FÍSICA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013

GUÍA 5: CUERPO NEGRO, FOTOELÉCTRICO, COMPTON

1. Mostrar la ley de Kirchhoff, es decir que la densidad de energía de un cuerpo negro depende solamente de la temperatura.

2. Hallar la relación entre la densidad de energía interna $u_\nu(T)$ y la energía que emite un cuerpo negro por unidad de área y tiempo $K_\nu(T)$. Deducir la relación entre la densidad de energía total $u(T)$ y la energía total emitida por unidad de área y tiempo R.

3. La teoría electromagnética permite mostrar que $p = u/3$ para la radiación electromagnética. Considere un cilindro con un pistón sin fricción y conteniendo dicha radiación en equilibrio térmico a temperatura T. Se mueve el pistón de manera reversible.

   a) Probar la ley de Stefan-Boltzmann (ayuda: escriba el diferencial de la entropía, teniendo en cuenta que es un diferencial exacto)
   $$u = aT^4$$

   b) Mostrar que
   $$R = \sigma T^4; \qquad \sigma = \frac{ac}{4}$$
   (σ es la constante de Stefan-Boltzmann y R fue definido en el ejercicio anterior).

4. Considere que el Sol irradia como cuerpo negro. Sabiendo que el radio del Sol es $R_S = 7 \times 10^8\,\mathrm{m}$, que la distancia Sol-Tierra es $R_{ST} = 1{,}49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ y que la energía por unidad de área y tiempo que llega a la Tierra es $W = 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{J/m^2s}$, estimar la temperatura en la superficie del Sol ($\sigma = 5{,}73 \times 10^{-8}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2 s K^4}}$).

5.

   a) Suponiendo que la densidad de energía espectral $u_\nu(T)$ depende solamente de ν, T y de las constantes dimensionales c (velocidad de la luz en el vacío) y k_B (constante de Boltzmann $= R/N_a$) mostrar vía analisis dimensional que
   $$u_\nu(T) = \Pi \frac{\nu^2 k_B T}{c^3}$$
   donde Π es un número real

   b) Suponiendo que existe una nueva constante fundamental que interviene en el problema, mostrar que
   $$\begin{aligned} u_\nu(T) &= \frac{\nu^2 k_B T}{c^3} f\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \\ &= \frac{h\nu^3}{c^3} f_1\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \end{aligned}$$
   donde
   $$f_1(x) \equiv \frac{f(x)}{x}$$
   Ayuda: Uno tendrá una nueva constante adimensional Π' tal que $\Pi = f(\Pi')$. Mostrar que no se pierde generalidad escribiendo $\Pi' = \alpha \nu T^\chi$ con α una combinación de c, k_B y la nueva constante. Determine χ usando la ley de Stefan-Boltzmann. Se obtiene la forma exacta del resultado definiendo, al final, $\alpha \equiv h/k_B$. Wien, usando datos experimentales, propuso $f_1(x) = \exp(-x)$.

c) Mostrar que se puede escribir el resultado anterior de la forma siguiente

$$u_\lambda(T) = \frac{hc}{\lambda^5} g(y)$$

con $g(y) \equiv y f(\frac{1}{y})$, $y \equiv \lambda k_B T/(hc)$. Usando este último resultado, demostrar la ley de desplazamiento de Wien

$$\lambda_m T = \text{cte.}$$

6. Demostrar que en una cavidad con radiación en equilibrio térmico, el número de modos de oscilación por unidad de volumen es

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

7. Usando la hipótesis de Planck para calcular el valor medio de la energía y el resultado del problema anterior, calcule la densidad de energía $u_\nu(T)\,d\nu$. Compare con lo que obtendría usando equipartición. Calcule los límites de baja y de alta frecuencias y corrobore que obtiene las leyes de Rayleigh-Jeans y Wien.

8. Calcule la constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$$

9. Los datos del potencial de frenado *vs* longitud de onda en una experiencia de iluminación de una placa de sodio son

λ(Å)	2000	3000	4000	5000	6000
V_0(Volts)	4,20	2,06	1,05	0,41	0,03

Cuadro 1: ejercicio 9

Obtener gráficamente la función trabajo ϕ, la frecuencia de corte y el valor de h/e.

10. En una dispersión Compton un electrón adquiere una energía cinética de 0,1 MeV cuando un fotón X de 0,5 MeV de energía incide sobre él.

a) Determinar la longitud de onda del fotón dispersado, si el electrón se hallaba inicialmente en reposo.

b) Hallar el ángulo de dispersión del fotón respecto de la dirección de incidencia.

EN UN PARCIAL

11.

a) Demostrar que el efecto fotoeléctrico no puede ocurrir con un electrón libre.

b) ¿Por qué no puede observarse efecto Compton con luz visible? ¿Puede observarse fotoeléctrico?

12. Incide luz monocromática de longitud de onda λ sobre una placa cuya función trabajo es ϕ, arancando electrones por efecto fotoeléctrico. Estos electrones alcanzan una región donde existe un campo magnético B perpendicular a la velocidad de los electrones. Calcular el radio de giro de los electrones en función de ϕ.

13. Considere una superficie de potasio a 75 cm de una lámpara de 100 W de 5 % de eficiencia. Cada átomo de potasio tiene un radio aproximado de 1Å. Determinar el tiempo requerido por cada átomo para absorber una cantidad de energía igual a su función trabajo ($\phi = 2\,$eV) de acuerdo a la interpretación clásica.

14.

a) Hallar la máxima energía que un fotón de 50 KeV de energía le transfiere a un electrón libre.

b) ¿Cuál es la energía cinética de un electrón dispersado un ángulo θ? Expresarla en términos de la energía del fotón incidente.

Ejercicio 1: En equilibrio térmico la absorbancia a es igual a la emisividad e

$e = \frac{E_{emit}}{E_{inc}}$; $a = \frac{E_{abs}}{E_{inc}}$. También sabemos que para un cuerpo en equilibrio térmico su

emisividad $\omega = aI$ $\Rightarrow \frac{\omega}{a} = I$; $\omega \underset{S-B}{\overset{\uparrow}{=}} \sigma . e . T^4$

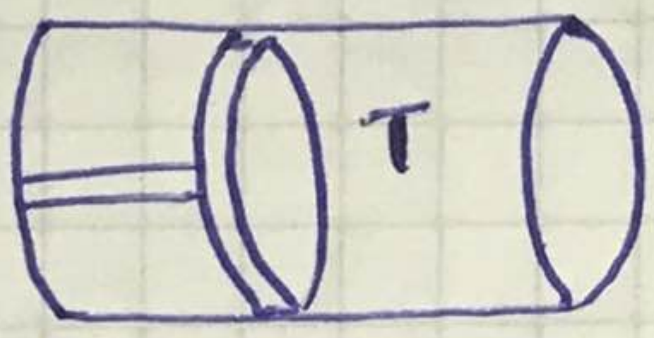
$$\Rightarrow I = \frac{\sigma . e T^4}{a} = \sigma . \frac{E_{emit}}{\cancel{E_{inc}}} T^4 . \frac{\cancel{E_{inc}}}{E_{abs}} \Rightarrow I = \frac{E_{emit}}{E_{abs}} . \sigma T^4$$

iguales

$$\Rightarrow \boxed{I = \sigma T^4}$$

Ejercicio 3

$P = \frac{u}{3}$



se mueve el pistón de manera rev

$U = uV \Rightarrow dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \Rightarrow dS = \left.\frac{\partial S}{\partial u}\right|_V du + \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_u dV$

$$dU = u\,dV + V\,du \underset{rev}{\overset{\uparrow}{=}} dQ_{rev} - P\,dV$$

$$\Rightarrow dS = \frac{(u+P)dV}{T} + \frac{V du}{T} = \frac{(u + u/3)dV}{T} + \frac{V du}{T}$$

$$\Rightarrow dS = \frac{4}{3}\frac{u}{T} dV + \frac{V}{T} du \quad \text{Como } T = cte$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial S}{\partial u}\right|_V = \frac{V}{T} \; ; \; \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_u = \frac{4u}{3T}$$

Por ser diferencial exacto $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial u} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{4u}{3T}\right)$

T indep de V

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} = \frac{4}{3T} + \frac{4}{3}u \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right) \cdot \frac{dT}{du}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\cancel{3}T} = -\frac{4}{\cancel{3}}\frac{u}{T^2}\frac{dT}{du} \Leftrightarrow \frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T} \Leftrightarrow \ln(u) - \ln(u_0) = 4(\ln(T) - \ln(T_0))$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(u) - \ln(u_0)} = e^{\ln(T^4) - \ln(T_0^4)} \Rightarrow \boxed{u = aT^4}$$

b) Sabemos que $R = \frac{c}{4} u$ $(R(T) ; u(T))$

$$\Rightarrow R = \frac{ca}{4} T^4 = \sigma T^4$$

Ejercicio 5

$u_\nu(T)$ depende solo de ν, T y c, k_B mostrar vía análisis dimensional que

$u_\nu(T) = \pi \frac{\nu^2 k_B T}{c^3}$ $\qquad [T] = \theta \qquad [c] = \frac{L}{t}$

$[\nu] = \frac{1}{t} \qquad [k_B] = \frac{E}{\theta}$

$[u_\nu] = \frac{E\,t}{L^3}$ $\qquad \theta$ = unidad de temperatura empírica

$\Rightarrow$ k_B arriba, T arriba $\Rightarrow$ $u_\nu = \alpha \frac{k_B T}{c^3}\nu^2 \Rightarrow [u] = \frac{Et}{L^3}$

$\Rightarrow$ ...

queremos $u_\nu(T) = \pi \frac{\nu^2 k_B T}{c^3}$

$u = \pi \quad [u] = \pi \quad \frac{Et}{L^3}$

$\boxed{\Rightarrow \frac{u c^3}{\nu^2 k_B T} = \pi \text{ única posibilidad}}$

b) $\pi = f(\pi')$ $\qquad \pi' = \alpha \nu T^n$ con $\alpha = \alpha(c, k_B, \hbar)$ $\hbar$ la constante quiero tome es cuánt.

$\Rightarrow u = \pi \frac{\nu^2 k_B T}{c^3} = f(\alpha \nu T^n)\frac{\nu^2 k_B T}{c^3}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} u(\nu, T)\,d\nu = \sigma T^4 = \int_0^{+\infty} f(\alpha \nu T^n)\frac{\nu^2 k_B T}{c^3}\,d\nu \qquad z = \alpha \nu T^n$

$dz = \alpha T^n d\nu$

$\Rightarrow = \int_0^{+\infty} f(z) \cdot \frac{z^2}{\alpha^2 T^{2n}} \cdot \frac{k_B T}{c^3} \cdot \frac{dz}{\alpha T^n} = \frac{k_B}{T^{3n-1} c^3 \alpha^3}\int_0^{+\infty} z^2 f(z)\,dz$

$= \frac{k_B T^{1-3n}}{\alpha^3 c^3} \cdot \text{número} = \sigma T^4 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow$ la forma que tendría la u de cuerpo negro completa

$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{\nu^2 k_B T}{c^3} \cdot f\left(\frac{\alpha \nu}{T}\right)$

Sea $\alpha = \frac{h}{k_B} \Rightarrow u(\nu, T) = \frac{\nu^2 k_B T}{c^3} f\left(\underbrace{\frac{h\nu}{k_B T}}_{\text{como se corre el máximo}}\right)$ $\Rightarrow$ admitiendo que en tu teoría algo no conocías, podemos ahora verificar con la experiencia

$\Rightarrow u(\nu, t) = \frac{h\nu^3}{c^3} f_1\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$

con $f_1 = \frac{f}{\frac{h\nu}{k_B T}}$

$f_1 = e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$ experimentalmente

u_λ . $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$u_\nu = \frac{h\nu^3}{c^3}\left(\frac{k_B T}{h\nu}\right) f\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \Rightarrow u_\lambda = \frac{h}{\lambda^3}\underbrace{\left(\frac{\lambda k_B T}{hc}\right)}_{y} f\underbrace{\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}_{y^{-1}}$$

Ejercicio 6: Demostrar que en una cavidad en equilibrio térmico $n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$

Tomemos una cavidad, la más simple posible $\Rightarrow$ un cubo. Como está en equilibrio térmico, dentro del cubo se forman ondas estacionarias

L

Sobre las paredes no puede haber movimiento ni ondas, si no las paredes radiarían hacia afuera $\Rightarrow$ C.C

$$\begin{cases} k_z L = n_z \pi \\ k_x L = n_x \pi \\ k_y L = n_y \pi \end{cases}$$

(n_x, n_y, n_z) $n_i \in \mathbb{Z}^+$ pues en la estacionaria tengo progresiva y regresiva $\Rightarrow$ necesito un signo y no ambos $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

¿Cuál es el número de modos de oscilación entre λ y $\lambda + d\lambda$?

número de modos de oscilación $d^3N_{xyz} = \rho\, dn_x dn_y dn_z$ ρ será a ver cuántos puntos en un volumen unidad hay $(\rho = 1)$

$\Rightarrow d^3N_{xyz} = dn_x dn_y dn_z$; $\vec{k} = \frac{\pi}{L}\vec{n} \Rightarrow d^3N_{xyz} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z$

$\Rightarrow d^3N_{k\Omega} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 dk\, k^2 d\Omega$

$$\Rightarrow d^3N_{k} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 k^2 dk \int_0^{4\pi/8} d\Omega$$

(solo integro $1/8$ de la esfera, la toda positiva pues $n > 0$)

$\Rightarrow dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{4}{8}\pi k^2 dk = \frac{V}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2}k^2 dk$ $\quad |dk| = \frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$ $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\Rightarrow dN_\lambda = \frac{V}{\pi}\frac{1}{\lambda^2}d\lambda \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow dN_\lambda = \frac{V 4\pi}{\lambda^4} d\lambda$ Como tengo dos direcciones de polarización $\Rightarrow dN_\lambda = \frac{8\pi V}{\lambda^4} d\lambda$; volviendo $\frac{dN_\lambda}{V}\langle E \rangle = u_\lambda d\lambda$

$\frac{dN_\lambda}{V} = dn_\lambda$

$\langle E \rangle = k_B T$ (Boltzmann) $\Rightarrow \frac{8\pi V}{\lambda^4} d\lambda\, k_B T = u_\lambda d\lambda \Rightarrow u_\lambda$

$dn_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$ $\quad \nu = \frac{c}{\lambda}$ $\quad d\nu = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$

$$\Rightarrow dn_\nu = \frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{\lambda^2}{c} d\nu = \frac{8\pi}{\lambda^2 c} d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} d\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{n_\nu = \frac{dn_\nu}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}}$$

Ejercicio 7 Continuando lo de antes $\frac{dN_\lambda}{V}\langle E\rangle = \boxed{\frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T = u_\lambda}$ RJ

Planck $\boxed{u_\nu = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}}$

$$\lim_{\nu \to 0} \frac{\nu^3}{e^{c\nu}-1} = \frac{0}{0} = \frac{3\nu^2}{c e^{\nu}} = 0 \checkmark \quad \to \frac{8\pi}{c^3} h \cdot \frac{3\nu^2}{\frac{h\nu}{k_BT}} \checkmark$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu^3}{e^{c\nu}-1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{6}{c^3 e^{\nu}} = 0$$

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} = \frac{8\pi h}{c^3}\left[\frac{3\nu^2}{e^{h\nu/k_BT}-1} + \nu^3 \cdot -\frac{1}{(e^{h\nu/k_BT}-1)^2}\cdot\frac{h}{k_BT} e^{h\nu/k_BT}\right]$$

$$= 0 \iff 3\nu^2 = \frac{h\nu^4}{k_BT(e^{h\nu/k_BT}-1)} \cdot e^{h\nu/k_BT}$$

para hallar el extremo

$\iff$ ecuación trascendental; se resuelve numéricamente y da la ley de Wein

Ejercicio 8

Real ??

Ejercicio 9

En la compu en la carpeta de Física 4. $\nu = \frac{hc}{\lambda}$ $\Rightarrow$ sale de ahí todo

Ejercicio 10

E_0 fotón $= 0.5$ MeV $\quad T_{electrón} = 0.1$ MeV

a) λ del fotón dispersado, si el electrón estaba en reposo inicialmente

$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{0.5\,MeV}$; $0.5\,MeV + \cancel{m_ec^2} = E_1 + 0.1\,MeV + \cancel{m_ec^2}$

$(E_0 + m_0c^2 = E_1 + T + m_0c^2)$ el fotón no tiene masa

$\Rightarrow E_1 = 0{,}4$ MeV

$P_0 = \frac{0.5\,MeV}{c}$ $\quad p_1 = \frac{0.4\,MeV}{c}$ $\quad P = m_e v_e$ $\quad T = \frac{m_e}{2} v_e^2 = 0.1\,MeV$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{0.2\,MeV}{m_e}}$$

$$\Rightarrow P = m_e^{1/2} \sqrt{0.2\,MeV}$$

$$\Rightarrow \frac{0.5\,MeV}{c} = \frac{0.4\,MeV}{c} \cos(\theta) + \sqrt{m_e\, 0.2\,MeV} \cos(\phi)$$

$$\frac{0.4\,MeV}{c} \sin(\theta) = \sqrt{m_e\, 0.2\,MeV} \sin(\phi)$$ cuentas y sale todo

Ejercicio 11

b) La luz visible tiene $\lambda \gg \Rightarrow \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c} \to 0 = P \to 0$ no se da suficiente impulso

Para un electrón de la superficie $\Delta E_{máx} = h\nu - W$ $\quad E_{máx}$ es tal que sí puede ser luz visible $\quad \nu_{UV} \approx 10^{16}\,Hz$

$\nu_{visible} \approx 10^{14}\,Hz$

a) Un electrón libre

puede tener $E = h\nu = \sqrt{c^2p^2 + (m_e c^2)^2} \Rightarrow \nu = \frac{\sqrt{c^2p^2 + (m_e c^2)^2}}{h} = \frac{c^2\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2}}{h}$

$$= \frac{c^2}{h}\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{c}\right)}_{<1?} + m_e^2} \underset{máx}{\overset{?}{=}} \frac{c^2}{h}\sqrt{\left(\frac{m_e c^2}{c}\right) + m_e^2}$$

Ejercicio 12

Luz monocromática λ sobre una placa con función trabajo ϕ

$$\Rightarrow E_{máx} = h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

$\bar{B} = B\, \widehat{v_{e\perp}}$ $\quad E = \sqrt{c^2p^2 + (m_e c^2)^2} = h\nu - \phi$ $\quad \mu = \frac{m}{\gamma}$ $\quad \bar{p} = \mu \bar{u}$

$$\Rightarrow c^2p^2 + m_e c^2 = (h\nu - \phi)^2$$

$\bar{F}_e = (\bar{v}_e \times \bar{B})e = e$

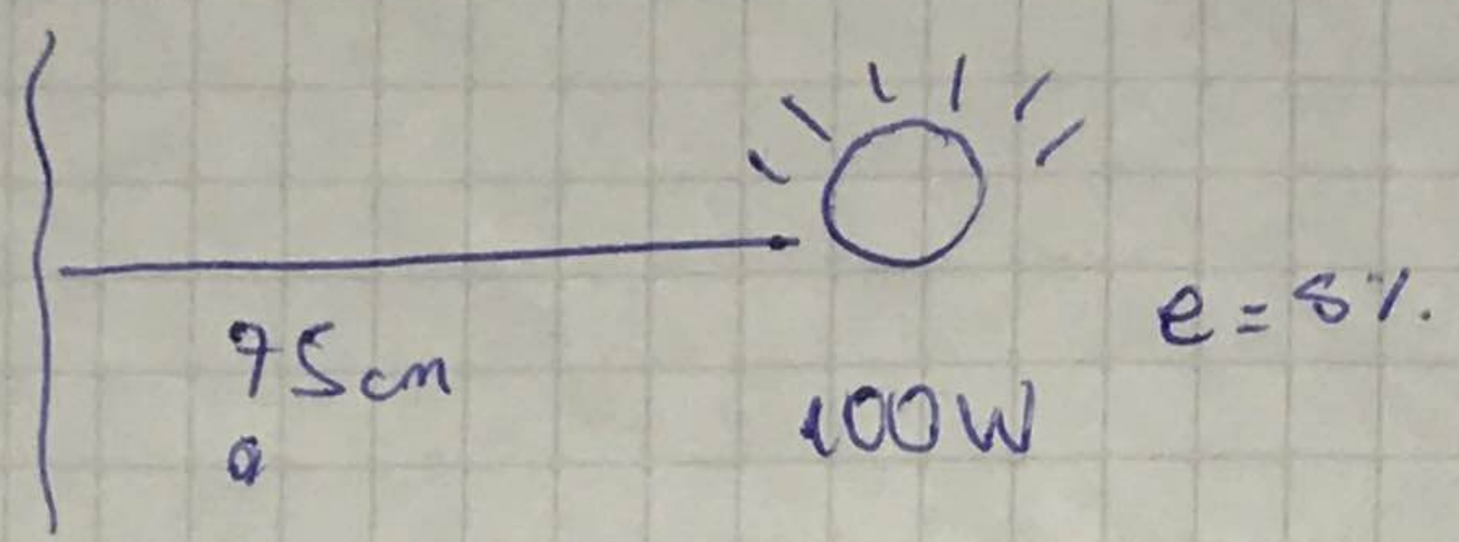
$$\Rightarrow p^2 = \frac{(h\nu - \phi)^2}{c^2} - m_e$$

$\bar{v}_e = \bar{u}$

$$\Rightarrow \bar{F}_e = e\left(\frac{\bar{p}}{\mu} \times \bar{B}\right) = e\left(\sqrt{\frac{(h\nu - \phi)^2}{c^2} - m_e} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \hat{p} \times B\, \hat{p}_\perp\right)$$

$\Rightarrow \bar{F}_e$

Ejercicio 13



potasio

radio átomo de potasio ≈ 1 Å $\qquad \phi = 2eV$

interpretación clásica Δt / absorba 2eV?

$E_{máx} = 2eV \qquad 100\,Watt = \frac{100\,J}{s}$

La energía asumo va con simetría esférica $\Rightarrow \frac{Pot.}{A}\cdot[A]$ con esfera de 75cm será lo que llega a la placa

$\Rightarrow 100\frac{J}{s}\cdot\frac{1cm^2}{4\pi\cdot(75)^2cm^2}$ Pero me dicen eficiencia 5%.

$\Rightarrow 5\frac{J}{s}\cdot\frac{1}{4\pi(75)^2 cm^2}$ llega

Supongamos que pueden absorber todos los átomos $\Rightarrow$ E. por segundo $= \frac{5}{4\pi(75)^2 cm^2}\frac{J}{s}$

$1\,Å = 1e^{-8}cm \Rightarrow$ esfera del átomo $\approx e^{-16}\,cm^2$

$\Rightarrow$ Energía abs $= e^{-16}cm^2 \cdot 5\frac{J}{s}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{(75)^2cm^2} = E_a$

$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{2eV}{E_a}}$

Ejercicio 14

a) $T = h\nu - \underbrace{\Delta E}_{=0} \Rightarrow T_{máx} = 50KeV$

en electrón libre

b) $E_0 - E_1 = T \qquad P_0 = P_1\cos(\theta) + P\cos(\phi)$

$= c(P_0 - P_1) \qquad P_1\sin(\theta) = P\sin(\phi)$