1er parcial Física 1, 1er Cuatrimestre 2014
Cátedra Claudia Giribet

Recuerde iniciar cada problema en una hoja distinta y justificar todas sus respuestas.

1. Considere el sistema de 3 masas de la figura, con rozamiento no despreciable entre la masa m_1 y el piso y entre las masas m_2 y m_3, caracterizado en ambos casos por los coeficientes μ_e y μ_d para los casos estático y dinámico respectivamente. Considere que el rozamiento entre m_2 y el piso es despreciable, igual que las masas de la polea y las cuerdas. Estas últimas son, además, inextensibles. El sistema se encuentra bajo la acción de la gravedad.

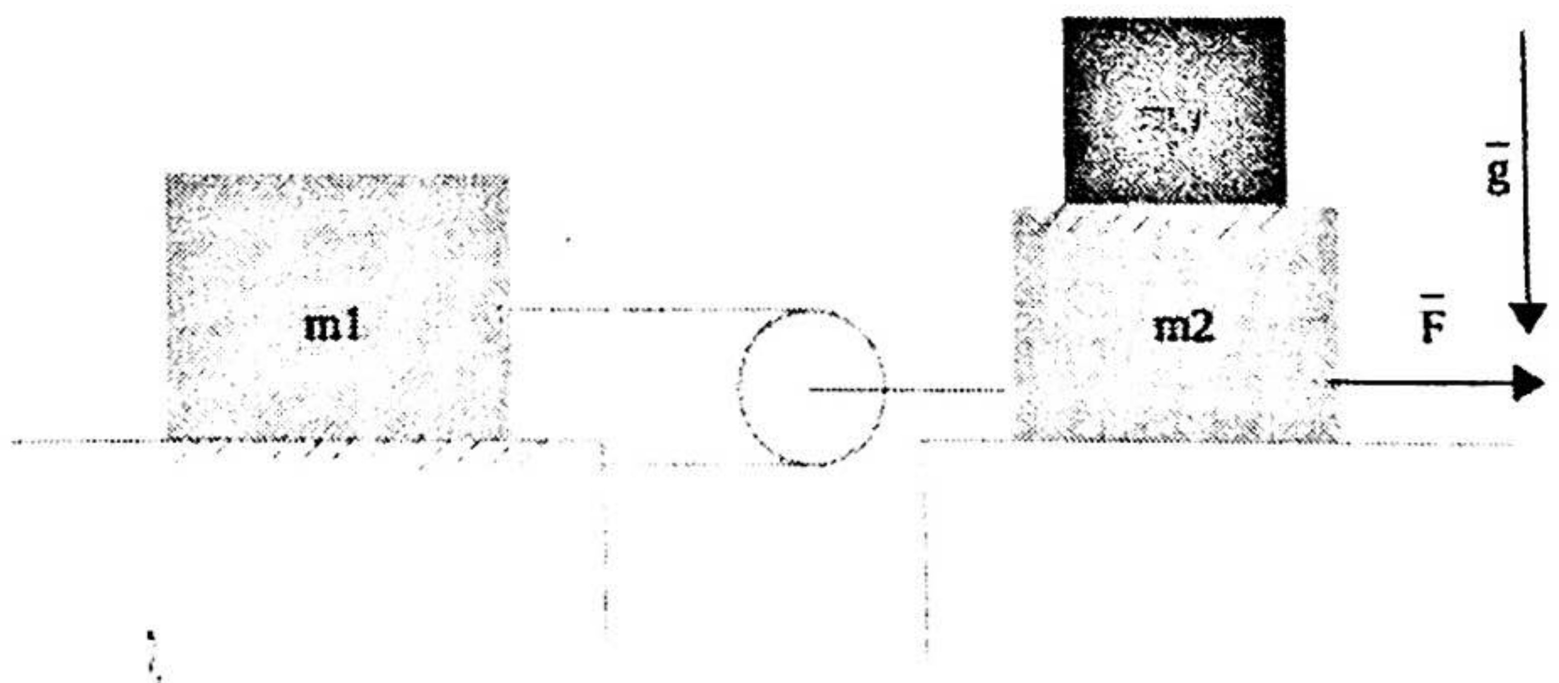
   Se aplica una fuerza $\vec{F}$ sobre m_2 como se indica en la figura.

   (a) Grafique las fuerzas que actúan en cada cuerpo y en la polea.

   (b) Escriba las ecuaciones de Newton considerando los vínculos.

   (c) Halle el valor máximo de $\vec{F}$ tal que el sistema permanezca en equilibrio.

   (d) Halle el valor mínimo de $\vec{F}$ para que el sistema se ponga en movimiento sin que m_3 deslice sobre m_2.

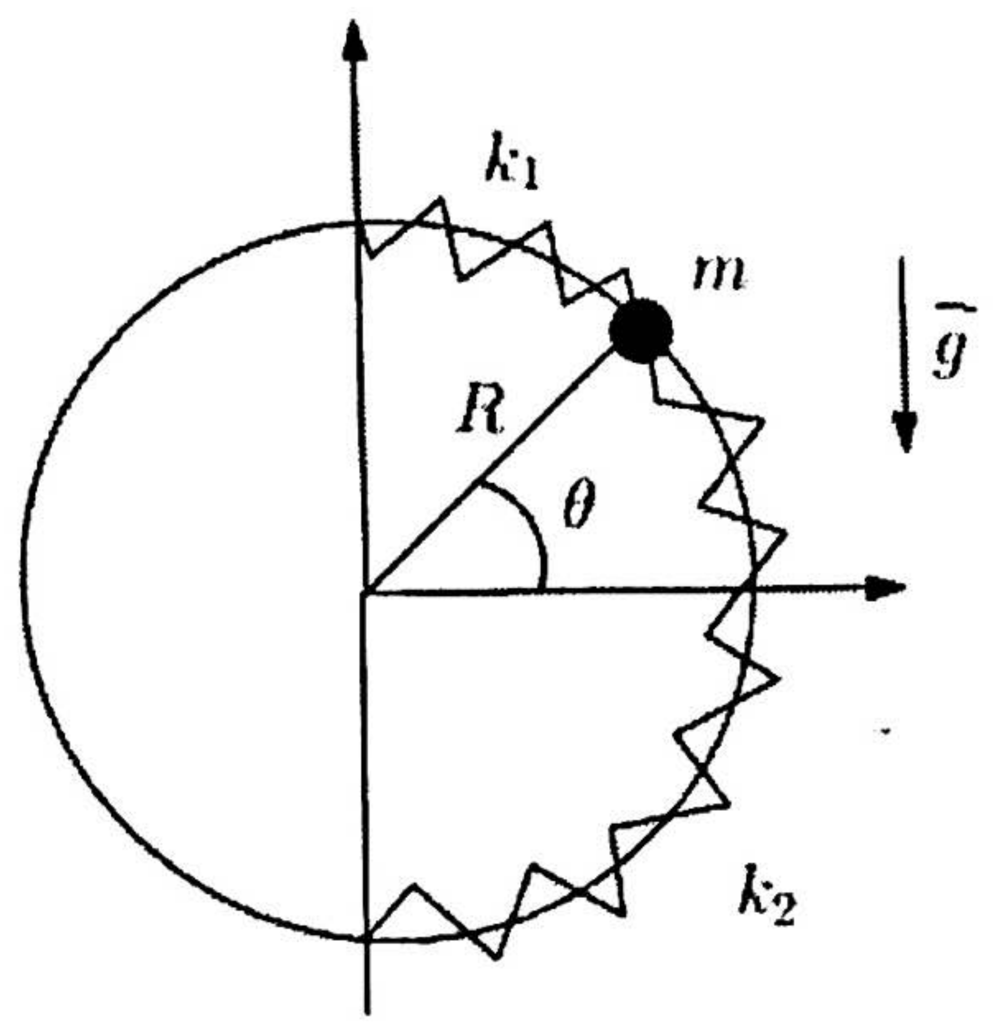


2. Una bolita de masa m está enhebrada en un aro circular de radio R y está unida a dos resortes ideales de constante elástica k_1 y k_2, como muestra la figura. Las longitudes naturales de los resortes son $l_{01} = l_{02} = R\pi/2$. El sistema está sometido a la aceleración de la gravedad y las fuerzas de rozamiento son despreciables.

   (a) Escriba las ecuaciones de Newton y de vínculo para la bolita y determine la ecuación diferencial que rige su movimiento.

   (b) Encuentre el equilibrio para $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ y muestre que es estable. Calcule la frecuencia para pequeñas oscilaciones en torno a ese punto (puede dejarla expresada en términos de θ_{eq}).

   (c) Sabiendo que $\theta(t=0) = 0$ y $\dot{\theta}(t=0) = \omega_0$, obtenga una expresión para la reacción normal del aro sobre la bolita en función de θ.



3. Una cuenta de masa m se encuentra engarzada en un aro circular vertical de radio R, en el que desliza sin rozamiento. El aro se encuentra soldado a una barra horizontal de largo R que lo hace girar con una velocidad angular $\vec{\Omega}$ respecto de un eje vertical que pasa por el otro extremo de la barra. Un resorte ideal de constante elástica k y longitud natural nula, se encuentra atado a la cuenta y a otro anillo en el eje vertical, haciendo que esté siempre horizontal. Todo el sistema se encuentra bajo la acción de la gravedad.

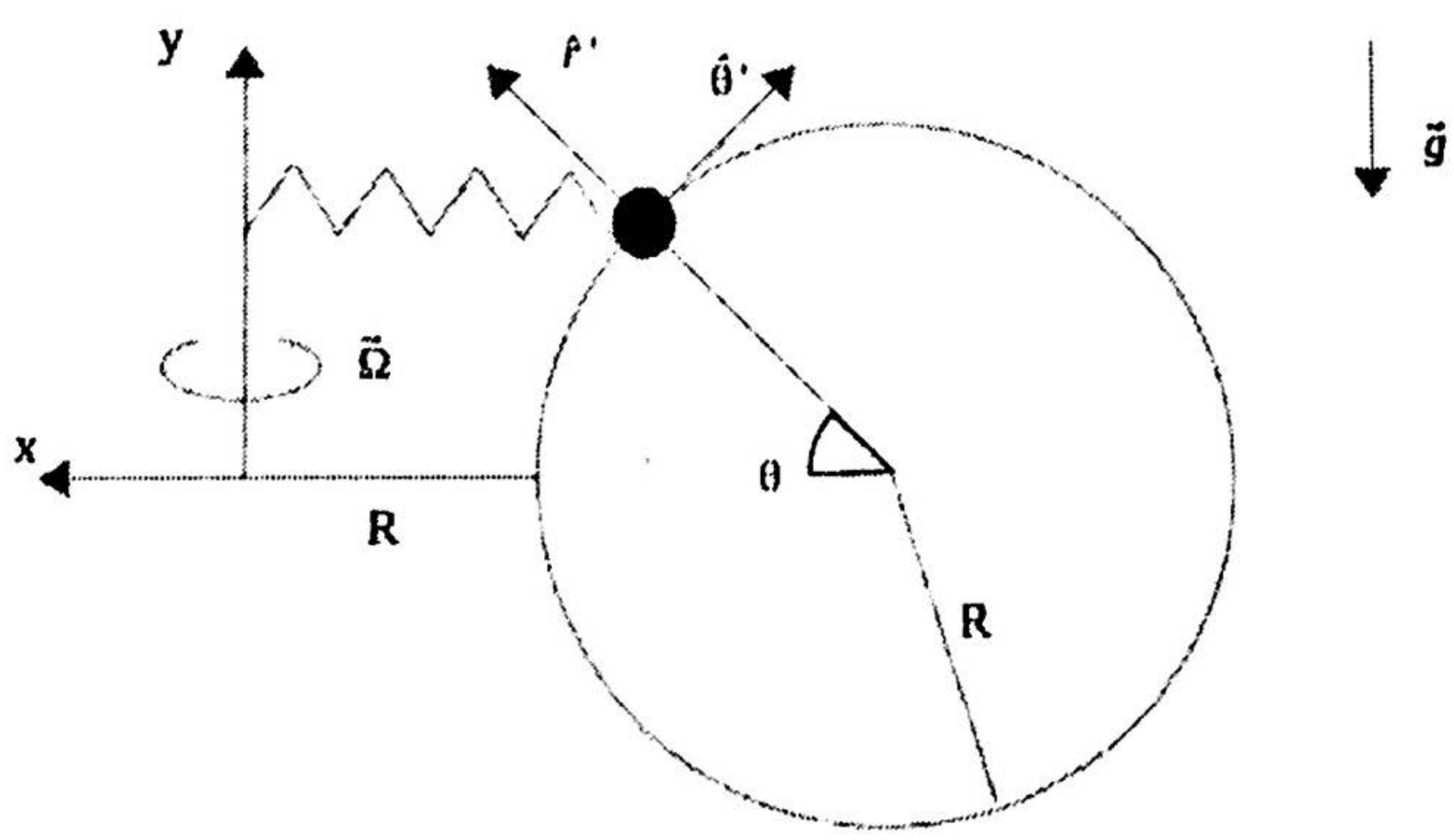
(a) Realice un diagrama de cuerpo libre para la cuenta, indicando las fuerzas de interacción y las fuerzas inerciales. Indique los pares de acción y reacción.

(b) Utilice un sistema solidario a la rotación del sistema para escribir las ecuaciones de Newton para la cuenta. Encuentre la ecuación diferencial que rige el movimiento.

(c) Suponiendo que $\Omega^2 R \gg g$, encuentre los puntos de equilibrio, y diga qué condiciones se tienen que cumplir para que sean estables o inestables. En los equilibrios estables, encuentre la frecuencia de oscilación para pequeños apartamientos.

(d) Si la aceleración de la gravedad no es despreciable, explique cualitativamente cómo cambiaría el punto (c).

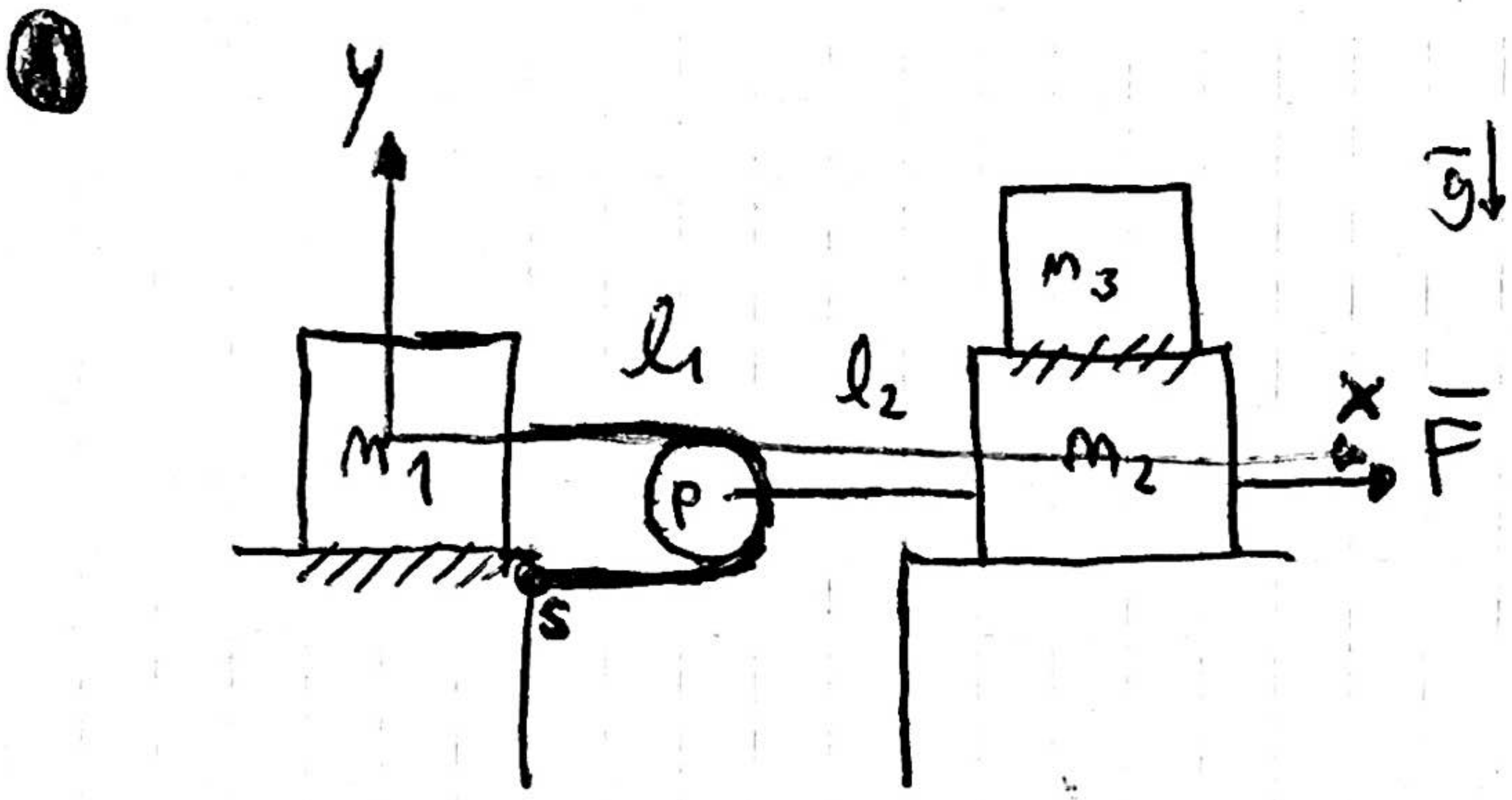
Ayuda: $\vec{r'} = -2R\hat{x}' + R(\cos(\theta)\hat{x}' + \sin(\theta)\hat{y}') = -2R\hat{x}' + R\hat{r}'$



HOJA 1 (A)

Emiliano Fortes

1



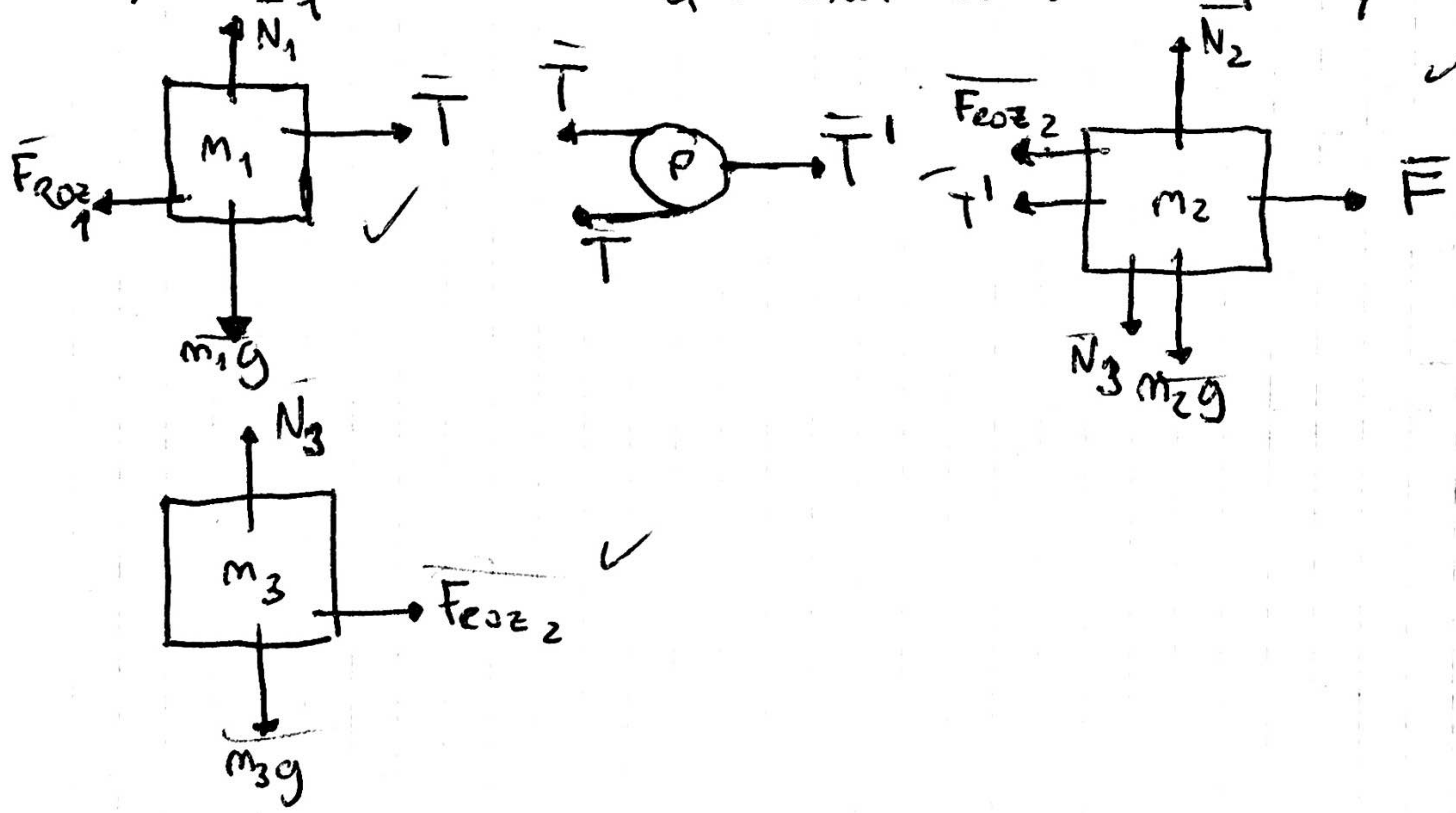
Datos

$m_1, m_2, m_3, \mu_e, \mu_d$

masa polea despreciable

masa cuerda " e inext

a) Grafique las fuerzas que actúan en cada cuerpo y la polea



b) Ec Newton y vínculo

$m_1)$ $(\hat{x})$ $-F_{ROZ_1} + T = m_1 \ddot{x}_1$

$(\hat{y})$ $N_1 - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 = 0$ vínculo

$m_2)$ $(\hat{x})$ $F - F_{ROZ\,2} - T' = m_2 \ddot{x}_2$

$(\hat{y})$ $N_2 - N_3 - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 = 0$

$m_3)$ $(\hat{x})$ $F_{ROZ_2} = m_3 \ddot{x}_3$

$(\hat{y})$ $N_3 - m_3 g = m_3 \ddot{y}_3 = 0$

Polea $-2T + T' = \underbrace{m_p}_{\approx 0 \text{ masa despreciable}} \ddot{x}_p \Rightarrow 2T = T'$ vínculo cuerdas

$$\begin{cases} l_1 = x_p - x_1 + x_p - x_3 \\ l_2 = x_2 - x_p \end{cases}$$

soga inextensible $\Rightarrow$ ctes $\therefore$

$\dot{l}_1 = 0 = 2\dot{x}_p - \dot{x}_1 \Rightarrow 2\dot{x}_p = \dot{x}_1 \Rightarrow 2\ddot{x}_p = \ddot{x}_1$ vínculos

$\dot{l}_2 = 0 = \dot{x}_2 - \dot{x}_p \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_p \Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_p \rightarrow 2\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$

(C) Halle el valor máximo de F tal que el sist quede en eq.

En eq $F_{ROZ} = F_{ROZ_E}$ $\wedge$ $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = 0$

$\Rightarrow m_1)$ $(\hat{x})$ $F_{ROZ_{1_E}} = T$

$m_2)$ $(\hat{x})$ $F = F_{ROZ_{2_E}} + T'$

$m_3)$ $(\hat{x})$ $F_{ROZ_{2_E}} = 0$

$\Rightarrow F = T'$

$F_{ROZ_{1_E}} = T$

$2F_{ROZ_{1_E}} = 2T = T'$

$\Rightarrow F = 2F_{ROZ_{1E}}$ $\quad |F_{ROZ_1}| \leq \mu_e . N_1 = \mu_e . m_1 g$

$F_{ROZ\,MÁX} = \mu_e . m_1 g$

$\Rightarrow F_{MÁX} = 2F_{ROZ_{1E}\,MAX}$

$$\boxed{F_{MÁX} = 2\mu_e . m_1 g}$$

d) $F_{MÁX}$ para que el sistema se mueva pero m_3 no deslice

Asumiendo que el sist ya está en mov (Por consigna, eso dijeron)

$\Rightarrow 2\ddot{x}_p = \ddot{x}_1$ $\wedge$ $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = \ddot{x}_p$ $\quad F_{ROZ_{1D}}$ y $F_{ROZ_{2E}}$

HOJA 2

Emiliano Fortes

$$m_1)\ -F_{ROZ1_D}+T=m_1\ddot{x}_1 \quad \Rightarrow -2F_{ROZ1_D}+2T=2m_1\ddot{x}_1$$

$$m_2)\ F-F_{ROZ2_D}-T'=m_2\ddot{x}_2$$

$$m_3)\ F_{ROZ2_D}=m_3\ddot{x}_3$$

~~sumo las 3 ed~~

$$\cancel{-2F_{ROZ1_D}+2T+F-F_{ROZ2}-T'+F_{ROZ2}=(\ldots)\ddot{x}}=$$

$$\Rightarrow -2F_{ROZ1_D}+2T=2m_1\ddot{x}_1$$

$$+$$

$$F-F_{ROZ2_E}-T'=m_2\ddot{x}_2$$

$$=-2F_{ROZ1D}+\cancel{2T}+F-F_{ROZ2E}-\cancel{T'}=2m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2$$

$$\ddot{x}_1=2\ddot{x}_p \ \wedge\ \ddot{x}_2=\ddot{x}_p$$

$$-2F_{ROZ1D}+F-F_{ROZ2E}=(4m_1+m_2)\ddot{x}_p$$

✓

$$\ddot{x}_3=\ddot{x}_2=\ddot{x}_p$$

$$\Rightarrow -2F_{ROZ1D}+F-F_{ROZ2E}=(4m_1+m_2)\frac{F_{ROZ2E}}{m_3}$$

$$F=\left(\frac{4m_1+m_2}{m_3}\right)F_{ROZ2E}+F_{ROZ2E}+2F_{ROZ1D}$$

$$F=\left(\frac{4m_1+m_2+m_3}{m_3}\right)F_{ROZ2E}+2F_{ROZ1D}$$

$$|F_{ROZ2E}|\leq \mu_E.N_3=\mu e.m_3g$$

$$|F_{ROZ1D}|\leq \mu d.N_1=\mu d.m_1g$$

$$|F_{ROZ2E}+F_{ROZ1D}|\leq|F_{ROZ2E}|+|F_{ROZ1D}|\leq \mu e m_3g+\mu d m_1g$$

$$\left(\frac{4m_1+m_2+m_3}{m_3}\right)|F_{ROZ2E}|+2|F_{ROZ1D}|\leq\left(4m_1+m_2+m_3\right)\mu e g+2\mu d m_1 g$$

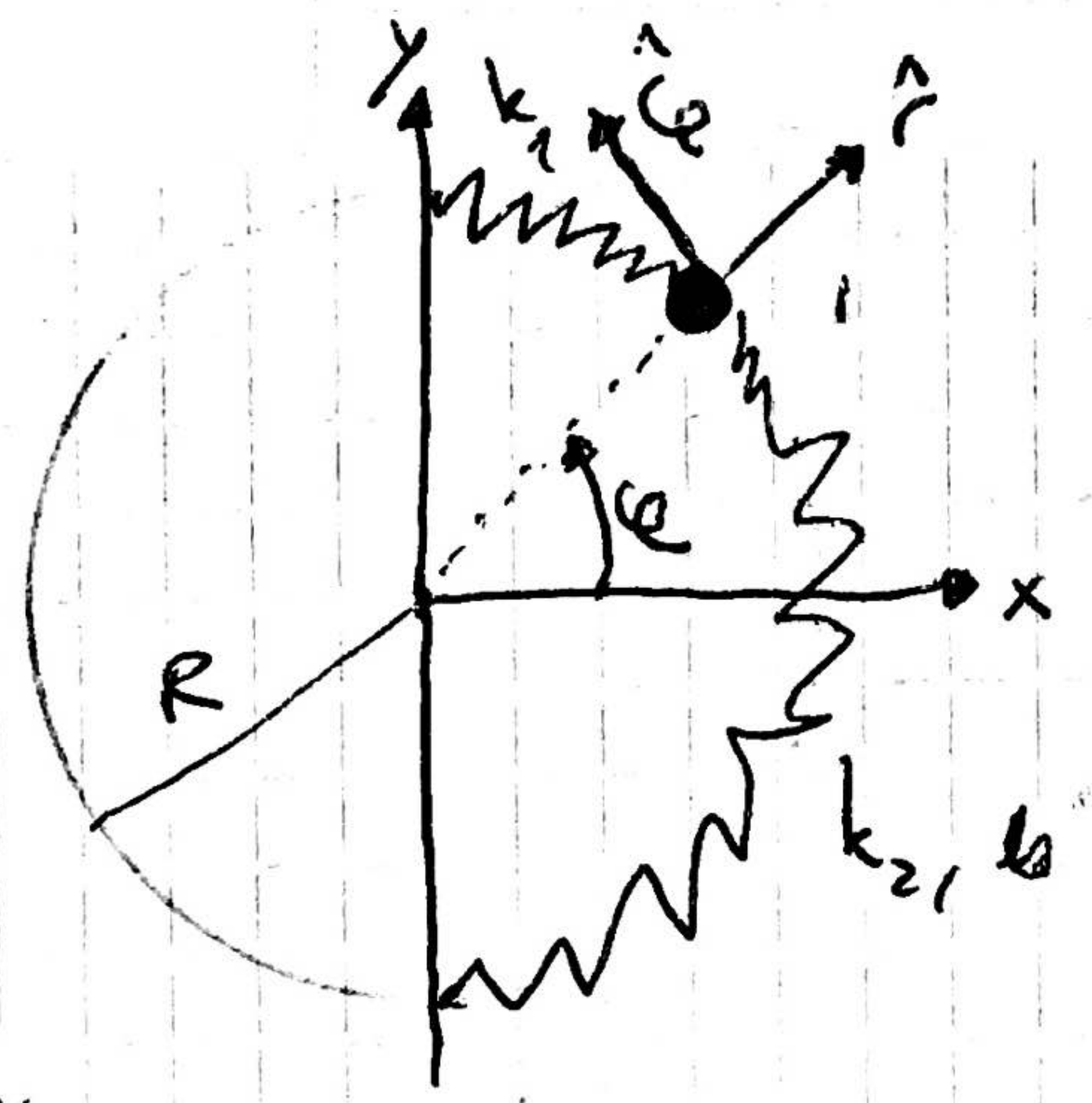
✓

$$\{F\} \underset{\geq}{\overset{-}{\leq}} (4m_1+m_2+m_3)\mu_e g \overset{+}{+} 2\mu_d m_1 g$$

~~[illegible]~~

$$\cancel{F_{min} = (4m_1+m_2+m_3)\mu_e g - 2\mu_d m_1 g}$$

Emilino Fortes



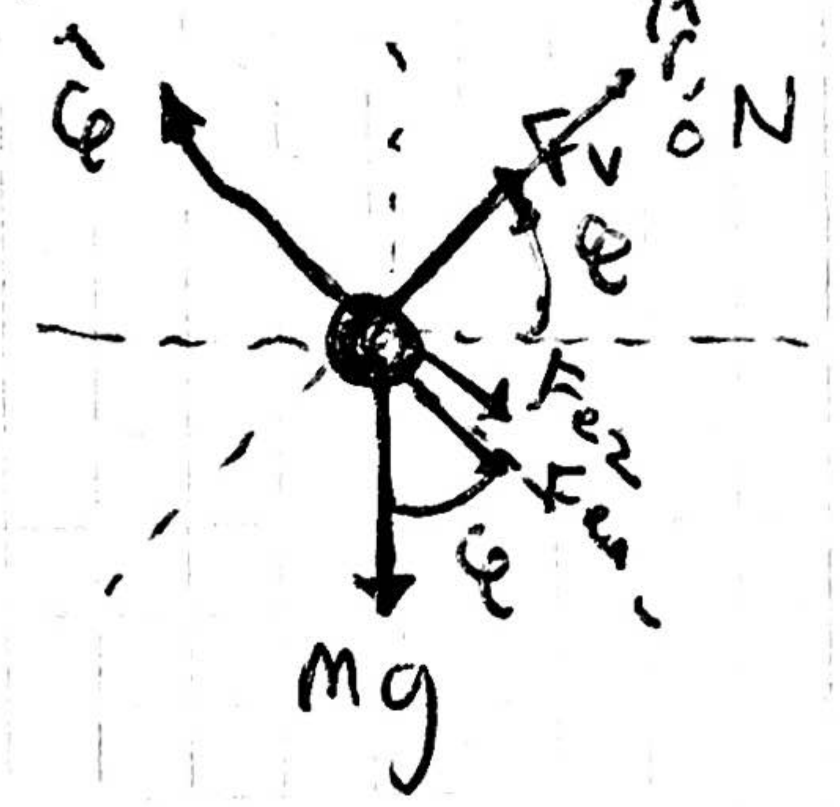
$\vec{g}\downarrow$

Datos:

$l_{01} = l_{02} = R\pi/2$

R, g, k_1, k_2, No roz

a) Ec newton y vínculo y det ec dif de mov



$$\Rightarrow m a_{\hat{\varphi}} = m\,(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = F_{e2} + F_{e1} - mg\cos\varphi$$

$$m a_{\hat{r}} = m\,(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_v - mg\sin\varphi$$

$$F_{e1} = k_1\left(\cancel{\tfrac{\pi}{2}R} - \varphi R - \underbrace{\cancel{\tfrac{\pi}{2}R}}\right) = -k_1(\varphi R)$$

$$F_{e2} = k_2\left(\cancel{\tfrac{\pi}{2}R} + \varphi R - \underbrace{\cancel{\tfrac{\pi}{2}R}}_{l_{02}}\right)^{l_{01}} = -k_2(\varphi R)$$

vínculo

$$r = R = cte \Rightarrow \dot{r} = 0 = \ddot{r}$$

$$\Rightarrow (\hat{\varphi})\ m\,(2\underbrace{\dot{r}}_{=0}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = mR\ddot{\varphi} = (-k_1 - k_2)(\varphi R) - mg\cos\varphi \quad \text{Ec mov}$$

$$(\hat{r})\ m\,(\underbrace{\ddot{r}}_{=0} - r\dot{\varphi}^2) = mR\dot{\varphi}^2 = F_v - mg\sin\varphi \quad \text{vínculo}$$

b) Halle el eq para $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$ y muestre que es estable.
Calcule la frecuencia para pequeñas oscilaciones en torno a ese punto (en términos de φ_{eq})

Para eq $F_\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$\therefore\ 0 = (-k_1 - k_2)\varphi_{eq} R - mg\cos\varphi_{eq}$

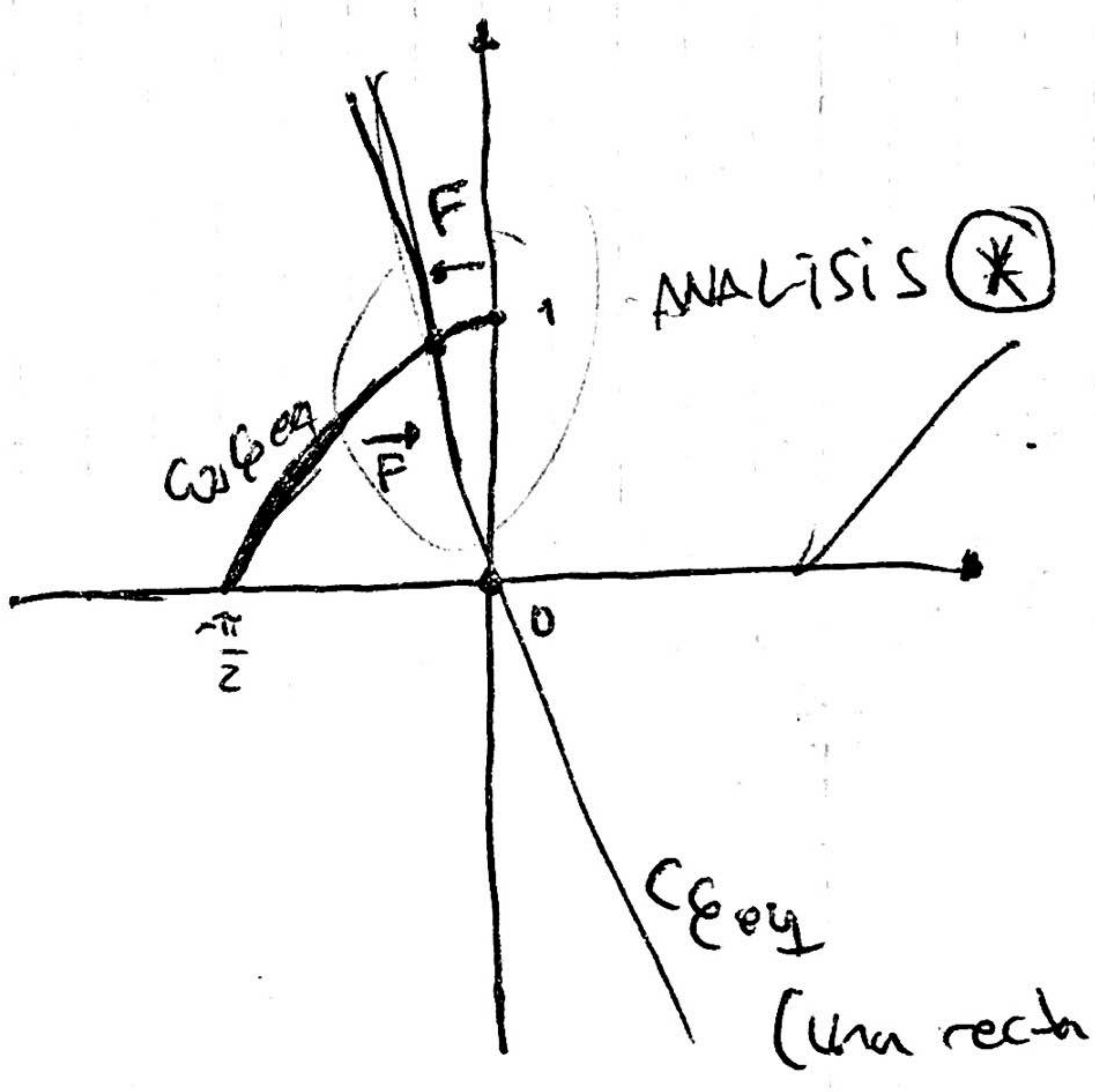
$\Rightarrow (k_1 + k_2)\varphi_{eq} R = -mg\cos\varphi_{eq}$

$$\varphi_{eq} = \frac{-mg\cos\varphi_{eq}}{(k_1+k_2)R}$$

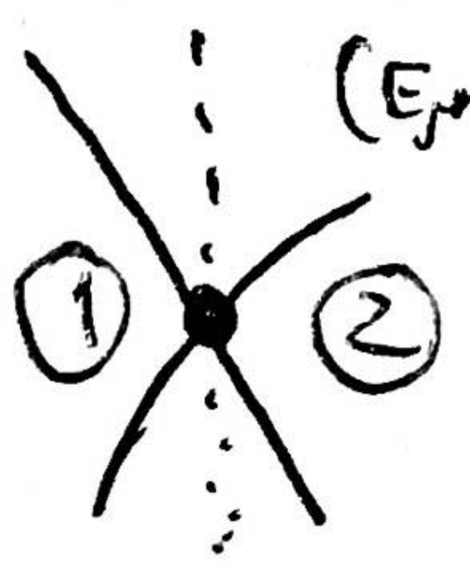
$$\frac{-(k_1+k_2)R}{mg}\varphi_{eq} = \cos\varphi_{eq}$$

C

$C\varphi_{eq} = \cos\varphi_{eq}$



(*)



(Ejemplar, sucede igual en toda recta en este caso)

(1) si se apartase la masa hacia la izq del eq entonces la recta es mayor que el coseno

$\Rightarrow$ Recta $>$ cos

recta $-$ cos > 0

entonces la F apunta hacia la derecha

(2) cos $>$ recta

$\Rightarrow$ recta $-$ cos < 0

$\Rightarrow$ el equilibrio es estable $\forall\ \frac{-(k_1+k_2)R}{mg}$

Para oscilaciones $\varphi_{eq} \Rightarrow \varphi_{eq} = 0$ ≤ 1 ~~est~~ $\in [\frac{\pi}{2}, 0]$

$\Rightarrow F_\varphi = (-k_1 - k_2)\varphi_{eq} R - mg\cos\varphi_{eq} \Rightarrow (-k_1 - k_2)\varphi_{eq} R - mg = mR\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \varphi\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)$

$\ddot{\varphi} + \varphi\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right) = -mg$ para $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\ \text{y}\ f = \sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}}$

Emiliano Fortes

c) Sabiendo que $\varphi(t=0)=0$ y $\dot{\varphi}(t=0)=\omega_0$

Halle F_V en función de φ

$$\ddot{\varphi}=\frac{(-k_1-k_2)\varphi-mg\cos\varphi}{mR}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{d\dot{\varphi}}{dt}=\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}=\int_0^{\varphi}\frac{(-k_1-k_2)\varphi-mg\cos\varphi}{mR}\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\varphi}^2}{2}-\frac{\omega_0^2}{2}=\frac{(-k_1-k_2)\varphi^2}{2mR}-\frac{mg\sin\varphi}{mR}-\frac{(-k_1-k_2)0}{2mR}+\frac{mg\cdot\sin 0}{mR}$$

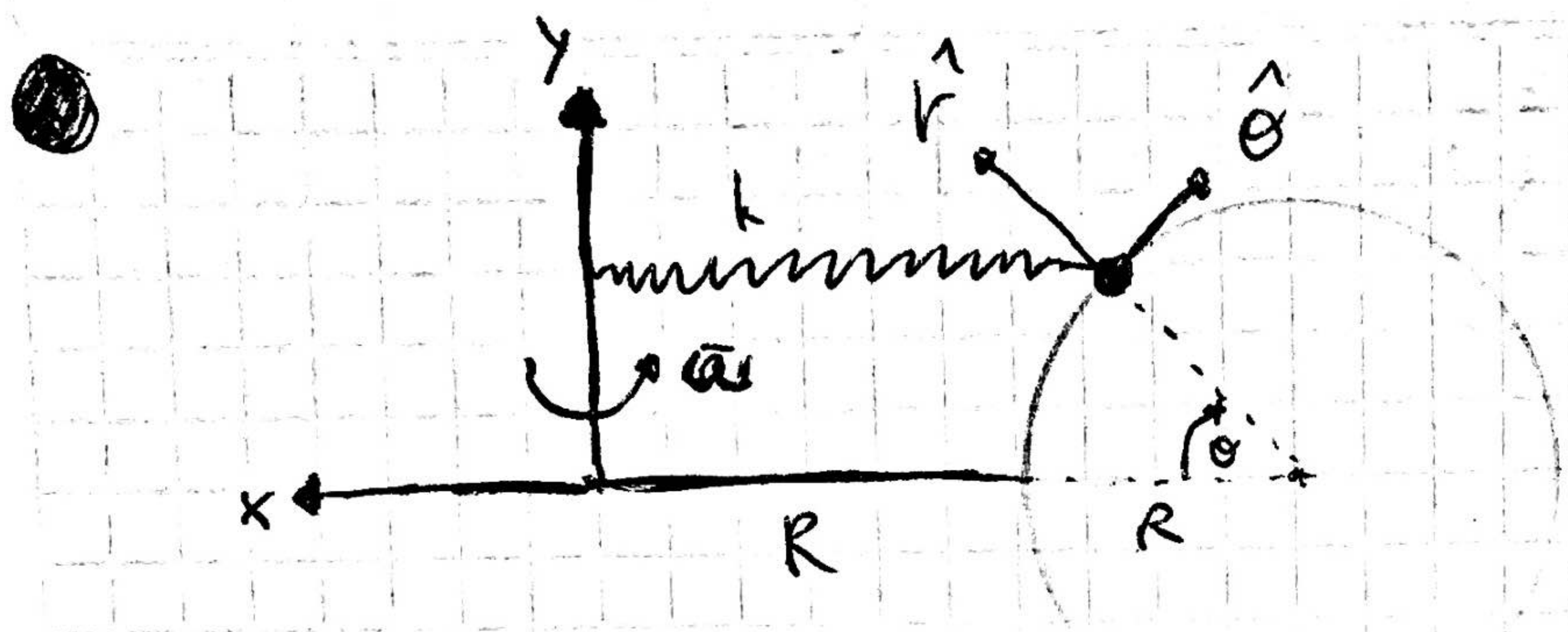
$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2=\frac{(-k_1-k_2)\varphi^2}{mR}-\frac{2mg\sin\varphi}{mR}+\omega_0^2$$

$$\Rightarrow F_V(\varphi)=mR\left[\frac{(-k_1-k_2)\varphi^2}{mR}-\frac{2mg\sin\varphi}{mR}+\omega_0^2\right]+mg\sin\varphi$$

$$\boxed{F_V(\varphi)=(-k_1-k_2)\varphi^2-mg\sin\varphi+mR\omega_0^2}$$

HOJA 5

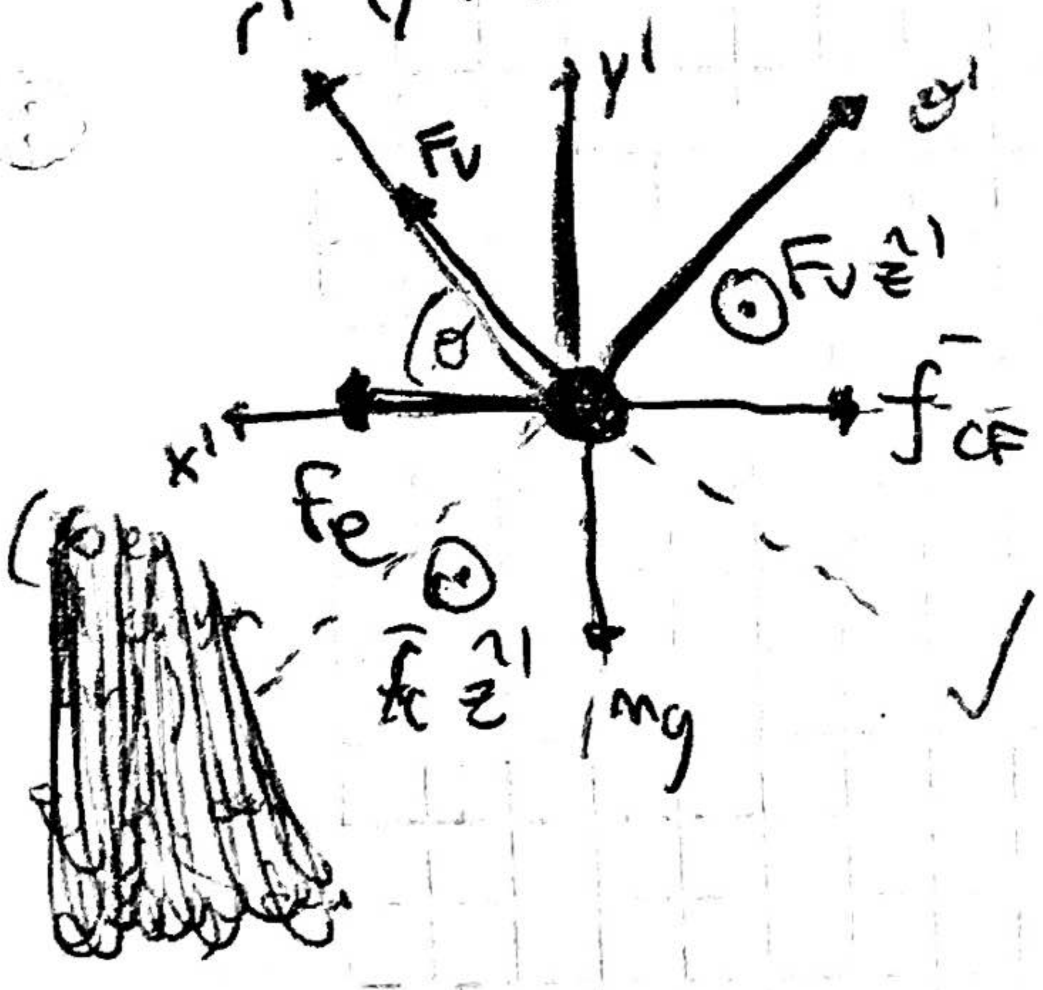
Emiliano Fortes

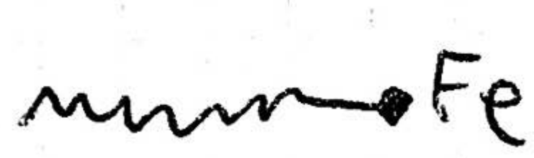


$\bar{g}\downarrow$

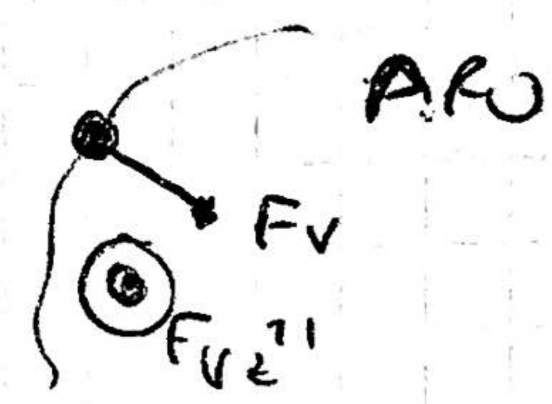
$l_0 = 0$

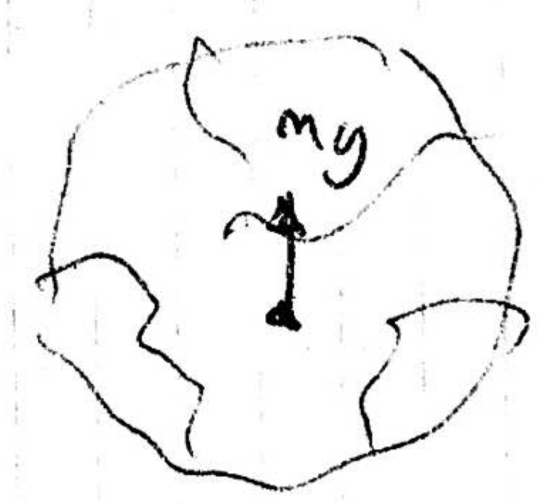
a) DCL. F interacción e inerciales. Pares





$\omega = cte$





$\hat{r}' = (\cos\theta\, \hat{x}' + \sin\theta\, \hat{y}')$

b) Ec dif de mov

$\hat{x}' = (\cos\theta\, \hat{r}' - \sin\theta\, \hat{\theta}')$

$\hat{y}' = (\cos\theta\, \hat{\theta}' + \sin\theta\, \hat{r}')$

$\bar{r}' = -2R\hat{x}' + R\hat{r}'$

$V = \dot{r}\hat{r}' + r\dot{\theta}\hat{\theta}'$

$\cancel{\bar{v}' = 2R(\cos\theta\, \hat{r}' - \sin\theta\, \hat{\theta}') + R\hat{r}'}$

$\bar{v}' = R\dot{\theta}\hat{\theta}'$

$\bar{\omega} = \omega\hat{y}' = \omega(\cos\theta\, \hat{\theta}' + \sin\theta\, \hat{r}')$

$$\boxed{\begin{aligned} F_e &= -kx\,\hat{x}' \\ F_e &= -kx(\cos\theta\, \hat{r}' - \sin\theta\, \hat{\theta}') \end{aligned}}$$

MAL, LO CORREGI DESPUES

$-mg\hat{y}' = -mg(\cos\theta\, \hat{\theta}' + \sin\theta\, \hat{r}')$

$\bar{F}_c = -2m\bar{\omega}\times\bar{v}' = -2m\omega R\dot{\theta}(\cos\theta\, \hat{\theta}' + \sin\theta\, \hat{r}')\times(\hat{\theta}')$

$= -2m\omega R\dot{\theta}(\sin\theta\, \hat{z}')$

$$\cancel{\bar{F}_{CF} = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')}$$
$$\cancel{= -m\omega^2(\cos\theta\,\hat{\theta}' + \sin\theta\,\hat{r}')\times\left[(\cos\theta\,\hat{\theta}' + \sin\theta\,\hat{r}')\times(-2R(\cos\theta\,\hat{r}' - \sin\theta\,\hat{\theta}'))\right]}$$
$$\cancel{= 2Rm\omega^2(\cos\theta\,\hat{\theta}' + \sin\theta\,\hat{r}')\times(-\cos^2\theta\,\hat{z}' - \sin^2\theta\,\hat{z}')}$$
$$\cancel{= 2Rm\omega^2}$$

$$\cancel{\bar{F}_{CF} = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')}$$
$$\cancel{= -m\omega^2(\cos\theta\,\hat{\theta}' + \sin\theta\,\hat{r}')}$$

$$\bar{F}_{CF} = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}') = -m\omega^2\,\hat{y}'\times\left(\hat{y}'\times(-2R\hat{x}' + R(\cos\theta\,\hat{x}' + \sin\theta\,\hat{y}'))\right)$$
$$= -m\omega^2\,\hat{y}'\times(+2R\,\hat{z}' - R\cos\theta\,\hat{z}')$$
$$= -m\omega^2\,\hat{y}\times(2R\,\hat{z}' - R\cos\theta\,\hat{z}') = -m\omega^2(2R - R\cos\theta)\,\hat{x}' \quad \checkmark$$

$$\bar{F}_{TRANSLACIÓN} = 0 \qquad \omega = cte \Rightarrow \gamma = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow m\bar{a}' = -kx(\cos\theta\,\hat{r}' - \sin\theta\,\hat{\theta}') - mg(\cos\theta\,\hat{\theta}' + \sin\theta\,\hat{r}') + F_V\hat{r}' + F_V\hat{z}' - 2m\omega R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{z}'$$
$$- m\omega^2(2R - R\cos\theta)(\cos\theta\,\hat{r}' - \sin\theta\,\hat{\theta}')$$

$$m\ddot{z}' = F_V\hat{z}' - 2m\omega R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{z}' = 0 \quad \Rightarrow F_{V_{\hat{z}}} = 2m\omega R\dot{\theta}\sin\theta$$

ARRASTRE ERROR CORREGI EN LA HOJA QUE SIGUE

$$-mR\dot{\theta}^2 = -kx\cos\theta\,\hat{r}' - mg\sin\theta\,\hat{r}' + F_V\hat{r}' - m\omega^2(2R - R\cos\theta)\cos\theta\,\hat{r}'$$

$$\boxed{mR\ddot{\theta} = kx\sin\theta\,\hat{\theta}' - mg\cos\theta\,\hat{\theta}' + m\omega^2(2R - R\cos\theta)\sin\theta\,\hat{\theta}' \quad \text{ec dif de mov}}$$

c) Suponiendo que $\omega^2 R \gg g$. Halle eq y diga que debe pasar para que sean estables o no. Halle frec de oscilación en eq estables

$F_\theta = 0$

en eq $\ddot{\theta} = 0$

$$kx\sin\theta - mg\cos\theta + m\omega^2(2R - R\cos\theta)\sin\theta = 0$$
$$kx\sin\theta - mg\cos\theta + m\omega^2 R(2 - \cos\theta)\sin\theta = 0$$

si $\omega^2 R \gg g \Rightarrow g$ despreciable entonces

$$kx\sin\theta + m\omega^2 R(2 - \cos\theta)\sin\theta = 0$$
$$\sin\theta\,(kx + m\omega^2 R(2 - \cos\theta)) = 0$$

Emiliano Fortes

HOJA 6

Me di cuenta que descompuse mal la Fe antes, las aceleraciones serian las de aca

$\cancel{x} = -2R(\cos\theta\hat{r}' - \sin\theta\hat{\theta}) + R\hat{r}'$

$\Rightarrow Fe = -k[-2R(\cos\theta\hat{r}' - \sin\theta\hat{\theta}') + R\hat{r}'] \} X$

$m\vec{a}' = -k\left[-2R(\cos\theta\hat{r}' - \sin\theta\hat{\theta}') + R\hat{r}'\right] - mg(\cos\theta\hat{\theta}' + \sin\theta\hat{r}') +$
$F_V\hat{r}' + F_V\hat{z}' - 2m\omega R\dot{\theta}\sin\theta\hat{z}' - m\omega^2(2R - R\cos\theta)(\cos\theta\hat{r}' - \sin\theta\hat{\theta}')$

$m\ddot{z}' = 0 = F_V\hat{z}' - 2m\omega R\dot{\theta}\sin\theta\hat{z}'$ ✓

$-mR\dot{\theta}^2 = -k(-2R\cos\theta + R) - mg\sin\theta + F_V\hat{r}' - m\omega^2R(2-\cos\theta)\cos\theta$

$mR\ddot{\theta} = -k(+2R\sin\theta) - mg\cos\theta + m\omega^2R(2-\cos\theta)\sin\theta$

Ec dif de MOV

✓ (arrastra error)

c) Suponiendo que $\omega^2R >> g$. Halle eq y diga que debe pasar para que sean estables o no. Halle frec de oscilación en eq estables

para eq $F_\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$ ✓

$\Rightarrow -k(2R\sin\theta) - mg\cos\theta + m\omega^2R(2-\cos\theta)\sin\theta = 0$

si $\omega^2R >> g \Rightarrow mg\cos\theta \approx 0$

$\Rightarrow -2kR\sin\theta + m\omega^2R2\sin\theta - m\omega^2R\cos\theta\sin\theta = 0$

$\sin\theta(-2Rk + 2m\omega^2R - m\omega^2R\cos\theta) = 0$

$\sin\theta = 0$

$\theta_{eq_1} = 0 \quad \theta_{eq_2} = \pi$ ✓

$R(-2k + 2m\omega^2) = m\omega^2R\cos\theta$

$\frac{-2k + 2m\omega^2}{m\omega^2} = \cos\theta \Rightarrow \frac{-2k}{m\omega^2} + 2 = \cos\theta$

(arrastra error)

para que exista, $\left|\frac{-2k}{mW^2}+2\right| < 1$ $-3 < \frac{-2k}{mW^2} < -1$

$3 > \frac{2k}{mW^2} > 1$

si existe $\theta_{eq\,3\,y\,4} = \pm \arccos\left(\frac{-2k}{mW^2}+2\right)$

V (arrastra error)

Estabilidad

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right| = -2kR\cos\theta + 2mW^2R\cos\theta + mW^2R\sin^2\theta - mW^2R\cos^2\theta$$

en $\theta_{eq}=0$ $\quad -2kR+2mW^2R-mW^2R$

$-2kR+mW^2R$

si $-2kR+mW^2R < 0$

$-2k\cancel{R} < -mW^2\cancel{R}$

$\frac{2k}{mW^2} > 1 \Rightarrow$ eq estable

V (arrastra error)

$\theta_{eq}=\pi$ $\quad 2kR-2mW^2R-mW^2R$

si <0

$\rightarrow 2k\cancel{R} < 3mW^2\cancel{R}$

$\frac{2k}{mW^2} < 3 \Rightarrow$ eq estable

V (arrastra error)

si existe $\theta_{eq\,3\,y\,4} \Rightarrow \underbrace{\pi \text{ y } 0}_{eq}$ son estable

Y $\theta_{eq\,3}$ $\quad -2k\left(\frac{-2k}{mW^2}+2\right) + 2mW^2\left(\frac{-2k}{mW^2}+2\right) + \oplus - mW^2\left(\frac{-2k}{mW^2}+2\right)^2$

$4\underline{k^2} - 4k + 4k + 4mW^2 + \oplus - mW^2\left(\frac{4k^2}{m^2W^4} - \frac{8k}{mW^2} + 4\right)$

HOJA 7

Emiliano Fortes

$$\frac{4k^2}{mw^2} \cancel{-8k+4mw^2} \oplus \frac{-4k^2}{mw^2} \cancel{+8k-4mw^2}$$

eq inestable

$\circledast$

y por $\theta_{eq}=4$ lo mismo. Si no exite θ_{eq} 4 y 3, $\Rightarrow \theta_{eq}$ 1 y 2 son inestables

d) si g fuese tomada en cuenta

$\Rightarrow \ddot{\theta}=0$

$$-kR2\sin\theta - mg\cos\theta + mw^2R(2-\cos\theta)\sin\theta = 0$$

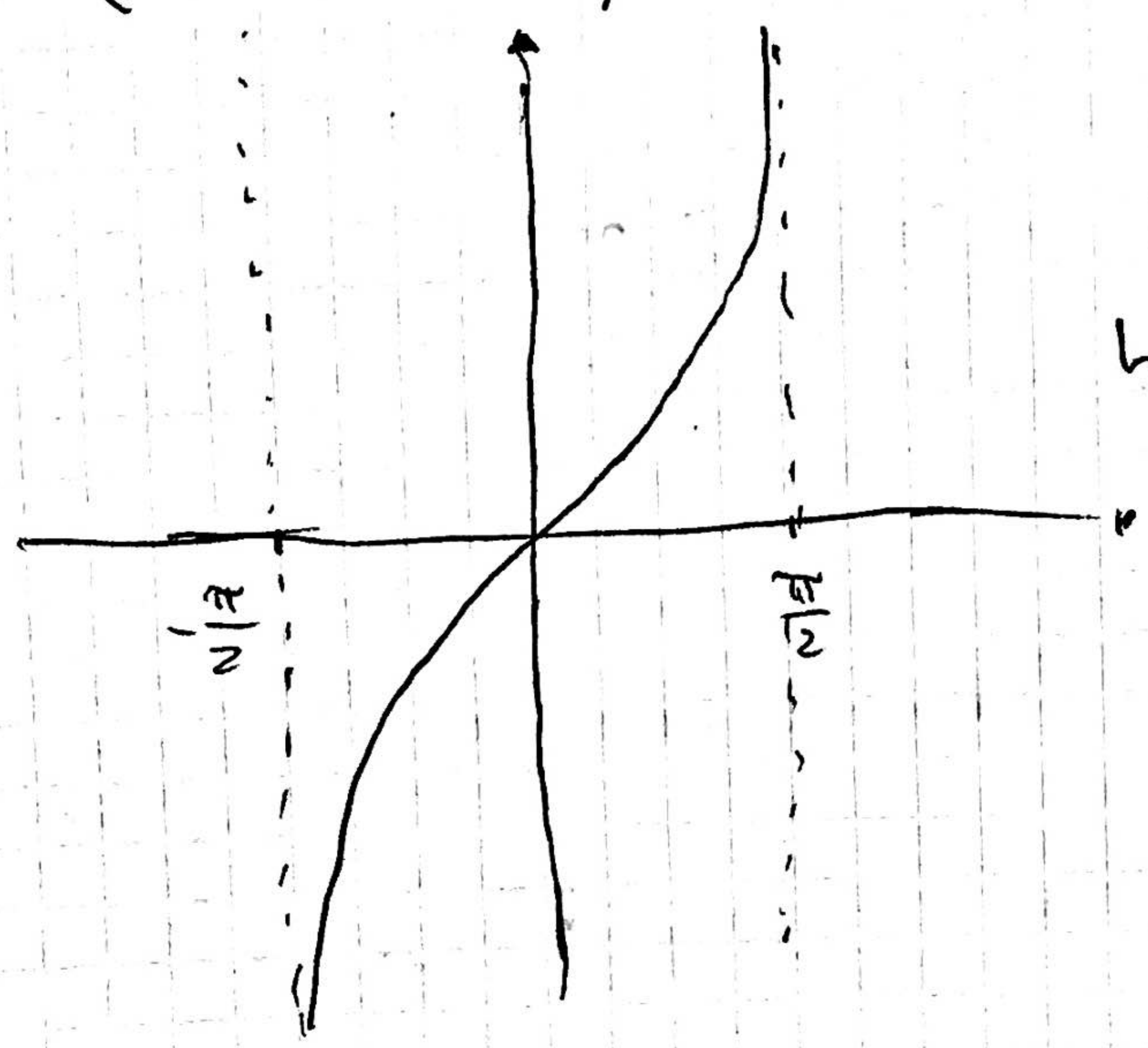
no existirian equilibrios en $\theta=0=\pi$ ✓

$$\underbrace{\cos\theta}\left(-2Rk\,tg\,\theta - mg + 2mw^2R\,tg\,\theta - mw^2R\sin\theta\right)=0$$

no puede ser cero por el dominio de la tangente

tg

$$tg\,\theta(-2RK+2mw^2R) = mw^2R\sin\theta + mg$$



$$tg\,\theta = \frac{mw^2R\sin\theta}{(-2Rk+2mw^2R)} + \frac{mg}{(-2Rk+2mw^2R)}$$

habrían nuevos equilibrios que van a depender de

Olvide el item del c de hallar la frecuencia de oscilación para eq estables

$\Rightarrow$ Si $\theta_{eq}=0$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_{eq}=0} = \left(-2kR\cos\theta_{eq} + 2mW^2R\cos\theta_{eq} + mW^2R\sin^2\theta_{eq} - mW^2R\cos^2\theta_{eq}\right)\cancel{R}\left(-\frac{1}{m\cancel{R}}\right)$$

$$= \cancel{-2k+2mW^2} = \frac{-2k+mW^2}{m}(-1)$$

$$= \frac{2k}{m} - W^2 = W_0^2 \Rightarrow W = \sqrt{\frac{2k}{m} - W^2}$$

$$f_{oscilación} = \left(\sqrt{\frac{2k}{m} - W^2}\right)^{-1}$$

$\checkmark$ (arrastre error)

O mediante peq oscilaciones en $\theta_{eq}=0$

$$mR\ddot{\theta} = -2kR\sin\theta + 2mW^2R\sin\theta - mW^2R\underbrace{\cos\theta}_{\simeq 1}\underbrace{\sin\theta}_{\simeq\theta}$$

$$mR\theta \simeq (-2kR + 2mW^2R - mW^2R)\theta$$

$$mR\ddot{\theta} = (-2kR + mW^2R)\theta$$

$$\ddot{\theta} + \theta\left(\frac{2kR - mW^2R}{mR}\right) = \ddot{\theta} + \theta\left(\frac{2k}{m} - W^2\right)$$

Para $\theta_{eq}=\pi$ con peq apartamentos

$$mR\ddot{\theta} = -2kR\sin\theta + 2mW^2R\sin\theta - mW^2R\underbrace{\cos\theta}_{\simeq -1}\underbrace{\sin\theta}_{\simeq -\theta}$$

$$mR\ddot{\theta} \simeq 2kR\theta - 2mW^2R\theta - mW^2R\theta$$

$$\ddot{\theta} + \theta\left(\frac{-2k}{m} + 3W^2\right)$$

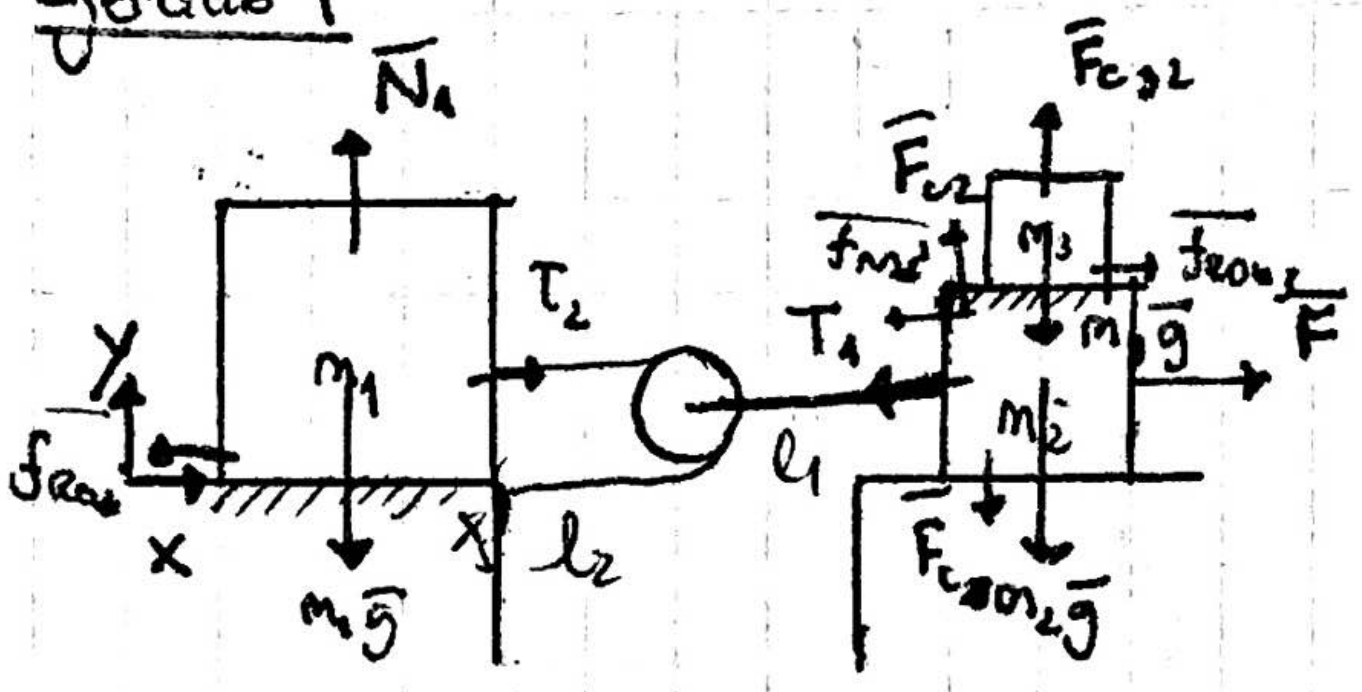
y mediante $\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_{eq}=\pi} = \left(-2k(-1) + 2mW^2(-1) - mW^2 1\right)\cancel{R}\left(-\frac{1}{m\cancel{R}}\right)$

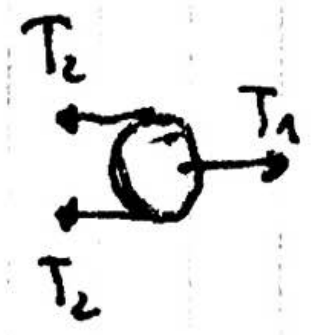
$$= \frac{-2k}{m} + 3W^2 \qquad = W = \sqrt{\frac{-2k}{m} + 3W^2}$$

$$f = \left(\sqrt{\frac{-2k}{m} + 3W^2}\right)^{-1}$$

Ejercicio 1

Datos: $m_1, m_2, m_3, \mu_e, \mu_d$





a) Grafique las fuerzas

b) Newton y vínculos

1|

$\hat{x}$) $m_1 \ddot{x}_1 = T_2 - f_{roz}$

$\hat{y}$) $m_1 \ddot{y}_1 = 0 = N_1 - m_1 g \iff N_1 = m_1 g$

2|

$\hat{x}$) $m_2 \ddot{x}_2 = F - T_1 - f_{roz_3}$

$\hat{y}$) $0 = -m_2 g - F_{c23} + F_{c32} \iff F_{c32} = F_{c23} + m_2 g$

3|

$\hat{x}$) $f_{roz3} = m_3 \ddot{x}_3$

$\hat{y}$) $0 = F_{c32} - m_3 g \iff F_{c32} = m_3 g$

Polea

$-2T_2 + T_1 = \overset{0}{m_p} \ddot{x}_p \Rightarrow 2T_2 = T_1$

vínculo

$2T_2 = T_1$

Sogas (inextensibles $\therefore$ long constante).

$l_2 = x_p - x_s + x_p - x_1 \iff 0 = 2\ddot{x}_p - \ddot{x}_1 \iff 2\ddot{x}_p = \ddot{x}_1$

$l_1 = -x_p + x_2 \iff \ddot{x}_p = \ddot{x}_2$ Luego $2\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$

c) $F_{máx}$ / sist en eq. $\Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_3 = 0$

Luego $T_2 - f_{roz_1} = 0$ $T_2 = f_{roz_1}$

$F - T_1 - f_{roz_3} = 0$

$\Rightarrow F = T_1$

$f_{roz_3} = 0$

Luego $T_2 = f_{roz_1}$ $2T_2 = T_1 \iff T_2 = f_{roz_1} \iff \frac{F}{2} = f_{roz_1}$

$F = T_1$ $F = 2T_2$

Si buscamos el máx, $f_{roz_1\,máx} = \mu_e \cdot m_1 \cdot g$ $\boxed{\text{luego } F_{máx} = 2\mu_e m_1 \cdot g}$

d) Asumiendo el sist en movimiento, halle la $F_{máx}$ / el cuerpo 3 no deslice

$\Rightarrow 2\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3$, $f_{roz_1} = \mu_d m_1 g$, f_{roz_3} estática

$2m_1 \ddot{x}_2 = T_2 - \mu_d . m_1 . g$, $m_2 \ddot{x}_2 = F - 2T_2 - f_{e_3}$, $m_3 \ddot{x}_2 = f_{e_3}$ $\ddot{x}_2 = \frac{f_{e_3}}{m_3}$

$\Rightarrow 2m_1 \frac{f_{e_3}}{m_3} = T_2 - \mu_d . m_1 . g \;\wedge\; m_2 \frac{f_{e_3}}{m_3} = F - 2T_2 - f_{e_3}$

Sumando las ecuaciones

$$4m_1\frac{f_{R3}}{m_3}+m_2\frac{f_{R3}}{m_3}=-2\mu_d m_1 g+F-f_{R3}$$

$$\Leftrightarrow f_{R3}\underbrace{\left(1+\frac{4m_1}{m_3}+\frac{m_2}{m_3}\right)}_{\beta}=F-2\mu_d m_1 g$$

$$\Leftrightarrow f_{R3}=\frac{F-2\mu_d m_1 g}{\beta}$$

$$|f_{R3}|=\left|\frac{F-2\mu_d m_1 g}{\beta}\right|\leq m_3\cdot g\,\mu_e$$

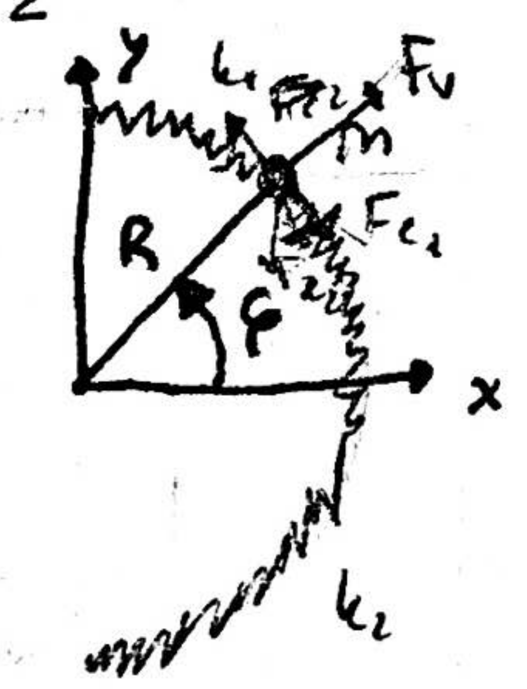
$$\Leftrightarrow \quad 1)\ F-2\mu_d m_1 g\leq\beta m_3 g\,\mu_e$$

$$2)\ F-2\mu_d m_1 g\geq-\beta m_3 g\,\mu_e$$

Como buscamos la $F_{mín}$

$$\Rightarrow \boxed{F\geq-\beta m_3 g\,\mu_e+2\mu_d m_1 g}$$

Ejercicio 2



$\bar{g}\downarrow$

Datos: $k_1, k_2, l_{01}, l_{02}, m$ $\quad l_{01}=l_{02}=\pi R/2$

$$\bar{F}_{e1}=-k_1(R\varphi)\hat{\varphi}$$

$$\bar{F}_{R2}=-k_2R\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\bar{F}_g=-mg\left(\cos(\varphi)\hat{\varphi}+\sin(\varphi)\hat{r}\right)$$

a) Newton y vínculo y ec dif de mov

$$\hat{R})\ m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-mg\sin(\varphi)+F_v \rightarrow \text{vínculo}$$

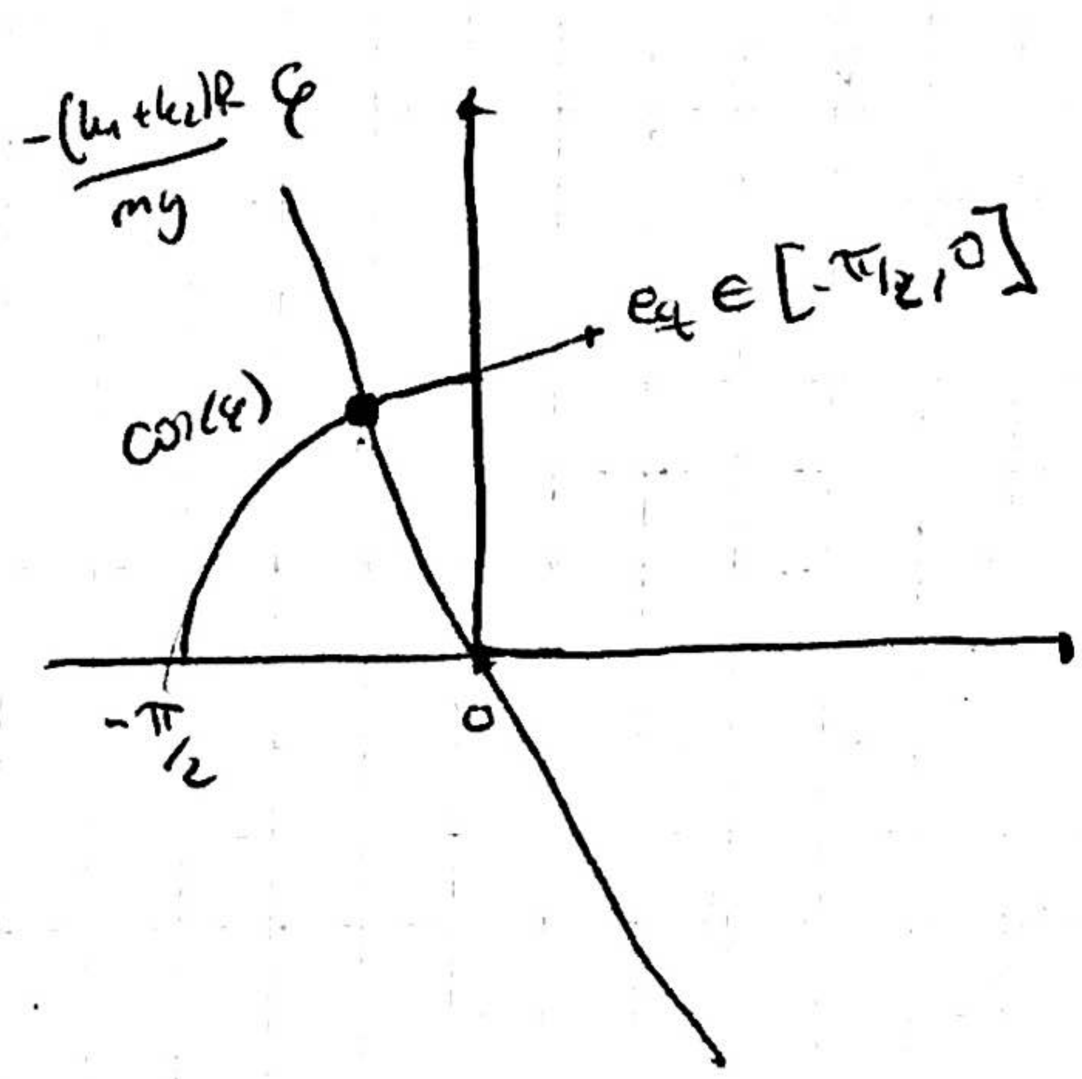
$$\hat{\varphi})\ m(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})=-(k_1+k_2)R\varphi-mg\cos(\varphi) \rightarrow \text{ec mov}$$

además $r=cte=R \Rightarrow \dot{r}=\ddot{r}=0$

$$\Rightarrow -mR\dot{\varphi}^2=-mg\sin(\varphi)+F_v$$

$$mR\ddot{\varphi}=-(k_1+k_2)R\varphi-mg\cos(\varphi)$$

b) $Eq \Rightarrow \ddot{\varphi}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi=\dfrac{-mg\cos(\varphi)}{(k_1+k_2)R} \quad \Leftrightarrow$



el equilibrio existe $/\ \varphi=\dfrac{-mg}{(k_1+k_2)R}\cos(\varphi)$

$$\left.\frac{dF_\varphi}{d\varphi}\right|_{\varphi_{eq}}=-(k_1+k_2)R+\underbrace{mg\sin(\varphi)}_{\in[-\pi/2,0]}{}^{\leq 0}\leq 0 \ \Rightarrow \ eq\ \text{estable}$$

Peq oscilaciones $\quad F_\varphi\approx\overset{=0}{F_\varphi(\varphi_{eq})}+\left.\dfrac{d}{d\varphi}F_\varphi\right|_{\varphi_{eq}}(\varphi-\varphi_{eq})$

$$\rightarrow \quad m\ddot{\varphi} \approx \left[-(k_1+k_2)R + mg\sin(\varphi_{eq})\right](\varphi - \varphi_{eq})$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{(k_1+k_2)R + mg\sin(\varphi_{eq})}{m} \qquad f = \frac{1}{\omega_0}}$$

c) Sabiendo $\varphi(0)=0$ y $\dot{\varphi}(0)=\Omega_0$

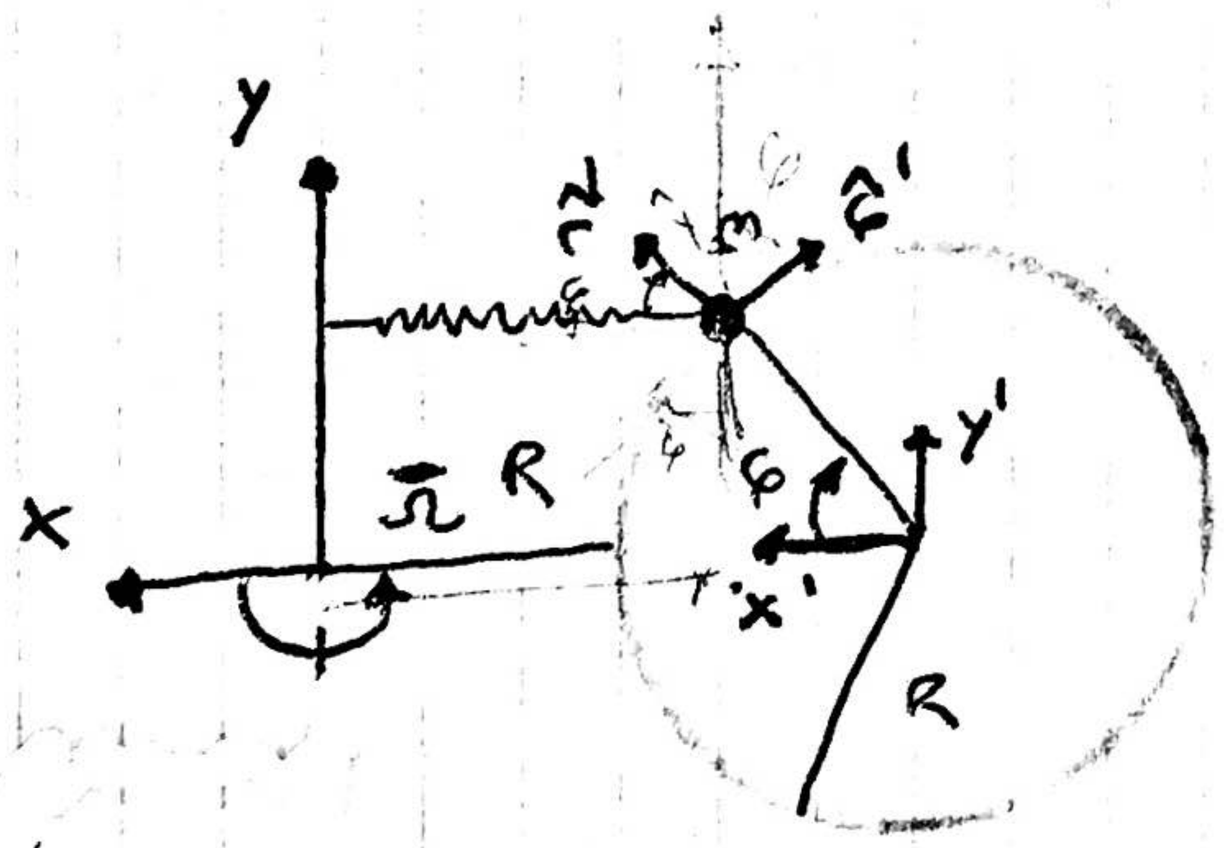
$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\varphi_{eq} \qquad \varphi(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta) + \varphi_{eq}$$

$$\varphi(0)=0 \Leftrightarrow A\sin(\theta)=0 \Rightarrow \theta=0$$

$$\dot{\varphi}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$\dot{\varphi}(0) = \Omega_0 = A\omega_0\cos(0) \Rightarrow A = \frac{\Omega_0}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \frac{\Omega_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \varphi_{eq}}$$



$$\bar{F}_e = -kx\hat{x} = -kx\hat{x}$$

$$x' = R\cos(\varphi') \Rightarrow \bar{F}_e = -kx' + 2kR = kR(2-\cos(\varphi'))\hat{x}$$

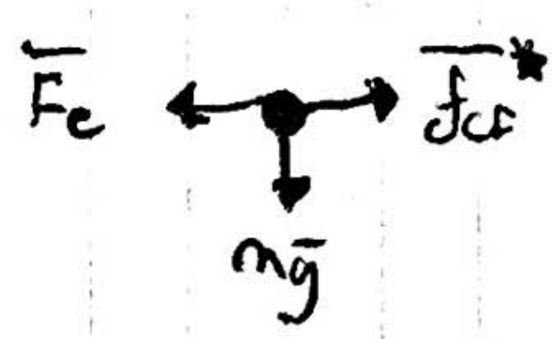
$$x = x' - 2R$$

$$\bar{r}' = R\cos(\varphi')\hat{x}' + R\sin(\varphi')\hat{y}'$$

$$\dot{\bar{r}}' = (\qquad \hat{y}' = (\cos(\varphi')\hat{\varphi}' + \sin(\varphi')\hat{r}'$$

$$\hat{x}' = (\cos(\varphi')\hat{r}' - \sin(\varphi')\hat{\varphi}')$$

a)



b) $m\bar{a}' = m\bar{g} + \bar{F}_e - 2m\bar{\Omega}\times\bar{v}' - m\bar{\omega}\times\bar{\omega}\times\bar{r} - \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}m + \bar{F}_V$

$$m\bar{a}' = -mg\hat{y}' + kR(2-\cos(\varphi'))\hat{x}' - 2m\Omega\hat{y}\times(\dot{r}\hat{r}' + r'\dot{\varphi}'\hat{\varphi}') - m\Omega\hat{y}\times(\Omega\hat{y}\times r\hat{r}') + \bar{F}_V$$

$$m\bar{a}' = -mg\hat{y}' + kR(2-\cos(\varphi'))\hat{x}' - 2m\Omega\hat{y}\times(R\dot{\varphi}'\hat{\varphi}') - m\Omega\hat{y}\times(-\Omega R\cos(\varphi')\hat{z}') + \bar{F}_V$$

$$m\bar{a}' = -mg\hat{y}' + kR(2-\cos(\varphi'))\hat{x}' - 2m\Omega R\dot{\varphi}'\sin(\varphi')\hat{z}' + m\Omega^2R\cos(\varphi')\hat{x}' + \bar{F}_V$$

$$m\bar{a}' = -mg(\cos(\varphi)\hat{\varphi}' + \sin(\varphi')\hat{r}') + kR(2-\cos(\varphi'))(\cos(\varphi')\hat{r}' - \sin(\varphi')\hat{\varphi}') - 2m\Omega R\dot{\varphi}'\sin(\varphi')\hat{z}'$$

$$+ m\Omega^2R\cos(\varphi')(\cos(\varphi')\hat{r}' - \sin(\varphi')\hat{\varphi}') + \bar{F}_V$$

$\hat{r}'$) $m(\ddot{r}' - r'\dot{\varphi}'^2) = -mg\sin(\varphi') + kR(2-\cos(\varphi'))\cos(\varphi') + m\Omega^2 R\cos^2(\varphi') + F_{v_r}$

$\hat{\varphi}'$) $m(2\dot{r}'\dot{\varphi}' + r\ddot{\varphi}') = -mg\cos(\varphi') - kR(2-\cos(\varphi'))\sin(\varphi') - m\Omega^2 R\cos(\varphi')\sin(\varphi')$

$\hat{z}'$) $m\ddot{z}' = 0 = -2m\Omega R\dot{\varphi}'\sin(\varphi') + F_{v_z}$

c) Suponga $\Omega^2 R >> g$. Halle eq y analice estabilidad

$$mR\ddot{\varphi}' = -mg\cos(\varphi') - kR(2-\cos(\varphi'))\sin(\varphi') - m\Omega^2 R\cos(\varphi')\sin(\varphi')$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi}' = -\frac{g}{R}\cos(\varphi') - \frac{k}{m}(2-\cos(\varphi'))\sin(\varphi') - \Omega^2\cos(\varphi')\sin(\varphi')$$

$$=0 \Leftrightarrow -\frac{g}{R}\cos(\varphi') = \left(\frac{k}{m}(2-\cos(\varphi')) + \Omega^2\cos(\varphi')\right)\sin(\varphi')$$

$$\text{ó} \quad \cos(\varphi')\left(-\frac{g}{R} - \Omega^2\sin(\varphi')\right) = \frac{k}{m}(2-\cos(\varphi'))\sin(\varphi')$$

$\Omega^2 R >> g$

$$\Rightarrow -\Omega^2\sin(\varphi')\cos(\varphi') = \frac{k}{m}(2-\cos(\varphi'))\sin(\varphi')$$

$$\Leftrightarrow \sin(\varphi')\left(\underbrace{\frac{2k}{m} - \frac{k}{m}\cos(\varphi')}_{>0} + \Omega^2\cos(\varphi')\right) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi' = 0, \pi$$