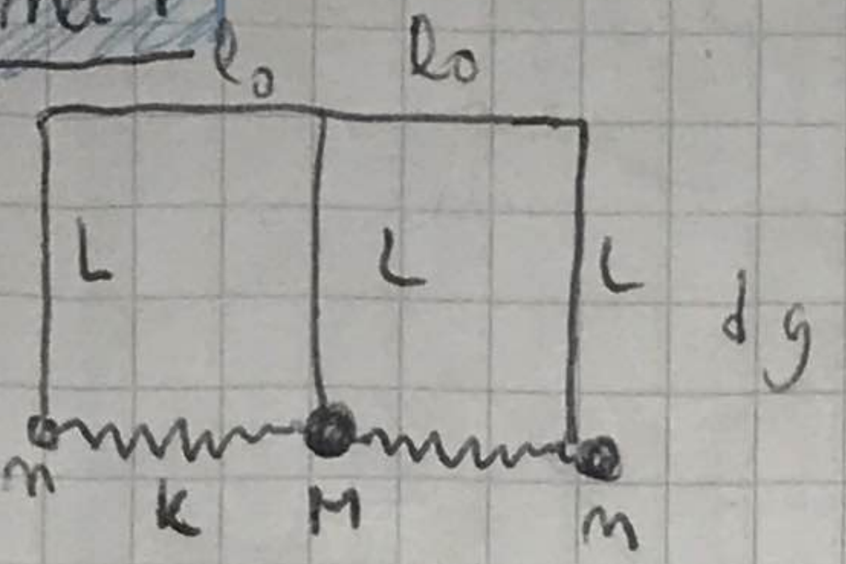
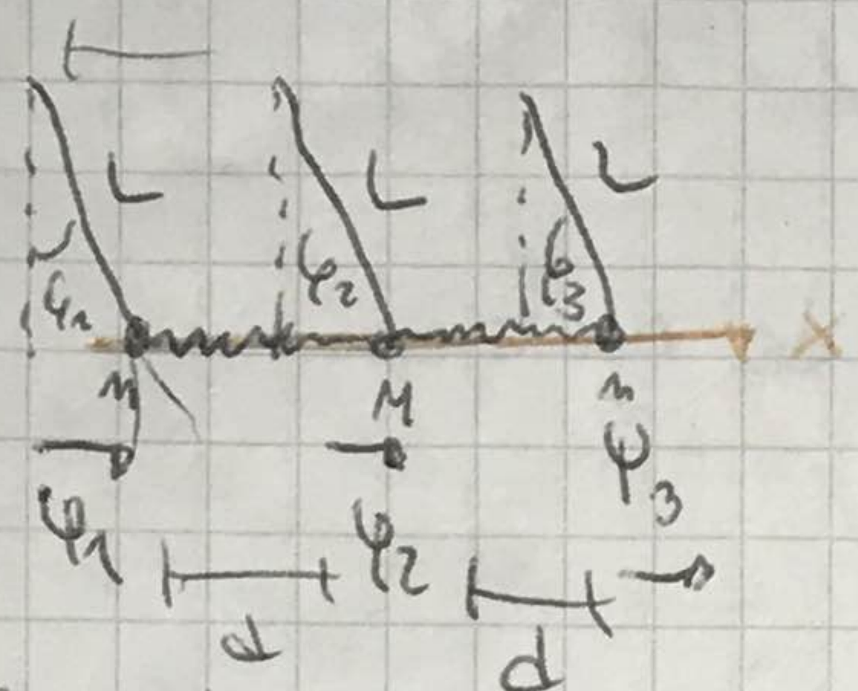
Emiliano Fortes 7

Problema 1



Datos: k, l_0, L, m, M

a) Ec de mov de cada partícula



$\psi = \varphi L$

Aproximación (pequeñas oscilaciones)

$\hat{R} \approx \hat{x}$

$\hat{\varphi}_1 \approx \hat{x}$

$\hat{\varphi}_2 \approx \hat{x}$

$\hat{\varphi}_3 \approx \hat{x}$

Para m 1)

$\hat{x}$)

$\overline{F_e} = k(\underbrace{\cancel{l_0} + \psi_2 - \psi_1 - \cancel{l_0}}_{d})\hat{x}$

$= k(\psi_2 - \psi_1)\hat{x}$

$\Rightarrow m\ddot{\psi}_1 = P_{1x} + k(\psi_2 - \psi_1)$ $\qquad P_{1x} = -mg\sin\varphi_1 \approx -mg\varphi_1 = -\frac{mg}{L}\psi_1$

$\Rightarrow \ddot{\psi}_1 = -g/_L\,\psi_1 + \frac{k}{m}(\psi_2 - \psi_1)$

Para m 2)

$F_{e1} \leftarrow M \rightarrow F_{e2}$ $\qquad P_{2x} = -\frac{Mg}{L}\psi_2$

$\overline{F_{e1}} = -k(\psi_2 - \psi_1)\hat{x}$

$\overline{F_{e2}} = k(\underbrace{\psi_3 - \psi_2 + l_0 - l_0}_{d})$

$\hat{x}$)

$\Rightarrow M\ddot{\psi}_2 = -\frac{Mg}{L}\psi_2 - k(\psi_2 - \psi_1) + k(\psi_3 - \psi_2)$

$\ddot{\psi} = -g/_L\,\psi_2 + \frac{k}{M}(-2\psi_2 + \psi_1 + \psi_3)$

Para m 3)

$$\ddot{\psi}_3 = -g/L\, \psi_3 - k/m\,(\psi_3 - \psi_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ddot{\psi}_1 &= -g/L\, \psi_1 + k/m\,(\psi_2 - \psi_1) \\ \ddot{\psi}_2 &= -g/L\, \psi_2 + k/M\,(-2\psi_2 + \psi_1 + \psi_3) \\ \ddot{\psi}_3 &= -g/L\, \psi_3 - k/m\,(\psi_3 - \psi_2) \end{aligned}}$$

b) Hallar las frec naturales y sus modos normales de oscilación

$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \\ \ddot{\psi}_3 \end{bmatrix} = -\mathbb{M} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = - \begin{pmatrix} g/L + \frac{k}{m} & -k/m & 0 \\ -k/M & \frac{g}{L} + 2k/M & -k/M \\ 0 & -k/m & g/L + k/m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de $\mathbb{M} - \lambda I = \mathbb{M} - \omega^2 I$ son las frecuencias naturales

$$\Rightarrow \mathbb{M} - \lambda I = \begin{pmatrix} g/L + k/m - \lambda & -k/m & 0 \\ -k/M & \frac{g}{L} + 2k/M - \lambda & -k/M \\ 0 & -k/m & g/L + k/m - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (g/L + k/m - \lambda)\left[-k^2/m^2 + (g/L + 2k/M - \lambda)(g/L + k/m - \lambda)\right] - (-k/m) \cdot \left[(-k/m)(g/L + k/m - \lambda)\right] = 0$$

$$\Rightarrow (g/L + k/m - \lambda)\left[\frac{k^2}{m^2} + (g/L + 2k/M - \lambda)(g/L + k/m - \lambda) - \frac{k^2}{m^2}\right]$$

$\lambda = g/L + k/m \qquad \lambda = g/L + 2k/M \qquad \lambda =$

$$\det = \left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m}-\lambda\right)\left[\left(\frac{g}{L}+\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m}-\lambda\right)-\frac{k^2}{Mm}\right]-\left(-\frac{k}{M}\right)\left[\left(-\frac{k}{m}\right)\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m}-\lambda\right)\right]$$

$$=\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m}-\lambda\right)\left[\left(\frac{g}{L}\right)^2+\frac{k}{m}\frac{g}{L}-\lambda\frac{g}{L}+\cancel{\frac{2k^2}{Mm}}+\frac{2k}{M}\frac{g}{L}-\frac{2k}{M}\lambda-\lambda\frac{g}{L}-\frac{k}{m}\lambda+\lambda^2-\cancel{\frac{2k^2}{Mm}}\right]$$

$$\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m}-\lambda\right)\left[\lambda^2+\lambda\left(-\frac{g}{L}-\frac{2k}{M}-\frac{g}{L}-\frac{k}{m}\right)+\frac{k}{m}\frac{g}{L}+\frac{g^2}{L^2}+\frac{2k}{M}\frac{g}{L}\right]$$

$$\underbrace{\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m}-\lambda\right)}_{=0}\left[\underbrace{\lambda^2+\lambda\left(-\frac{2g}{L}-\frac{2k}{M}-\frac{k}{m}\right)+\frac{g}{L}\left(\frac{k}{m}+\frac{g}{L}+\frac{2k}{M}\right)}_{=0}\right]=0$$

$$\lambda=\frac{g}{L}+\frac{k}{m}$$

Resolvente

$$\frac{\frac{2g}{L}+\frac{2k}{M}+\frac{k}{m}\pm\sqrt{\cancel{\frac{4g^2}{L^2}}+\cancel{\frac{4g}{L}\left(\frac{2k}{M}+\frac{k}{m}\right)}+\left(-\frac{2k}{M}-\frac{k}{m}\right)^2-\cancel{4\cdot\frac{g}{L}\left(\frac{k}{m}+\frac{g}{L}+\frac{2k}{M}\right)}}}{2}$$

$$\lambda=\frac{\frac{2g}{L}+\frac{2k}{M}+\frac{k}{m}\pm\left(-\frac{2k}{M}-\frac{k}{m}\right)}{2}$$

$$\lambda_1=\frac{2g}{L}\qquad \lambda_2=\frac{2g}{L}+\frac{4k}{M}+\frac{2k}{m}=\frac{g}{L}+\frac{2k}{M}+\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{g}{L}\qquad \lambda_2=\frac{g}{L}+\frac{k}{m}\qquad \lambda_3=\frac{g}{L}+\frac{2k}{M}+\frac{k}{m}$$

Autovalores. Para $\lambda_1=g/L$

$$\begin{pmatrix}\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0\\ -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M} & -\frac{k}{M}\\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$$

$b=a$

$2b=a+c$ si $a=1$ $\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$b=c$

λ_2

$$\begin{pmatrix} 0 & -k/m & 0 \\ -k/M & \frac{2k}{M}-k/m & -k/M \\ 0 & -k/m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$b=0$

$a=-c$ si $a=1$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{M} & -k/m & 0 \\ -k/M & -k/m & -k/M \\ 0 & -k/m & -2k/M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$-\frac{2a}{M} - \frac{b}{m} = 0$

$-\frac{a}{M} - \frac{b}{m} - \frac{c}{M} = 0$

$-\frac{b}{m} - \frac{2c}{M} = 0$

si $a=1$

$b = -\frac{2m}{M}$

$-\frac{1}{M} + \frac{2}{M} - \frac{c}{M} = 0$

$c=1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Sean η_1, η_2, η_3 modos normales

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\eta}_1 &= \vec{A}_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vec{\eta}_2 &= \vec{A}_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vec{\eta}_3 &= \vec{A}_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{aligned}}$$

frecuencias naturales

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \lambda_1 = g/l \\ \omega_2^2 &= \lambda_2 = g/l + k/m \\ \omega_3^2 &= \lambda_3 = g/l + \frac{2k}{M} + k/m \end{aligned}}$$

$\cancel{\eta_1 = A_1 \cos\left(\sqrt{g/l}\right.}$

c) Describir el significado físico de cada modo

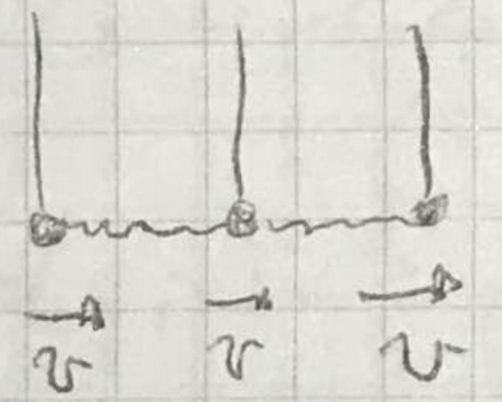
$\varphi_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$

$\varphi_2 = \eta_1 - \frac{2m}{M}\eta_3$

$\varphi_3 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3$

En el modo 1

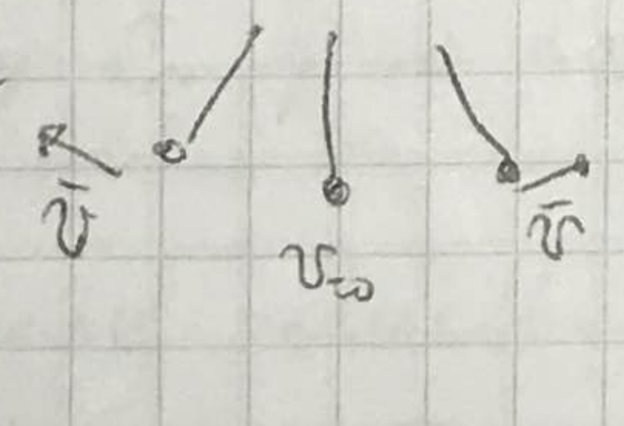
η_1 todas las partes móviles se mueven en fase con la misma frecuencia,



por lo que ~~es como~~ equivale a que los resortes no estuvieran, se mueven como péndulos desacoplados separados pero a igual frecuencia y pasan por el eq en igual t

En el modo 2

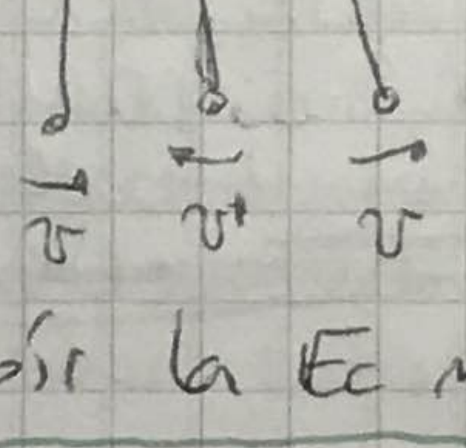
η_2



la parte móvil 2 esta quieta, lo que equivale a decir que el CM también lo esta, la parte móvil 1 y 3 se mueven en contrafase con igual frec.

En el modo 3

η_3



La parte 1 y 3 se mueven juntas en fase y en contrafase con la parte móvil 2. La fuerza restitutiva en este modo es máxima.

d) Escribir la Ec más general del mov de cada partícula

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1 &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3\cos(\omega_3 t + \phi_3) \\ \varphi_2 &= \eta_1 - \frac{2m}{M}\eta_3 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{2m}{M}A_3\cos(\omega_3 t + \phi_3) \\ \varphi_3 &= \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3\cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{aligned}}$$

e) Establecer las cond. iniciales para que solo actúe el modo más bajo

$\Rightarrow$

$$\psi_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \qquad \psi_2 = \eta_1 - \frac{2m}{M}\eta_3 \qquad \psi_3 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3$$

$$\psi_1 - \psi_3 = 2\eta_2 \qquad \eta_2 = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}$$

$$\psi_1 = \eta_1 + \frac{\psi_1}{2} - \frac{\psi_3}{2} + \eta_3$$

$$\frac{\psi_1}{2} + \frac{\psi_3}{2} = \eta_1 + \eta_3 \qquad \psi_2 = \eta_1 - \frac{2m}{M}\eta_3$$

restando

$$\frac{\psi_1}{2} + \frac{\psi_3}{2} - \psi_2 = \eta_3\left(1 + \frac{2m}{M}\right)$$

$$\eta_3 = \left(\frac{M}{M+2m}\right)\left(\frac{\psi_1}{2} + \frac{\psi_3}{2} - \psi_2\right)$$

$$\eta_1 = \psi_2 + \frac{2m}{M+2m}\left(\frac{\psi_1}{2} + \frac{\psi_3}{2} - \psi_2\right)$$

$$\eta_2 = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}$$

Si solo modo 1 $\Rightarrow \eta_2$ y $\eta_3 = 0$

$$\eta_3 = 0 = \frac{\psi_1}{2} + \frac{\psi_3}{2} - \psi_2 \qquad \eta_2 = 0 \quad \psi_1 = \psi_3$$

$$\psi_1 - \psi_2 = 0$$

$$\psi_1 = \psi_2$$

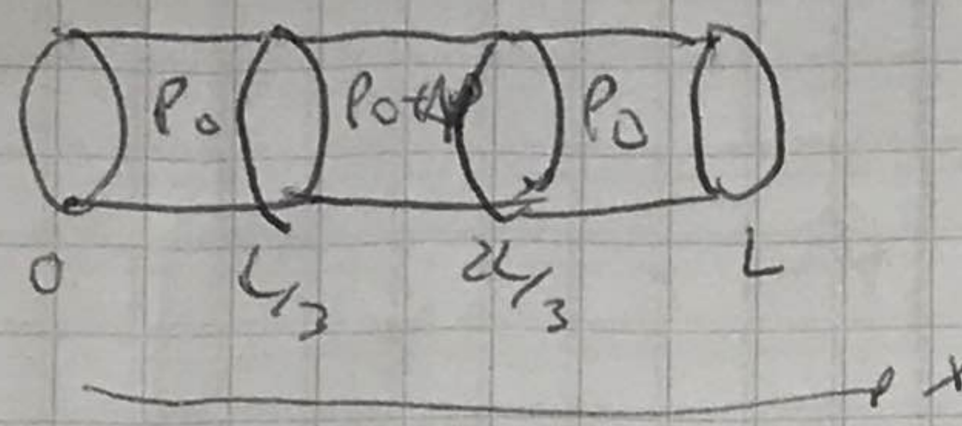
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{c.i) } \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 \text{ también se puede con las velocidades}}$

Cond. iniciales son los ψ y también las velocidades $\dot{\psi}$.

~~Los modos están de más se podían deducir con los autovectores~~

Problema 2

extremos abiertos



$$P(x,0)=\begin{cases} P_0 & \text{si } 0<x<L/3 \\ P_0+\Delta_P & \text{si } L/3<x<\frac{2L}{3} \\ P_0 & \text{si } 2L/3<x<L \end{cases} \qquad \delta P(x,0)=\begin{cases} 0 & 0<x<L/3 \\ \Delta P & L/3<x<2L/3 \\ 0 & 2L/3<x<L \end{cases}$$

a) Escribir la expresión $\Psi_p(x,t)$ y $\delta P_p(x,t)$ para cada modo. Explicar los parametros.

$\Rightarrow$ Sea $\Psi_p(x,t)=A^{(p)}\sin(k^{(p)}x+\varphi^{(p)})\cos(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)})$ para un modo p

$$\Rightarrow \underset{\text{TODOS}}{\Psi}(x,t)=\sum_p A^{(p)}\sin(kx+\varphi)\cos(\omega t+\phi)$$

$$\delta P(x,t)=-c^2\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \delta P(x,t)=\sum_p -c^2\rho_0 kA\cos(kx+\varphi)\cos(\omega t+\phi)$$

A y ϕ dependen de las condiciones iniciales mientras que k y φ y ω dependen de las condiciones de contorno

Mediante relación de dispersión en un gas

$$\omega=C_s k \qquad C_s=\frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$

b) numero de onda ¿Menor longitud de onda?

Aplico condiciones de contorno

Como ambos extremos estan abiertos

$$P(x=0,t)=P(x=L,t)=P_0$$

$P(x,t) = P_0 + \delta P(x,t)$

$\Rightarrow \ \delta P(0,t) = \delta P(L,t) = 0$

$-c^2\rho_0 \frac{\delta \varphi}{\partial x}(0,t) = -c^2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L,t) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L,t) = 0$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,t) = Ak\cos(\varphi)\cos(\omega t + \phi)$

Como vale para todo t

$\cos(\varphi) = 0$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(L,t) = Ak\cos(kL + \varphi)\cos(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow \cos(kL + \varphi) = 0$

$\cos(\varphi) = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow kL + \cancel{\frac{\pi}{2}} + n\pi = \cancel{\frac{\pi}{2}} + n'\pi \quad n' \in \mathbb{Z}$

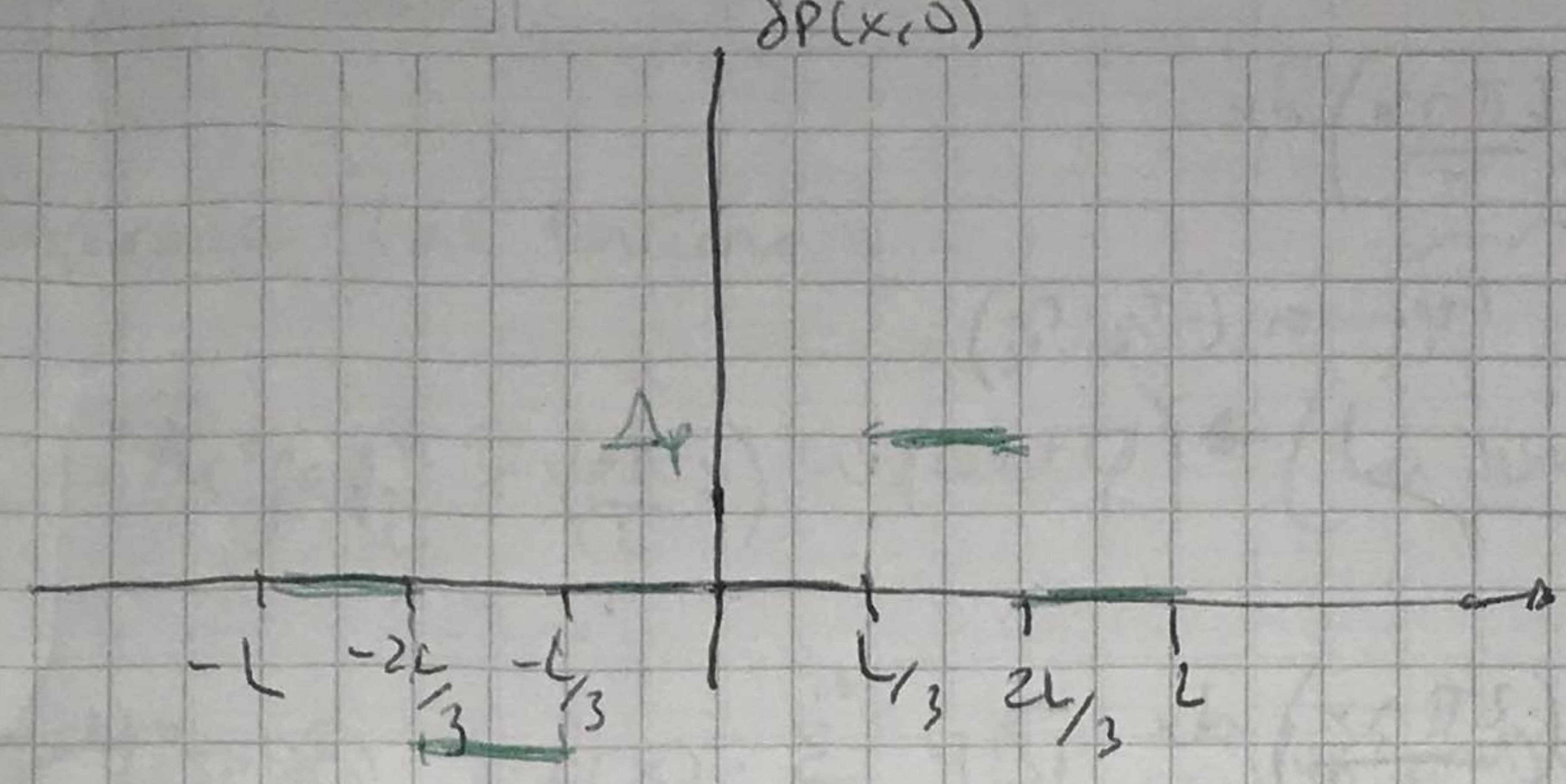
$k = \frac{\overbrace{(n'-n)}^{= p \in \mathbb{Z}}\pi}{L}$

$k = \frac{p\pi}{L}$

λ long de onda $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\cancel{\pi}}{\frac{p\cancel{\pi}}{L}} = \frac{2L}{p}$

El menor entonces es **2L**, (λ fundamental)

c) Graficar $\delta P(x,0)$ = Hallar la solución $\Phi(x,t)$ y $P(x,t)$



Extension impar

$$\partial p(x,t) = \sum_{p=1} -c^2 \rho_0\, k\, A\cos(kx + \varphi_0)\cos(\omega t + \phi)$$

$$= \sum_{p=1} A\, c^2 \rho_0 \frac{p\pi}{L} \cos\left(\frac{p\pi}{L}x + \frac{\pi}{2} + n\pi\right)\cos(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+2n}{2}\right)$$

$$= \sum_{p=1} -A\, c^2 \rho_0 \frac{p\pi}{L}\left[\cos\left(\frac{p\pi x}{L}\right)\underbrace{\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right)}_{=0} - \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\overbrace{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\right)}^{\pm 1}\right]\cos(\omega t + \phi)$$

$\bar{A} = \pm A$

$$= \sum_{p=1} \bar{A}\, c^2 \rho_0 \frac{p\pi}{L} \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\cos(\omega t + \phi)$$

$\Rightarrow$ Fourier $f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \qquad A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cdot\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

Como ∂p presenta sinos, queremos que el termino A_n se nos anule.

Como $\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$ es par respecto a $-T/2, T/2$

Extendemos la función $\partial p(x,0)$ a una función impar para que la integral $f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$ se anule

Luego $A_n = 0$ y A_0 tambien

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x)}_{\text{impar en } -T/2,\, T/2} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)}_{\text{impar en } (-T/2,\, T/2)} dx$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} \overbrace{f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)}^{\text{par}} dx$$

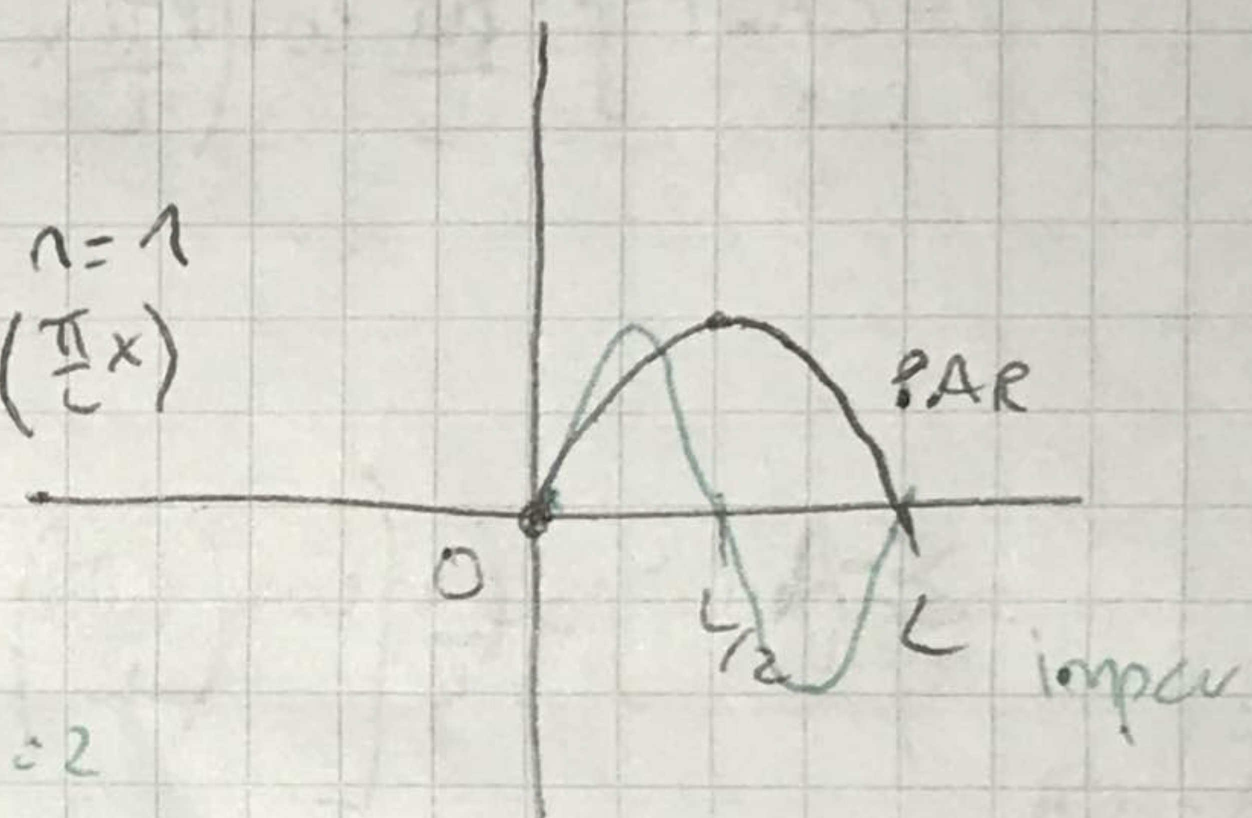
reemplazo $T = 2L$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx$$

$f(x)$ es par respecto $(0, L)$

Veamos $\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$

si $n=1$
$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$



si $n=2$
$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

$\Rightarrow$ los terminos con n par se anulan

$$\therefore\ B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx \quad \text{si } n = \text{impar}$$

$$B_n = 0 \quad \text{si } n = \text{par}$$

Para los impares vale entonces

$$B_n = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{4}{L}\int_{L/3}^{L/2} \Delta p \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{4}{L}\frac{\Delta p L}{\pi n}\left(-\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right)\Bigg|_{L/3}^{L/2}$$

$$B_n = \frac{4}{\cancel{L}}\Delta p\frac{\cancel{L}}{\pi n}\left(-\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right)\Bigg|_{L/3}^{L/2} = \frac{4\Delta p}{\pi n}\left[-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)^{=0} + \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right]$$

errata
error de cuentas

$$B_n = \frac{4\Delta p}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \quad \text{si } n \text{ impar}$$

⇒ Comparemos las funciones

$$\partial p(x,t) = \bar{A} c^2 \rho_0 \frac{p\pi}{L}\sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\cos(\omega t+\phi)$$ ← (La sumatoria, me olvide de ponerla)

$$\cancel{f(x)=\ldots} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Delta p}{\pi(2n-1)}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{3}\right) \cancel{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$$

Algunos términos

$$\partial p(x,0) = \bar{A}_1 c^2 \rho_0 \frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \bar{A}_2 c^2 \rho_0 \frac{2\pi}{L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \bar{A}_3 c^2 \rho_0 \frac{3\pi}{L}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\ldots$$

$$f(x) = \frac{4\Delta p}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{4\Delta p}{3\pi}\cos(\pi)\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\ldots$$

Luego $\bar{A}_1 = \frac{4\Delta p}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{L}{c^2\rho_0\pi}$

$\bar{A}_2 = 0$

Finalmente

$$\cancel{\partial p(x,t) =} \quad \cancel{p(x,t) = \ldots}$$

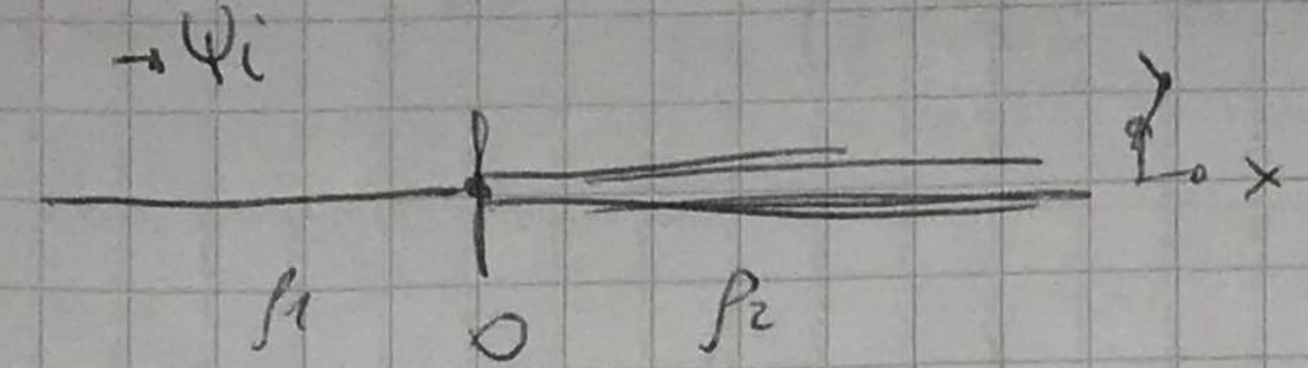
$$\boxed{p(x,t) = p_0 + \sum_{p=1} \underbrace{\frac{4\Delta p\, L}{\pi^2 c^2 \rho_0}\cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right)\cdot\frac{1}{(2p-1)^2}}_{\bar{A}^{(p)}}\, c^2 \rho_0 \frac{(2p-1)\pi}{L}\sin\left(\frac{(2p-1)\pi x}{L}\right)\cos(\omega t+\phi)}$$

$$p(x,t) = p_0 + \sum_{p=1} \bar{A}^{(p)} c^2 \rho_0 \frac{(2p-1)\pi}{L}\sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{L}x\right)\cos(\omega t+\phi)$$

$\Phi(x,t)$ = integrar $\quad \cancel{\partial p(x,t)} \; \frac{\int \partial p\, dx}{-\rho_0 c^2} = \Psi(x,t)$

$$\boxed{\Phi(x,t) = \sum_{p=1} + \bar{A}^{(p)}\cos\left(\frac{(2p-1)\pi}{L}x\right)\cos(\omega t+\phi)}$$

Problema 3 Datos ρ_1, ρ_2, T_0



$$\psi_{i1}(x,t) = A_{i1} e^{i[k_1 x - \omega t]} \qquad \psi_{i2}(x,t) = A_{i2} e^{i(-k_2 x - \omega t)]}$$

a) Hallar $\psi(x,t)$ para el sistema de las dos cuerdas

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \begin{cases} \psi_{i1} + \psi_{r+t} & x<0 \leftarrow \psi_1 \\ \psi_{r+t'} \quad \psi_{i2} & x>0 \leftarrow \psi_2 \end{cases}$$

$$\psi(x,t) = \begin{cases} A_{i1} e^{i(k_1 x - \omega t)} + A_{r+t} e^{i(-k_1 x - \omega t)} & x<0 \\ A_{r+t'} e^{i(k_2 x - \omega t)} + A_{i2} e^{i(-k_2 x - \omega t)} & x>0 \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_1}}\, k_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_2}}\, k_2$$

Condiciones $\psi_1(0,t) = \psi_2(0,t)$ 1)

$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(0,t)$ 2)

de 1) $A_{i1} \cancel{e^{-i\omega t}} + A_{r+t} \cancel{e^{-i\omega t}} = A_{r+t'} \cancel{e^{-i\omega t}} + A_{i2} \cancel{e^{-i\omega t}}$

$$A_{i1} + A_{r+t} = A_{r+t'} + A_{i2}$$

de 2) $ik_1 A_{i1} \cancel{e^{-i\omega t}} - ik_1 A_{r+t} \cancel{e^{-i\omega t}} = ik_2 A_{r+t'} \cancel{e^{-i\omega t}} - ik_2 A_{i2} \cancel{e^{-i\omega t}}$

$$k_1 (A_{i1} - A_{r+t}) = k_2 (A_{r+t'} - A_{i2})$$

$$A_{i1} - A_{r+t} = \frac{k_2}{k_1}(A_{r+t'} - A_{i2})$$

$\Rightarrow$ 1) $A_{i1} + A_{rt}t = A_{r'}t' + A_{i2}$

2) $A_{i1} - A_{rt}t = \frac{k_2}{k_1}(A_{r'}t' - A_{i2})$

Sumo ec

$$2A_{i1} = A_{r'}t'\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) + A_{i2}\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$2A_{i1} - A_{i2}\left(\frac{k_1-k_2}{k_1}\right) = A_{r'}t'\left(\frac{k_1+k_2}{k_1}\right)$$

$$A_{r'}t' = 2A_{i1}\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right) - A_{i2}\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right) = \frac{2A_{i1}k_1 - A_{i2}(k_1-k_2)}{k_1+k_2}$$

$$A_{rt}t = -A_{i1} + A_{r'}t' + A_{i2}$$

$$A_{rt}t = -A_{i1} + A_{i2} + \frac{2A_{i1}(k_1) - A_{i2}(k_1-k_2)}{(k_1+k_2)}$$

$$A_{rt}t = \frac{\cancel{A_{i1}(k_1 + k_2)}\ A_{i1}(k_1-k_2) + 2A_{i2}k_2}{k_1+k_2}$$

$$\boxed{\text{Luego } \Psi(x,t) = \begin{cases} A_{i1}e^{i(k_1x-\omega t)} + \frac{A_{i1}(k_1-k_2)+2A_{i2}k_2}{k_1+k_2}e^{i(-k_1x-\omega t)} & x<0 \\ \frac{2A_{i1}k_1 - A_{i2}(k_1-k_2)}{k_1+k_2}e^{i(k_2x-\omega t)} + A_{i2}e^{i(-k_2x-\omega t)} & x>0 \end{cases}}$$

~~b) Relación de A_{i1} y A_{i2} / $\Psi(0,t)$ sea un nodo~~

~~$\Psi(0,t)=0$~~

~~$A_{i1}e^{-i\omega t}$ $A_{i2}e^{-i\omega t}$~~

~~b) Relación de A_{i1} y A_{i2} para que en su intersección haya un nodo~~

~~$A_{i1}e^{i(k_1x)} = A_{2i}e^{-ik_2x}$~~

NO CORRESP

~~$A_{i1} = (a+bi)$ $A_{2i} = (c+di)$~~

~~$\Rightarrow (a+bi)\cos(k_1x) = (c+di)\sin(k_2x)$~~

FECHA

HOJA N.

NOTA

b) Hallar la relación entre A_{1i} y A_{2i} para que en su intersección haya un nodo

Sea x la intersección

~~$\psi_{i1}(x,t) = \psi_{i2}(x,t)$ en ese momento~~

$0 = \psi_{i1}(x,t) + \psi_{i2}(x,t)$ en ese momento

$\Rightarrow A_{i1} e^{ik_1 x - \cancel{i\omega t}} = -A_{i2} e^{-ik_2 x - \cancel{i\omega t}}$

X

$A_{i1} = (a+bi) \quad A_{i2} = (c+di)$

$\Rightarrow (a+bi)(\cos(k_1x) + i\sin(k_1x)) = -(c+di)(i\cos(k_2x) + \sin(k_2x))$

$(a+bi)\cos(k_1x) + (a+bi)i\sin(k_1x) = -(c+di)(i\cos(k_2x)) + (c+di)(\sin(k_2x))$

~~$a\cos(k_1x) - b\sin(k_1x)$~~

$a\cos(k_1x) + bi\cos(k_1x) + ai\sin(k_1x) - b\sin(k_1x) = -ci\cos(k_2x) + d\cos(k_2x) - c\sin(k_2x) - di\sin(k_2x)$

$\Rightarrow$ igualando parte real, imag

$$\boxed{\begin{aligned} &a\cos(k_1x) - b\sin(k_1x) = d\cos(k_2x) - c\sin(k_2x) \\ &b\cancel{i}\cos(k_1x) + a\cancel{i}\sin(k_1x) = -c\cancel{i}\cos(k_2x) - d\cancel{i}\sin(k_2x) \end{aligned}}$$

[redacted]

~~$\Rightarrow$ la parte real debe ser la misma~~

La condición de nodo es: $\psi(x=0, t) = 0$

$\Rightarrow$ podés resolver $\quad \psi_1(x=0,t) = 0 \Rightarrow A_{i1} + A_{r+t} = 0$

o

$\psi_2(x=0,t) = 0 \Rightarrow A_{i2} + A_{r't'} = 0$

Problema 4. V o F Justifique F

a) Falso. ~~Van~~ a tener igual cantidad de modos. (Contando el modo de traslación en extremos libres) que serían todas las partes móviles con igual velocidad)

B

b) ~~Verdadero. Aunque en el caso d libres también habrá un término~~

X Falso. Al estar en extremos libres el modo de traslación, va a haber un término en el cual no habra una función armonica sino una función temporal lineal de forma que describe la traslación.

c) ~~Falso. Si la frecuencia es la misma el modo es el mismo~~

Verdadero X

e) Falso. Es verdadero si la frecuencia de la fuerza impulsora esta entre el rango de frecuencias para el cual el sistema se comporta de manera dispersiva y no reactiva. X

d) Falso. Solo si la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia de un modo propio B

~~f) Falso. Solamente si la frecuencia~~

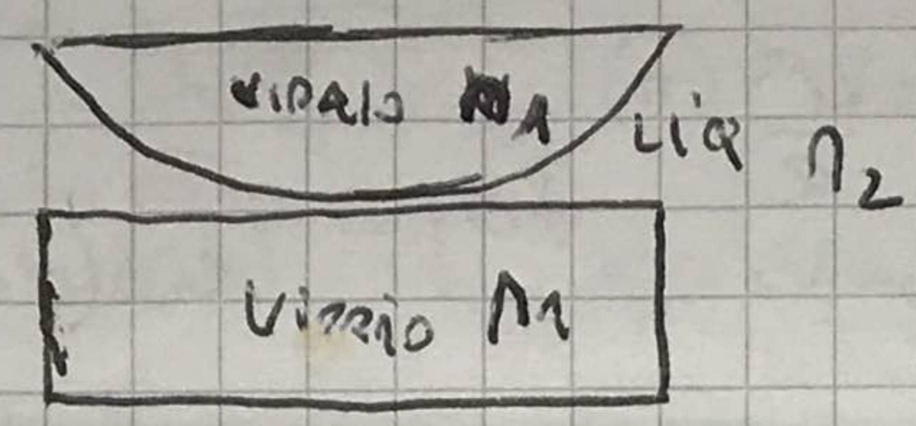
f) Verdadero B

3

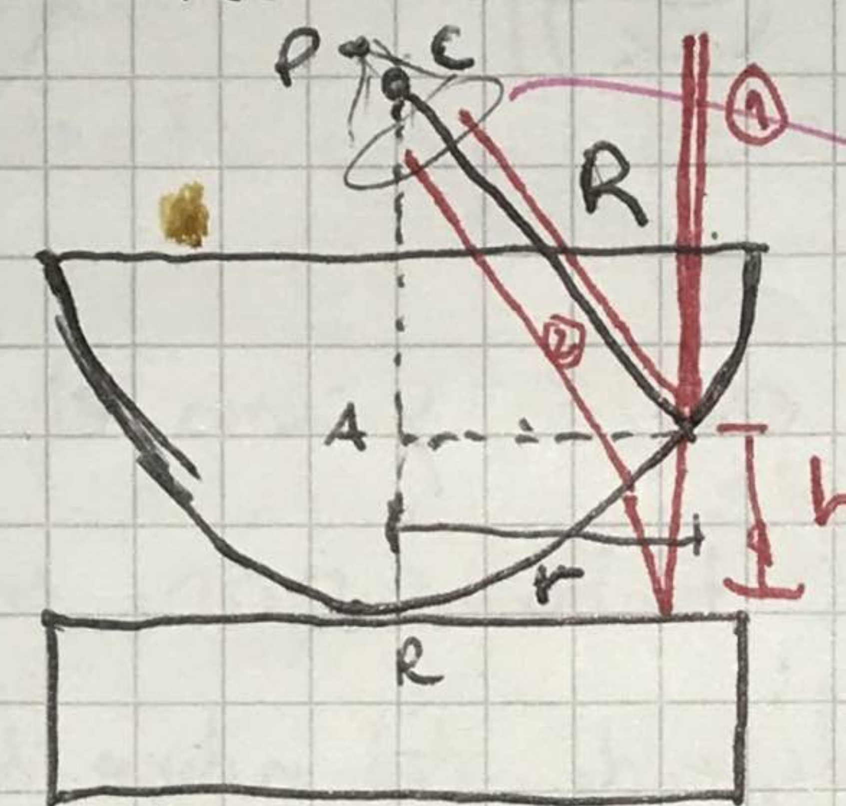
Emiliano Fortes

I

Problema 1



a) Esquematizar la situación de interf constructiva para este caso



Buscamos interferencia por transmisión

b) Describir el patron de interferencia. Decir si el centro es brillante u oscuro y si el resultado depende o no del indice de refracción del liquido

$\Delta = 2hn_2$ (casi no varia h en la ida y vuelta del rayo 2)

$h = R - A$ $\qquad A^2 + r^2 = R^2$

$A = \sqrt{R^2 - r^2}$

$\Rightarrow h = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} = R\left(1 - \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{1/2}\right)$

Sea $\varepsilon = \frac{r}{R}$, aproximo $(1-\varepsilon^2)^{1/2}$ con Taylor

$\Rightarrow f(\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)^{1/2} \qquad f'(\varepsilon) = \frac{-\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \qquad f''(\varepsilon) = \frac{-1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \varepsilon \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{-2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$

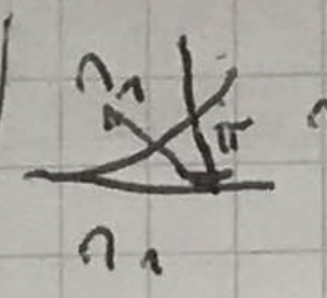
$P(\varepsilon) = f(0) + f'(0)(\varepsilon - 0) + \frac{f''(0)(\varepsilon-0)^2}{2}$

$= 1 - \varepsilon^2$

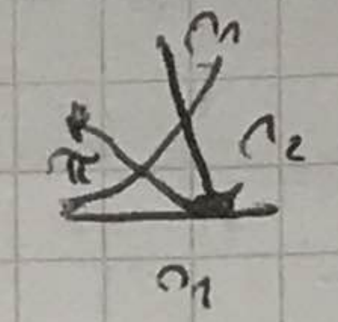
$\Rightarrow \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2$

$\Rightarrow h = R\left(1 - \left(1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2\right)\right) = \frac{r^2}{2R}$

$\delta_{co} = k\,\Delta_{n_2} + \pi$ producto del desfasaje de el paso de un medio con índice mayor a menor



si $n_1 > n_2$ $\Rightarrow$



si $n_1 < n_2$

$\Rightarrow \delta_{co} = n_2 k \cdot 2h + \pi = k \cdot \frac{\cancel{2} r^2}{2R} + \pi = \frac{kr^2}{R} + \pi$ por que? hay 2 reflexiones

asumiendo ambos rayos incidentes iguales

$\cos(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} - \sin(\alpha)\underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1}$

$I_p = 4I_0 \cos^2(\delta/2)$

$= 4I_0 \cos^2\left(\frac{n_2 k r^2}{2R} + \frac{\pi}{2}\right) = 4I_0\left(-\sin\left(\frac{kr^2 n_2}{2R}\right)\right)^2 = 4I_0 \sin^2\left(\frac{kr^2 n_2}{2R}\right)$

si es el centro $r = 0$

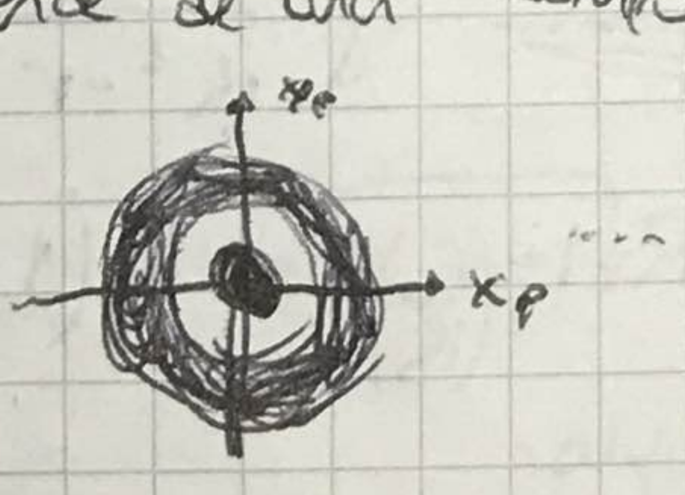
$\Rightarrow 4I_0 \sin^2(0) = 0$ $\therefore$ el centro es oscuro, y como el desfasaje de π en la δ_{co} ocurre tanto si $n_1 > n_2$ como $n_1 < n_2$ entonces no depende del índice del líquido

mín. $I(r) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{kr^2 n_2}{2R}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{kr^2}{2R} = m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \quad r^2 = \frac{m\cancel{\pi} \cdot 2R}{\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}} \quad r^2 = \frac{mR\lambda}{n_2}$

máx $I(r) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{kr^2 n_2}{2R}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{kr^2}{2R} = \frac{\pi}{2} + p\pi = \frac{\pi}{\cancel{2}}(2p+1) \quad p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow r^2 = \frac{\cancel{\pi}(2p+1)R}{\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}} \quad r^2 = \frac{(2p+1)R\lambda}{2n_2}$

Como la I depende de una componente radial se pueden observar los denominados anillos



c) Si se ilumina con luz de 589nm el radio del tercer anillo brillante es 3.65mm. Calcular el índice de refracción del líq

Tercer anillo brillante $\Rightarrow p = 3 \quad \therefore \quad r^2 = \frac{7R\lambda}{2n_2} \quad \Rightarrow (3{,}65\text{mm})^2 = \frac{7}{2}\frac{(10\text{m}) \cdot 589\text{nm}}{n_2}$

$n_2 = \frac{7}{2}\frac{(10\text{m}) \cdot 589\text{nm}}{(3{,}65\text{mm})^2} = \frac{7}{2}\frac{(10\cancel{m}) \cdot 589 \cdot 10^{-9}\cancel{m}}{(3{,}65 \cdot 10^{-3}\cancel{m})^2} \approx 0{,}442$ $\rightarrow$ no puede ser (s

el índice de refracción del aire es 1,003

Problema 2

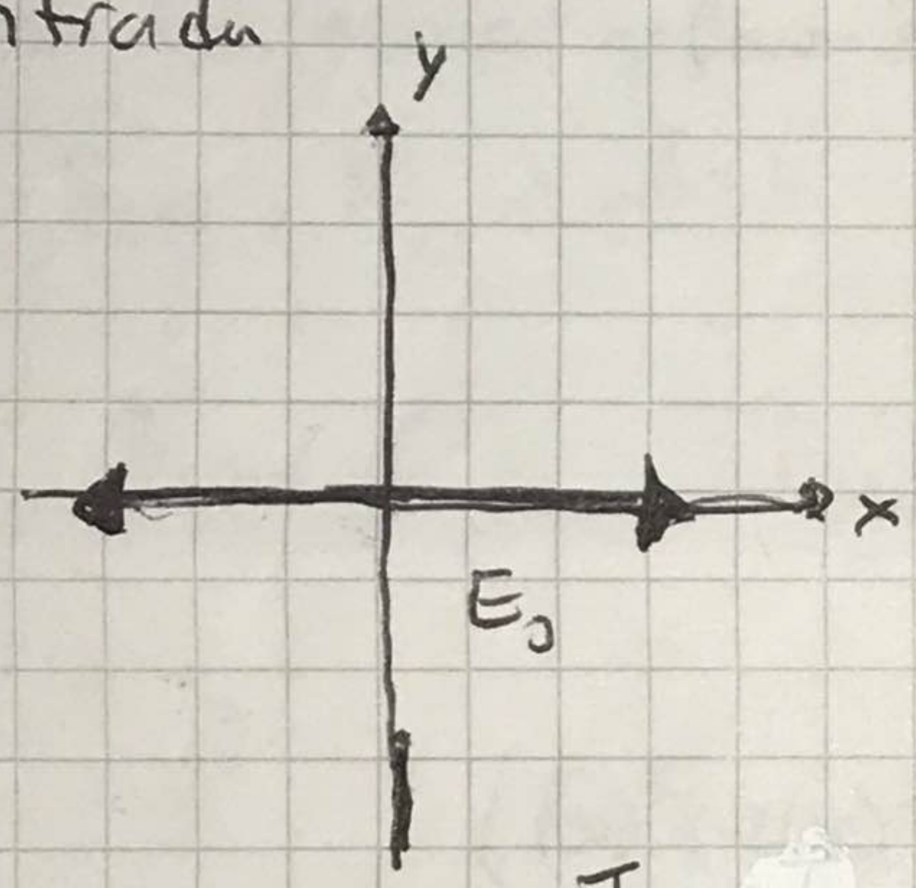
$$E_{inc} = E_0 \hat{x} e^{i(kz-\omega t)}$$

Quiero un disp que rote el campo electrico en $\alpha \in (0, \pi)$ / $I_F = I_0$

Tengo una lámina de $\lambda/2$ y un polaroid

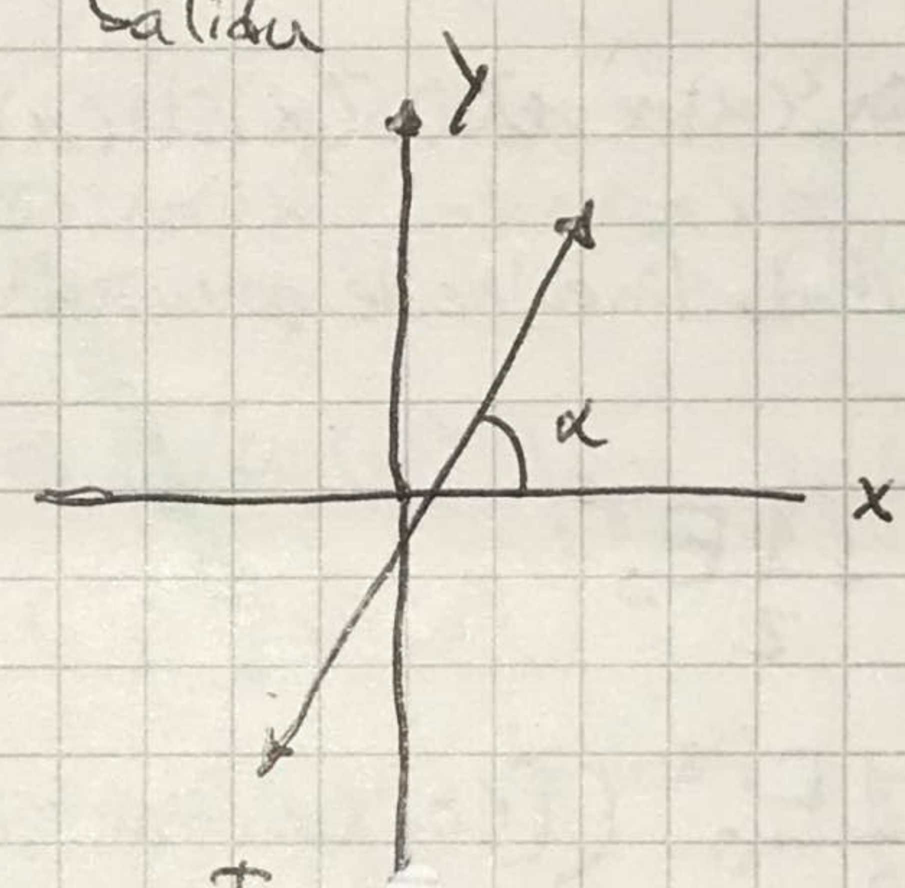
a) Escribir la expresión para el campo eléctrico a la entrada y salida de cada uno de los elementos que utilice en la base x, y. Mostrar explicitamente que $I_0 = I_F$

Entrada



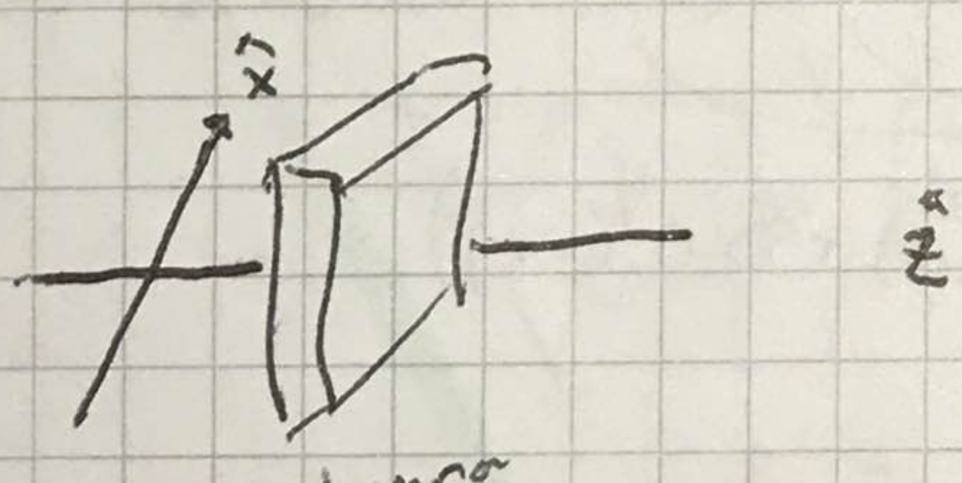
I_0

Salida

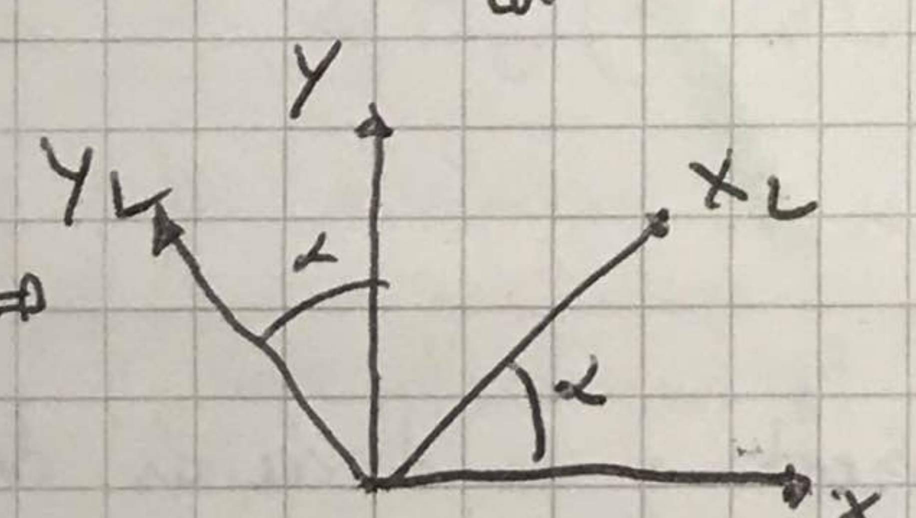


$I_F =$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \hat{x} = \cos(\alpha)\hat{x}_L - \sin(\alpha)\hat{y}_L$$

$$\hat{y} = \sin(\alpha)\hat{x}_L + \cos(\alpha)\hat{y}_L$$

$$\Rightarrow E_{inc} = E_0 \hat{x} e^{i(kz-\omega t)} = E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L - \sin(\alpha)\hat{y}_L) e^{i(kz-\omega t)}$$

Paso por la lamina:

$$E_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix} E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_F = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} E_0 e^{i(kz-\omega t)} = E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L + \sin(\alpha)\hat{y}_L) e^{i(kz-\omega t)}$$

como $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_L \\ \hat{y}_L \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{x}_L \\ \hat{y}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Luego $E_F = E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L + \sin(\alpha)\hat{y}_L) e^{i(kz-\omega t)}$

$$= E_0 \left[\cos(\alpha)(\cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\alpha)\hat{y}) + \sin(\alpha)(-\sin(\alpha)\hat{x} + \cos(\alpha)\hat{y})\right] e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= E_0 \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\hat{x} + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\hat{y}\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

que sigue siendo linealmente polarizada

$$I_0 = \frac{1}{2} E_{inc}^* E_{inc} = \frac{1}{2} E_0^2$$

$$I_F = \frac{1}{2} E_{SAL}^* E_{SAL} = \frac{1}{2} E_0^2 \left([\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)]^2 + 4\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 \left(\cos^4(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin^4(\alpha) + 4\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 \left(\cos^4(\alpha) + 2\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) + \sin^4(\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 \left(\underbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}_{=1} \right) = \frac{1}{2} E_0^2$$

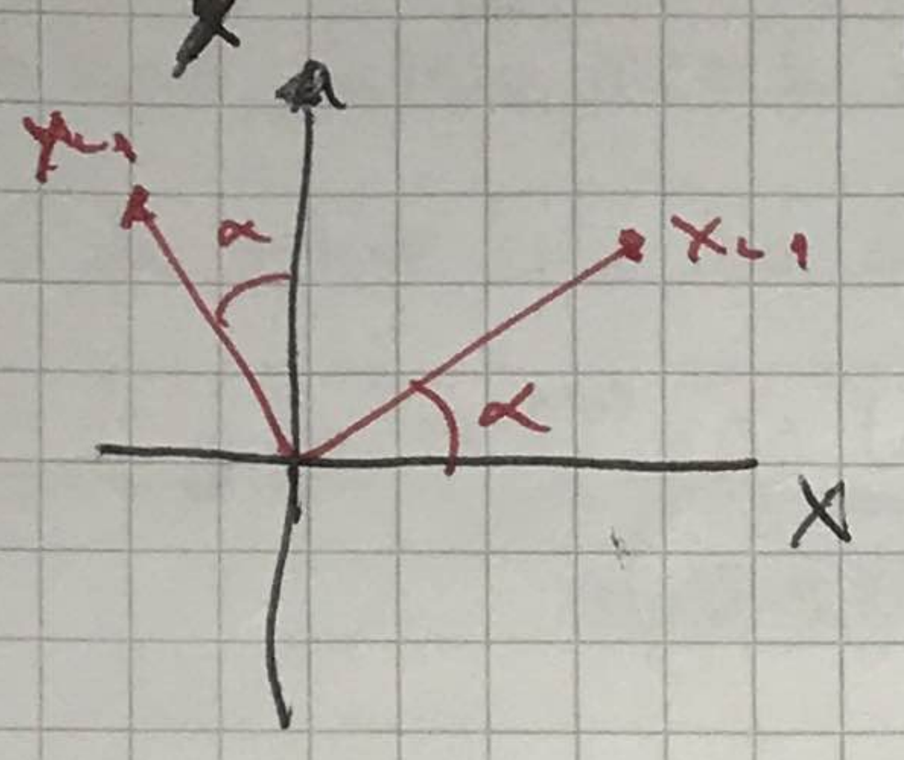
$$\therefore I_0 = I_F$$

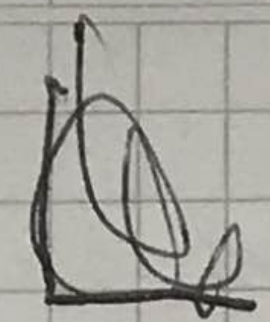
1 b) Calcular el ángulo entre los ejes propios de cada elemento y la dirección del campo incidente. Particularice $\alpha_1 = 90°$ $\alpha_2 = 160°$ *

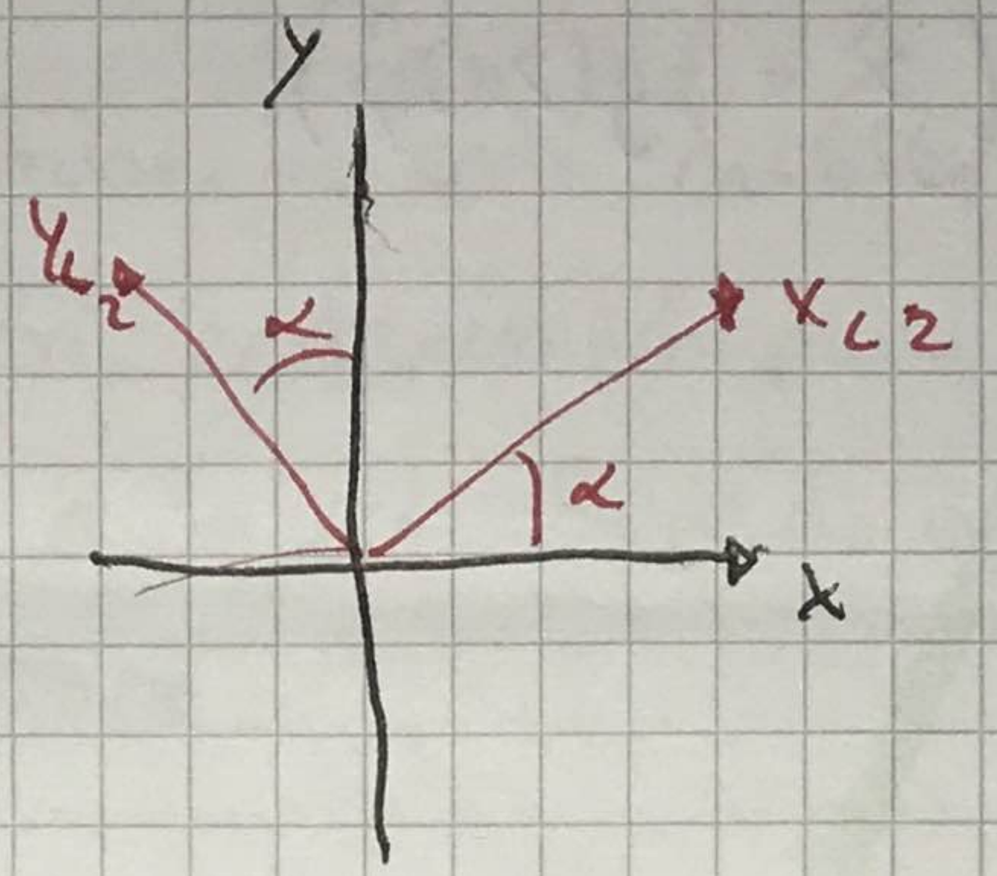
c) En lugar de una lámina de onda media recibo varias de cuarto de onda. ¿Se puede cumplir el mismo objetivo? ¿Como? Justificar

Si se puede, ya que dos laminas de cuarto de onda cuyos ejes coinciden forman una lamina de media onda ejemplo

*







$\Rightarrow$ $x_{L1} = x_{L2}$, $y_{L1} = y_{L2}$

Con la misma onda de antes

$$E_{inc} = E_0 \hat{x} e^{i(kz-\omega t)} = E_0(\cos(\alpha)\hat{x}_{L_1} - \sin(\alpha)\hat{y}_{L_1})e^{i(kz-\omega t)}$$

Primer lámina $E_{SAL_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix} E_0\, e^{i(kz-\omega t)}$

$$= E_0(\cos(\alpha)\hat{x}_{L_1} - i\sin(\alpha)\hat{y}_{L_1})e^{i(kz-\omega t)} = E_0(\cos(\alpha)\hat{x}_{L_2} - \sin(\alpha)\hat{y}_{L_2})\, e^{i(kz-\omega t)}$$

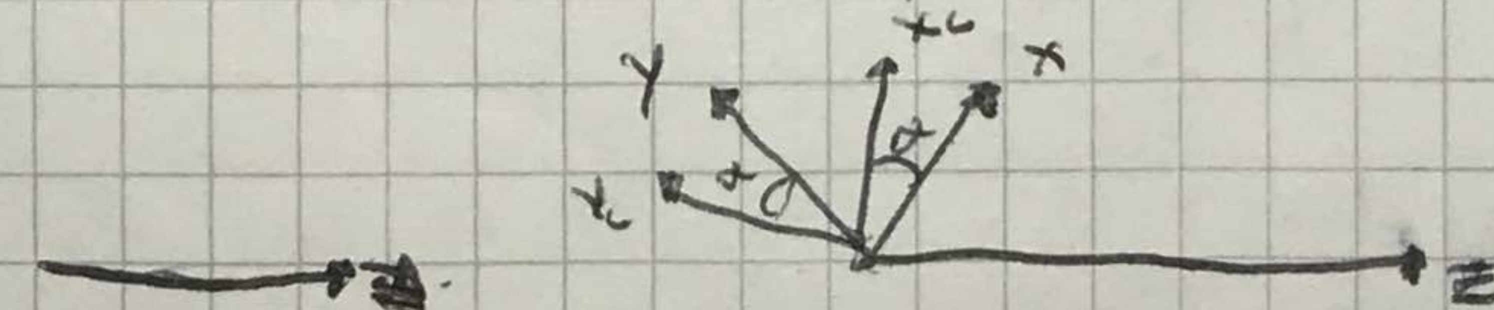
Segunda lámina

$$= \cancel{E_0}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -i\sin(\alpha)\end{pmatrix} E_0\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= E_0(\cos(\alpha)\hat{x}_{L_2} + \sin(\alpha)\hat{y}_{L_2})e^{i(kz-\omega t)}$$

y volviendo a x, y llegamos a lo mismo de antes, creando otro dispositivo con el mismo efecto.

b) *



¿?

Problema 3

Un haz paralelo mezcla dos longitudes de onda $\lambda_1 = 656,3\,nm$ y $\lambda_2 = 656,48\,nm$, incide sobre una red de difracción por transmisión plana de $350\,l/mm$, formando un ángulo de 45^o con la normal a la red. Sabiendo que la red es de 1 cm de lado

~~[illegible]~~

a) Calcular el máx poder resolvente de la red

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \underset{\text{nro de rendijas}}{N}\, \underset{\text{orden}}{m} \qquad \underset{\text{densidad de rendija}}{n} = \frac{1}{\underset{\text{sep de rendijas}}{a}} = \frac{N}{\underset{\text{largo de la red}}{l}}$$

$$\Rightarrow N = n\,l = 350/mm \cdot 1cm = 3500$$

$$a = \frac{1}{3500/m} = 2,86\,exp^{-3}\,mm = 2,86\,exp^{-6}\,m$$

~~b)~~

Ecuación de la red

$$a(\sin(\theta) - \sin(\theta_i)) = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 3500 \cdot \frac{a}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(45^o))$$

aparece por que la incidencia no es normal

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{3500 \cdot 2,86\,exp^{-6}\,mm\,(\sin(\theta) - \sin(45^o))}{\lambda}$$

$$\text{Si } \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = \frac{656,3\,nm}{0,18\,nm} = 3646,1 = 3500 \cdot m \qquad \frac{\lambda}{a}$$

$$\Rightarrow m \approx 1,04 \approx 1$$

~~alcance de resolución~~ se puede resolver las dos longitudes de onda a partir del máximo de orden 1

$-1 \leq$

c) Hallar el orden más bajo en el que puede hacerlo y los ángulos con lo que salen las dos componentes

~~b)~~ Resolución $\quad -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$

$$-1 \leq \frac{m\,\lambda_1}{a} + \sin(45^o) \leq 1 \quad -1 \leq \frac{m\lambda_1}{a} + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1$$

-1,866

$-\cancel{1,866} \le \frac{m\lambda_1}{a} \le 0,134$

→ Estos son los ordenes que se ven

$-8,131 \le m \le 0,86$ ∴ resuelve pero no en el orden 1,

el orden más bajo sería el -8   no mal

$\Rightarrow \sin(\theta_m) = \frac{-8\lambda}{a} + \sin(45°)$

Para λ_1

$\sin(\theta_m)_{\lambda_1} = \frac{-8\cdot 656,3\exp^{-9}\, m}{2,86\exp^{-6}\, m} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,97 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\theta_m = \frac{3\pi}{2}}$

Para λ_2

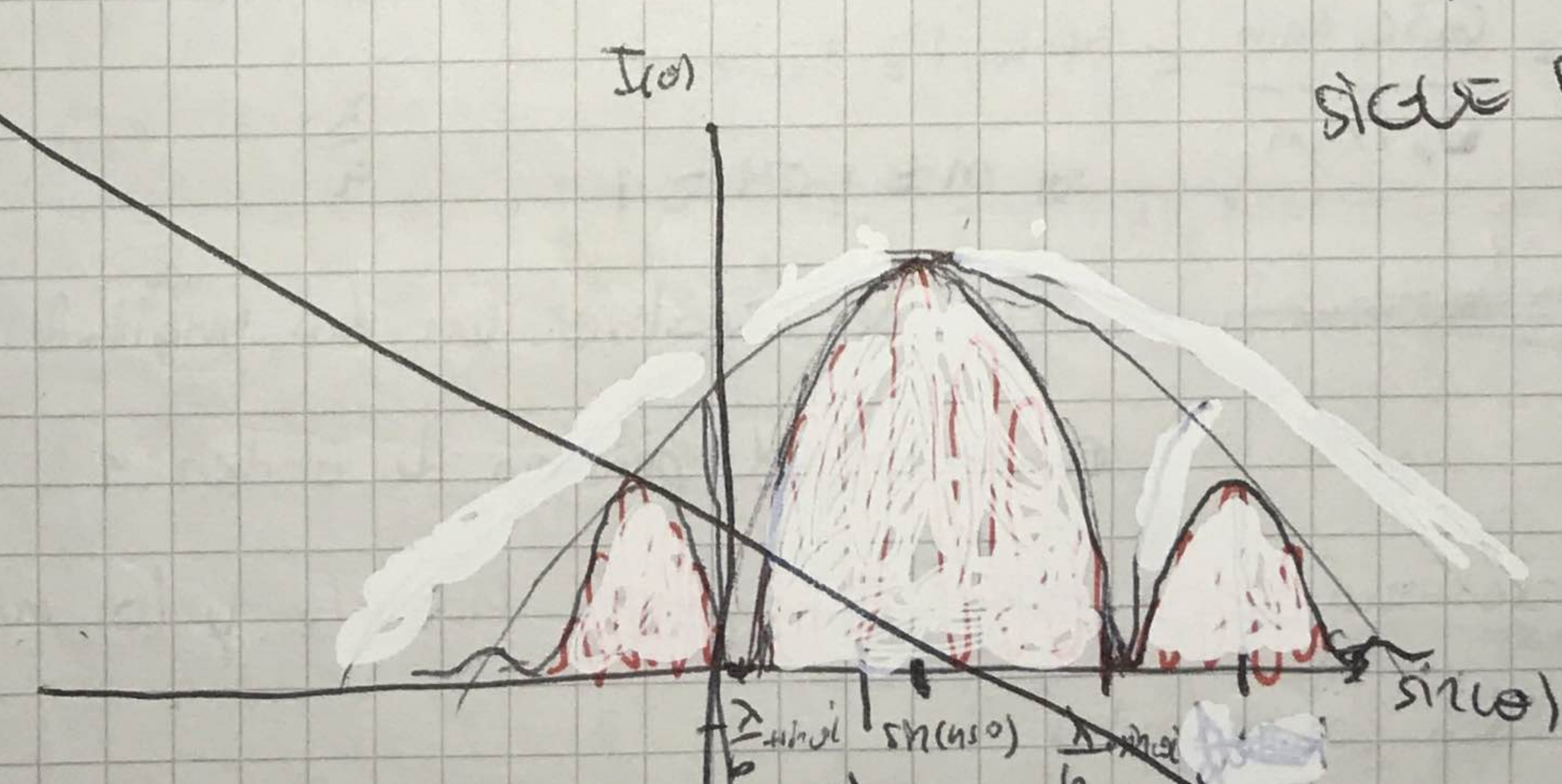
$\sin(\theta_{m_{\lambda_2}}) = \frac{-8\cdot 686,48\exp^{-9}\, m}{2,86\exp^{-6}\, m} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,99$

d) $I_\theta = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(kb/_2(\sin\theta - \sin\theta_i)\right)\left(\frac{\sin\left(kNa/_2(\sin\theta-\sin\theta_i)\right)}{\sin\left(ka/_2(\sin\theta-\sin\theta_i)\right)}\right)^2$

NO CORREGIR

SIGUE DESPUÉS

$I(\theta)$



Max principales $\sin\left(ka/_2(\sin\theta-\sin\theta_i)\right) = 0$

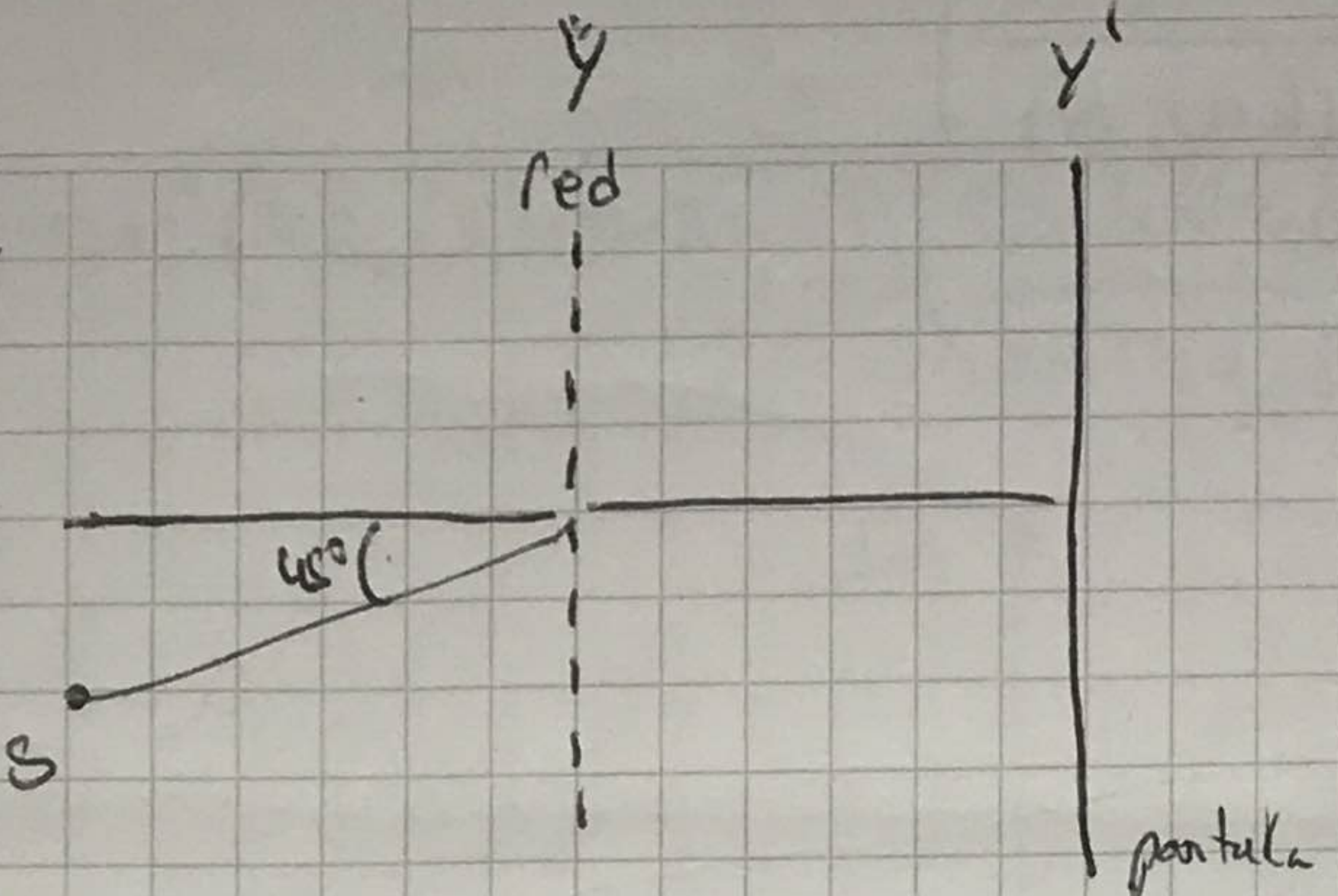
$\Rightarrow ka/_2(\sin\theta - \sin\theta_i) = m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$

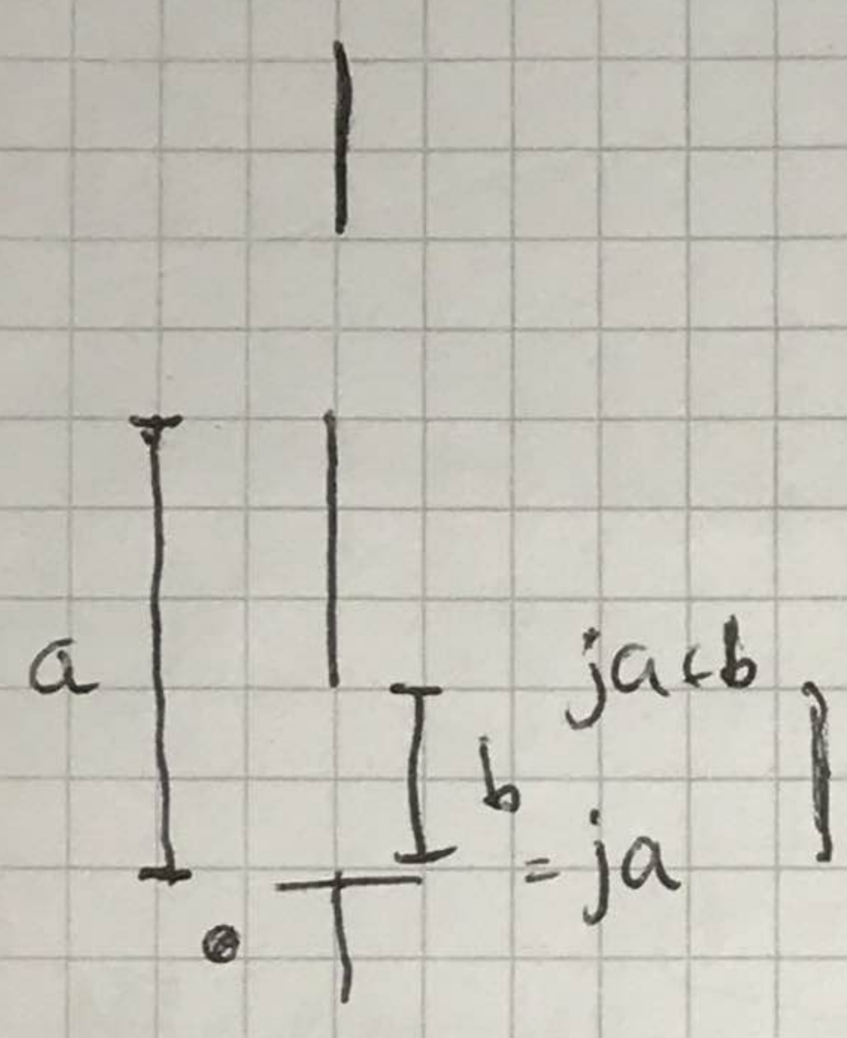
$\Rightarrow \sin\theta = \frac{m\lambda}{a} + \sin\theta_i$

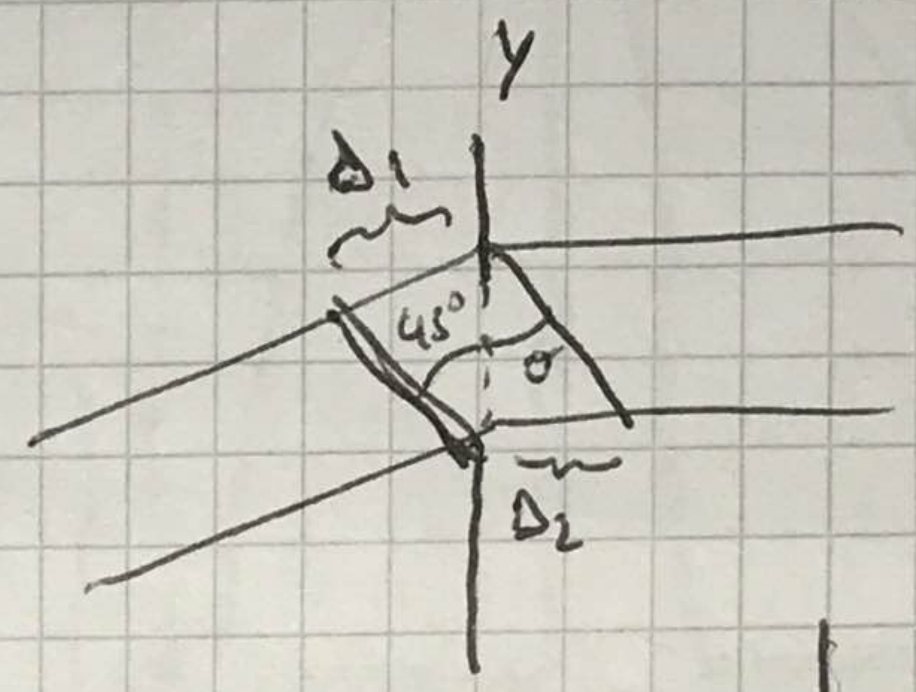
Emiliano Fortes

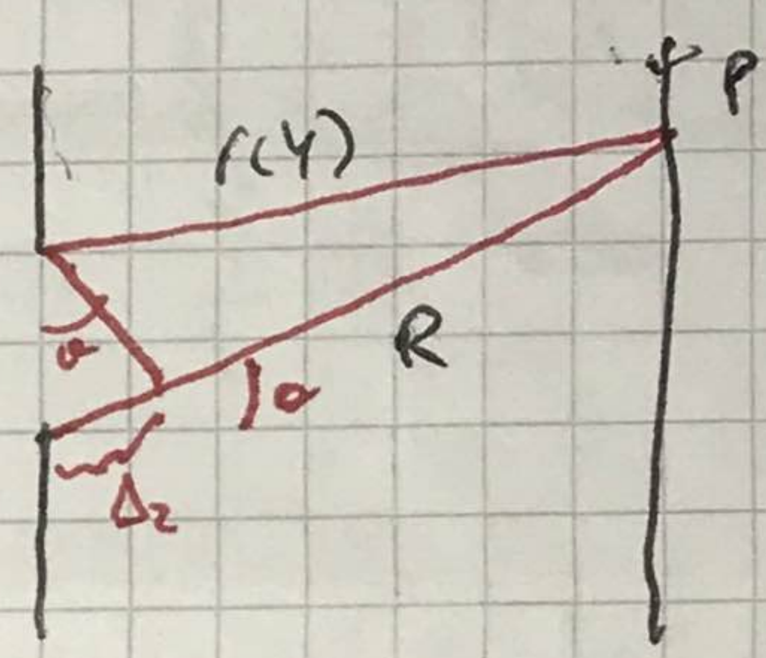
SOLUCION DE N RENDIJAS

~~Problema 3~~









$$\delta_{(\sigma)} = k(\Delta_1 + \Delta_2)$$

$$\Delta_1 = y\sin(45^\circ$$

$$\Delta_2 = R - y\sin(\sigma)$$

$$\Rightarrow E(y') = \frac{Ae^{i(kR-\omega t)}}{R}\left(\sum_{j=0}^{N}\int_{ja}^{ja+b} e^{ik(\cancel{R}-y\sin(\sigma)+y\sin(45^\circ))}\,dy\right)$$

$$= \frac{Ae^{i(kR-\omega t)}}{R}\left(\sum_{j=0}^{N}\int_{ja}^{ja+b} e^{-iky(\sin(\sigma)-\sin(45^\circ))}\,dy\right) \qquad y' = y - ja$$

$$\sigma$$

$$= \frac{Ae^{i(kR-\omega t)}}{R}\left(\sum_{j=0}^{N}\int_{0}^{b} e^{-ik(y'+ja)(\sin(\sigma)-\sin(45^\circ))}\,dy'\right)$$

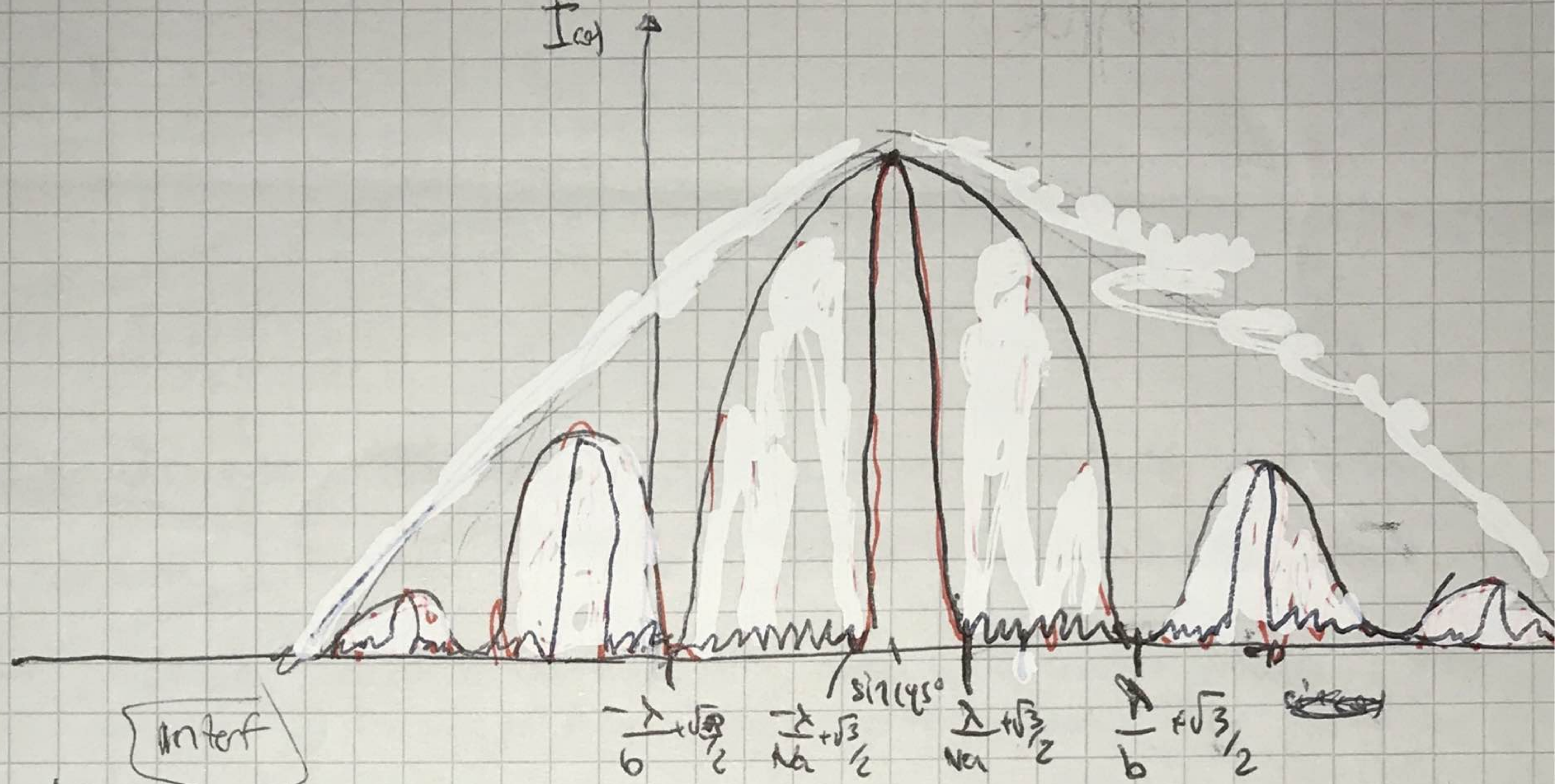
$$= \frac{Ae^{i(kR-\omega t)}}{R}\int_0^b e^{-iky(\sigma)}\left(\sum_{j=0}^{N} e^{-ikja\sigma}\right)$$

$$= \frac{Ae^{i(kR-\omega t)}}{R}\left(\frac{-e^{-ikb\sigma}+1}{ik\sigma}\right)\left(\frac{1-e^{-ikNa\sigma}}{1-e^{-ika\sigma}}\right) = \frac{bAe^{i(kR-\omega t)}}{R}\, e^{-ik\frac{b}{2}\sigma}\,\mathrm{sinc}\!\left(k\tfrac{b}{2}\sigma\right)\frac{\sin(kNa\sigma)}{\sin(ka\sigma)}$$

$$\Rightarrow I_p = I_0 \cdot \mathrm{sinc}^2\left(k b/_2\, \theta\right)\left(\frac{\sin(kNa/_2\, \theta)}{\sin(ka/_2\, \theta)}\right)^2$$

2

d) $I_f = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(kb/_2(\sin(\theta)-\sin(\theta)^{\sqrt{3}/_2})\right)\left(\dfrac{\sin(kNa/_2(\sin(\theta)-\sqrt{3}/_2))}{\sin(ka/_2(\sin(\theta)-\sqrt{3}/_2))}\right)^2$



¿Cómo se ve si tengo dos λ distintos?

Máx principales

$\sin(ka/_2(\sin(\theta)-\sqrt{3}/_2))=0$

$ka/_2(\sin(\theta)-\sqrt{3}/_2)=m\pi \quad m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{\sin(\theta)=\frac{m\lambda}{a}+\sqrt{3}/_2}$

Máx sec

$\sin(kNa/_2(\sin(\theta)-\sqrt{3}/_2))=\pm 1$

$kNa/_2 \sin(\theta)-\sqrt{3}/_2 = (2p+1)\frac{\pi}{2} \quad p\in\mathbb{Z}$

mín $kNa/_2(\sin(\theta)-\sqrt{3}/_2)=n'\pi$

$\sin(\theta)=\frac{n'\lambda}{Na}+\sqrt{3}/_2$

2(N-2) máx sec entre principales

2(N-1) mín entre máx principales

mín difracción $\Rightarrow$ $kb/_2(\sin(\theta)-\sqrt{3}/_2)=t\pi \quad t\in\mathbb{Z}$

$\sin(\theta)=\frac{t\lambda}{b}+\sqrt{3}/_2$ $\qquad a=jb$

máx

Ejercicio 4

a) F. En incidencia normal la reflejada se comporta igual en ambos casos (en términos de la potencia)

b) V

~~c) El ángulo de Brewster [redacted] elimina la componente paralela de la onda incidente, al no estar totalmente contenida en el plano de incidencia (la onda incidente), entonces solo se transmite totalmente la componente paralela, pero la perpendicular sigue reflejando ∴ F~~

d) V

e) V

Lo reescribo por si cuesta entender la letra

c) El ángulo de Brewster elimina la componente paralela de la onda reflejada, como la onda incidente no esta totalmente contenida en el plano de incidencia, entonces solo se transmite totalmente la componente paralela de la misma, pero la perpendicular sigue reflejando ∴ F

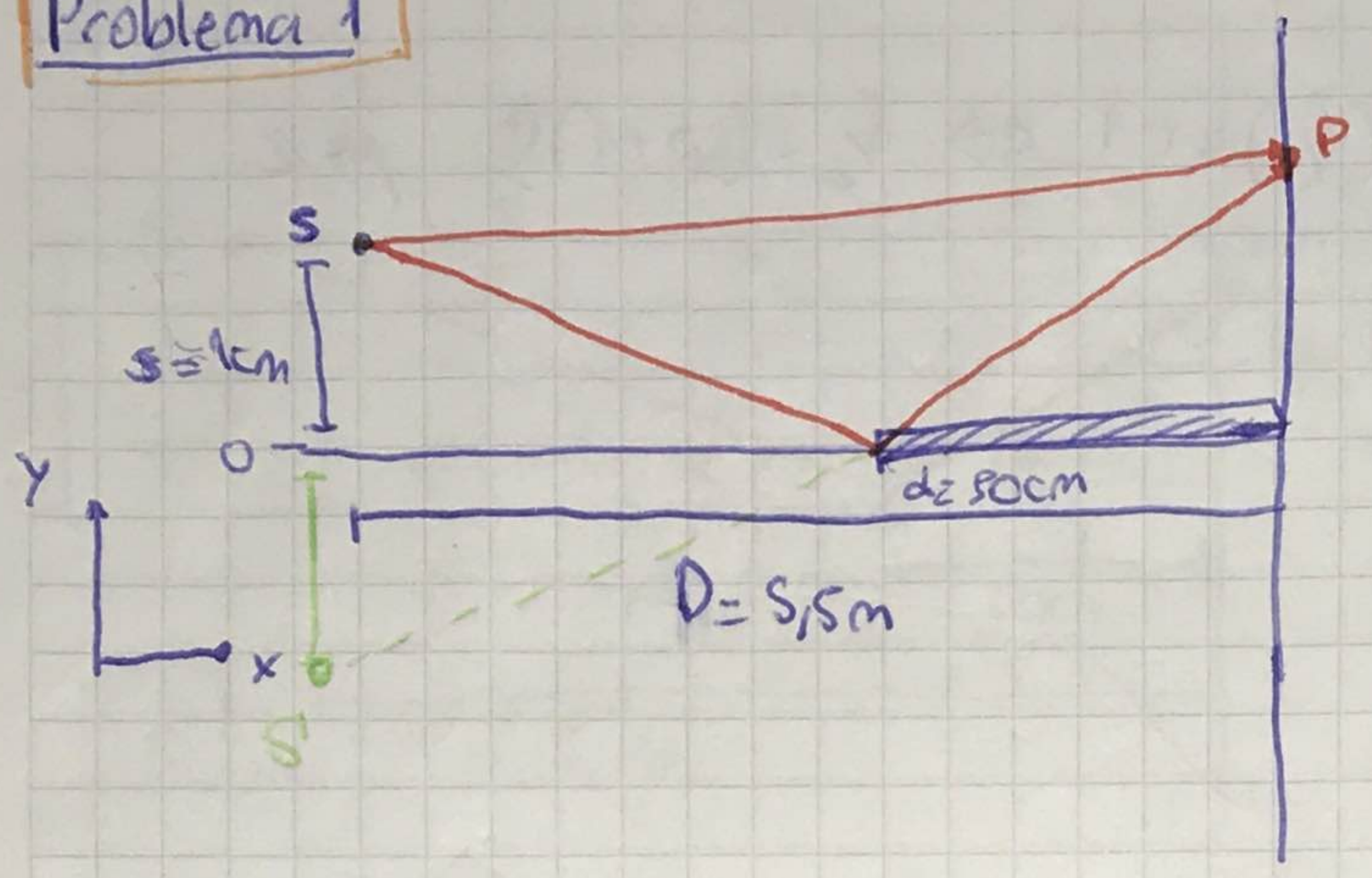
B

a, b, c } B

d, e } M.

Emiliano Fortes

Problema 1



a) Explicar cualitativamente por qué espera observar franjas de interferencia sobre la pantalla. Comparar con el dispositivo de Young. Semejanzas / Diferencias

Se esperan observar franjas de interferencia debido al encuentro sobre la pantalla de las ondas producidas por la fuente que se dirigen hacia la pantalla, y otras ondas producidas por la fuente S que se reflejan en el espejo y luego se dirigen a la pantalla también. Este dispositivo, se puede comparar con el dispositivo de Young, usando que las ondas reflejadas en el espejo son en realidad producto de una fuente S' ubicada a una distancia simetrica del origen al igual que S. La diferencia importante que se produce es el hecho que este experimento al tomar una onda que incide sobre un espejo, recibe un desfasaje de $\pm\pi$ al reflejarse, produciendo que en el origen se produzca un mínimo de intensidad (en la pantalla), y no un máximo como sucede en Young.

b) Hallar los máx de interf y la interfranja

$\Rightarrow$ Por Young $\Rightarrow \delta = \frac{k y 2s}{D} \pm \pi \Rightarrow I_p = 4 I_0 \cos^2(\delta/2) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{k y s}{D} + \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin(\alpha)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$

$\Rightarrow I_p = 4I_0 \sin^2(\delta/2)$ mín inter $\frac{kys}{D} = n\pi$ $n\in\mathbb{Z}$

$Y_{mín} = \frac{n D\lambda}{2s}$

Luego máx de interferencia

$$\sin^2(\delta/2) = 1 \Leftrightarrow \sin(\delta/2) = \pm 1 \Leftrightarrow \delta/2 = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad m\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{kys}{D} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}\frac{y.s}{D} = (2m+1)\frac{\cancel{\pi}}{2}$$

$$Y_{máx} = \frac{(2m+1)\lambda.D}{4s}$$

$$i = Y_{máx(1)} - I_{máx(0)} = \frac{3\lambda D}{4s} - \frac{\lambda D}{4s} = \frac{\lambda D}{2s} =$$

<u>Datos</u>

$\lambda = 620nm = 620\,exp^{-9}m$

$d = 50cm$

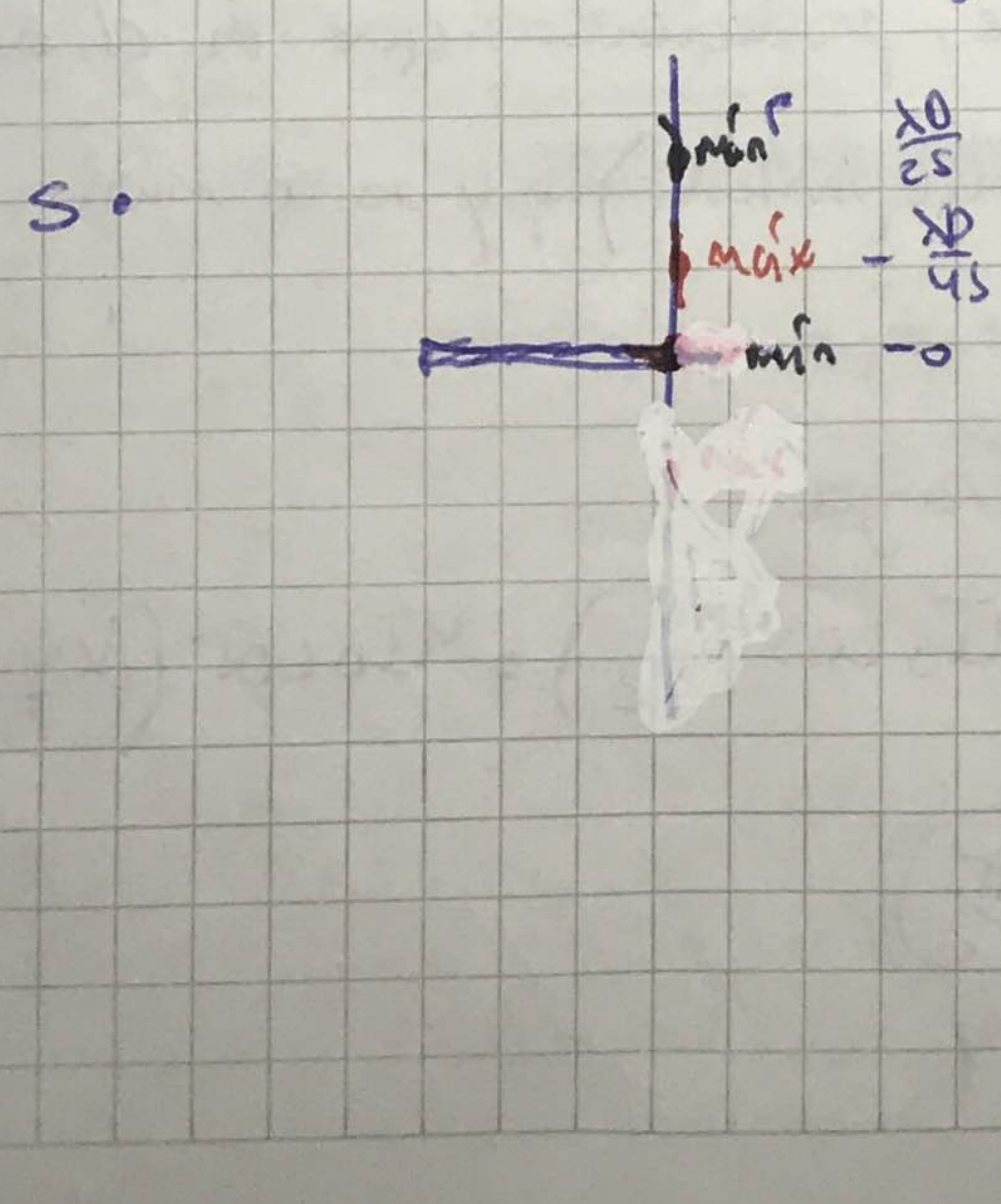
$s = 1cm = 0{,}01m$

$D = 5{,}5m$

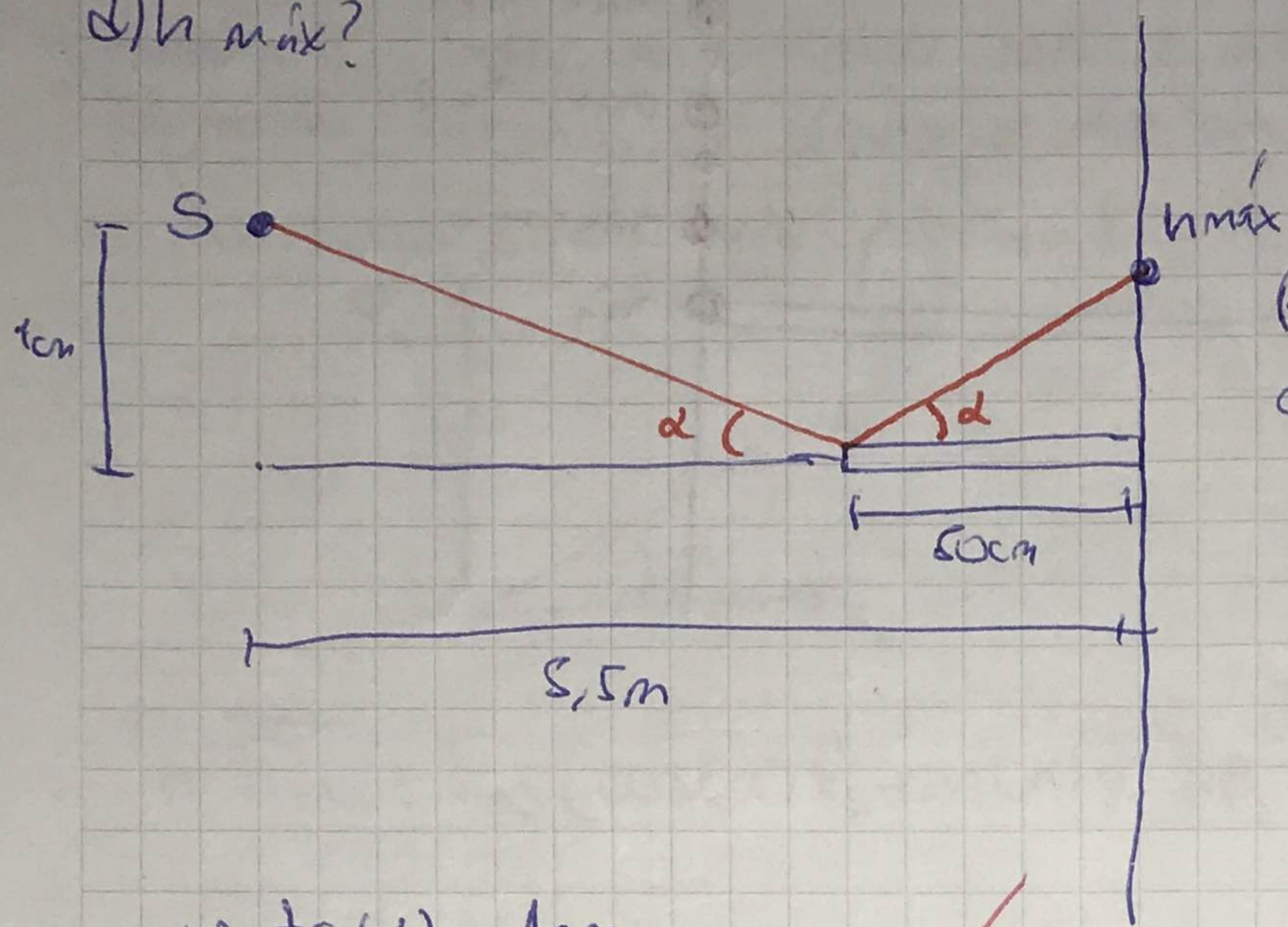
$$Y_{máx} = \frac{(2m+1).620\,exp^{-9}m\,.\,5{,}5\cancel{m}}{4\,1exp^{-2}\cancel{m}} = \cancel{(2m+1)\ldots exp\ldots m} = (2m+1)\,8{,}525\,exp^{-5}m$$

$$i = \frac{620exp^{-9}m\,.\,5{,}5m}{2\,.\,exp^{-2}m} = 1{,}705\,exp^{-4}m$$

c) Graficar la intensidad a lo largo de la pantalla



d) h máx?



Por snell el reflejado tiene igual angulo

$$\Rightarrow tg(\alpha) = \frac{1cm}{5{,}5m - 50cm}$$

pero $tg(\alpha) = \frac{h_{máx}}{50cm}$ $\Rightarrow$ $\frac{1cm}{5{,}5m-50cm} = \frac{h_{máx}}{50cm}$

$$\frac{50cm^2}{500\cancel{cm}} = h_{máx}$$

$$h_{máx} = 0{,}1cm = 0{,}001m$$

Cuantos máximos veo?

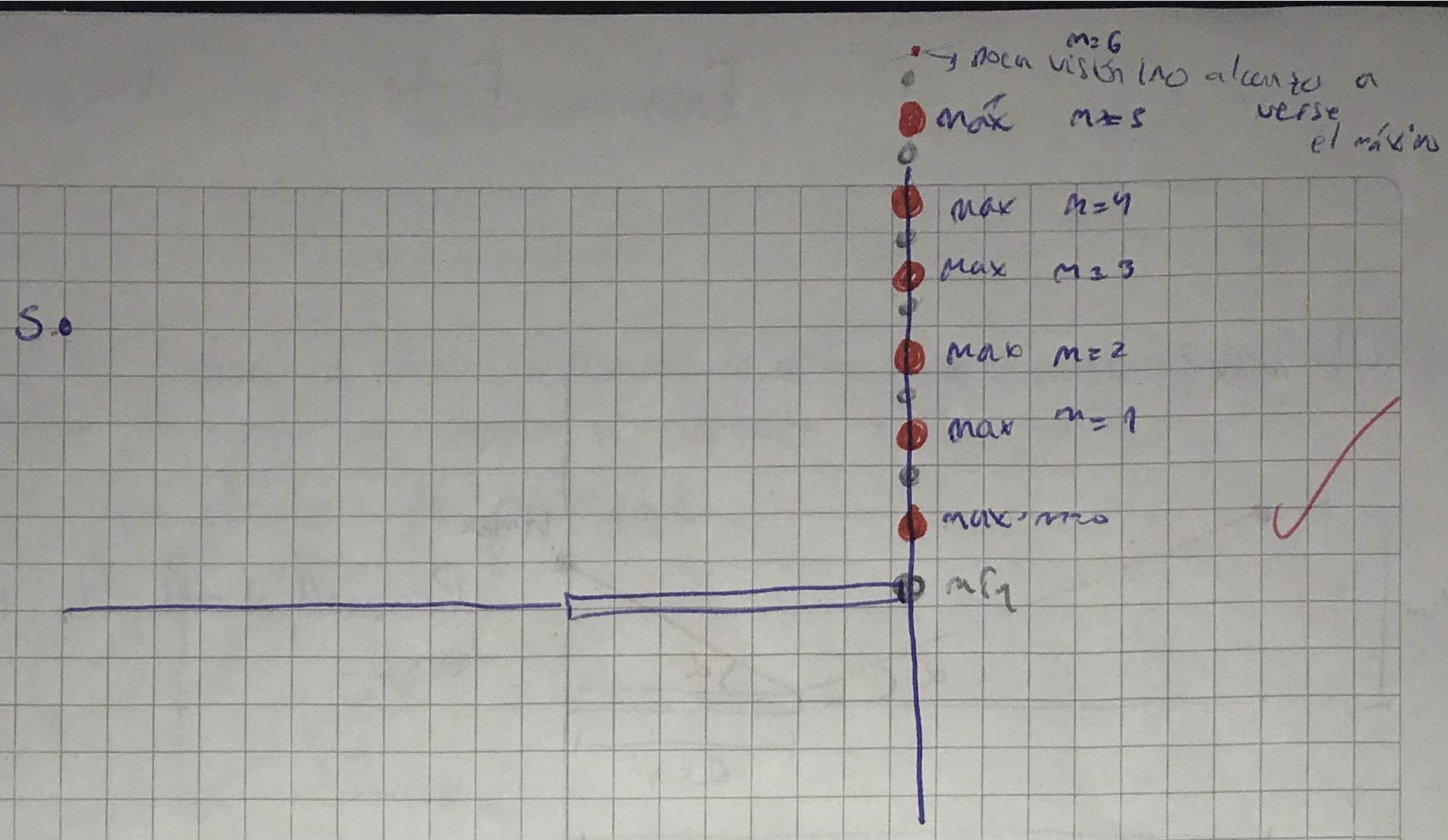
EXPLICAR

$$0{,}001m = (2m+1)\,8{,}525\exp^{-5}\,m$$

$$m \approx 5{,}36$$

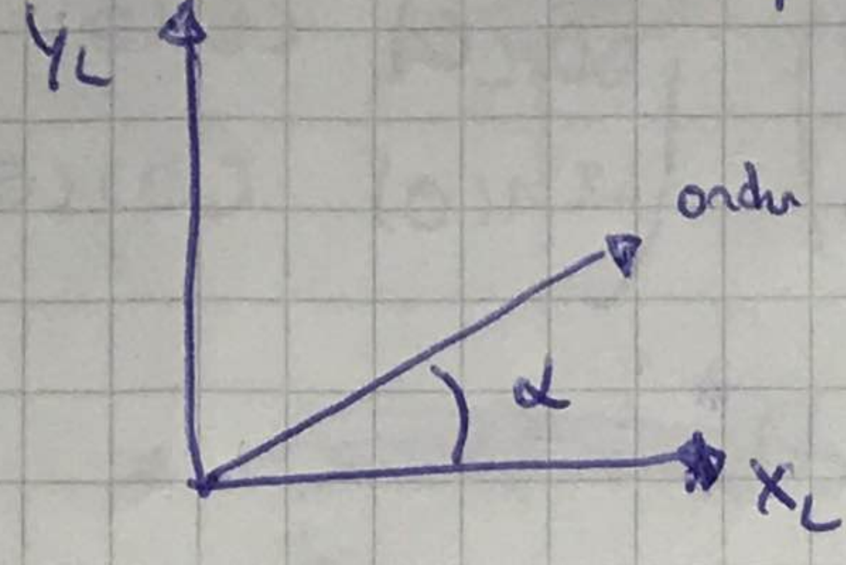
$\Rightarrow$ ~~Podría ver con 6 máximos, 5 sí.~~

$\underbrace{m = 0,1,2,3,4,5}_{6\,máx}$ Vería 6 máximos c)


S
m=6
poca visión no alcanza a verse el máximo
máx m=5
max m=4
max m=3
max m=2
max m=1
max m=0

Problema 2 Sobre una lámina de cuarto de onda incide luz monocromática linealmente polarizada formando un ángulo α respecto a su eje óptico

a) α / Salga circularmente polarizada



$$\Rightarrow \overline{E_{inc}} = E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L + \sin(\alpha)\hat{y}_L)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\overline{E_{sal}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} E_0\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\overline{E_{sal}} = E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L + i\sin(\alpha)\hat{y}_L)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

Para que sea circular $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \pm \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \overline{E_{sal}} = E_0 \cos(\alpha)(\hat{x}_L \pm i\,\hat{y}_L) \quad \text{circular}$$

B

b) Estado de polarización si se agrega otra lámina de cuarto de onda con su eje rápido paralelo a la otra

$$\Rightarrow \overline{E_{inc}} = E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L + \sin(\alpha)\hat{y}_L)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

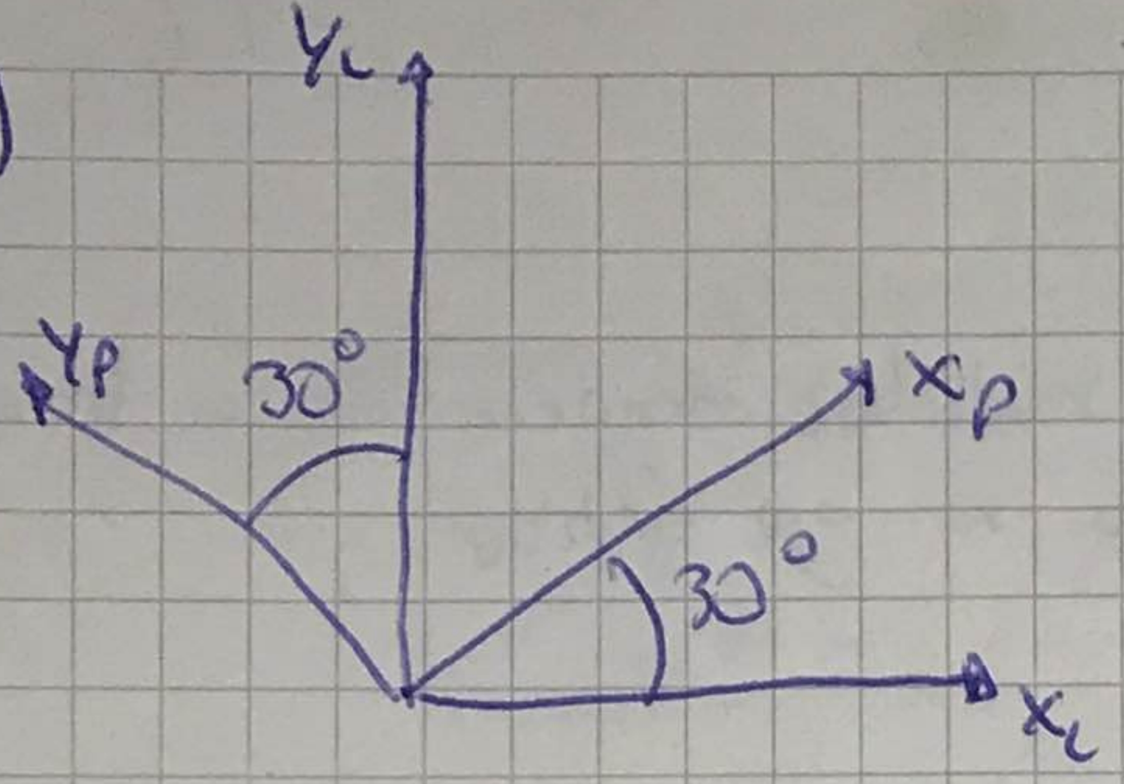
$$\overline{E_{sal}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L + \sin(\alpha)\hat{y}_L)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} E_0\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\overline{E_{sal}} = E_0 (\cos(\alpha)\hat{x}_L - \sin(\alpha)\hat{y}_L)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

¿y esto que significa?

c)



$\theta = 30°$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{x}_L \\ \hat{y}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_P \\ \hat{y}_P \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_P \\ \hat{y}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_L \\ \hat{y}_L \end{pmatrix}$$

Saldrá lineal por el polaroid

$$\Rightarrow \overline{E}_{inc} = E_0 \left(\cos(\alpha)\hat{x}_L - \sin(\alpha)\hat{y}_L\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= E_0 \left[\cos(\alpha)\left(\cos(\theta)\hat{x}_P - \sin(\theta)\hat{y}_P\right) - \sin(\alpha)\left(\sin(\theta)\hat{x}_P + \cos(\theta)\hat{y}_P\right)\right] e^{i(kz-\omega t)}$$

$$E_{SAL} = E_0 \left(\cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta)\right)\hat{x}_P \, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= E_0 \underbrace{\left(\cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta)\right)}_{\cos(\alpha+\theta)} \left(\cos(\theta)\hat{x}_L + \sin(\theta)\hat{y}_L\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

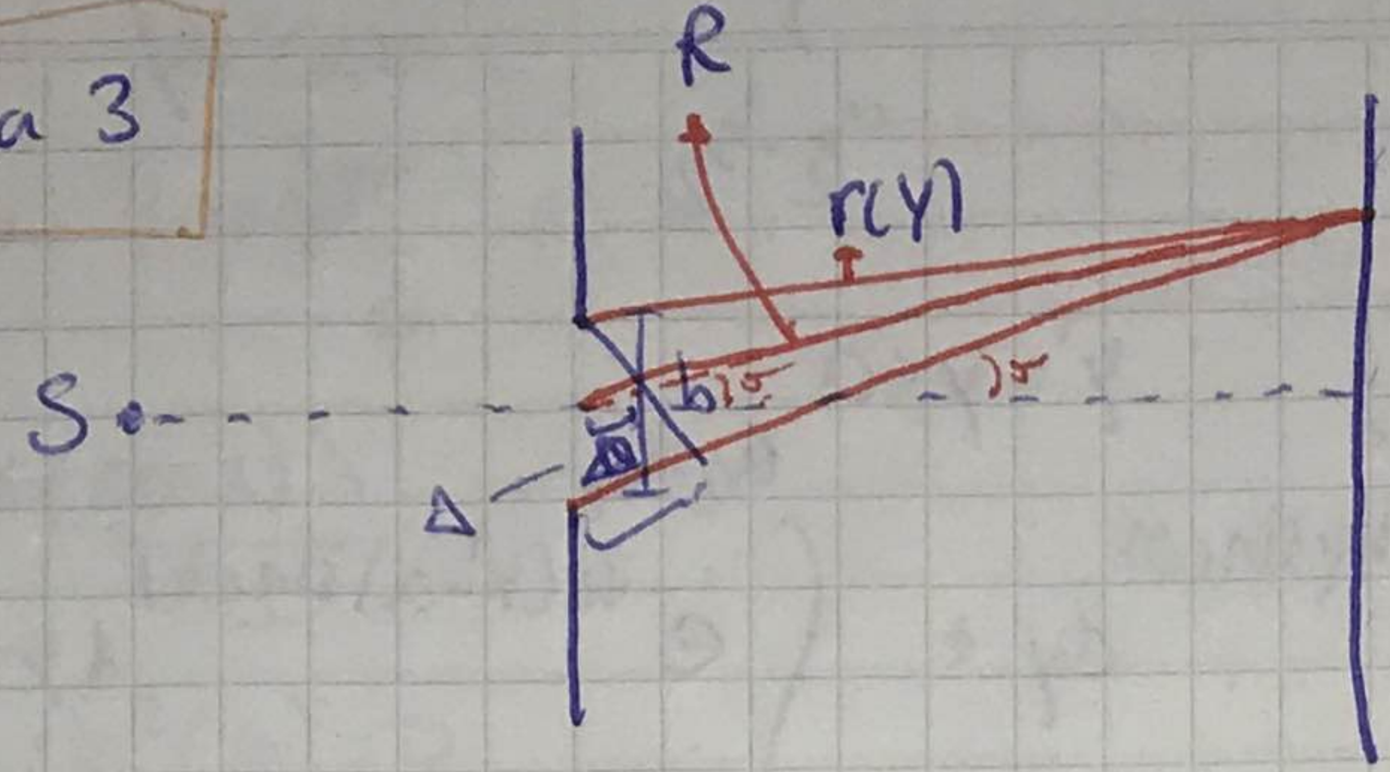
$$= E_0 \cos(\alpha+\theta)\left(\cos(\theta)\hat{x}_L + \sin(\theta)\hat{y}_L\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

$$= E_0 \cos(\alpha+\theta)\cos(\theta)\left(\hat{x}_L + tg(\theta)\hat{y}_L\right) e^{i(kz-\omega t)}$$ (linealmente polarizada)

$$I_P = \frac{E_0^2}{2}\cos^2(\alpha+\theta)\left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right] = \frac{E_0^2}{2}\cos^2(\alpha+\theta)$$

Bien la idea α no es $\underline{30°}$

Problema 3



$\Rightarrow$ ~~$\Delta = R - r(y)$~~ $\Delta = R - y\sin(\theta)$

$$\Rightarrow E_{p(y)} = E_0 \int_{-b/2}^{b/2} \frac{e^{i(kr(y)-\omega t)}}{r(y)}\,dy = E_0 \int_{-b/2}^{b/2} \frac{e^{i(kR - ky\sin(\theta) - \omega t)}}{R - y\sin(\theta)}\,dy$$

$$\approx \frac{E_0}{R}\int_{-b/2}^{b/2} e^{i(kR - ky\sin(\theta) - \omega t)}\,dy = \frac{E_0 e^{i(kR-\omega t)}}{R}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-iky\sin(\theta)}\,dy$$

$$= \frac{E_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left(\frac{-e^{-iky\sin(\theta)}}{ik\sin(\theta)} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right)$$

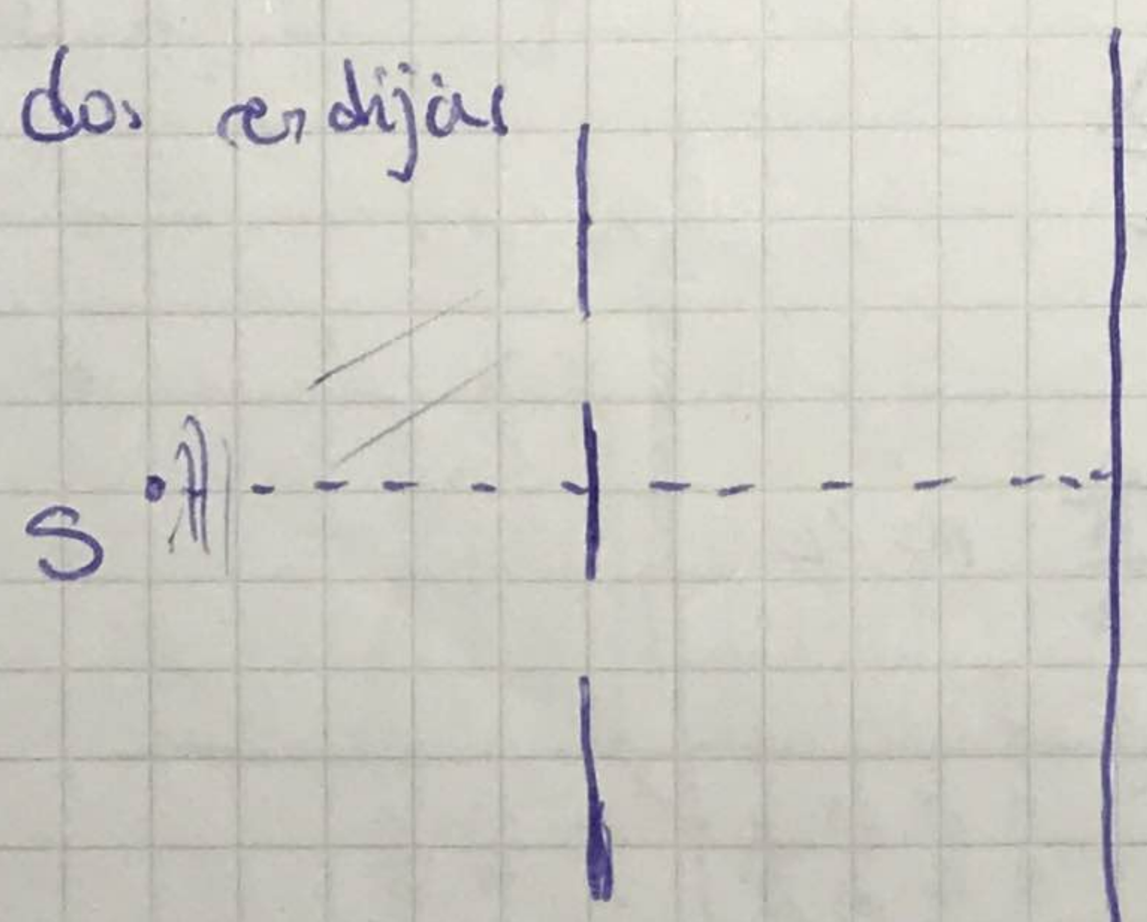
$$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2i} = \sin(\alpha)$$

$$= \frac{E_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left(\frac{-e^{-ikb/2\sin(\theta)} + e^{ikb/2\sin(\theta)}}{ik\sin(\theta)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{E_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left(\frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{ik\sin(\theta) \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{b}{2}} \right) = \frac{E_0 \cdot b}{R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \operatorname{sinc}(\beta)$$

$$I_p = \frac{1}{2}EE^* = I_0 \operatorname{sinc}^2(\beta)$$

Para dos rendijas



$$\Rightarrow E_p(\theta) = \frac{E_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left(\int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} e^{-iky\sin\theta} dy + \int_{-a/2-b/2}^{-a/2+b/2} e^{-iky\sin\theta} dy \right)$$

$$y' = y + a$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{E_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left(\int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} e^{-iky\sin\theta} dy + \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} e^{-ik(y'-a)\sin\theta} dy \right)$$

$$E_p = \frac{E_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} e^{-iky\sin\theta} dy \left(1 + e^{ika\sin\theta}\right)$$

$$E_p = \frac{E_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left(1+e^{ika\sin\theta}\right) \cdot e^{-ika/2\sin\theta} \cdot b\,\mathrm{sinc}(\beta)$$ por resultado de antes

$$E_p = \frac{bE_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \mathrm{sinc}(\beta) \left(\frac{e^{ika/2\sin\theta} + e^{-ika/2\sin\theta}}{2} \right) . 2$$

$$= \cos(\underbrace{ka/2\sin\theta}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{2bE_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \mathrm{sinc}(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

$$I_p = \frac{1}{2} E E^* = I_0\, 4\cos^2(\alpha) \cdot \mathrm{sinc}^2(\beta)$$

b) máx, mín de I, ancho de campana de dif, ancho de máx observados

~~máx de intens~~ máximos

$\cos^2(\alpha) = 1 \qquad k\frac{a}{2}\sin(\theta) = m\pi \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{a}$$

$\sin\theta = 0$ máx princip

$\sin^2(\beta) = 1 \qquad k\frac{b}{2}\sin\theta = (2p+1)\frac{\pi}{2} \quad p \in \mathbb{Z}$

$$\sin\theta = \frac{(2p+1)\lambda}{2b}$$

Emiliano Fortes Hoja 5/6

min $\cos^2(\alpha)=0$

$k\frac{a}{2}\sin\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n\in\mathbb{Z}$

$\sin\theta = \frac{(2n+1)\lambda}{2a}$

$\sin^2(\beta)=0$

$k\frac{b}{2}\sin\theta = t\pi \quad t\in\mathbb{Z}$

$\sin\theta = \frac{t\lambda}{b}$

$\Rightarrow$ ancho campana de difracción = min dif$_1$ - min dif$_{-1}$

$\Rightarrow \frac{\lambda}{b} - \left(-\frac{\lambda}{b}\right) = \frac{2\lambda}{b}$

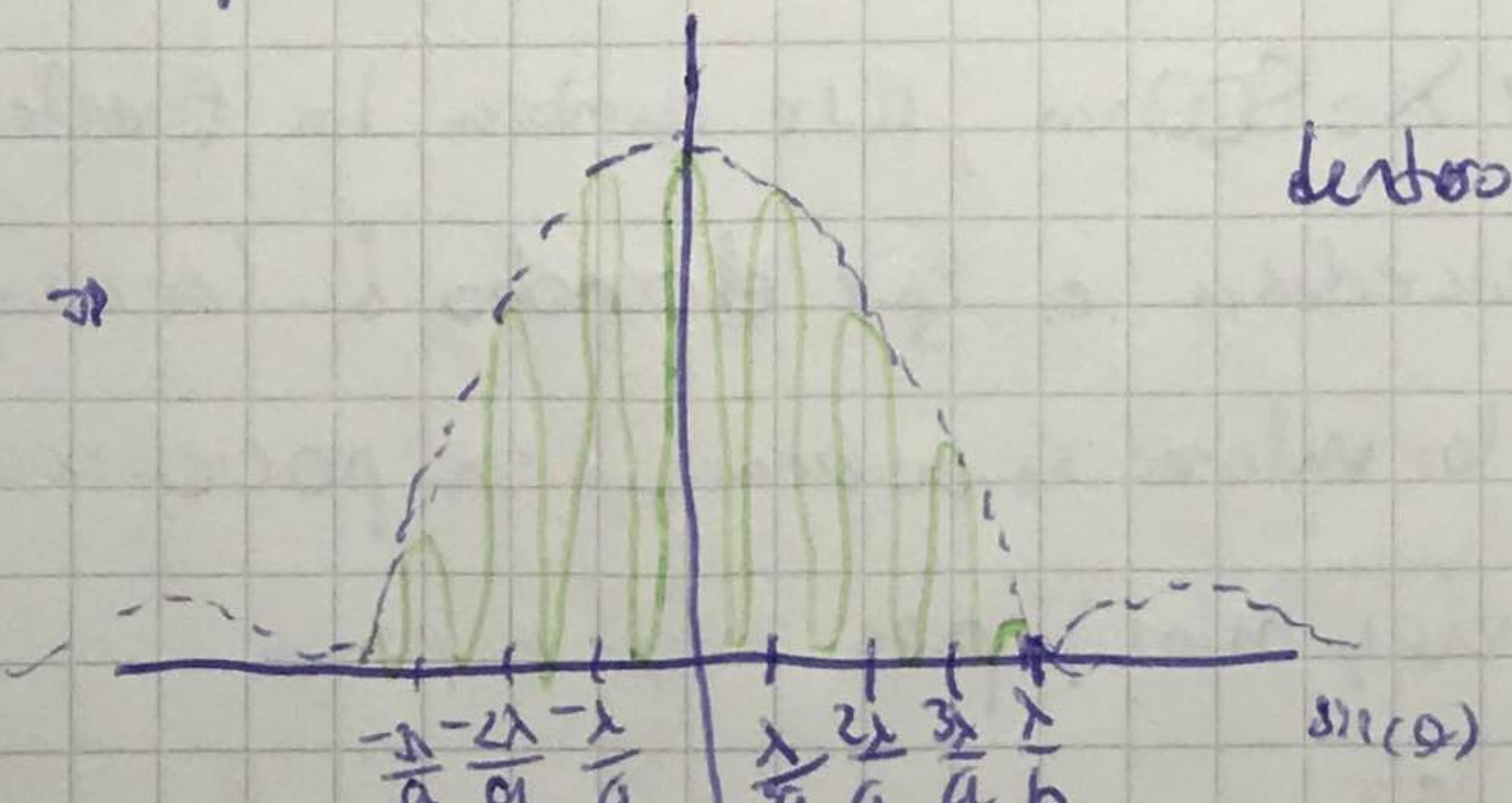
ancho de los máx observados

máx

$\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{a}$ $\quad$ min = $\sin\theta = \frac{(2n+1)\lambda}{2a}$ $\quad$ min$_1$ - min$_2$ = $\frac{3\lambda}{2a} - \frac{\lambda}{2a} = \frac{\lambda}{a}$

ancho = $\frac{\lambda}{a}$

c) Sabiendo que dentro de la campana de difracción se observan 7 máx de I indicar una cota para la relación de a y b ¿Depende la cantidad de máx de λ?



dentro de la campana

$a = jb$

cota $3b < a \leq 4b$

permitiendo así un orden perdido quiza

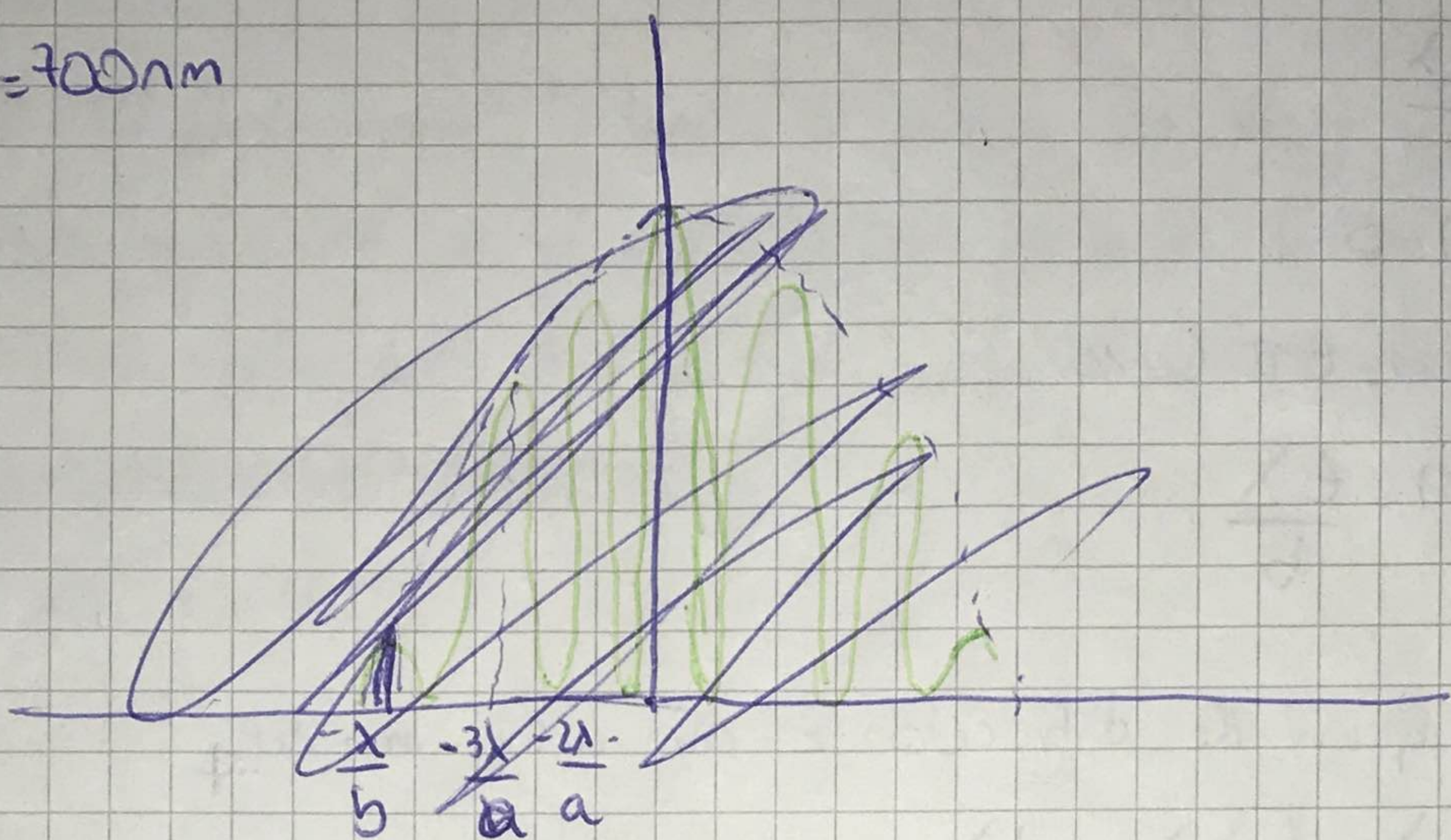
No depende de λ, sólo a y b

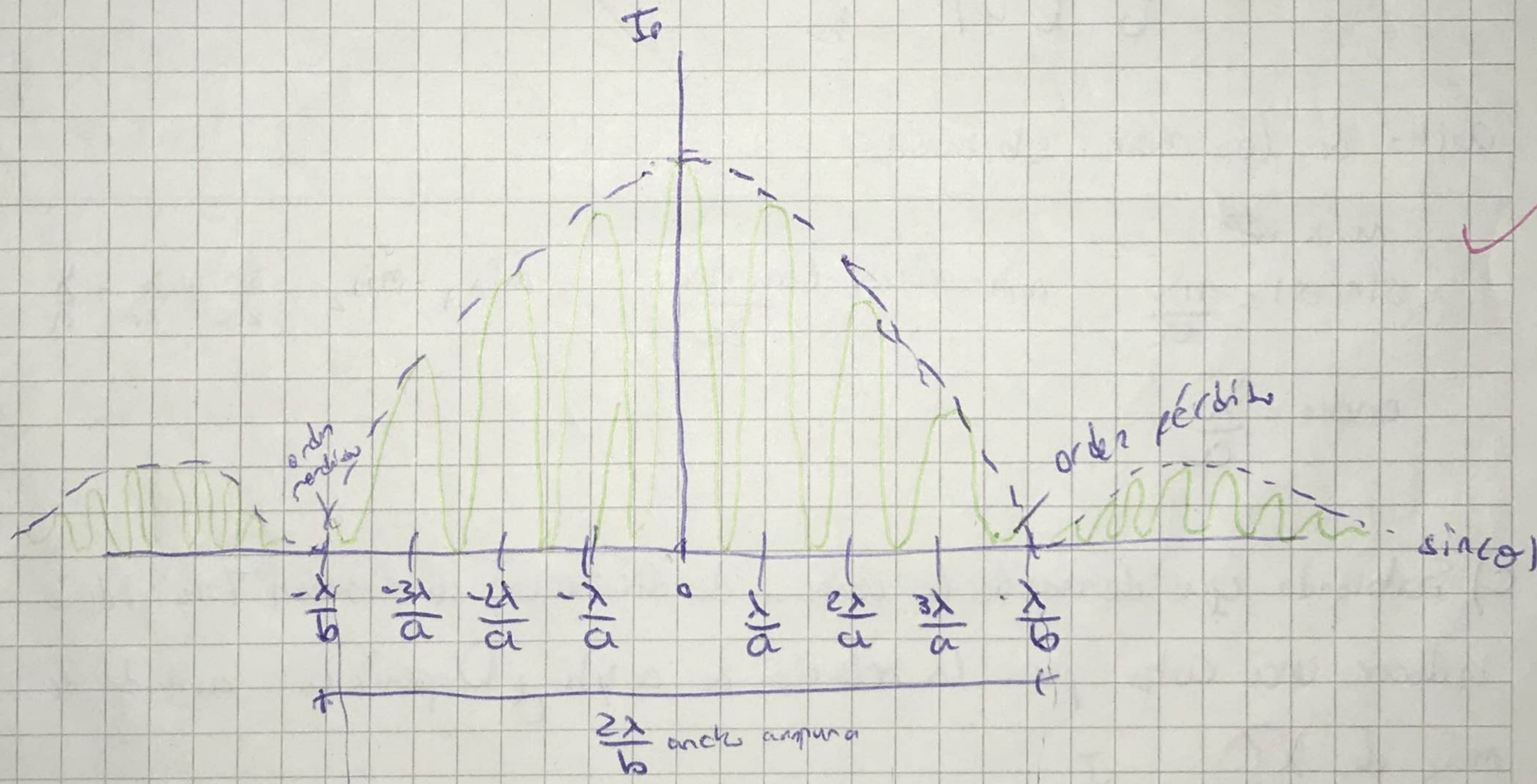
d) El orden 4 es perdido

⇒ $\boxed{a=4b}$ tampoco depende de λ, a y b

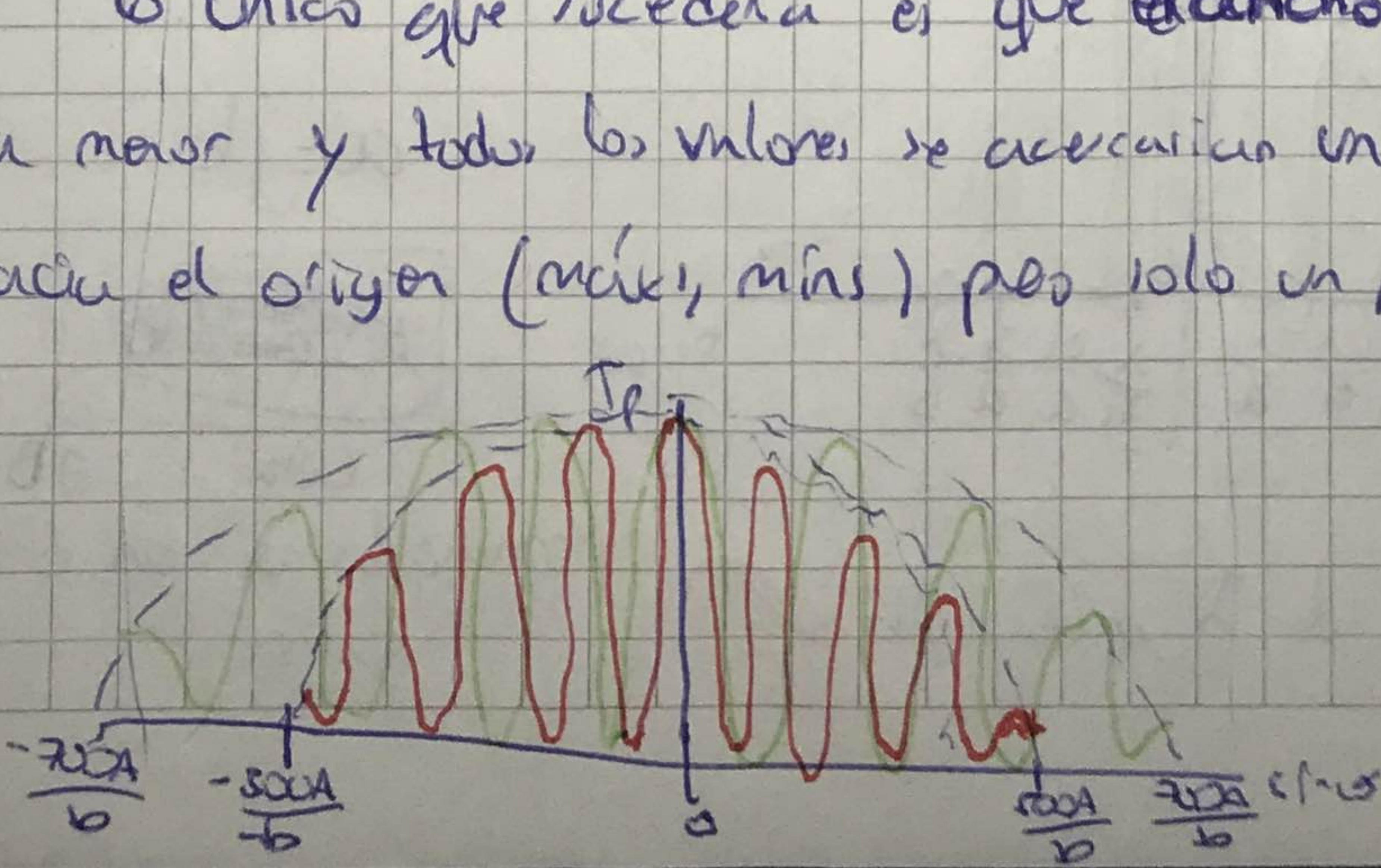
e)

$\lambda = 700nm$





como $\cancel{\lambda} = 700nm > \lambda = 500nm$, si se cambia la fuente lo único que sucedería es que el ancho de la campana sea menor y todos los valores se acercarían un poco más hacia el origen (máx, mins) pero solo un poco.



Emiliano Fortes Hoja 6/6

Problema 4

a) V ✓

b) F. Se puede girar la lámina de manera que el eje óptico de la lámina forme cierto angulo α en el cual la luz que sale de la elípticamente polarizada es linealmente polarizada, lo cual no sucede con la luz parcialmente polarizada.

c) ~~V~~F. No todos los haces. X

d) V ✓

e) V ✓

a/d/e } B

b/c } M