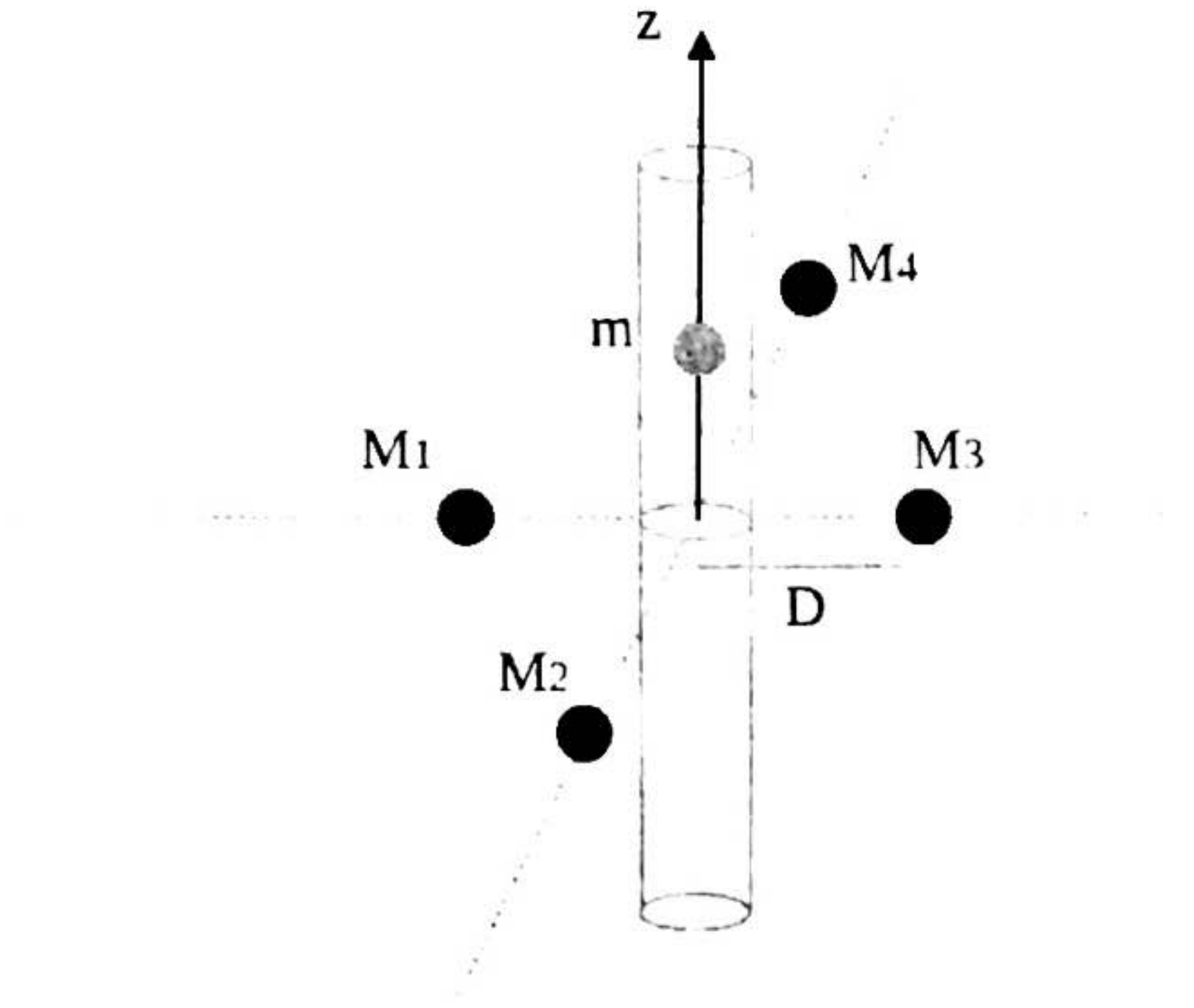
Segundo parcial de Física 1, cátedra Giribet.
Primer cuatrimestre 2014 - 8/7/14

Inicie cada problema en una hoja distinta. Justifique todas sus afirmaciones.

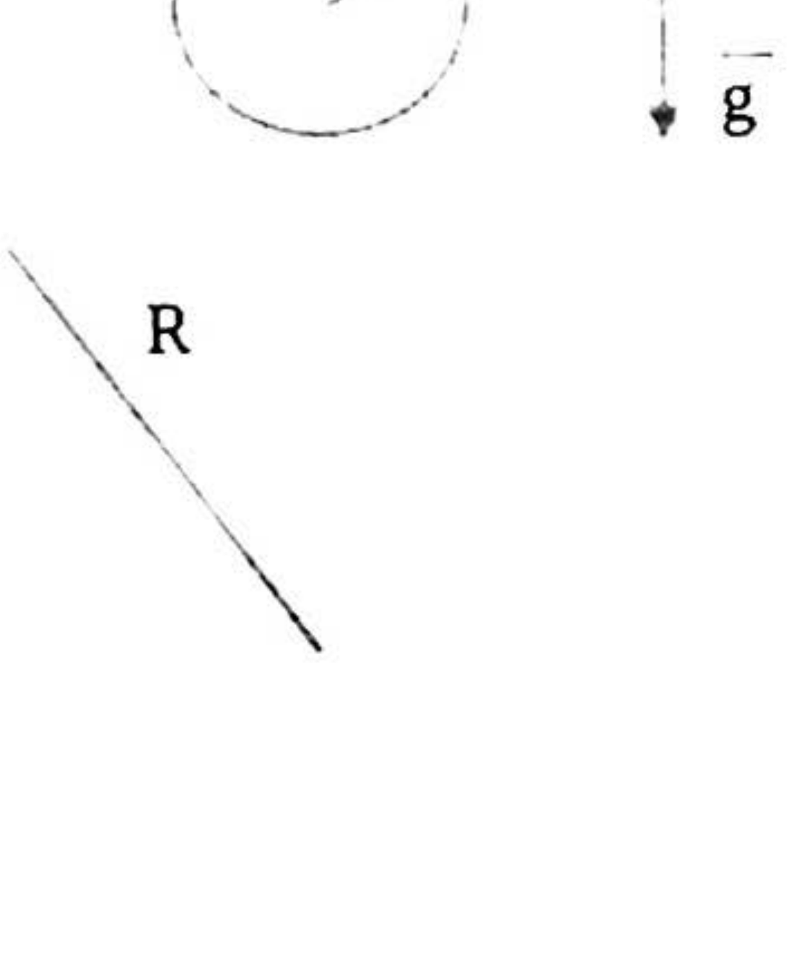
Problema 1. Considere cuatro partículas de masas M_1, M_2 , M_3 y M_4, todas fijas a un plano horirontal y separadas de un tubo vertical por una distancia D, como se ve en la figura. Una partícula m se mueve a lo largo del tubo, sin rozamiento.

1. Calcule la energía potencial gravitatoria en función de la coordenada vertical z y grafique cualitativamente el potencial.
2. Determine la posición de equilibrio y calcule su estabilidad.
3. Encuentre la frecuencia de oscilación de la masa m para perturbaciones pequeñas de la posición de equilibrio.
4. Calcule la fuerza ejercida por el tubo en función de la coordenada z.



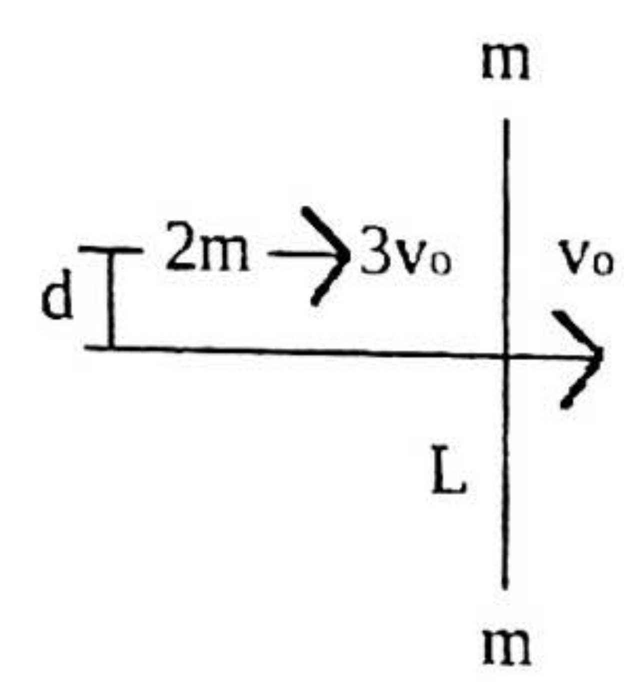
Problema 2. Un cilindro de radio r y masa M está apoyado justo en el punto de mayor altura, sobre un semi-cilindro de radio R fijo al suelo. Ahora se perturba apenas su posición, de modo que cae, manteniendo la condición de rodadura durante todo el movimiento.

1. Escriba las ecuaciones de Newton para el cilindro, considerando los vínculos y la condición de rodadura.
2. Explique qué cantidades se conservan en el movimiento.
3. Encuentre el ángulo, medido desde la vertical, en el que el cilindro se separa de la superficie.

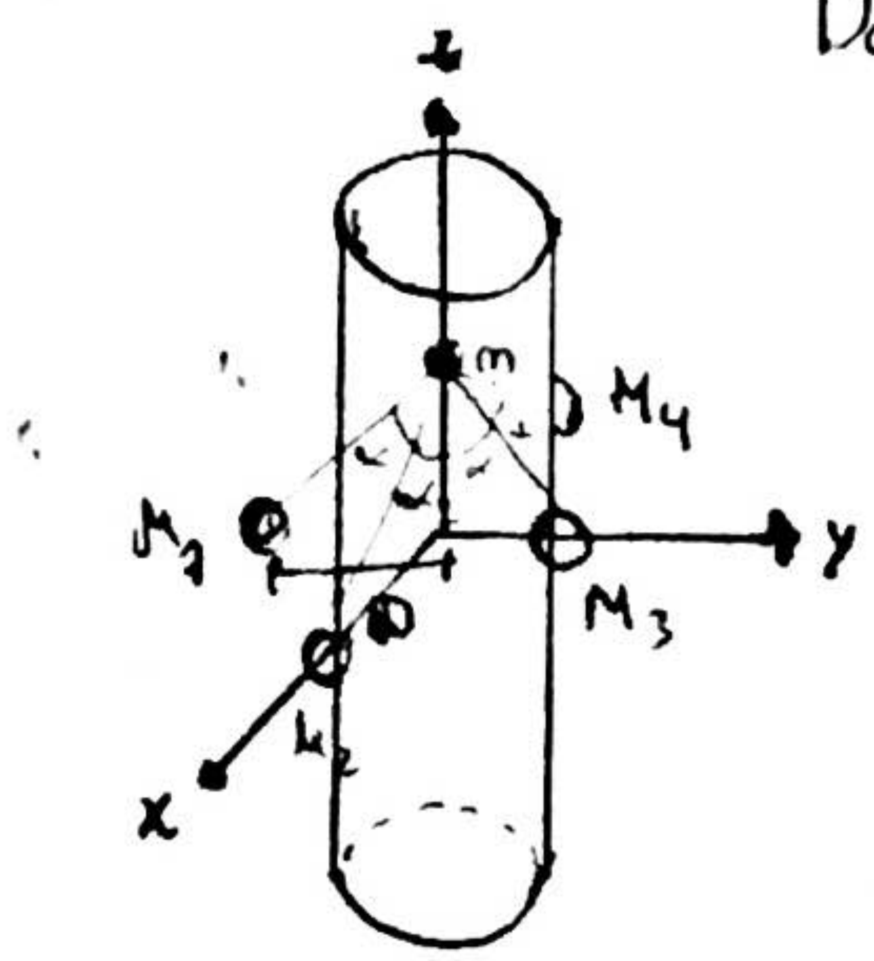


Problema 3. Dos partículas de masa m están sujetas a los extremos de una barra de longitud L y masa despreciable. El conjunto se mueve con velocidad v_o sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Otra partícula, de masa $2m$, se mueve a lo largo de una recta perpendicular a la barra con velocidad $3v_o$ y la choca a una distancia d de su centro, quedando adherida.

1. Indique qué magnitudes se conservan antes, durante y después del choque. Justifique.
2. Encuentre la posición y velocidad del CM y las velocidades de cada una de las masas, antes y después del choque. Use esa información para describir cuantitativamente el movimiento antes y después del choque.
3. Calcule la variación de energía cinética del sistema debida al choque plástico.



Problema 1



Datos: M_1, M_2, M_3, M_4, D, m

a) $V(z) = ?$ Grafique

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$$

$$\bar{F}_n = -\frac{G m M_n}{\sqrt{z^2+D^2}^{\,2}} \left(\cos(\alpha)\hat{z} \pm \sin(\alpha)\hat{x},\hat{y} \right)$$

$$\bar{F}_1 = -\frac{G m M_1}{\sqrt{z^2+D^2}^{\,2}} \left(\cos(\alpha)\hat{z} \right)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{G m}{\sqrt{z^2+D^2}^{\,2}} \left(M_1+M_2+M_3+M_4 \right)\cos(\alpha) = -\frac{G m (M_1+M_2+M_3+M_4)}{(z^2+D^2)^{3/2}}\, z$$

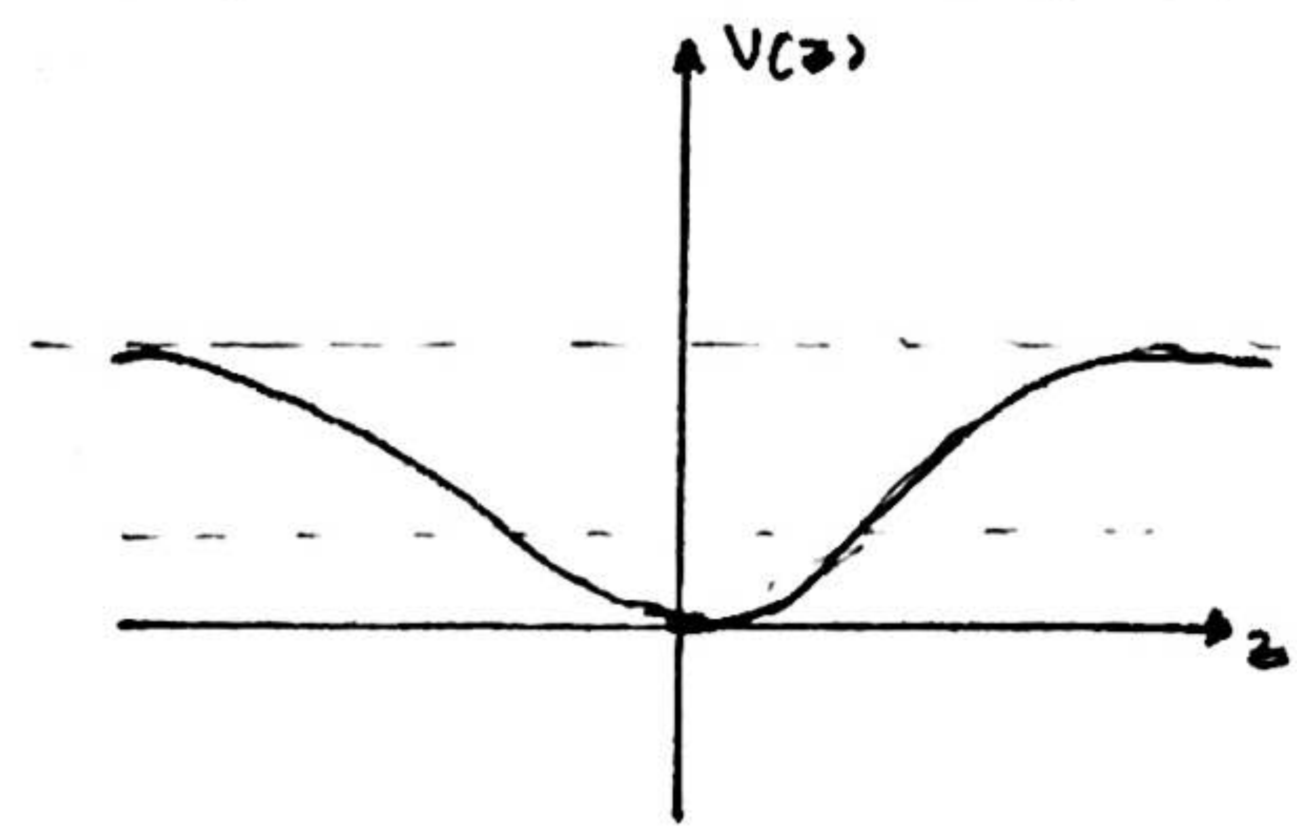
$$\Rightarrow \ddot{z} = -G(M_1+M_2+M_3+M_4)\frac{z}{(z^2+D^2)^{3/2}}$$

$$V(z) = -\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\int_{z_0}^{z} m\, G(M_1+M_2+M_3+M_4)\frac{z}{(z^2+D^2)^{3/2}}\,\hat{z}\cdot dz\,\hat{z}$$

Tomo $z_0 = 0$ y cambio de variable $z^2+D^2 = u \Rightarrow 2z\,dz = du$

$$V(z) = \int_{D^2}^{z^2+D^2} m G(M_1+M_2+M_3+M_4)\frac{1}{u^{3/2}}\cdot\frac{du}{2} = -G(M_1+M_2+M_3+M_4)\frac{1}{u^{1/2}}\Bigg|_{z^2}^{z^2+D^2} m$$

Luego $\boxed{V(z) = -Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)\left(\frac{1}{(z^2+D^2)^{1/2}} - \frac{1}{D}\right)}$



b) z_{eq} y estabilidad

$V(z)$ es siempre creciente ∴ $\boxed{z_{min} = 0 = z_{eq}}$

$$F = -\frac{dV}{dz} \ (-\nabla V) \qquad F(z) = -\frac{Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)\, z}{(z^2+D^2)}\hat{z} = 0 \Rightarrow z=0$$

Estabilidad

$$-\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{dF}{dz} = -Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)\left[\frac{(z^2+D^2) - z(2z)}{(z^2+D^2)^2}\right]$$

$$= -Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)\left[\frac{D^2-z^2}{(z^2+D^2)^2}\right]$$

en $z=0$ $\frac{dF}{dz} < 0 \Rightarrow$ eq estable

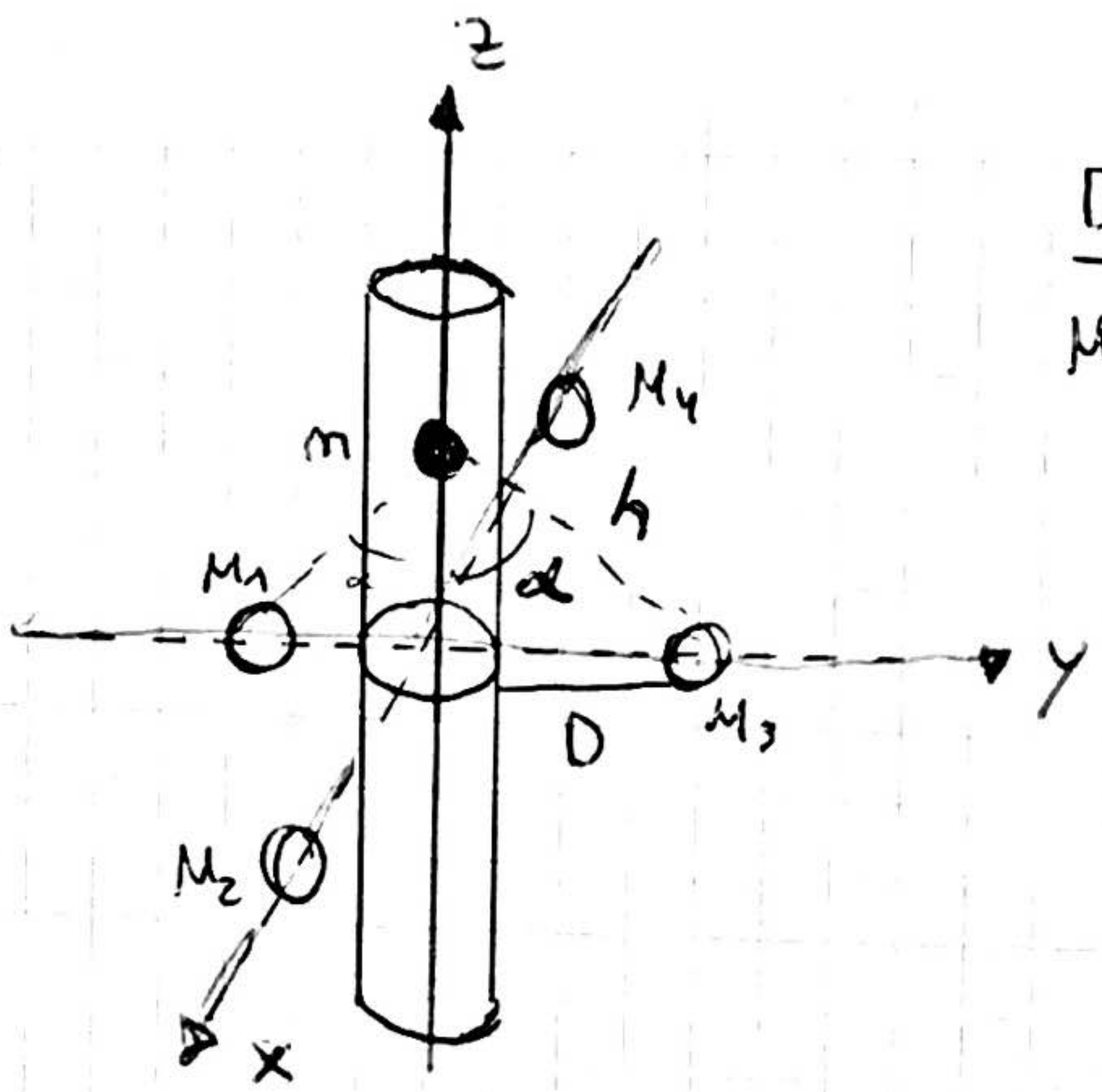
c) H de la fec de oscilación para m en peq perturbaciones de z_{eq}

$$F(z) \approx \underbrace{F(z_{eq})}_{0} + \left.\frac{dF}{dz}\right|_{z_{eq}} (z - z_{eq})$$

Luego $m\ddot{z} =$

A

Problema 1



Datos

M_1, M_2, M_3, M_4, D, m

a) $V_{(z)} = ?$. Grafique

$$m\ddot{z} = (F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} + F_{G4})\,\hat{z}$$

en $\hat{z}$. $F_{G1} = -\dfrac{GM_1 m}{h^2} \cos\alpha$

$$h^2 = z^2 + D^2$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+D^2}}$$

$$\Rightarrow F_{G1} = -\frac{GM_1 m}{(z^2+D^2)} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2+D^2}} = -\frac{GM_1 mz}{(z^2+D^2)^{3/2}}$$

F_{G2} igual que F_{G1} pero con M_2 en lugar de M_1 y así para las otras dos también con sus respectivas masas

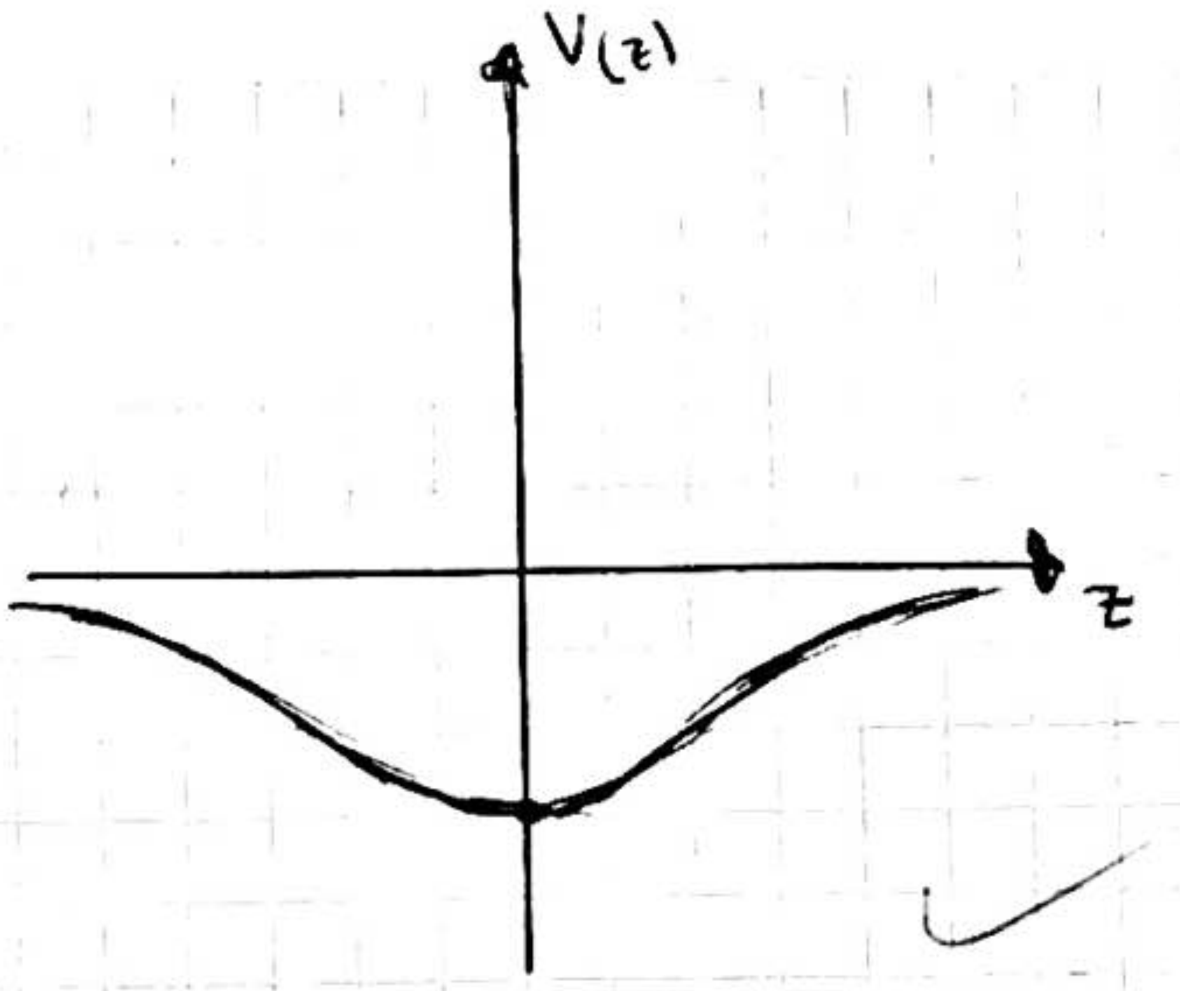
$$V(z) = -\int_{z_0=0}^{z} -\frac{Gmz}{(z^2+D^2)^{3/2}} (M_1+M_2+M_3+M_4)\,dz + V_{(z_0)}$$

$$z^2 + D^2 = u$$
$$2dz\, z = du$$

$$V(z) = -\int_{D^2}^{z^2+D^2} -\frac{Gm}{2u^{3/2}} (M_1+M_2+M_3+M_4)\,du = -\frac{Gm}{u^{1/2}} (M_1+M_2+M_3+M_4) \Big|_{D^2}^{z^2+D^2} + V_{(0)}$$

$$V(z) = -Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)\left(\frac{1}{(z^2+D^2)^{1/2}} - \cancel{\frac{1}{D^2}}\right) + \cancel{V(0)}$$

$$\boxed{V(z) = -\frac{Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)}{(z^2+D^2)^{1/2}}}$$



b) z_{eq} y estabilidad

$$F = -\frac{dV}{dz}$$

$$V(z) = -\frac{Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)}{(z^2+D^2)^{1/2}}$$

siempre creciente $\therefore$ $z_{min} = 0 = z_{eq}$

~~Estabilidad~~

$$-\frac{dV}{dz} = +F = -\frac{Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)\,z}{(z^2+D^2)^{3/2}}$$

para eq $= 0 \Rightarrow \boxed{z_{eq} = 0}$

Estabilidad

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)(z^2+D^2)^{3/2} + Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)\,z\,\frac{3}{2}(z^2+D^2)^{1/2}\,2z}{(z^2+D^2)^3}$$

~~Reemplazando~~

evaluando en z_{eq}

$$-\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)}{D^6}(D^3) = \boxed{<0 \text{ estable eq}}$$

c) Halle frec de oscilación para m en perturbaciones peq de z_{eq}

linealizando
$$F \approx F(z_{eq}) + \frac{dF}{dz}\Big|_{z_{eq}}(z - z_{eq}) = \frac{dF}{dz}\Big|_{z_{eq}} z = -\frac{d^2V}{dz^2}\Big|_{z_{eq}} z$$
$F(z_{eq}) = 0$

$$F \simeq -\frac{Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)}{D^3}\,z\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -\frac{Gm(M_1+M_2+M_3+M_4)}{D^3}\,z$$

$$\ddot{z} + z\left(\frac{G(M_1+M_2+M_3+M_4)}{D^3}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{G(M_1+M_2+M_3+M_4)}{D^3}}}$$

d) Calcule la fuerza ejercida por el tubo en función de z

$m\ddot{y} = m\ddot{x} = 0$

$m\ddot{y} = F_{vy} + F_{G3y} - F_{G1y}$

$m\ddot{x} = F_{vx} + F_{G2x} - F_{G4x}$ $\qquad h = z^2 + D^2$

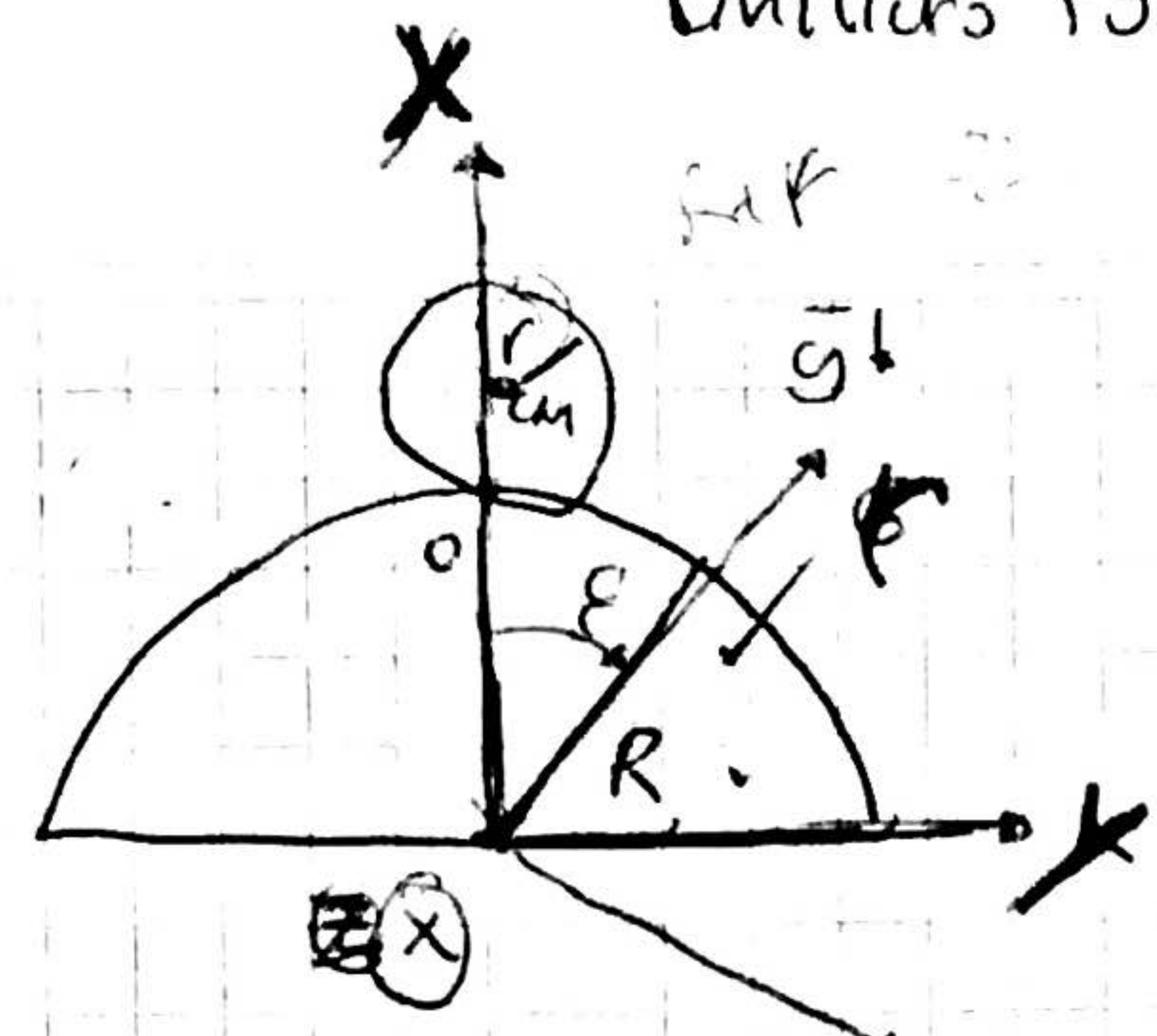
$F_{G3y} = +\dfrac{GM_3 m}{h^2}\sin\alpha$ $\qquad \sin\alpha = \dfrac{D}{\sqrt{z^2+D^2}}$

$\Rightarrow m\ddot{y} = 0 = F_{vy} + \dfrac{GM_3 m D}{(z^2+D^2)^{3/2}} - \dfrac{GM_1 m D}{(z^2+D^2)^{3/2}}$

$$\boxed{F_{vy} = \frac{Gm}{(z^2+D^2)^{3/2}} D \left(-M_3 + M_1\right)}$$

$m\ddot{x} = 0 = F_{vx} + \dfrac{GM_2 m D}{(z^2+D^2)^{3/2}} - \dfrac{GM_4 m D}{(z^2+D^2)^{3/2}}$

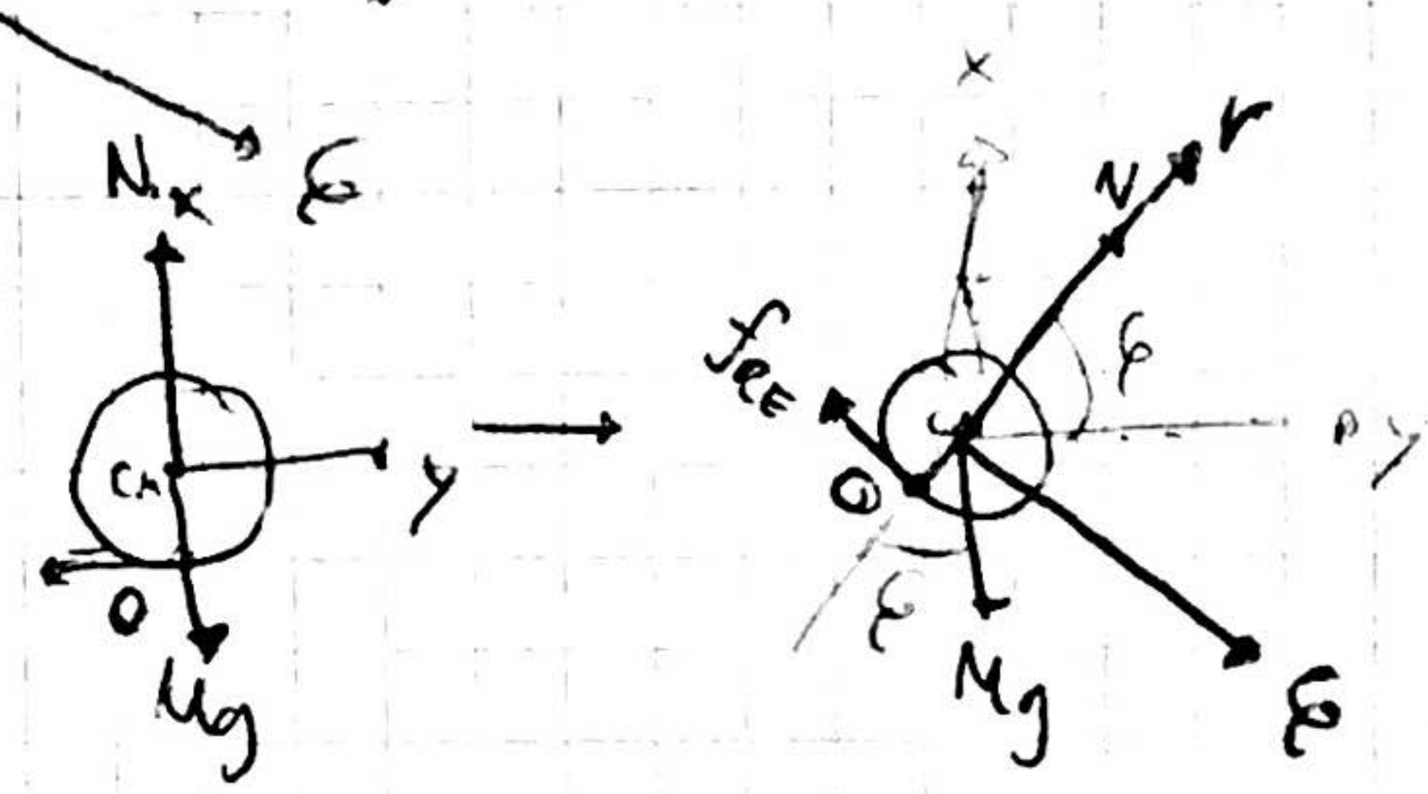
$$\boxed{F_{vx} = \frac{GmD}{(z^2+D^2)^{3/2}} \left(-M_2 + M_4\right)}$$



Problema 2

Datos

M, R, r, I_{CM}^{CIL}



1) Ec Newton, vínculo y rod

Newton

$$m\ddot{\bar{r}} = m\left[(\underbrace{\ddot{r}}_{=0} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r})\hat{\varphi}\right]$$

radio cte radio cte

$$\Rightarrow -m(R+r)\dot{\varphi}_{cm}^2 = N - Mg\cos\varphi \quad \text{vínculo}$$

$$m(R+r)\ddot{\varphi}_{cm} = Mg\sin\varphi + f_{RE}) \quad \text{por cond de rod}$$

Cond de rod

$$\bar{v}_{CM} = \underbrace{\bar{v}_o}_{=0 \text{ no desliza}} + \bar{\Omega}\times(\bar{r}_{CM} - \bar{r}_o)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_{CM} = \bar{\Omega}\times(\bar{r}_{CM} - \bar{r}_o)$$

b) ¿Que se conserva?

$\bar{p} = m\bar{v}$ $\quad \frac{d\bar{p}}{dt} = F_e = N\hat{r} + Mg(-\cos\varphi\hat{r} + \sin\varphi\hat{\varphi}) - f_{RE}\hat{\varphi} \neq \bar{0}$

$\bar{p}$ no se conserva ✓

$\bar{L}_{CM} = I_{CM}\bar{\Omega}$

$$\frac{d\bar{L}_{CM}}{dt} = \bar{N} = \bar{r}\times\bar{F} = \bar{r}_o \times f_{RE} = -r\hat{r}\times f_{RE}\hat{\varphi} = r f_{RE}\hat{z} = I_{CM}\gamma\hat{z}$$

Mg y N no hacen torque respecto del centro de masa ya que son fuerzas centrales y $\bar{r}_{CM}=0$

H - $\Delta H = dW^{NOCONS}$ $\quad$ N ⊥ al mov ∴ no hace trabajo Mg conservativo ✓

$$dW^{ROZ} = \bar{f}_{ROZ}\,d\bar{r} = -f_{ROZ}\hat{\varphi}\cdot\bar{v}_o\,dt = -f_{ROZ}\hat{\varphi}\cdot(\underbrace{\dot{r}}_{0}\hat{r} + r\dot{\varphi}_o\hat{\varphi})\,dt = 0$$

ya que punto o tiene $v=0$

~~H no se conserva~~ ∴ H se conserva

c) Halle el ángulo medido de la vertical / cilindro se separa de la sup

si se separa $\Rightarrow N=0$

$$\therefore \quad -M(R+r)\dot{\varphi}^2 = Mg\cos\varphi$$

$$M(R+r)\ddot{\varphi} = Mg\sin\varphi - f_{RE}$$

$$\bar{v}_{cm} = \bar{\Omega}\times(\bar{r}_{cm}-\bar{r}_0)$$

$$r f_{RE}\hat{z} = I_{cm}\gamma\hat{z} = \frac{1}{2}mr^2\gamma\hat{z}$$

$$\cancel{\gamma = \frac{r f_{RE}}{\frac{1}{2}Mr^2} = \frac{2f_{RE}}{Mr}}$$

$$\cancel{\bar{v}_{cm} = \bar{\Omega}\times(\bar{r}_{cm}-\bar{r}_0) \Rightarrow \dot{\bar{r}}_{cm} = \bar{\gamma}\times(\bar{r}_{cm}-\bar{r}_0)}$$

$$\cancel{\dot{\bar{r}}_{cm} = \frac{2f_{RE}\hat{z}}{Mr}\times(r\hat{r}) = \frac{-2f_{RE}}{M}\hat{\varphi}}$$

NO CORRESP

$$\cancel{\Rightarrow M(R+r)\ddot{\varphi} = Mg\sin\varphi - f_{RE} = \frac{-2f_{RE}}{M}}$$

$$\cancel{M^2 g\sin\varphi = -2f_{RE} + f_{RE}M}$$

$$\cancel{M^2 g\sin\varphi = f_{RE}(M-2)}$$

$$\cancel{f_{RE} = \frac{M^2 g\sin\varphi}{M-2}} \Leftarrow \text{No tiene sentido}$$

$$\dot{r}\hat{r} + (R+r)\dot{\varphi}\hat{\varphi} = I_{cm}\Omega\hat{z}$$

$$r f_{RE} = \frac{1}{2}Mr^2\gamma$$

$$\boxed{\gamma = \frac{2f_{RE}}{M(r+R)}}$$ ✓

$$\cancel{\ddot{r} = \bar{\gamma}\times(\bar{r}_{cm}-\bar{r}_0) = \frac{-2rf_{RE}}{(R+r)^2M}\hat{z}\times r\hat{r} = \frac{-2r^2 f_{RE}}{(R+r)^2M}\hat{\varphi}}$$

$$(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) = \Omega\hat{z}\times r\hat{r}$$

$$(R+r)\dot{\varphi} = -\Omega r$$

$$\dot{\varphi} = \frac{-\Omega r}{(R+r)} \qquad \cancel{\ddot{\varphi} = \frac{-2r^2 f_{RE}}{(R+r)^2M} = \frac{-\gamma r}{(R+r)}}$$

$$\Omega = -\frac{\dot{\varphi}(R+r)}{r}$$

$$\cancel{M(R+r)\ddot{\varphi} = Mg\sin\varphi - f_{RE}}$$

$$\cancel{M(R+r)\frac{-2r^2 f_{RE}}{(R+r)^3M} = Mg\sin\varphi - f_{RE}} \qquad \cancel{f_{RE}\left(1-\frac{2r^2}{(R+r)^2}\right) = Mg\sin\varphi}$$

$$(R+r)\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi \quad \text{(Newton)}$$

$$H_0 = H_F$$

$$H_0 = (R+r)mg \qquad H_F = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgh + \frac{1}{2}I_{cm}\Omega^2$$ ✓

$$= \frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + mg((R+r)\cos\varphi) + \frac{1}{2}I_{cm}\Omega^2$$

$$\cancel{\Rightarrow (R+r)mg = \frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R+r)\cos\varphi}$$

~~Reemplazando~~

$$\cancel{(R+r)mg = \frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + m(R+r)^2\dot{\varphi}^2}$$

$$\cancel{(R+r)g = \frac{3}{2}(R+r)^2\dot{\varphi}^2}$$ NO CORRESP

$$\cancel{\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{3(R+r)}}$$

$$\cancel{\Rightarrow (R+r)\frac{2g}{3(R+r)} = g\cos\varphi}$$

$$\cancel{\cos\varphi = \frac{2}{3}}$$

$$\cancel{\boxed{\varphi = \arccos\frac{2}{3}}}$$

$$H_F = \frac{1}{2}(R+r)^2\dot{\varphi}^2 m + mg\underbrace{(R+r)\cos\varphi}_{(R+r)\dot{\varphi}^2} + \frac{1}{2}m r^2 \cdot \frac{\dot{\varphi}^2(R+r)^2}{r^2} \Rightarrow H_0 = H_F$$

$$(R+r)mg = \frac{1}{2}(R+r)^2\dot{\varphi}^2 m + m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{m(R+r)^2}{r^2}\dot{\varphi}^2 r^2$$

$$g = \dot{\varphi}^2\left(\frac{(R+r)}{2} + (R+r) + \frac{(R+r)}{2}\right)$$

$$g = \dot{\varphi}^2(2(R+r))$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{2(R+r)}$$

$\Rightarrow (R+r)\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi$

$(R+r)\dfrac{g}{2\cancel{(r+R)}} = g\cos\varphi$

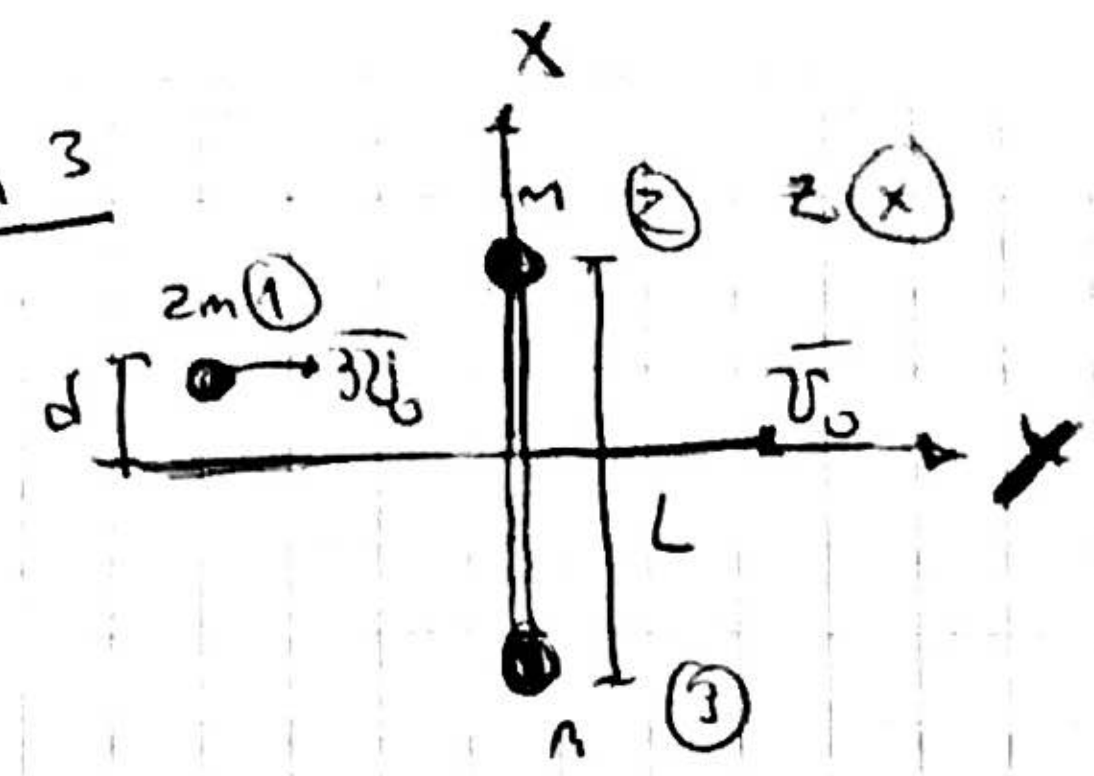
$\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\varphi = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)}$

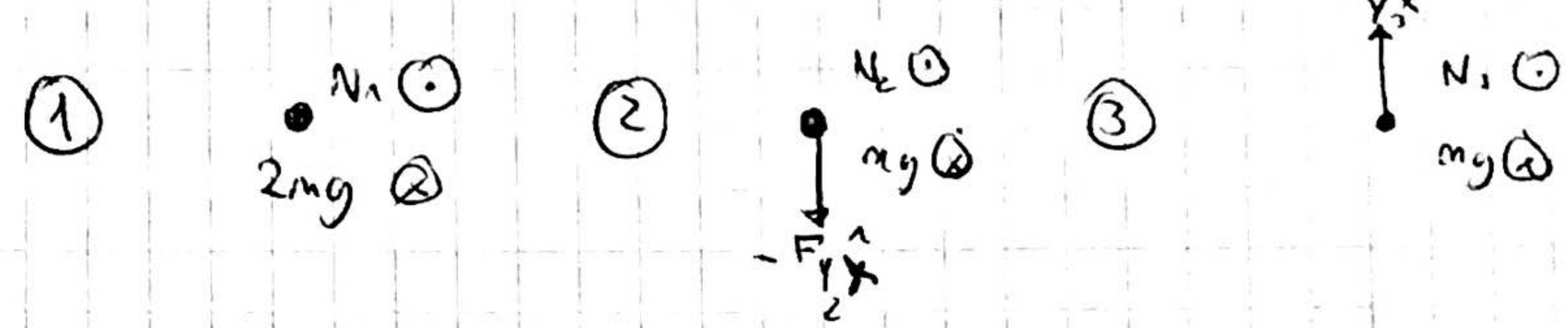
error algebraico

$\varphi = \arccos(4/7)$

Problema 3



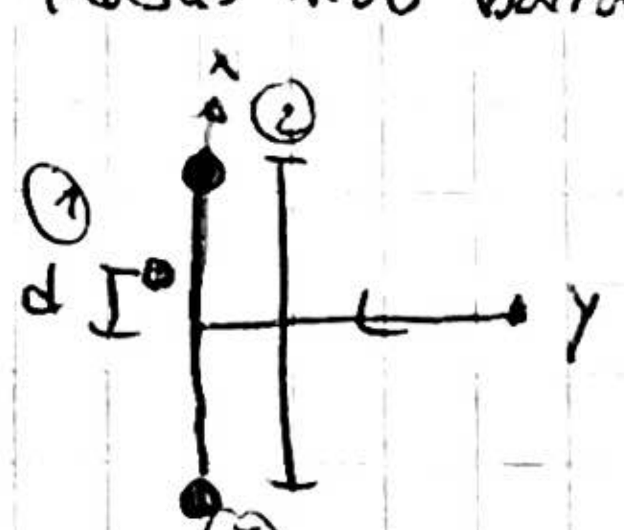
DCL



a) Conservaciones

Sist 3 masas más barra

Antes



$$\boxed{\bar{r}_{cm} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + m_3\bar{r}_3}{M_{TOT}} = \frac{2md\hat{x} + m\cancel{\frac{L}{2}}\hat{x} - m\cancel{\frac{L}{2}}\hat{x}}{4m} = \frac{1}{2}d\hat{x}}$$

$$\boxed{\bar{v}_{cm} = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + m_3\bar{v}_3}{M_{TOT}} = \frac{2m3v_0\hat{y} + mv_0\hat{y} + mv_0\hat{y}}{4m} = 2v_0\hat{y}}$$

~~$\bar{r}_{CM}$~~

$$\bar{p}_{sist} = 2m3v_0\hat{y} + mv_0\hat{y} + mv_0\hat{y} = 8v_0 m\hat{y}$$

$$\frac{d\bar{p}_{sist}}{dt} = \bar{F}^e = \cancel{\bar{N}_1} + \cancel{\bar{m_1 g}} + \cancel{\bar{N}_2} + \cancel{\bar{m_2 g}} + \cancel{\bar{N}_3} + \cancel{\bar{m_3 g}} = \bar{0} \quad \boxed{\bar{p}_{sist} \text{ se conserva}}$$

F_{v_2} y F_{v_3} de la barra es F interna y la barra tiene m despreciable

$$\bar{L}_{cm} = \bar{r}_{1cm} \times \bar{p}_{1cm} + \bar{r}_{2cm} \times \bar{p}_{2cm} + \bar{r}_{3cm} \times \bar{p}_{3cm} = \frac{1}{2}d\hat{x} \times 2mv_0\hat{y} + \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{2}d\right)\hat{x} \times mv_0\hat{y}$$

$$+ \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2}d\right) - \hat{x} \times -mv_0\hat{y} = dmv_0\hat{z} - \left(\cancel{\frac{L}{2}} - \frac{1}{2}d\right)mv_0\hat{z} + \left(\cancel{\frac{L}{2}} + \frac{1}{2}d\right)mv_0\hat{z}$$

$$= 2dmv_0\hat{z}$$

Bien!

$$\frac{d\bar{L}_{cm}}{dt} = \bar{M} = \bar{r}_{2cm} \times \bar{F}_{v_2} + \bar{r}_{3cm} \times \bar{F}_{v_3} = \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{2}d\right)\hat{x} \times -F_{v_2}\hat{x} + \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2}d\right)\hat{x} \times F_{v_3}\hat{x} = \bar{0}$$

y el torque producto de los pesos se anula con las normales $\Rightarrow \boxed{\bar{L}_{cm} = cte}$

$\boxed{H \text{ se conserva}}$ ya que $N_1, N_2, N_3, F_{v_2}, F_{v_3}$, $\perp$ al mov, pesos conservativos.

$$H = \frac{1}{2}2m(3v_0)^2 + \frac{1}{2}m(v_0)^2 + \frac{1}{2}m(v_0)^2 = m9v_0^2 + mv_0^2 = 10mv_0^2$$

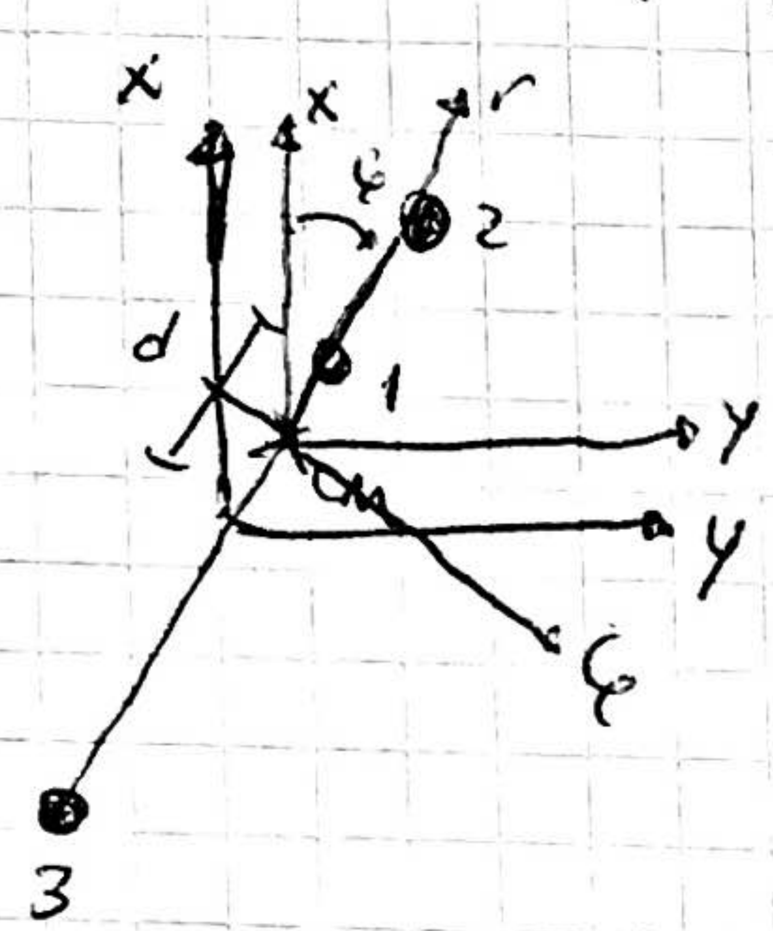
Durante

$\overline{p}$ se conserva ya que las fuerzas durante el choque son internas

L_{cm} se conserva ya que si bien hay fuerzas que producen torque el tiempo de choque es muy pequeño y se considera que $\overline{L_{cm}}$ se conserva

M pierde energía por ser un choque plástico

Despues



en verde un sist de ref

y en rosa uno fijo al cm

$$\frac{d\overline{p_{sist}}}{dt} = \overline{F^e} = \overline{N_1} + m_1\overline{g} + \overline{N_2} + m_2\overline{g} + \overline{N_3} + m_3\overline{g} = \overline{0} \quad \therefore \boxed{p \text{ se conserva}}$$

$$\frac{d\overline{L_{cm}}}{dt} = \overline{M} = \overline{0}$$ ya que F vinculos centrales respecto del CM y los torques de las normales son iguales a los pesos y se anulan

$\therefore$ $\boxed{L_{cm} \text{ se conserva}}$

nuevamente $N_1, N_2, N_3, F_v \perp$ al movimiento $\therefore$ $\boxed{M \text{ se conserva}}$

b) $\overline{r_{cm}}, \overline{v_{cm}}$ y $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ antes y despues

$\overline{r_{cm}}$ y $\overline{v_{cm}}$ antes, las calcule atras

(antes) $\overline{r_{cm_0}} = \frac{1}{2} d\hat{x}$ $\quad \overline{v_{cm_0}} = 2v_0\hat{y}$

~~(despues) $\overline{r_{cm}(t)} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{M_{TOT}} = \frac{2md\hat{r} + m\frac{L}{2}\hat{r} - m\frac{L}{2}\hat{r}}{4m} = \frac{1}{2}d\hat{r}$ en un sist que se mueve con $\overline{v} = \overline{v_{cm}}$~~

~~$\overline{v_{cm}(t)} = \overline{v_{cm}}$~~

$$\overline{L_{cm}(t)} = \overline{r_{1cm}} \times \overline{p_{1cm}} + \overline{r_{2cm}} \times \overline{p_{2cm}} + \overline{r_{3cm}} \times \overline{p_{3cm}} =$$

$$= \frac{1}{2}d\hat{r} \times 2m\left(\underbrace{\dot{r}_1}_{=0}\hat{r} + r_1\dot{\varphi}_1\hat{\varphi}\right) + \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{2}d\right)\hat{r} \times m\left(\underbrace{\dot{r}_2}_{=0}\hat{r} + r_2\dot{\varphi}_2\hat{\varphi}\right)$$

$$+ \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2}d\right)\hat{r} \times m\left(\underbrace{\dot{r}_3}_{=0}\hat{r} + r_3\dot{\varphi}_3\right)\hat{\varphi} =$$

radio = cte

$$\dot{d^2 m \varphi_1}\hat{z} + \left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)^2 m\dot{\varphi}_2\hat{z} + \left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)^2 m\dot{\varphi}_3\hat{z}$$

$$\overline{P_{SIST}} = \left(2md\dot{\varphi}_1 + m\left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)m\dot{\varphi}_2 + m\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)m\dot{\varphi}_3\right)\hat{\varphi} = \left(m_1\overline{v_1} + m_2\overline{v_2} + m_3\overline{v_3}\right)$$

$$H_{SIST} = \frac{1}{2}2md^2\dot{\varphi}_2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)^2\dot{\varphi}_3^2 = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2\right)$$

Antes	Desp
$\overline{P} = 8v_0 m\hat{y}$	$\overline{P} = 2md\dot{\varphi}_1 + m\left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)m\dot{\varphi}_2 + m\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)m\dot{\varphi}_3)\hat{\varphi}$
$\overline{L_{cm}} = 2dmv_0\hat{z}$	$\overline{L_{cm}} = \left(d^2m\dot{\varphi}_1 + \left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)^2m\dot{\varphi}_2 - \left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)^2m\dot{\varphi}_3\right)\hat{z}$
$H = 10mv_0^2$	$H = md^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)^2\dot{\varphi}_3^2$

Antes del choque tanto la barra como la masa 1 se mueven en una dirección hasta que la masa 1 choca a la barra, entonces esta comienza a girar con una velocidad en su cm constante teniendo momento angular constante $\Rightarrow$ aceleración angular igual a cero

respecto cm vínculos

$$r_2 + r_3 = L \qquad r_1 + r_3 = \frac{L}{2} + d$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_3 \qquad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3 \qquad \varphi_1 = \varphi_3$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$$

$$\Rightarrow \overline{L_{cm}} = d^2m\dot{\varphi}_1 + \left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)^2m\dot{\varphi}_1 - \left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)^2m(-\dot{\varphi}_1)\hat{z}$$

$$= \dot{\varphi}_1 m\left(d^2 + \left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)^2 + \left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)^2\right)$$

$$\overline{L_{cm}}^i = \overline{L_{cm}(t)}$$

$$\Rightarrow 2dmv_0 = \dot{\varphi}_1 m\left(d^2 + \left(\frac{L}{2}-\frac{1}{2}d\right)^2 + \left(\frac{L}{2}+\frac{1}{2}d\right)^2\right) = \dot{\varphi}_1 m\left(d^2 + \frac{L^2}{4} - \cancel{\frac{Ld}{2}} + \frac{1}{4}d^2 + \frac{L^2}{4} + \cancel{\frac{Ld}{2}} + \frac{1}{4}d^2\right)$$

$$2dmv_0 = \dot{\varphi}_1 m\left(d^2 + \frac{L^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right) = \dot{\varphi}_1\left(\frac{3}{2}d^2 + \frac{L^2}{2}\right)m$$

$$2dv_0 = \dot{\varphi}_1\left(\frac{3}{2}d^2 + \frac{L^2}{2}\right) \quad \text{Arreglaremos}$$

$\cancel{\overline{P_i} = \overline{P}(t)}$

$\cancel{8 m v_0 = 2m \dot{\varphi}_1 + m\left(\frac{L}{2} - \frac{d}{2}\right)\dot{\varphi}_1 - m\left(\frac{L}{2} + \frac{d}{2}\right)\dot{\varphi}_1}$

$\cancel{8 v_0 = 2\dot{\varphi}_1\left(1 + \frac{L}{4} - \frac{d}{4} - \frac{L}{4} - \frac{d}{4}\right)}$

$\cancel{8 v_0 = 2\dot{\varphi}_1\left(1 - \frac{d}{2}\right)}$

$\cancel{v_0 = \frac{\dot{\varphi}_1}{4}\left(1 - \frac{d}{2}\right)}$

$\cancel{v_0 = \sqrt{\frac{H}{10m}} \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = 4\sqrt{\frac{H}{10m}}\left(1 - \frac{d}{2}\right)^{-1}}$

$\cancel{\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_1}$

NO

$$v_0 = \frac{\dot{\varphi}_1}{4d}\left(3d^2 + L^2\right)$$

$H = 10 m v_0^2$

$$v_0 = \sqrt{\frac{H}{10m}} \qquad \dot{\varphi}_1 = 4d\sqrt{\frac{H}{10m}}\left(3d^2 + L^2\right)^{-1}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_3$$

c) ΔT debido al choque

$$H_0 = 10 m v_0^2 \qquad H_F = m d^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{d}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2$$

$$\Delta T = H_F - H_0 = m\dot{\varphi}_1^2\left(d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{d}{2}\right)^2\right) - 10m\left(\frac{\dot{\varphi}_1(3d^2 + L^2)}{4d}\right)^2$$

$$= m\dot{\varphi}_1^2\left(d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{10(3d^2 + L^2)^2}{4d^2}\right)$$

Bien lo demás, arrastras error para $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3$

Falta la E traslación CM.