A

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre: Emiliano Fortes
No. de libreta: 126/14 Turno de TP: Mañana

Matemática 4 - 1er Parcial (15/05/2015)

Justificar todas las respuestas

2

1. Consideramos la función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy + 1$. Verificar que v es armónica en $\mathbb{R}^2$ y hallar <u>todas</u> las funciones $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que $u + iv$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

3

2. Hallar el dominio de convergencia de la serie
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)2^n}\Big(\frac{1-i}{\sqrt{2}}z - 1\Big)^n.$$

2.

3. Notamos Log el logarítmo principal. Calcular según el valor de $R \in (0,1)$, $R \neq 1/2$, la integral
$$\int_{C(0,R)} \frac{\operatorname{Log}\Big(\frac{i+z}{i-z}\Big)}{\Big(z - \frac{i}{2}\Big)(z+1-i)}\, dz$$
donde $C(0,R)$ es el círculo centrado en 0 de radio R recorrido una vez en sentido positivo.

X

4. Notamos $D = D(0,1)$ el disco centrado en 0 de radio 1. Sea f una función holomorfa en D y continua sobre $\bar{D}$ tal que
$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad |f(z)| \leq 1 \text{ para todo } |z| \leq 1.$$
Consideramos la función
$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{sino.} \end{cases}$$
   a) Justificar porque g es holomorfa en $D - \{0\}$ y continua en 0.
   b) Suponiendo que g es holomorfa en todo D, pruebe que
   $$|g(z)| \leq 1 \qquad \text{para todo } |z| \leq 1$$
   y luego deduzca que
   $$|f(z)| \leq |z| \qquad \text{para todo } |z| \leq 1.$$

Emiliano Fortes

HOJA 1/4

FECHA

Ejercicio 1

Consideramos la función $v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy + 1$. Verificar que v es armónica en $\mathbb{R}^2$:

Si $\Delta \overset{v(x,y)}{v} = 0 \Rightarrow V$ es armónica en $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -x + 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y + 2x$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -1 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 1$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -1 + 1 = 0 \therefore V \text{ es armónica en } \mathbb{R}^2}$$

2 ✓

Sea $f = u + iv$

Si f es holomorfa (en $\mathbb{C}$), entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy Rieman (en todo $\mathbb{C}$)

Es decir $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = y + 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y \end{matrix}$

Integrando $\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \qquad u = \int (y + 2x)dx + C$ ← aparece por integrar, pero como no le puse límites a la integral la escribo aparte

$\Rightarrow u = yx + x^2 + C(y)$ [en principio puede depender de y]

Además $\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{x} + C'(y) = \cancel{x} - 2y$

$C'(y) = -2y$

$\Rightarrow \int C'(y)dy = -y^2 + C$ que no depende de x, pues $\frac{\partial u}{\partial x}$ ya cumple "$\frac{\partial v}{\partial y}$"

$\Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2 + xy + C$ ✓

$$\boxed{f(z) = x^2 - y^2 + xy + C + i\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy + 1\right)}$$

f es holomorfa pues se cumple Cauchy Rieman y además u y v son funciones C^∞ por ser suma y multiplicación de polinomios de x e y

Verifico

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y + 2x$ ✓

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + x \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = x - 2y$ ✓

NOTA

Ejercicio 2

Hallar el dominio de convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)2^n}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}z - 1\right)^n$$

Estudio primero la convergencia uniforme de la serie que se obtiene al reemplazar

$$u = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}z - 1\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)2^n} u^n$$

Aplicando el criterio de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n+1)2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\to 1}\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow R\text{(Radio de convergencia)} = \frac{1}{\lambda} = 2$$

y si $|u|>2$ ¿?

Entonces si $|u|<2$ la serie converge

Para estudiar el borde $u = 2e^{i\varphi}$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)2^n}\cdot(2e^{i\varphi})^n = \sum_{n\geq 0} \frac{\cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{2^n}} e^{in\varphi} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)} e^{in\varphi}$$

$$= \left[\frac{e^0}{1} + \frac{e^{i\varphi}}{2} + \frac{e^{i2\varphi}}{3} + \dots + \frac{e^{in\varphi}}{n+1}\right]$$

Si $\varphi = 0 \Rightarrow = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)}$

Sea $a_n = \frac{1}{n+1}$ y $b_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow$ si $\sum b_n$ converge $\sum a_n$ también

y si $\sum b_n$ diverge $\sum a_n$ también

Utilizando criterio de comparación por integral

$\frac{1}{n}$ siempre positivo y decreciente

Luego como $\int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} b_n$ diverge y la de a_n también

Para $\varphi \neq 0$ Utilizo el criterio de Dirichlet

"es una especie de serie alternada"

Sea $V_n = \frac{1}{(n+1)}$ y $C_n = e^{in\varphi}$ ✓

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$, $\frac{1}{(n+1)}$ decreciente y siempre >0 y $\exists\, C$ (que no dependa de n) /

$$\left|\sum_{n\geq 0}^{N} e^{in\varphi}\right| \leq C$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} V_n C_n$ converge

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$ ✓ $\quad \frac{1}{(n+1)} > \frac{1}{(n+2)} \Leftrightarrow n+2 > n+1$ ✓

decreciente

Como $n\geq 0$, siempre positiva ✓

Falta ver la condición sobre C_n

$$\left|\sum_{n\geq 0}^{N} e^{in\varphi}\right| = \left|\underbrace{1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \dots + e^{Ni\varphi}}\right|$$

Serie geométrica de razón $r = e^{i\varphi}$

Que sabemos que $\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

$$\Rightarrow \left|\frac{1-e^{i\varphi(n+1)}}{1-e^{i\varphi}}\right| \leq \frac{1}{|1-e^{i\varphi}|} + \frac{|e^{i\varphi(n+1)}|}{|1-e^{i\varphi}|} = \frac{2}{|1-e^{i\varphi}|} = C$$ ✓

$\therefore$ Se cumplen todas las hipótesis y la serie converge

Entonces la serie converge si $|u| < 2$ y si $|u| = 2$ con $u \neq 2$ ✓

pero $u = \frac{1-i}{\sqrt{2}} z - 1$

$$\left|\frac{1-i}{\sqrt{2}} z - 1\right| = \left|\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right| \left|z - \frac{\sqrt{2}}{1-i}\right| = \left|z - \frac{\sqrt{2}}{(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)}\right|$$

O sea $\left|\frac{1-i}{\sqrt{2}} z - 1\right| < 2$

$$= \left|z - \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \left|z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| < 2 \quad \text{y si} \quad \left|\frac{1-i}{\sqrt{2}} z - 1\right| = 2 \quad \text{con} \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) z - 1 \neq 2$$

$$z\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \neq 3$$

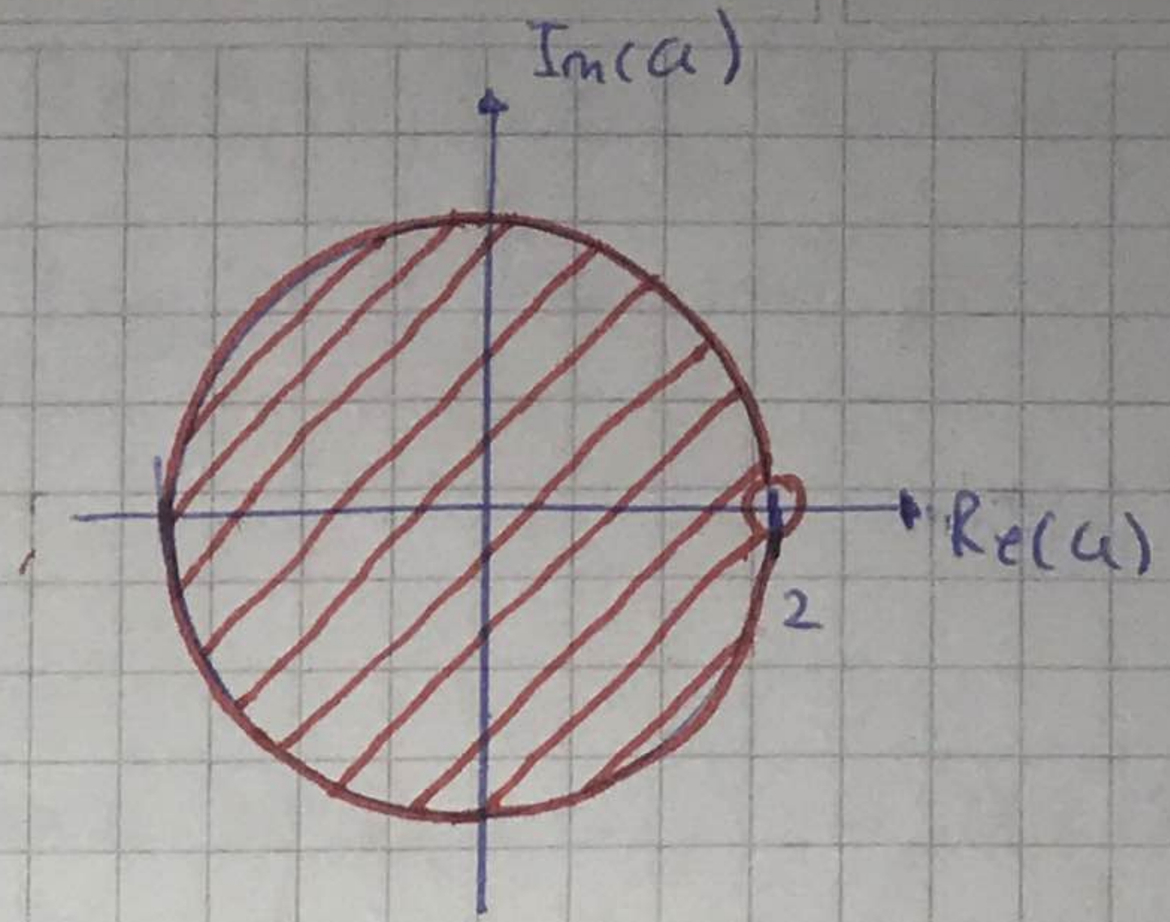
$$(1-i) z \neq 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{(1-i)(1+i)}{(1+i)} z \neq 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(1+i)} z \neq 3\sqrt{2} \Leftrightarrow z \neq \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

En conclusión

Si se trata de u

La serie converge si $|u| < 2$

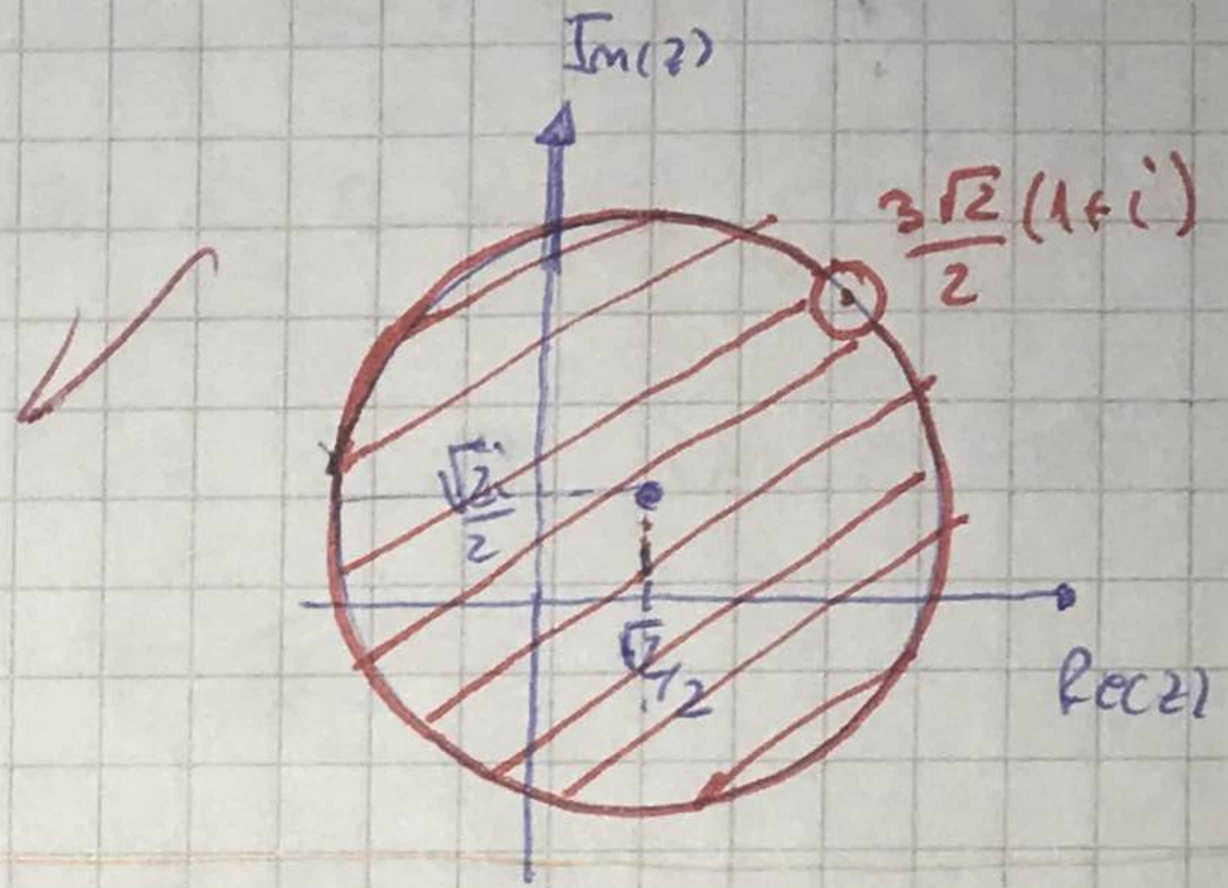
y $|u| = 2$ con $u \neq 2$



Si se trata de z

La serie converge si $\left| z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right| < 2$

y $\left| z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right| = 2$ con $z \neq \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$



Emiliano Fortes | HOJA 4/4 | FECHA

Ejercicio 3 Calcular según el valor de $R \in (0,1)$, $R \neq \frac{1}{2}$ la integral

$$\int_{C(0,R)} \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{i+z}{i-z}\right)}{\underbrace{(z-i/2)}_{1}\underbrace{(z+1-i)}_{2}} dz$$ donde Log es el logaritmo principal

$\Rightarrow$ La función a integrar tiene problemas si 1) $(z - i/2) = 0$, 2) $(z+1-i) = 0$, 3) $i - z = 0$ ¡faltan! Log(w) holo en $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$

Es decir $z = i/2$, $|z| = \frac{1}{2}$, $z = -1+i$, $z = i$ ¿ z tq $\frac{i+z}{i-z} \in (-\infty, 0]$?

y Además $\mathrm{Log}(z) = \ln(R) + i\varphi$ $\quad \varphi \in -\pi, \pi$ con $z = Re^{i\varphi}$

tiene problemas si $z = 0 + bi$ con $b \leq 0$.

Analizo

$\Rightarrow \mathrm{Log}\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$ $\quad \frac{i+z}{i-z} = \frac{i+z}{i-z}\frac{(-i-\bar{z})}{(-i-\bar{z})} = \frac{1-i\bar{z}-iz-|z|^2}{1-i\bar{z}+iz+|z|^2}$

Como el problema está en la parte real

$\mathrm{Re}\left(\frac{i+z}{i-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2b}$ $\quad z = Re^{i\varphi}$

Al final no articulo donde $\mathrm{Log}\,\frac{i+z}{i-z}$ es holo!

$= \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\sin(\varphi)} = \frac{1-R^2}{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)+R^2-2R\sin(\varphi)}$

$= \frac{1-R^2}{\underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\geq 0}+\underbrace{(R-\sin(\varphi))^2}_{\geq 0}}$ $\quad$ El problema es si $R=1$, pero nuestro círculo no abarca ese radio.

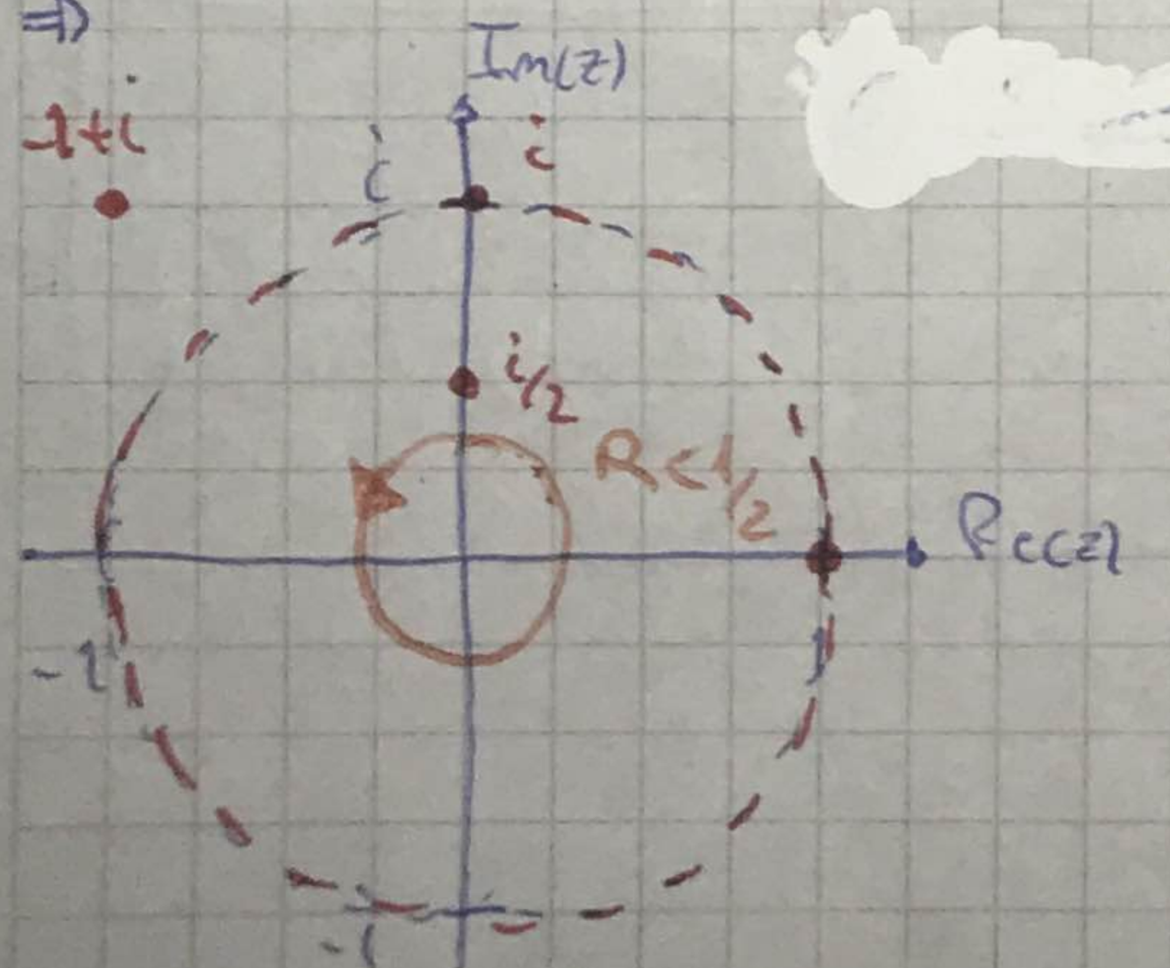
$\cos^2(\varphi) + (R - \sin(\varphi))^2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2(\varphi) = 0$, para eso $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow (R - \sin(\frac{\pi}{2})) = R-1$ si $R=1$, problema

$(R - \sin(\frac{3\pi}{2})) = R+1$ no problema

$\Rightarrow$

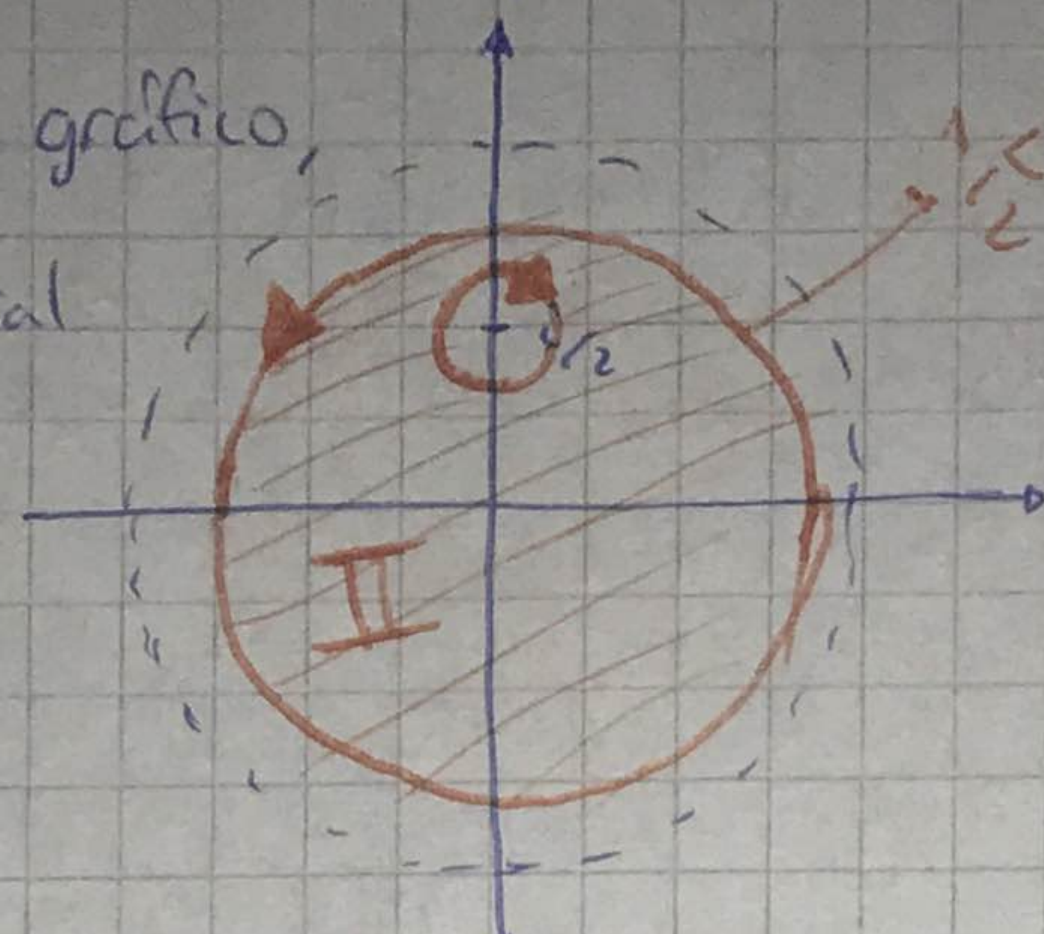


$\Rightarrow$ Si $R < 1/2$ no hay problemas en la integración entonces la curva es homotópica a un punto (Por Cauchy) y la integral sobre la curva de la función da cero ✓

(Perdón por el análisis horrible e innecesario para $\frac{i+z}{i-z}$, pero no recordé la fórmula para reescribirla)

NOTA

Si $R > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ el punto $i/2$ es problema en el dominio, pero si tomamos la región II esquematizada en el gráfico, por Cauchy la integral dentro de esa región es homotópica a un punto y entonces



Por ser homotópica a un punto en II

$$\oint_{C(0,R)} + \oint_{C(i/2,R')} = 0 \Rightarrow \oint_{C(0,R)} = \oint_{C(i/2,R')}$$

$$\oint_{\substack{C(0,R)\\ R > 1/2}} \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{i+z}{i-z}\right)}{(z-i/2)(z+1-i)}\,dz = \oint_{C(i/2,R')} \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{i+z}{i-z}\right)}{(z-i/2)(z+1-i)}\,dz$$

Sea $g(z) = \dfrac{\mathrm{Log}\left(\frac{i+z}{i-z}\right)}{(z+1-i)}$

$$\Rightarrow \oint_{C(i/2,R')} \frac{g(z)}{(z-i/2)}\,dz$$

Por integral de Cauchy

$$g^{k}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \oint_{C(i/2,R')} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$

donde z_0 es el valor donde la función no es holomorfa

$$\Rightarrow g(i/2) = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{i+i/2}{i-i/2}\right)}{(i/2+1-i)} = \frac{\mathrm{Log}(3)}{(1-i/2)} = \frac{\ln(3)\,(1+i/2)}{(1-i/2)\,(1+i/2)}$$

$$= \frac{\ln(3)\,(1+i/2)}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\ln(3)\,(1+i/2)$$

✓

$$\Rightarrow \oint_{C(i/2,R')} \frac{g(z)}{(z-i/2)} = \frac{g(i/2)\cdot 2\pi i}{1!} = \frac{4}{3}\ln(3)\,\pi\,(i-1/2)$$

$$\boxed{\text{Rta: } \oint_{C(0,R)} \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{i+z}{i-z}\right)}{(z-i/2)(z+1-i)}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } R < 1/2 \\ \frac{4}{3}\ln(3)\pi(i-1/2) & \text{si } R > 1/2,\ R < 1 \end{cases}}$$