FÍSICA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013

GUÍA 2: SEGUNDO PRINCIPIO, MÁQUINAS TÉRMICAS

1. Demostrar que:

   a) Los postulados del segundo principio de Clausius y de Kelvin son equivalentes TEÓRICA

   b) Ninguna máquina cíclica que funciona entre dos fuentes de temperatura puede tener mayor rendimiento que una máquina reversible que funciona entre las mismas temperaturas. TEORICA

   c) Todas las máquinas reversibles que funcionan entre dos fuentes de temperatura tienen el mismo rendimiento. TEORICA

2. Usando la convención gráfica según la cual una máquina simple que entrega trabajo positivo se representa como en la figura:

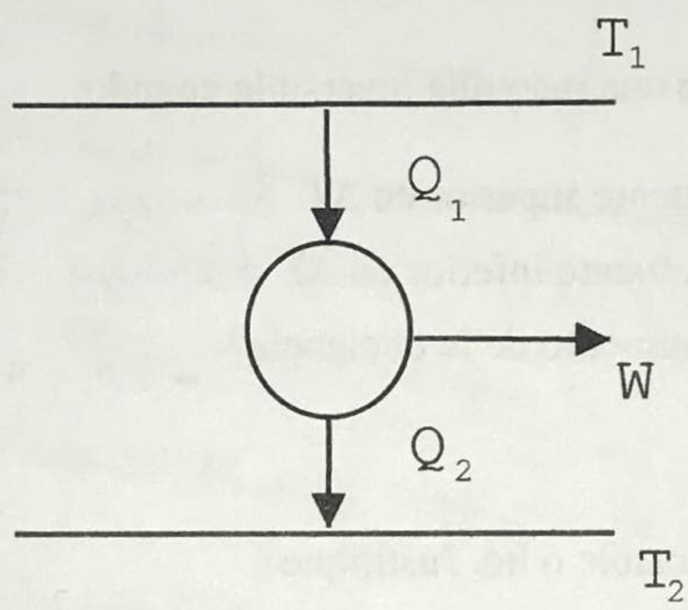


Figura 1: Convención gráfica

   a) Haga el esquema de una estufa eléctrica

   b) Haga el esquema para una heladera. ¿Cuál es en la práctica la fuente fría y cuál la caliente?

   c) ¿Es posible una máquina como la indicada en *a*)? ¿Puede ser reversible? ¿Y una como la que se indica en *b*)?

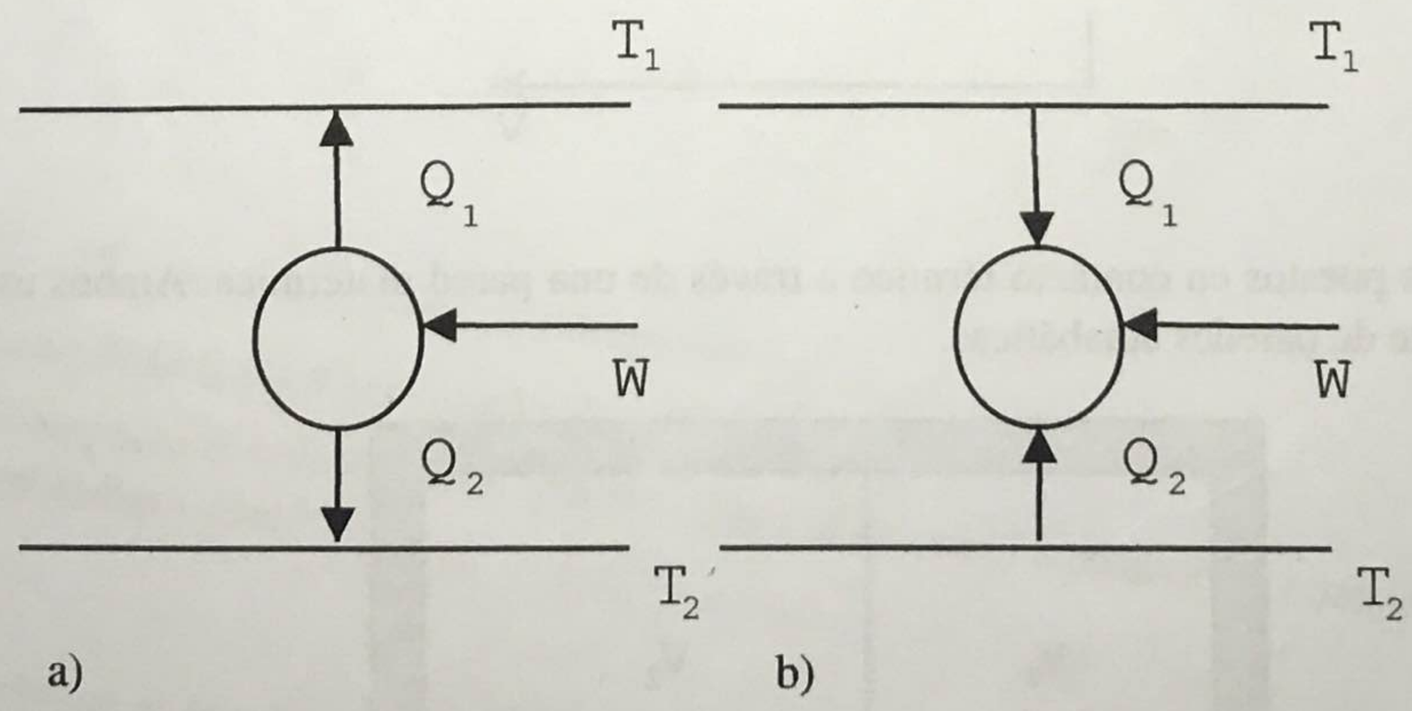


Figura 2: ¿Es posible?

3. Para enfriar un ambiente se abre la puerta de la heladera y se la hace funcionar. ¿Qué habrá pasado con la temperatura del cuarto después de algún tiempo?

TEÓRICA

4. En una cocina hay una heladera y un equipo de aire acondicionado que da al exterior. Se pretende mantener la cocina a una temperatura constante de 17°C y al congelador de la heladera a una temperatura constante de −3°C. Por mala aislación en congelador absorbe de la cocina 200 cal/min. La temperatura externa es de 27°C. Sabiendo que el refrigerador tiene una eficiencia del 60 % de uno ideal y que el equipo de aire acondicionado tiene una eficiencia del 50 % del ideal, calcular la potencia eléctrica consumida entre ambos artefactos.

5. La máquina térmica de una heladera a gas intercambia calor con las siguientes fuentes de calor: 1) una llama de gas, que se puede considerar una fuente de calor a 700 K, y de la que absorbe Q_1; 2) una cámara frigorífica, de la que absorbe el calor Q_2, y a la que se puede considerar como una fuente de calor a −10°C (esta temperatura se mantiene constante, porque la máquina debe absorber la misma cantidad de calor por ciclo que el que entra a la cámara en el mismo tiempo debido a la aislación imperfecta); 3) el aire de la habitación en que se halla la heladera, que constituye una fuente de calor a 20°C y al que entrega calor Q_3. La máquina térmica no recibe ni entrega trabajo.

   a) Si la pérdida a la cámara por mala aislación vale 30 cal/min, y la máquina térmica realiza 100 ciclos/min, hallar cuanto debe valer Q_2/ciclo.

   b) Hallar el mínimo valor de Q_1/ciclo que debe absorber.

6. Calcular la variación de la eficiencia de una máquina reversible cuando:

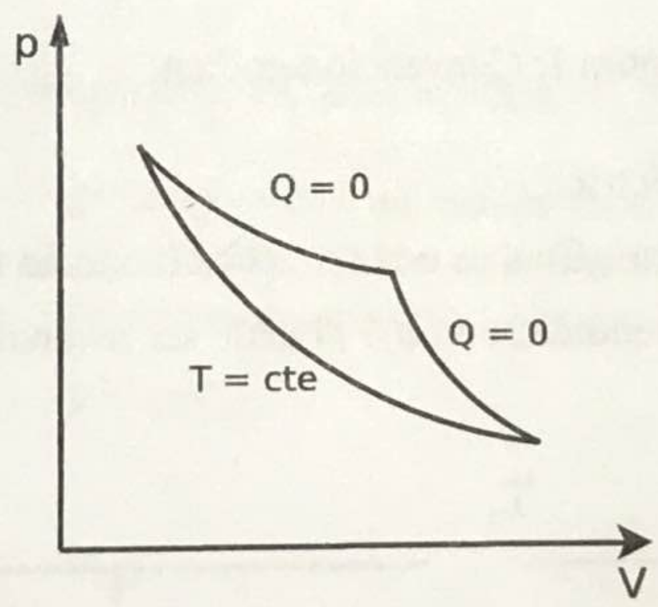
   a) se aumente la temperatura de la fuente superior en ΔT disminuye $\frac{1}{\frac{T_f}{T_c}-1}$

   b) se disminuye la temperatura de la fuente inferior en ΔT disminuye

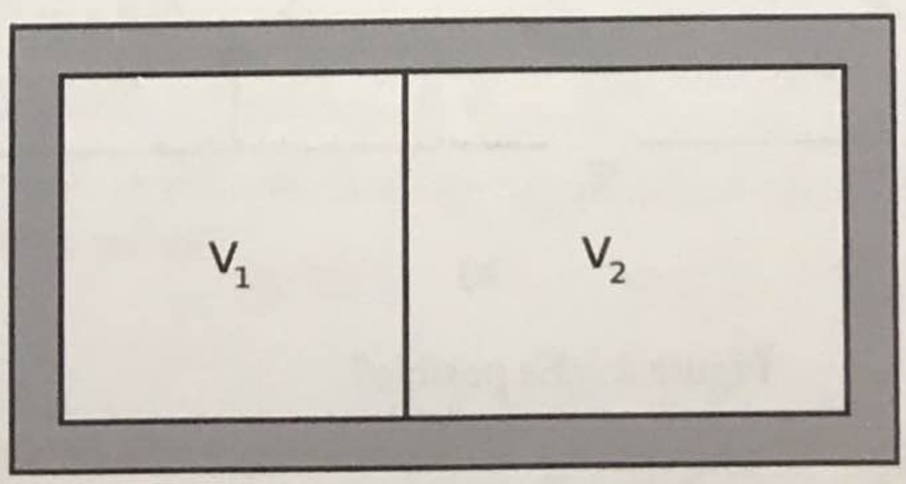
   c) ¿Qué cambio produce un mayor aumento de la eficiencia? − sup ; + inf

7.

   a) Explique si el siguiente ciclo es posible o no. Justifique.



   b) Sean dos gases puestos en contacto térmico a través de una pared diatérmica. Ambos están encerrados en un recipiente de paredes adiabáticas.



   1) ¿Se conserva la energía del sistema?

   2) ¿Cómo evolucionará la entropía del sistema? Escriba dS para cada gas considerando a $S = S(E,V)$.

4. En una cocina hay una heladera y un equipo de aire acondicionado que da al exterior. Se pretende mantener la cocina a una temperatura constante de 17°C y al congelador de la heladera a una temperatura constante de −3°C. Por mala aislación en congelador absorbe de la cocina 200 cal/min. La temperatura externa es de 27°C. Sabiendo que el refrigerador tiene una eficiencia del 60% de uno ideal y que el equipo de aire acondicionado tiene una eficiencia del 50% del ideal, calcular la potencia eléctrica consumida entre ambos artefactos.

5. La máquina térmica de una heladera a gas intercambia calor con las siguientes fuentes de calor: 1) una llama de gas, que se puede considerar una fuente de calor a 700 K, y de la que absorbe Q_1; 2) una cámara frigorífica, de la que absorbe el calor Q_2, y a la que se puede considerar como una fuente de calor a −10°C (esta temperatura se mantiene constante, porque la máquina debe absorber la misma cantidad de calor por ciclo que el que entra a la cámara en el mismo tiempo debido a la aislación imperfecta); 3) el aire de la habitación en que se halla la heladera, que constituye una fuente de calor a 20°C y al que entrega calor Q_3. La máquina térmica no recibe ni entrega trabajo.

a) Si la pérdida a la cámara por mala aislación vale 30 cal/min, y la máquina térmica realiza 100 ciclos/min, hallar cuanto debe valer Q_2/ciclo.

b) Hallar el mínimo valor de Q_1/ciclo que debe absorber.

6. Calcular la variación de la eficiencia de una máquina reversible cuando:

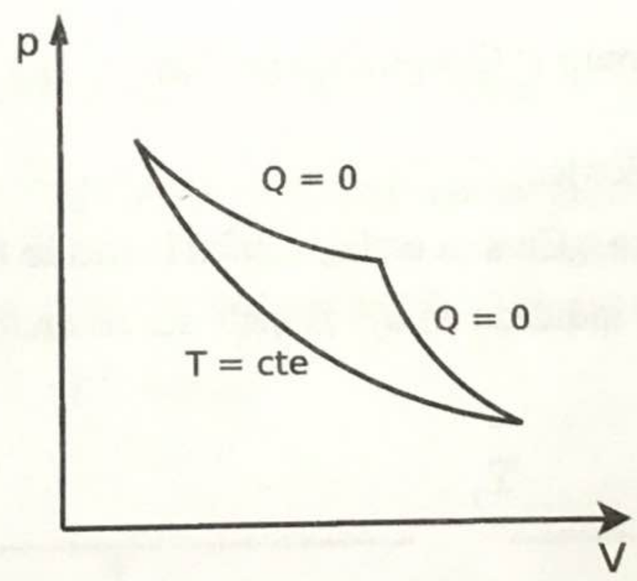
a) se aumente la temperatura de la fuente superior en ΔT disminuye $\frac{1}{\frac{T_c}{T_f}-1}$

b) se disminuye la temperatura de la fuente inferior en ΔT disminuye

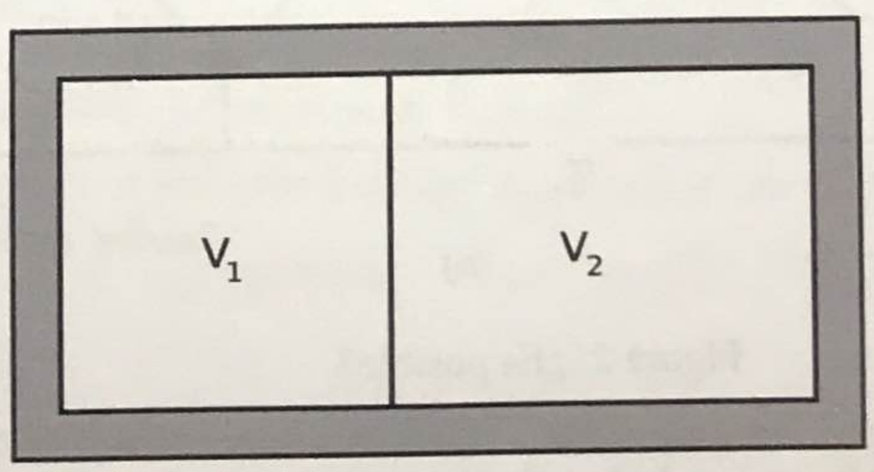
c) ¿Qué cambio produce un mayor aumento de la eficiencia? − sup ; + inf

7.

a) Explique si el siguiente ciclo es posible o no. Justifique.



b) Sean dos gases puestos en contacto térmico a través de una pared diatérmica. Ambos están encerrados en un recipiente de paredes adiabáticas.



1) ¿Se conserva la energía del sistema?

2) ¿Cómo evolucionará la entropía del sistema? Escriba dS para cada gas considerando a $S = S(E,V)$.

3) A partir del punto anterior, demuestre que, en el equilibrio, ambos gases alcanzan la misma temperatura.

8. ¿Qué se puede decir de la magnitud $\int_A^B dQ/T$ para

a) Un proceso reversible
b) Un proceso irreversible
c) Un proceso adiabático

9. Un mol de gas ideal diatómico realiza el siguiente ciclo reversible:

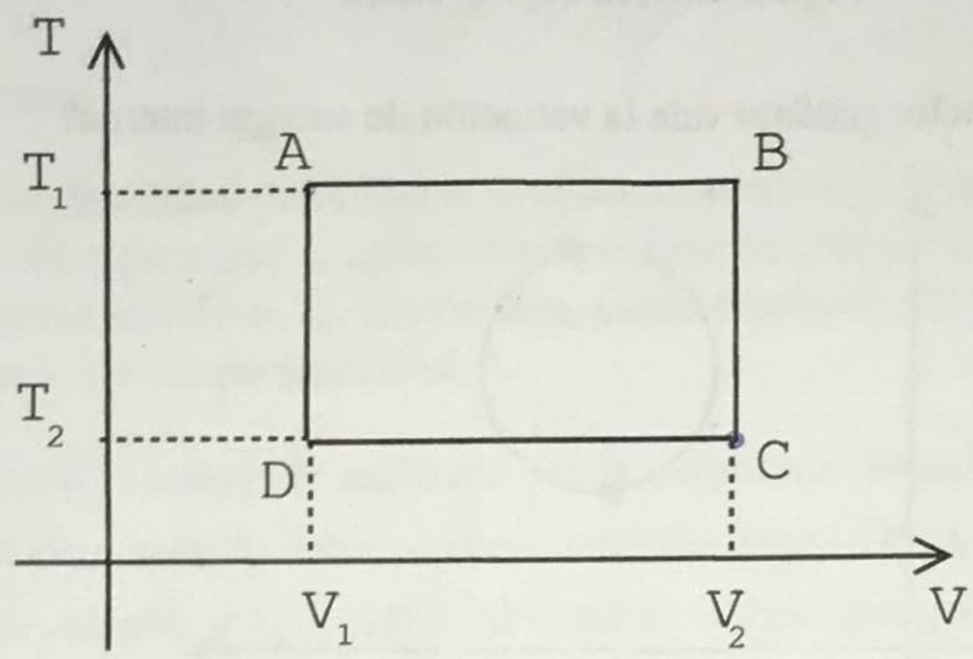


Figura 3: Ciclo reversible

a) Calcular $\int dQ_R/T$ para los procesos AB, BC, DA y compruebe que la suma es nula.
b) ¿Cuánto vale $S(C) - S(A)$?
c) ¿Se puede pasar en forma adiabática de A a C si $T_1 = 500\,\mathrm{K}$, $V_1 = 51$ y $T_2 = 300\,\mathrm{K}$, $V_2 = 301$?

10. Un mol de gas ideal diatómico se halla en un recipiente adiabático provisto de un pistón en el estado A ($V_A = 21$, $T_A = 300\,\mathrm{K}$). Se saca la traba que retiene el pistón y el gas se expande contra la presión exterior constante de 1 atm, hasta el volumen V_B, donde se encuentra una segunda traba para el pistón. La entropía del gas vale:

$S(T,V) = S(300\,\mathrm{K}, 21) + R\ln\left(\frac{V}{21}\right) + C_V \ln\left(\frac{T}{300\,\mathrm{K}}\right)$

Calcular

a) W_{AB}
b) ΔU_{AB}
c) $T_B = f(V_B)$
d) $S_B - S_A$
e) Hallar el valor $V_B = V_B^{(m)}$ que hace máxima la entropía total.
f) Hallar la presión termodinámica del gas cuando $V_B = V_B^{(m)}$.
g) ¿Qué puede deducir respecto al volumen final que alcanzaría el gas en el equilibrio si, cuando el gas se hallaba en A se sacan ambas trabas? MAYOR PUEI MAYOR S ?

11.

a) ¿Qué se obtiene calculando el área bajo la curva, en un diagrama $T - S$?

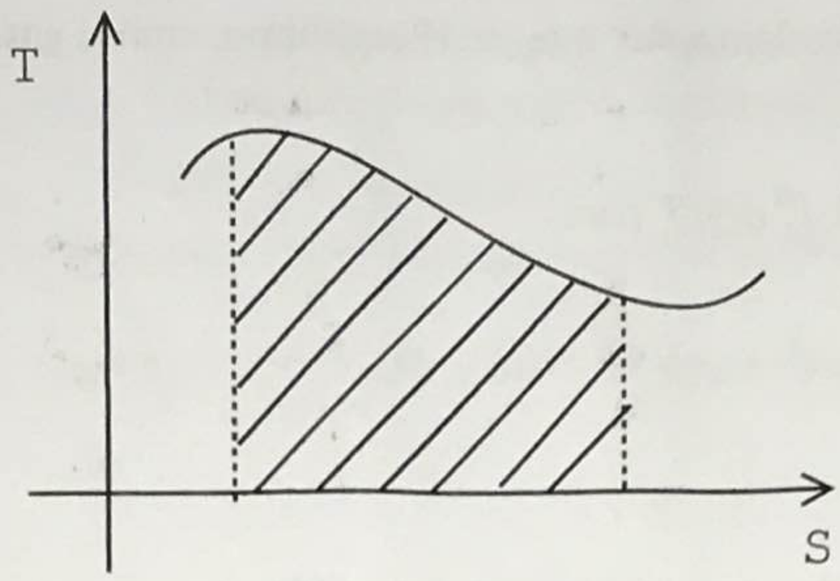


Figura 4: Área bajo la curva

b) Si se realiza el siguiente ciclo: ¿cuánto vale la variación de energía interna?

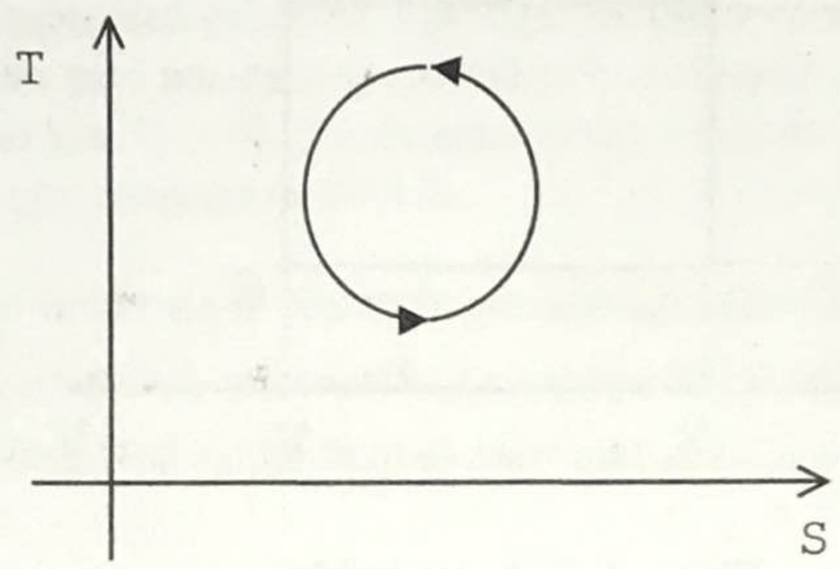


Figura 5: ¿ΔU ?

c) ¿Cómo es el gráfico en el diagrama $T - S$ de un proceso adiabático? ¿y uno isotérmico?

d) Dado el siguiente diagrama, con la rama CD irreversible, ¿cuál es la variación de entropía ΔS_{CD} conociendo ΔS_{AB} ? ¿Cómo se comparan con ΔS_{AB} , las variaciones de entropía de las fuentes para las partes AB y CD del ciclo?

en AB reversible

en CD

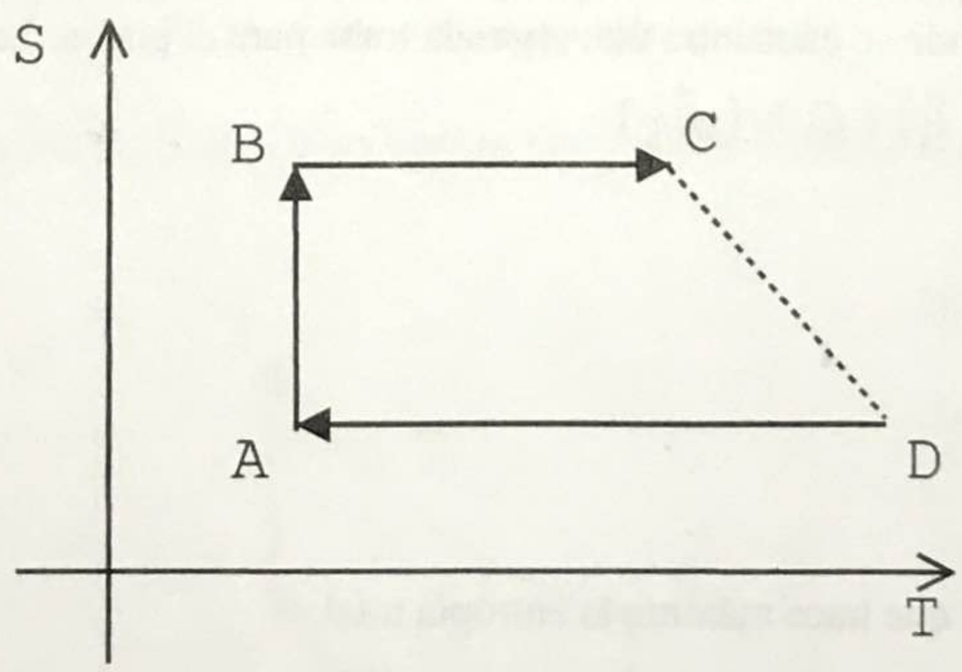


Figura 6: ¿ ΔS_{CD} ?

12. Considere un mol de un gas de van der Waals.

a) Encuentre la expresión de la energía interna del gas, $E(T,V)$.

b) Encuentre la expresión de la entropía del gas, $S(T,V)$.

c) Considere un recipiente rígido y adiabático dividido en dos compartimientos separados por una válvula, inicialmente cerrada. Uno de los compartimentos de volumen V_1, contiene un gas de van der Waals a temperatura T_1. El otro compartimento de volumen V_2, se encuentra vacío. En un momento dado, se abre

la válvula, pudiendo entonces expandirse el gas. Suponga que la capacidad calorífica del gas a volumen constante, c_v, y la del recipiente, c son constantes para temperaturas en un entorno considerable de T_1.

1) ¿Qué función de estado se conserva? Justifique.

2) Encuentre la temperatura final T del gas (tenga en cuenta al recipiente en el proceso).

13. Un mol de gas de van der Waals se expande reversible e isobáricamente desde V_A hasta V_B. Datos: P_A, V_A, T_A, V_B. Hallar:

a) La temperatura final.

b) La variación de energía interna en el proceso.

c) El calor absorbido.

d) La variación de entropía.

14. Dos cuerpos idénticos, con capacidad calorífica a presión constante c_p independiente de la temperatura, se utilizan como fuentes de calor para una máquina térmica. Los cuerpos se mantienen a presión constante e inicialmente sus temperaturas son $T_1 > T_2$. Finalmente, como resultado del funcionamiento de la máquina térmica, los cuerpos llegan a una temperatura final T_f.

a) Calcule la cantidad total de trabajo W realizado por la máquina en función de c_p, T_2 y T_f, T_1.

b) Deduzca cuál es la temperatura T_f mínima a la que pueden llegar ambos cuerpos. Justifique.

c) Para temperaturas iniciales T_1 y T_2, ¿cuál es el máximo trabajo que puede dar la máquina, trabajando entre esos dos cuerpos?

15. Considere un gas a temperatura T para el cual vale la relación $p = u/3$, siendo u la energía interna por unidad de volumen y p la presión del gas. Considere que u depende solamente de la temperatura. Un gas con esta caracteristicas se llama "gas de fotones".

a) Considerando un ciclo de Carnot adecuado con este gas, demuestre que $u = \sigma T^4$, con σ una constante.

b) Reobtener el resultado pero usando que la entropía es una función de estado.

c) Calcule su entropía. ¿Cuál es la ecuación de las adiabáticas?

d) ¿Qué imagina que sucede con este gas en una expansión isotérmica?

16. El ciclo de Stirling se realiza mediante dos procesos isotérmicos y dos isocoros. Para un gas ideal, según el gráfico

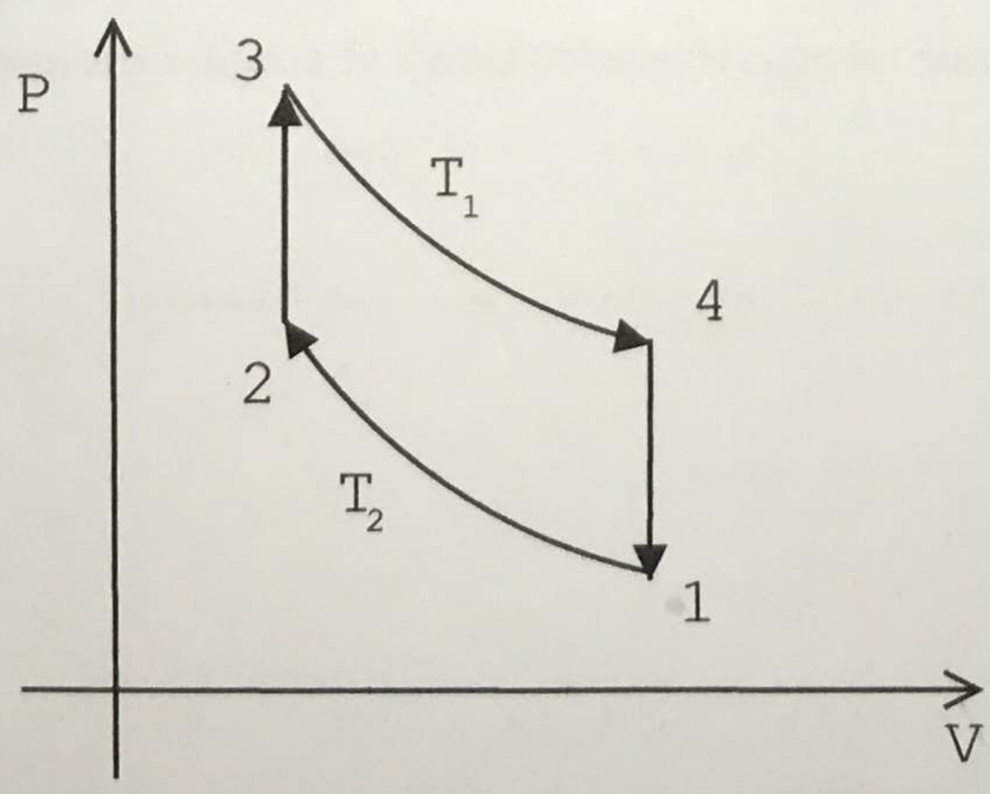


Figura 7: Ciclo de Stirling

a) Dibujar el ciclo en el plano $T - S$, suponiendo que la sustancia es un gas ideal.

~~b)~~ Demostrar que $Q_{23} = -Q_{41}$

~~c)~~ Hallar la eficiencia.

17. Se tienen dos gases ideales diferentes en un recipientes aislado a la misma p y T pero separados por una pared diatérmicas; ambos están en equilibrio termodinámico. Se quita la pared. Si n_1, n_2 es el número de moles de cada gas, calcule la variación total de entropía como función de los n_i y de R. ¿Es éste un proceso reversible? ¿Qué pasa si el mismo gas se encuentra a ambos lados del tabique?

Problema ciclo

Se tienen n moles de gas ideal. El gas realiza el siguiente ciclo:

A-B: Desde un estado inicial (P_A, T_A) se expande en contacto térmico con una fuente T_A contra una presión externa $P_A/4$ hasta alcanzar el eq.

B-C: Se comprime en forma adiabática y reversible hasta alcanzar una P_A

C-A: Se comprime isobáricamente y reversible hasta alcanzar el estado inicial

a) Gráfico P-V. Tramos reversibles y no reversibles ¿Máquina térmica o frigo?

b) Q, W y ΔU de cada tramo y ciclo. Calcular la eficiencia

c) ΔS en tramo y ciclo. ΔS de las fuentes en contacto al sistema

Física 4

Segundo cuatrimestre 2013

Guía 2: Ejercicios Adicionales

1. Un gas ideal diatómico recorre el siguiente ciclo: partiendo del estado con coordenadas $V = 41$, $p = 4\,\text{atm}$ y $T = 600\,\text{K}$, se dilata isotérmicamente hasta duplicar su volumen. Después se comprime a presión constante hasta su volumen inicial. Finalmente se calienta a volumen constante hasta que alcanza la presión original. Calcule el rendimiento del ciclo.

2. Una máquina térmica que funciona entre 200°C y 80°C alcanza un 20% de su rendimiento teórico máximo. ¿Cuanta energía debe absorber para realizar 1kJ de trabajo?

3. Un inventor sostiene que ha desarrollado una máquina térmica que recibe 700kJ de calor desde una fuente térmica a 500K y produce 300kJ de trabajo neto transfiriendo el calor sobrante a una fuente térmica a 290K. ¿Es razonable? Nuestro inventor vuelve a la carga, esta vez con un refrigerador que, asegura, mantiene el interior refrigerado a 2°C mientras el ambiente se encuentra a 24°C, teniendo una eficiencia de 13,5. ¿Le hacemos caso?

4. Una máquina refrigeradora de Carnot funciona con 18 moles de un gas ideal monoatómico y realiza ciclos de 2 segundos. Las temperaturas de las fuentes son 450 K y 150 K y consume una potencia de 60 kW.

   a) Dibuje el ciclo en un diagrama $p - V$ especificando las transformaciones que lo componen. Calcule la eficiencia.

   b) Calcule el calor intercambiado en cada etapa y la relación entre los volúmenes en la compresión isoterma.

   c) Calcule la variación de entropía del gas en cada transformación y en el ciclo. Calcule la variación de entropía del Universo.

   d) Sabiendo que después de la expansión isoterma el volumen del gas es $V = 0{,}5\,\text{m}^3$, calcule la presión y el volumen después de la compresión adiabática.

5. Una máquina térmica que trabaja entre dos fuentes térmicas a 100 K y 500 K, absorbe en cada ciclo 1000 J de calor de la fuente caliente. Si su rendimiento es del 20%, responder a las siguientes preguntas:

   a) ¿La máquina funciona reversible o irreversiblemente? ¿Por qué?

   b) Determinar la variación de entropía del sistema utilizado en la máquina (el gas), de las fuentes y del universo en cada ciclo.

   c) Repetir el cálculo para una máquina de Carnot trabajando entre las mismas temperaturas.

Segunda ley de la termodinámica.

Comentar enunciados de la segunda ley y su forma matemática.
Explicar esquemas.

Desigualdad de Clausius.

Desigualdad de Clausius para un ciclo entre n fuentes (lo vieron en

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{T_i} \leq 0$$

Para un ciclo reversible, vale la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{T_i} = 0$$

(el sistema realiza un ciclo intercambiando una cantidad de calor
la fuente T_i)

Pasando al continuo:

$$\oint \frac{\delta q}{T} \leq 0$$

(el sistema realiza un ciclo intercambiando una cantidad de calor δ
la fuente T)

Definición general eficiencia

Para una máquina térmica la eficiencia se define

$$\varepsilon_{ter} \equiv \frac{w_{tot}}{q_{abs}}$$

Para una máquina frigorífica la eficiencia (o rendimiento) se define

$$\varepsilon_{frig} \equiv \frac{q_{abs}}{|w_{tot}|}$$

Segunda ley de la termodinámica.

Comentar enunciados de la segunda ley y su forma matemática.
Explicar esquemas.

Desigualdad de Clausius.

Desigualdad de Clausius para un ciclo entre n fuentes (lo vieron en teórica):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{T_i} \leq 0 \tag{1}$$

Para un ciclo reversible, vale la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{T_i} = 0 \tag{2}$$

(el sistema realiza un ciclo intercambiando una cantidad de calor q_i con la fuente T_i)
Pasando al continuo:

$$\oint \frac{\delta q}{T} \leq 0 \tag{3}$$

(el sistema realiza un ciclo intercambiando una cantidad de calor δq con la fuente T)

Definición general eficiencia

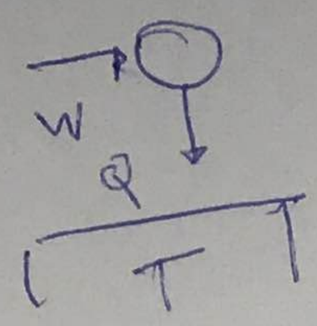
Para una máquina térmica la eficiencia se define

$$\varepsilon_{ter} \equiv \frac{w_{tot}}{q_{abs}} \tag{4}$$

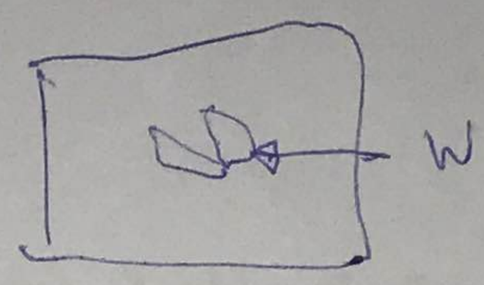
Para una máquina frigorífica la eficiencia (o rendimiento) se define

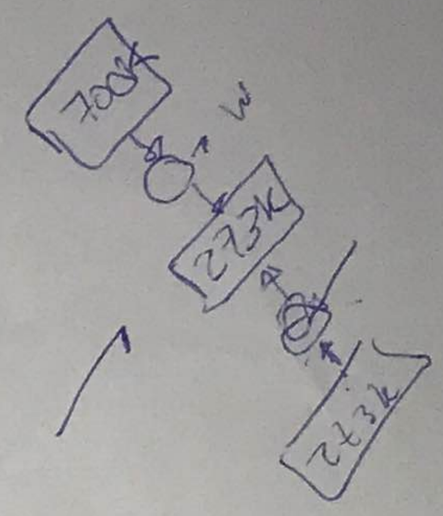
$$\varepsilon_{frig} \equiv \frac{q_{abs}}{|w_{tot}|} \tag{5}$$

Problema 2



Problema 3

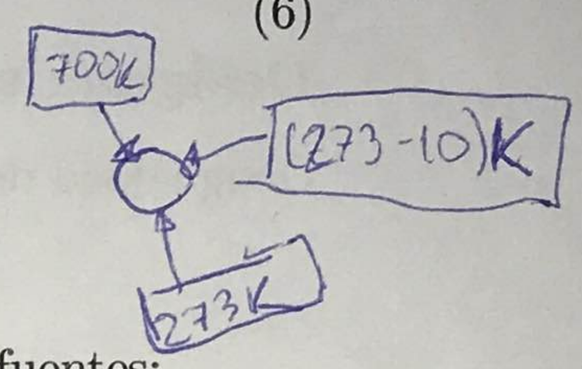




Problema 5

Desigualdad de Clausius.

$$\frac{Q_1}{700K} + \frac{Q_2}{(273-10)K} - \frac{|Q_3|}{(273+20)K} \leq 0 \tag{6}$$



También hay que usar Primera ley:

Problema 4

La eficiencia de una máquina frigorífica que funciona entre 2 fuentes:

$$\varepsilon_{frig} \equiv \frac{q'_f}{|w'_{tot}|} = -\frac{q'_f}{q'_c + q'_f} = \frac{1}{\frac{|q'_c|}{q'_f} - 1} \tag{7}$$

usando la desigualdad de Clausius

$$\frac{q'_f}{T_f} + \frac{q'_c}{T_c} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{T_c}{T_f} \leq \frac{|q'_c|}{q'_f} \tag{8}$$

se tiene:

$$\varepsilon_{frig} = \frac{1}{\frac{|q'_c|}{q'_f} - 1} \leq \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1} \tag{9}$$

Comentar problema 7 parte a

Definición de entropía $S(T, V)$:

$$\Delta S = S(T_2, V_2) - S(T_1, V_1) = \int_1^2 \frac{\delta q_{rev}}{T} \tag{10}$$

Problema 9

punto a:

Para un gas ideal: $U = nc_vT$

$$\delta q_{rev} = du + pdV = nc_vdT + pdV \tag{11}$$

entonces:

$$\frac{\delta q_{rev}}{T} = nc_v\frac{dT}{T} + \frac{p}{T}dV = nc_v\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \tag{12}$$

tramo A-B, donde $T = T_1$

$$\int_A^B \frac{\delta q_{rev}}{T} = nR\int_A^B \frac{dV}{V} = nR\ln(\frac{V_2}{V_1}) \tag{13}$$

tramo B-C, donde $V = V_2$

$$\int_B^C \frac{\delta q_{rev}}{T} = nc_v\int_B^C \frac{dT}{T} = nc_v\ln(\frac{T_2}{T_1}) \tag{14}$$

tramo C-D, donde $T = T_2$

$$\int_C^D \frac{\delta q_{rev}}{T} = nR\int_D^C \frac{dV}{V} = nR\ln(\frac{V_1}{V_2}) = -nR\ln(\frac{V_2}{V_1}) \tag{15}$$

tramo B-C, donde $V = V_1$

$$\int_D^A \frac{\delta q_{rev}}{T} = nc_v\int_D^A \frac{dT}{T} = nc_v\ln(\frac{T_1}{T_2}) = -nc_v\ln(\frac{T_2}{T_1}) \tag{16}$$

Sumando todo se obtiene:

$$\oint \frac{\delta q}{T}\bigg|_{rev} = \int_A^B \frac{\delta q_{rev}}{T} + \int_B^C \frac{\delta q_{rev}}{T} + \int_C^D \frac{\delta q_{rev}}{T} + \int_D^A \frac{\delta q_{rev}}{T} = 0 \tag{17}$$

punto b:

La integral

$$\int_A^C \frac{\delta q_{rev}}{T} = nc_v\ln(\frac{T_2}{T_1}) + nR\ln(\frac{V_2}{V_1}) \tag{18}$$

no depende del camino usado para ir de A hasta C

Problema 8

Dado un ciclo, por la desiguadad de Clausius:

$$\oint \frac{\delta q}{T} = \int_A^B \frac{\delta q}{T}\bigg|_{irrev} + \int_B^A \frac{\delta q}{T}\bigg|_{rev} \leq 0 \tag{19}$$

entonces:

$$\Delta S_{A-B} \geq \int_A^B \left.\frac{\delta q}{T}\right|_{irrev} \tag{20}$$

La integral $\int_A^B \left.\frac{\delta q}{T}\right|_{rev}$ no depende del proceso realizado para ir de A a B, en cambio la integral $\int_A^B \left.\frac{\delta q}{T}\right|_{irrev}$ si depende del proceso para ir de A a B

Para un proceso adiabático irreversible:

$$\Delta S_{A-B} \geq 0 \tag{21}$$

en cambio, para un proceso adiabático reversible:

$$\Delta S_{A-B} = 0 \tag{22}$$

Comentar problema 11 parte a

significado área bajo la curva.

¿Cómo es elciclo de Carnot en un diagrama T-S?

Problema ciclo:

Se tienen n mol de gas ideal. El gas realiza el siguiente ciclo:

A-B: Desde un estado inicial (P_A, T_A), se expande en contacto térmico con una fuente T_A contra una presión externa $P_A/4$ hasta alcanzar el equilibrio.

B-C: Se comprime en forma adiabática y reversible hasta alcanzar una presión P_A .

C-A: Se comprime en forma isobárica y reversible hasta alcanzar el estado inicial.

Resuelva:

a) Grafique los diagramas P-V indicando que tramos son reversibles y cuales irreversibles.

¿se trata de una máquina térmica o frigorífica?

b) Calcule Q, W y ΔU de cada tramo y para el ciclo. Calcule la eficiencia.

c) Calcule las variación de entropía en cada tramo y en el ciclo. Calcule las variación de entropía de las fuentes con las que se pone en contacto el sistema

punto b:

Para un gas ideal: $U = nc_vT$

$$\Delta U_{AB} = 0 \qquad W_{AB} = \frac{p_A}{4}(V_B - V_A) \tag{23}$$

con $p_BV_B = p_AV_A \rightarrow$ se obtiene V_B.

Por otra parte V_C puede obtenerse de la ecuación da las adiabáticas reversibles para un gas ideal.

$$p_BV_B^{\gamma\cdot} = p_CV_C^{\gamma\cdot} \tag{24}$$

$$Q_{BC} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta U_{BC} = -W_{BC} \qquad W_{BC} = p_BV_B^{\gamma\cdot}\int_B^C \frac{dV}{V^{\gamma\cdot}} \tag{25}$$

tramo C-A:

$$W_{CA} = p_A(V_A - V_C) \quad ; \quad \Delta U_{CA} = -\Delta U_{BC} \qquad \rightarrow \qquad Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA} < 0 \tag{26}$$

Eficiencia calcularla.

punto c:

Tramo A-B: hay que inventar un proceso reversible que los una:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta q_{rev}}{T} = \int_A^B \frac{dU + pdV}{T} = nR\int_A^B \frac{dV}{V} = nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \tag{27}$$

Tramo B-C: el proceso ya es reversible, puedo usar ese mismo prceso para hallar la entropia:

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{\delta q_{rev}}{T} = 0 \tag{28}$$

Tramo C-A: el proceso ya es reversible, puedo usar ese mismo prceso para hallar la entropia:

$$\Delta S_{CA} = \int_C^A \frac{\delta q_{rev}}{T} = \int_C^A \frac{dU + pdV}{T} = nc_v\int_C^A \frac{dT}{T} + nR\int_C^A \frac{dV}{V} = nc_v\ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) + nR\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) \tag{29}$$

para el ciclo:

$$\Delta S_{ciclo} = 0 = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CA} \tag{30}$$

discutir entropía de las fuentes.
Tramo A-B: Hay una única fuente:

$$\Delta S^F_{AB} = \frac{-Q_{AB}}{T_A} \tag{31}$$

Tramo B-C: no hay fuentes.
Tramo C-A: Hay infinitas fuentes y el proceso es reversible:

$$\Delta S^F_{CA} = -\Delta S^S_{CA} \tag{32}$$

Gas ideal:

$$\Delta S = nc_v \ln(\frac{T_2}{T_1}) + nR \ln(\frac{V_2}{V_1}) \tag{33}$$

Guía 2: Problema adicional (agua):
Se tiene 1 Kg de agua a 350K, se lo pone en contacto térmico con una fuente a 300K y se deja hasta que alcance el equilibrio (cp =1cal/gK , suponga que el líquido está sometido a una presión exterior constante):
i-Calcule la variación de entropía del sistema (del agua).
ii- Calcule la variación de entropía de la fuente.
iii- Discuta el signo de la variación de entropía total (sistema + fuente)
iv- Repita los cálculos anteriores suponiendo que al sistema se lo pone primero en contacto con una fuente a 325K que y una vez alcanzado el equilibrio se lo pone en contacto con otra a 300K hasta alcanzar nuevamente el equilibrio.

Punto i: El sistema realiza un proceso irreversible. Para poder calcular ΔS tengo que inventar un proceso reversible que una los estados inicial y final del sistema.
El proceso que inventaré consistirá en "enfriar el agua de a poco" a *p* constante:

$$\Delta S_{sis} = \int_a^b \frac{\delta q}{T}\bigg|_{rev} = 1kg \int_{350K}^{300K} \frac{dT}{T} = 1000\frac{cal}{K}\ln\left(\frac{300}{350}\right) = -154{,}15\frac{cal}{K} \quad \text{(A2.1)}$$

Punto ii: Desde el punto de vista de la fuente, el proceso reversible que me invento es: $\Delta S_{fuen} = \int_a^b \frac{\delta q}{T}\bigg|_{rev} = \frac{1}{T_{fuente}}\int_a^b \delta q_{af}\bigg|_{rev} = \frac{Q_{a-f}}{T_{fuente}} = \frac{-Q_{a-s}}{T_{fuente}} = \frac{-1kg * c_p(-50K)}{300K} = \frac{5000cal}{300K}$

(A2.2a) $\Delta S_{fuen} = 166{,}6\frac{cal}{K}$ (A2.2b)

Con lo cual: $\Delta S_{sis} + \Delta S_{fuen} = 12{,}52\frac{cal}{K}$ (A2.3)

Punto iv: si el sistema pasa por una fuente intermedia a temperatura 325K se obtiene, para el sistema, lo mismo de antes: $\Delta S_{sis} = -154{,}15\frac{cal}{K}$. En cambio para las fuentes se tiene: $\Delta S'_{fuen} = \frac{1kg * c_p(25K)}{325K} + \frac{1kg * c_p(25K)}{300K} = 160{,}26\frac{cal}{K}$ (A2.4)

$\Delta S'_{sis} + \Delta S_{fuen} = 6{,}11\frac{cal}{K} > 0$ (A2.5)

Que es "más cercano" a cero.

Problema 17: Comentar como inventar el proceso reversible para calcular la entropía.
Consecuencias del segundo principio: Ecuaciones muy útiles (Fermi pág 58 y 59)

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_T = T\frac{\partial p}{\partial T}\bigg|_V - p} \quad \text{(sp.1)}$$

(surge de escribir $dS = \frac{\delta q}{T}\bigg|_{rev} = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_V dT + \left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_T + \frac{P}{T}\right)dV$ (sp.2)

Entonces: $\frac{\partial S}{\partial T}\bigg|_V = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_V$ (sp.3) $\frac{\partial S}{\partial V}\bigg|_T = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_T + \frac{P}{T}$ (sp.4)

Usando que: $\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\bigg|_V\right)\bigg|_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\bigg|_T\right)\bigg|_V$ (sp.5) queda:

$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_V\right)\bigg|_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial V}\bigg|_T + \frac{P}{T}\right)\bigg|_V$ (sp.6) obteniéndose (sp.1)

Otra relación útil: $\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial p}\right|_T = -p\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T - T\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p}$ (sp.7)

(ídem pero pensando a S como función de T y p)

Problema que explica Alexis

Problema adicional (resorte): i) Dada la ecuación de estado:

$$F = -kx + b\mu T \qquad (A3.1)$$

del resorte del problema 9 de la Guía 1, verifique que la energía U es la dada en el enunciado del problema.

ii) calcule la entropía del resorte.

Usando $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_T = T\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V - F$ (A3.2) reemplazando: $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_T = T\,b\mu - F = k \cdot x$ (A3.3)

Con lo cual: $U = \frac{1}{2}k \cdot x^2 + g(T)$ (A3.4)

Para determinar $g(T)$ hay que conocer la otra derivada parcial $\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_x$. Recordando

que: $\delta q = dU + Fdx \quad \rightarrow \quad C_x = \left.\frac{\delta q}{dT}\right|_x = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_x = \frac{dg}{dT}$ (a3.4)

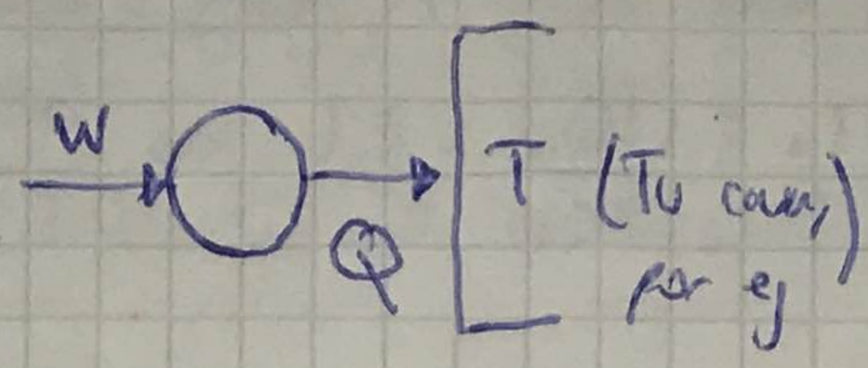
Problema 14 parte a: corregir enunciado, T_1 también es dato. ciclo de carnot reversible

Problema 15: empiecen por la parte b (la parte a es "optativa")

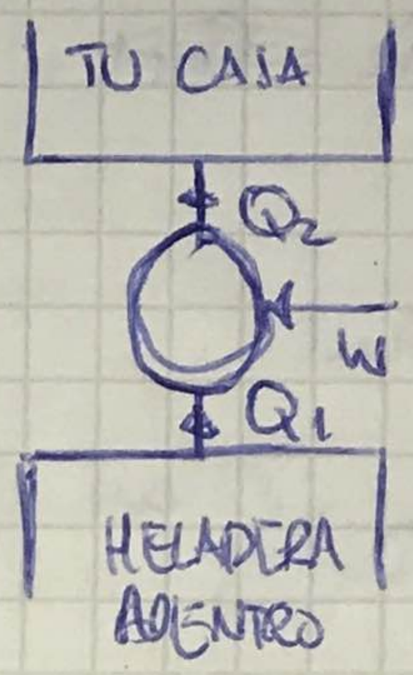
Ayuda: usar que $U(T,V) = V \cdot u(T)$ (15.1)

Ejercicio 2

a) Estufa eléctrica



b) Una heladera ¿Cual es en la práctica la fuente fría y caliente?

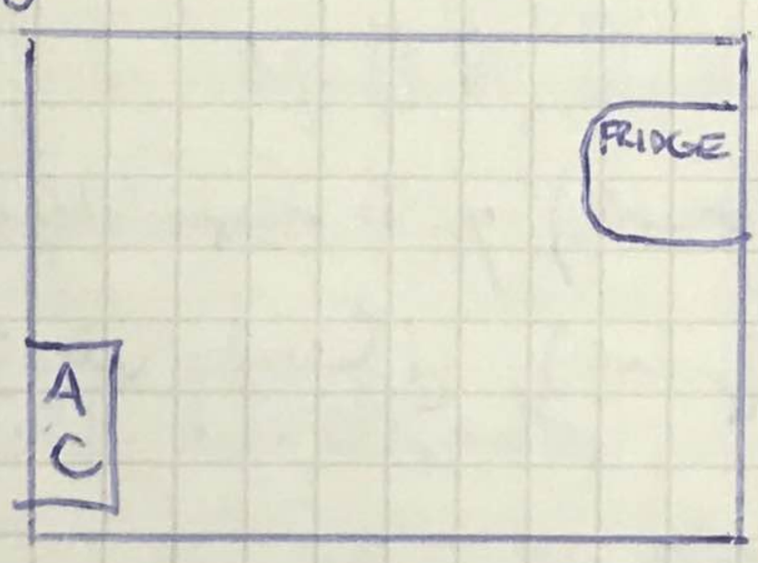


c) La fig a) Es posible y no puede ser reversible ya que el calor de la fuente se va de forma espontánea?

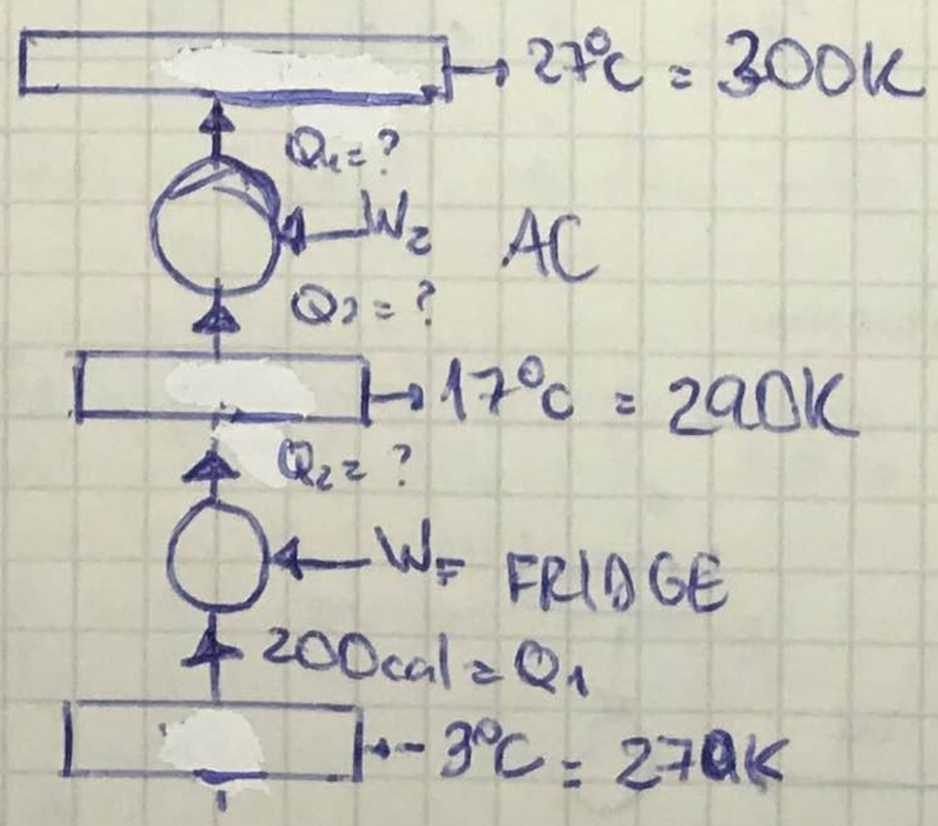
La fig b) No es posible pues al ser cíclo $\Delta E = 0$ pero acá hay Q y W $\Rightarrow \Delta E \neq 0$ absurdo

Ejercicio 3 En la teórica

Ejercicio 4



Esquema por minuto



El refrigerador tiene $\eta_F = 60\%$ de ideal y el AC tiene $\eta_F = 50\%$ del ideal.

Calcular la pot eléctrica consumida por los aparatos

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{1}{-1 + \frac{|Q_2|}{Q_1}}$$

$$\eta_{ideal} = \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1} = \frac{1}{\frac{290}{270} - 1} = 13.5$$

La ideal es 13.5, como nos dice un 60% $\Rightarrow \eta_f = 60\% \cdot 13.5 = 8.1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{|Q_2|}{Q_1} - 1} = 8.1 \Leftrightarrow 1 = 8.1\frac{|Q_2|}{|Q_1|} - 8.1 \Leftrightarrow \frac{9.1}{8.1} \cdot Q_1 = |Q_2|$$

$$\Rightarrow |Q_2| = 224.69\,cal$$

$$W_1 = Q_1 + Q_2 \Leftrightarrow W + |Q_1| = |Q_2| \Rightarrow W_1 = 24.69\,cal$$

$$\Rightarrow Q_3 = 224.69\,cal$$

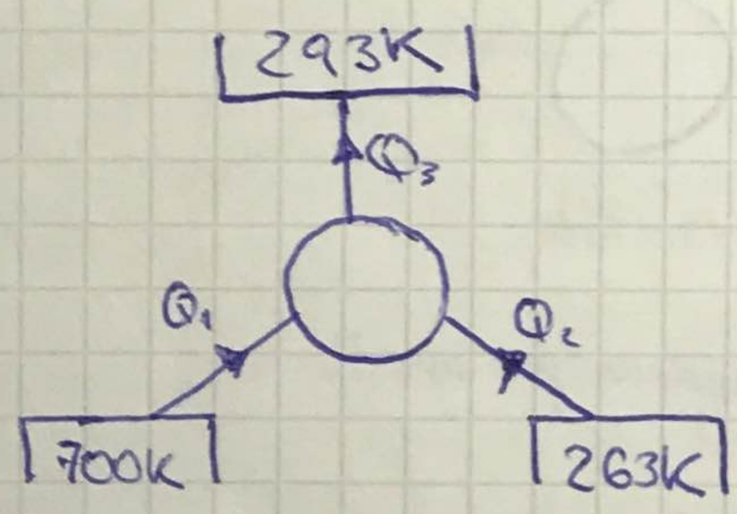
$$W_2 + |Q_3| = |Q_4| \quad \text{con} \quad \eta_{rc} = 50\% \cdot \frac{1}{\frac{300}{290} - 1} = 14.5$$

$$\Leftrightarrow 14.5 = \frac{1}{\frac{|Q_4|}{224.69\,cal} - 1} \Leftrightarrow \frac{14.5\,|Q_4|}{224.69\,cal} = 15.5 \Leftrightarrow |Q_4| = 240.1\,cal$$

$$\Rightarrow W_2 = 15.49\,cal$$

$$\boxed{\text{Potencia} = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow P = P_1 + P_2 = \frac{W_1}{min} + \frac{W_2}{min} = 40.2\,\frac{cal}{min}}$$

Ejercicio 5

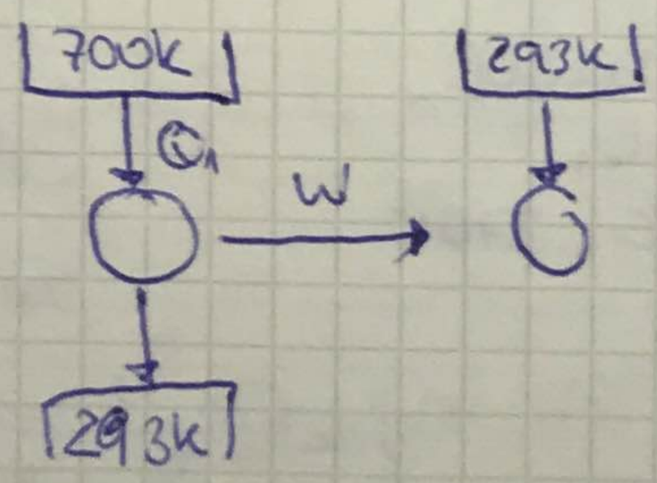


a) Si $Q_2 = 30\,cal$ (por día) y la máquina térmica realiza 100 ciclos (por día) ¿Cuanto vale $\frac{Q_2}{ciclo}$?

$$\Rightarrow \frac{Q_2}{ciclo} = 0.3\,\frac{cal}{ciclo} \ldots$$

b) Hallar el mínimo $\frac{Q_1}{ciclo}$ que debe absorber

$\Rightarrow$ es como tener



Tenemos $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \leq 0$

y como $W = 0$ $\quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Leftrightarrow Q_3 = -Q_2 - Q_1$

$$\Rightarrow Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_3}\right) + Q_2\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1\left(\frac{-407}{205100}\right) + Q_2 \cdot \left(\frac{30}{77059}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1\left(\frac{407}{205100}\right) \geq Q_2\left(\frac{30}{77059}\right)$$

$\Leftrightarrow Q_1 \geq 0.196\, Q_2$ $\quad$ Si es por ciclo $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{Q_{1\,min}}{ciclo} = 0.059 \frac{cal}{ciclo}}$

Ejercicio 6 $\Delta\eta$ cuando

a) Se aumenta T_2 en $\Delta T \Rightarrow \eta$ se achica

b) Se disminuye T_1 en $\Delta T \Rightarrow \eta$ se achica

c) Aumentar T_1 o achicar T_2

Ejercicio 7 a) No es posible, pues tendríamos dos ecuaciones de adiabáticas distintas para igual T

b) 1) Sí, pues el recipiente no permite intercambio de calor con el exterior y el pistón está fijo $dU = \underset{0}{\cancel{dQ}} - \underset{0}{\cancel{dW}} \Rightarrow \Delta U = 0$

2) $dS = dS_1 + dS_2 \quad \Rightarrow dS_1 = -dS_2$

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} - \frac{\overset{=0}{dW}}{T} = 0$$

$$dS_1 + dS_2 = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{dU_2}{T_2}$$

$$dU = 0 = dU_1 + dU_2 \Rightarrow dU_1 = -dU_2$$

$$dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} \qquad dS_2 = \frac{dU_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dS_1}{dU_1} = \frac{1}{T_1} \; ; \; \frac{dS_2}{dU_2} = \frac{1}{T_2} = \frac{+dS_1}{+dU_1} = \frac{-dS_1}{-dU_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \quad T_2 = T_1 \text{ en eq}$$

Ejercicio 8

a) proceso reversible $\int_A^B \frac{dQ}{T} = S(B) - S(A)$ y diferencia, además si $A \leftrightarrow B$

$\Rightarrow$ no depende del camino

b) Un proceso irreversible

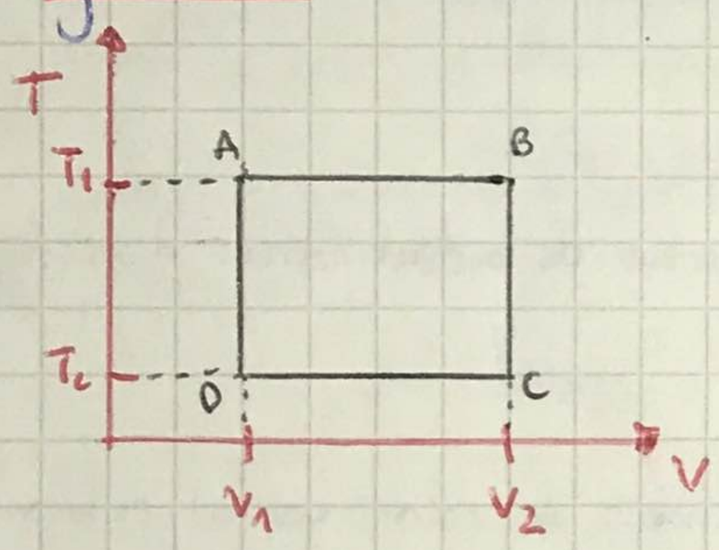
$$\int_A^B \frac{đQ}{T}\Big|_{IRR}$$ Sí tomo principio de clausius

$$\oint \frac{đQ}{T} = \int_A^B \frac{đQ}{T}\Big|_I + \int_B^A \frac{đQ}{T}\Big|_R \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_A^B \frac{đQ}{T} \leq \int_A^B \frac{đQ}{T}\Big|_R = S(B) - S(A)$$

c) Sí el proceso es adiabático, $đQ=0$

Ejercicio 9 GAS IDEAL



a) $\int \frac{dQ}{T}\Big|_R$ para los procesos AB, BC, DA y compruebe que la suma es nula

$PV = nRT$ $\quad \Delta U = nC_v\Delta T = n\frac{5}{2}R\Delta T$ como proceso Rev

en AB $T=cte \Rightarrow \int_A^B \frac{đQ}{T}\Big|_R = \frac{1}{T}\int_A^B đQ\Big|_R$ $\quad \Delta U = Q - W \Rightarrow \Delta U = Q - \int_A^B PdV$

$\Rightarrow đQ = dU + PdV \therefore \frac{1}{T}\int đQ\Big|_R = \frac{1}{T}\int \underbrace{dU}_{=0} + PdV$

$$\Delta S_{AB} = \frac{1}{T_1}\left(\underbrace{\Delta U}_{=0} + nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right)$$

$$\Delta S_{AB} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) ; \quad \Delta S_{BC} = \int_1^B \frac{n\frac{5}{2}R\,dT}{T} = \frac{n5}{2}R\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$\Rightarrow$ a simple vista $\Delta S_{CD} = nR\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ $\quad \Delta S_{DA} = n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$

$$\Rightarrow \Delta S_{TOT} = nR\left[\cancel{\ln(V_2)} - \cancel{\ln(V_1)} + \cancel{\ln(V_1)} - \cancel{\ln(V_2)}\right] + \dots \boxed{=0}$$

b) $S(C) - S(A)$? $= \boxed{nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{T_C}{T_1}\right)}$

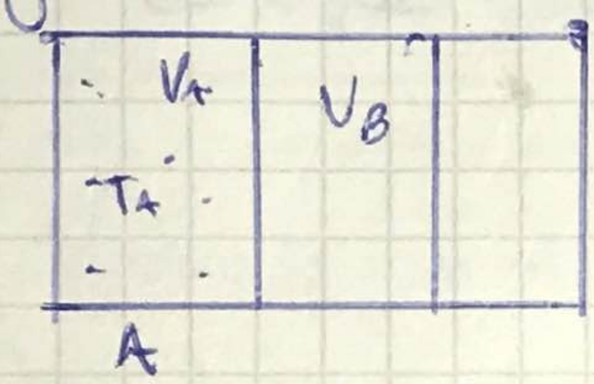
c) Se puede pasar de forma adiabática de A a C si $T_1 = 500K$, $V_1 = 5l$, $T_2 = 200K$, $V_2 = 30l$?

~~$Q = 0 = \Delta U + \int P\Delta V = n\frac{5R}{2}$~~ ~~es adiab~~ ~~$TV^{\gamma-1} = cte$~~

Si esta aislado y es rev $\Rightarrow \Delta S = 0 = nC_v\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nR\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

$= 1mol \cdot \frac{5}{2}R\ln(6) + 1mol\, R\ln\left(\frac{3}{5}\right) \neq 0$ $\boxed{\therefore \text{ no se puede}}$

Ejercicio 10



gas ideal diatómico

Se destraba el pistón a $P_e = cte = 1atm$

$V_A = 2l$; $T_A = 300K$; $T_B = ?$; $V_B = ?$

$$S(T,V) = S(300K, 2l) + R\ln\left(\frac{V}{2l}\right) + C_v\ln\left(\frac{T}{300K}\right)$$

a) W_{AB} $\Rightarrow W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} \underbrace{P_e}_{=cte} dV = P_e(V_B - V_A)$

b) $\Delta U_{AB} = \underbrace{Q_{AB}}_{\substack{=0 \\ adiab}} - W_{AB} = -P_e(V_B - V_A) = C_v\Delta T = \frac{5}{2}R(T_B - T_A)$

c) $T_B = f(V_B)$ $\Rightarrow T_B = -\frac{2P_e(V_B - 2l)}{5R} + 300K$

d) $S_B - S_A = R\ln\left(\frac{V_B}{2l}\right) + \frac{5}{2}R\ln\left[-\frac{2\,1atm(V_B - 2l)}{5 \cdot 300KR} + 1\right]$

e) Hallar $V_{B\,máx}$ que hace $S_{máx}$

$$\Delta S_B = R\ln(V_B) - R\ln(2l) + \frac{5}{2}R\ln\left(+\frac{P_e(2l - V_B)}{C_v 300K} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Delta S_B}{dV_B} = \frac{R}{V_B} + C_v\left[\frac{1}{\frac{P_e(2l - V_B)}{C_v 300K} + 1} \cdot \left(\frac{-P_e}{C_v 300K}\right)\right] = 0$$

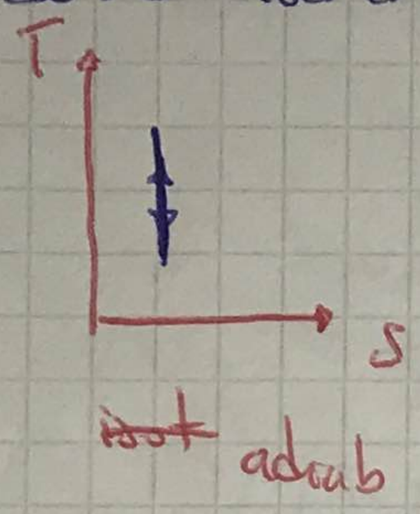
$\Leftrightarrow \frac{R}{V_B} = \frac{P_e}{300K} \cdot \frac{1}{\frac{P_e(2l - V_B)}{C_v 300K} + 1}$ se hace cuentas

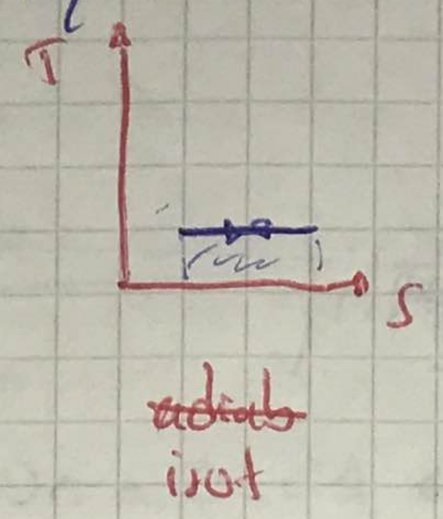
Ejercicio 11

a) El calor absorbido / cedido

b) $\Delta U = 0$ Pues es función de estado, y volumen al mismo

c)





$$dS = \frac{đQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{dW}{T}$$

d) $\Delta S_{CD} = -\Delta S_{AB}$

Para las fuentes igual en AB; en CD tenemos que tener $\Delta S_F \geq \Delta S$

Pues la entropía del universo debe aumentar

Ejercicio 12

a) Halle la expresión del gas de energía interna, $U(T,V)$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T = T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V - P \qquad \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_T = -P\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T - T\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P \qquad P = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T = T\left(\cancel{\frac{nR}{V-nb}}\right) - \cancel{\frac{nRT}{V-nb}} + \frac{n^2 a}{V^2} = \frac{n^2 a}{V^2}$$

$$\Rightarrow U = -\frac{n^2 a}{V} + f(T)$$

$$dU = đQ - dW = đQ - PdV$$

Si $V = cte$ $\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \left.\frac{đQ}{\partial T}\right|_V = nC_V$ (asumiendo $C_V \neq C_V(T)$)

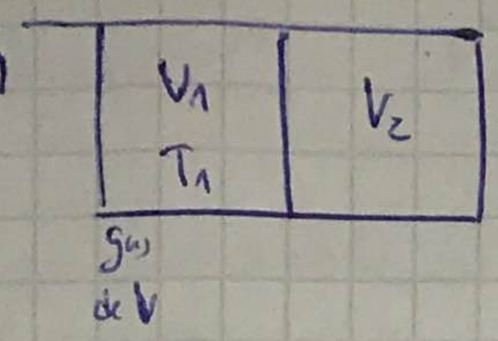
$$\Rightarrow dU = nC_V dT \Rightarrow U = nC_V T + f(V)$$

$$\therefore \boxed{U = nC_V T - \frac{n^2 a}{V}}$$

b) Halle $S(T,V)$ $dS = \frac{đQ}{T}_{rev} = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{nC_V dT}{T} - \frac{n^2 a dV}{TV} + \frac{P}{T}dV$

$$= \frac{nC_V dT}{T} + \cancel{\frac{n^2 a}{TV^2}dV} + \frac{nR}{V-nb}dV - \cancel{\frac{n^2 a}{TV^2}dV} \Rightarrow \boxed{S = nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR\ln\left(\frac{V-nb}{V_0-nb}\right)}$$

c)



adiabático

Suponga C_v de gas a Vcte y C para el recipiente son constantes en un entorno considerable de T_1

1) Que función de estado se conserva

Como adiabático cerrado $dQ=0$, y por ser expansión libre a $P_e=0$ $\Rightarrow dW=0$

$\therefore dU=0$ U_{TOT} se conserva

2) $T_f=?$

$$\Delta U_{TOT}=0=\Delta U_{gas}+\Delta U_{recip}=nC_v(T_f-T_1)+\frac{n^2a}{V_2}+\frac{n^2a}{V_1}+m_{recip}C(T_f-T_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_f=n^2a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)\cdot\frac{1}{(nC_v+m_{recip}C)}+T_1}$$

Ejercicio 13: un mol de VdeW se expande rev e isotérmica desde V_A a V_B.

Datos: P_A, V_A, T_A, V_B

a) $P=\frac{nRT}{(V-nb)}-\frac{n^2a}{V^2}$ isotérmica $P_A=P_B$

$$\Rightarrow \frac{nRT_A}{(V_A-nb)}-\frac{n^2a}{V_A^2}=\frac{nRT_B}{(V_B-nb)}-\frac{n^2a}{V_B^2}\Rightarrow \frac{nRT_B}{(V_B-nb)}=\frac{nRT_A}{(V_A-nb)}+n^2a\left(\frac{1}{V_B^2}-\frac{1}{V_A^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_B=\frac{\cancel{n}RT_A}{(V_A-nb)}\cdot\frac{(V_B-nb)}{\cancel{n}R}+\frac{na}{R}(V_B-nb)\left(\frac{1}{V_B^2}-\frac{1}{V_A^2}\right)}$$

$$\boxed{T_B=\left(P_A+\frac{n^2a}{V_B^2}\right)\frac{(V_B-nb)}{nR}}$$

$$\Delta U=Q-PdV=Q-P_A(V_B-V_A)$$

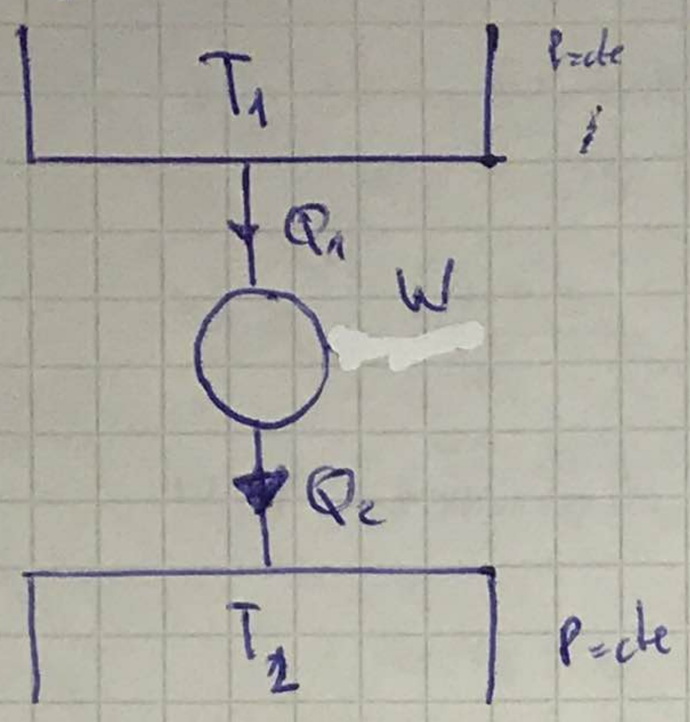
$$\Delta U=nC_v(T_B-T_A)-n^2a\left(\frac{1}{V_B^2}-\frac{1}{V_A^2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta U=nC_v\left[\left(P_A+\frac{n^2a}{V_B^2}\right)\frac{(V_B-nb)}{nR}-T_A\right]-n^2a\left(\frac{1}{V_B^2}-\frac{1}{V_A^2}\right)$$

$$Q=\Delta U+P_A(V_B-V_A)$$

$$\Delta S=nC_v\ln\left[\frac{\left(P_A+\frac{n^2a}{V_B^2}\right)\frac{(V_B-nb)}{nR}}{T_A}\right]+nR\ln\left(\frac{V_B-nb}{V_A-nb}\right)$$

Ejercicio 14



$T_1 > T_2$

al final $T_{1f} = T_{2f} = T_f$

$\Rightarrow \quad Q_1 + Q_2 = W \; ; \; W = C_p(T_f - T_1) + C_p(T_f - T_2)$

$\Rightarrow W = C_p(2T_f - T_1 - T_2)$

b) Suponiendo que la máquina es reversible

$\Delta S = 0$ por ser ciclo $\Rightarrow$

$\Delta E = 0$ P=cte

$\Rightarrow dQ = dW$

$$\Rightarrow \int \frac{dQ}{T} = \Delta S \rightarrow \Delta S = \int_{T_1}^{T_i^1} \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_2}^{T_i^2} \frac{dQ_2}{T} = \int_{T_1}^{T_i^1} \frac{C_p\, dT}{T} + \int_{T_2}^{T_i^2} \frac{C_p\, dT}{T} \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$C_p \ln\left(\underbrace{\frac{T_i^1}{T_1}}_{\geq 0}\right) + C_p \ln\left(\underbrace{\frac{T_i^2}{T_2}}_{\geq 0}\right) \geq 0 \quad T_1 > T_2$$

$$\Leftrightarrow \ln(T_i^1) + \ln(T_i^2) \geq \ln(T_1) + \ln(T_2) \Leftrightarrow e^{\ln(T_i^1)} e^{\ln(T_i^2)} \geq T_1 \cdot T_2$$

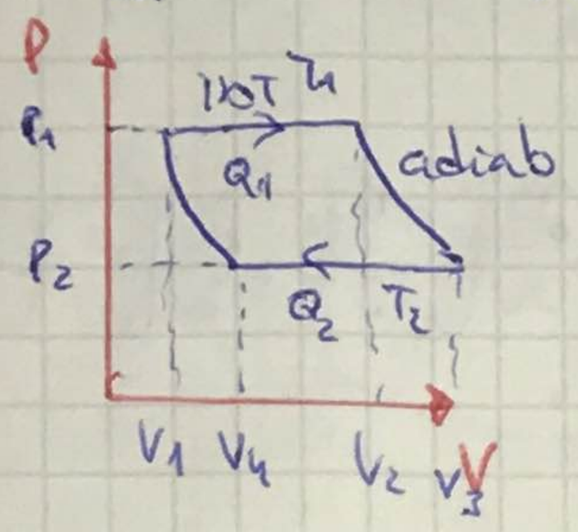
$\Rightarrow T_i^1 T_i^2 \geq T_1 \cdot T_2$ en el último ciclo $T_f^2 \geq T_1 \cdot T_2 \Rightarrow T_f \geq \sqrt{T_1 \cdot T_2}$

$\Rightarrow W_{máx}$ va a darse si es rev $\Rightarrow T_f = \sqrt{T_1 \cdot T_2}$

$W_{máx} = -C_p(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 < 0 \Rightarrow$ el sistema [illegible] un trabajo

Ejercicio 15 $\quad P = \frac{u}{3} \quad U = uV \quad u = u(T)$

a) Considerando un ciclo de Carnot demuestre $u = \sigma T^4$



← isotermica → isobárica

adiab

$$\underset{rev}{dQ = dU + PdV}$$

$$Q_1 = u(T_1)(V_2 - V_1) + P_1(V_2 - V_1) = \frac{4}{3}u(T_1)(V_2 - V_1)$$

$$Q_2 = u(T_2)(V_4 - V_3) + P_2(V_4 - V_3) = \frac{4}{3}u(T_2)(V_4 - V_3)$$

adiab $dQ = 0 = dU + PdV \Rightarrow dU = -PdV \Leftrightarrow duV + udV = -\frac{u}{3}dV$

$$\Leftrightarrow duV = -\frac{4}{3}dVu$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{4}{3}\frac{dV}{V} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = -\frac{4}{3}\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(u)} = e^{\ln(V^{-4/3})} \Leftrightarrow u = cV^{-4/3} \Leftrightarrow uV^{4/3} = cte$$

$$\text{ó} \quad u^{3/4}V = cte$$

$$\therefore \; u(T_1)V_2^{4/3} = u(T_2)V_3^{4/3}$$

$$u(T_2)V_4^{4/3} = u(T_1)V_1^{4/3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \qquad u(T_1)^{3/4}V_2 = u(T_2)^{3/4}V_3$$

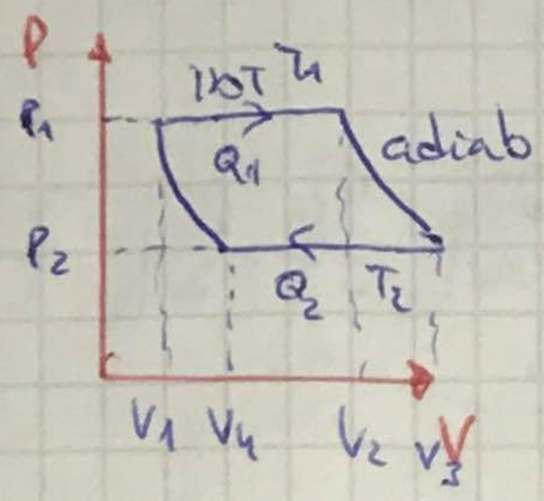
De la eficiencia del ciclo de Carnot

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{\cancel{4/3}\,u(T_1)(V_2 - V_1)}{\cancel{4/3}\,u(T_2)\left(\frac{V_3V_1}{V_2} - V_3\right)} = \frac{u(T_1)\,(V_2 - V_1)}{u(T_2)\,\frac{V_3}{V_2}(V_1 - V_2)} = \frac{u(T_1).V_2\,(-1)}{u(T_2)\,V_3}$$

$$\Rightarrow = -\frac{u(T_1)\,u(T_2)^{3/4}}{u(T_2)\,u(T_1)^{3/4}} = -\frac{u(T_1)^{1/4}}{u(T_2)^{1/4}} = \frac{T_1}{T_2} \Leftrightarrow \frac{-T_1}{u(T_1)^{1/4}} = \frac{T_2}{u(T_2)^{1/4}}$$

Ejercicio 15 $\quad P = \frac{u}{3} \quad U = uV \quad u = u(T)$

a) Considerando un ciclo de Carnot demuestre $u = \sigma T^4$



← isotermica → isobárica

adiab

$$dQ = dU + PdV$$

$$Q_1 = u(T_1)(V_2 - V_1) + P_1(V_2 - V_1) = \frac{4}{3}u(T_1)(V_2 - V_1)$$

$$Q_2 = u(T_2)(V_4 - V_3) + P_2(V_4 - V_3) = \frac{4}{3}u(T_2)(V_4 - V_3)$$

adiab $dQ = 0 = dU + PdV \Rightarrow dU = -PdV \Leftrightarrow duV + udV = -\frac{u}{3}dV$

$$\Leftrightarrow duV = -\frac{4}{3}dVu$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{4}{3}\frac{dV}{V} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = -\frac{4}{3}\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(u)} = e^{\ln(V^{-4/3})} \Leftrightarrow u = cV^{-4/3} \Leftrightarrow uV^{4/3} = cte$$

ó $u^{3/4}V = cte$

$$\therefore u(T_1)V_2^{4/3} = u(T_2)V_3^{4/3}$$

$$u(T_2)V_4^{4/3} = u(T_1)V_1^{4/3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \qquad u(T_1)^{3/4}V_2 = u(T_2)^{3/4}V_3$$

De la eficiencia del ciclo de Carnot

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{\cancel{4/3}\,u(T_1)(V_2 - V_1)}{\cancel{4/3}\,u(T_2)\left(\frac{V_3V_1}{V_2} - V_3\right)} = \frac{u(T_1)\,(V_2 - V_1)}{u(T_2)\,\frac{V_3}{V_2}(V_1 - V_2)} = \frac{u(T_1).V_2\,(-1)}{u(T_2)\,V_3}$$

$$\Rightarrow = -\frac{u(T_1)\,u(T_2)^{3/4}}{u(T_2)\,u(T_1)^{3/4}} = -\frac{u(T_1)^{1/4}}{u(T_2)^{1/4}} = \frac{T_1}{T_2} \Leftrightarrow \frac{-T_1}{u(T_1)^{1/4}} = \frac{T_2}{u(T_2)^{1/4}}$$

b) Recobtener utilizando que la entropía es función de estado

Como es función de estado, es un dif exacto

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{udV}{T} + \frac{duV}{T} + \frac{u}{3T}dV = \frac{4u}{3T}dV + \frac{V}{T}du$$

Por ser $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial U} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\Big|_u\right)\Big|_V = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial u}\Big|_V\right)\Big|_u$ $\quad \frac{\partial S}{\partial V}\Big|_u = \frac{4}{3}\frac{u}{T}$; $\frac{\partial S}{\partial u}\Big|_V = \frac{V}{T}$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{4}{3}\frac{u}{T}\right)\Big|_V = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\right)\Big|_u \Leftrightarrow \frac{4}{3T} - \frac{4u}{3T^2}\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{3}T} = \frac{4u}{\cancel{3}T^2}\frac{\partial T}{\partial u} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{u} = 4\frac{\partial T}{T}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{T^4}{T_0^4}\right) \Leftrightarrow e^{\ln(u) - \ln(u_0)} = e^{\ln(T^4) - \ln(T_0^4)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u = \sigma T^4} \quad \Rightarrow U = \sigma V T^4$$

Calcule su entropía. $\quad dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{\sigma T^4}{T}dV + \frac{\sigma V 4T^3}{T}dT + \frac{\sigma T^4}{3T}dV$

$$\therefore dS = \sigma\left(\frac{4}{3}T^3\right)dV + 4\sigma V T^2 dT$$

$$\Rightarrow S = \sigma\frac{4}{3}T^3(V - V_0) + \frac{4}{3}\sigma V(T^3 - T_0^3) + cte$$

$$\frac{\partial S}{\partial V}\Big|_T = \sigma\frac{4}{3}T^3 \Rightarrow S = \frac{\sigma 4}{3}T^3 V + f(T)$$

$$\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V = 4\sigma V T^2 \Rightarrow S = \frac{\sigma 4 T^3}{3}V + f(V)$$

$$\Leftrightarrow f(T) = f(T) = C$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{4}{3}\sigma V T^3 + C}$$

Adiabáticas $dS = 0 \Rightarrow -\sigma\frac{4}{3}T^{\cancel{3}}dV = 4\sigma V \cancel{T^2} dT$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}T\,dV = V\,dV$$

$$\Leftrightarrow \frac{dV}{V} = -3\frac{dT}{T}$$

$$\therefore \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \ln\left(\left(\frac{T_0}{T}\right)^3\right) \Leftrightarrow T^3 V = c$$

En una expansión isotérmica $P = cte \Rightarrow$ isobárica U aumenta, S aumenta

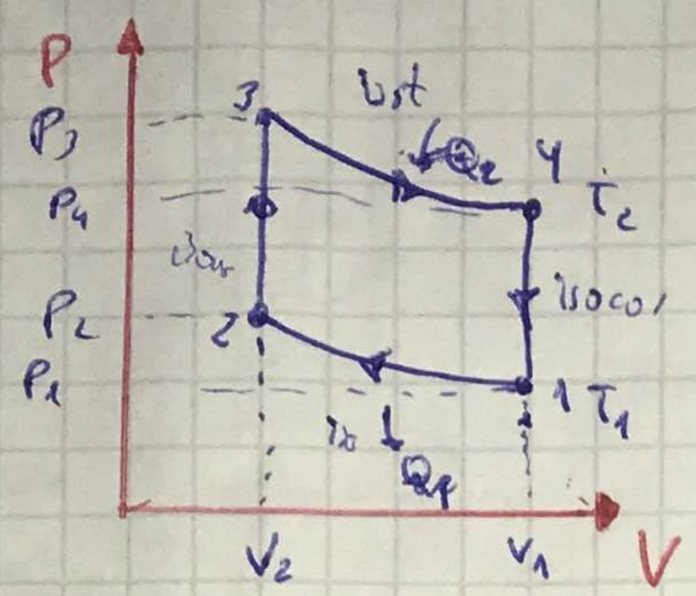
$\Rightarrow U > 0 \therefore Q > W$ saca calor, se expande y le sobra Q

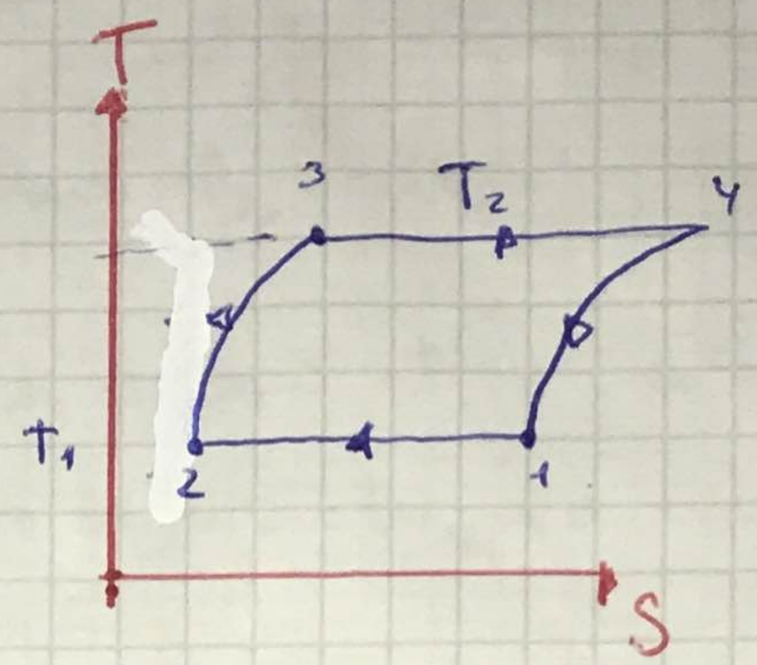
$P = \frac{U}{3}$ = presión de radiación

Ejercicio 16

Ciclo de Stirling en un gas ideal

a) Gráfico T-S





$$S = NC_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + Nk_B \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\frac{PV}{Nk_B} = T$$

b) Demostrar que $Q_{23} = -Q_{41}$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + \overbrace{W_{23}}^{=0} = nC_v(T_2 - T_1) \qquad \Delta V = 0$$

$$Q_{41} = nC_v(T_1 - T_2) \Rightarrow Q_{23} = -Q_{41}$$

$$\eta = \text{Beneficio sobre costo} = \left(\frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{12} + \cancel{Q_{41} + Q_{23}} + Q_{34}}\right)^{-1} \quad \left(\text{Pide en } \frac{W}{Q_{calor}}\right)$$

$$\Rightarrow \eta = \left(\frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{34} + Q_{12}}\right)^{-1}$$

$$Q_{34} = \int_{V_2}^{V_1} \frac{NT_2k_B}{V}\, dV = NT_2k_B \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$\Rightarrow \eta = \left(\frac{nC_v(T_2 - T_1) + NRT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{nR\left[T_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right]}\right)^{-1}$$

$$\boxed{\Rightarrow \eta = \frac{\cancel{n}R(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\cancel{n}\left[C_v(T_2 - T_1) + RT_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\right]}}$$