contribución; a ojo se pueden separar de forma tal que:

$$\overset{Dipolar}{\left(\dot{a}_1 + \mu_1^2 a_1 - \frac{b_2}{2}\right) \sin(\theta)} + \overset{Cuadrupolar}{\left(\dot{a}_2 + \mu_2^2 a_2 - \frac{b_1 + b_3}{2}\right) \sin(2\theta)} + \overset{Dipolar}{\left(\dot{a}_3 + \mu_3^2 a_3 - \frac{b_2 + b_4}{2}\right) \sin(3\theta)} \dots = 0,$$

$$\overset{Cuadrupolar}{\left(\dot{b}_1 + \mu_1^2 b_1 + 2D \frac{a_2}{2}\right) \sin(\theta)} + \overset{Dipolar}{\left(\dot{b}_2 + \mu_2^2 b_2 - D \frac{a_1}{2} + 3D \frac{a_3}{2}\right) \sin(2\theta)} + \overset{Cuadrupolar}{\left(\dot{b}_3 + \mu_3^2 b_3 - 2D \frac{a_2}{2} + 4D \frac{a_4}{2}\right) \sin(3\theta)} \dots = 0,$$

y por lo tanto cada polaridad tiene sus ecuaciones diferenciales desacopladas de la otra polaridad. Esto último permite reescribir los sistemas anteriores de manera compacta cómo

$$\dot{a}_m = \frac{b_{m-1} + b_{m+1}}{2} - \mu_m^2 a_m \quad \dot{b}_m = \frac{D}{2} [(m-1) a_{m-1} - (m+1) a_{m+1}] - \mu_m^2 b_m$$

donde $m = 1, 2, 3, \dots$. El conjunto de ecuaciones ordinarias diferenciales obtenidas es un sistema a coeficientes constantes, por lo que la dependencia temporal de las mismas es de la forma $e^{\Gamma t}$ con $\Gamma \in \mathbb{C}$. Como es un conjunto infinito de ecuaciones ordinarias existen por su parte un conjunto infinito de modos Γ . Sin embargo, al truncar la cantidad de términos en algún valor N sobreviven solamente $2N$ ecuaciones diferenciales, donde la mitad son términos dipolares y la otra mitad cuadrupolares. Se puede entonces pasar a resolver un problema matricial al pasar a notación vectorial. Con este objetivo se definen para cada polaridad los vectores

$$X_{Dipolar} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad X_{Cuadrupolar} = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \\ b_3 \\ a_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

cuyo último término será a_N o b_N según la paridad de N y el sector de polaridad que se este trabajando. A su vez es posible definir las matrices H de forma tal que

$$\frac{dX}{dt} = HX$$

las cuales son tridiagonales para cada polaridad y de la forma

$$H_{Dipolar} = \begin{pmatrix} -\mu_1^2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{D}{2} & -\mu_2^2 & -3\frac{D}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & -\mu_3^2 & \frac{1}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 3\frac{D}{2} & -\mu_4^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad H_{Cuadrupolar} = \begin{pmatrix} -\mu_1^2 & -2\frac{D}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\mu_2^2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 2\frac{D}{2} & -\mu_3^2 & -4\frac{D}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\mu_4^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Debido a la dependencia temporal inferida previamente de los coeficientes constantes tenemos $X \rightarrow X e^{\Gamma t}$, que al introducir en el sistema anterior lleva a un sistema de autovalores y autovectores

$$\frac{dX}{dt} = \Gamma X = HX.$$

En general Γ será un número con parte real y compleja. Para obtener campos magnéticos oscilatorios interesa entonces variar D y encontrar los valores particulares donde $Re(\Gamma) = 0$ y por lo tanto el modo es puramente oscilatorio. Dada la naturaleza del algebra de autovalores, para todo modo tal que $Re(\Gamma) = 0$ habrá dos modos con parte compleja, uno el complejo conjugado del otro. Jennings realizo este proceso para el sistema en el que $\mu = 0$. Como ejercicio práctico realizamos la diagonalización para algunos valores de μ entre 0 y 3 y reproducimos los resultados de Jennings para contrastar. Se analizarán solo valores de $D < 0$ pues se corresponde con ciclos que migran de los polos al ecuador como ocurre en el Sol.

D	-9	-102	-241	-264	-668	-2097	-3293	-7399	-7846
Parity	Q	D	Q	Q	Q	D	Q	Q	D
Freq.	0	4.6	0	3.2	0	28.3	36.5	74.6	97.2

Figura 3: Tabla de autovalores obtenida por Jennings [7] al truncar para $N = 15$ en el sistema donde $\mu = 0$.

μ	$D_{Dipolar}$	$Im(\Gamma)_{Dipolar}$
0	-102, -2097, -7846, -14331	4.56, 28.29, 97.18, 41.31
1	-2295, -14908	30.05, 41.05
2	-2917, -16719	35.39, 40.27
3	-20019	38.81

Figura 4: Tabla de autovalores para el sistema dipolar obtenida al truncar para $N = 15$ y variando μ .

μ	$D_{Cuadrupolar}$	$Im(\Gamma)_{Cuadrupolar}$
0	-9, -264, -668, -3293, -7399	0, 3.16, 0, 36.46, 71.58
1	-2236, -3811	0, 0
2	-7479	0
3	-5140, -10516	51.12, 0

Figura 5: Tabla de autovalores para el sistema cuadrupolar obtenida al truncar para $N = 15$ y variando μ .

La única discrepancia obtenida con respecto a los resultados de Jennings resulta para $D_{Cuadrupolar}(\mu = 0) = -241$, el cual no aparece con el programa utilizado. La conclusión al respecto de esto es sencilla y es que lo que se considera un valor 0 de computadora en el programa utilizado con respecto al programa usado por Jennings es menor. Una tabla generalmente no es un resultado muy elegante de presentar.

Moss en 2003 [[4]] estudió este sistema cuando $\alpha(\theta) = \frac{1}{1+B^2}\cos(\theta)$ para el caso dipolar y presento el siguiente resultado para el campo B .

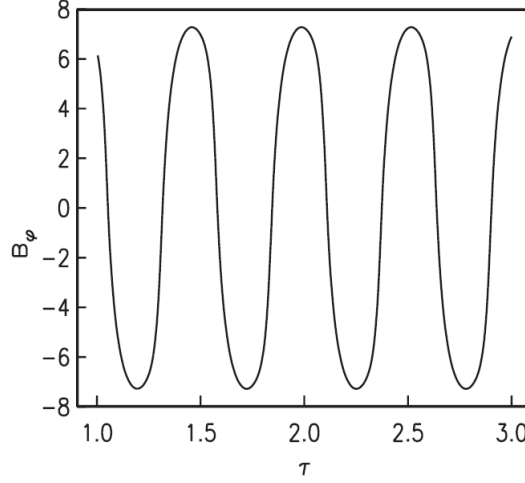


Figura 6: Campo B obtenido por Moss en [[4]] para $D = -10^4$, $\mu = 3$ y $\theta = \pi/4$.

En su trabajo no se detalla con qué método obtuvo este resultado ni con qué frecuencia oscila el campo magnético, a ojo parece ser que un período del orden de $\tau \approx 0,6$. Truncando el sistema para $N = 7$ en el caso dipolar se encontro un campo con período similar, sin embargo cómo se menciono antes, el sistema es un poco distinto por el hecho del factor que modula α .

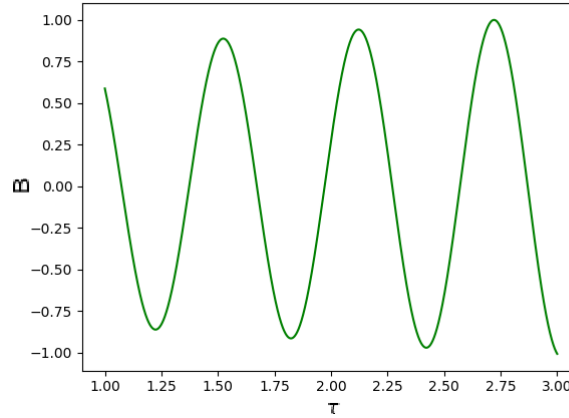


Figura 7: Campo $B_{toroidal}$ normalizado al truncar en $N = 7$ para $D = -3250 \approx -10^4$, $\mu = 3$ y $\theta = \pi/4$.

Un último análisis que se realizó fue la búsqueda de los modos oscilatorios en función del valor de truncamiento N . Se obtuvo que al variar entre los valores $20 \leq N \leq 100$ para el caso dipolar el sistema devuelve modos oscilatorios con sólo dos frecuencias posibles de valores $Im(\Gamma_{Dipolar}) \approx 44$ e $Im(\Gamma_{Dipolar}) \approx 88$ respectivamente.

El mismo análisis aplicado al caso cuadrupolar devuelve dos frecuencias posibles de valores $Im(\Gamma_{Cuadrupola}) \approx 105$ e $Im(\Gamma_{Cuadrupolar}) \approx 177$ respectivamente.

Otro posible estudio que se puede realizar de lo anterior es ver como varía la parte real de Γ en función del truncamiento para los modos oscilatorios, de esta forma ver como varía el crecimiento en el

tiempo de las soluciones.

4.2. Teoría no lineal

Jennings reemplazó además la serie dentro del sistema no lineal. Realizando las cuentas totalmente análogas se obtiene un sistema de la forma

$$\dot{a}_m = \frac{b_{m-1} + b_{m+1}}{2(1 + \tau B^2(\theta))} - \mu_m^2 a_m \quad \dot{b}_m = \frac{D}{2(1 + \kappa B^2(\theta))} [(m-1)a_{m-1} - (m+1)a_{m+1}] - (\mu_m^2 - \lambda B^2(\theta)) b_m.$$

Y luego mediante un método de *FFT* logró integrar las ecuaciones para distintos valores de truncamiento. El camino a seguir en este trabajo será utilizar teoría de integración de ecuaciones en derivadas parciales y realizar el computo numérico, por una cuestión de que realmente es mucho más sencillo que de la forma anterior. No obstante mediante el método utilizado se encontraron resultados muy interesantes.

A continuación se reescribe el sistema no lineal (15)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{DB \cos(\theta)}{1 + \tau B^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \mu^2 A \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\sin(\theta)}{1 + \kappa B^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - \mu^2 B - \lambda B^3 \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

El conjunto de condiciones de contorno para el tratamiento del campo dipolar es

$$A(0, t) = B(0, t) = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial t}(\pi/2, t) = B(\pi/2, t) = 0 \quad (18)$$

Notar que se usa el intervalo $[0, \pi/2]$ y no $[0, \pi]$, algo muy común en la literatura y que se realiza para ahorrar computo pues se presume el campo es simétrico respecto al ecuador. El método de integración a utilizar es el de diferencias finitas en derivadas parciales. Se toma un paso temporal Δt y un paso espacial $\Delta \theta$, con ambos valores pequeños y las siguientes aproximaciones para el cálculo numérico:

$$\frac{\partial A}{\partial t}(\theta_i, t_j) = \frac{A(\theta_i, t_{j+1}) - A(\theta_i, t_j)}{2\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(\theta_i, \tau_j) \quad \tau_j \in (t_j, t_{j+1})$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta}(\theta_i, t_j) = \frac{A(\theta_{i+1}, t_j) - A(\theta_{i-1}, t_j)}{2\Delta \theta} - \frac{\Delta \theta}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}(\chi_i, t_j) \quad \chi_i \in (\theta_{i-1}, \theta_{i+1})$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}(\theta_i, t_j) = \frac{A(\theta_{i+1}, t_j) - 2A(\theta_i, t_j) + A(\theta_{i-1}, t_j)}{(\Delta \theta)^2} - \frac{(\Delta \theta)^2}{12} \frac{\partial^4 A}{\partial \theta^4}(\xi_i, t_j) \quad \xi_i \in (\theta_{i-1}, \theta_{i+1})$$

y de forma totalmente análoga se hace lo mismo para B . Para simplificar la notación se resume $A(\theta_i, t_j) = A_{ij}$ y $B(\theta_i, t_j) = B_{ij}$ e introduciendo en las ecuaciones del sistema se obtiene que

$$\frac{A_{i,j+1} - A_{ij}}{\Delta t} - \frac{DB_{i,j} \cos(\theta_i)}{1 + \tau B_{i,j}^2} - \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{(\Delta \theta)^2} + \mu^2 A_{i,j} = 0,$$

$$\frac{B_{i,j+1} - B_{ij}}{\Delta t} - \frac{\sin(\theta_i)}{1 + \kappa B_{i,j}^2} \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2\Delta \theta} - \frac{B_{i+1,j} - 2B_{i,j} + B_{i-1,j}}{(\Delta \theta)^2} + \mu^2 B_{i,j} + \lambda B_{i,j}^3 = 0$$

de las cuales se despeja $A_{i,j+1}$ y $B_{i,j+1}$ para la integración numérica y tal despeje no se escribe en el trabajo pues no aporta. Por su parte, y muy importante para no tener problemas de computo, los errores de truncamiento locales cumplen

$$\tau_{i,j}^A = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(\theta_i, \tau_j^A) - \frac{(\Delta \theta)^2}{12} \frac{\partial^4 A}{\partial \theta^4}(\xi_i^A, t_j) \quad \tau_{i,j}^B = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}(\theta_i, \tau_j^B) - \frac{(\Delta \theta)^2}{12} \frac{\partial^4 B}{\partial \theta^4}(\xi_i^B, t_j).$$

En general, el análisis de que tan pequeños deben ser Δt y $\Delta \theta$ se puede obtener analíticamente tal que la solución converja. Esto de por sí requiere un poco de trabajo extra, en su lugar lo que haremos es variar los parámetros y confirmar con resultados de otros autores para justificar que el método funciona.

Para cumplir las condiciones de contorno se proponen cómo condiciones iniciales

$$A(\theta_j, 0) = A_0 e^{-(\theta_j^2 - 1)} \quad B(\theta_j, 0) = B_0 \sin(2\theta_j)$$

tales que si A_0 es pequeño entonces $A(0, 0) \approx A(\pi/2, 0) \approx 0$ y más importante aún cumple la condición de dipolaridad tal que $\frac{\partial A}{\partial \theta} \big|_{\pi/2} \approx 0$. Por su parte $B(0, 0) = B(\pi/2, 0)$.

El punto de partida será el trabajo de Moss [4] en el cual se estudia el sistema con $\kappa = \lambda = 0$ y $\tau = 1$ y luego se analizará como cambian las soluciones en función de los parametros τ , κ , y λ del problema. En la **Figura 8** se muestran los campos obtenidos por Moss mientras que en la **Figura 9** se muestran resultados para iguales condiciones con el método de diferencias finitas propuesto.

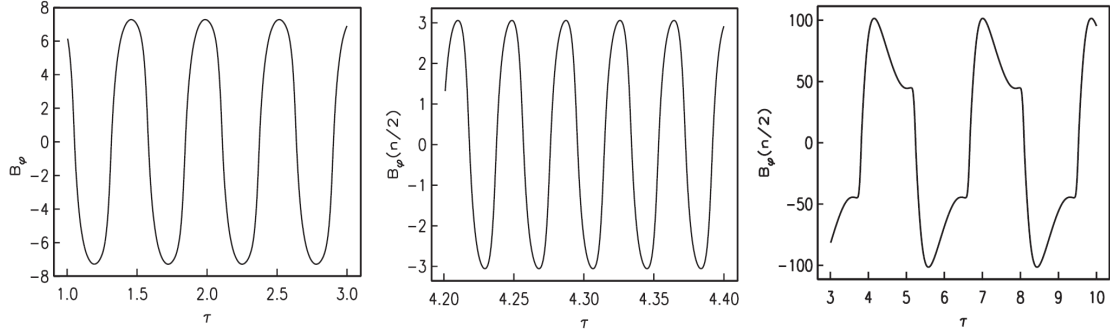


Figura 8: Campos B obtenidos por Moss en [4] para $\theta = \pi/4$. **Izquierda:** $D = -10^4$, $\mu = 3$. **Centro:** $D = -10^5$, $\mu = 10$. **Derecha:** $D = -10^5$, $\mu = 0$.

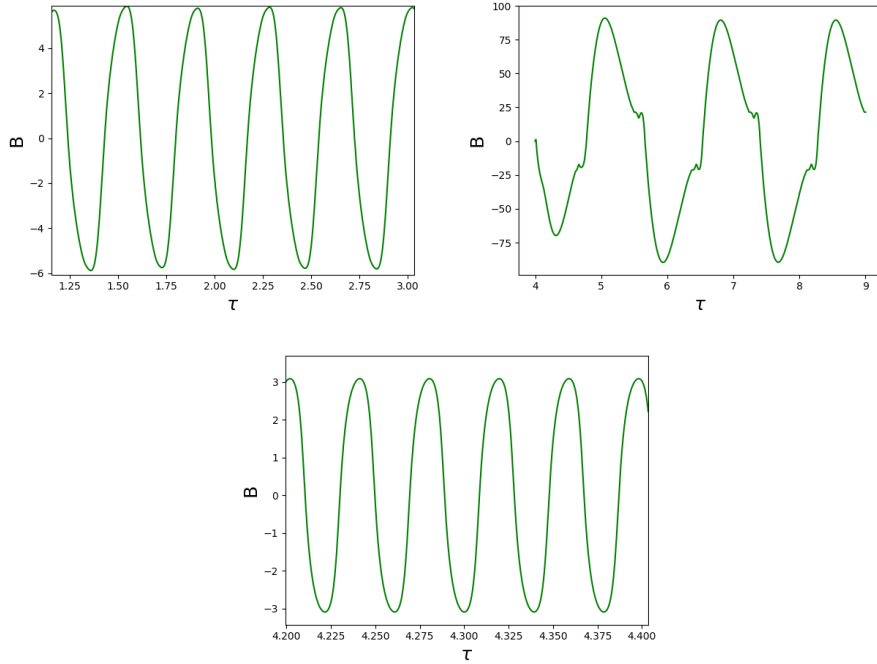


Figura 9: Componentes toroidales del campo magnético obtenidas con el método de diferencias finitas para $\Delta t = 0,0001$, $\Delta \theta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{100}$, $A_0 = 0,001$, $B_0 = 0,01$ y evaluados en $\theta = \pi/4$. **Izquierda:** $D = -10^4$, $\mu = 3$. **Centro:** $D = -10^5$, $\mu = 10$. **Derecha:** $D = -10^5$, $\mu = 0$.

Efectivamente los resultados coinciden muy bien y dan confianza de que el método funciona correctamente. Desde este punto de partida ahora es posible estudiar que sucede con la solución al variar κ y λ . Vamos a trabajar, debido a que tiene período menor y por lo tanto hacen falta menos pasos temporales, con el caso $D = -10^5$ y $\mu = 3$.

4.2.1. $\tau = 1, 0 \leq \kappa \leq 1, \lambda = 0$

Realizando este análisis lo que se observa es que el nuevo factor reduce la amplitud del campo oscilatorio a medida que crece; Por su parte la frecuencia varía en magnitudes pequeñas.

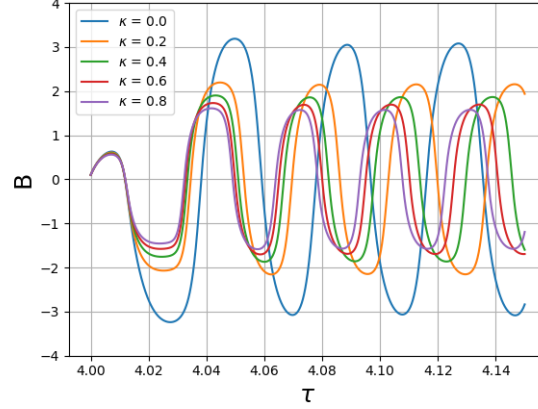


Figura 10: Campos obtenidos con el método de diferencias finitas para $\tau = 1, \lambda = 0$, variando $\kappa \in (0, 1)$ con un paso de 0,2, $D = -10^5, \mu = 10$ y evaluando en $\theta = \pi/4$.

4.2.2. $\tau = 1, \kappa = 0, 0 \leq \lambda \leq 0,4$

Para este análisis la introducción del término λB^3 tiene un valor de λ_c tal que si es mayor al valor crítico la solución decae a $-\infty$ muy rápidamente y rompe el método numérico.

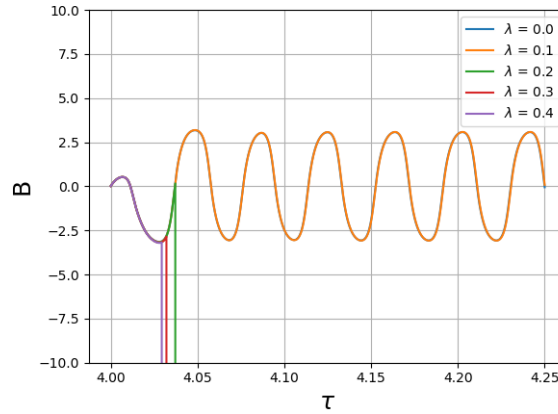


Figura 11: Campos obtenidos con el método de diferencias finitas para $\tau = 1, \kappa = 0$, variando $\lambda \in (0, 0,4)$ con un paso de 0,1, $D = -10^5, \mu = 10$ y evaluando en $\theta = \pi/4$.

Experimentando con pasos de λ más pequeños no dan cambios significativos, almenos con este método numérico. El sistema realiza la oscilación original y a partir de λ_c se rompe la solución.

4.2.3. $\tau = 1, \kappa = 1, 0 \leq \lambda \leq 1,6$

Para este caso sucede lo mismo que en el anterior, con la única diferencia de que el valor de λ_c se corre a un valor más grande.

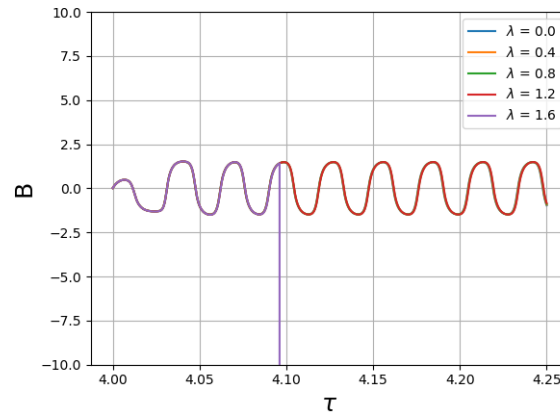


Figura 12: Campos obtenidos con el método de diferencias finitas para $\tau = 1$, $\kappa = 1$, variando $\lambda \in (0, 1.6)$ con un paso de 0.4, $D = -10^5$, $\mu = 10$ y evaluando en $\theta = \pi/4$.

4.2.4. Evolución tridimensional

Para agregar un punto más al análisis previo, se muestran los diagrama mariposa obtenidos en el trabajo de Moss para un par de casos junto con los mapas de coloes correspondientes a los resultados obtenidos con la simulación.

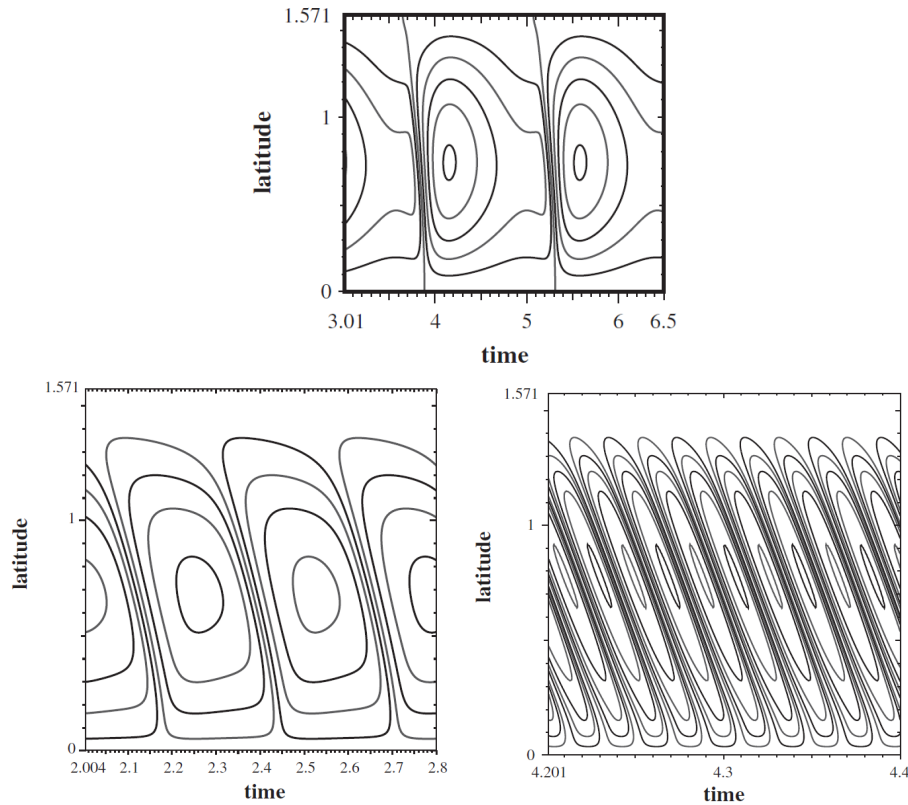


Figura 13: Graficos mariposa obtenidos por Moss en [4]. **Izquierda:** $D = -10^4$, $\mu = 3$. **Centro:** $D = -10^5$, $\mu = 0$. **Derecha:** $D = -10^5$, $\mu = 0$.

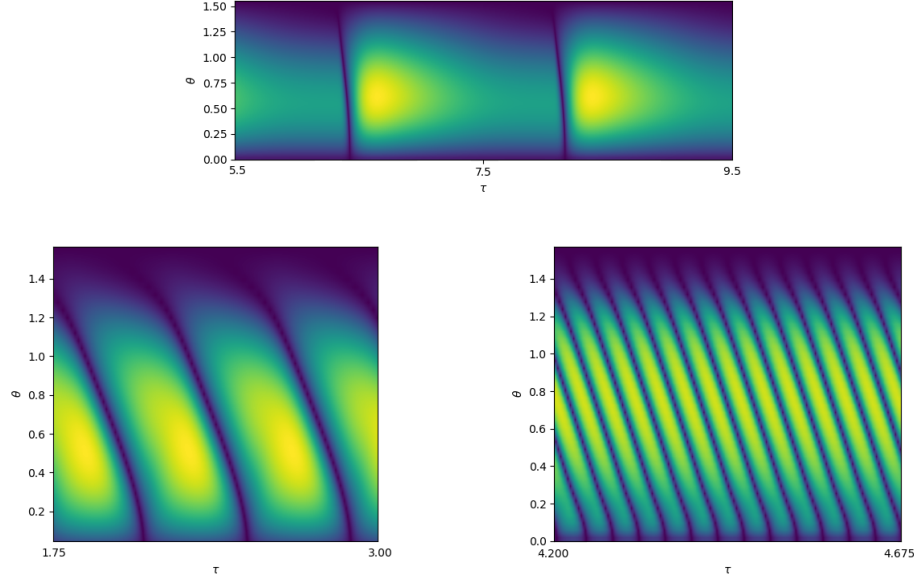


Figura 14: Mapa de colores para los resultados obtenidos por diferencias finitas. **Izquierda:** $D = -10^4$, $\mu = 3$. **Centro (Superior):** $D = -10^5$, $\mu = 0$. **Derecha:** $D = -10^5$, $\mu = 0$.

4.2.5. Comparación con el ciclo solar

El valor de η_t es muy importante pues define la escala temporal utilizada. En el libro de Stix [1] se menciona que en la zona de convección solar $10^8 \frac{m^2}{s} \leq \eta_t \leq 10^9 \frac{m^2}{s}$, por lo tanto la escala temporal queda acotada en algún valor $10 \text{ años} \leq \tau \leq 100 \text{ años}$. Por otro lado, un valor de $\mu = 3$ para la ecuación del dinamo representa una superficie convectiva con aproximadamente $1/3$ del radio solar lo cual es muy utilizado en la literatura. El número de dinamo por su parte se encuentra acotado entre valores $-10^3 \leq D \leq -10^5$ y se espera este más en la parte izquierda de la cota. Con todas estas consideraciones se realizó la simulación que se muestra en la figura siguiente junto con un gráfico del campo magnético del Sol en los últimos años.

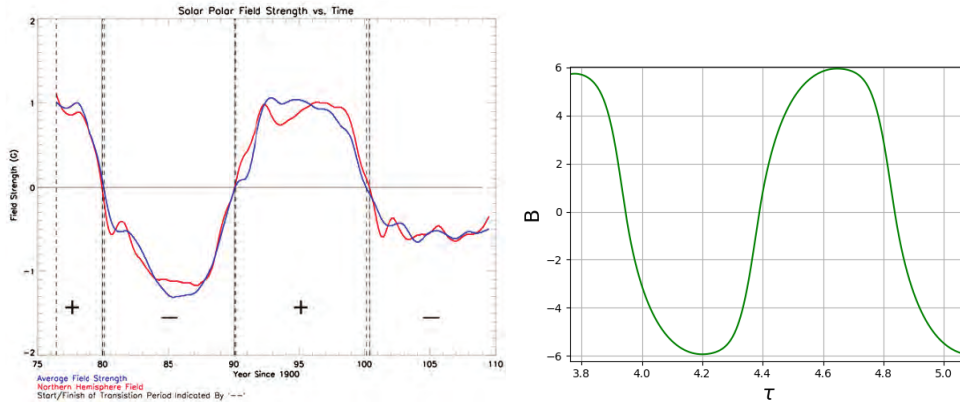


Figura 15: **Izquierda:** Campo magnético solar en los últimos años medidos por el observatorio de Wilcox. **Derecha:** Evolución temporal del campo magnético obtenido con el método de diferencias finitas para $\mu = 2,9$, $D = -0,5 \cdot 10^4$.

Si comparamos los gráficos y tenemos en cuenta que el período del campo solar debe durar alrededor de 22 años, entonces el gráfico obtenido es representativo si la unidad temporal $\tau \approx 24.4$ años el cual se encuentra dentro de los valores posibles. Por supuesto, puede variarse μ en valores cercanos a 3 y D en los valores acotados y obtener así otros valores de τ que ajusten, este análisis se realizó pero no se muestra. La razón por la cual se presenta el gráfico anterior en lugar de otros es en parte por la estructura que presenta el diagrama mariposa y porque son los parámetros que más aparecen en la literatura consultada.

Resulta muy interesante analizar el diagrama mariposa producido por este campo. En el caso solar las observaciones muestran la ausencia de puntos solares por encima de los 40 grados y al inicio de un ciclo la mayoría de los puntos se encuentra entre los 20 y 40 grados mientras que al terminar la mayoría de los puntos se encuentra cerca del ecuador.

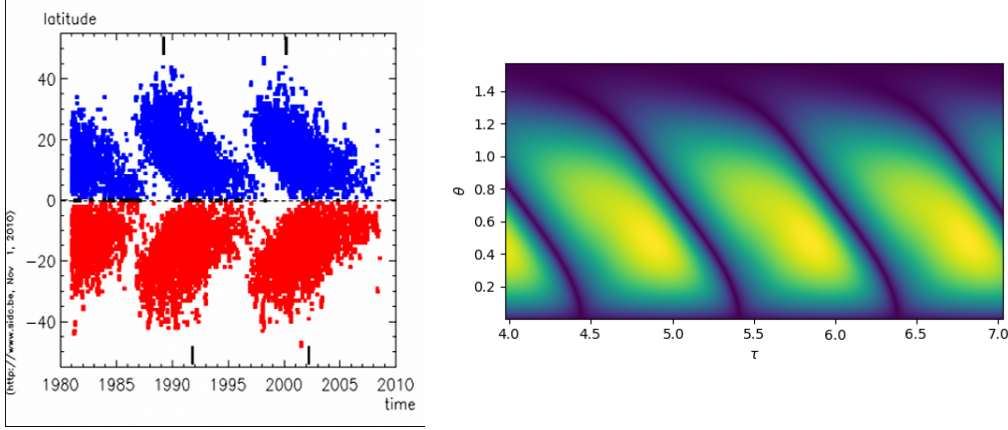


Figura 16: Izquierda: Puntos solares observados en función del tiempo. Derecha: Diagrama mariposa obtenido para la simulación solar.

En la Figura 16 se comparan las observaciones experimentales con respecto al diagrama mariposa para la simulación previa. La estructura del diagrama resulta similar a las observaciones y además se cumple la condición de la locación de los puntos solares restringidos ente 0 y $\approx \pi/4$, generando más de confianza en los resultados anteriores.

4.3. Modelo de Parker en una dimensión

Un modelo más sencillo consiste en pensar el sistema en coordenadas cartesianas, con el origen en algún lugar del hemisferio norte. Donde x apunta hacia “afuera”, y hacia el este y z hacia arriba. Tomando el caso de $\alpha = \alpha_0$ constante y $\langle \mathbf{u} \rangle = (0, \Omega_0 z, 0)$ con Ω_0 constante se plantea la solución en la descomposición poloidal y toroidal como

$$\mathbf{B}_p = \left(0, 0, \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad \mathbf{B}_t = (0, B, 0),$$

que al introducir en el sistema de ecuaciones (13) devuelve el conjunto

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \alpha B + \eta_t \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \Omega_0 \frac{\partial A}{\partial x} + \eta_t \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

el cual admite una solución de la forma

$$[A, B] = [A_0, B_0] e^{i(\omega t + kx)}.$$

Reemplazando la solución en el sistema anterior lleva al nuevo sistema lineal

$$\begin{pmatrix} i\omega + \eta_t k^2 & -\alpha_0 \\ -i\Omega_0 k & i\omega + \eta_t k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0$$

el cual, realizando un despeje sencillo, se cumple solamente si vale la relación de dispersión

$$(i\omega + \eta_t k^2)^2 - i\alpha_0 \Omega_0 k = 0.$$

Para mantener consistencia con el modelo anterior se toma el caso donde $\alpha \Omega_0 \propto D < 0$ y se toma el caso $k > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 & (i\omega + \eta_t k^2)^2 - i\alpha_o \Omega_0 k = 0 \\
 \Leftrightarrow & \omega^2 - 2i\eta_t \omega k^2 - \eta_t^2 k^4 + i\alpha_o \Omega_0 k = 0 \\
 \Leftrightarrow & \omega = \frac{2i\eta_t k^2 \pm \sqrt{-4i\alpha_o \Omega_0 k}}{2} \\
 \Leftrightarrow & \omega = i\eta_t k^2 \pm (1+i) \left| \frac{\alpha_o \Omega_0 k}{2} \right|^{1/2}
 \end{aligned}$$

donde se usó que $\sqrt{i} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$. Para obtener un modo puramente oscilatorio debe cumplirse que $Im(\omega) = 0$. Analizando la parte imaginaria de la solución

$$Im(\omega) = \eta_t k^2 \pm \left| \frac{\alpha_o \Omega_0 k}{2} \right|^{1/2}.$$

Si $-Im(\omega) < 0$ la solución decaerá a cero exponencialmente y no será estable, por lo tanto la solución con el signo $+$ de la ecuación anterior no interesa. Queda entonces la solución

$$-Im(\omega) = -\eta_t k^2 + \left| \frac{\alpha_o \Omega_0 k}{2} \right|^{1/2}$$

que será puramente oscilatoria si $\left| \frac{\alpha_o \Omega_0 k}{2} \right|^{1/2} = \eta_t k^2$ y si el módulo es mayor crecerá exponencialmente. Con este resultado se muestra lo que en mucha de la literatura se menciona acerca de que $\alpha_o \Omega_0 \propto D$ debe exceder un valor crítico.

4.4. Extensión del modelo de Parker en cartesianas al modelo estudiado

Bassom en 1999 [8] presentó un esquema con una idea parecida para la resolución del problema que se estudió inicialmente. El sistema de ecuaciones de este último trabajo es el mismo que (8) pero dejando explícito el término ϵ de la superficie delgada.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\sin(2\theta)}{1+B^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - A \\
 \frac{\partial B}{\partial t} &= \epsilon DG(\theta) \frac{\partial A}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - B
 \end{aligned}$$

donde ahora el número de dinamo es $-\frac{D}{\epsilon^2}$. La solución se plantea dando la evolución temporal de forma explícita en lugar de la forma angular como en el caso de Jennings.

$$A = Re \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}(\theta) e^{i(2n+1)t} \right\} \quad B = Re \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}(\theta) e^{i(2n+1)\omega t} \right\}.$$

donde ω es real pues interesan los casos oscilatorios. Al truncar el primer término y sacando el índice de la notación del campo se propone la solución

$$[A, B] = Re \{ [\mathcal{A}(\theta), \mathcal{B}(\theta)] e^{i\omega t} \}$$

que al reemplazar en las ecuaciones del sistema lleva al sistema

$$\begin{aligned}
 i\omega \mathcal{A} &= \sin(2\theta) \mathcal{B} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \theta^2} - \mathcal{A}, \\
 i\omega \mathcal{B} &= \epsilon D \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial \theta^2} - \mathcal{B}.
 \end{aligned}$$

Nuevamente se propone descomponer la solución, la idea es utilizar una solución WKBJ (que es un tipo de solución para sistemas de ecuaciones que no son a coeficientes constantes) de la forma

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = [a(\theta), b(\theta)] \exp \left(\frac{i}{\epsilon} \int_{\theta_1}^{\theta_2} k(\theta) d\theta \right).$$

Al reescribir el sistema con esta nueva descomposición y multiplicar las ecuaciones por $\exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_{\theta_1}^{\theta_2} k(\theta) d\theta\right)$ se obtiene que

$$i\omega a = \sin(2\theta) b + \epsilon^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + i\epsilon \frac{\partial a}{\partial \theta} k - ak^2 - a,$$

$$i\omega b = D \left(ika + \epsilon \frac{\partial a}{\partial \theta}\right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 b}{\partial \theta^2} + i\epsilon \frac{\partial b}{\partial \theta} k - bk^2 - b.$$

Al tomar el limite de $\epsilon \rightarrow 0$ y despreciando los términos $\mathcal{O}(\epsilon)$ el sistema se reduce nuevamente a una ecuación de dispersión

$$\begin{pmatrix} i\omega + 1 + k^2 & \sin(2\theta) \\ -iDk & i\omega + 1 + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (i\omega + 1 + k^2)^2 - ikD\sin(2\theta) = 0$$

El análisis de este punto en adelante es bastante complejo y no se desarrolla, pero resulta un buen ejercicio notar que hay otros caminos para explorar soluciones del mismo sistema.

5. Conclusiones

La literatura sobre la generación de campos magnéticos mediante un mecanismo de dinamo es muy extensa. Se realizó un estudio completo de la teoría que lleva a las ecuaciones de inducción y se estudiaron varios esquemas posibles para la generación de un campo magnético.

Para el caso donde el sistema es lineal se recrearon los resultados obtenidos por Jennings y se extendieron al sistema tratado en cuestión. Se analizó además el límite para un valor de truncamiento relativamente grande en donde tanto el sistema dipolar como cuadrupolar parece presentar sólo dos frecuencias oscilatorias, para chequear esto último habría que trincar en valores aún más grandes de N y ver si aparecen nuevas soluciones oscilatorias.

Mediante el uso del curso de cálculo numérico se realizó un método de diferencias finitas en derivadas parciales para obtener resultados de la teoría no lineal y por consiguiente se encontraron, utilizando consideraciones razonables respecto de las magnitudes solares, soluciones que coinciden dentro de lo aceptable en nuestro trabajo.

Se analizó la teoría del dinamo migratorio de Parker en su versión más simplificada donde se demuestra que debe excederse un valor crítico del número de dinamo para tener soluciones estables en el tiempo.

Por último, se aplicó una solución inspirada en la solución al mecanismo de Parker al sistema principal del trabajo y se concluye (leyendo en detalle el trabajo de Bassom [8]) que ese tipo de solución es realmente muy compleja para un trabajo no profesional.

Referencias

- [1] Stix Michael - "The Sun: An Introduction", Chapter 8. Springer - 2nd Edition (2004).
- [2] F.Krause, K.-H.Radler, "Mean-Field Magnetohydrodynamics and dynamo theory", Oxford. (1980).
- [3] Chris A. Jones, "Dynamo Theory", Department of Applied Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK.
- [4] D.Moss, "Stellar dynamo waves: Asymptotic configuratios", Department of Mathematics, University of Manchester, Manchester M13 9PL, UK (2003).
- [5] Ossendrijver, M. "The solar dynamo", Astronomy and Astrophysics Review · August 2003.
- [6] Parker, E. N., "Hydromagnetic dynamo models", Astrophys. J. 122, 293 — 314, (1955).
- [7] Jennings, R. L., "Symmetry breaking in a nonlinear $\alpha\Omega$ -dynamo", Department of Mathematics and Statistics, The University, Newcastle Upon Tyne (1991).
- [8] Bassom, P. A., "A nonlinear dynamo wave riding on a spatially varying background", School of Mathematical Sciences, University of Exeter, North Park Road, Exeter (1998).