FÍSICA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013

GUÍA 4: MECÁNICA ESTADÍSTICA

1. La función de distribución de velocidades escalares de un grupo de N partículas está definida por

$$\mathrm{d}N_v = \begin{cases} k\,\mathrm{d}v & 0 < v < V \\ 0 & v > V \end{cases}$$

   a) Graficar la función de distribución
   b) Hallar la constante k en función de N y V
   c) Hallar la velocidad media y v_{cm} en función de V
   d) Rehacer lo anterior pero para la distribución

$$\mathrm{d}N_v = \begin{cases} k v\,\mathrm{d}v & 0 < v < V \\ 0 & v > V \end{cases}$$

2.

   a) Calcular la energía cinética media de traslación y la velocidad cuadrática media de una molécula de una gas a 300 K para los casos en que el gas sea hidrógeno, oxígeno y vapor de mercurio. En todos los casos calcular la presión si la densidad es de 3×10^{25} moléculas/m^3.
   b) Considerar que en el gas hay varias clases de moléculas que no interactúan entre sí. Calcular la presión del gas (ley de Dalton).
   c) Considerar 1 Kmol de oxígeno en condiciones normales de presión y temperatura. Construir un gráfico de la función de distribución de las velocidades escalares y evaluar la probabilidad de que una molécula tenga velocidad comprendida entre la media y la más probable.

3. Una ampolla esférica de 10 cm de radio se mantiene a una temperatura de 27°C excepto en un centímetro cuadrado, que se mantiene a muy baja temperatura. La ampolla contiene vapor de agua inicialmente a una presión de 10 mm de mercurio. Suponer que cada molécula de agua que choca contra la superficie fría se condensa y se adhiere a ella ¿Cuánto tiempo se necesita para que la presión descrezca 10^{-4} mm de mercurio?

4. Un gas ideal de átomos de masa m está confinado en un recinto a temperatura T. Dichos átomos emiten luz que emerge del recinto por una ventana. Un átomo en reposo emite luz de frecuencia ν_0. Para un átomo en movimiento la frecuencia será $\nu = \nu_0(1 + v_x/c)$, donde v_x es la componente de la velocidad del átomo en la dirección de emisión y c la velocidad de la luz. Por lo tanto la radiación que emerge del recinto está caracterizada por una distribución de intensidades $I(\nu)d\nu$, que es proporcional a la probabilidad de que la radiación tenga frecuencia comprendida entre ν y $\nu + d\nu$. Calcular:

   a) La distribución de intensidades $I(\nu)d\nu$
   b) La frecuencia media observada en el espectrógrafo.
   c) La raíz cuadrática media de la frecuencia.

5. Un sistema está compuesto por N partículas. La energía de cada partículas depende de n coordenadas q_i y se escribe como $E = \sum_i c_i q_i^2$. Considerando que la función de distribución es la de Maxwell-Boltzmann, $F_{MB} = Ae^{-\beta E(q_1, q_2, \ldots, q_n)}$, hallar:

   a) La constante A
   b) La energía promedio por partícula

6. Una molécula está constituida por cuatro átomos en los vértices de un tetraedro.

a) ¿Cuál es el número de grados de libertad para traslación, rotación y vibraciones de esta molécula?

b) Teniendo en cuenta el principio de equipartición, ¿qué valores tienen C_V y γ en un gas compuesto por estas moléculas?

7. Considere un sólido como un sistema de N partículas unidas entre sí por resortes de constantes k_x, k_y y k_z.

   a) Hallar la energía media de este sistema.

   b) Calcular el calor específico molar (ley de Dulong y Petit).

8. Considere un conjunto de osciladores unidimensional con una energía dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} + bx^4$$

siendo b una constante en equilibrio térmico T.

   a) Calcular la energía cinetica media de un oscilador

   b) Calcular su energía potencial media

   c) Calcular su energía media

   d) Calcular el calor específico a volumen constante por mol de estas partículas. (Ayuda: Es innecesario calcular una integral para responder cualquiera de estas preguntas).

9. Sea un gas de N partículas con carga q y masa m entre dos cilindros coaxiales de radios a y b y longitud L ($L \gg b, a$). El cilindro interno está cargado de forma tal que las partículas tienen una energía potencial $V(r) = C\ln(r/a)$. Suponga que, en el equilibrio, todas las partículas están suficientemente lejos entre sí. En estas condiciones, hallar:

   a) La función de distribución.

   b) La densidad de partículas a una distancia r del eje.

10. La función de distribución de velocidades escalares de las moléculas de un gas es:

$$f(v) = Av^3 e^{-\beta m v^2/2}$$

   a) Hallar A

   b) Hallar la velocidad cuadrática media.

11. La función de distribución de velocidades de un cierto gas es $f(v,\theta,\phi) = A\delta(v-c)$ donde la función δ es la delta de Dirac y $f(v,\theta,\phi)$ esta definida de forma tal que el diferencial del número de partículas es $\mathrm{d}N = f(v,\theta,\phi)\, v^2 \mathrm{d}v \mathrm{d}\Omega$. Hallar

   a) La constante de normalización.

   b) El número de choques, por segundo y por unidad de área de estas partículas contra la superficie del recipiente.

   c) Si la energía media de cada partícula es ε, demostrar que la energía por unidad de tiempo y de área R que se escapa por un orificio del recipiente está relacionado con la densidad de energía interna u en la forma

$$R = \frac{c}{4}u$$

12. Calcule la presión atmosférica en función de la altura respecto de la superficie terrestre (Suponga que la atmósfera se comporta como un gas ideal y que la temperatura no varía apreciablemente con la altura).

13. En una de sus experiencias, Perrin observó, utilizando una suspensión de pequeñas partículas en agua a $T =$ 20°C, que en un dado nivel había, en promedio, 49 partículas por unidad de área, y en un nivel de suspensión $60\,\mu$m más arriba que el anterior se encontraban, 14 partículas por unidad de área. La densidad de las partículas era $1{,}194\,\text{g}/\text{cm}^3$ y las mismas tenían forma esférica de radio $0{,}212\,\mu$m. Halle el número de Avogadro.

14. Considere una sustancia formada por n átomos con su momento magnético $\vec{\mu}_0$ por unidad de volumen, en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}$. La sustancia se encuentra en equilibrio térmico con una fuente a temperatura T. Los momentos magnéticos pueden alinearse solamente paralelos o antiparalelos al campo. Despreciando la interacción entre los átomos vecinos y considerando los átomos fijos, calcule

    a) El número de átomos por unidad de volumen con su momento magnético paralelo al campo y el número de ellos con su momento magnético antiparallelo al campo. ¿Cómo son esos números cuando $\mu_0 B \gg k_B T$ y cuando $\mu_0 B \ll k_B T$? Interprete físicamente.

    b) Encuentre $\langle \mu \rangle$ por átomo y la magnetización media $\langle M \rangle$ de la sustancia. Grafique cualitativamente $\langle M \rangle$ en función de $\eta \equiv \mu_0 B / k_B T$ e interprete físicamente su comportamiento para valores grandes y chicos de η.

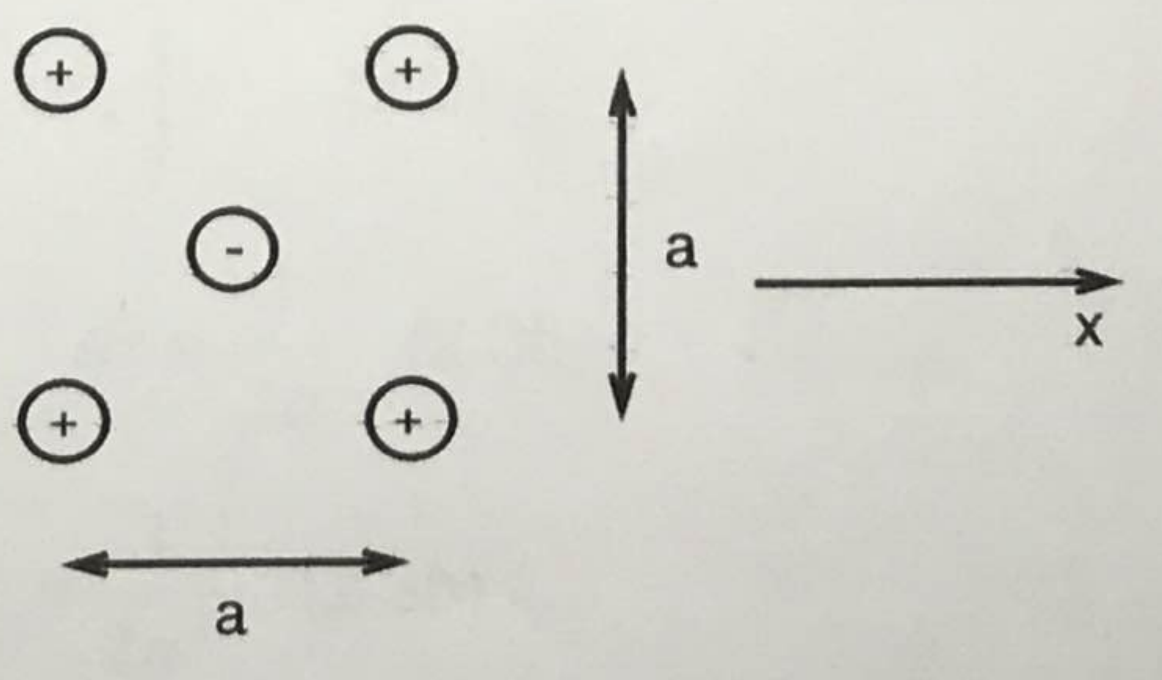
15. Las vibraciones atómicas de un sólido pueden estudiarse considerando que cada átomo vibra independientemente de los demás, con la misma frecuencia angular ω en las tres direcciones. El sólido compuesto por N átomos es así equivalente a un conjunto de $3N$ osciladores cuánticos unidimensionales independientes. Suponiendo que el sólido se encuentra en equilibrio térmico a la temperatura T y que obedece a la estadística de Boltzman:

    a) Encuentre la energía media de cada oscilador y la energía media del sólido. Tenga en cuenta que las energías posibles de un oscilador cuántico son

    $$E_n = \frac{h\omega}{2\pi}(n + \frac{1}{2}) \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots$$

    b) Encuentre el valor de c_V para $kT \gg h\omega/2\pi$. ¿Es el valor que esperaba encontrar (*cf.* problema 7)? Interprete.
    Relaciones útiles: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$; $\frac{\partial(e^{-\beta E})}{\partial E} = -Ee^{-\beta E}$.

16. Un sólido bidimensional a temperatura T contiene como impurezas N iones negativos por unidad de volumen, los cuales reemplazan a algunos de los átomos ordinarios del sólido. El sólido es eléctricamente neutro, ya que cada ión negativo, de carga $-e$, tiene en su vecindad un ión positivo con carga e. El ión positivo tiene libertad de moverse en la red. En ausencia de campo eléctrico, hay idéntica probabilidad de encontrarlo en cualquiera de los cuatro lugares equidistantes que rodean al ión estacionario negativo. Suponga que se aplica un campo eléctrico constante y débil a lo largo de la dirección x (ver figura). Encuentre el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen (es decir, la polarización), en la dirección x.



17. Considere un gas ideal en un recipiente a temperatura T. Se practica un pequeño orificio en la superficie del recipiente. ¿Cuál es la velocidad cuadrática media y la velocidad más probable de las partículas que salen del recipiente inmediatamente después que se realizó el orificio? Discuta por qué la energía media de las partículas no resulta ser $3k_B T/2$.

18. Un recipiente de un litro contiene O_2 a 1 atm de presión y 300 K.

   a) Calcular el número de choques por segundo que efectúa una molécula contra otras ($d(O_2) = 0{,}22\,\mathrm{nm}$).

   b) El número de choques por segundo contra un cm^2 de la superficie del recipiente.

19. ¿Cuál es la frecuencia de choque de una molécula de nitrógeno,

   a) a 300 K y presión atmosferica?

   b) a 300 K y presión de 10^{-6}atm?

20. El recorrido libre medio de las moléculas de cierto gas a 25°C es $2{,}63 \times 10^{-5}$m.

   a) Si el radio de las moleculas es $2{,}56 \times 10^{-10}$m, hallar la presión del gas.

   b) Calcular el número de choques que efectúa una molécula por metro de recorrido.

21. ¿A qué presión, en mm de Hg, debe evacuarse un tubo de rayos catódicos para que el 90 % de los electrones del cátodo alcancen el ánodo sin chocar, el cual se encuentra distante 20 cm?

22. El recorrido libre medio de un gas es 10 cm. Considerar 10000 recorridos libres. ¿Cuántos son mayores que:

   a) 10 cm

   b) 20 cm

   c) 50 cm

   d) ¿Cuántos son mayores que 5 cm y menores que 10 cm?

   e) ¿Cuántos están comprendidos entre que 9,5 cm y menores que 10,5 cm?

   f) ¿Cuántos entre 9,9 cm y 10,1 cm?

   g) ¿Cuántos tienen exactamente 10 cm de longitud?

23. Un grupo de moléculas de oxigeno inician sus recorridos libres simultáneamente. La presión es tal que el recorrido libre medio es de 2 cm. ¿Después de cuánto tiempo quedará aún la mitad del grupo sin haber efectuado ningún choque? Suponer que todas las moléculas tienen velocidad igual a la velocidad media y que la temperatura es de 300 K.

24. Estimar el radio de la molécula de oxígeno.

   a) A partir del valor experimental de la viscocidad del oxígeno $\eta_{O_2} = 19{,}2 \times 10^{-6}\mathrm{s/m^2}$.

   b) A partir de los valores experimentales de la conductividad térmica $K = 24{,}0\,\mathrm{J/m\,s\,K}$ y del calor específico a volumen constante $C_V = 20{,}9\,\mathrm{J/mol\,K}$ respectivamente.

Guía 4: Mecánica estadística

El número de partículas por unidad de volumen que tienen su velocidad entre v_x y v_x+dv_x, v_y y v_y+dv_y, v_y y v_z+dv_z: $dn_{v_x v_y v_z} = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$ (0.1)

si la función distribución depende sólo del módulo de **v**

$dn_{v\theta_v\varphi_v} = f(v)v^2 dv \cdot sen(\theta_v) \cdot d\theta_v d\varphi_v$ (0.2)

integrando en los ángulos se obtiene la distribución, se obtiene la distribución de velocidades escalares:

$dn_v = f_{ve}(v)dv = f(v)v^2 dv \cdot \int\int sen(\theta_v) \cdot d\theta_v d\varphi_v$ (0.3)

entonces: $dn_v = 4\pi \cdot f(v)v^2 dv$ (0.4)

Por otra parte, más en general, puede definirse:

$dN_{x\,y\,z\,v_x v_y v_z} = g(x, y, z, v_x, v_y, v_z) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dv_x dv_y dv_z$ (0.5)

Por ejemplo el valor medio del módulo de **v** está dado por:

$\langle |v| \rangle = \int |v| \frac{dn_v}{n} = \frac{1}{n} \cdot \int_0^\infty |v| f_{ve}(v) dv$ (0.6)

O el valor medio de la energía cinética: $\frac{m}{2}\langle v^2 \rangle = \frac{m}{2}\int v^2 \frac{dn_v}{n} = \frac{m}{2n} \cdot \int_0^\infty v^2 f_{ve}(v) dv$ (0.7)

Se puede ver que el número de partículas que chocan contra la pared por unidad de área y tiempo es:

$\frac{dN_v}{dtdA} = \frac{1}{4} v dn_v \quad \rightarrow \quad \frac{dN}{dtdA} = \frac{1}{4}\int_0^\infty v dn_v = \frac{1}{4}\int_0^\infty v f_{ve}(v) dv \quad \rightarrow \quad \frac{dN}{dtdA} = \frac{n}{4}\langle v \rangle$ (0.8)

La presión queda: $p = \frac{1}{3} m \int_0^\infty v^2\, dn_v = \frac{m}{3}\int_0^\infty v^2\, f_{ve}(v) dv \quad \rightarrow \quad p = \frac{m}{3} n \langle v^2 \rangle$ (0.9)

Función de distribución de Maxwell-Boltzmann:

$g(x, y, z, v_x, v_y, v_z) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dv_x dv_y dv_z = A e^{-\beta E(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dv_x dv_y dv_z$ (0.10)

Con $\beta = \frac{1}{k_B T}$ (0.11)

Problema 2a: $dn_{v_x v_y v_z} = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = A e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv_x dv_y dv_z$ (2.1)

Normalización: $n = \int dn_{v_x v_y v_z} = A\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v_x^2} dv_x\right)^3$ (2.2)

Usando: $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (2.3a) $\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$ (2.3b)

$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$ (2.3c) $\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$ (2.3b)

Con lo cual: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}} \quad \rightarrow \quad A = n\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}}\right)^{-3}$ (2.4)

$$\left\langle \frac{m}{2}v^2 \right\rangle = \int \frac{m}{2} v^2 dn_{v_x v_y v_z} = A \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv_x dv_y dv_z \quad (2.5)$$

Una forma de hacer el cálculo es usar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv_x dv_y dv_z = -\frac{d}{d\beta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv_x dv_y dv_z \right) = -\frac{d}{d\beta}\left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m\beta}} \right)^3 \right] \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv_x dv_y dv_z = \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{m}} \right)^3 \frac{1}{\beta^{5/2}} \quad (2.6b)$$

Juntando: (2.4) y (2.6b) queda: $\left\langle \frac{m}{2}v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T$ (2.7)

Parte c: $dn_v = f_{ve}(v)dv = 4\pi v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv$ (2c.1)

Problema 3: usar $\frac{dN}{dt} = \frac{n}{4}\langle v \rangle A$ (3.1) $\quad n_f = n_0 10^{-5}$

multiplico por unidad de área y volumen

$\frac{dN}{dA\,dt} = \frac{n}{4}\langle v \rangle \Rightarrow \frac{V\,dn}{dt} = \frac{n}{4}\langle v \rangle A$

Problemas 12 y 13 (Alexis)

Problema 9a:

$$dN_{v_x v_y v_z, r, \theta, z} = A e^{-\beta \frac{m}{2} v^2 - \beta q V(r)} dv_x dv_y dv_z r dr d\theta dz \quad (9.1)$$

$$N = A\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y dv_z e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} \right)\left(\int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r dr\, e^{-\beta q V(r)} \right) \quad (9.2)$$

$dN_{(v_x, v_y, v_z, r, \theta, z)} = A e^{-\beta \frac{m}{2} V^2 - \beta q V(r)} dv_x dv_y dv_z dr d\theta dz$

$dN_{r,\theta,z} = A' e^{-\beta q V(r)}$

$\frac{dN_{r,\theta,z}}{dr} = \frac{N e^{-\beta q V(r)}}{\int dz \int d\theta \int_a^b r dr e^{-\beta q V(r)}} \qquad dN = ⊙$

Hallen A

Parte b:

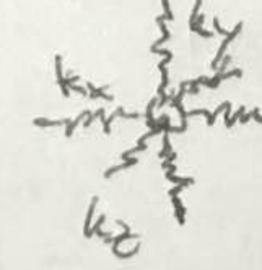
$$dN_r = r dr\, e^{-\beta q V(r)} A\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y dv_z e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} \right)\left(\int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \right) = A' r e^{-\beta q V(r)} dr \quad (9.3)$$

ka hi ku ke ko

a i u e o

あいうえお / かきくけこ

sa shi su se so



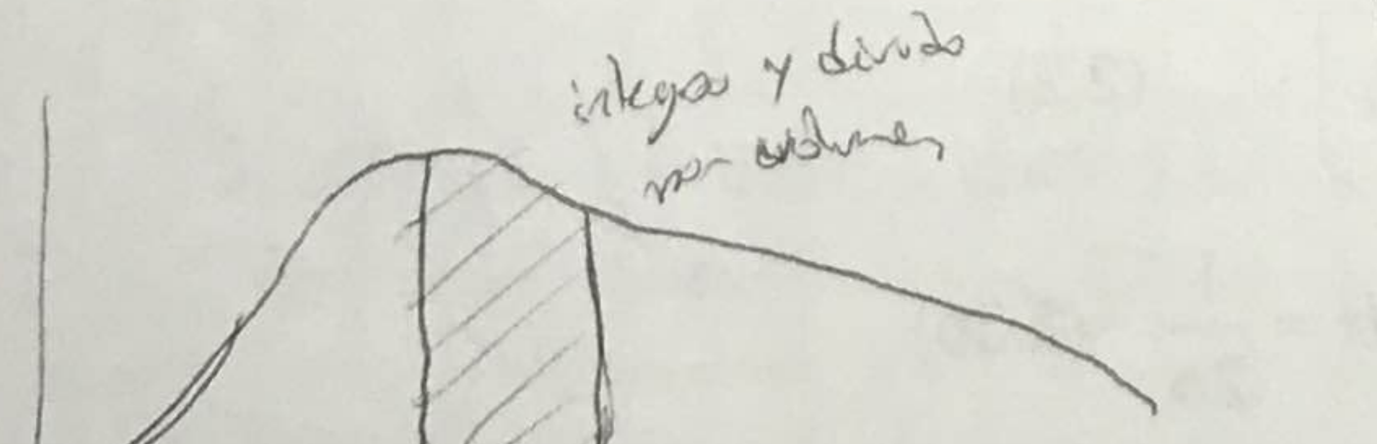
さしすせそ

Hallen A'

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{N}{\int_a^b r dr\, e^{-\beta q V(r)}} r e^{-\beta q V(r)} \quad (9.4)$$

Problema 7

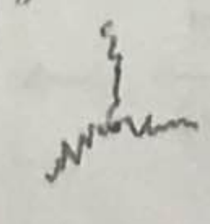
integro y divido por volumen



$U(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{\tilde{k}_x}{2}x^2 + \frac{\tilde{k}_y}{2}y^2 + \frac{\tilde{k}_z}{2}z^2$

$\langle U_p \rangle_{tot} = \left(\frac{\tilde{k}_x}{2}x^2 + \frac{\tilde{k}_y}{2}y^2 + \frac{\tilde{k}_z}{2}z^2 \right) \cdot A e^{-\beta \frac{m}{2} V^2 - \beta U_p} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$

Aproximo por 3 resorte fijo



$\iiint_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y dv_z$

Prob 5

$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_x}{c} \right)$

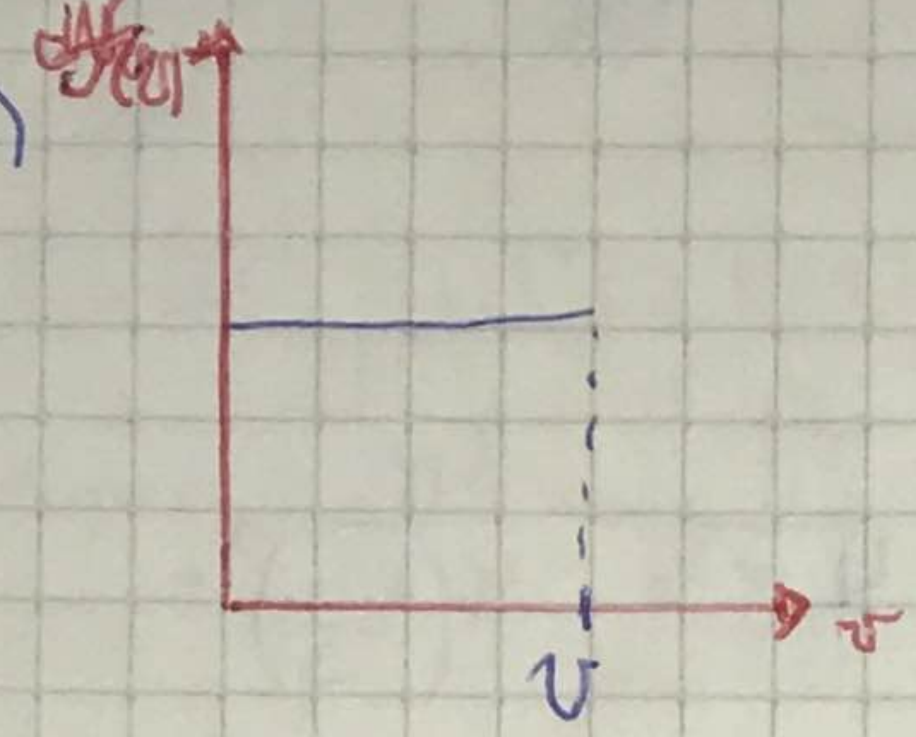
$⊙ = \frac{dN}{dV} = A' e^{-\beta q V(r)}$

Ejercicio 1:

$$dN_v = \begin{cases} k\,dv & 0 < v < \overline{V} \\ 0 & v > \overline{V} \end{cases}$$

Función de distribución de velocidades de N partículas

a)



$f(v) = k$

b) Hallar k en función de N y $\overline{V}$

$$\int_{\forall v} \frac{dN_v}{N} = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\overline{V}} \frac{k}{N} dv = \frac{k\overline{V}}{N} = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{N}{\overline{V}}}$$

c) Hallar la velocidad media y v_{cm} en función de $\overline{V}$

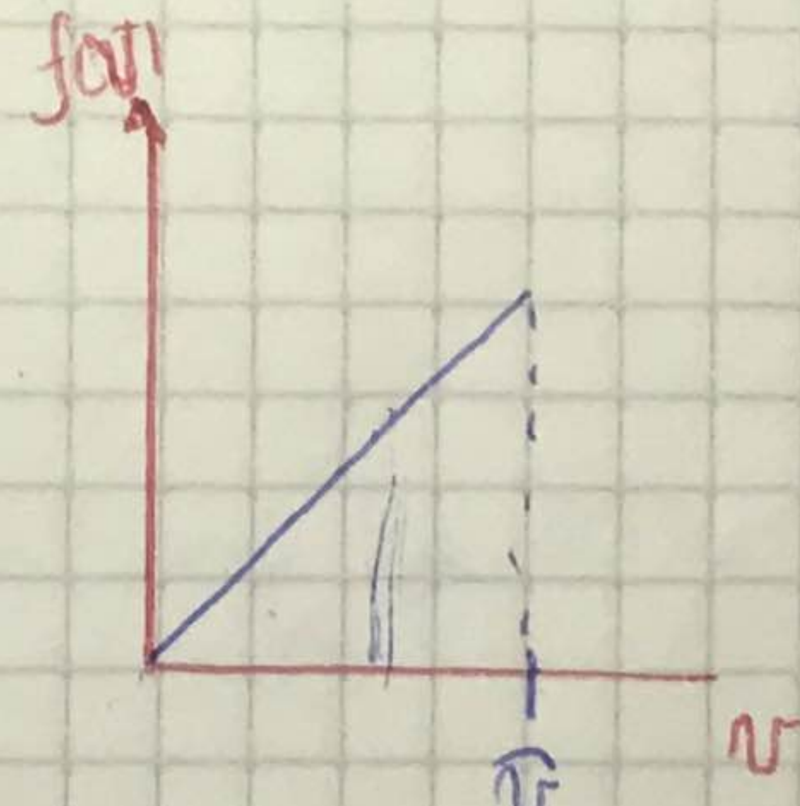
$$\langle v \rangle = \int_{\forall v} v \frac{dN_v}{N} = \int_0^{\overline{V}} \frac{v\,k\,dv}{N} = \frac{\overline{V}^2}{2}\frac{k}{N} = \boxed{\frac{\overline{V}}{2}}$$

$$v_{cm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\overline{V}} \frac{v^2 k\,dv}{N} = \frac{\overline{V}^{\cancel{3}}}{3\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}}{\cancel{\overline{V}}} = \frac{\overline{V}^2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{cm} = \frac{|\overline{V}|}{\sqrt{3}}}$$

d) $$dN_v = \begin{cases} kv\,dv & 0 < v < \overline{V} \\ 0 & v > \overline{V} \end{cases}$$



$f(v) = kv$

$$1 = \int_0^{\overline{V}} \frac{kv\,dv}{N} = \frac{\overline{V}^2}{2N} k \Rightarrow k = \frac{2N}{\overline{V}^2}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{\overline{V}} \frac{kv}{N} v\,dv = \frac{k\overline{V}^3}{3N} = \frac{2}{3}\overline{V}$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\overline{V}} \frac{kv^3}{N} dv = \frac{k\overline{V}^4}{4N} = \frac{\overline{V}^2}{2} \Rightarrow v_{cm} = \frac{|\overline{V}|}{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 2

a) $\frac{dn_{v_x v_y v_z}}{N} = f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z = \frac{A}{N} e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv_x\,dv_y\,dv_z$

normalizando $1 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{A}{N} e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv\,d\theta\,d\varphi\, v^2 \sin(\theta)$

$\Rightarrow \frac{1}{4\pi} = \frac{A}{N} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v^2} v^2\, dv \Rightarrow$ usando tabla

$$= -\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma^{1/2}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\gamma^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\left(+\frac{\beta m}{2}\right)^{3/2}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{4\pi}} = \frac{A \cdot \sqrt{\pi}}{\cancel{4}N}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2}$

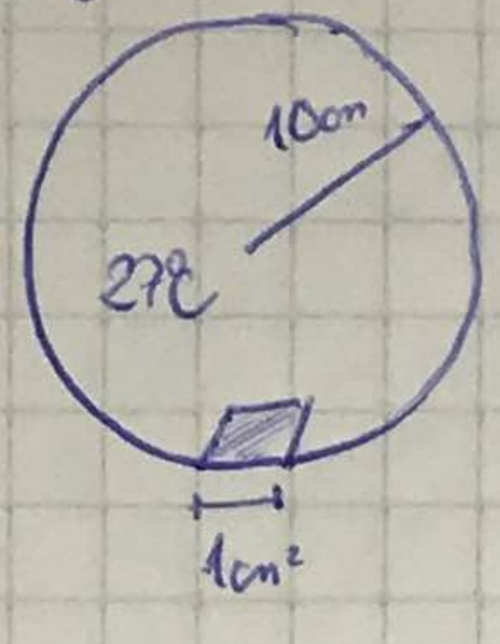
$\Leftrightarrow A = N\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} \Rightarrow \frac{dn}{N} = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\beta m}{2} v^2} dv_x\,dv_y\,dv_z$

$\Rightarrow \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle = \int \frac{m}{2} v^2 \frac{dn}{N} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{m}{2} v^2 \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\beta m}{2} v^2} \sin(\theta)\, v^2\, dv\,d\theta\,d\varphi$

$= \frac{m}{2}\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} \cdot 4\pi \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{\beta m}{2} v^2} dv = \frac{m}{2}\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} 4\pi \cdot \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2} \cdot \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

$\Rightarrow \frac{m}{2}\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}\frac{1}{\beta} = \frac{3}{2} k_B T$ $\qquad \langle P \rangle = \rho k_B T =$

Ejercicio 3



$P_0 = 10\,mmHg$

$P_f = 10\,mmHg - \underbrace{1e^{-4}\,mmHg}$

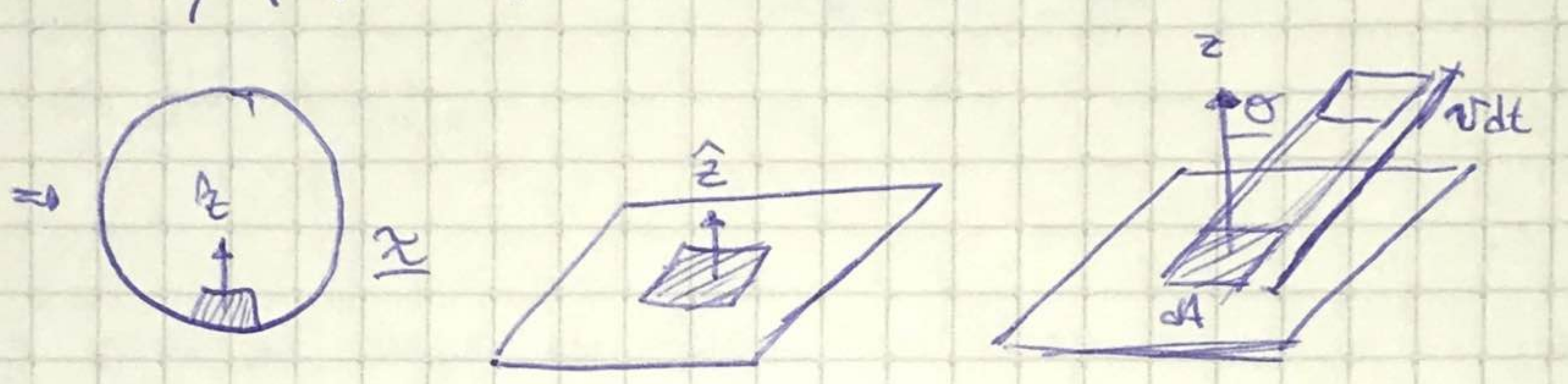
muy pequeño ⇒ es como si el sistema mantiene el Eq. termod ⇒ Vale estadística de Boltzmann

⇒ $P = P(t) = \rho(t)\, k_B T = \frac{N(t)}{V} k_B T$; $N = N(t)$ porque me dice que chocan partículas y se condensan

⇒ $N(t+dt) - N(t) = -N_{choques}$ ⇒ $\frac{N(t+dt) - N(t)}{dt} = \frac{-N_{ch}}{dt}$

⇒ $\frac{dN}{dt} = -\frac{N_{ch}}{dt}$

Como 1cm² muy pequeño respecto a los tamaños característicos del sistema ⇒ lo podemos plano



$dN_{ch} = \rho\, v\, dt\, dA \cos(\theta)$ ⇒ $\frac{dN_{ch}}{dt\,dA} =$

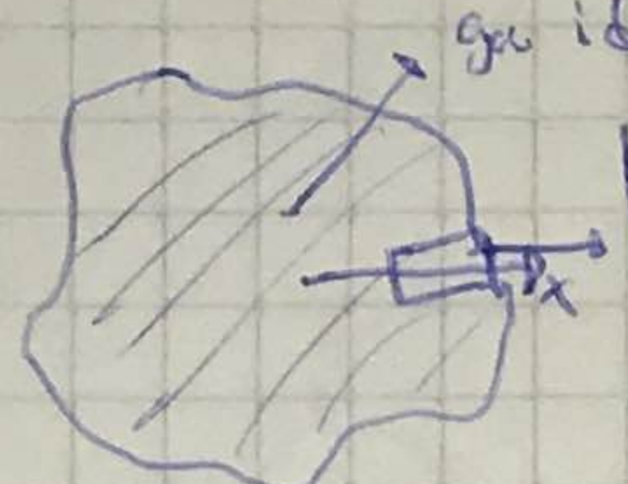
⇒ $\frac{dN_{ch}}{dt\,dA} = \frac{N}{V}\frac{\langle v\rangle}{4}$ ⇒ $\frac{dN}{dt} + \frac{N}{V}\frac{\langle v\rangle}{4} = 0 \quad \forall t$

⇒ $N(t) = c\, e^{-\frac{N}{V}\frac{\langle v\rangle}{4} t}$

⇒ $P(t) = \frac{c\, e^{-\frac{N}{V}\frac{\langle v\rangle}{4} t}}{V} \cdot k_B T$ $\quad P_0 = 10\,mmHg = \frac{c}{V} k_B \cdot 300K$

Cuentas!

Problema 4



gas ideal, T

Puedo ver la radiación

a) $I(\nu)d\nu$ probabilidad de que un átomo emita luz con frecuencia entre ν y $\nu+d\nu$

$I(\nu)d\nu = f^*(v_x)dv_x$ osea la $P_{(\nu,\nu+d\nu)} = P_{(v_x,v_x+dv_x)}$

$\Rightarrow I(\nu) = f^*(v_x)\frac{dv_x}{d\nu} = \frac{c}{\nu_0} A e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} dv_x$

$\nu = \nu_0 + \frac{\nu_0 v_x}{c}$ $\quad$ $v_x = \frac{\nu c}{\nu_0} - c$

con $d\nu = \frac{\nu_0 dv_x}{c}$

Nota f^* pues no integro de $-\infty$ a $+\infty$ sino de $-c$ a c pues estoy con electromagnetismo

$$1 = \int_{-c}^{c} A e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} dv_x \Rightarrow A = \left(\int_{-c}^{c} e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} dv_x\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow I(\nu)d\nu = \frac{c}{\nu_0}\left(\int_{-c}^{c} e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} dv_x\right)^{-1} e^{-\frac{\beta m v_x^2}{2}} d\nu$$ cambiando v_x por ν

b) $\langle \nu \rangle = \int_0^{2\nu_0} \nu I(\nu) d\nu$ $\quad$ $\langle \nu \rangle = \langle \nu_0 + \frac{\nu_0}{c} v_x \rangle = \nu_0 + \frac{\nu_0}{c}\langle v_x \rangle^{=0}$

hagamos la cuenta

$$\langle \nu \rangle = \int_0^{2\nu_0} \nu d\nu \frac{Ac}{\nu_0} e^{-\frac{\beta m}{2}\left(c^2\left(\frac{\nu}{\nu_0}-1\right)^2\right)}$$

$x = c\left(\frac{\nu}{\nu_0}-1\right)$

$\Rightarrow dx = \frac{c}{\nu_0} d\nu$

$$\Rightarrow \langle \nu \rangle = \int_{-c}^{c} A dx \left(\underbrace{\frac{x\nu_0}{c}}_{\text{por paridad es cero}} + \nu_0\right) e^{-\frac{\beta m x^2}{2}} \Rightarrow \langle \nu \rangle = \frac{A\nu_0}{c}\int_{-c}^{c} x e^{-\frac{\beta m x^2}{2}} dx = \nu_0$$

(cuenta)

c) $\sqrt{\langle V^2\rangle} \Rightarrow \langle \nu^2\rangle = \langle \nu_0^2(1+\frac{v_x}{c})^2\rangle = \underbrace{\langle \nu_0^2\rangle}_{\nu_0^2} + \frac{2\nu_0^2}{c}\underbrace{\langle v_x\rangle}_{=0} + \frac{\nu_0^2}{c^2}\langle v_x^2\rangle$ = cierto

Ejercicio 5

N partículas

$\epsilon_i = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2 \Rightarrow E = N\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2$ asumiendo no potencial de interacción

$\Rightarrow f_{MB}(\vec{q}) = A e^{-\beta N\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2} = A\prod_{i=1}^{N} e^{-\beta\sum_{j=1}^{n} c_i q_i^2}$

Normalizando $1 = \int_{\forall q} d\vec{q}_1^{\,N} d\vec{q}_2^{\,N} \dots d^N q_n\, A\prod_{i=1}^{N} e^{-\beta\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2}$

Como todas son equivalentes, normalizo de a una

$A_T = \prod_{i=1}^{N} A_i$ $\quad 1 =$ $\quad 1 = A\prod_{i=1}^{N}\int_{\forall q} dq_1 \dots dq_n\, e^{-\beta\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2}$

N partículas

ϵ_j depende de n coordenadas q_i

$\epsilon_j = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2$. $\quad F_{MB} = A e^{-\beta E}$

$E = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2 \Rightarrow 1 = \int_{\forall q} A\, d\vec{q}_1^{\,N} d\vec{q}_2^{\,N} \dots d\vec{q}_n^{\,N}\, e^{-\beta\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2}$

$\Rightarrow 1 = \int_{\forall q} (d\vec{q})_n^N \underbrace{A\prod_{j=1}^{N}}_{A_T} e^{-\beta\sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2}$ Las partículas son indistinguibles $1 = \int_{\forall q} (d\vec{q})_n^N \prod_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta c_i q_i^2}$

$\Rightarrow$ puedo normalizar de a una

$A_T = \prod_{j=1}^{N} A = A^N \quad A = \prod_{i=1}^{n} A_i$

A

$\Rightarrow 1 = A_i\int_{\forall q} dq_i\, e^{-\beta c_i q_i^2} = \quad \Rightarrow A_T = \prod_{i=1}^{N}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{c_i\beta}{\pi}}$

$= A_i\frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma^{1/2}} = A_i\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c_i\beta}} \Rightarrow A_i = \sqrt{\frac{c_i\beta}{\pi}}\ 2$

b) $\langle \epsilon_s \rangle = \int \epsilon_s \, d\bar{q}_i \, A \cdot e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^2}$

Ejercicio 6:

a)

3 grados de translación, 2 rotación

Vibración?