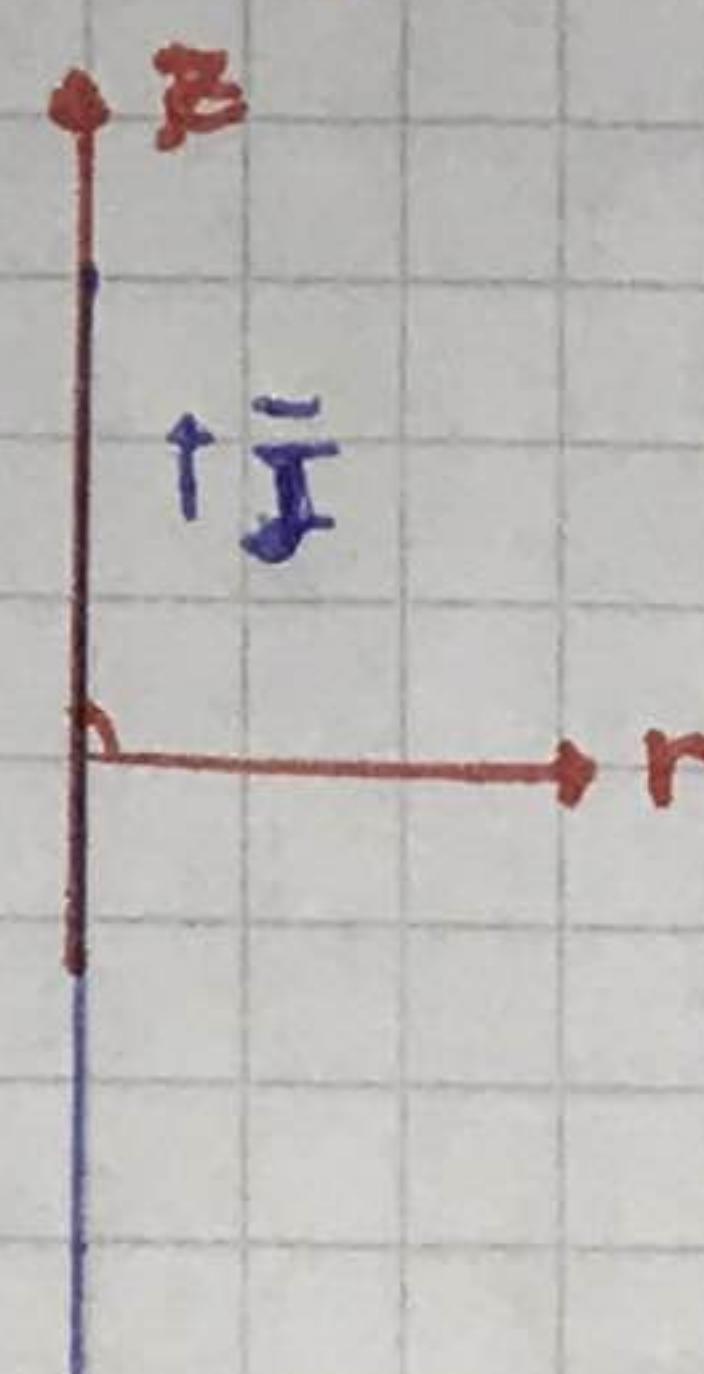


Parci entregar

Ejercicio 1: Obtener el campo  $\vec{B}$  de un plano a partir de un hilo infinito.

Campo de un hilo infinito



Polariz.  $(r, \phi, z)$

$$\vec{B} = \vec{B}(r) \text{ por simetría de fuente}$$

Por simetría de reflexión con planos que atraviesan el eje  $z$ , no puede ser en  $\hat{z}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \text{ no puede ser en } \hat{r} \text{ ya que esta sería distinta}$$

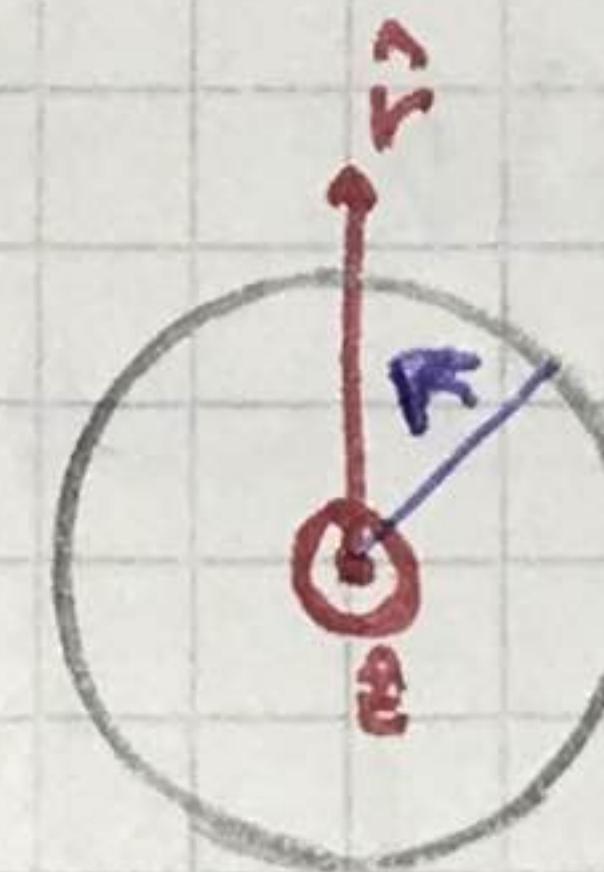
de cero, y  $\vec{B}$  atravesaría la distribución. Finalmente  $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Por Ley de Ampère  $\oint_C \vec{B} d\vec{L} = \mu_0 I_{\text{concatenada}}(C)$

Utilizando una superficie circular de radio  $R$ .

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \vec{B}(r) r d\phi = \mu_0 I_{\text{circular}}$$



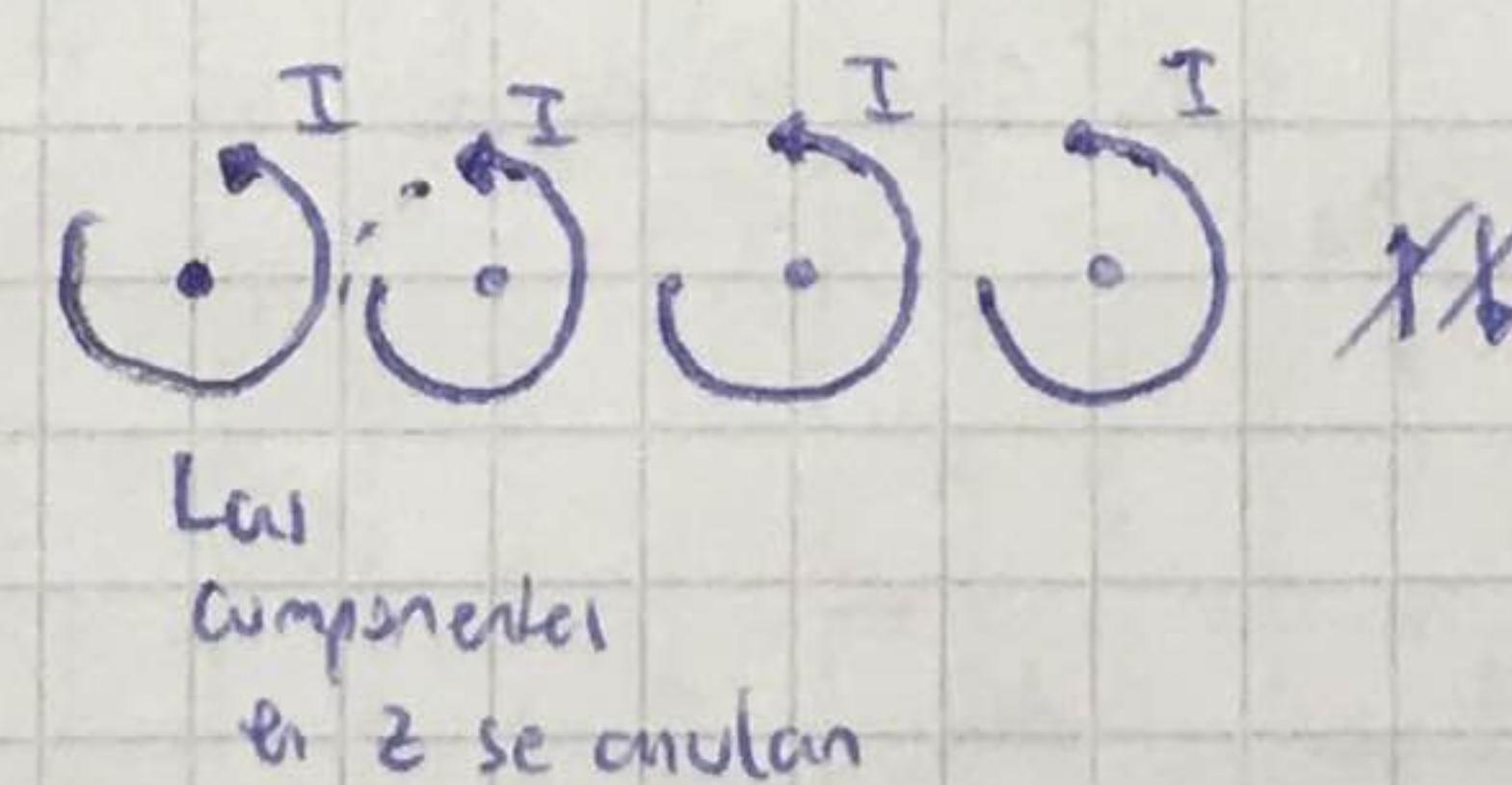
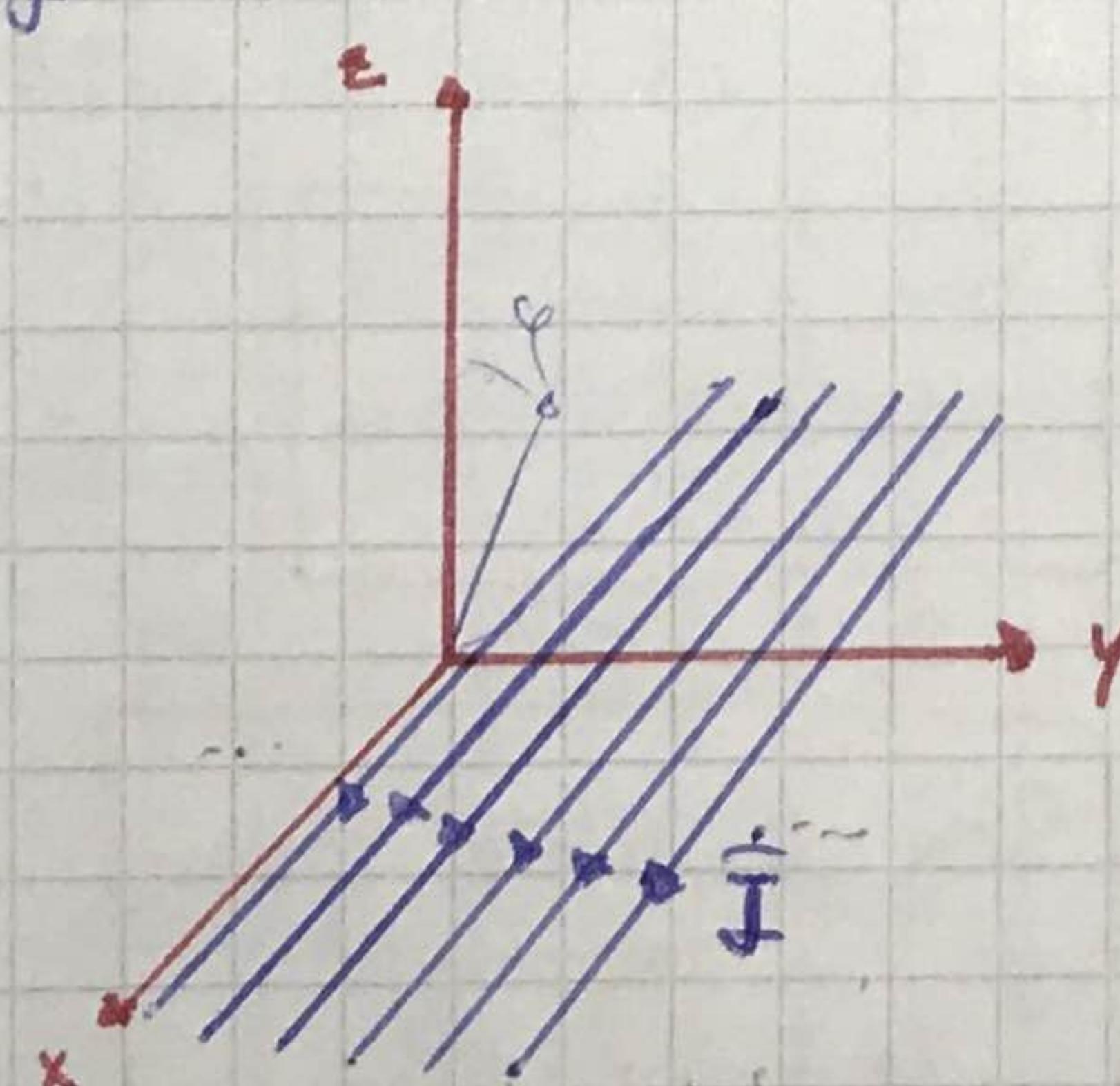
$$\Leftrightarrow B(r) r \cdot 2\pi = \mu_0 I$$

$$\Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}}$$

Campo de un plano infinito

Supongamos una distribución de hilos espaciados una distancia  $a$



Las componentes  $\hat{x}$  e  $\hat{z}$  se anulan

Esto no es  $\hat{y}$  para tu dibujo.  
Para tu dibujo

$$\hat{y} = -\sin(\phi) \hat{j} + \cos(\phi) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = B(z) \hat{y}$$

$\vec{B}$  no puede ser en  $\hat{x}$  pues sería paralela a la corriente y si fueran en  $\hat{z}$  atravesaría el plano. Por simetría de translación  $B$

solo puede depender de la dirección  $z$

$$\begin{aligned} \hat{r} &= x \cos(\phi) \hat{i} + y \sin(\phi) \hat{j} \\ \hat{\phi} &= -\sin(\phi) \hat{i} + \cos(\phi) \hat{j} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{z^2 + y^2}} \cos(\phi) dy \hat{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{2\pi (z^2 + y^2)} dy \hat{y}$$

¿Por qué sumas en?

$$\sqrt{z^2 + y^2}$$

Estos polos no están en el plano  $xy$ .  
No son lo que  
queríe, no?

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\mu_0 I \cdot z}{2\pi (z^2 + y^2)} dy = \frac{\mu_0 I \cdot \arctg(\frac{y}{z})}{\pi} \Big|_0^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$= \frac{\mu_0 I}{\pi}$  si  $z > 0$ . Si  $z < 0$  difiere solo en su signo

Finalmente

$$\boxed{\bar{B}(z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2} \hat{y} & z > 0 \\ -\frac{\mu_0 I}{2} \hat{y} & z < 0 \end{cases}}$$

El resultado está bien, pero de consideración.

\* No puedes multiplicar a B por distancia pq te pide en otras unidades. Tampoco tiene sentido expresar el campo de un plomo en función de la corriente q' para cada uno de los cables q' lo componen.

Tampoco estás sumando el campo de cada hilo (fijate q' se hace el eje de coordenadas tal que  $y \rightarrow y - y'$ ).

Ejercicio 2: Una esfera de radio R cargada uniformemente con G. Girar sobre su eje una

con velocidad angular w. Hallar el campo magnético sobre el eje de rotación.

$$\bar{\omega} = w_0 \hat{z}$$

$$\bar{g}(r) = G \bar{J} = G (\bar{W} \times \bar{R}) = G w_0 R \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Esféricas ( $r, \theta, \phi$ )

$$= G w_0 R \sin(\theta) \hat{\phi}$$

3) escubrí bien los polos.

$$\bar{B} = \left( \int_S \frac{\bar{g}(\bar{r}) \times (\bar{r} - \bar{r}') d^2 r'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \right) k_m$$

$$(\bar{r} - \bar{r}') = (-R \cos(\phi) \sin(\theta), -R \sin(\phi) \sin(\theta), Z - R \cos(\theta))$$

$$|\bar{r} - \bar{r}'| = (R^2 + Z^2 - 2ZR \cos(\theta))^{1/2}$$

$$\bar{g}(\bar{r}) \times (\bar{r} - \bar{r}') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & 0 \\ -R \cos(\phi) \sin(\theta) & -R \sin(\phi) \sin(\theta) & Z - R \cos(\theta) \end{vmatrix} G w_0 R$$

$$= G w_0 R \left[ [w_0(\phi) \sin(\theta)(Z - R \cos(\theta))] \hat{x} + [\sin(\phi) \sin(\theta)(Z - R \cos(\theta))] \hat{y} + [R \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) + R \sin^2(\phi) \sin^2(\theta)] \hat{z} \right]$$

$$= G w_0 R \left[ [Z \cos(\phi) \sin(\theta) - R \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\theta)] \hat{x} + [Z \sin(\phi) \sin(\theta) - R \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\theta)] \hat{y} + R \sin^2(\theta) \hat{z} \right]$$

Al integrar  $\phi$  entre  $0$  y  $2\pi$ , las componentes en  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  se anulan pues los sen y cos se anulan (sus integrales).

$$\bar{B}_z = k_m \frac{2\pi}{2} \iint_0^R \frac{G w_0 R^2 \sin^2(\theta)}{(R^2 + Z^2 - 2ZR \cos(\theta))^{3/2}} \cdot R^2 \sin(\theta) d\theta d\theta =$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } R \cos(\theta) = u \\ -d\theta \sin(\theta) R = du \\ \text{Reemplazo} \end{aligned}$$

$$k_m 2\pi G w_0 R \hat{z} \left[ - \int_R^R \frac{R^2 - u^2}{(R^2 + Z^2 - 2zu)^{3/2}} du \right] =$$

$$= k_m 2\pi G w_0 R \hat{z} \left[ \int_{R-z}^{R+z} \frac{t^2 - (R^2 + Z^2 - t^2)^2}{2t^{3/2}} dt \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } t^2 = R^2 + Z^2 - 2zu \\ 2t dt = -2z du \end{aligned}$$

$$= k_m 2\pi G w_0 R \hat{z} \int_{R-z}^{R+z} \frac{R^2 4z^2 - (R^2 + Z^2)^2 + t^4 + 2(R^2 + Z^2)t^2}{4z^3 t^2} dt$$

$$= \frac{k_m \pi G w_0 R}{2z^3} \hat{z} \int_{R-z}^{R+z} \left[ \underbrace{4R^2 z^2 - (R^2 + Z^2)^2}_{A} + \underbrace{2(R^2 + Z^2)}_{B} - \underbrace{t^2}_{C} \right] dt$$

$|R+z|$ 

Emiliano Fortes

$$\textcircled{A} \int_{|R-z|}^{|R+z|} \frac{4R^2 z^2 - (R^2 + z^2)^2}{t^2} dt = \left. \frac{(R^2 - z^2)^2}{t} \right|_{|R-z|}^{|R+z|} = \frac{(R+z)^2(R-z)^2}{|R+z|} - \frac{(R+z)^2(R-z)^2}{|R-z|}$$

$$= |R+z|(R-z)^2 - |R-z|(R+z)^2$$

$$\textcircled{B} 2(R^2 + z^2) [ |R+z| - |R-z| ]$$

$$\textcircled{C} = -\frac{t^3}{3} \Big|_{|R-z|}^{|R+z|} = -\frac{|R+z|^3 + |R-z|^3}{3}$$

• Sea  $|z| < R \Rightarrow |R+z| = (R+z)$  y  $|R-z| = R-z$

$$\Rightarrow \textcircled{A} \frac{(R+z)^2(R-z)^2}{(R+z)} - \frac{(R+z)^2(R-z)^2}{(R-z)} = (R+z)(R-z)((R-z) - (R+z))$$

$$= (R^2 + z^2)(-z^2) = 2z^3 - 2R^2 z$$

$$\textcircled{B} 2(R^2 + z^2) [R+z - R+z] = 4(R^2 z + z^3)$$

$$\textcircled{C} -\frac{(R+z)^3 + (R-z)^3}{3} = -\frac{(R+z)(R^2 + 2Rz + z^2) + (R-z)(R^2 + 2Rz + z^2)}{3}$$

$$= -\frac{(R+2R^2 z + Rz^2 + zR^2 + 2Rz^2 + z^3) + (R^3 - 2R^2 z + z^2 R - z^2 R^2 + 2Rz^2 - z^3)}{3}$$

$$= -\frac{2}{3} z^3 - 2R^2 z$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C} = 2z^3 - 2R^2 z + 4R^2 z + 4z^3 - \frac{2}{3} z^3 - 2R^2 z = \frac{16}{3} z^3$$

$$\bar{B}_z = \frac{8k_m \pi G W_0 R^4}{3z^3} \hat{z} \quad |z| < R$$

Si  $|z| > R \Rightarrow |R+z| = (R+z) \quad |R-z| = -(R-z)$

$$\textcircled{A} = (R+z)(R-z)^2 + (R-z)(R+z)^2 = (R+z)(R-z)[2R] = 2R^3 - 2Rz^2$$

$$\textcircled{B} = 2(R^2 + z^2)[2R] = 4(R^3 + Rz^2)$$

$$\textcircled{C} = -\frac{(R+z)^3 - (R-z)^3}{3} = -\frac{1}{3} [(R^2 + 2Rz + z^2)(R+z) + (R^2 - 2Rz + z^2)(R-z)] = -\frac{2}{3} R^3 - 2Rz^2$$

$$\boxed{\textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C}} = 2R^3 - 2Rz^2 + 4R^3 + 4Rz^2 - \frac{2}{3} R^3 - 2Rz^2 = \frac{16}{3} R^3$$

$$\bar{B}_z = \frac{8k_m \pi G W_0 R^4}{3z^3} \hat{z} \quad z > R$$

Para  $z < -R$  da lo mismo con el signo cambiado

$$\bar{B}_z(z) = \begin{cases} \frac{8k_m \pi G W_0 R^3}{3} \hat{z} & |z| < R \\ \frac{8k_m \pi G W_0 R^4}{3|z|^3} \hat{z} & |z| > R \end{cases}$$

Bien Poupolo!

## Primer Parcial de Física 3- 2015

Resuelva cada ejercicio en hoja separada. Escriba su nombre en cada hoja.

1. Se tiene un cubo de espesor  $d_1$  con densidad volumétrica  $\rho_0$ . A continuación se agrega un material lineal, isótropo y homogéneo de espesor  $d_2$  y permitividad  $\epsilon$ . Sobre el mismo, se deposita un electrete con polarización  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_0 z^3 + \mathbf{P}_1) \hat{\mathbf{z}}$ . En contacto con dicho material se tiene un plano infinito con densidad de carga superficial  $\sigma_0$  (ver Fig. 1). Notas que los cubos se extienden indefinidamente en el plano  $x - y$ .

(a) Determine todas las fuentes para los campos  $D$ ,  $E$  y  $P$ . Calcule los campos  $D$ ,  $E$  y  $P$  en todo el espacio.

(b) Calcule las cargas de polarización en los dieléctricos y el electrete. Realice un esquema detallado de como se distribuyen todas las cargas de polarización y las cargas libres en todo el espacio.

(c) Encuentre la energía electróstatica almacenada por la configuración.

2. Considere una esfera de radio  $a$  con densidad de carga en volumen,  $\rho = \rho_0 \frac{r}{a}$ , centrada en el origen y un anillo de radio  $2a$  con densidad de carga lineal  $\lambda$ , localizado a una distancia  $4a$  del origen como se muestra en la Fig. 2.

(a) Calcule el campo eléctrico sobre el eje de simetría.

(b) Determine el momento monopolar y dipolar eléctrico. Indique qué relación debe cumplir los parámetros del sistema para que el momento dipolar no dependa del sistema de referencia.

(c) Encuentre el potencial lejos del sistema.

3. Considere el circuito de la Fig. 3.

(a) Calcule la potencia disipada por la resistencia  $R_1$  y la corriente en cada rama.

(b) Calcule el equivalente de Thevenin entre los puntos A y B.

(c) Calcule la carga y la diferencia de potencial sobre cada capacitor.

Datos:  $R = 5\Omega$ ,  $R_1 = 7\Omega$ ,  $C_1 = 2\mu F$ ,  $C_2 = 3\mu F$ ,  $\epsilon = 10V$

Figura 1

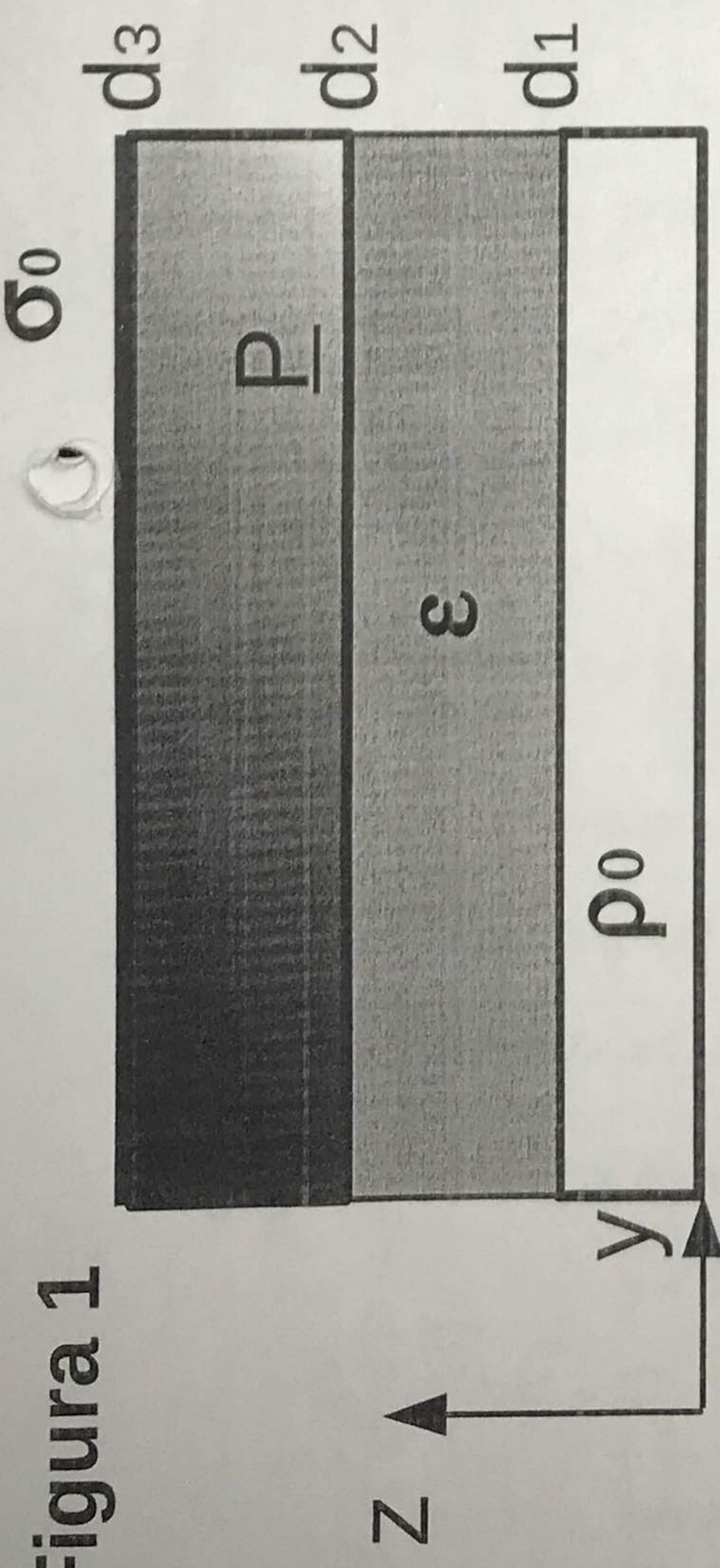


Figura 2

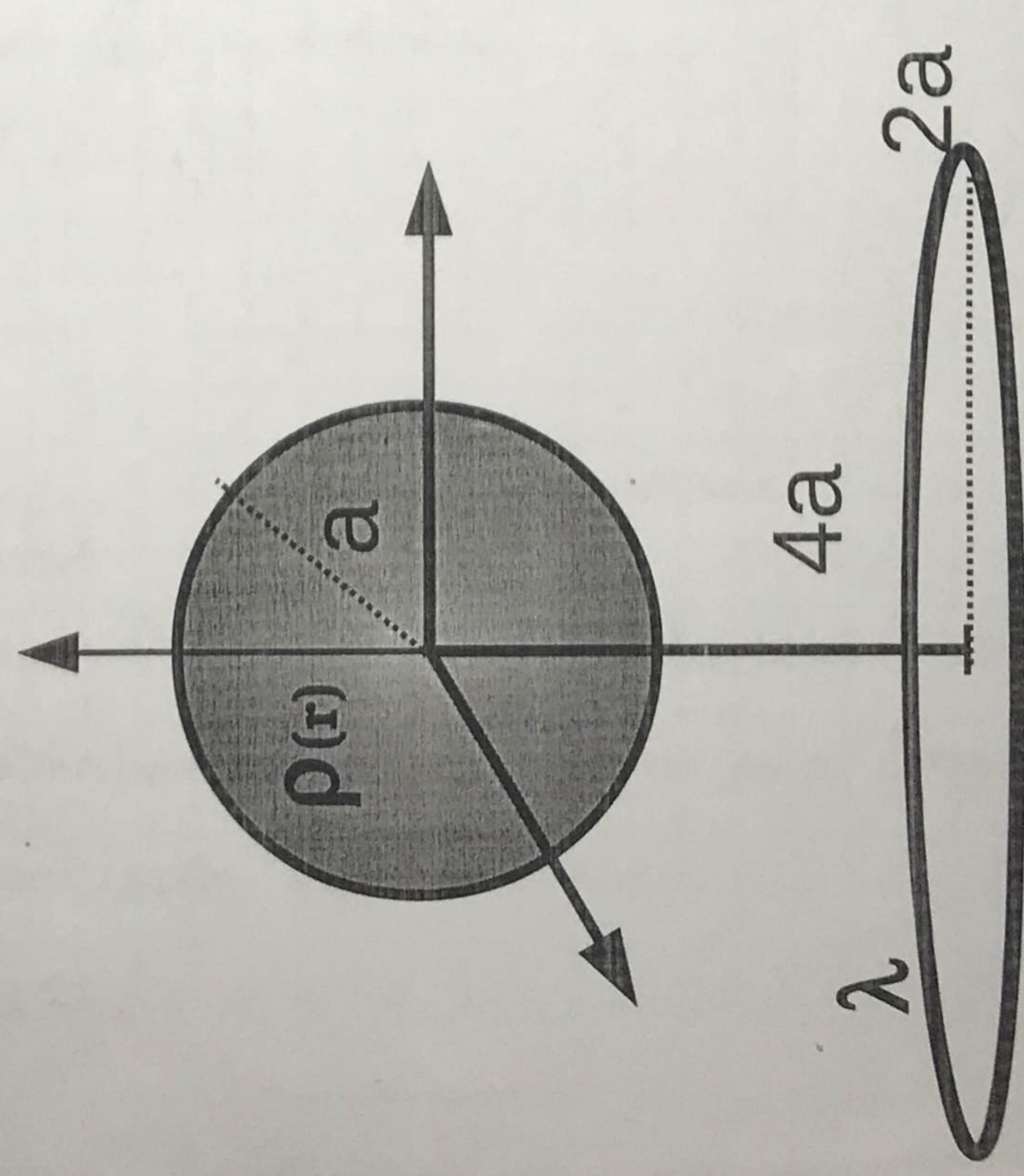
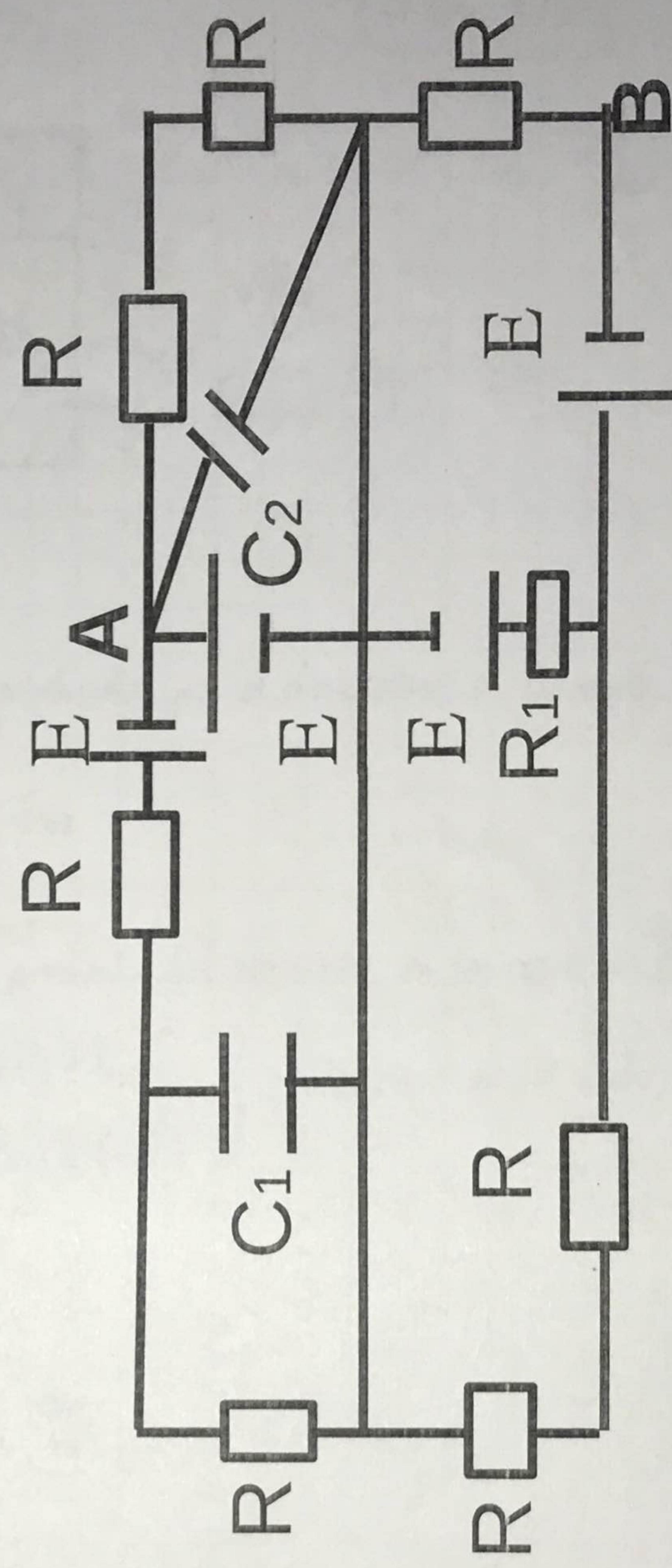
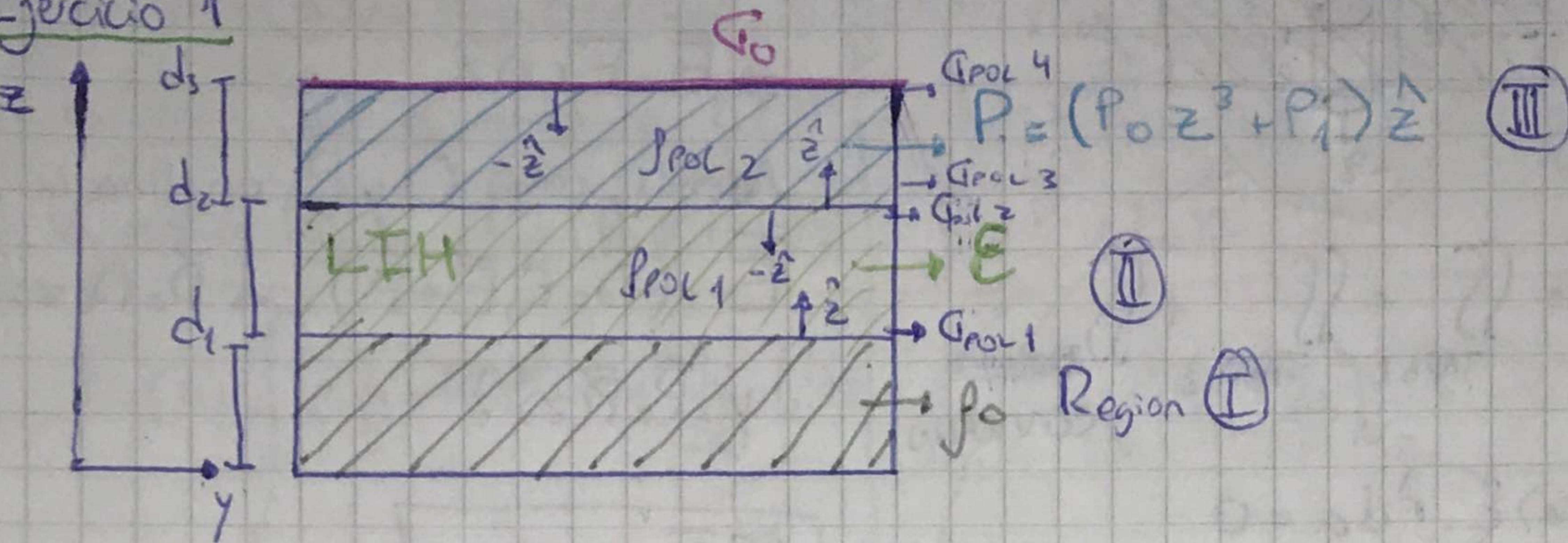


Figura 3



A

Ejercicio 1a) Fuentes de  $\bar{E}, \bar{P}, \bar{D}$ 

$$\nabla \cdot \bar{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sop: } Q_{\text{pol}1} \neq Q_{\text{pol}2} \text{ producidos por el dielectrónico en la región } \text{II} \text{ cuyo } P_{\text{II}} \text{ provoca} \\ Q_{\text{pol}1} = \overline{P_{\text{II}}} \Big|_{z=d_1} \hat{z} \\ Q_{\text{pol}2} = \overline{P_{\text{II}}} \Big|_{z=d_1+d_2} (-\hat{z}) \end{array} \right.$$

$$Q_{\text{pol}3} \text{ y } Q_{\text{pol}4} \text{ producto del electretito en la región } \text{III}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{\text{pol}3} = (P_0 z^3 + P_1) \hat{z} \cdot \hat{z} \\ Q_{\text{pol}4} = (P_0 z^3 + P_1) \hat{z} (-\hat{z}) \end{array} \right\} \text{evaluados en } z = d_2, d_3 \text{ respectivamente}$$

f\_0 en d\_3

Vol: f\_0 en la región  $\text{I}$ Qpol1 en la región  $\text{II}$  por el dielectrónico

$$P_{\text{pol}1} = -\nabla \cdot \bar{P}_{\text{II}}$$

Qpol2 en la región  $\text{III}$  por el electretito

$$P_{\text{pol}2} = -\nabla \cdot (P_0 z^3 + P_1) \hat{z}$$

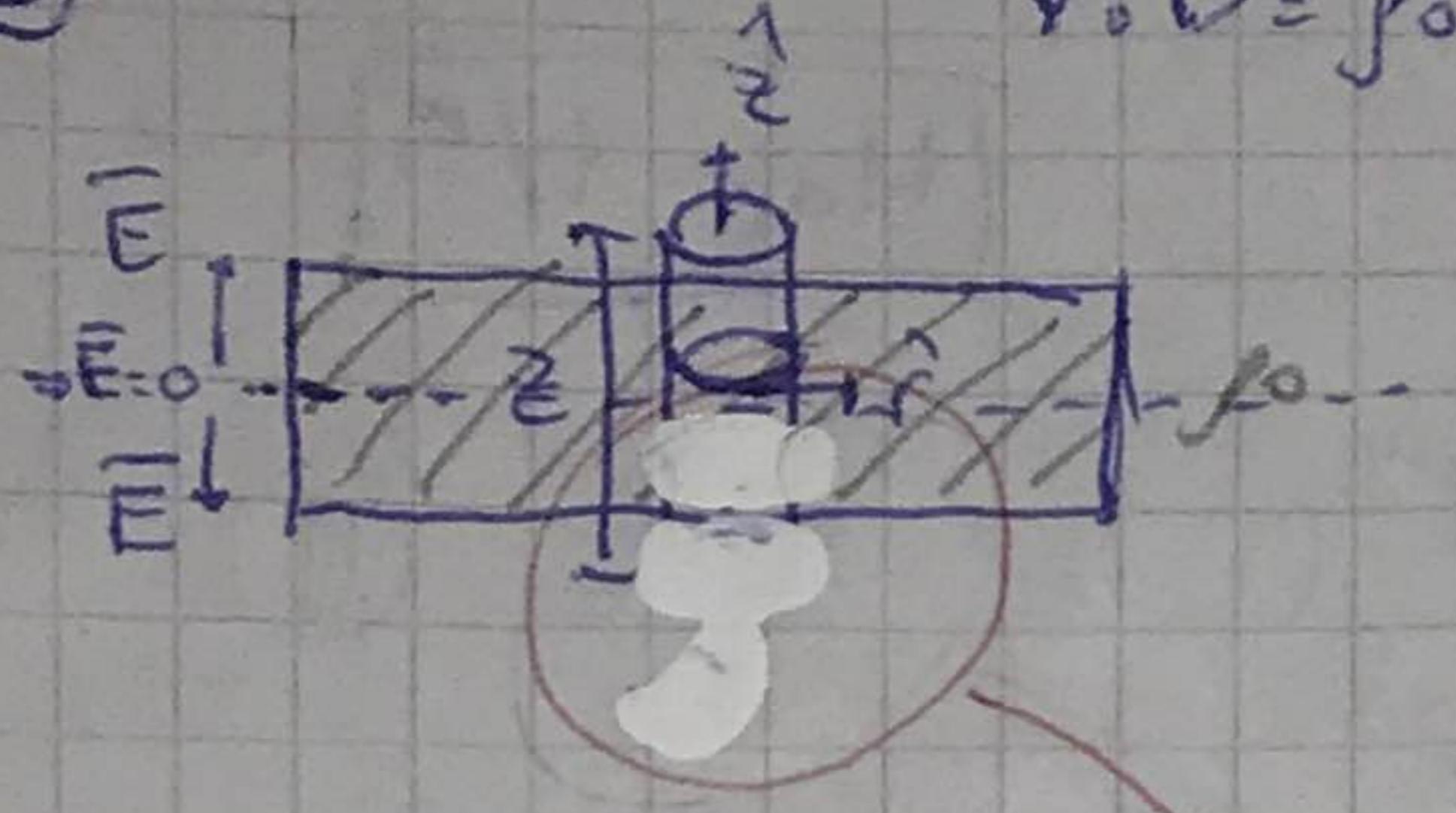
 $\nabla \times \bar{E} = 0$  electrotostática
$$\nabla \cdot \bar{D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sop: } Q_0 \text{ en } d_3 \\ \text{vol: } f_0 \text{ en } \text{región } \text{I} \end{array} \right.$$
vol: f\_0 en  $\text{región } \text{I}$ 

$$\nabla \times \bar{D} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{P} \times \hat{n} = 0 \text{ siempre pues } P \text{ es } z \text{ direccional (lo aduce atrás de esta liga)} \\ \text{y } \hat{n} \text{ es } z \text{ direccional siempre (muestra en el dibujo)} \end{array} \right.$$

$$\nabla \times \bar{P} = 0 \text{ por la misma razón } P \text{ es } z \text{ direccional}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & P(z) \end{vmatrix} = 0$$

⇒ en ①



$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{a} = \iint_{\text{CILINDRO}} + \iint_{\text{TAPA } 1} + \iint_{\text{TAPA } 2} + \iint_{\text{CONTO}}$$

$$\iint_{\text{CONTO}} D(z) \hat{E} \cdot d\bar{a} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\text{TAPA } 1} = \iint_0^{2\pi} D(z) r dr d\varphi = D(z) \cdot \text{Area}_{\text{TAPA}}$$

$$\Rightarrow D(z) (\text{Area}_{\text{TAPA } 1} + D(z) \text{Area}_{\text{TAPA } 2}) = \rho_0 2 \text{Area}_{\text{TAPA}} \cdot (z - d_{1/2})$$

Son iguales  
⇒  $\text{Area}_{\text{TAPA } 1} = \text{Area}_{\text{TAPA } 2}$

Area Altura =  $V_0$

Como aparece el signo + ?

$$\Rightarrow \bar{D}(z) = \rho_0 (z - d_{1/2}) \hat{z} \quad \text{si } z > d_{1/2} \quad \text{si } 0 < z < d_1$$

A partir de  $d_1$ , no hay cargas libres dentro de  $d_3$

$$\Rightarrow \bar{D}(z) = \begin{cases} \rho_0 d_{1/2} \hat{z} & z > d_1, z < d_3 \\ \rho_0 (z - d_{1/2}) \hat{z} & 0 < z < d_1 \\ -\rho_0 d_{1/2} \hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

(Utilizando Gauss de forma similar)

$$\text{en } d_3 \quad Q_{\text{enc}} = \rho_0 d_{1/2} \cdot 2 \text{Area Tapa} + G_0 \cdot \text{Area Tapa}$$

$$\Rightarrow D(z) \cdot 2 \text{Area Tapa} = (\rho_0 d_{1/2} \cdot 2 + G_0) \text{Area Tapa}$$

$$\bar{D}(z) = \rho_0 d_{1/2} + \frac{G_0}{2} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \bar{D}(z) = \begin{cases} \rho_0 d_{1/2} + \frac{G_0}{2} \hat{z} & z > d_3 \\ \rho_0 d_{1/2} \hat{z} & d_1 < z < d_3 \\ \rho_0 (z - d_{1/2}) \hat{z} & 0 < z < d_1 \\ -\rho_0 d_{1/2} \hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

Aquí NO hay campo debido a  $G_0$  ??!!

En la región  $\text{I}$ , no hay dielectrjos,  $\Rightarrow \bar{D} = \bar{E}$

Ahora de los regiones

En la región  $\text{II}$  el medio es LIH  $\Rightarrow \bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$  / si hay vacío  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$

En la región  $\text{III}$   $\bar{P} = (P_0 z^3 + P_1) \hat{z}$   $\bar{D} - \bar{P} = \epsilon_0 \bar{E}$

$$\bar{E}(z) = \begin{cases} \left[ P_0 \frac{d_1}{2} + P_0 z^3 - P_1 \right] \hat{z} & d_2 < z < d_3 \\ \left( P_0 \frac{d_1}{2} + \frac{\epsilon_0}{z} \right) \hat{z} & z > d_3 \end{cases}$$

$$\frac{P_0 d_1}{2 \epsilon_0} \hat{z} \quad d_1 < z < d_2$$

$$\frac{P_0}{\epsilon_0} (z - d_1) \hat{z} \quad 0 < z < d_1$$

$$-\frac{P_0 d_1}{2 \epsilon_0} \hat{z} \quad z < 0$$

Falta el campo de  $\epsilon_0$

$$\bar{P} = \begin{cases} 0 & z > d_3 \\ (P_0 z^3 + P_1) \hat{z} & d_2 < z < d_3 \\ \left( P_0 \frac{d_1}{2} - P_0 \frac{d_1}{2} \frac{\epsilon_0}{z} \right) \hat{z} & d_1 < z < d_2 \\ 0 & z < d_1 \end{cases}$$

Falta  $\epsilon_0$

b)  $Q_{pol,4} = (P_0 z^3 + P_1) \hat{z} \cdot (-\hat{z})$  con  $z = d_3$

$$\Rightarrow Q_{pol,4} = +P_0 d_3^2 + P_1$$

$$Q_{pol,3} = (P_0 d_2^3 + P_1) \hat{z} \cdot (\hat{z})$$

$$Q_{pol,3} = (P_0 d_2^3 + P_1)$$

$$Q_{pol,2} = -\nabla \cdot \bar{P} = -\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) = -3P_0 z^2$$

$$f_{POL,1} = -\nabla \cdot \bar{P}_I = -\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0$$

$$Q_{pol,2} = \left( P_0 \frac{d_1}{2} - P_0 \frac{d_1}{2} \frac{\epsilon_0}{z} \right) \hat{z} \cdot (-\hat{z}) = P_0 \frac{d_1}{2} \left( -1 + \frac{\epsilon_0}{z} \right)$$

$$Q_{pol,1} = \left( P_0 \frac{d_1}{2} - P_0 \frac{d_1}{2} \frac{\epsilon_0}{z} \right) \hat{z} (\hat{z}) = P_0 \frac{d_1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_0}{z} \right)$$

c)

$$U = \iiint_{\text{Vol}} \bar{E} \cdot \bar{D} d\text{vol}$$

Para region 1)  $U_1 = \frac{1}{2} \iint_{\text{Area transversal}}^{\text{d}_1} \bar{E} \cdot \bar{D} d\text{vol} = \frac{1}{2} \iint_{\text{Area}}^{\text{d}_1} \frac{\rho_0^2 (z - dy_2)^2}{\epsilon_0} dx dy dz$

$$= \frac{1}{2} \frac{A \cdot \rho_0^2}{3 \epsilon_0} (z - dy_2)^3 \Big|_0^{\text{d}_1} = \frac{A \rho_0^2 \text{d}_1^3}{6 \epsilon_0}$$

2)  $U_2 = \frac{1}{2} A \iint_{\text{Area}}^{\text{d}_2 + \text{d}_1} \frac{\rho_0^2 dy^2}{\epsilon_0} dz = \frac{1}{2} A \frac{\rho_0^2 \text{d}_1^2}{9 \epsilon_0} (\text{d}_2 - \text{d}_1)$

arreglo  
error del  
go

3)  $U_3 = \frac{1}{2} A \iint_{\text{d}_2}^{\text{d}_3} \left( \rho_0 \frac{dy}{2} + \frac{G_0}{2} \right) \left( \frac{\rho_0 dy}{2} - P_1 z^3 - P_1 \right) dz$

$$= \frac{1}{2} A \left( \rho_0 \frac{dy}{2} + \frac{G_0}{2} \right) \left[ \left( \frac{\rho_0 dy}{2} - P_1 \right) (\text{d}_3 - \text{d}_2) - \frac{P_0 (\text{d}_3^4 - \text{d}_2^4)}{4} \right]$$

$U = U_1 + U_2 + U_3$

Ejercicio 2 (B)

a) Por superposición  $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$  donde  $\bar{E}_1$  es el campo generado por la esfera y  $\bar{E}_2$  por el anillo

•  $\bar{E}_1$  Utilizando Gauss se que  $\iiint_{\text{Sup}} \bar{E} \cdot d\bar{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$

$$Q_{\text{enc}} = \int_{\text{VOL}} p(\vec{r}) d^3r$$

$$p(\vec{r}) = p_0 \cdot \frac{r}{a}$$

$$\Rightarrow Q_{\text{enc}} = \iiint_{0 \ 0 \ 0} \frac{4\pi r}{a} \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \quad (\text{en esféricas})$$

Luego por la simetría de la configuración (radial o esférica)  $\bar{E}_1 = E_1(r) \hat{r}$

$$\Rightarrow \iint_{\text{Sup}} E_1(r) \cdot \hat{r} \hat{r} da = \int_{\text{Vol}} p(\vec{r}) d^3r$$

Utilizando una superficie de Gauss esférica con  $r < a$  (fijo)

Se obtiene para el campo  $\bar{E}_1$  con  $r < a$  Área

$$\iint_{0 \ 0}^{2\pi \ 2\pi} E_1(r) \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = E_1(r) \iint_{\text{Sup}} (da) = E_1(r) \cdot 4\pi r^2$$

y para ese  $r$  fijo la carga encerrada

$$\int_{0 \ 0}^{2\pi \ 2\pi} \left( \frac{p_0}{a} \sin(\theta) \right) \left[ \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^r d\theta d\phi$$

$$= \frac{p_0 a}{a} \frac{r^4}{4} \int_{0 \ 0}^{2\pi \ 2\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{p_0 r^4}{4} \cdot 2\pi \cdot (\cos(\theta)) \Big|_0^{\pi} = \pi r^4$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$= \frac{p_0 r^4 \pi}{a} \Rightarrow E_1(r) \frac{4\pi r^2}{a} = \frac{p_0 r^4 \pi}{a \epsilon_0}$$

$$E_1(r) = \frac{k \pi k p_0 r^2}{4a}$$

$$\bar{E}_1(r) = \frac{k \pi p_0 r^2}{a} \quad \text{si } r < a$$

Si  $r > a$  el cálculo es análogo con la única diferencia de que la carga encerrada queda fija a radio  $a$  (y luego se acaba la densidad de carga)

$$\Rightarrow Q_{enc} = \pi \rho_0 a^3$$

$$\Rightarrow \bar{E}_1(r) = \frac{\rho_0 a^3 k \pi}{r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_1 = \begin{cases} \frac{k \pi \rho_0 r^2}{a} \hat{r} & r < a \\ \frac{k \pi \rho_0 a^3}{r^2} \hat{r} & r > a \end{cases} \quad \text{si se quiere sobre el eje } z \Rightarrow \bar{x}^2 = \bar{z}^2, \hat{r} = \hat{z}$$

$$\bar{E}_2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{k \lambda [(0, 0, z) - (r' \cos(\phi'), r' \sin(\phi'), -4a)] \cdot r' d\phi'}_{((z+4a)^2 + r'^2)^{3/2}} = 0 \quad (\text{integrando entre } 0 \text{ y } 2\pi)$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{k \lambda (-4a^2 \cos(\phi'), -4a^2 \sin(\phi'), 2za + 8a^2)}_{((z+4a)^2 + 4a^2)^{3/2}} d\phi'$$

$$\Rightarrow \bar{E}_2 = \frac{k \lambda 2\pi (2za + 8a^2)}{((z+4a)^2 + 4a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Finalmente

$$\bar{E} = \begin{cases} \frac{k \pi \rho_0 z^2}{a} \hat{z} + \bar{E}_2 & z < a \\ \frac{k \pi \rho_0 a^3}{z^2} \hat{z} + \bar{E}_2 & z > a \end{cases}$$

no depende de  $z$  ni  $r$ ,  $r = 2a$

$$(b) Q_{tot} = \pi \rho_0 a^3 + \int_0^{2\pi} \lambda r a d\phi$$

carga encerrada  
en la esfera

momento monopolar

$$\Rightarrow Q_{tot} = \pi \rho_0 a^3 + \frac{4}{3} \pi a \lambda$$

Si se desea que el momento dipolar no dependa del sistema de referencia  $\Rightarrow Q_{tot} = 0$

$$\Rightarrow \rho_0 a^3 + 4 \lambda a = 0 \Leftrightarrow \rho_0 = -\frac{4 \lambda}{a^2}$$

$$\bar{P} = \iiint_{Vol} \rho(r') \bar{r}' d^3 r = \iiint_{Vol} \frac{\rho_0 \cdot r'}{a} (r' \cos(\theta) \sin(\phi), r' \sin(\phi) \sin(\theta), r' \cos(\theta) \sin(\phi)) dr' d\theta d\phi$$

$= 0$  entre  $0$  y  $2\pi$

$= 0$  entre  $0$  y  $2\pi$

$$+ \int_0^{2\pi} \lambda (2a \cos(\phi'), 2a \sin(\phi'), -4a) \cdot 2a d\phi' = -16\pi a^2 \lambda \hat{z}$$

$= 0$  entre  $0$  y  $2\pi$

NOTA

c) Utilizando desarrollo multipolar

$$V(r) \approx k \frac{Q}{r} + k \frac{\Theta}{r^3} F$$

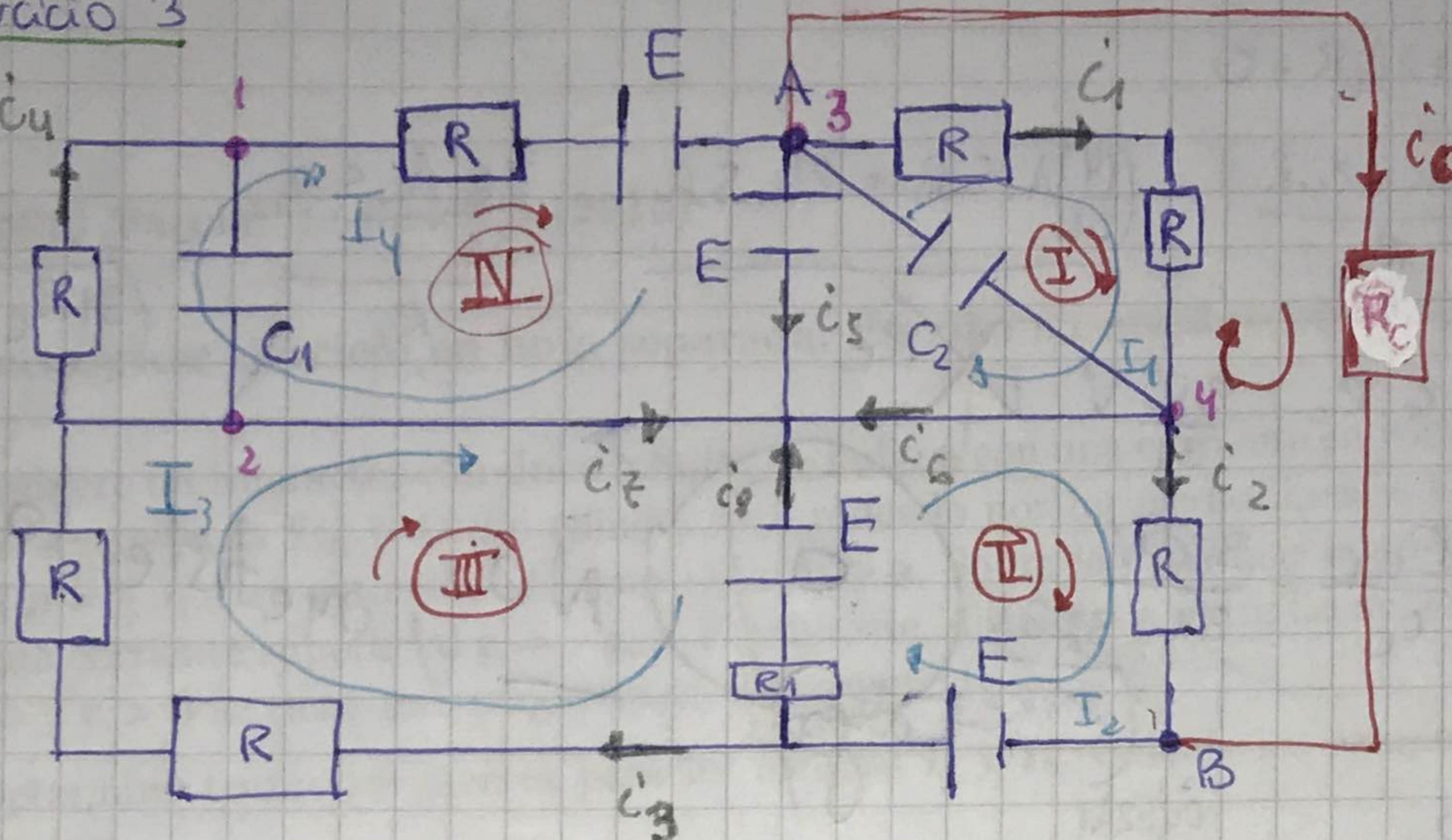
$$= \boxed{k \frac{(\pi p_0 a^3 + 4\pi a \lambda)}{r} + k \frac{(-16\pi a^2 \lambda z^2)}{r^5}}$$

MBuni

# Ejercicio 3

Emilio Forte

Hoja FESHAIS



a) Pot dissipada por  $R_1$

## Por mallas

$$i_1 = I_1, \quad i_2 = I_2, \quad i_3 = I_3, \quad i_4 = I_4, \quad i_5 = I_4 - I_1$$

$$i_6 = I_1 - I_2, \quad i_7 = I_3 - I_4, \quad i_8 = I_2 - I_3$$

$$\textcircled{I} \quad -I_1 R + E = 0 \quad \textcircled{II} \quad -I_2 R - I_2 R_1 + \cancel{E} - \cancel{E} + I_3 R_1 = 0$$

$$\textcircled{II} - I_3 \cdot 2R + E + I_2 R - I_3 R = \textcircled{III} - I_4 \cdot 2R - E - E = 0$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{E}{2R} \quad I_2 = -\frac{E}{2R}$$

$$\frac{I_2(R+R_1)}{R_1} = I_3 \quad I_3 = \frac{12}{7} I_2$$

$$\frac{I_2(R+R_1)}{R_1} = \frac{E + I_2 R_1}{(2R+R_1)}$$

$$I_3 = \frac{E + I_2 R_1}{(2R + R_1)} \Rightarrow I_3 = \frac{10}{17} A + \frac{7}{17}$$

## Reemplazando

$$\frac{12}{7}I_2 - \frac{7}{12}I_2 = \frac{10}{17} \text{ A} \quad I_2 = \frac{14}{31} \text{ A} \quad I_3 = \frac{24}{31} \text{ A}$$

$$I_1 = 1 \text{ A} \quad I_4 = -2 \text{ A}$$

$$c_1 = 1A$$

$$G_3 = \frac{24}{31} A$$

$$i_5 = -3A$$

$$C_7 = \frac{86}{31} A$$

$$i_2 = \frac{14}{31} A$$

6-2A

$$c_6 = \frac{17}{31} \text{ \AA}$$

$$B = \frac{-10}{31} A$$

$$\text{Pot}(R_1) = i_8^2 \cdot R = \left( \frac{500}{96.1} \right) A^2 \cdot 2$$

b)  $-i_C R_C + i_2 R + 2i_1 R = 0$

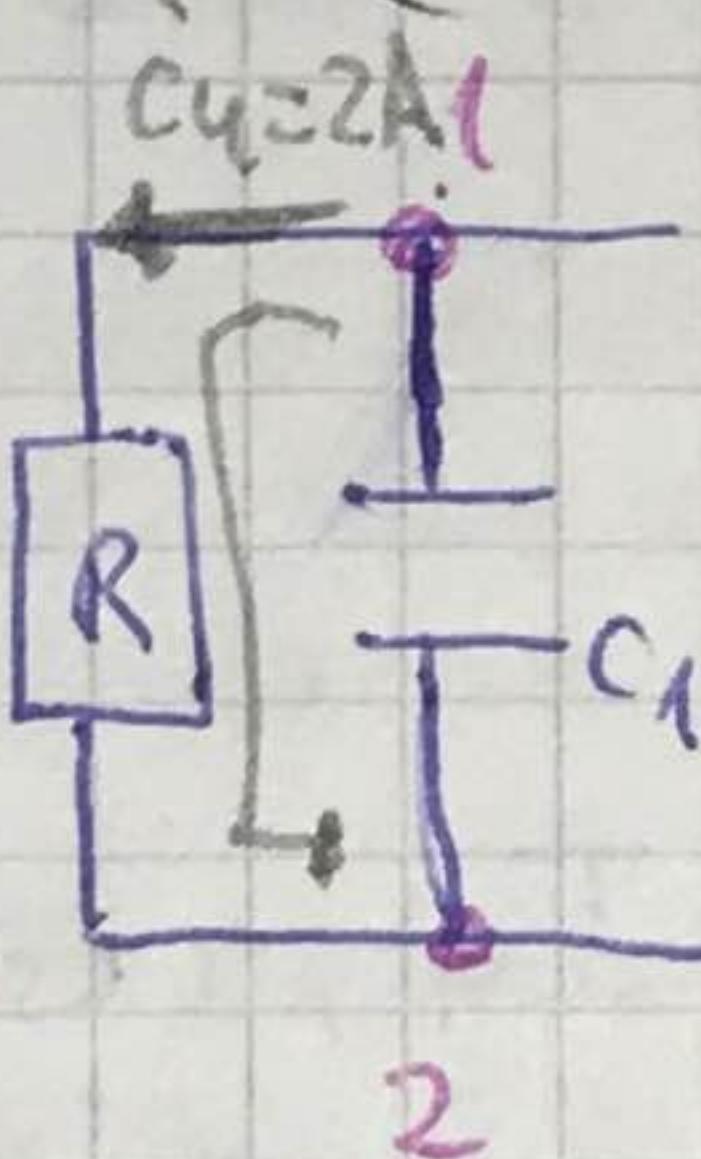
$$\Rightarrow i_C = \frac{i_2 R + 2i_1 R}{R_C} = \frac{\left(\frac{14}{31}\right) A \cdot 5\Omega + 2A \cdot 5\Omega}{\frac{76}{31} A \cdot 5\Omega} = \frac{380V}{31 R_C + \text{algo}} = \frac{380V}{(31 R_C + \text{algo})}$$

$$E_{eq} = \lim_{R_C \rightarrow \infty} i_C \cdot R_C = \frac{380V}{31}$$

$$R_{eq} = \lim_{R_C \rightarrow 0} \frac{E_{eq}}{i_C} = \frac{380V}{31 \cdot 380V} = \frac{1}{31} \Omega$$

NO, metiste la parte!!

c) Entre 1 y 2



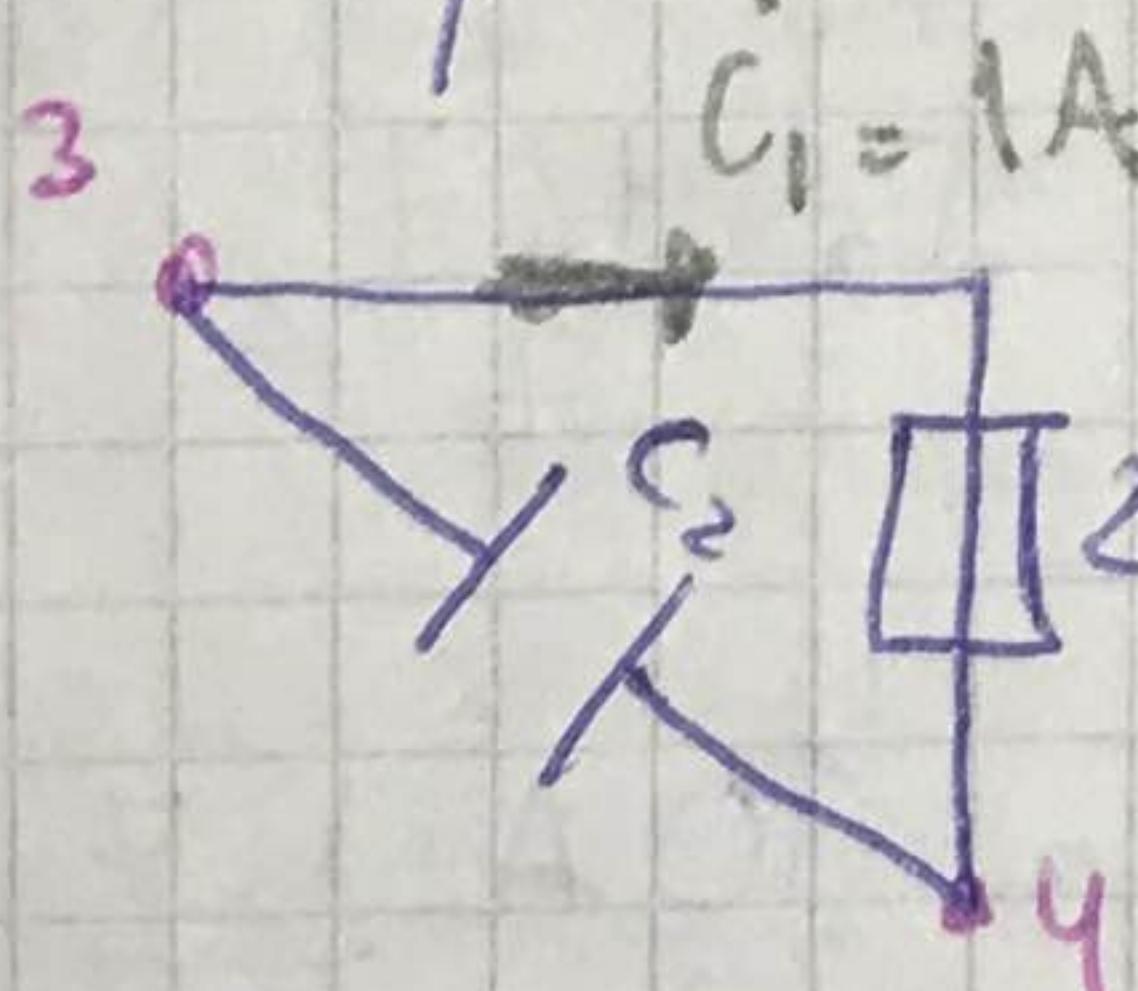
$$\Rightarrow \Delta V = i_4 \cdot R$$

$$= 2A \cdot 5\Omega = 10V \text{ pero es la única resistencia en el camino}$$

$$\Rightarrow Q_1 = C_1 \Delta V_1$$

$$Q_1 = 2\mu F \cdot 10V$$

Entre 3 y 4



(Junta las resistencias en serie para el cálculo rápido)

$$\Delta V_2 = i_1 \cdot 2R = 1A \cdot 10\Omega = 10V$$

$$\Rightarrow Q_2 = C_2 \cdot \Delta V_2 = 3\mu F \cdot 10V$$

## Segundo Parcial de Física 3 (2015)

Resuelva cada ejercicio en hoja separada. Escriba su nombre en cada hoja.

1. Considere un conductor cilíndrico infinito de radio  $a$  con una corriente en volumen  $\mathbf{J} = J_0 r^2 \hat{\mathbf{z}}$ , como se muestra en la Fig. 1. Dicho cilindro está rodeado por un medio lineal e isótropo con permitividad  $\mu = \frac{\alpha}{r}$  que se extiende hasta un radio  $b > a$ . Sobre la superficie conductora de radio  $b$  se tiene una corriente superficial  $\mathbf{g} = -g_0 \hat{\mathbf{z}}$ . Finalmente, distribuida entre las superficies cilíndricas de radio  $b$  y  $c > b$  se tiene una magnetización permanente  $\mathbf{M} = \frac{\beta}{r} \hat{\theta}$ .

(a) Determine **todas** las fuentes para los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . Calcule los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  en todo el espacio.

(b) Calcule las cargas de magnetización y las corrientes de magnetización. Realice un esquema detallado de cómo se distribuyen todas las cargas y las corrientes en todo el espacio.

(c) Determine el potencial vector  $\mathbf{A}$  en todo punto del espacio.

2. Se tiene una barra metálica de longitud  $a$  deslizándose con velocidad constante sobre dos rieles paralelos, ubicados a una distancia  $d$  de un cable infinito con corriente  $I_0$  (ver Fig. 2). Considere que los rieles se conectan entre si por medio de una autoinductancia  $L$  en serie con una resistencia  $R$ . Inicialmente, la barra se ubica a una distancia  $a$  de la autoinductancia y no circula corriente por la misma.

(a) Determine la inductancia mutua entre el cable infinito y la espira formado por la barra.

(b) Halle la corriente en función del tiempo que circula por la espira formado por la barra. Indique el sentido de circulación de la corriente inducida y el sentido del campo magnético inducido.

(c) Calcule la fuerza que habría que ejercer sobre la barra para mantener su velocidad constante. Realice un diagrama de cuerpo libre para la espira.

3. Considere el circuito de la Fig. 3. con una fuente de corriente alterna  $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t)$ .

(a) Calcule la corriente que circula por cada inductancia, determinando su módulo y fase.

(b) Calcule el equivalente de Thevenin entre los puntos A y B.

(c) Calcule la potencia disipada por la fuente y compárela con la potencia disipada por las resistencias.

Datos:  $R = 10\Omega$ ,  $L_1 = 0,2H$ ,  $L_2 = 0,4H$ ,  $C = 2mF$ ,  $E_0 = 10V$ ,  $w = 50Hz$

Figura 1



Figura 2

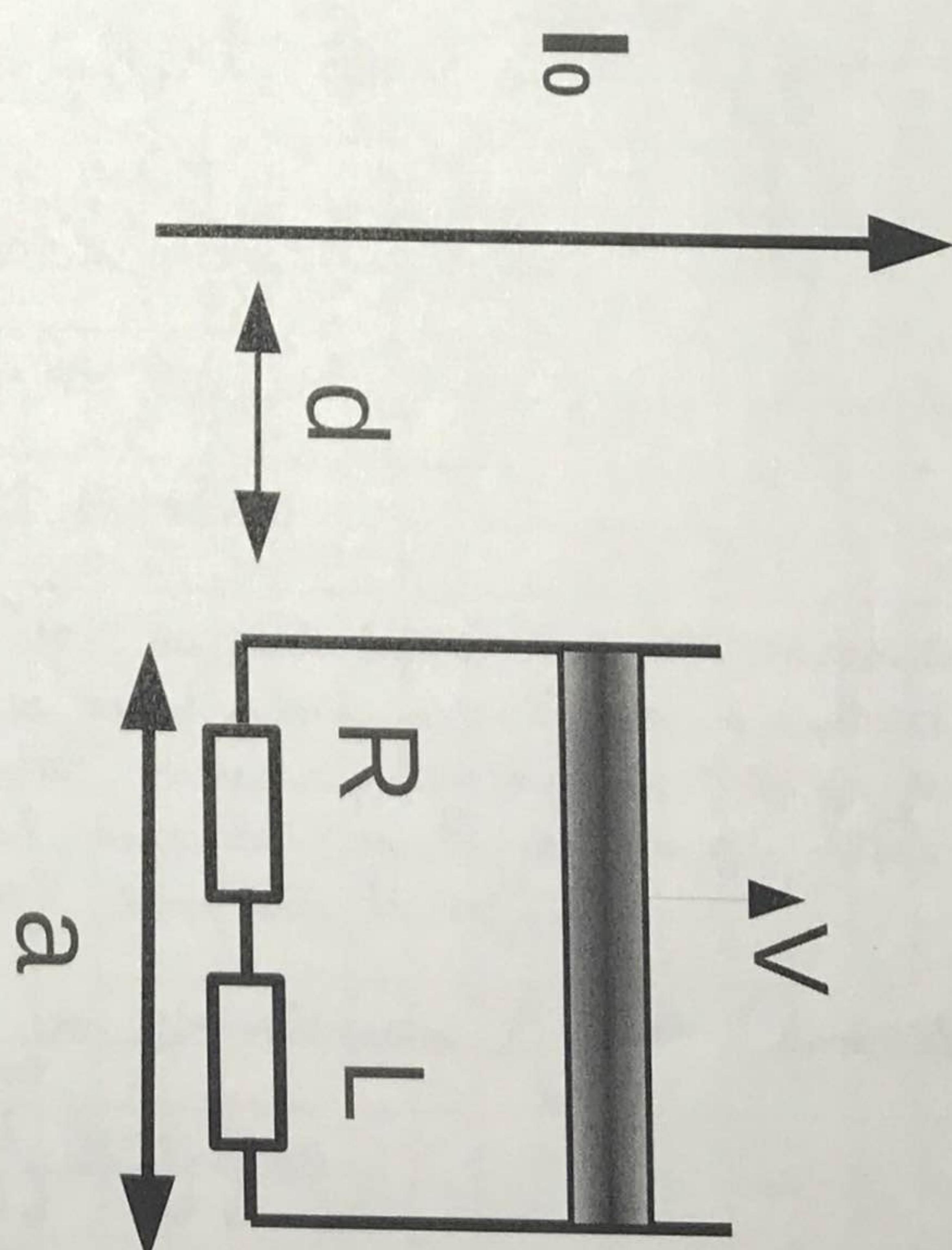
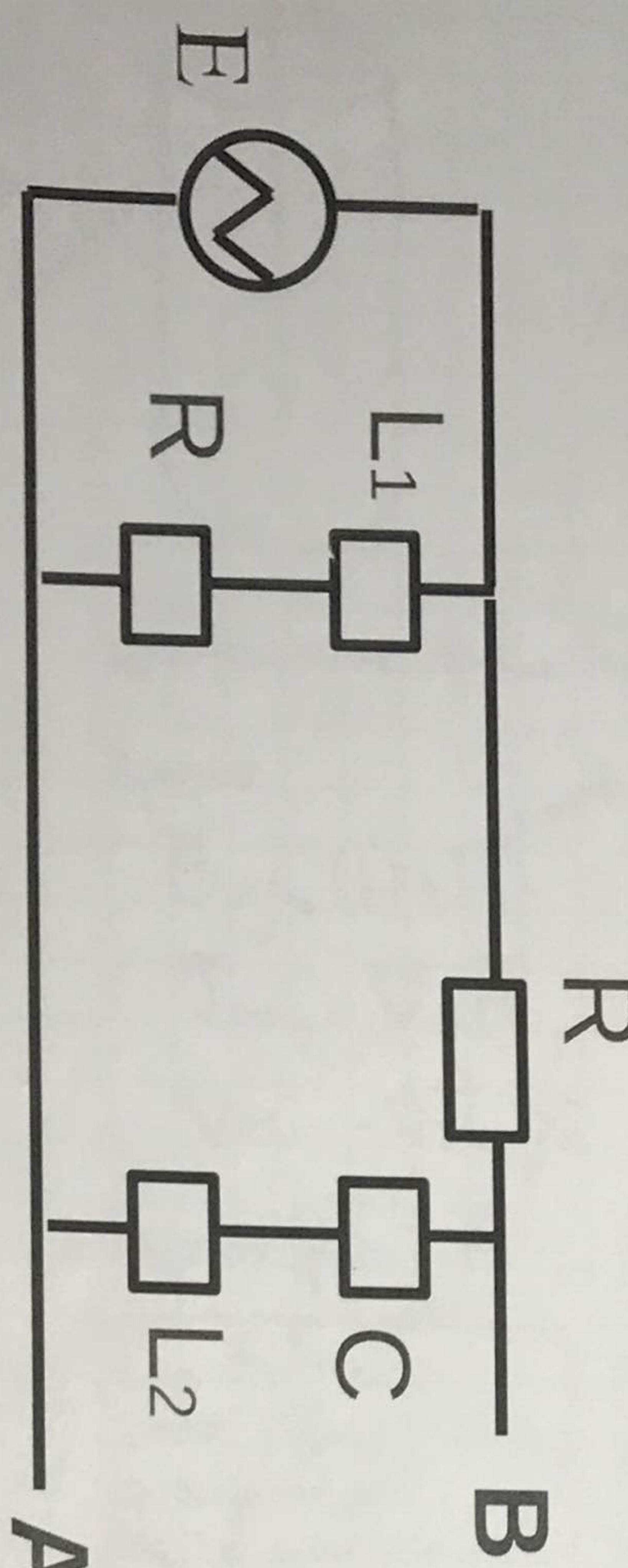
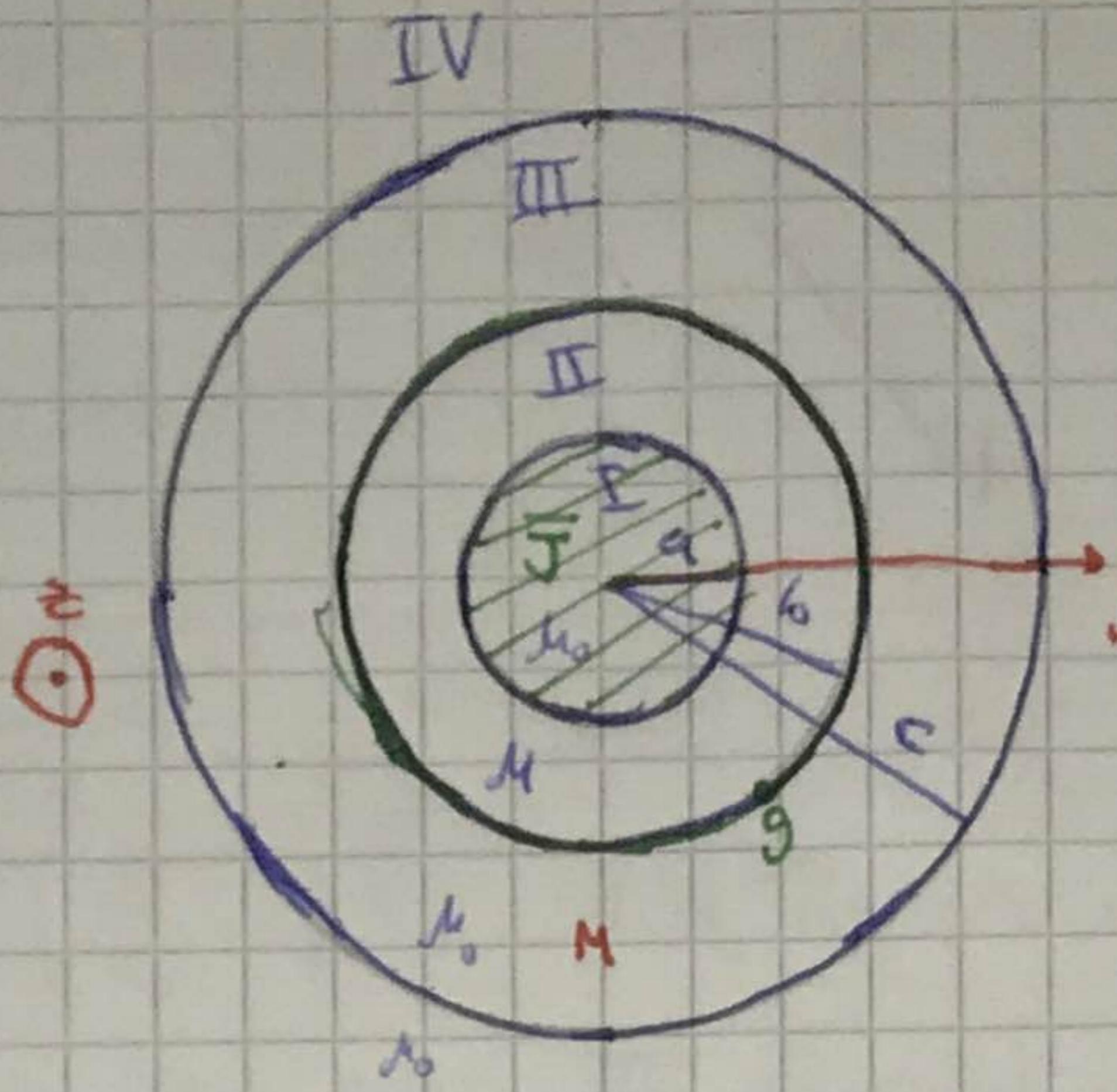
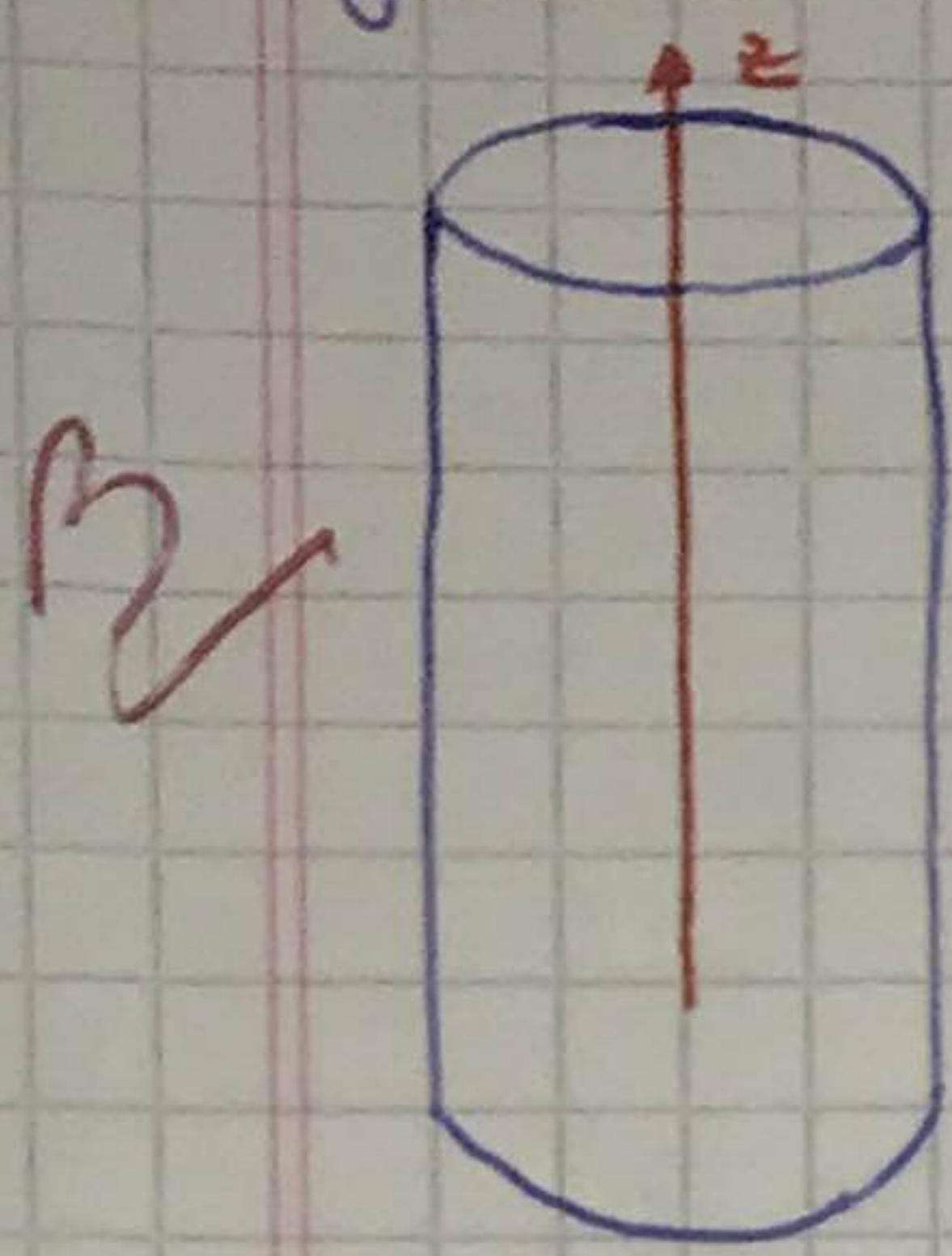


Figura 3



### Ejercicio 1



$$\begin{aligned} \bar{J} &= J_0 r^2 \hat{z} & r < a \\ M &= \frac{a}{r} \hat{z} & a < r < b \\ \bar{g} &= -g_0 \hat{z} & r = b \\ \bar{M} &= \frac{\beta}{r} \hat{\phi} & b < r < c \end{aligned}$$

Emiliano  
Fortes

Hoja 1/2

- a) Determine todas las fuentes de  $B$  y  $H$ . Calcule  $B$ ,  $H$  y  $M$  en todo el espacio.

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) \quad (\text{siempre})$$

$$\bar{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \bar{M}$$

$$\nabla \bar{H} = -\nabla \bar{M} = \bar{j}_f$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} = \mu_0 (\bar{J}_{\text{lib}} + \bar{J}_{\text{mag}})$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (\text{MLI})$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{j}_{\text{lib}}$$

#### Fuentes para $\bar{B}$

Para  $\bar{B}$  tengo las fuentes libres, ya dadas y la producto de la magnetización por el MLI (II) y la permanente (III)

$$\bar{J} = J_0 r^2 \hat{z} \quad r < a$$

$$\text{y } \bar{g}_{\text{mag}} = \bar{M} \times \hat{z}$$

$$\bar{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \bar{M} \quad r > a; r < b \quad (\text{en principio, aunque no se cuenta a c\'un})$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\text{mag}} &= \nabla \times \bar{M} = \nabla \times \bar{B} \hat{\phi} = \\ &= \left( \frac{1}{r} \partial_r (M_z - \partial_z M_\phi) \right) \hat{r} + \left( \partial_z M_\phi - \partial_\phi (M_z) \right) \hat{\phi} = \\ &+ \frac{1}{r} \left( \partial_\phi (g R_\phi) - \partial_r (M_\phi) \right) \hat{z} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\text{mag}} &= \nabla \times \bar{B} \hat{\phi} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial \phi} \hat{r} = -\frac{\beta}{b} \hat{r} \\ &\rightarrow \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \times (-\hat{r}) \cdot \frac{\beta}{c} \hat{z} \end{aligned}$$

#### Fuentes para $\bar{H}$

Para  $\bar{H}$  solo tengo las fuentes de corriente libres

$$\bar{J} = J_0 r^2 \hat{z} \quad r > a$$

$$\bar{g} = -g_0 \hat{z} \quad r = b$$

$$\nabla \bar{H} = -\nabla \bar{M} = 0 \quad \text{en } r \in (b, c)$$

#### Calculo de $\bar{H}$

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \oint \bar{j}_{\text{lib}}$$

$\bar{H} = H(r) \hat{\phi}$ , no puede depender de  $z$  por simetría de fuentes ni ubicarse en el mismo pues  $H$  debe enrollarse a la distribución, tampoco puede depender de  $\phi$  por simetría rotacional. Luego debe ser  $H(r)$  para que  $\nabla \bar{H} = 0$  no puede ser  $H(r) \hat{r}$ . Finalmente  $\bar{H} = H(r) \hat{\phi}$

Empiezo en la región I. Tomando una circunferencia ( $r < a$ ) (dentro de la región II)

$$\text{obtenemos } \int_0^{2\pi} H(r) \hat{\phi} \, r d\phi \hat{\phi} = \iint_0^a J_0 r^2 j \, dr \, d\phi$$

$$= 2\pi r^2 H(r) = 2\pi r^2 J_0 \frac{r^4}{4} \Rightarrow H(r) = \frac{J_0 r^3}{4} \quad \text{Luego } \bar{H}(r) = \frac{J_0 r^3}{4} \hat{\phi} \quad r < a$$

Utilizando para la región II ( $r > b$ ) otra curva de circunferencia con  $r > a$ ,  $r < b$

obtenemos

$$\int_0^{2\pi} H(p) p d\phi = \int_0^{2\pi} J_0 p^3 d\phi$$

$$2\pi H(p)p = \frac{J_0 a^4}{4} \cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$\bar{H}(p) = \frac{J_0 a^4}{4p} \hat{\phi}$$

Por ultimo, la última fuente se encuentra en  $p=b$

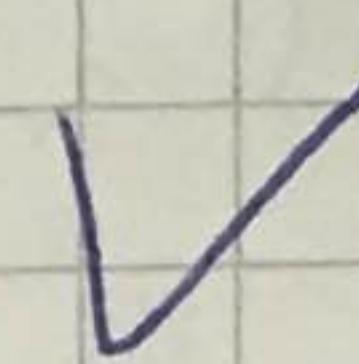
utilizando una circunferencia para la región III cuya radio sea  $p \geq b$

$$\text{se tiene } 2\pi \bar{H}(p)p = 2\pi \frac{J_0 a^4}{4} + \int_0^{2\pi} -g_0 \cdot b d\phi = \frac{J_0 a^4}{4} 2\pi + 2\pi g_0 b$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}(p) = \left( \frac{J_0 a^4}{4} - g_0 b \right) \frac{1}{p} \hat{\phi}$$

Finalmente

$$\boxed{\bar{H} \begin{cases} \frac{J_0 p^3}{4} \hat{\phi} & p \leq a \\ \frac{J_0 a^4}{4p} \hat{\phi} & a < p < b \\ \left( \frac{J_0 a^4}{4} - g_0 b \right) \frac{1}{p} \hat{\phi} & p \geq b \end{cases}}$$



### Cálculo de $\bar{B}$

En la región I vale por ser vacío  $\Rightarrow \bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})$

$$\Leftrightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} \text{ en } p < a$$

En la región II hay un MLI  $\Rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad a < p < b$

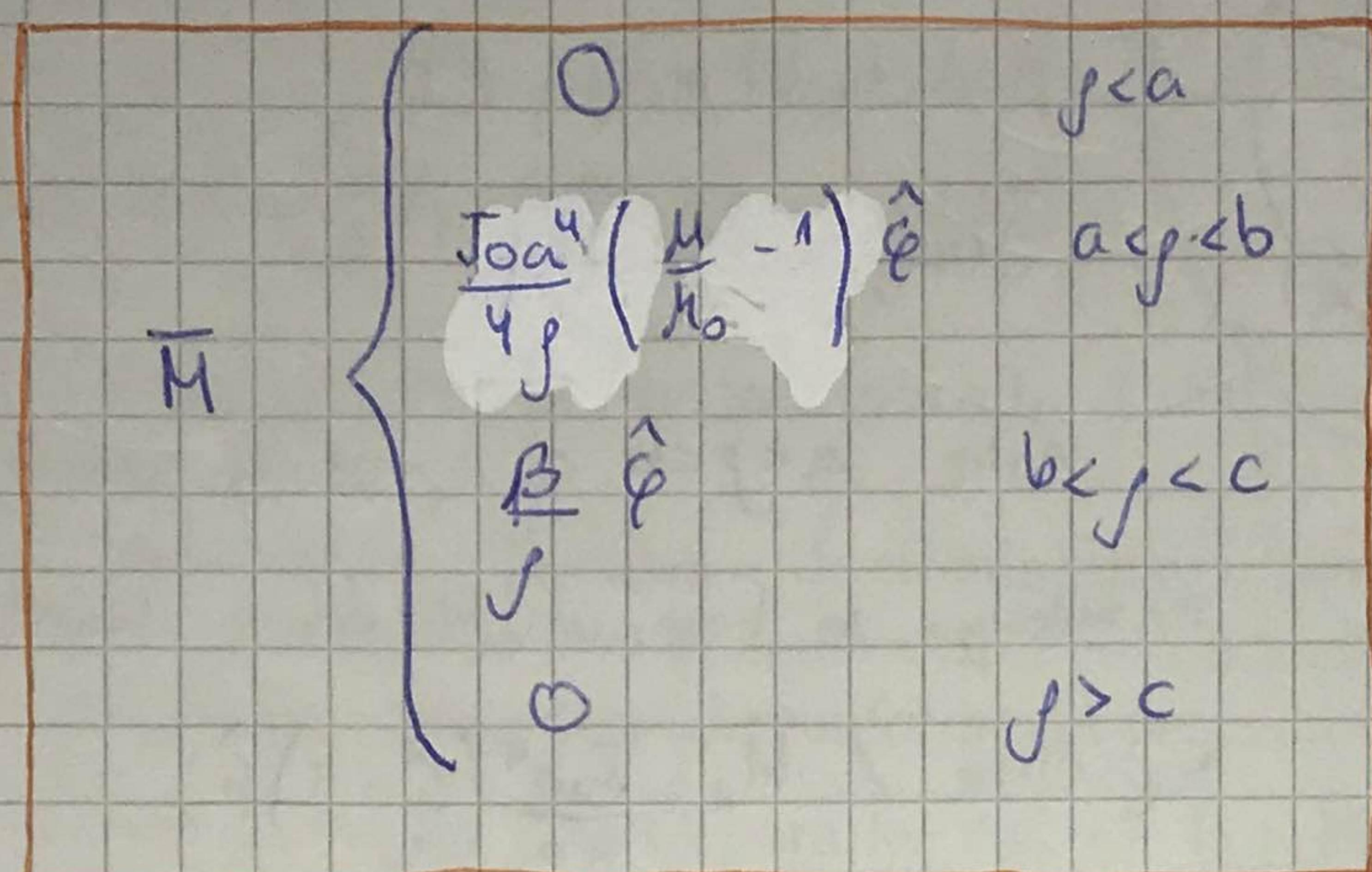
En la región III vacío más magnetización  $\Rightarrow \bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0 \left( \bar{H} + \frac{B}{p} \hat{\phi} \right) \text{ si } p < c$

Finalmente en IV  $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$

$$\boxed{\bar{B} \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0 p^3}{4} \hat{\phi} & p < a \\ \frac{\mu_0 J_0 a^4}{4p} \hat{\phi} & a < p < b \\ \mu_0 \left[ \frac{J_0 a^4}{4p} - g_0 b \right] \frac{1}{p} \hat{\phi} + \frac{B}{p} \hat{\phi} & b < p < c \\ \frac{\mu_0 (J_0 a^4 - g_0 b)}{4p} \hat{\phi} & p > c \end{cases}}$$

Cálculo de  $\bar{M}$   $M$  solo hay en la región III dada de forma permanente y en la región II debido al medio material LI

y cumple  $\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}) \Leftrightarrow \bar{M} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{H}$



Emilio  
Fortes

HOJA 2/2

b) Calcule las cargas y corrientes de magnetización

La magnetización permanente  $\bar{M} = \frac{\beta}{\rho} \hat{\varphi}$  no produce  $\bar{J}_{mag}$  pero si  $\bar{g}_{mag}$

que son  $\begin{cases} \bar{g}_{mag} |_{p=b} = -\frac{\beta}{b} \hat{z} \\ \bar{g}_{mag} |_{p=c} = \frac{\beta}{c} \hat{z} \end{cases}$  (Lo analice en el ítem a)

En cuanto a la magnetización producida por el MLI en región II

$$\bar{M} = \frac{Jo a^4}{4\rho} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{\varphi} \quad \bar{J}_{mag} = 0, \text{ pues nuevamente depende de } \rho$$

y se encuentra en la dirección  $\hat{\varphi}$ , produciendo (teniendo) rotar igual a cero

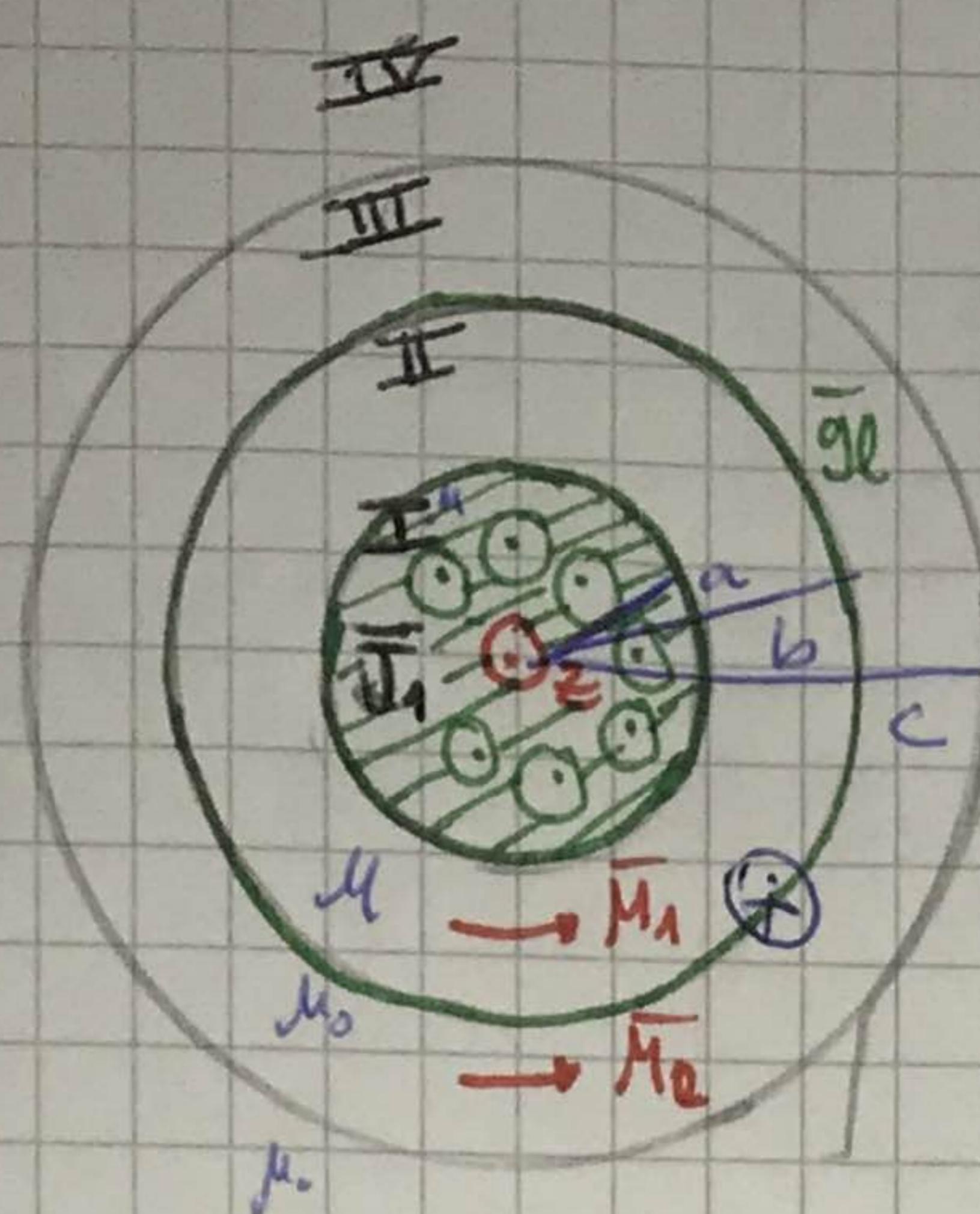
En los bordes  $p=a \Rightarrow \bar{M}(a) = \frac{Jo a^3}{4} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{\varphi}$

$$\bar{g}_{mag} |_{p=a} = \frac{Jo a^3}{4} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{\varphi} \times \hat{p} = -\frac{Jo a^3}{4} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{z}$$

$$p=b \Rightarrow \bar{M}(b) = \frac{Jo a^4}{4b} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{\varphi}$$

$$\bar{g}_{mag} |_{p=b} = \bar{M}(b) \times (-\hat{p}) = \frac{Jo a^4}{4b} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{z}$$

Esquema  
detallado



$$\bar{J}_1 = \bar{J}_0 p^2 \hat{z}$$

en  $p=a$ , se tiene la corriente de magnetización producto del medio  $L$

$$\bar{g}_{1mag} = -\frac{\bar{J}_0 a^3}{4} \left( \frac{\mu - 1}{\mu_0} \right) \hat{z}$$

entre  $a < p < b$  no se producen corrientes, sin embargo se tiene un  $M$  debido al medio magnético /

$$M_1 = \frac{\bar{J}_0 a^4}{4p} \left( \frac{\mu - 1}{\mu_0} \right) \hat{z}$$

$$\text{en } p=b \text{ se tiene } \bar{g}_{2mag} = \frac{\bar{J}_0 a^4}{4b} \left( \frac{\mu - 1}{\mu_0} \right) \hat{z}$$

$$\text{y } \bar{g}_{lib} = -g_0 \hat{z}, \text{ y } \bar{g}_{smag} \text{ debida}$$

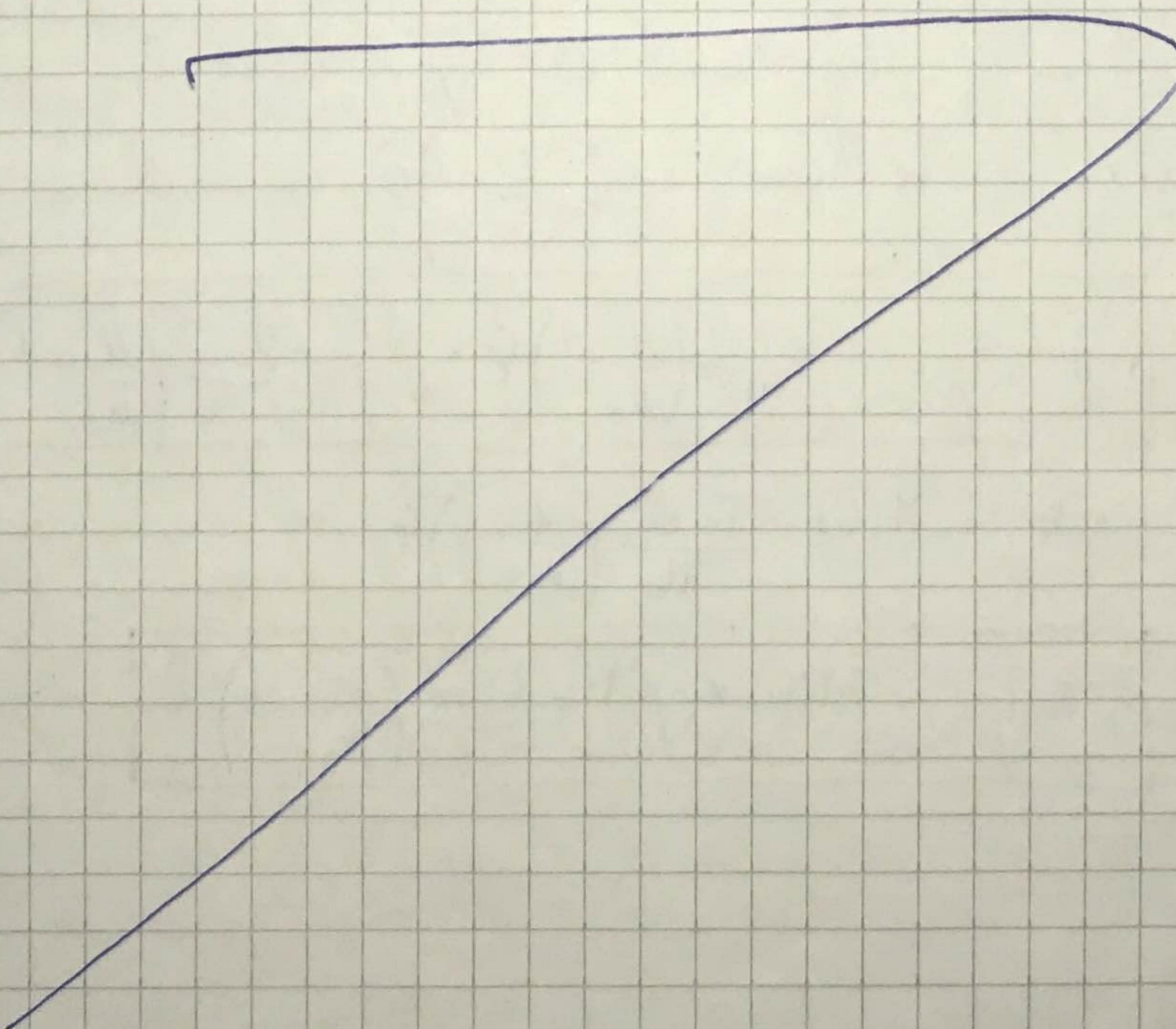
a la magnetización permanente /

$$\bar{g}_{3mag} = -\frac{\beta}{b} \hat{z}$$

Finalmente en  $p=c$  se tiene la corriente

$$\text{de magnetización } \bar{g}_{umag} = \frac{\beta}{c} \hat{z}$$

3d



## Segundo Recuperatorio de Física 3 (2015)

Resuelva cada ejercicio en hoja separada. Escriba su nombre en cada hoja.

1. Por un plano infinito de espesor  $d$ , circula una corriente en volumen uniforme  $\mathbf{J}$ , como se muestra en la Fig.1. Adosado a él se halla otro plano infinito, de espesor  $D$ , constituido por un material magnético, con magnetización uniforme  $\mathbf{M}$  perpendicular a  $\mathbf{J}$ .

(a) Determine **todas** las fuentes para los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . Calcule los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  en todo el espacio.

(b) Calcule las cargas de magnetización y las corrientes de magnetización. Realice un esquema detallado de cómo se distribuyen todas las cargas y las corrientes en todo el espacio.

2. Se tiene un circuito cuadrado de longitud  $a$  deslizándose con velocidad constante en la presencia de un cable infinito con corriente  $I_0$  (ver Fig. 2). Considere que el circuito esta conformado por una autoinductancia  $L$  en serie con una resistencia  $R$ . Inicialmente, el lado mas interno del circuito se ubica a una distancia  $d$  del hilo.

(a) Determine la inductancia mutua entre el cable infinito y la espira formado por la barra.

(b) Halle la corriente en función del tiempo que circula por la espira.

(c) Calcule la fuerza que habría que ejercer sobre la barra para mantener su velocidad constante. Realice un diagrama de cuerpo libre para la espira. Espira

3. En la la Fig. 3. se muestra un desfasador de voltaje alimentado con una fuente de corriente alterna  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ .

(a) Calcule la diferencia de fase entre las tensiones  $V$  y  $V'$ .

(b) Calcular la función de transferencia de tensión. Demostrar que  $|V| = |V'|$

(c) Graficar la diferencia de fase entre cero y infinito.

Figura 1

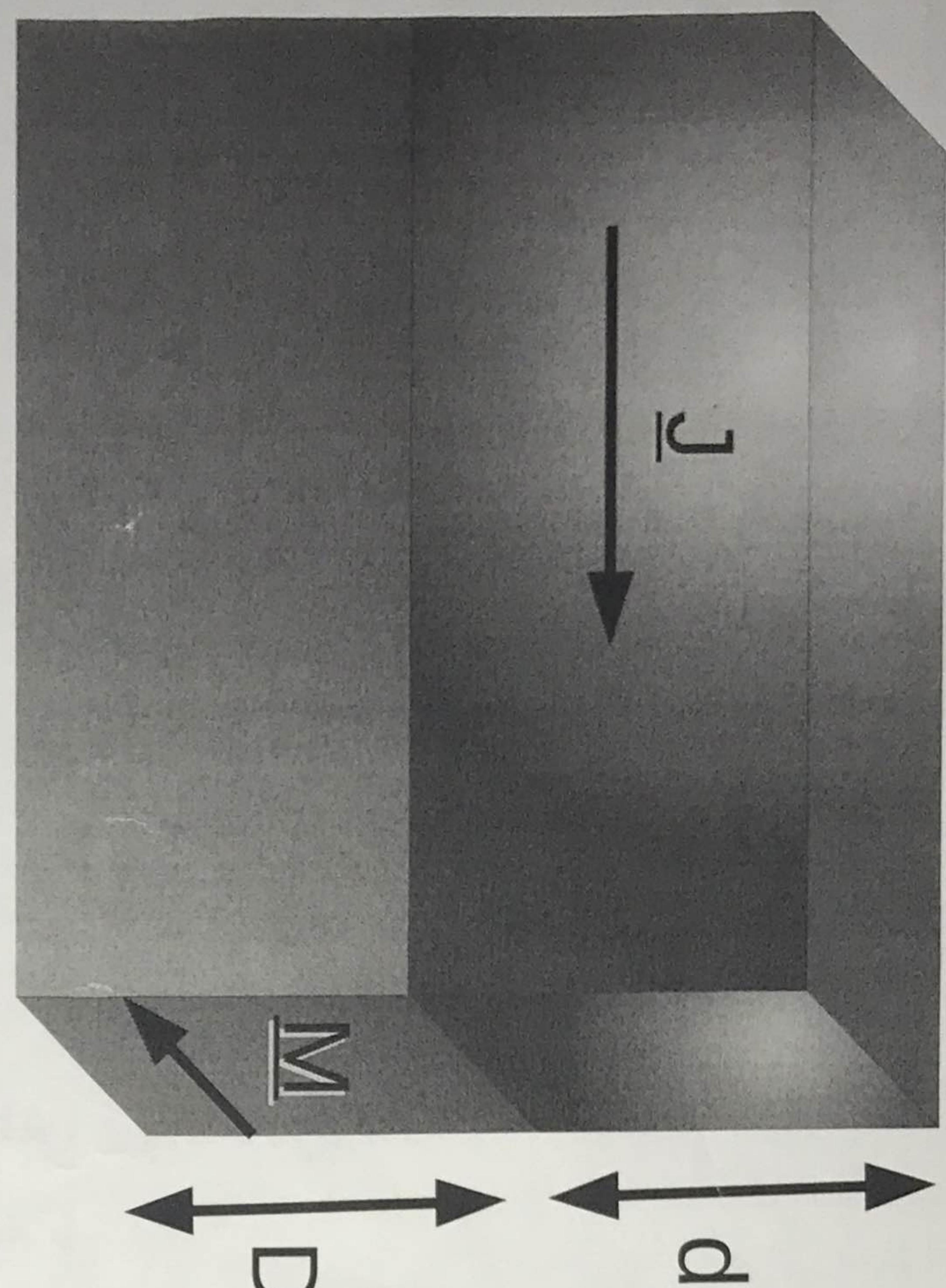


Figura 2

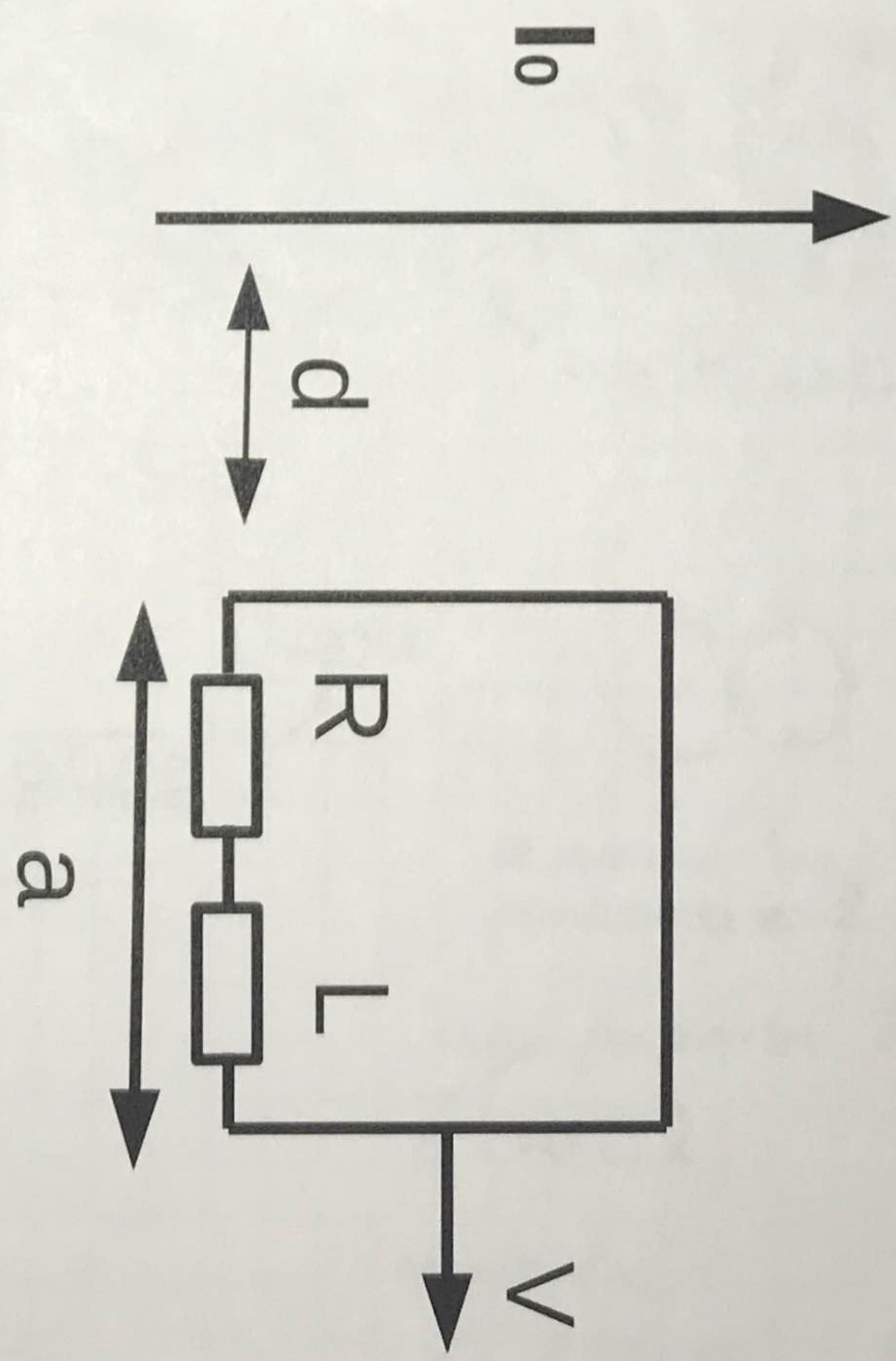
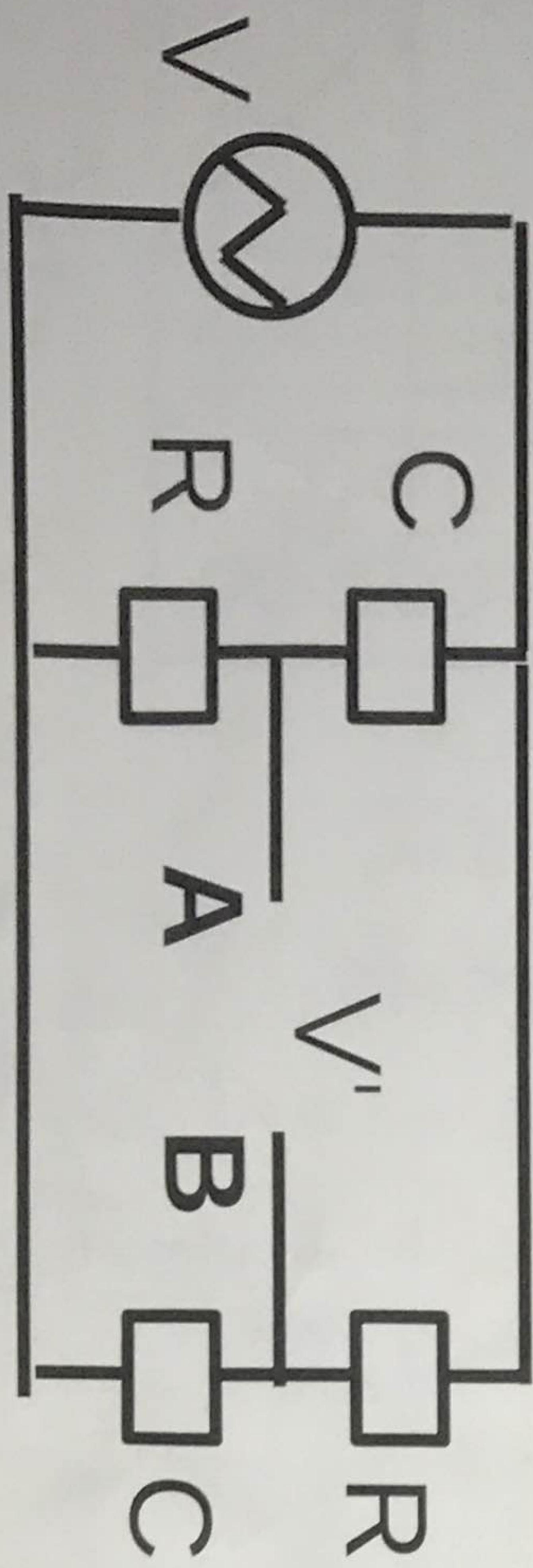


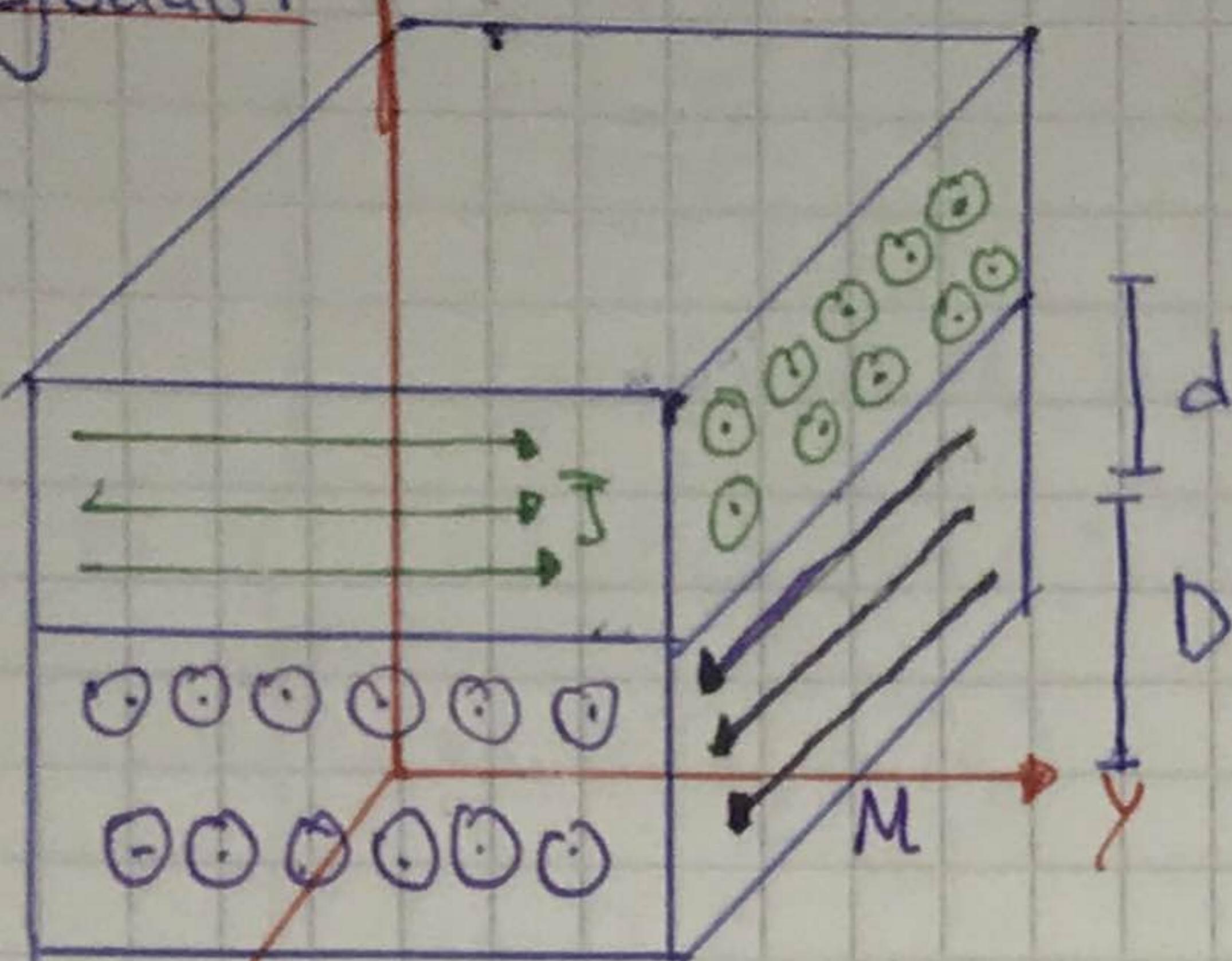
Figura 3



(A)

## Ejercicio 1

(5)



$$\bar{J} = J \hat{y}$$

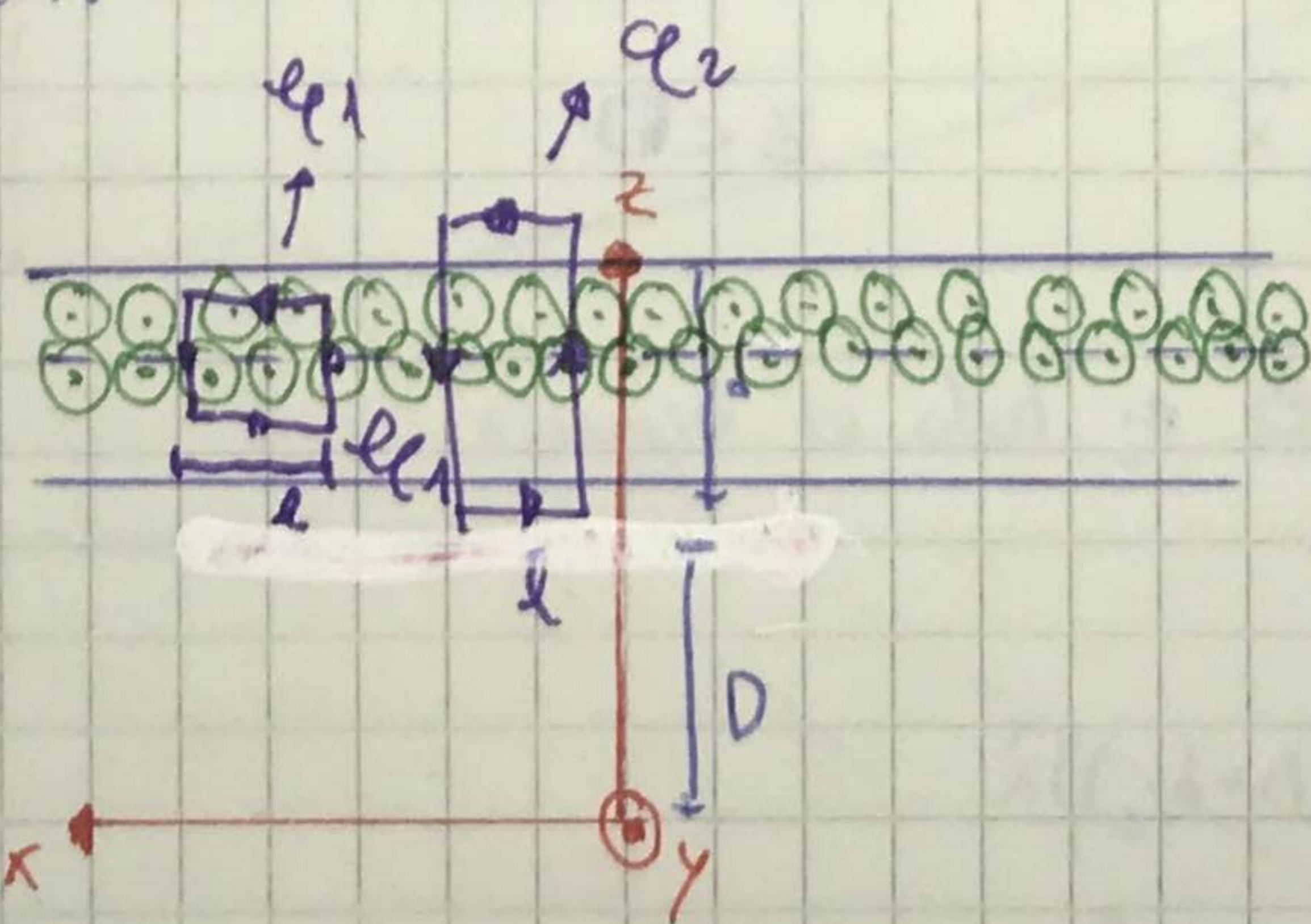
$$\bar{M} = M_0 \hat{x}$$

a) Determine todos los fuentes de  $B$  y  $H$ . Calcule  $B$ ,  $H$ ,  $M$  en todo el espacio.Fuentes de  $H$ 

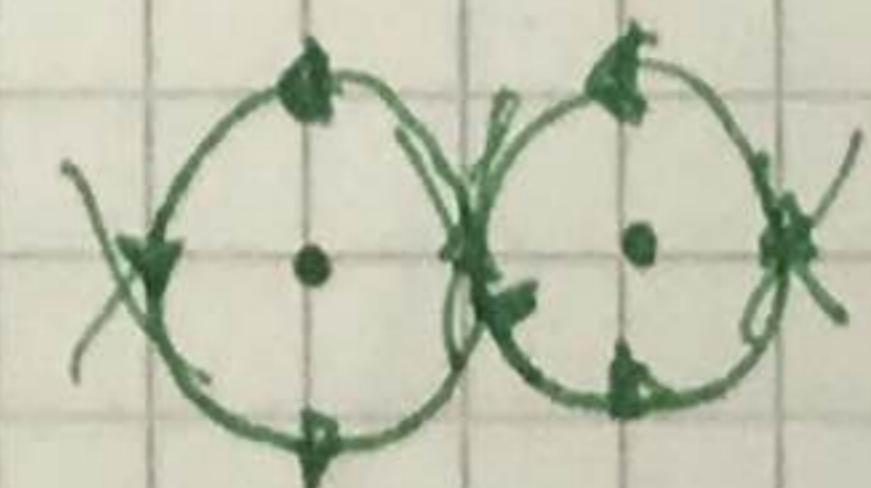
$$\nabla \times \bar{H} \quad \begin{cases} \text{volumen} & \bar{J}_{\text{lib}} = J \hat{y} \quad z \in [D, D+d] \\ \text{superficie} & \bar{g}_{\text{lib}} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \bar{H} \quad \begin{cases} \text{volumen} & \rho_M = -\nabla \cdot \bar{M} = -\nabla \cdot \bar{M}_0 \hat{x} = 0 \quad z \in [0, D] \\ \text{superficie} & G_M = \bar{M} \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{por ser plano infinito} \end{cases}$$

$$\nabla \times \bar{B} = \begin{cases} \text{volumen} & \bar{J}_{\text{lib}} = J \hat{y} \quad z \in [D, D+d] \quad \bar{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \bar{M} = \nabla \times M_0 \hat{x} = 0 \\ \text{superficie} & \bar{g}_{\text{lib}} = 0 \quad \bar{g}_{\text{mag}} = \bar{M} \times \hat{n} \rightarrow z=D \quad M_0 \hat{x} \times \hat{z} = -M_0 \hat{y} \\ & z=0 \quad M_0 \hat{x} \times (-\hat{z}) = M_0 \hat{y} \end{cases}$$

Cálculo de  $H$ 

ZOOM

se cancelan las componentes en  $\hat{z}$ 

Luego por simetría de translación

$$\bar{H} = H(z) \hat{x}$$

en particular

$$\bar{H} = \begin{cases} H(z) \hat{x} & z > d/2 + D \\ -H(z) \hat{x} & z < d/2 + D \end{cases}$$

Utilizando amperé sobre la  $\ell_1$ 

$$\oint \bar{H} \cdot d\ell = I_{\text{wire}}$$

$$I_{\text{conc}} = J \cdot l (z - (D + d_{12}))$$

$$\oint_{\ell_1} \bar{H} d\bar{l} = 2 \int_0^l H(z) dx = 2lH(z)$$

pues las componentes laterales ya vienen se anulan

$$\Rightarrow 2lH(z) = Jl(z - (D + d_{12})) / 2$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{J(z - (D + d_{12})) / 2}{l}$$

~~Resumen de resultados~~

$$\bar{H} = \begin{cases} \frac{J(z - (D + d_{12}))}{l} & z > d_{12} + D \\ -\frac{J(z - (D + d_{12}))}{l} & z < d_{12} + D \end{cases}$$

$|z - (D + d_{12})| < d_{12}$

Falta ver con la  $\ell_2$

$$\oint_{\ell_2} \bar{H} d\bar{l} = 2lH(z) \quad I_{\text{conc}} = lJd$$

~~Resumen de resultados~~

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Jd}{2} \hat{x}$$

Finalmente

$$\bar{H} = \begin{cases} \frac{Jd}{2} \hat{x} & z > d + D \\ -\frac{J(z - (D + d_{12}))}{l} \hat{x} & d_{12} + D < z < d + D \\ -\frac{J(z - (D + d_{12}))}{l} \hat{x} & D < z < d_{12} + D \\ -\frac{Jd}{2} \hat{x} & z < D \end{cases}$$

Utilizando  $\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M})$  despejo  $\bar{B}$  en todo el espacio

$$\Leftrightarrow z > d + D \Rightarrow \bar{B} = \mu_0 J d_{12} \hat{x}$$

$$\text{si } d_{12} + D < z < d + D \Rightarrow \bar{B} = -\mu_0 J (z - (D + d_{12})) \hat{x}$$

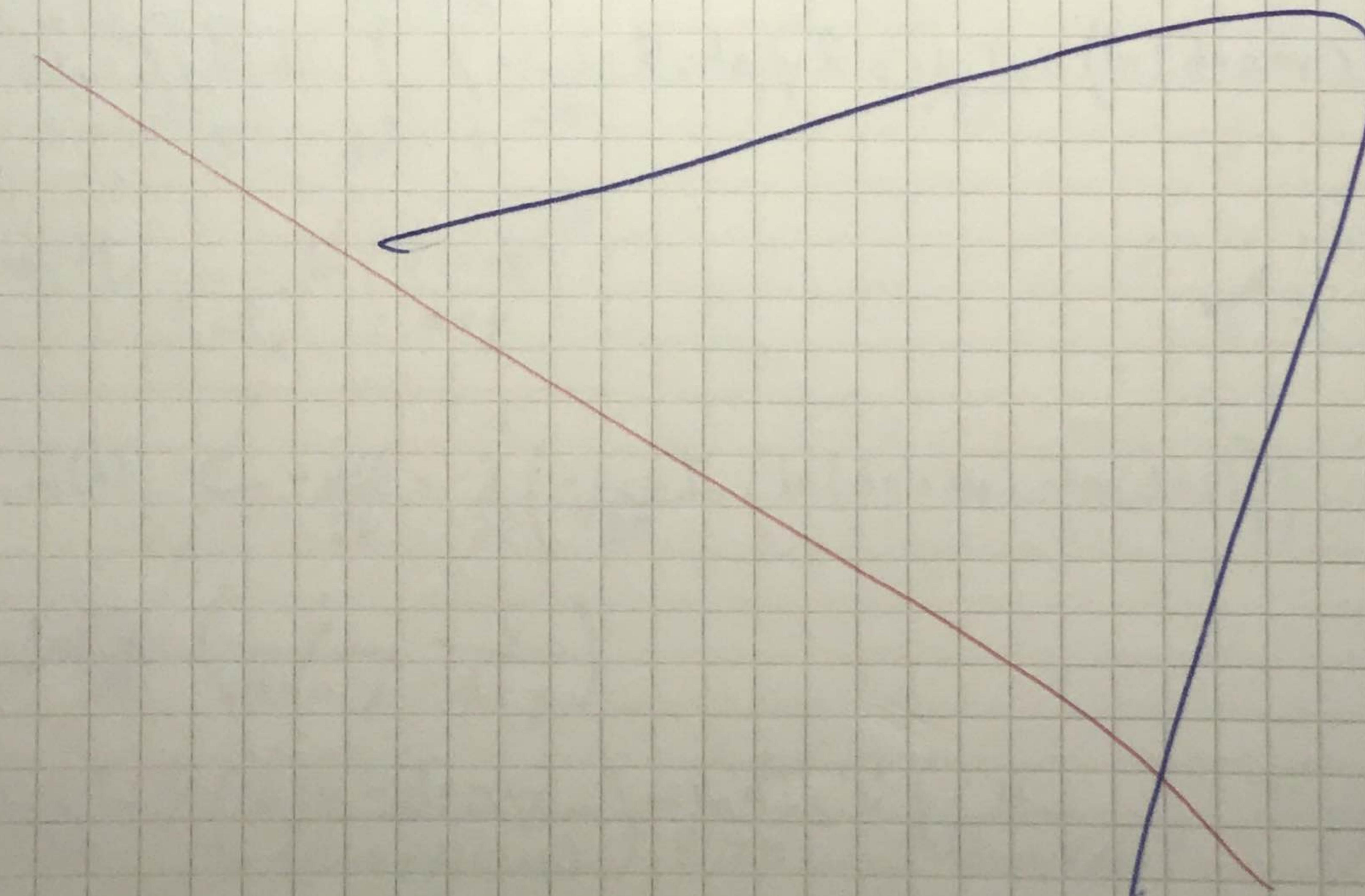
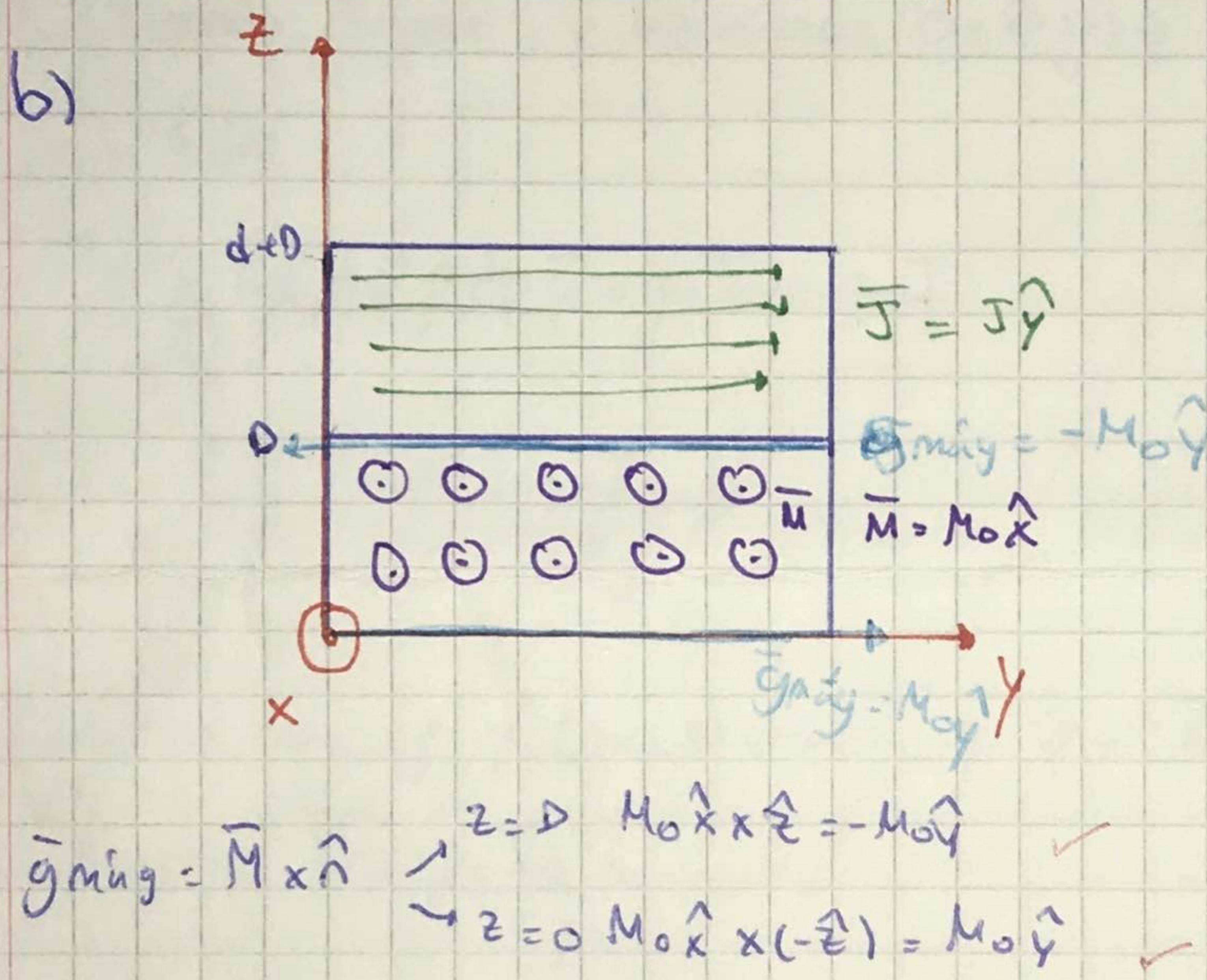
$$\text{si } D < z < d_{12} + D \Rightarrow \bar{B} = -\mu_0 J (z - (D + d_{12})) \hat{x}$$

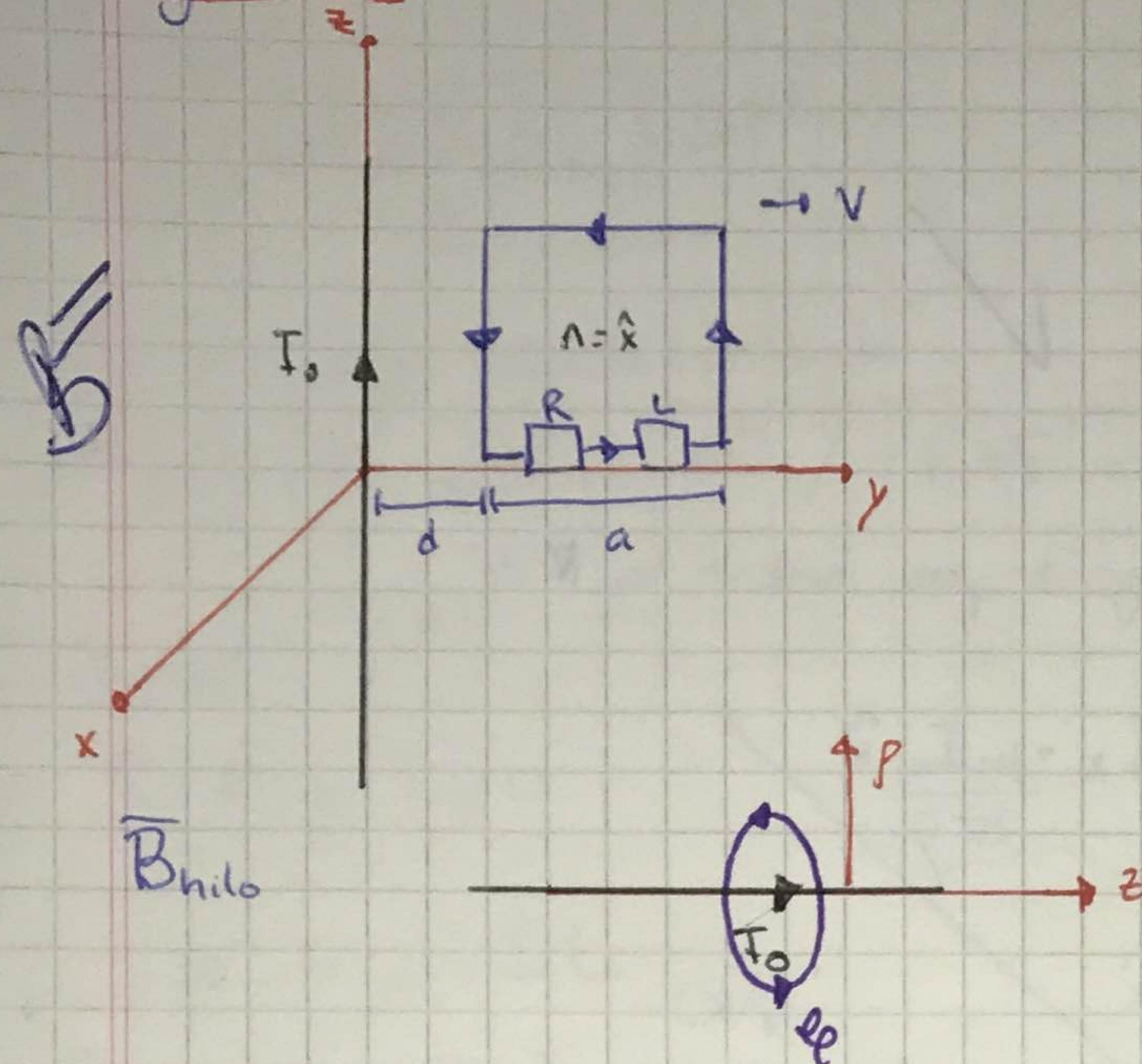
$$\text{si } 0 < z < D \Rightarrow \bar{B} = \mu_0 (-\frac{Jd}{2} + M_0) \hat{x}$$

$$\text{si } z < 0 \Rightarrow \bar{B} = -\frac{\mu_0 J d}{2} \hat{x}$$

$$\boxed{\overline{B}} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mu_0 J d}{z} \hat{x} & z > d + D \\ -\mu_0 J (z - (D + d_{1c})) \hat{x} & d_{1c} + D < z < d + D \\ -\mu_0 J (z - (D + d_{1c})) \hat{x} & D < z < d_{1c} + D \\ +\mu_0 (-Jd_{1c} + M_0) \hat{x} & 0 < z < D \\ -\mu_0 \frac{J d}{z} \hat{x} & z < 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\overline{M}_z} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } z < 0 \\ \mu_0 \hat{x} & 0 < z < D \end{array} \right.$$



Ejercicio 2

Utilizando Ampere, y suponiendo  $\bar{B} = B(p) \hat{\varphi}$  por la simetría con la distribución de la fuente

$$\oint_{\text{loop}} B(p) \hat{\varphi} \cdot d\vec{\ell} \hat{\varphi} = \mu_0 I_{\text{conc}} = \mu_0 I_0$$

$$\bar{B}(p) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi p} \hat{\varphi}$$

En este caso  $p = y$  (punto del circuito) y  $\hat{\varphi} = -\hat{x}$

Entonces  $\bar{B} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi y} \hat{x}$

La inductancia mutua  $M = \frac{\Phi_m}{I_0}$

$$\Phi_m = \iint_S \bar{B} \cdot d\vec{a} = \int_0^{d+a+y} \int_0^a -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi y} \hat{x} \cdot dz dy \hat{x} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} a \left( \ln(d+a+y) - \ln(d+y) \right)$$

$$\Rightarrow M = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left( \frac{d+a+y}{d+y} \right)$$

✓

b)  $I(+)$   $\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu_0 a I_0}{2\pi} \left( \ln(d+a+y) - \ln(d+y) \right) \right)$

$$= \frac{\mu_0 a I_0}{2\pi} \left( \frac{y}{d+a+y} - \frac{y}{d+y} \right)$$

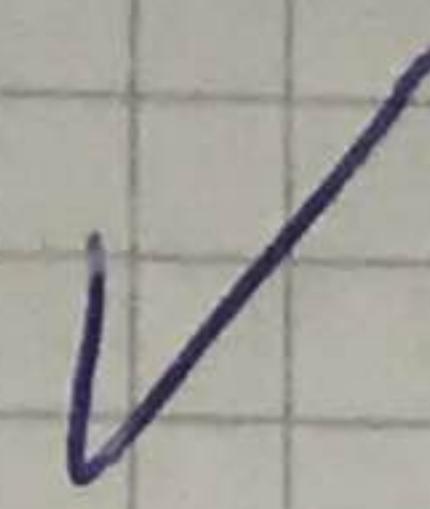
$$= \frac{-\mu_0 a I_0}{2\pi} y \left( \frac{(d+y)-(d+a+y)}{(d+a+y)(d+y)} \right) = \frac{\mu_0 a I_0}{2\pi} y \left( \frac{-a}{(d+a+y)(d+y)} \right)$$

✓

Superiendo  $L = 0$

$$\Rightarrow \epsilon_{\text{ind}} = IR$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{\mu_0 a^2 I_0}{2\pi(d+a+y)(d+y)R} \hat{y}$$



c) Calcule la fuerza que habría que ejercer para mantener la bobina de

$$F = \int I d\bar{l} \times \bar{B} = \int -\frac{\mu_0 a^2 I_0 v}{(d+a+y)(d+y)R} d\bar{l} \times \hat{x}$$

$$= -\frac{\mu_0 a^2 I_0 v}{4\pi R} \int \frac{-1}{(d+a+y)(d+y)} d\bar{l} \times \frac{\hat{x}}{y}$$

No CORRESPONDE

$$= \alpha \int \frac{-1}{(d+a+y)(d+y)} d\bar{l} \times \frac{\hat{x}}{y}$$

$$= \alpha \left( 2 \int_0^a \frac{1}{(d+a+y)(d+y)} dz \hat{z} \times \frac{1}{y} \hat{x} + \int_0^a \frac{-1}{(d+a+y)(d+y)} dy \hat{y} \times \frac{1}{y} \hat{x} + \int_{-a}^0 \frac{-1}{(d+a+y)(d+y)} dy (-\hat{y}) \times \frac{1}{y} \hat{x} \right)$$

~~$\bar{m} \bar{a} = \Sigma F$~~ , la fuerza que habría que ejerce es una contraria a esta de igual módulo

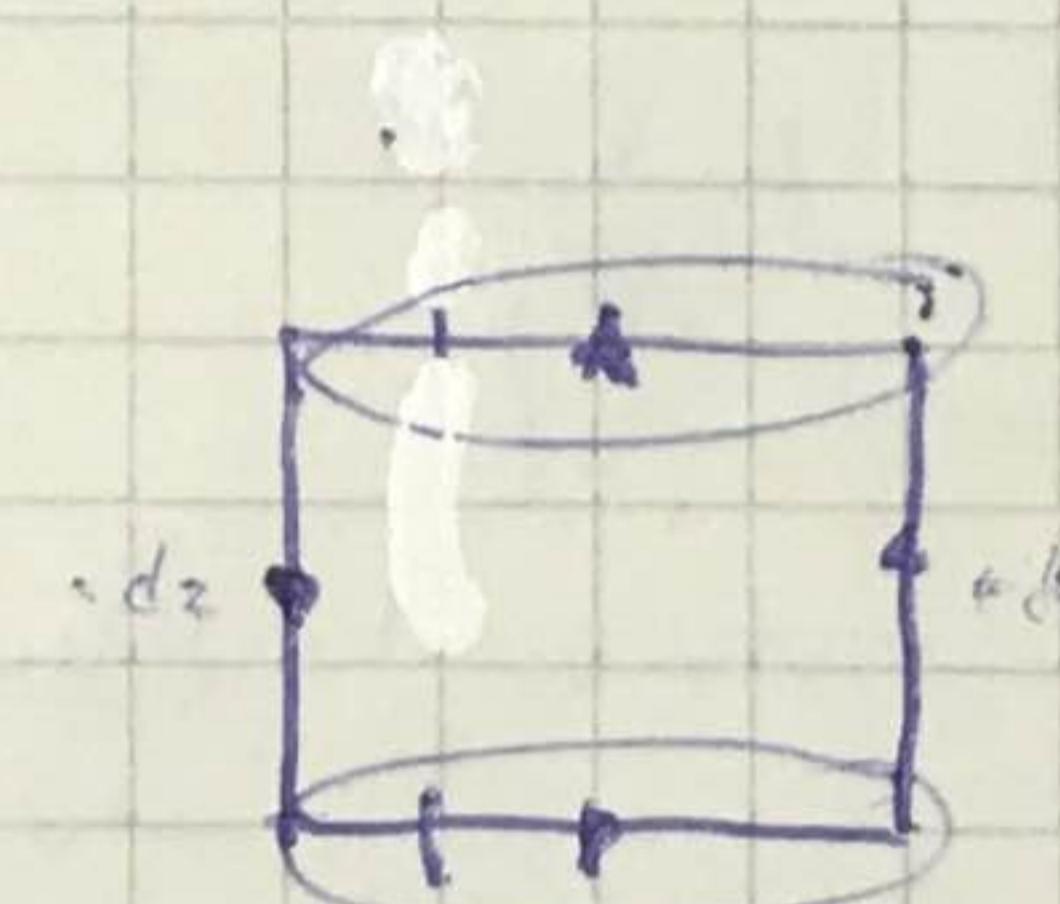
$$F = \int I d\bar{l} \times \bar{B} = \int -\frac{\mu_0 a^2 I_0 v}{(d+a+y)(d+y)R2\pi} d\bar{l} \times \hat{x}$$

$$= \frac{\mu_0^2 a^2 I_0^2 v}{R 4\pi^2} \int \frac{d\bar{l} \times \hat{x}}{(d+a+y)(d+y)} \times \frac{1}{y} \hat{x}$$

$$= \alpha \left( \int_0^a \frac{1}{(d+a+y)(d+y)} dz (-\hat{z}) \times \frac{1}{y} \hat{x} + \int_0^a \frac{1}{(d+a+y+a)(d+y+a)} dy \hat{z} \times \frac{1}{y+a} \hat{x} \right)$$

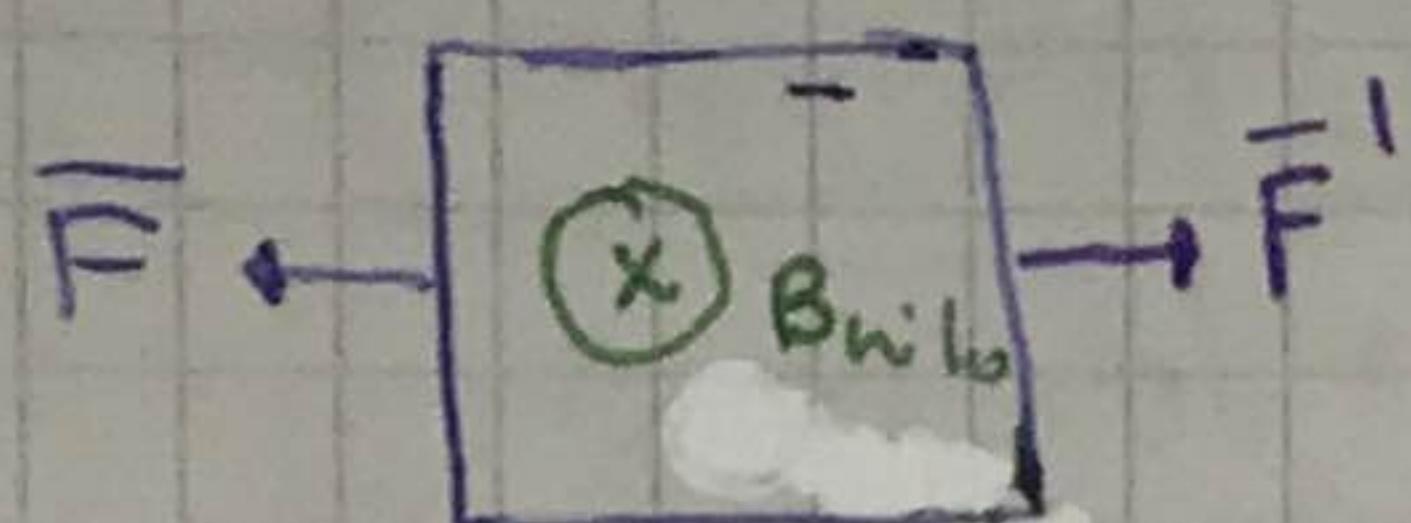
$$= \alpha \left( \frac{-a}{(d+a+y)(d+y)y} \hat{y} + \frac{a}{(d+2a+y)(d+y+a)(y+a)} \hat{y} \right)$$

$$= \alpha a \left( \frac{-(d+2a+y)(y+a) + (d+y)y}{(d+a+y)(d+y)y(y+a)(d+2a+y)} \hat{y} \right)$$



$B$  se anulan,  
pues el campo vale  
lo mismo punto a punto, entonces  
los caminos contrarios suman 0

DCL



Para mantener la velocidad constante

$$m\ddot{y} = F \Rightarrow Bw_1 b F' / F + F' = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0 \text{ y } v = \text{cte}$$

$F' = -F$

Opcional

$$R = 0 \text{ y } L \neq 0$$

$$\Rightarrow E_{ind} = \dot{I}L$$

$$\Rightarrow \dot{I} = -\frac{\mu_0 a^2 I_0 v}{2\pi(d+a+y)(d+y)L}$$

$$I(t) = \int_{0}^{t} -\frac{\mu_0 a^2 I_0 v}{2\pi(d+a+y)(d+y)L} dt + I(0) \quad y = vt \quad \frac{dI}{dy} = \frac{dI}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = f(y)$$

$$\Rightarrow (d+a+y)(d+y) = d^2 + dy + ad + ay + y^2$$

$$\varphi = d^2 + ad$$

$$\Theta = 2d + a -$$

$$\Rightarrow I(t) = \int_{0}^{t} -\frac{\mu_0 a^2 I_0 v}{2\pi(\varphi + \Theta vt + v^2 t^2)} dt$$

$$\int f(y) dy$$

$$= -\frac{\mu_0 a^2 I_0 v}{2\pi} \int_{0}^{t} \frac{1}{(\varphi + \Theta vt + v^2 t^2)} dt$$

$$\cancel{\varphi + \Theta vt + v^2 t^2 = 0} \Leftrightarrow t = \frac{-\Theta v \pm \sqrt{\Theta^2 v^2 - 4\varphi v^2}}{2v^2}$$

$$= -\frac{\Theta v \pm \sqrt{\Theta^2 v^2 - 4\varphi}}{2v^2}$$

asumiendo que vale

Arrastrar en

(X)

$$\Rightarrow \frac{1}{(\varphi + \Theta vt + v^2 t^2)} = \frac{1}{(\frac{\Theta v + \sqrt{\Theta^2 v^2 - 4\varphi}}{2v} + t)} \cdot \frac{1}{(\frac{\Theta v - \sqrt{\Theta^2 v^2 - 4\varphi}}{2v} + t)}$$

$$= \frac{1}{(t - t_1)(t - t_2)}$$

Fracciones simples

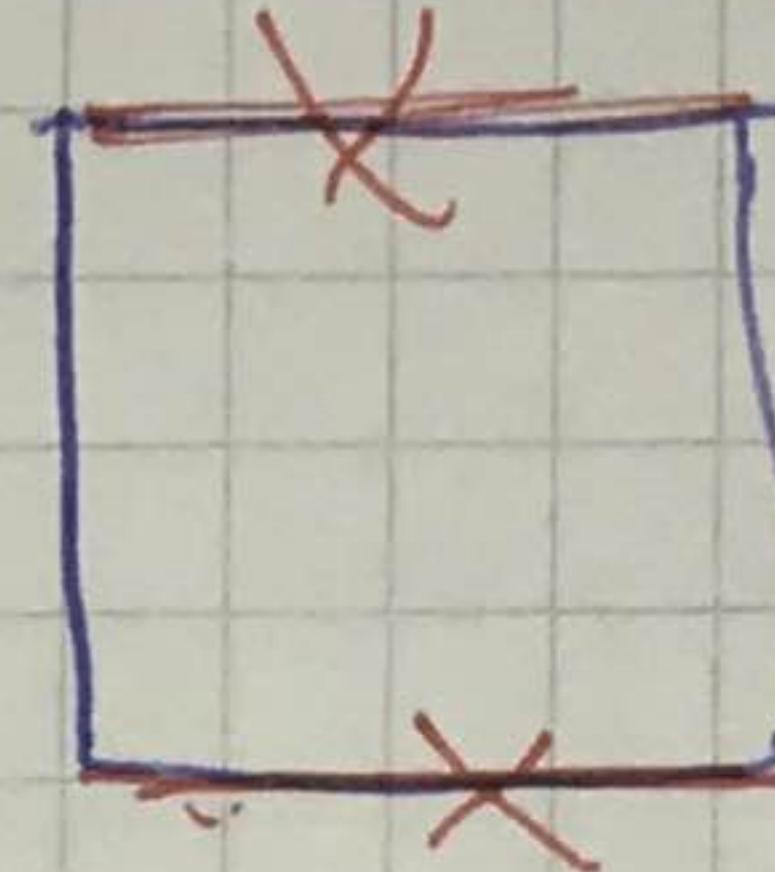
$$\underline{\text{tabla}} \quad \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left( \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{\mu_0 a^2 I_0 V}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\theta^2 V^2 - 4\mu_0 V^2}} \ln \left( \frac{2V^2 t + \theta V - \sqrt{\theta^2 V^2 - 4\mu_0 V^2}}{2V^2 t + \theta V + \sqrt{\theta^2 V^2 - 4\mu_0 V^2}} \right)$$

$\bar{F} = \int_{\text{epm}} I d\bar{x} \times \bar{B}$ , nuevamente, solo queda integral en  $z$  pues el campo vale

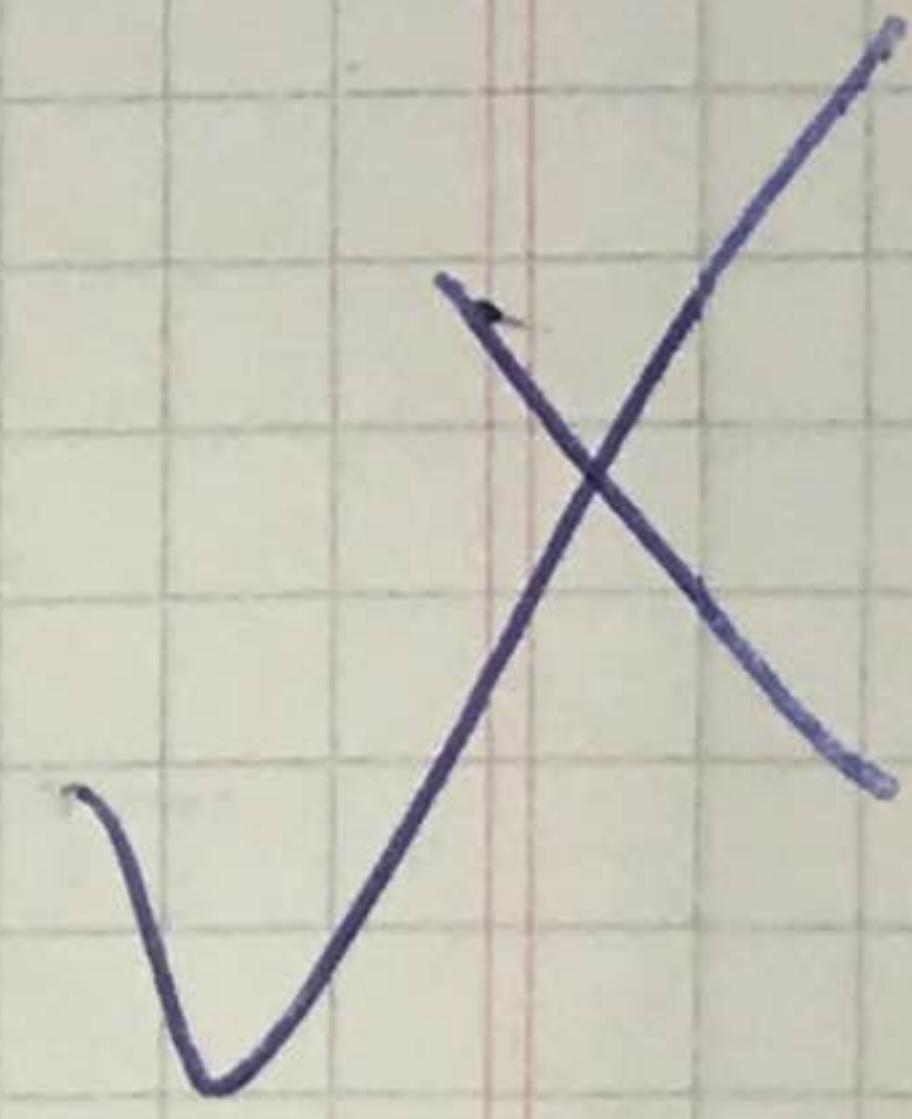
igual punto a punto sobre los bordes

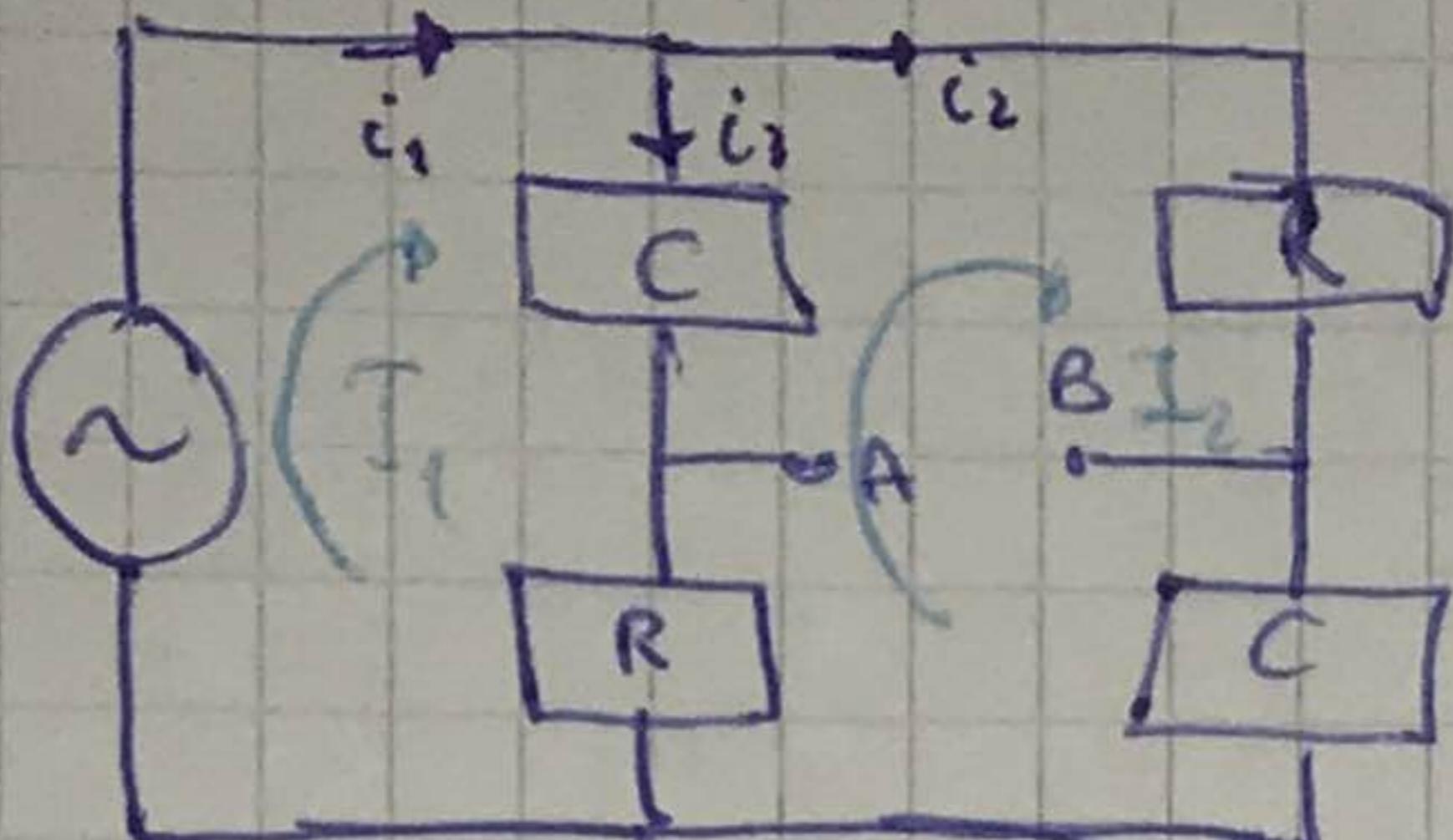
y se cancelan



$$\bar{F} = II \int_0^a -I(y) \hat{j} + \int_0^a I(a+y) \hat{j}$$

y la condición para velocidad constante es la misma



Ejercicio 3

$$z = R + j \frac{1}{\omega C}$$

$$(1) \cdot V = I_1 \left( R + j \frac{1}{\omega C} \right) - I_2 \left( R + j \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$(2) 0 = I_2 2 \left( R + j \frac{1}{\omega C} \right) - I_1 \left( R + j \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$I_1 = I_2 \rightarrow V = I_2 Z \Leftrightarrow I_2 = \frac{V}{Z}$$

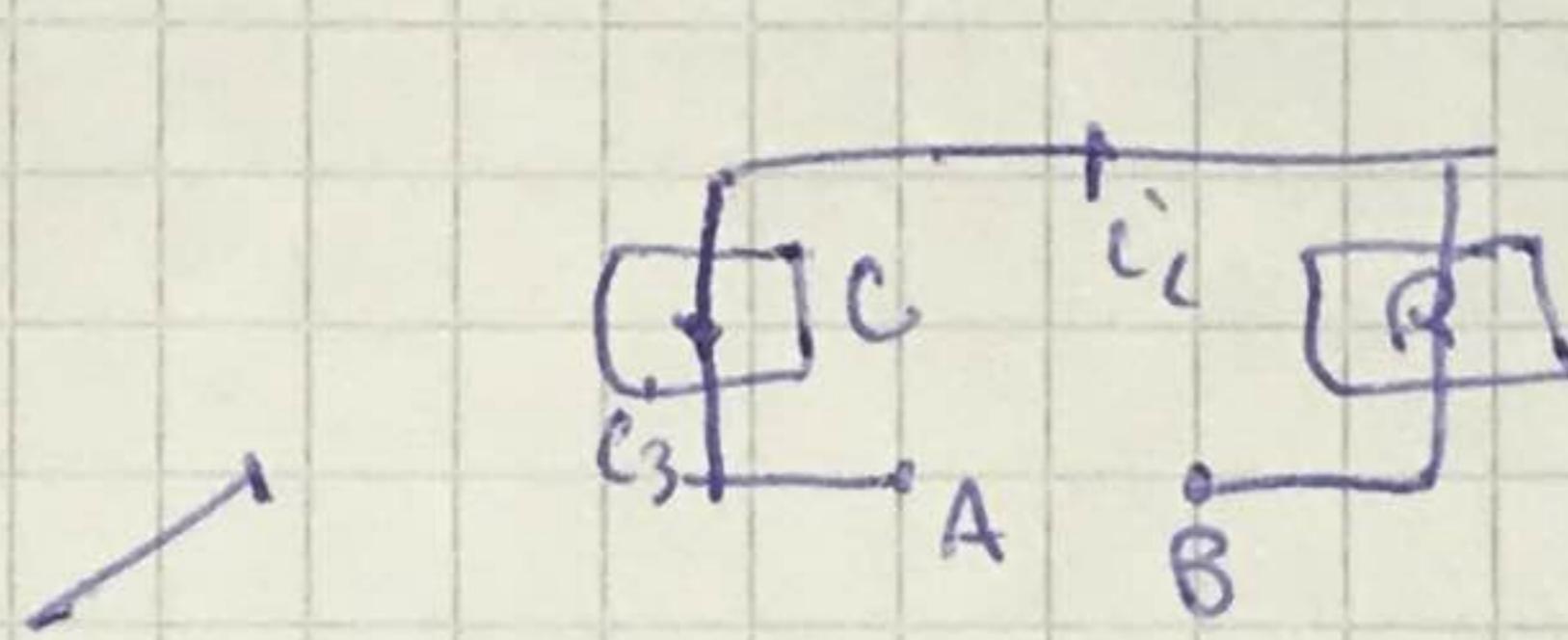
$$I_1 Z = I_2 2Z$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{2V}{Z}$$

$$i_1 = I_1 = \frac{2V}{Z}$$

$$i_3 = I_1 - I_2 = \frac{V}{Z}$$

$$i_2 = I_2 = \frac{V}{Z}$$



$$a) V' = -i_3 j \frac{1}{\omega C} + i_2 R = i_2 \left( R - j \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{V}{Z} \left( R - j \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{V'}{V} \right) = \frac{\left( R - j \frac{1}{\omega C} \right)}{\left( R + j \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\left( R - j \frac{1}{\omega C} \right) \left( R + j \frac{1}{\omega C} \right)}{\left( R + j \frac{1}{\omega C} \right) \left( R - j \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\left( R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - j2R \frac{1}{\omega C} \right)}{\left( R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)}$$

transf. de tensión de terminal

$$= \frac{\left( R - \frac{j}{\omega C} \right)^2}{\left( R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)} = \frac{\left| R + j \frac{1}{\omega C} \right|^2 e^{2j\phi}}{\left( R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)}$$

$$= e^{2j\phi}$$

La diferencia de fase es  $2\phi$

$$\phi$$

$$tg(\phi) = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega C R}$$

arco de  
luna!

$$\text{Luego } V' = V e^{2j\phi}$$

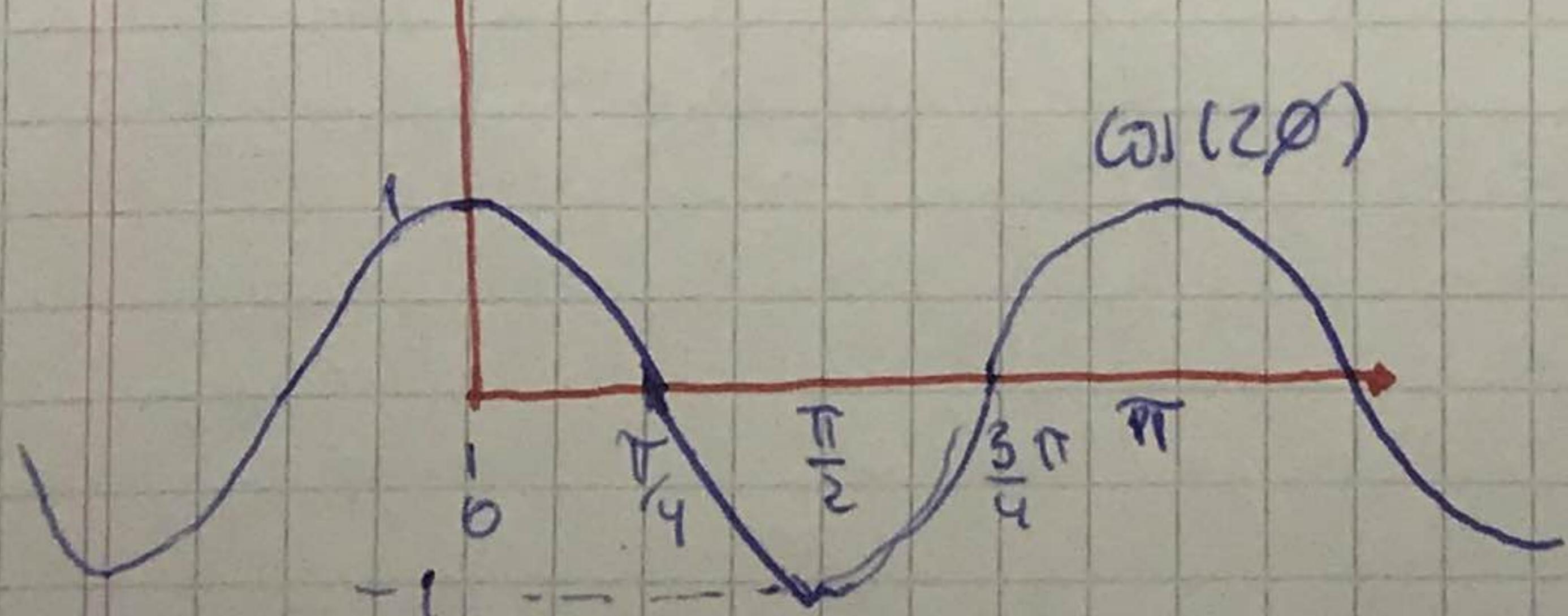
$$|V'| = |V| |e^{2j\phi}| = 1$$

$$\Rightarrow |V'| = |V|$$

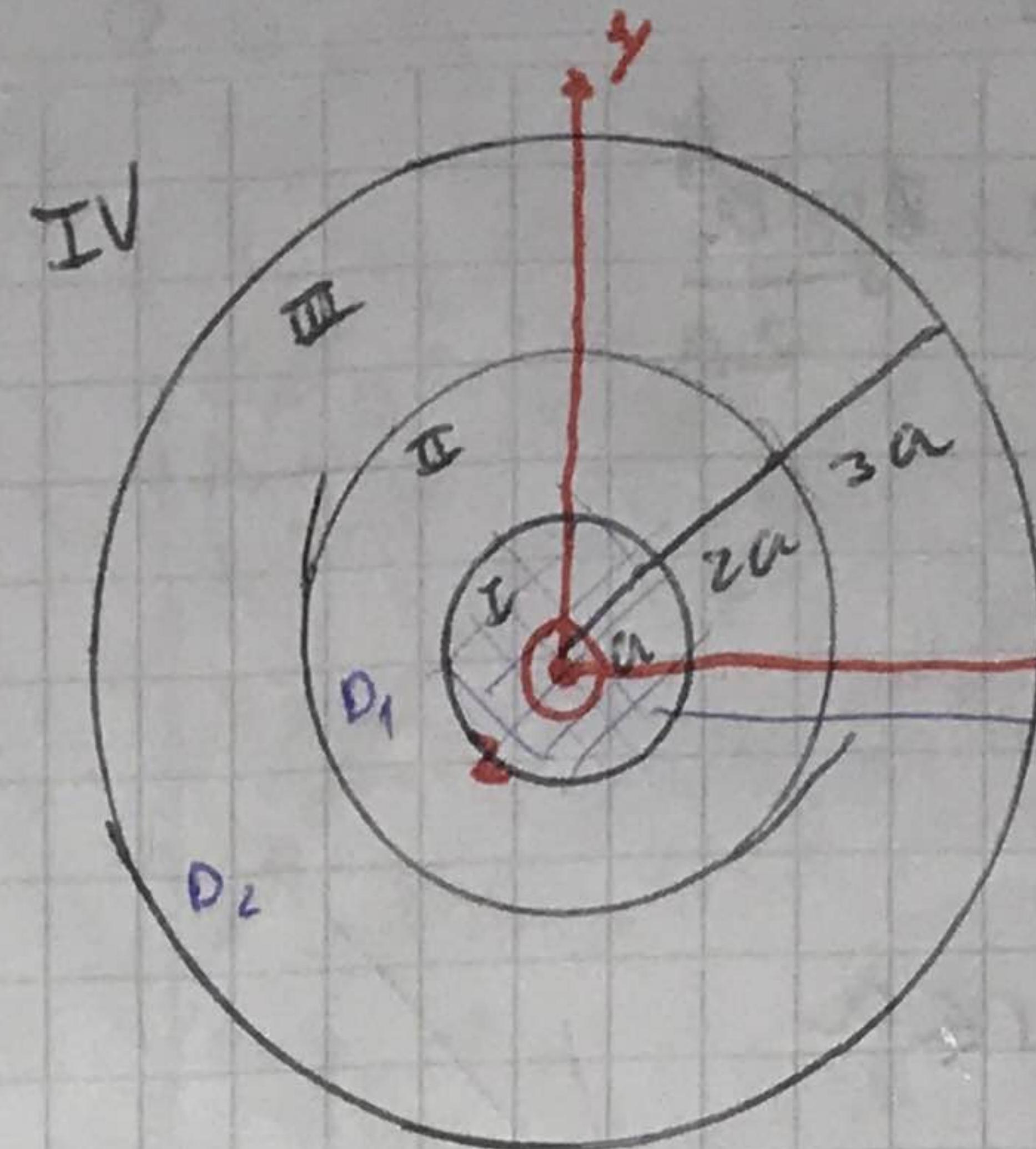
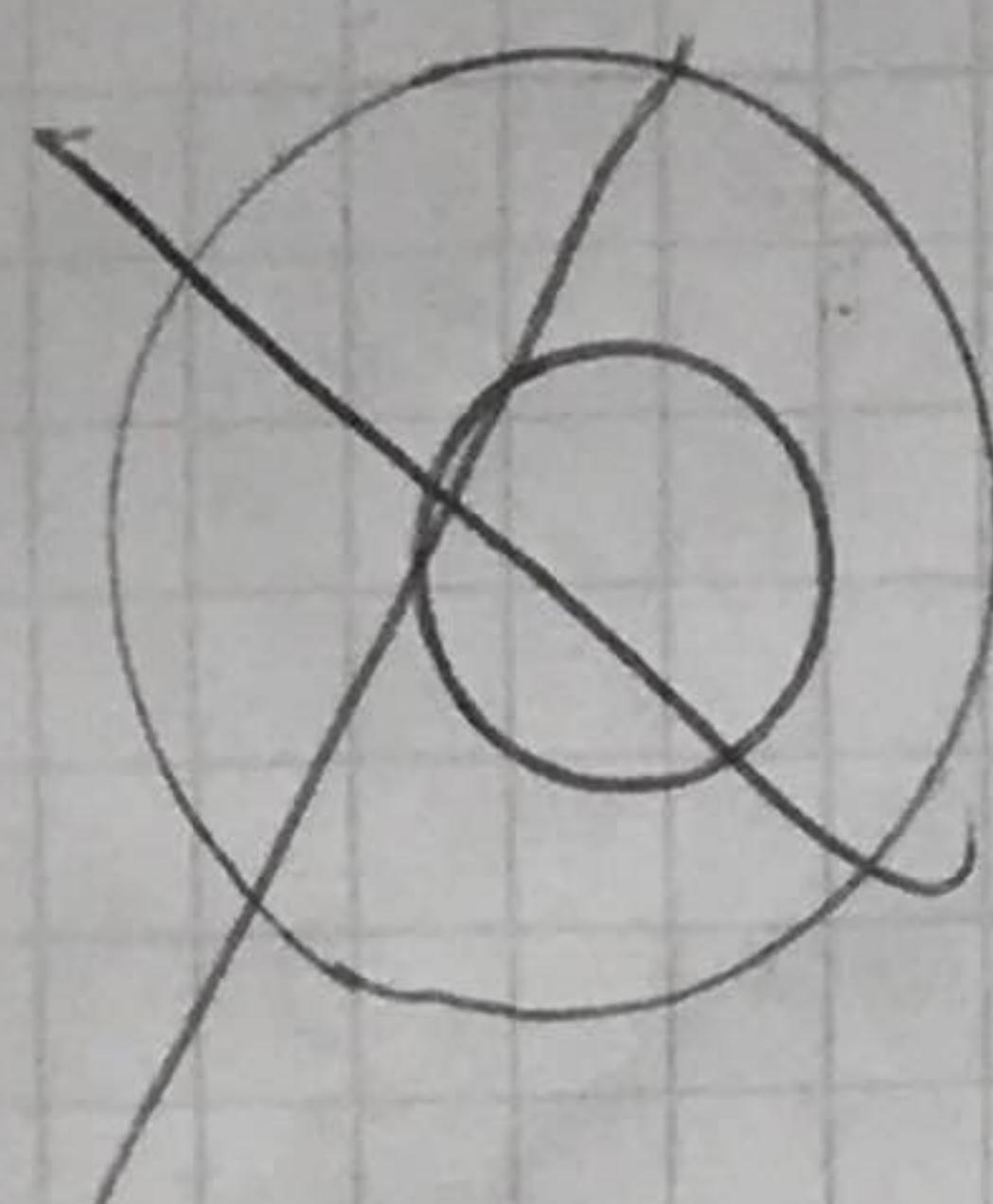
Magnitud

$$\Delta\phi = \varphi_{V'} - \varphi_V = 2 \arctg \left( \frac{1}{\omega C R} \right)$$

c)



Emiliano Fortes



MB

$$R_I \quad \rho_{lib}(\vec{r}) = \rho_0 \frac{r}{a}$$

$$R_{II} \quad \bar{P} = P_0 \frac{a}{r} \hat{r}$$

$$R_{III} \text{ LI } E = E(r)$$

RIV vacío

Calcular  $\bar{P}, \bar{E}, \bar{D}$  en  $\mathbb{R}^3$

$$\nabla \cdot \bar{D} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{lib} = \rho_0 \frac{r}{a} \quad r \leq a, \quad \rho_{lib} = 0 \quad \text{si } r > a \\ G_{lib} = 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla \times \bar{D} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{D} = 0 \quad \text{en } R_I \quad \text{pues } \bar{P} = P(r) \hat{r} \\ \bar{P} \times \hat{n} \quad \hat{n} = \hat{r} \text{ por simetría exterior, y } \bar{P} = P_0 \frac{a}{r} \hat{r} \Rightarrow \hat{r} \times \hat{r} = 0 \end{array} \right.$$

$$P_{ext} = P_{int} = 0$$

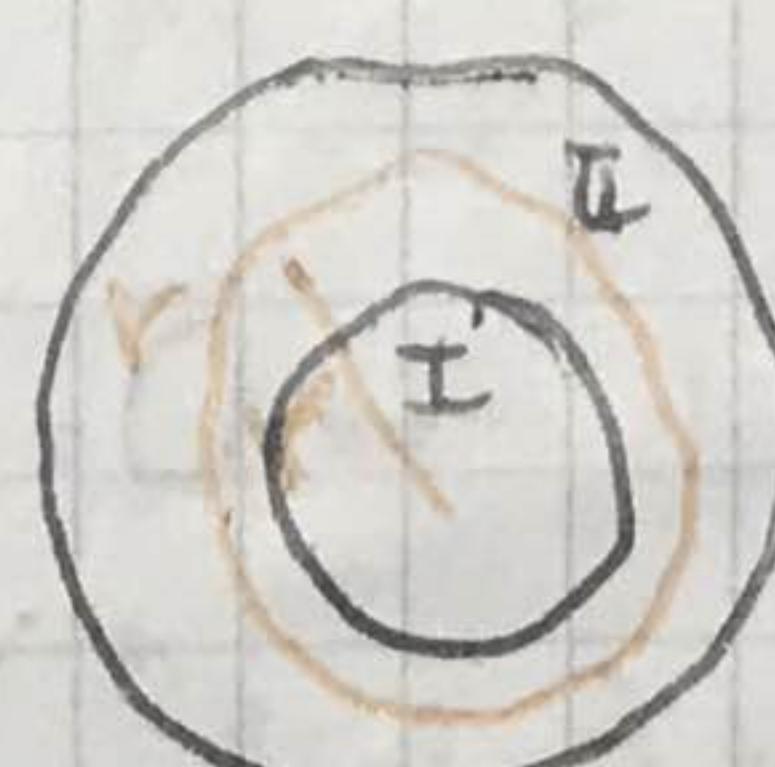
$$\Rightarrow R_I \quad \nabla \cdot \bar{D} ds \quad \int \int \int \frac{4\pi r^2 \rho_0 r dr}{a} ds \quad \text{Gauss para una esfera de radio } r \quad (r \leq a)$$

$$\bar{D} = D(r) \hat{r} \text{ por simetría}$$

esférica, debido a que

la relación entre  $D, E$  y  $P$  es

lineal y  $E$  tiene simetría exterior  
en el punto



$$\rightarrow \int \int \int \nabla \cdot \bar{D} ds = \frac{4\pi r^2 \rho_0 r}{a}$$

$$= \int \int \int D(r) r^2 \hat{r} \cdot \hat{r} ds = D(r) \int \int \int r^2 \sin(\phi) dr d\theta d\phi = \int \int \int \frac{4\pi r^2 \rho_0 r^2 \sin(\phi)}{a} dr d\theta d\phi$$

Jacobiens

arca esfera

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = \int \int \int \frac{4\pi r^2 \rho_0 r^2 \sin(\phi)}{a} dr d\theta d\phi$$

NOTA

$$D(r) = \frac{4}{3} \pi r^2 = 2\pi \int_0^r \frac{p_0 r^3}{a} \cdot (-\cos(\theta)) \Big|_0^{\pi} = \int_0^r \frac{p_0 r^3}{a} (1+1) dr = \int_0^a \frac{2p_0 r^3}{a} dr$$

$$= 2 \frac{p_0}{a} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{3p_0 a^4}{2a}$$

$$\Rightarrow D(r) = \frac{p_0 r^4}{4a r^2}$$

$$\Rightarrow \bar{D}(r) = \frac{p_0 r^2}{4a} \hat{r} \quad r \leq a \quad \checkmark$$

si  $r > a$  la única diferencia es que la integral de  $\int \frac{p_0 r^3}{a} dr$  el radio se moverá entre  $0$  y  $a$ , que es donde se ubica la  $I_0$

p. libre

$$\Rightarrow \bar{D}(r) = \frac{p_0 a^3}{4r^2} \hat{r} \quad r > a \quad \Rightarrow \bar{D} = \begin{cases} \frac{p_0 r^2}{4a} \hat{r} & r \leq a \\ \frac{p_0 a^3}{4r^2} \hat{r} & r > a \end{cases}$$

$$\bar{P} = \frac{p_0 a^5}{r} \hat{r} \quad r > a, r < 2a \quad \text{enunciado}$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

$$\Rightarrow r > a, r < 2a \quad \frac{p_0 a^3 \hat{r}}{4r^2} = \epsilon_0 \bar{E} + \frac{p_0 a \hat{r}}{r}$$

$$\bar{E} = \left( \frac{p_0 a^3}{4r^2} - \frac{p_0 a}{r} \right) \frac{1}{\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\text{En } r > 2a, r < 3a \text{ el medio es } I_i \Rightarrow \bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0 \bar{E} + \epsilon_0 \chi_e \bar{E} = \underbrace{\epsilon_0 (1 + \chi_e)}_{\epsilon(r)} \bar{E}$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{p_0 a^3 \hat{r}}{4\epsilon(r)r^2} \quad y \quad \bar{P} = \left( \frac{p_0 a^3}{4r^2} - \frac{\epsilon_0 p_0 a^3}{4\epsilon(r)r^2} \right) \hat{r}$$

Finalmente, dentro de la  $R_I$  no hay dielectros,  $\Rightarrow P = 0$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\bar{E} = \frac{p_0 r^2}{4\epsilon_0 a} \hat{r} \quad r < a$$

Emiliano Fortes

Luego  $\bar{D} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4a} \hat{r} & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3 \hat{r}}{4r^2} & r > a \end{cases}$   $\bar{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 a} \hat{r} & r < a \\ \left( \frac{\rho_0 a^3}{4r^2} - \frac{\rho_0 a}{r} \right) \frac{1}{\epsilon_0} \hat{r} & r > a \end{cases}$  acrcza

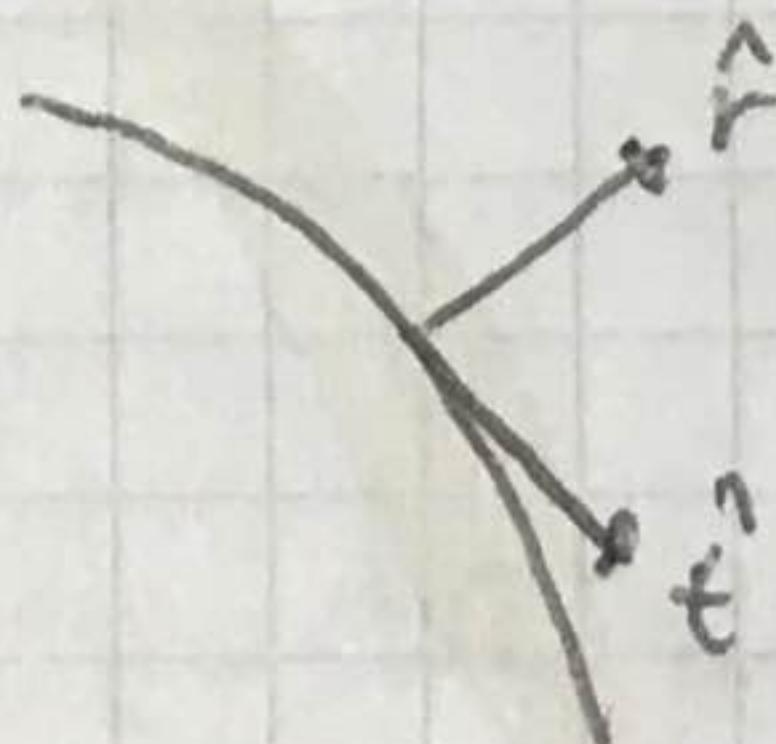
$$\bar{P} = \begin{cases} 0 & r < a \text{ (no dielectrico)} \\ \frac{\rho_0 a}{r} \hat{r} & r > a \text{ acrcza} \\ \left( \frac{\rho_0 a^3}{4r^2} - \frac{\epsilon_0 \rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r^2} \right) \hat{r} & r > 3a \text{ acrcza} \\ 0 & r > 3a \text{ (vacuo)} \end{cases}$$

Continuidad

$$D_{1t} - D_{2t} = P_{1t} - P_{2t} = 0 \quad \text{ya que } E, D, P \text{ son } \hat{r} \text{ direccional y tangencial a la sup serica}$$

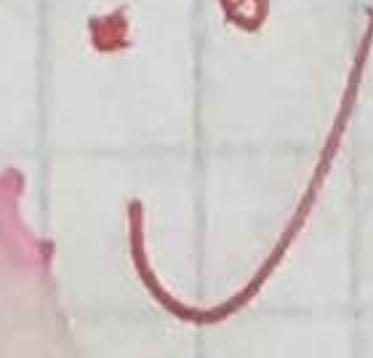
$$E_{1t} = E_{2t} = 0$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a}{4} = 0 = G_l \checkmark$$



$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{G_l + G_p}{\epsilon_0} = \frac{P_0}{\epsilon_0} \quad G_l = 0$$

$$\text{en } r = a \quad G_p = \bar{P} \cdot \hat{n} = P_0$$

MB 

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0} - \left( \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0} - \frac{P_0}{\epsilon_0} \right) = \frac{P_0}{\epsilon_0}$$

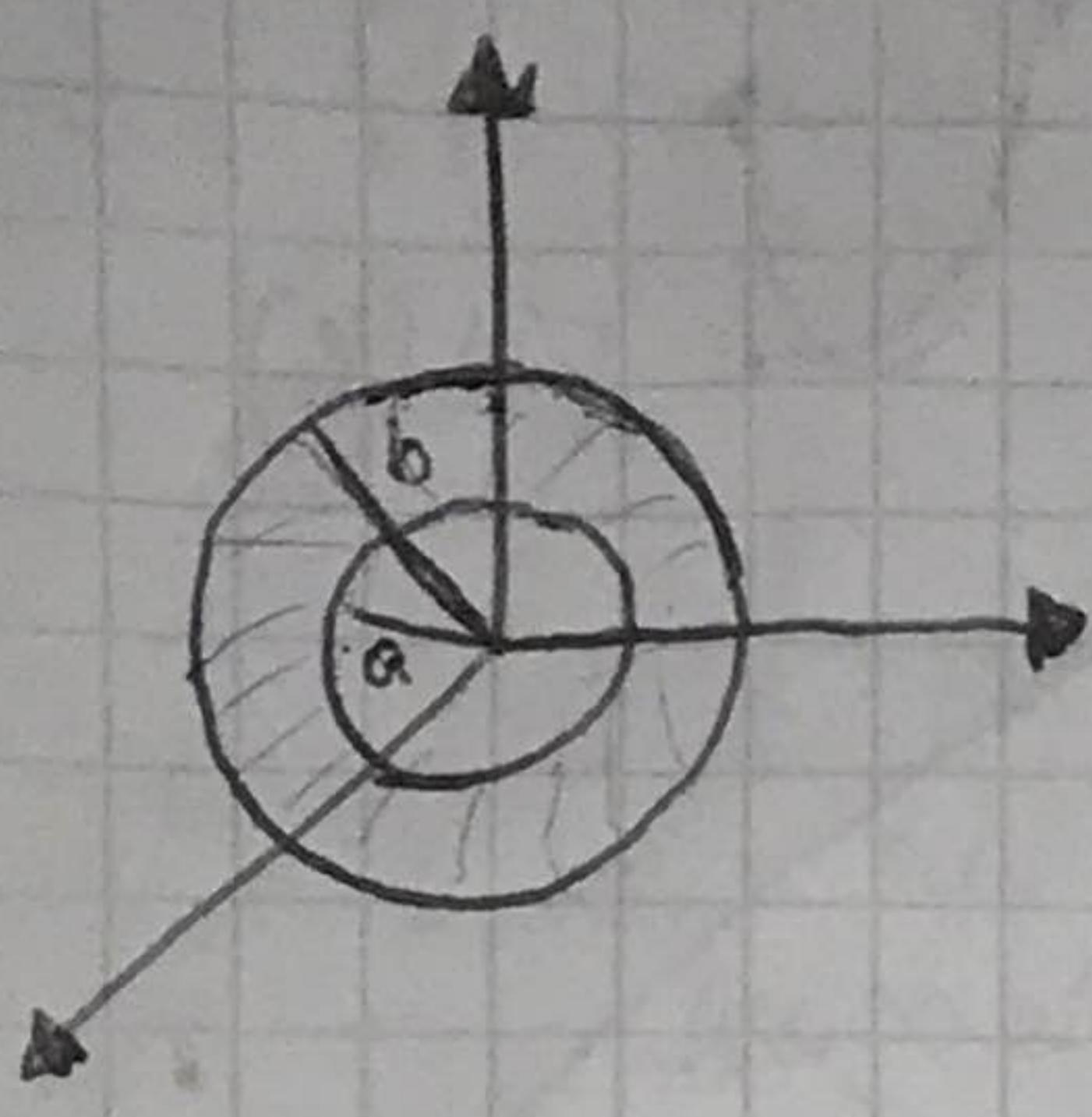
en  $r = 2a$ 

$$G_l = 0 \quad G_p = \bar{P} \cdot \hat{n} = \left( \frac{\rho_0 a^3}{4a^2} - \frac{\epsilon_0 \rho_0 a^3}{4\epsilon_0 a^2} \right) \leftarrow P_0$$

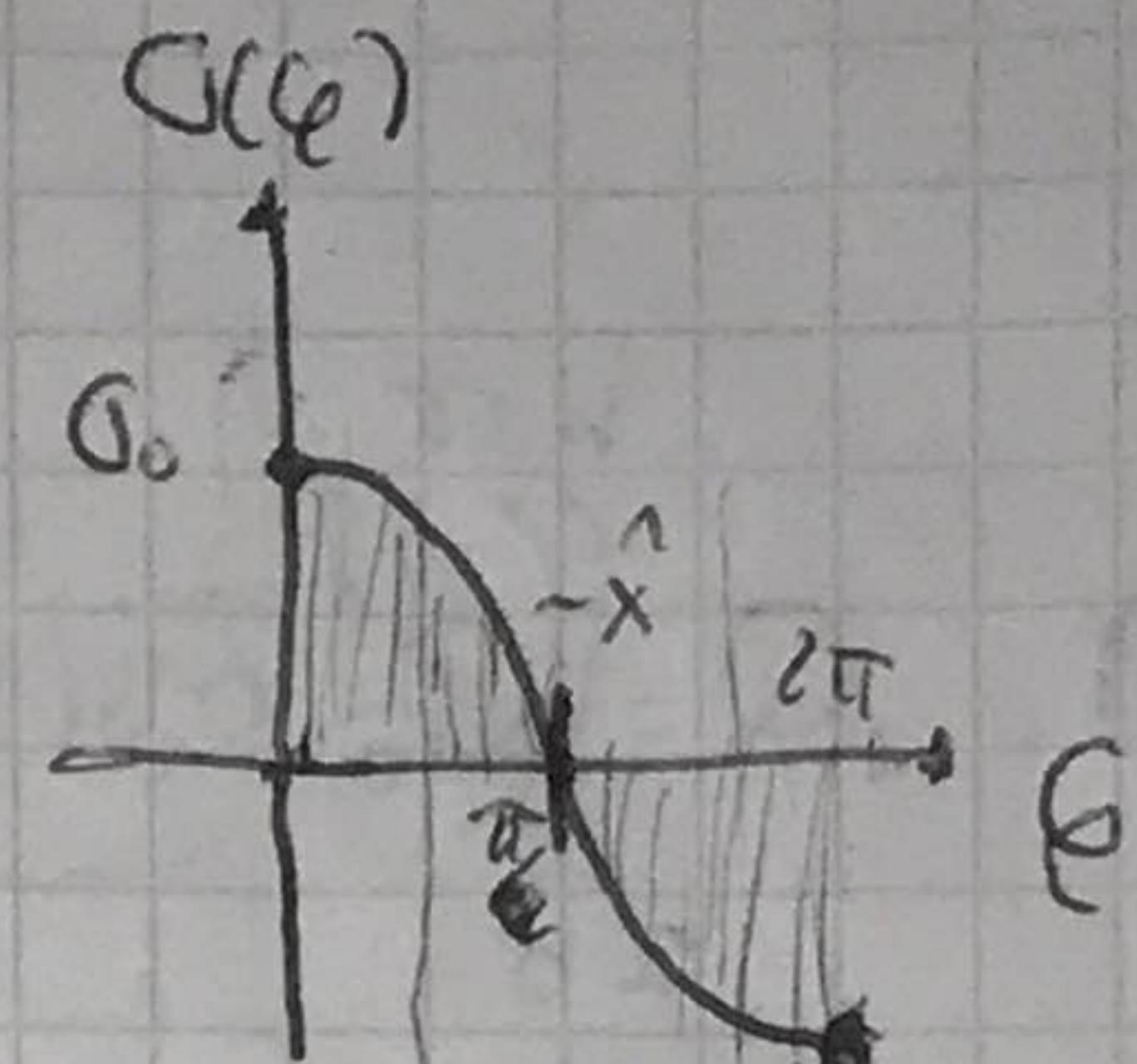
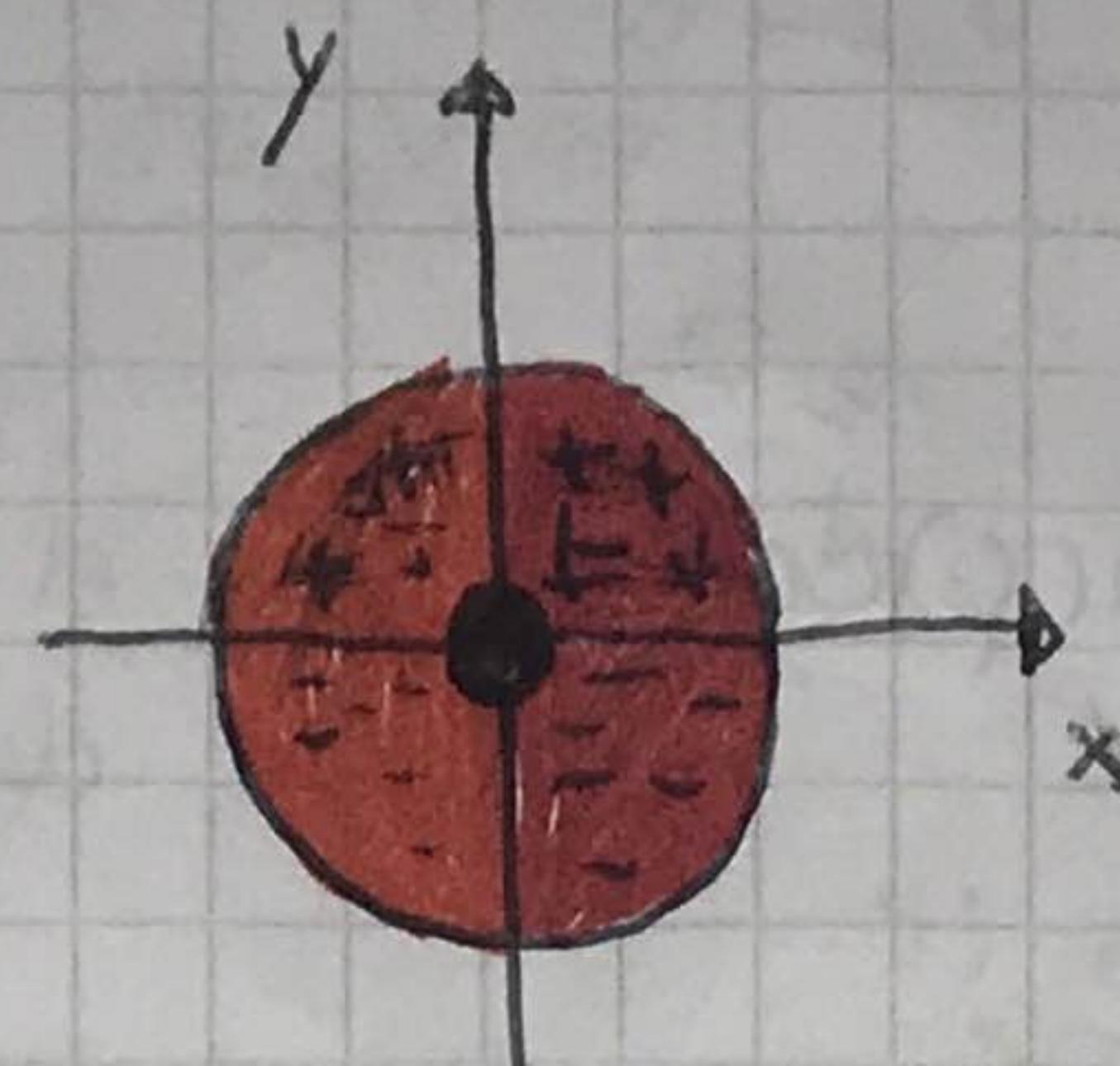
$$E_{1n} = E_{2n} = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0} - \frac{P_0}{\epsilon_0} - \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0 a} = \frac{G_p}{\epsilon_0}$$

en  $r = 3a$ 

$$\frac{G_t}{\epsilon_0} = \left( \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0} - \frac{\epsilon_0 \rho_0 a}{4\epsilon_0 a} \right) = E_{1n} - E_{2n} = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0 a} - \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0}$$



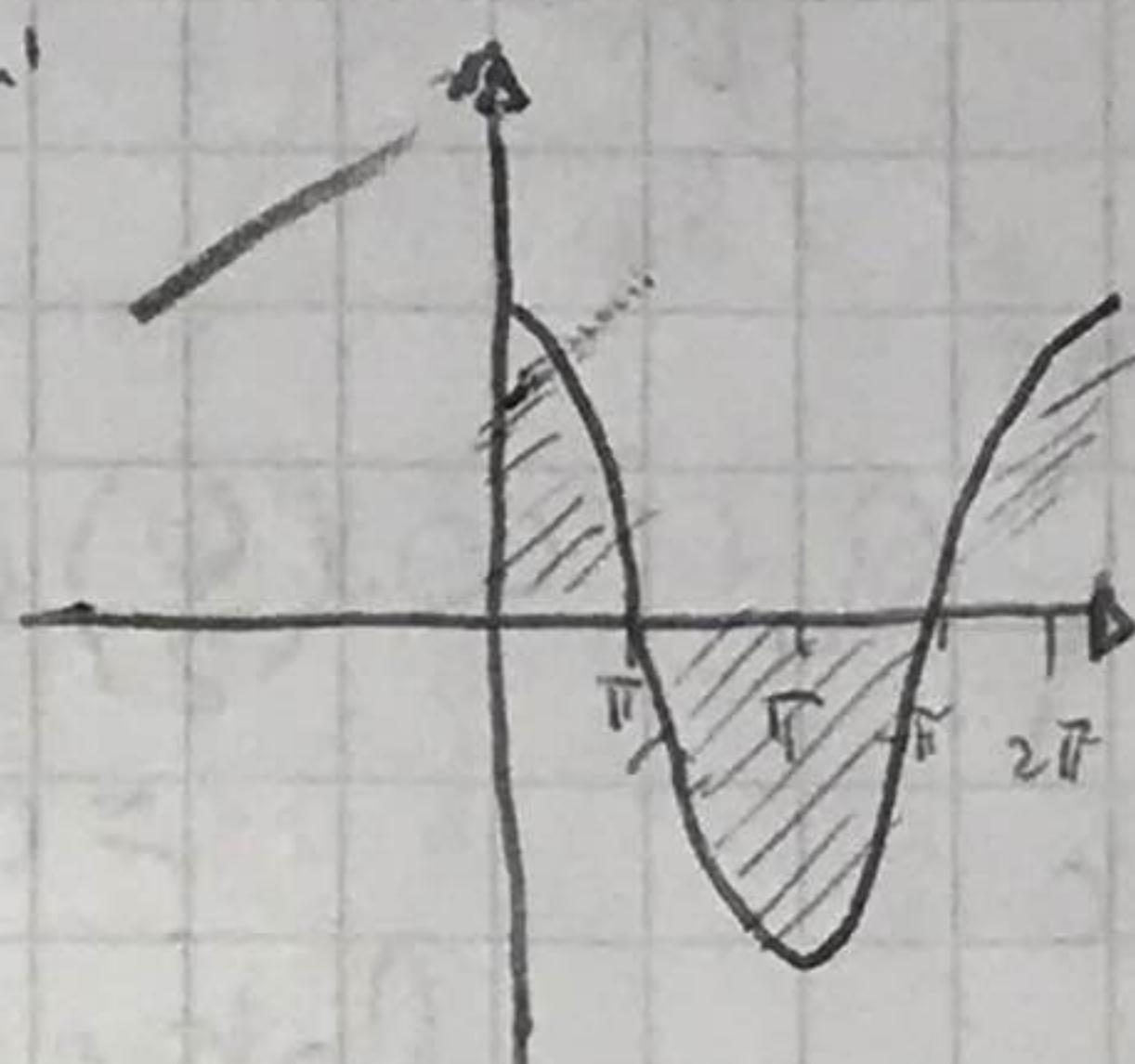
$$Q(\phi) = Q_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$



$$\bar{E}(z) = k \iint_a^b \frac{Q_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) (0, 0, z) - (r \cos(\phi), r \sin(\phi), 0) \cdot r' d\phi' dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}}$$

$$= k \left[ \iint_a^b \frac{Q_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) z r' d\phi' dr' \hat{z} + \iint_a^b \frac{-Q_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\phi) r'^2 \hat{x}}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \right] = 0 \text{ simetría}$$

$$+ \left[ \iint_a^b \frac{-Q_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) r'^2 \sin(\phi) dr' d\phi' \hat{y} \right]$$



$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$= \iint_a^b \frac{-2Q_0 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) r'^2 d\phi' dr' \hat{y}}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \quad \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$-\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} d\phi' = dr' \cdot 2$$

$$\cos(0) = 1 = R_a$$

$$\cos(\pi) = -1 = R_b$$

$$= \iint_a^b \frac{Q_0 \Omega^2 dr' d\phi'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}}$$

$$= \left\{ \frac{r'^2 Q_0 dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \cdot \frac{\Omega^3}{3} \right\} \Big|_a^b = \left\{ -\frac{Q_0 r'^2 dr'}{3(z^2 + r'^2)^{3/2}} \right\} \Big|_a^b$$

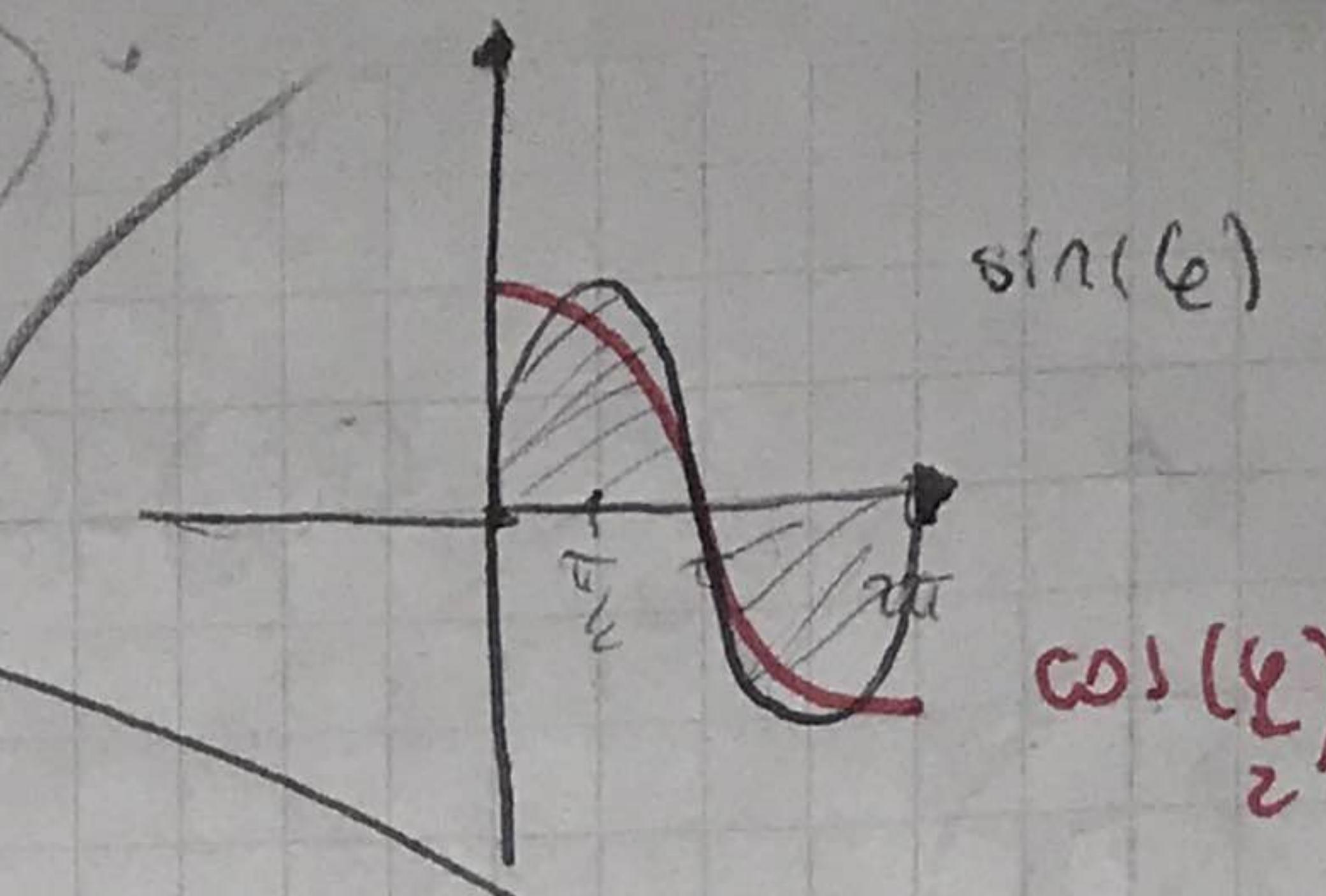
$$-\frac{8}{3} Q_0 \left\{ \frac{r'^2 dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} \right\} \Big|_a^b = -\frac{8}{3} Q_0 \left[ -\frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} + \ln(r' + \sqrt{r'^2 + z^2}) \right] \Big|_a^b$$

$$= \frac{8}{3} Q_0 \left[ \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 + z^2})}{b + \sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \checkmark$$

$$V(\vec{r}) = k \iint_S G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) r dr d\varphi$$

$\approx 0$  No  
simetría

$$V_{\varphi} = 0 \Rightarrow V_0 = 0$$



b)  $Q = \iint_{a \times 0}^{b \times 2\pi} G_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) r dr d\varphi = 0 \quad \therefore \text{el momento dipolar no depende del eje de coord}$

$$\bar{P} = \iint_{\text{Sup}} \bar{G}(\varphi) \cdot \bar{r} ds = \iint_{a \times 0}^{b \times 2\pi} G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), 0) r dr d\varphi$$

$$\iint_{a \times 0}^{b \times 2\pi} G_0 r^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos(\varphi) \hat{x} dr d\varphi = 0 + \iint_{a \times 0}^{b \times 2\pi} G_0 r^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) dr d\varphi \hat{y}$$

(lo hace cero,  
por simetría)

$$= \int_a^{b \times 2\pi} G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) \left( \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) d\varphi \hat{y}$$

$$= \int_0^{2\pi} G_0 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left( \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) d\varphi \hat{y}$$

$$G_0 \int_1^{-1} -2r^2 dr \left( \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) = G_0 \frac{4}{9} \left( b^3 - a^3 \right) \hat{y}$$

Momento cuadripolar

$$Q_{ij} = \int_V g(r') [3r_i r_j - (I_d)_{ij} \| \vec{r} \|^2] dr$$

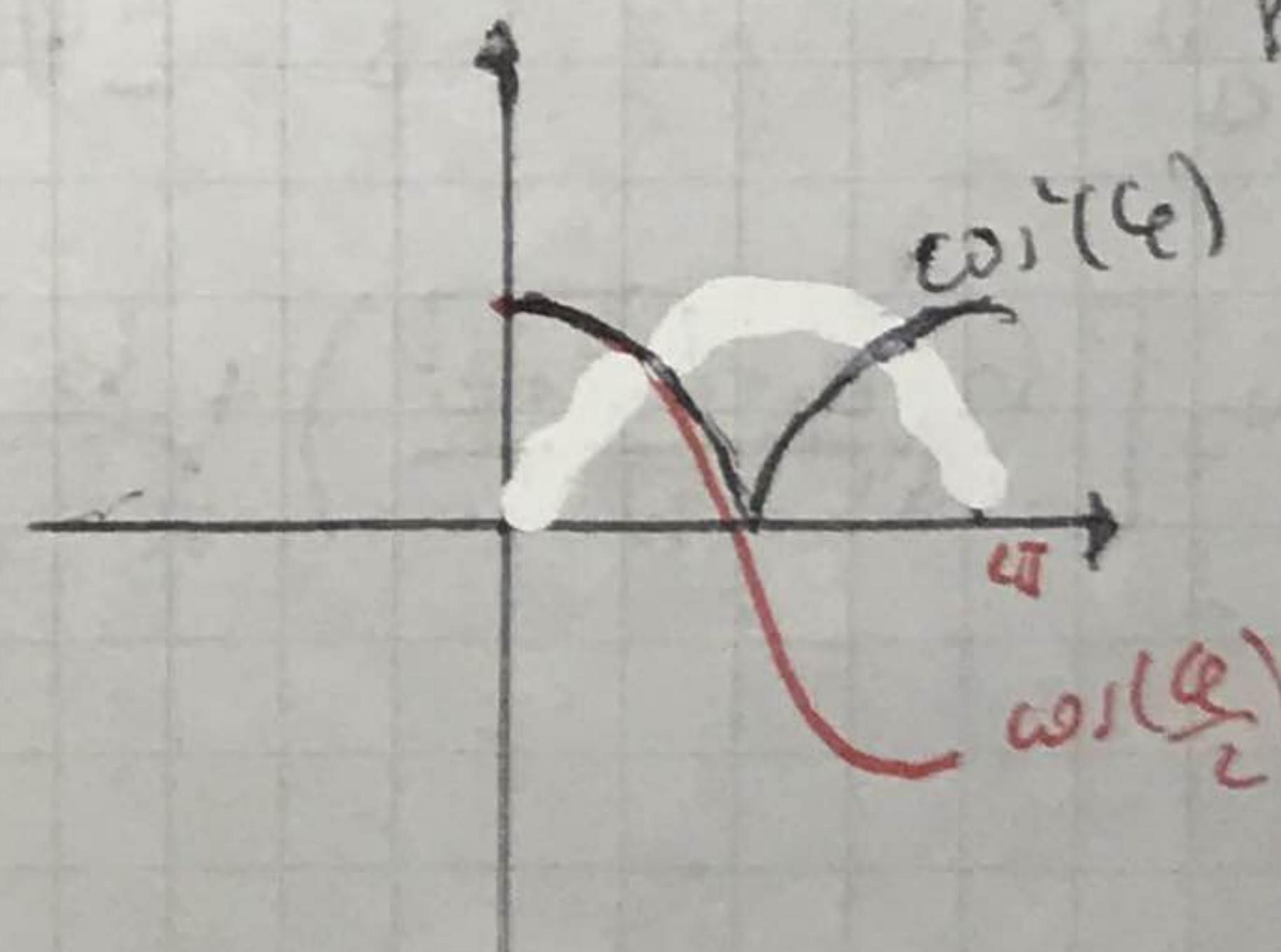
$$Q_{xx} = \iint_S G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) 3x^2 - \| \vec{r} \|^2 ds = \iint_{a \times 0}^{b \times 2\pi} G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) [3r^2 \cos^2(\varphi) - (r^2)] r dr d\varphi$$

$$= \iint_{a \times 0}^{b \times 2\pi} G_0 r^3 \cos^2(\varphi) \cos^2(\varphi) dr d\varphi = 0$$

por simetría  
de paridad = 0

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ u } 0 \text{ y } 2\pi = 0$$

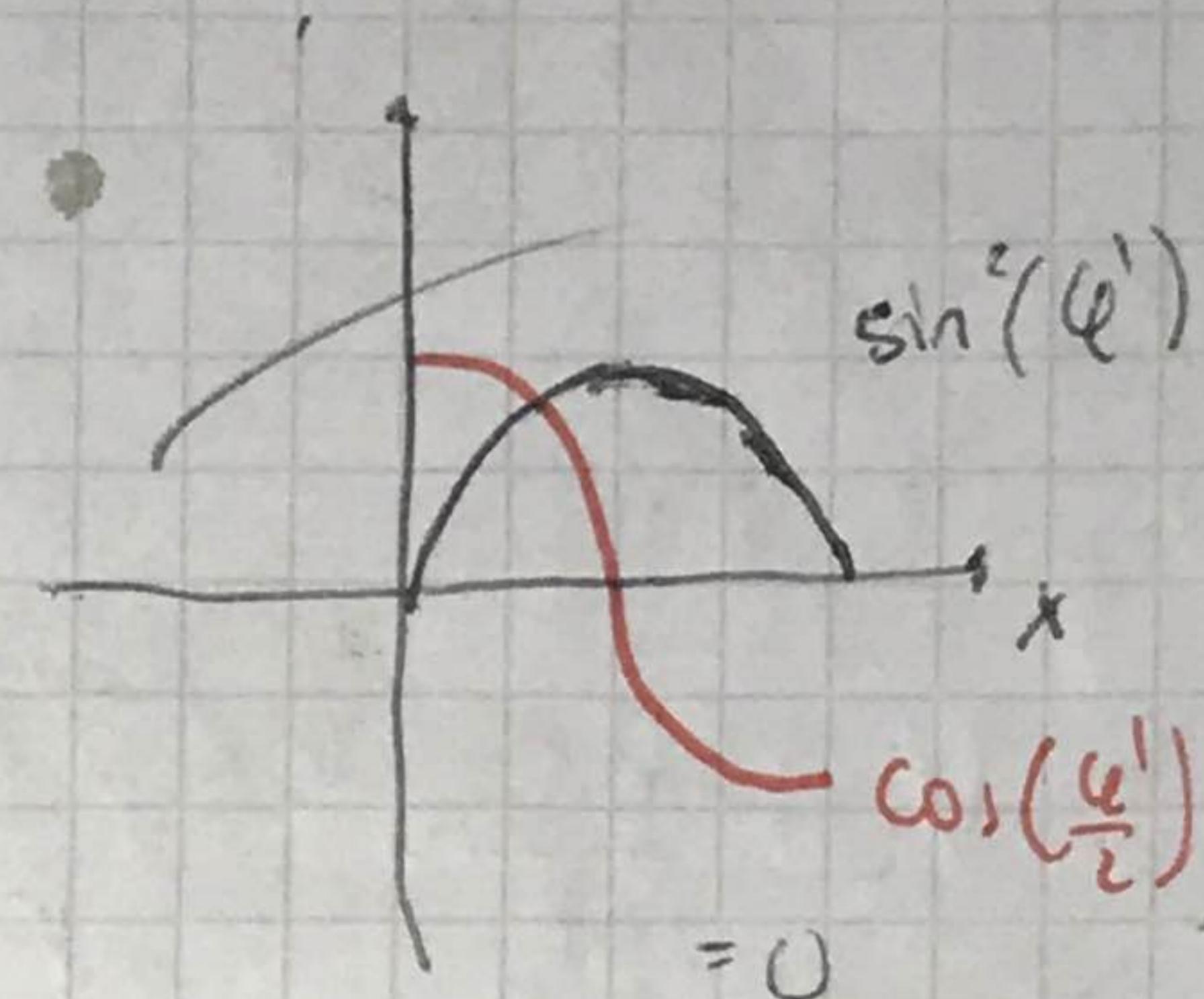
Por x impar



$$Q_{xz} = \iiint_S G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) [3x^2 - r'^2] ds = 0 = Q_{yz} = Q_{zy} = Q_{zx}$$

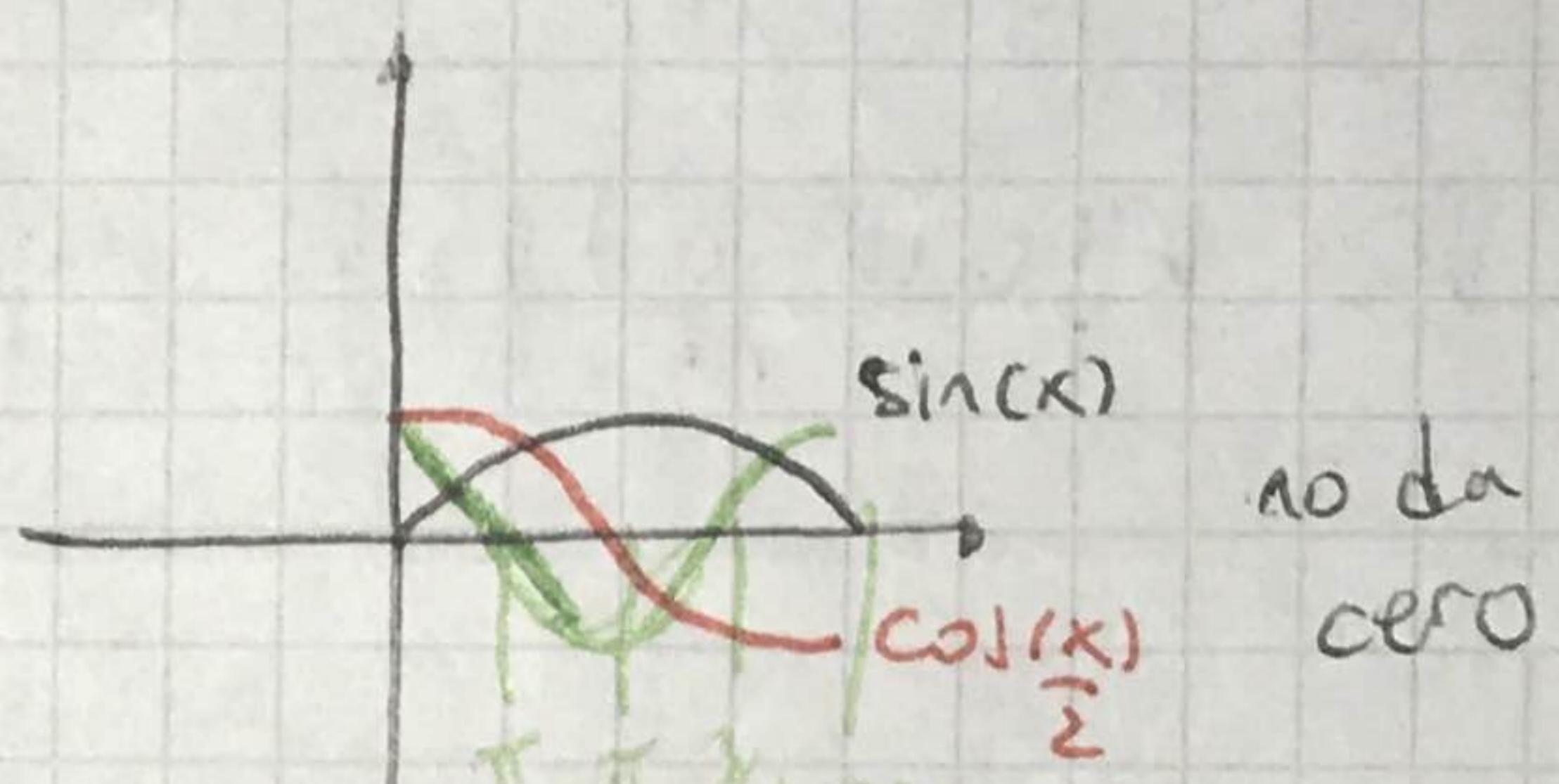
$$Q_{zz} = \iiint_S G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) [3z^2 - r'^2] ds = 0$$

$$Q_{yy} = \iint_a^b G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) [3r^2 \sin^2(\varphi) - r'^2] dr' dr' d\varphi = 0$$



$$Q_{xy} = \iint_a^b G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) [3r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)] r' dr' d\varphi$$

$$Q_{xy} = \int_0^{2\pi} 3G_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) d\varphi$$



$$= 3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \cdot \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[ \left( \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos(\varphi) \right) (\cos^2(\frac{\varphi}{2}) - \sin^2(\frac{\varphi}{2})) \right] d\varphi$$

$$3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \int_0^{2\pi} 2c^2 s(c^2 - s^2) d\varphi = 3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \int_0^{2\pi} 2c^4 s - 2c^2 s^3 d\varphi$$

~~symmetric~~

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = t$$

$$-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) dt = dt$$

$$\cos(\varphi) = 1 = t_1$$

$$\cos(\varphi) = -1 = t_2$$

~~$$3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \int_0^{2\pi} 2t^4 dt = -3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)$$~~

~~$$3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \int_1^{-1} -2t^4 dt = -12G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \left[ \frac{t^5}{5} \right]_1^{-1} = -\frac{12}{5} G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) = -\frac{12}{5} G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)$$~~

$$3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \left[ -\frac{2t^5}{5} \right]_1^{-1} = 3G_0 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) \left[ \frac{4}{5} - \frac{16}{15} \right] = -\frac{1}{5} \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)$$

WOLFRAM

NOTA

$$\text{Por wolfram} = \frac{8}{5}$$

$$Q_{xy} = \frac{2}{5} G_0 (b^4 - a^4) = Q_{yx}$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} G_0 (b^4 - a^4) & 0 \\ \frac{2}{5} G_0 (b^4 - a^4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{4}{9} G_0 (b^3 - a^3) \gamma^1$$

Desarrollo multiplicar

$$\nabla(r) = \frac{k \bar{Q}}{r} + k \frac{\langle \bar{p}, \bar{r} \rangle}{r^3} + \frac{k}{r^2} \sum_{ijk}^3 r_i^t \frac{\bar{Q} r_j}{r^s}$$

$$V(r) = k \frac{4}{9} G_0 \frac{(b^3 - a^3)}{r^3} \gamma + \frac{k}{2r^s} \sum_{ij}^3 r_i^t \begin{pmatrix} 0 & w & 0 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r_j$$

$$V(r) = k \frac{4}{9} G_0 \frac{(b^3 - a^3)}{r^3} \gamma + \frac{k}{2r^s} \left( \gamma_w, x_w, 0 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (zyxw -$$

$$V(r) = k \frac{4}{9} G_0 \frac{(b^3 - a^3)}{r^3} \gamma + \frac{k}{r^2} xy \cdot \frac{2}{5} G_0 (b^4 - a^4)$$

En el eje z da cero