1. Considere el sistema Sol-Tierra. Suponga, como una aproximación, que puede despreciar las interacciones con el resto de los cuerpos celestes.

   a) Encuentre qué magnitudes se conservan. Justifique.
   b) Escriba la expresión de las magnitudes que se conservan y encuentre el potencial efectivo del sistema y haga un gráfico. ¿Cómo puede interpretarlo?
   c) Estudie todos los posibles movimientos del sistema (no integre las ecuaciones).

2. Considere un sistema oscilante sumergido en un medio viscoso, cuyo coeficiente de viscosidad dinámica es σ. Estudie todos los posibles movimientos del sistema. ¿Qué determina el tipo de movimiento? Justifique.

3. Estudie el movimiento de un péndulo físico.

   a) Encuentre la ecuación de movimiento para pequeñas oscilaciones y, en ese caso, el período del movimiento.
   b) Encuentre la fuerza de vínculo aplicada sobre el sistema.

4. Encuentre la condición que debe cumplirse para que la energía mecánica total de un sistema de partículas se conserve. Demuestre que, para un cuerpo rígido, el trabajo de las fuerzas internas se anula.

5. Discuta el fenómeno de dilatación del tiempo desde el punto de vista relativista.

¿ (2) Considere un sistema oscilante sometido a una fuerza exitadora $F(t) = f_0 \cos(\omega t)$. Estudie el régimen estacionario del sistema

Teniendo una ecuación de movimiento de la forma (Euler)

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0 \cos(\omega t)}{m}$$

La solución de esta ecuación será $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

Teniendo en cuenta que en un principio exite un régimen transitorio donde tanto x_H y x_p rigen el mov, luego el sistema entra en un régimen estacionario donde la fuerza exitadora rige el mov. Hallemos $x_p(t)$

$x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (ya que la fuerza exitadora es trigonométrica)

$\Rightarrow \dot{x}_p(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$

$\ddot{x}_p(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)$

$\Rightarrow \frac{f_0}{m} = f$ y $-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) + 2b[-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)] + \omega_0^2 x = f\cos(\omega t)$

$= \cos(\omega t)[-A\omega^2 + 2bB\omega + \omega_0^2 A] + \sin(\omega t)[-B\omega^2 - 2Ab\omega + \omega_0^2 B]$

$\Rightarrow -A\omega^2 + 2bB\omega + A\omega_0^2 = f$ ya que se debe cumplir para todo t

$-B\omega^2 - 2Ab\omega + B\omega_0^2 = 0$

$A[\omega_0^2 - \omega^2] + 2bB\omega = f$

$B[\omega_0^2 - \omega^2] - 2bA\omega = 0$ $\quad B = \frac{2bA\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$A[\omega_0^2 - \omega^2] + 2b\omega \frac{2bA\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = f$

$A\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{(2b\omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right] = f$ $\quad A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}$

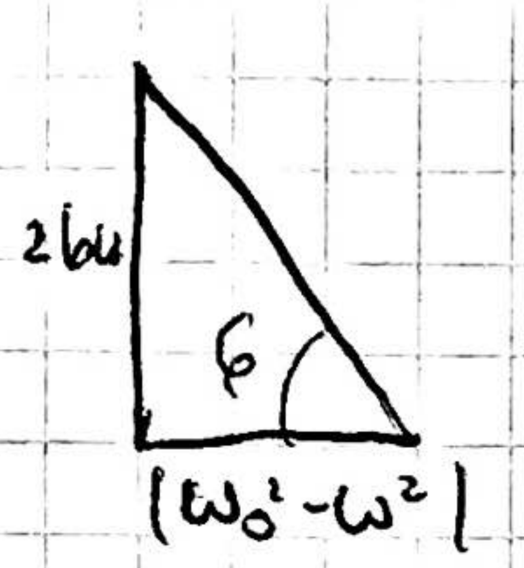
$A\left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right] = f$

$B = \frac{2b\omega f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}$

$$x_p(t) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{2b\omega f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b\omega)^2}\sin(\omega t)$$

$$x_p(t) = \frac{f}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2}\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t) + 2b\omega\sin(\omega t)\right]$$

Sea



$$\cos\varphi = \frac{|\omega_0^2-\omega^2|}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2\right]^{1/2}} \qquad tg\,\varphi = \frac{2b\omega}{|\omega_0^2-\omega^2|}$$

$$\sin\varphi = \frac{2b\omega}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2\right]^{1/2}} \qquad \varphi = arctg\left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \underbrace{\frac{f}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2\right]^{1/2}}}_{\alpha}\left[\cos(\varphi)\cos(\omega t) + \sin(\varphi)\sin(\omega t)\right]$$

$$\boxed{x_p(t) = \alpha\cos(\omega t - \varphi)}$$

$$\dot{x}_p(t) = \alpha\sin(\omega t-\varphi)\omega = -\alpha\omega\sin(\omega t - \varphi) \text{ ó } -\alpha\omega\cos(\omega t + \varphi v)$$

Desarrollando $\sin(\omega t-\varphi) = \cos(\omega t + \varphi v)$

$$\Rightarrow \sin(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\omega t) = \cos(\omega t)\cos(\varphi v) - \sin(\omega t)\sin(\varphi v)$$

en $t=0$ $\quad -\sin(\varphi) = \cos(\varphi v) \qquad \sin(\varphi) = \cos(\varphi v)$

$$\rightarrow -\varphi + \frac{\pi}{2} = \varphi v \qquad \Rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2} = \varphi v$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -\alpha\omega\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2} - \varphi) \\ \ddot{x}_p(t) &= -\alpha\omega^2\cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}}$$

a) Estudie las respuestas a alta y baja frecuencia ¿Que condiciona la respuesta de cada caso?

Alta frecuencia (la frec exitadora es mucho mayor que la frecuencia del propio oscilador) $\omega >> \omega_0$

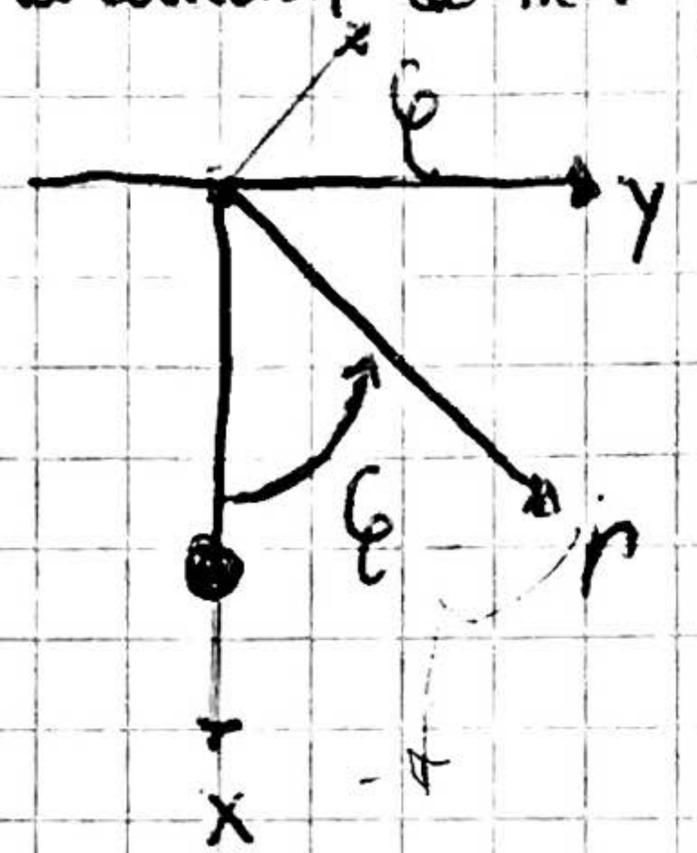
$$\Rightarrow \alpha = \frac{f}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2\right]^{1/2}} \qquad \cos\varphi \rightarrow \frac{-\omega^2}{\omega^2} \rightarrow -1 \qquad \varphi = \pi$$

$$\sin\varphi \rightarrow \frac{2b\omega}{\omega^2} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \alpha \rightarrow \frac{f}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}$ la respuesta disminuye como ω^2 y la inercia de la masa condiciona la respuesta

③ Estudie el movimiento del péndulo físico

a) Halle la ecuación de mov para pequeñas oscilaciones y en este caso el período de mov



$$\bar{v} = (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi})$$

$$\Rightarrow \bar{a} = (-r\dot{\varphi}^2 + \ddot{r})\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow m(-r\dot{\varphi}^2 + \ddot{r}) = mg\cos\varphi - T \quad \text{vínculo}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = -mg\sin\varphi$$

por condición $r = R = cte$

$\therefore \dot{r}$ y $\ddot{r} = 0$

$$\Rightarrow -mr\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - T$$

$$mr\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad \text{Ec dif de mov}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$$

si se producen pequeñas oscilaciones se puede hacer una aproximación por Taylor

$$\sin\varphi \simeq \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\varphi = 0} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{R} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad \text{Ec de Euler de}$$

$x_H(t)$ Solución $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

$x_G(t) = x_H(t)$

$$\lambda = \pm i\omega_0$$

$$\Rightarrow x_H(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

b) Encuentre la Fv aplicada al sist

$$-mr\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - T \qquad mr\ddot{\varphi} = mr\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = mr\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \cancel{m}r\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\cancel{m}g\sin\varphi$$

$$r\int_{\dot{\varphi}_0(\varphi)}^{\dot{\varphi}(\varphi)} \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = -g\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$\left(\frac{\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2}{2}\right) = \frac{g}{r}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + \dot{\varphi}_0^2$$

$$-mr\left(\frac{2g}{r}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + \dot{\varphi}_0^2\right) = mg\cos\varphi - T$$

$$T = mg\cos\varphi + 2mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0 + mr\dot{\varphi}_0^2$$

$$\boxed{T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) + mr\dot{\varphi}_0^2}$$

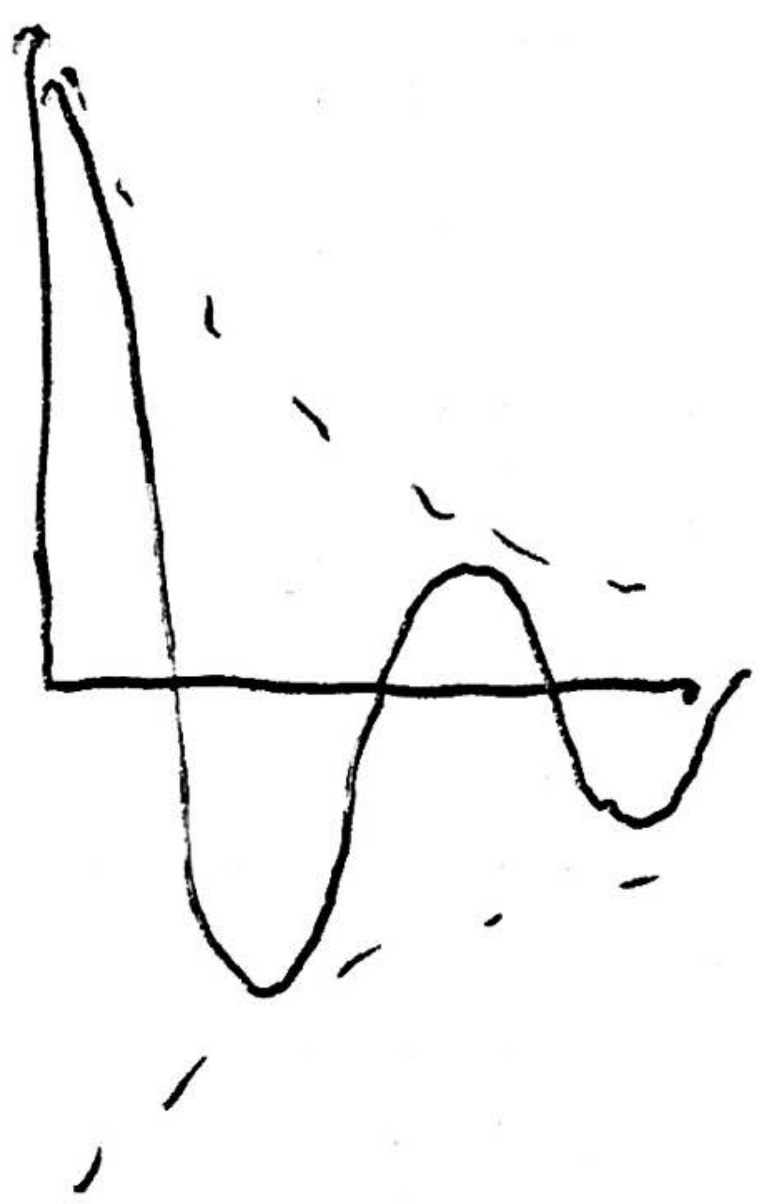
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \quad \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{b^2}{\omega_0^2}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{2m^2}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{2m\sqrt{k}}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{2m\omega_0}\right)^2}}$$

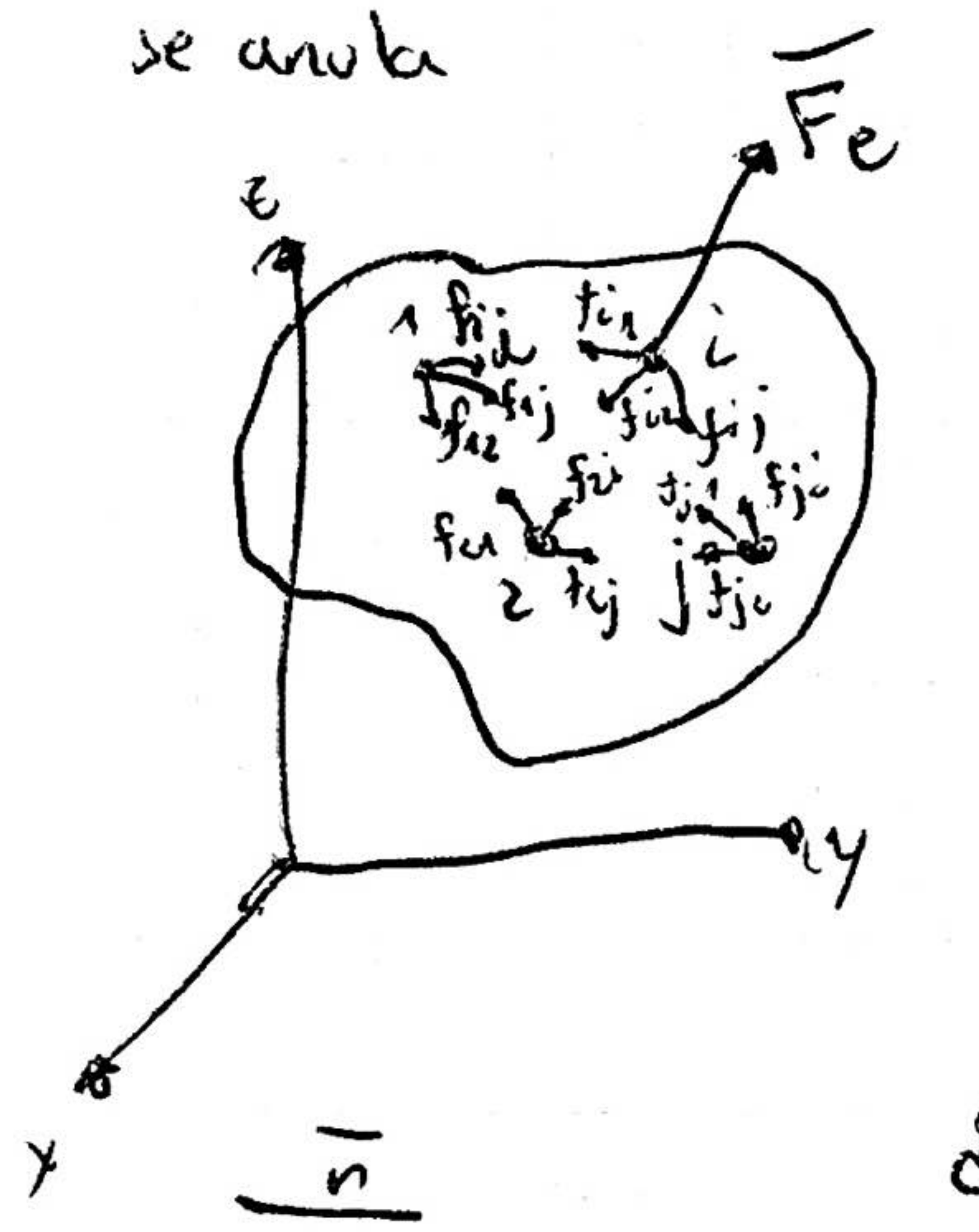
$\tau_V = \frac{\sigma}{2m}$ $\tau = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e^{-bt} en mayor lo más rapido decrece el sist $\therefore$ menor es el τ_V

es el tiempo que tarda la amplitud del mov en caer de su valor inicial debido a la F_V.

τ es a un factor 2π el período de un mov armónico simple



(4) Halle la condición que debe cumplirse para que la Ene. total de un sist. de part. se conserve. Demuestre que para un cuerpo rígido, el trabajo de las fuerzas internas se anula

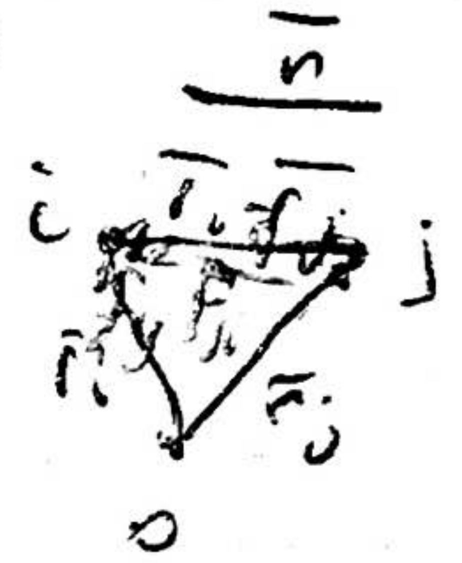


$$H = \sum_{i=1}^{n} T_i + \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} V_{ij}$$

$$dW^{NC} = dW^{NC,ext} + dW^{NC,int}$$

$dW^{NC}_{ext} \sum_{i=1}^{n} \bar F_{ei}\, d\bar r_i = 0$ para que se conserve y además

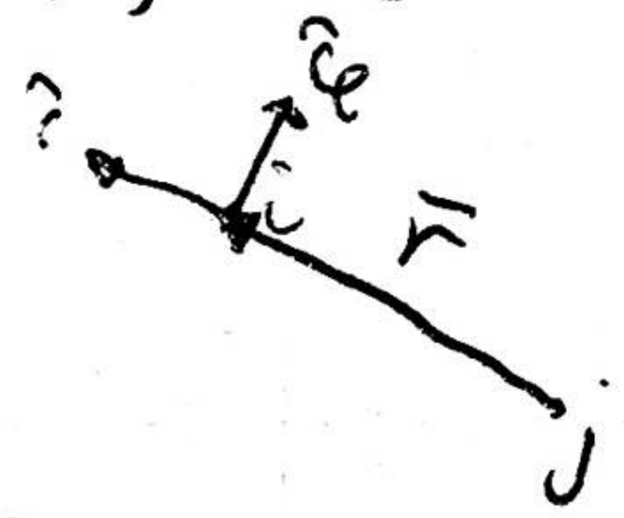
$$dW^{NC}_{int} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \bar f_{ij}^{NC}\, d\bar r_i$$



Para dos partículas i, j

$$dW^{NC}_{int\,ij} = \bar f_{ij}^{NC}\, d\bar r_i + \bar f_{ji}\, d\bar r_j$$
$$= \bar f_{ij}^{NC}(d\bar r_i - d\bar r_j)$$
$$= \bar f_{ij}^{NC}\, d(\bar r_i - \bar r_j)$$

$$\bar f_{ij}^{NC} = -\bar f_{ji}^{NC}$$



$$= \bar f_{ij}^{NC}(dr\,\hat r + r\,d\varphi\,\hat\varphi)$$

$$d\bar r = d(r\hat r) = dr\,\hat r + \overbrace{r\,d\varphi\,\hat\varphi}^{r\,d\hat r}$$

si $\bar f_{ij} \parallel (\bar r_i - \bar r_j) = \bar r \Rightarrow \bar f_{ij}^{NC} = f_{ij}^{NC}\hat r$

$$\Rightarrow dW^{NC}_{ij\,int} = f_{ij}^{NC}\,\hat r\,(dr\,\hat r + r\,d\varphi\,\hat\varphi)$$
$$= f_{ij}^{NC}\, dr$$

$\bar f_{ij}^{NC}\, d(|\bar r_i - \bar r_j|) = f_{ij}^{NC}\, d(|\bar r|)$ si $|\bar r|$ es decir $|\bar r_i - \bar r_j|$ = cte

$\Rightarrow$ si $dW^{NC}_{int} = 0$, que además, es la condición de cuerpo rígido