Hoja 1

# Matemática IV

- Conjunto de números complejos

$z = (x, y) = x + iy$ ; $x = Re(z)$ parte real ; $y = Im(z)$ parte imaginaria

Si $x = 0 \Rightarrow z$ imaginario puro

Propiedades de los números complejos

**Suma:**

- Conmutatividad $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- Asociatividad $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- Existencia de elemento neutro: $z + 0 = z$ ; $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$
- Existencia de inverso aditivo: $z + (-z) = 0$ ; $-z = (-x, -y)$

**Producto:**

- Conmutatividad $z_1 \cdot z_2 = z_2 \, z_1$
- Asociatividad $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- Existencia de elemento neutro $z \cdot 1 = z$ ; $(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y)$
- Existencia de inverso multiplicativo. si $z \neq 0$, $\exists \, z^{-1} / z \cdot z^{-1} = 1$

$z = (x, y)$, busco $W(u, v) / zW = 1$ $\quad \left.\begin{array}{l}(x, y)(u, v) = (1, 0) \\ (xu - yv, xv + yu) = (1, 0)\end{array}\right\}$ 2 ec 2 incognitas

Solución única $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ ; $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ $\quad x^2+y^2 \neq 0$ $\quad$ ó $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

con $\det \neq 0 = x^2+y^2$

$\Rightarrow \exists!$ solución

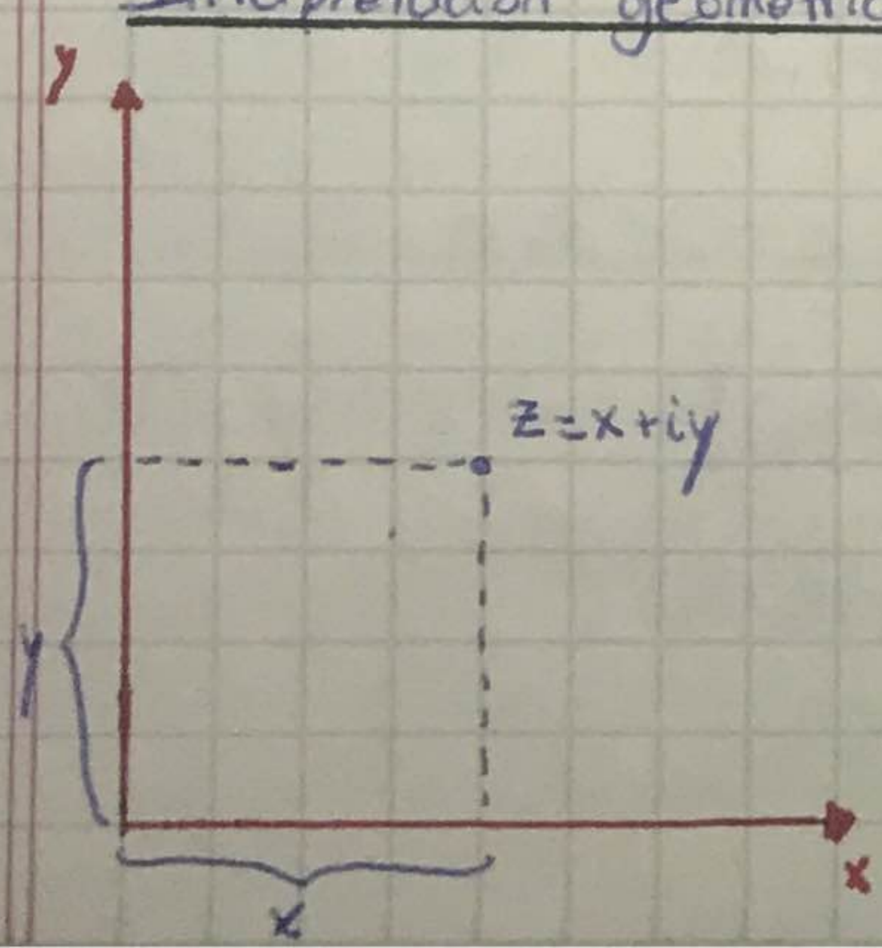
- Propiedad distributiva $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

i) $\mathbb{C}$ es un cuerpo (Satisface los axiomas de suma y producto). $\mathbb{C}$ no tiene orden ($a > b$)

Definimos $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ Resta o sustracción

$\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$, $z_2 \neq 0$ División o cociente

Interpretación geométrica



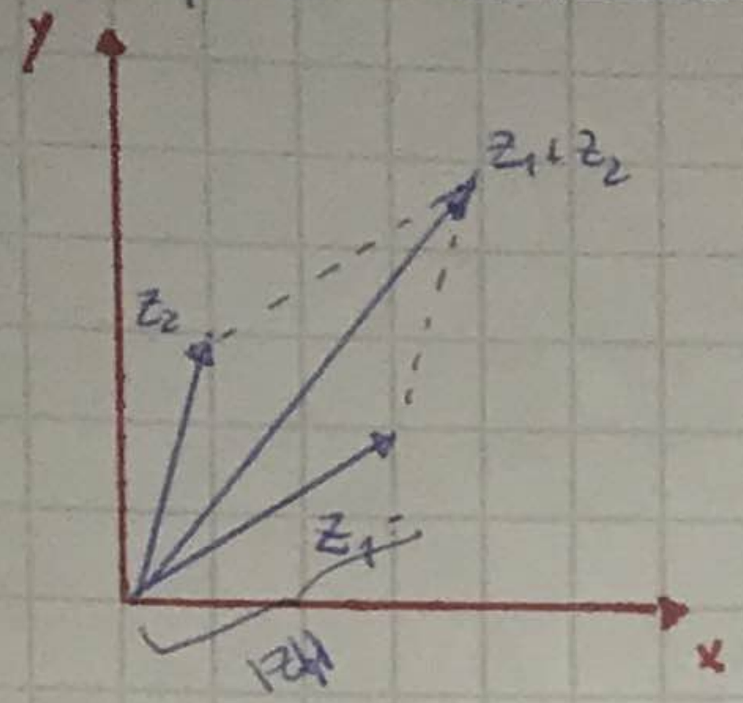

Plano complejo $z = x + iy = (x, y)$ Punto o vector

Eje x = eje real

Eje y = eje imaginario

## Interpretación de la suma

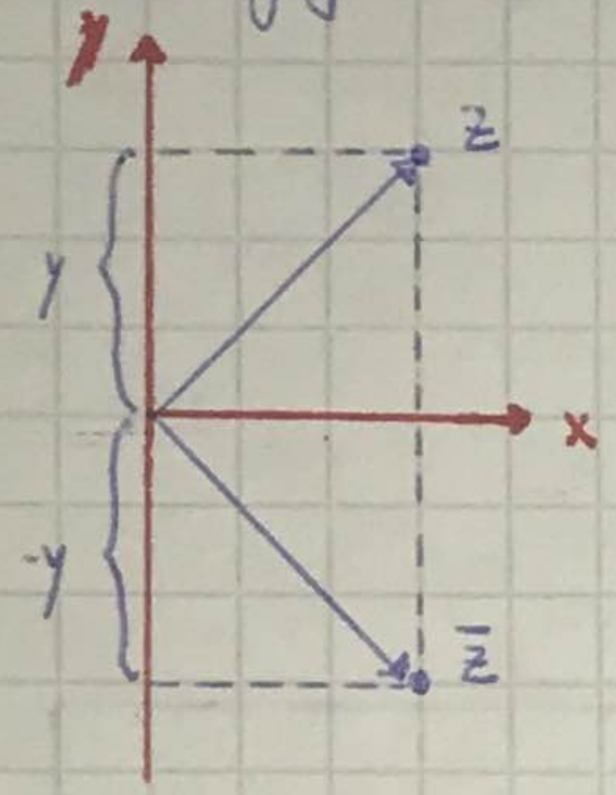
$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$




Regla del paralelogramo

$z = x + iy \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ = longitud del vector $z$ al origen

$\bar{z}$ = conjugado de $z$ = $x - iy$




Graficamente $z$ y $\bar{z}$ son simetricos respecto al eje x

(Reflexión respecto al eje x)

Distancia euclídea $\|z - z'\| = \|(x-x') + i(y-y')\| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$

## Propiedades del módulo y la conjugación

i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

ii) $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

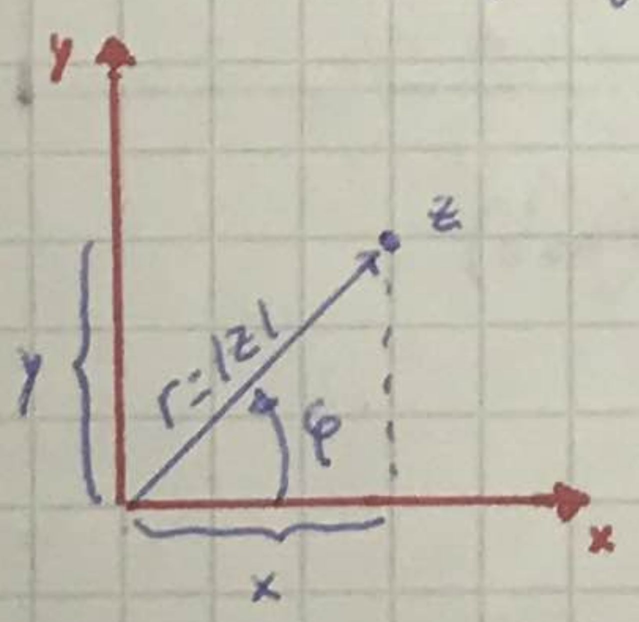
iii) $|z_1 . z_2| = |z_1||z_2|$

iv) $|z|^2 = z.\bar{z} \quad z.\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$

v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ desigualdad triangular

## Escritura polar

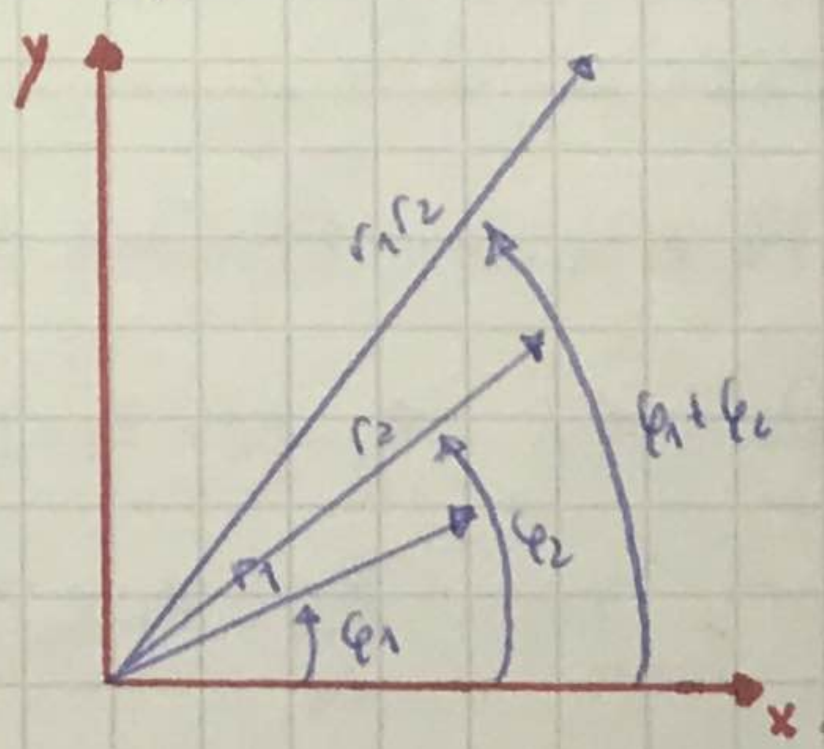
$z = re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \Rightarrow x = r\cos(\varphi), \; y = r\sin(\varphi) \; ; \; r > 0 \quad \varphi \in \mathbb{R}$




$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

$\varphi$ = argumento de $z$ = $\arg(z)$

$|z|$ es una función, $\arg(z)$ no lo es




$\varphi = \arg(z)$. Pero $\varphi + 2k\pi = \arg(z)$ también

Hay un único $\arg(z)$ en $(-\pi, \pi]$ notamos argumento principal de $z$, $\mathrm{Arg}(z)$

$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)), \; z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$

$z_1 . z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))]$

$\Leftrightarrow$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \; r_1 r_2 = |z_1 z_2| \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 . z_2)$

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Hoja 2

## Potencia de número complejos

$$z^n = \underbrace{z \ldots z}_{n \text{ veces}} = re^{in\varphi} = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) \quad \forall n \geq 1$$

$$z^0 = 1$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r}{r^2}\underbrace{\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)}_{\text{Función par}} = r^{-1}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = (r^{-1})^n\left(\cos(n(-\varphi)) + i\sin(n(-\varphi))\right) = r^{-n}\left(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\right)$$

En conclusión

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$(re^{i\varphi})^n = z^n = r^n e^{in\varphi} \quad \text{Fórmula de di Moivre}$$

## Raíces de números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, busco $W$ / $W^m = z$ (osea es una raíz enésima de $z$)

$W = \rho e^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$ $\Rightarrow$ $\rho^m e^{im\varphi} = re^{i\theta}$

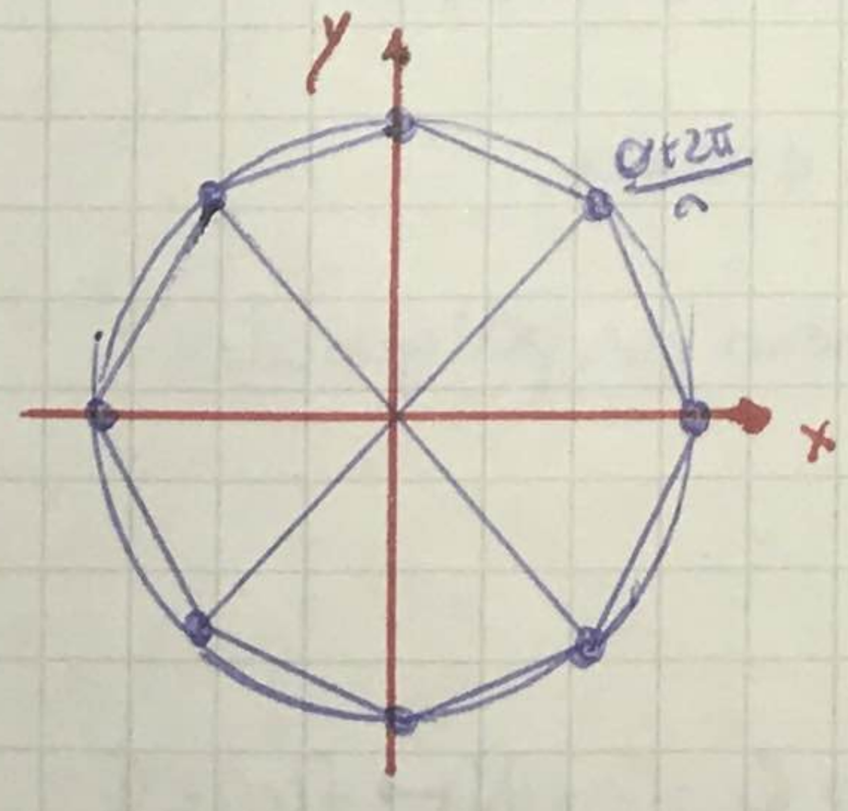
módulos iguales, luego $\rho = r^{1/m}$ ; $m\varphi = \theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ (ángulos iguales)

Luego $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{m}$ ; $\varphi \in \left\{ \dfrac{\theta}{m}, \dfrac{\theta + 2\pi}{m}, \ldots, \dfrac{\theta + 2(n-1)\pi}{m} \right\}$

Si reemplazo por $m$ llego a $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{m}$ y se repite el primero

$\Rightarrow \varphi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{m}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ y así $W_k = r^{1/m} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{m}\right)}$

$m$ raíces $m$-ésimas de $z$ distintas



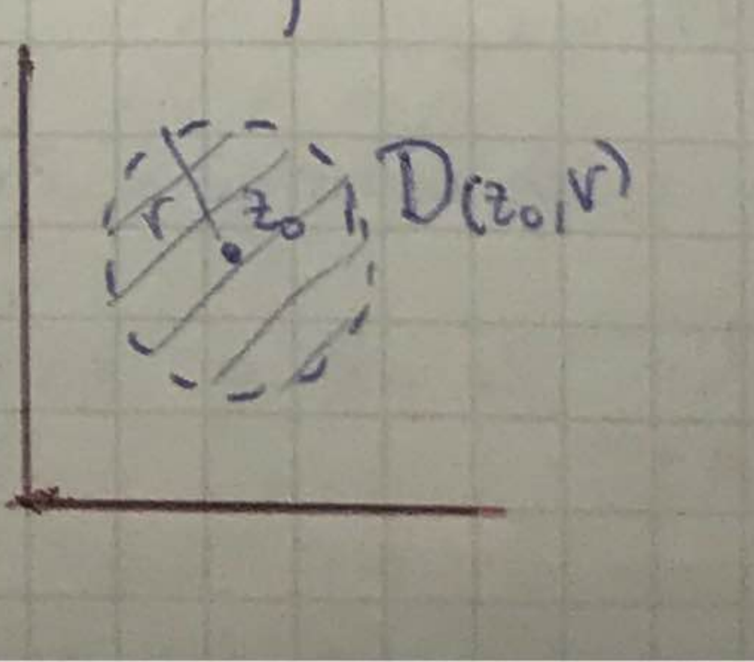

Las raíces $n$-ésimas son los vertices de un polígono regular inscripto en la circunferencia de radio $r^{1/m}$

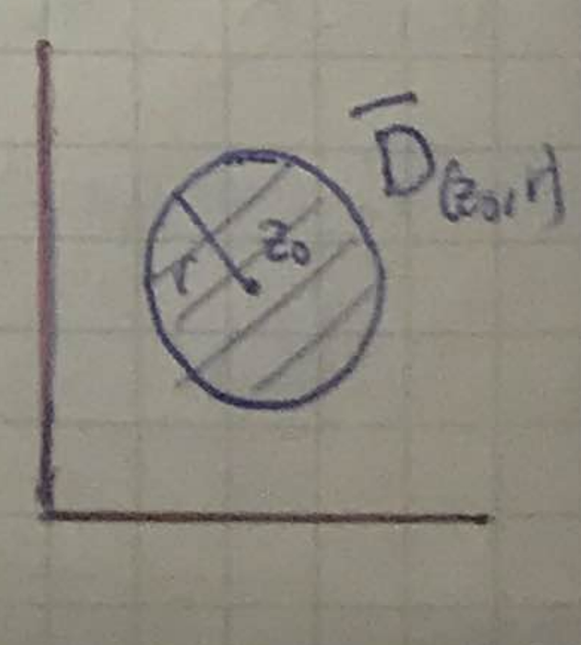
## Topología de $\mathbb{C}$ (Regiones del plano complejo)

Las nociones de abierto, cerrado, conexo, son iguales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ (la noción de distancia también)

Disco abierto de centro $z_0$ y radio $r$ : $D(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| < r \}$

El caso cerrado $|z - z_0| \leq r$ y notamos $\overline{D}(z_0, r)$



Disco reducido $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < r\}$

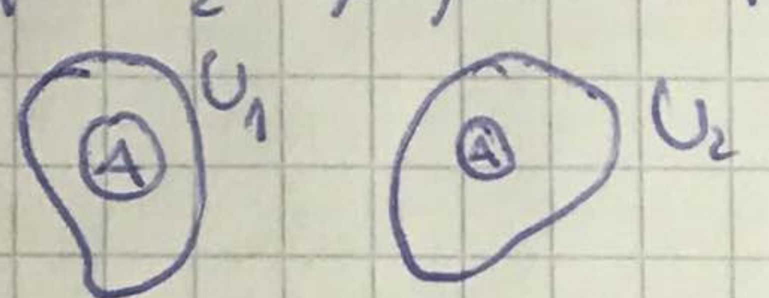
- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, diremos que $A$ es abierto sí $\forall z \in A, \exists r > 0 / D(z, r) \subset A$
- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, diremos que $A$ es cerrado sí $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto
- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, diremos que $z$ es un punto interior de $A$ sí $\exists r > 0 / D(z, r) \subset A$
- $\text{int}(A) \equiv$ el conjunto de puntos interiores a $A$
- Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, decimos que $z$ es un punto frontera de $A$ sí $\forall r > 0$ $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$, $D(z, r) \cap \mathbb{C} \setminus A \neq \emptyset$
- $\partial A$ = el conjunto de todos los puntos frontera de $A$
- Diremos que $A$ es acotado sí $\exists R > 0 / A \subseteq D(0, R)$ es decir que $|z| < R$ $\forall z \in A$

(podría también $A \subseteq D(z_0, R)$ si $|z - z_0| < R$ $\forall z \in A$)

Definición

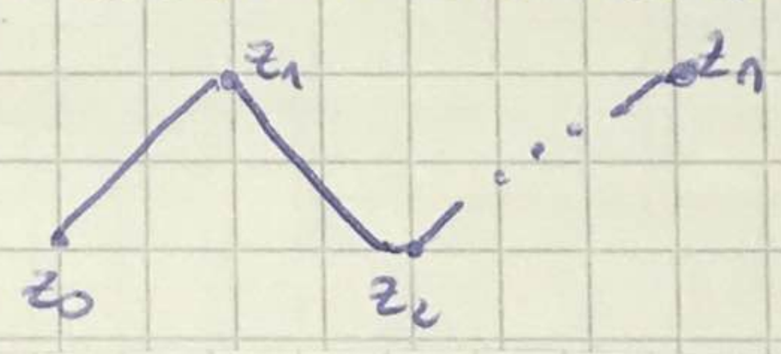
Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, diremos que $A$ es disconexo si $\exists$ $U_1$ y $U_2$ abiertos /

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $A \cap U_1 \neq \emptyset$, $A \cap U_2 \neq \emptyset$, $A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2)$




Decimos que $A$ es conexo sino es disconexo

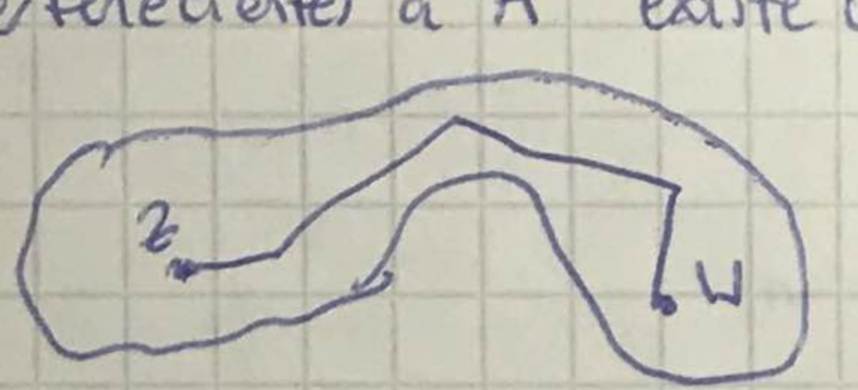
Poligonal: Unión de segmentos consecutivos




$(z_0, z_1, \dots, z_n)$ vértices de la poligonal

$z, w \in \mathbb{C}$ poligonal de $z$ a $w$ es una poligonal que empieza en $z$ y termina en $w$

Definición: Decimos que $A$ es conexo por poligonales sí para todo par de puntos $z, w$ pertenecientes a $A$ existe una poligonal de $z$ a $w$ estrictamente contenida en $A$




Resultado: Si $A$ es abierto, entonces

$A$ es conexo $\Leftrightarrow$ $A$ es conexo por poligonales

- Sucesiones de números complejos

Dar una sucesión de números complejos es dar una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C}$

notamos $z_n = f(n)$ $\quad (z_n)_{n \geq 1}$ es la notación para toda la sucesión

Decimos que la sucesión está acotada sí el conjunto $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado (es decir $\exists R > 0 /$ $|z_n| < R$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Decimos que la sucesión converge a $z \in \mathbb{C}$ sí $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} / |z_n - z| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Notación: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$ ó $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z$

Hoja $2+\frac{1}{2}$

Equivale $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 / z_n \in D(z, \varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

observación $\underset{n\to\infty}{z_n \to z} \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{|z_n - z| \to 0}$

sucesión compleja — convergencia de una sucesión real

Resultado: Si la sucesión $(z_n)_{n\geq 1}$ es convergente, entonces está acotada

$(z_n)_{n\geq 1}$, $Re(z_n) = x_n$ ; $Im(z_n) = y_n$ $\quad z_n = x_n + iy_n$

$(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones reales

$\Rightarrow$ Si $z_n = x_n + iy_n$ ; $(z_n)_{n\geq 1}$ $\quad \underset{n\to\infty}{z_n \to z} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \end{cases}$

Conclusión: Estudiar sucesiones complejas se reduce a reales

En resumén

Sucesión $n \in \mathbb{N} \mapsto z_n \in \mathbb{C}$, $(z_n)_{n\geq 1}$

$z_n = x_n + iy_n$, $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones reales

$z = x + iy$

$z_n \to z$ si $z_n \in D(z, \varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

$z_n \to z \Leftrightarrow |z_n - z| \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases}$

Hoja 3

## Funciones de una variable compleja

$A \subseteq \mathbb{C}$ , $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z \in A \to w \in \mathbb{C}$ ; $w = f(z)$

$z = x+iy$ ; $w = u+iv$ $\quad f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

$$u,v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

### Representación geométrica

Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (función real)

$\{(x, f(x)),\ x \in I \subseteq \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \to$ lo dibujamos

Si $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\{(z, f(z)),\ z \in A \subseteq \mathbb{C}\} = \{((x,y), u(x,y) + v(x,y)),\ (x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^4$

No se puede visualizar

- Puedo pensar a $f$ como un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$
- Puedo pensar a $f$ como una transformación $\to$ vectores, $\to$ regiones en el plano, $\to$ curvas

**Ejemplos:** $f(z) = Az$ , $A \in \mathbb{C}$ , $A \neq 0$ , $A = ae^{i\alpha}$ , $a > 0$

Rota a $z$ un ángulo $\alpha$ y altero el radio de $z$ un factor $\alpha$

$$f(z) = A(z - z_0) + w_0$$

Roto $(z - z_0)$ un ángulo $\alpha$ , altero el radio y traslado a $w_0$

### Limite de funciones de una variable compleja

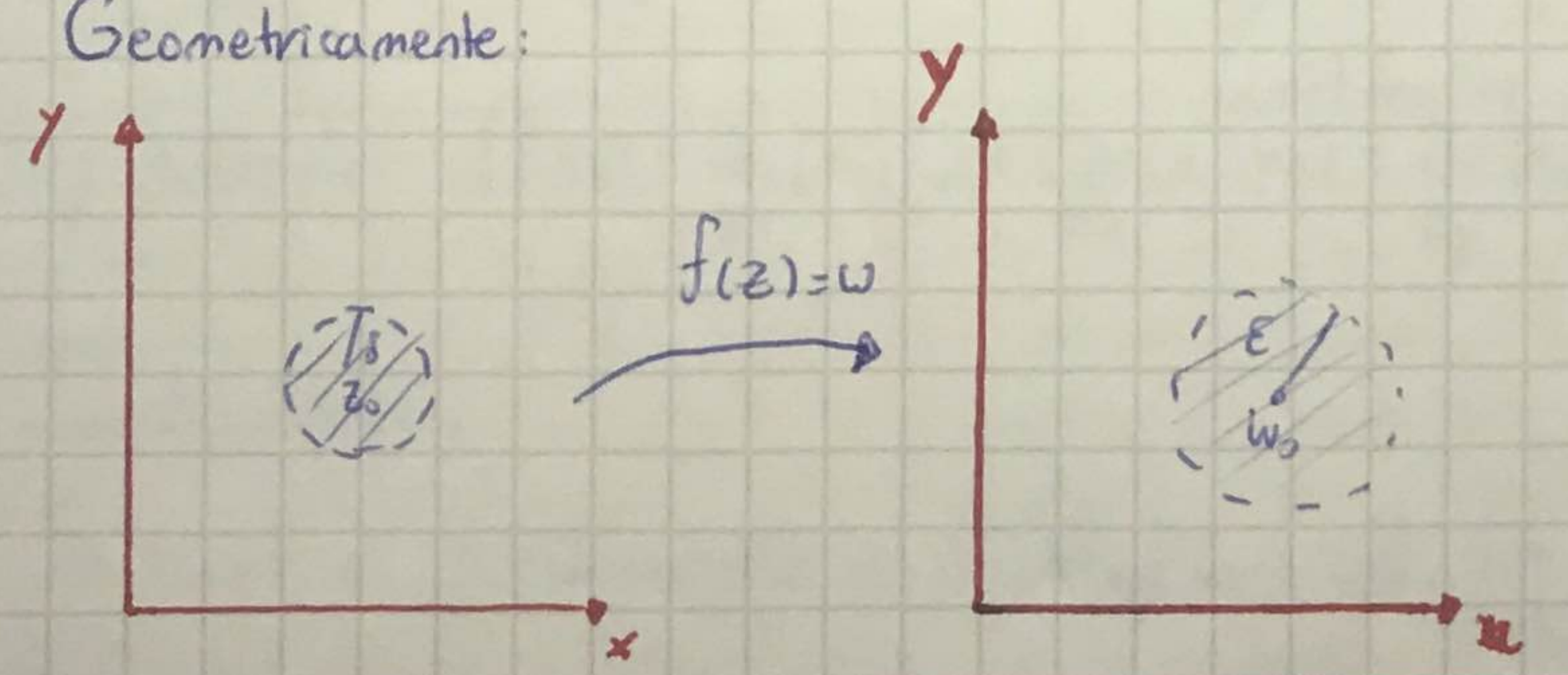
Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ , $z_0 \in \mathbb{C}$

$z_0$ es un punto de acumulación si $(\exists\ z_n \in A \ / \ z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$ y $z_n \neq z_0)$

Decimos que el límite cuando $z \to z_0$ de $f(z)$ es $w_0$ $\left(\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0\right)$ si se cumple que

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \ / \ z \in A,\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$

Geometricamente:




Observaciones:

- ) No miro que pasa en $z_0$ $\therefore$ $f$ puede o no estar definido ahí.
- ) Solo miro puntos de $A$

**Propiedad:** $z_0 = x_0 + iy_0$ , $w_0 = u_0 + iv_0$ , $f = u(x,y) + iv(x,y)$. Entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

Demostración

$\Rightarrow$ $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-z_0|<\varepsilon$ traduciendo $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$

$\Rightarrow \sqrt{(u(x,y)-u_0)^2+(v(x,y)-v_0)^2}<\varepsilon$

Pero $\sqrt{(u(x,y)-u_0)^2+(v(x,y)-v_0)^2} \leq |u-u_0|<\varepsilon$

$\leq |v-v_0|<\varepsilon$

Luego ambas $u$ y $v$ tienen límite

$\Leftarrow$ $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\| = |z-z_0|<\delta \Rightarrow \sqrt{(u(x,y)-u_0)^2+(v(x,y)-v_0)^2} = |f(z)-w_0|<\varepsilon$

trivial

qed

DEMO 1

Propiedades: Si $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_1 \wedge \lim_{z\to z_0} g(z)=w_2$ entonces

- $\lim_{z\to z_0} c\,f(z) = c\,w_1 \quad \forall c\in\mathbb{C}$
- $\lim_{z\to z_0} (f(z)+g(z)) = w_1+w_2$
- $\lim_{z\to z_0} f(z).g(z) = w_1.w_2$
- $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2}$ si $w_2\neq 0$

Valen las mismas demostraciones que en variable real

Continuidad de $f$ con variable compleja

Sea $A\subset\mathbb{C}$ abierto, $f: A\to\mathbb{C}$, $z_0\in A$. Decimos que $f$ es continua en $z_0$ si $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

Es decir se cumple que $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0 \,/\, |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

Debe estar definida $f(z_0)$, existir $\lim_{z\to z_0} f(z_0)$ y además ser $f(z_0)$

Propiedades: $f=u+iv \quad z_0=x_0+iy_0$

- $f$ es continua en $z_0 \Leftrightarrow u,v$ son continuas en $(x_0,y_0)$
- Suma, producto por un escalar, producto escalar y división de funciones continuas en $z_0$ son continuas en $z_0$
- Composición de funciones continuas es continua.

Demo. como en $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Polinomios

$P(z)=a_0+a_1z_1+\ldots+a_nz^n \quad a_k\in\mathbb{C},\ a_n\neq 0$ de grado $n$ en dominio $\mathbb{C}$

$\frac{P(z)}{G(z)}$ vale si $G(z)\neq 0$ o sea en dominio $\{z\in\mathbb{C} \,/\, G(z)\neq 0\}$

Hoja 4

- Derivación de funciones de variable compleja

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ es derivable en $z_0$ si $\exists$

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Si este límite existe, lo notamos $f'(z_0)$ y lo llamamos la derivada de $f$ en $z_0$.

Proposición: Si $f$ es derivable en $z_0$, entonces es continua en $z_0$.

Demostración: quiero ver que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ o sea $\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = 0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}}_{\to f'(z_0)} \underbrace{(z - z_0)}_{\to 0} = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

qed

Propiedades de funciones derivables en $z_0$.

-) $(cf)'|_{z_0} = c f'(z_0)$

-) $(f+g)'|_{z_0} = f'(z_0) + g'(z_0)$

-) $(f.g)'|_{z_0} = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$

-) $(f/g)'|_{z_0} = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$
$g \neq 0, g' \neq 0$

Demostraciones iguales a en $\mathbb{R}$

Regla de la cadena: Si $f$ y $g$ son derivables en $z_0$

$$(g \circ f)'|_{z_0} = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

- Teorema: Sea $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Supongamos que $f$ es derivable en $z_0$. Entonces existen $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$; $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$; $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en $(x_0, y_0)$, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

- y además $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$

Demostración

Por hipótesis, $f$ es derivable en $z_0$. Entonces $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$z = x + iy \Rightarrow$ como el límite existe, puedo acercarme por distintos caminos

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{u(x, y_0) + i v(x, y_0) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (*)$$

$$(*) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \left[ \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \, \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \right] = (*)$$

$$\Leftrightarrow (*) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0}} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

pues cada lím existe por separado

Luego, si $\exists f'(z_0)$, deben existir $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.

y $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ (1)

Por otro lado, si ahora tomamos un segundo límite donde $x = x_0$ e $y \to y_0$

$$f'(z) = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_0}} \left[ \frac{u(x_0,y) + i v(x_0,y) - u(x_0,y_0) - i v(x_0,y_0)}{\cancel{x_0} + iy - \cancel{x_0} - iy_0} \right] = (\circ)$$

$$(\circ) = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_0}} \left[ \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0} \right] = (\circ)$$

utilizando $\boxed{\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i}$

$$(\circ) = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_0}} \left[ \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0} - i \, \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} \right] = (\circ)$$

Nuevamente ambos límites deben existir por separado $\Leftrightarrow$

$$(\circ) = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_0}} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0} - i \lim_{\substack{y \to y_0 \\ x = x_0}} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \quad (2)$$

Y si $\exists f'(z_0) \Rightarrow \exists \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

Juntando (1) y (2) $\quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

Esto ocurre $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$ qed

Que son las condiciones de Cauchy-Riemann

DEMO 2

Hoja 5

**Teorema**: Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in A$. ($z_0 = x_0 + iy_0$). Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$

Entonces las siguientes expresiones son equivalentes

i) $f$ es derivable en $z_0$

ii) $u$ y $v$ son diferenciables en $z_0$ y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

**Demostración**: $f$ es derivable en $z_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R} /$

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a+ib \Leftrightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R} / \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-(a+ib)(z-z_0)}{z-z_0} = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R} / \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-(a+ib)(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0 \quad (*)$

Pero $\frac{f(z)-f(z_0)-(a+ib)(z-z_0)}{|z-z_0|} = \frac{u(x,y)+iv(x,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)-(a+ib)(x-x_0+i(y-y_0))}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}$

Luego $(*)$ equivale a decir que

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0 \quad \therefore u$ es diferenciable en $(x_0,y_0)$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)-b(x-x_0)-a(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0 \quad \therefore v$ es diferenciable en $(x_0,y_0)$

Y además $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = a \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -b}_{\text{de la parte real}} \ ; \ \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} = b \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = a}_{\text{de la parte imaginaria}}$

Luego $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ qed

DEMO 3

**Función holomorfa**: Decimos que una función es holomorfa en $z_0$ si $\exists\, r>0 /$ $f$ es derivable en $D_{z_0}(r)$

Decimos que $f$ es holomorfa en $A \subseteq \mathbb{C}$ si es holomorfa en todo $z \in A$

Decimos que $z_0$ es una discontinuidad aislada de $f$ sí $f$ es holomorfa en $0<|z-z_0|<r$

**Función armónica**: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto, $h: A \to \mathbb{R}$, $h$ de clase $C^2$. Decimos que $h$ es armónica en $A$ si se cumple que $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \ \forall (x,y) \in A$, osea, $\Delta h = 0$

**Proposición:** Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f: A \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $f$ holomorfa en $A$. Supongamos $u, v$ de clase $C^2$ en $A$. Entonces $u$ y $v$ son armónicas en $A$

**Demostración:** Por ser holomorfa, $f$ cumple C-R en todo $(x,y) \in A$. Es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \xRightarrow{\text{derivando}} \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Luego $\underset{(\text{en } A)}{\Delta u} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$ pues $v$ es $C^2$ en $A$, luego $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

Analogamente $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \wedge \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ y vale el mismo razonamiento

$\therefore$ $u$ y $v$ son armónicas en $A$ qed

DEMO 4

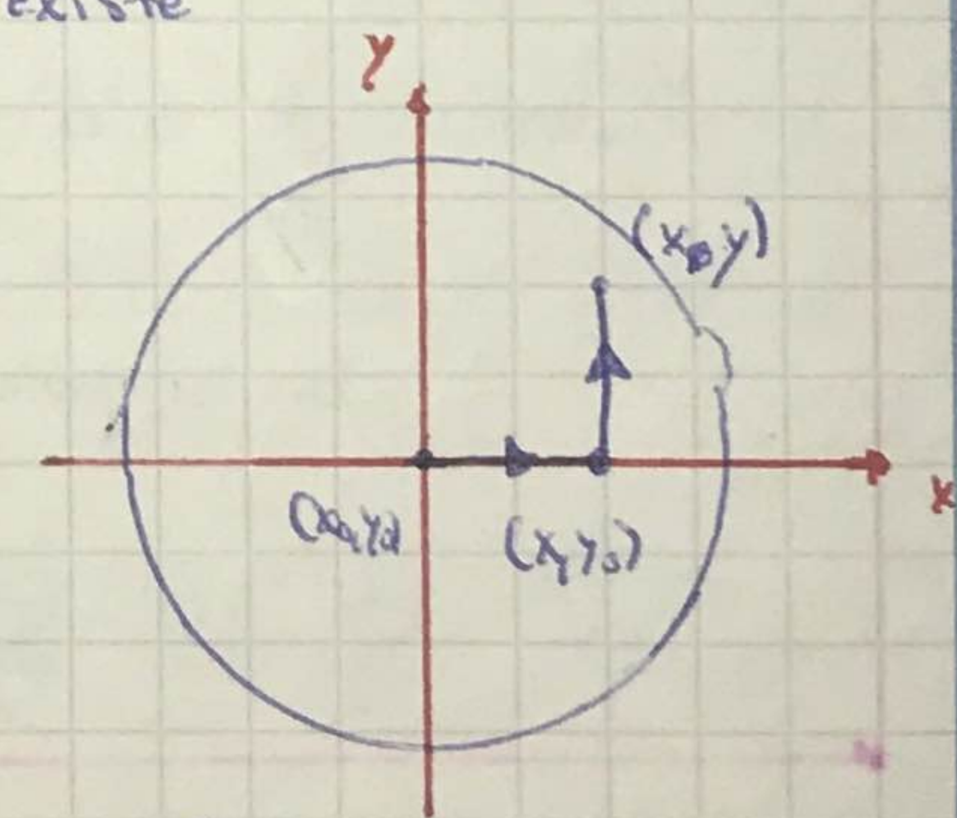
**Definición: (Armónica conjugada)**

Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto, $u, v$ de clase $C^2$ en $A$, armónicas en $A$ y satisfacen las condiciones de C-R en $A$ (son $C^2$ y holomorfas) decimos que $v$ es la armónica conjugada de $u$.

**Problema:** Dada $u: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A$ abierto. ¿Existirá $v$ / $u+iv$ es holomorfa en $A$? Supongamos que $u$ es armónica ($u \in C^2$, $\Delta u = 0$)

**Respuesta:** Si $A = D_{z_0}(r)$ podemos hallar $v$ explícitamente de manera tal que

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Supongamos que la $v$ buscada existe



$$\Rightarrow v(x,y) - v(x,y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial y}(x,t)\,dt = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt$$

$+$

$$v(x,y_0) - v(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial x}(t,y_0)\,dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\,dt$$

Luego $v(x,y) - v(x_0,y_0) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\,dt$ (Como campos conservativos)

$v(x_0,y_0) = C$, luego existen infinitas armónicas conjugadas

$$\boxed{v(x,y) = C + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\,dt}$$

verifiquemos que sea todo cierto.

$$\boxed{\text{TFC} \quad g(x) = \int_a^b F(x,t)\,dt, \text{ si } F \text{ es } C^1 \Rightarrow g'(x) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt}$$

quiero ver además que cumple C-R

# Hoja 6

usando TFC $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)$ por ser armónica $\Delta u = 0$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Luego: $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t)\,dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)}\right] - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)}$

Finalmente $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$

De forma análoga $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ Pues $\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\,dt$ no depende de $y$

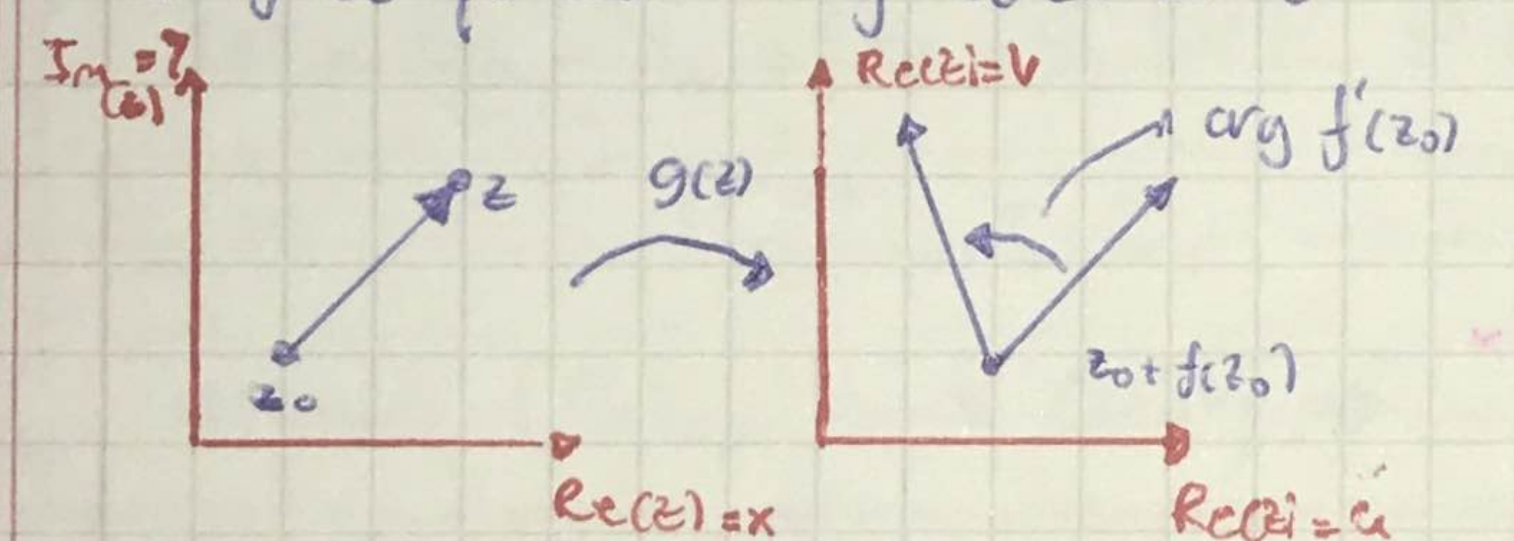
## Interpretación geométrica de la derivada en $\mathbb{C}$

$f$ es derivable en $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0} = 0$

Luego dado $\varepsilon>0, \exists \delta>0 \ / \ 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0))|<\varepsilon$

Tomo $g(z) = f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ (Como un taylor) de hecho, $g(z)$ es el taylor de $f$ en $z_0$ despreciando los términos cuadráticos en adelante.

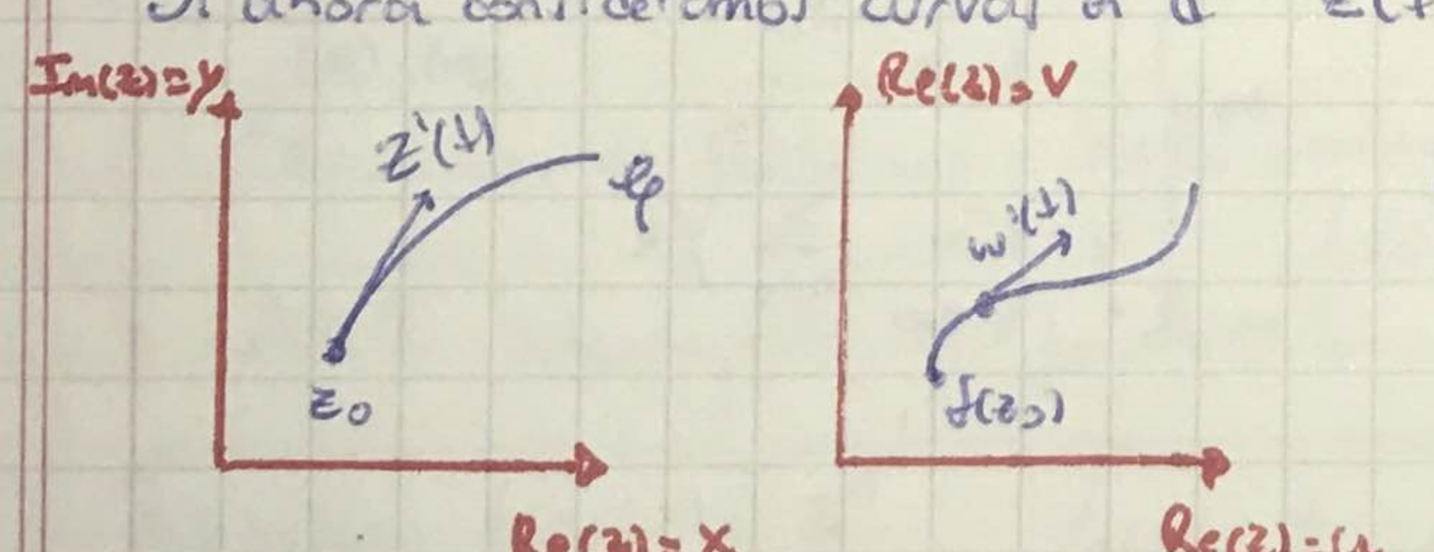
$\Rightarrow f$ se parece a $g$ cerca de $z_0$




En consecuencia:

- Roto $\arg f'(z_0)$
- Expando / contraigo $|f(z_0)|$
- Traslado $f(z_0)$

Si ahora consideramos curvas en $\mathbb{C}$ $z(t) = x(t)+iy(t)$, $z(t_0) = z_0$ $z:[a,b]\to\mathbb{C}$



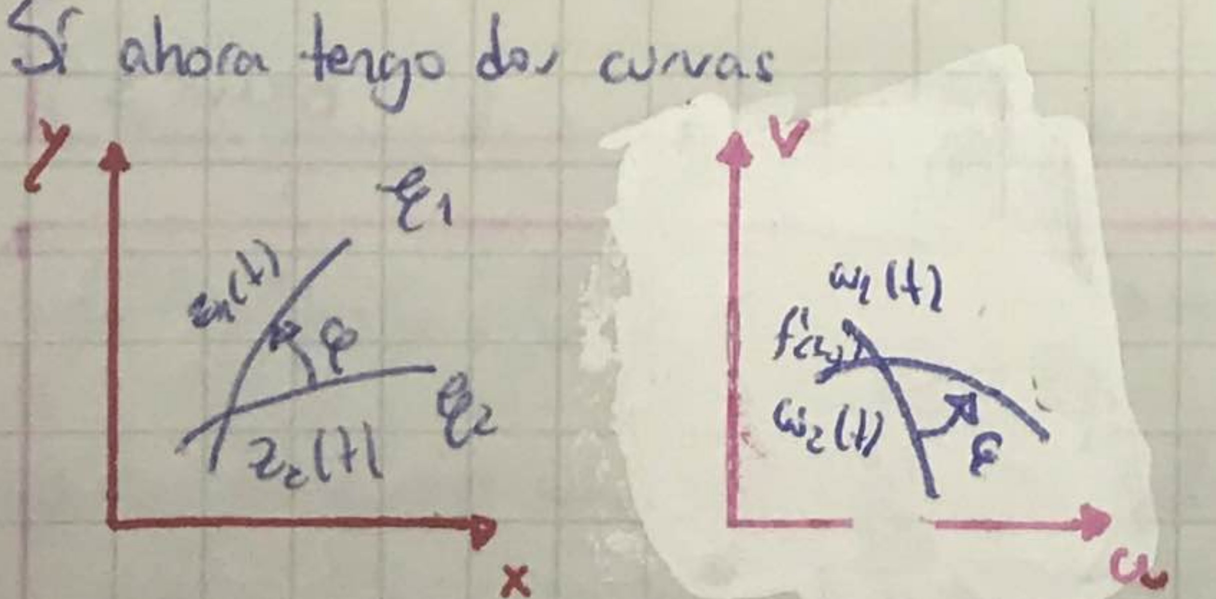

$z'(t_0) = x'(t_0)+iy'(t_0)$ vector tangente a $\mathcal{C}$ en $z_0$

$w(t) = f(z(t))$ ; $w(t_0) = f(z(t_0))$

$w'(t_0) = f'(z_0)\,z'(t_0)$

Le aplica transformaciones que genera $g(z)$ a vectores tangentes a curvas que pasan por $z_0$

Si ahora tengo dos curvas




$z_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ $z_1(t_0)=z_0$ $w_1(t) = f(z_1(t))$

$z_2:[a,b]\to\mathbb{C}$ $z_2(t_0)=z_0$ $w_2(t) = f(z_2(t))$

$w_i' = f'(z_0)\,z_i'(t_0)$ $i=1,2$

$\therefore$ Se conservan los ángulos entre curvas

$\arg(w_1'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_0)$

$-$

$\arg(w_2'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(t_0)$

---

$\arg(w_1'(t_0)) - \arg(w_2'(t_0)) = \arg(z_1'(t_0)) - \arg(z_2'(t_0))$

# Sucesiones y series numéricas

**Sucesiones:** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

$n \in \mathbb{N} \to f(n) \in \mathbb{C}$ $\quad z_n = f(n) \quad (z_n)_{n\geq 1}$ sucesión (notación)

$z_n = x_n + iy_n \quad (x_n)_{n\geq 1},\ (y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números reales

SEA $z = x+iy$ decimos que $z_n \to z \iff |z_n - z_0| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ y esto $\iff \begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases}$

**Series:**

$(z_n)_{n\geq 1}$ sucesión $\quad S_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$ nueva sucesión de números complejos

$(S_k)_{k\geq 1}$ sucesión. Sucesión de sumas parciales

Definición: Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si $\exists\ S \in \mathbb{C}$ / la sucesión de sumas parciales $S_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$ cumple que $S_k \underset{k\to\infty}{\to} S$ y notamos $S = \lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Si la sucesión de sumas parciales $(S_k)_{k\geq 1}$ no tiene límite decimos que la serie es divergente.

- Proposición: Sean $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n = x_n + iy_n$, $S = x+iy$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \iff \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y \end{cases}$$

Demostración:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \iff \lim_{k\to\infty} S_k = S \iff \begin{cases} Re(S) = \lim_{k\to\infty} (S_k) \\ Im(S) = \lim_{k\to\infty} Im(S_k) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x \\ y = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} y \end{cases} \iff (*)$$

$$(*) \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y \end{cases}$$

DEMO 5

- Proposición: Si la serie es convergente entonces $z_n \to 0$

Demostración: $S_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$, por ser convergente $\exists\ S = \lim_{k\to\infty} S_k$

$$|z_k| = |S_k - S_{k-1}| = |S_k - S + S - S_{k-1}| \leq |S_k - S| + |S - S_{k-1}| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow |z_k| \underset{k\to\infty}{\to} 0$ Luego $z_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ $\quad$ Pues la serie converge

DEMO 6

Definición (Convergencia absoluta): Decimos que la serie es absolutamente convergente si la serie (de nos reales positivos) $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente

Hoja 7

Definición (convergencia condicionada): Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ no lo es decimos que la serie es condicionalmente convergente

Criterio de Leibniz: Sea $a_n \geq 0$, decreciente y $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow a_n$ es convergente

S de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_0$

- Proposición: Si la serie $S_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente

Demostración: $S_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$, $\tilde{S}_k = \sum_{n=1}^{k} |z_n|$

Por hipótesis $\tilde{S}_k$ es convergente; veamos que $S_k$ también lo es.

$(\tilde{S}_k)_{k\geq 1}$ es sucesión de Cauchy, es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 / |\tilde{S}_k - \tilde{S}_m| < \varepsilon \quad \forall k,m \geq k_0$$

Veamos que $(S_k)_{k\geq 1}$ también es de Cauchy. Supongo $k > m$

$$|S_k - S_m| = \left| \sum_{n=1}^{k} z_n - \sum_{n=1}^{m} z_m \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{k} z_n \right| \leq \sum_{n=m+1}^{k} |z_n| = \sum_{n=1}^{k} |z_n| - \sum_{n=1}^{m} |z_n| = (*)$$

(módulo de la suma $\leq$ suma de los módulos)

$$(*) = \underbrace{\tilde{S}_k - \tilde{S}_m}_{\geq 0} = |\tilde{S}_k - \tilde{S}_m| < \varepsilon \quad \forall k,m \geq k_0$$

(por ambos son positivos y $\tilde{S}_k > \tilde{S}_m$ por ser de Cauchy)

entonces $(S_k)_{k\geq 1}$ es de Cauchy $\Rightarrow$ es convergente

DEMO 7

- Sucesiones de funciones

Sucesiones de funciones: $n \in \mathbb{N} \longmapsto f_n$ (función compleja)

$A \subseteq \mathbb{C}$ subconjunto ; $f_n: A \to \mathbb{C}$ $(f_n)_{n\geq 1}$ sucesión de funciones

Ejemplo: $f(n)(z) = z^n$ $\quad f_1(z) = z$, $f_2(z) = z^2, \dots, f_n(z) = z^n$

$f_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad (A = \mathbb{C})$

Convergencia de sucesiones de funciones

$f_n: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ sucesión de funciones. Para cada $z$ fijo, $z \in \mathbb{C}$ $(f_n(z))_{n\geq 1}$ es una sucesión númerica. Puedo estudiar así la convergencia de la misma

Definición (Convergencia puntual)

Sean $f_n: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diremos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función $f$ en $A$, si se cumple que $f_n(z) \to f(z) \quad \forall z \in A$. Es decir si se cumple que para cada $z \in A$ vale que

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, z) \ / \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$

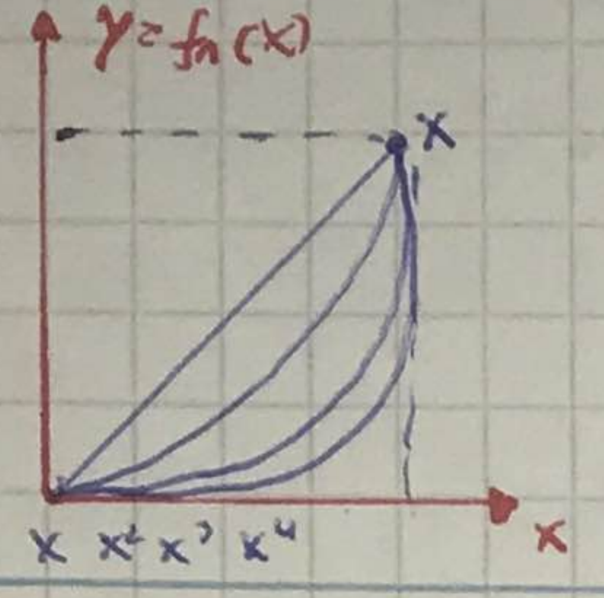
**Ejemplo:** $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = x^n$

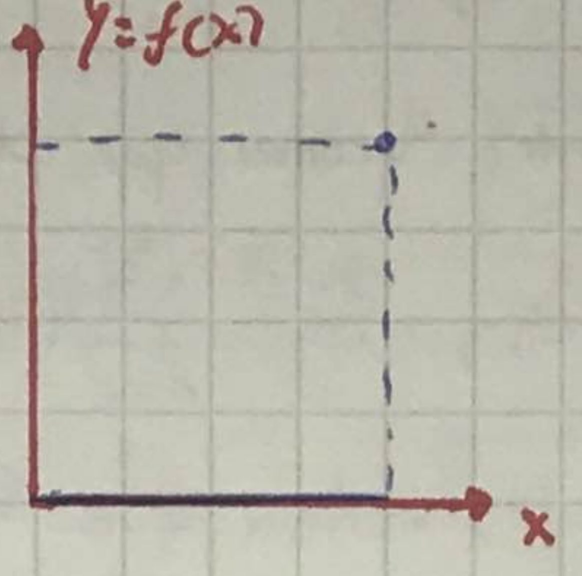
$f_n(x) \to 0 \quad x \in [0,1)$

$f_n(x) \to 1 \quad x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Entonces $f_n \to f$ en $A$ ($f_n$ converge puntualmente a $f$ en $A$)




**Definición (Convergencia uniforme)**

Sean $f_n(z): A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diremos que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a la función $f$ en $A$ si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ /$

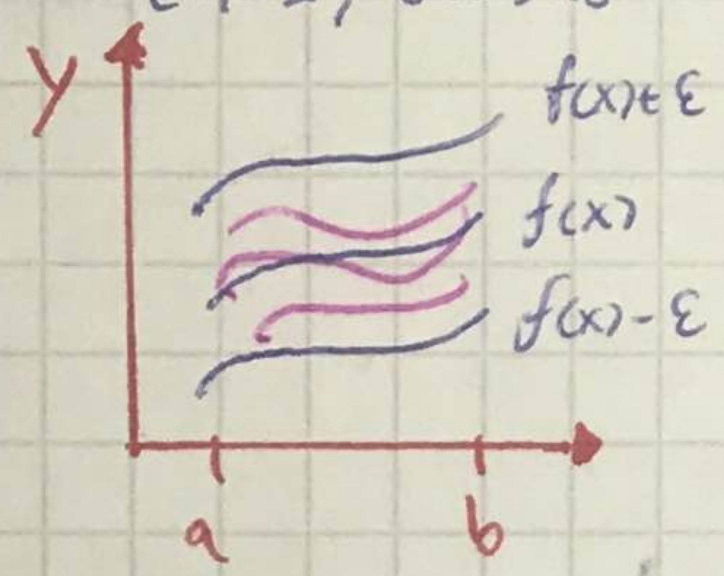
$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0 \ , z \in A$

**Observación:** La única diferencia es que $n_0 = n_0(\varepsilon)$ en vez de $n_0 = n_0(z, \varepsilon)$

**Interpretación geométrica de la convergencia uniforme**

$f_n, f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$ si $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) / |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in [a,b], \forall n \geq n_0$ $\quad f_n(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \ \forall n \geq n_0, \ \forall x \in [a,b]$




en rosa las $f_n(x)$ contenidas

Si ahora $f_n, f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ en $A$. Puedo dibujarlo en $\mathbb{R}^3$: Los gráficos de $f_n$ se encierran en un entorno de ancho $\varepsilon$ de $f$ (alrededor del gráfico de $f$ en $\mathbb{R}^3$) $\forall n \geq n_0$

Si $f_n, f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_n \rightrightarrows f$ en $A$ quiere decir que $\begin{cases} u_n \to u & \text{en } A \\ v_n \to v & \text{en } A \end{cases}$

$f_n = u_n + i v_n \ ; \ f = u + iv$

- **Proposición:** Sean $f_n: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $f$ en $A$. Supongamos que $f_n$ son continuas para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ en $A$. Entonces $f$ es continua en $A$

**Demostración:** Fijemos $z_0 \in A$ y veamos que $f$ es continua en $z_0 \in A$

Es decir dado $\varepsilon > 0$ buscamos $\delta > 0 \ / \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Hoja 8

$$|f(z)-f(z_0)| \leq |f(z)-f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z)-f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0)-f(z_0)|$$

Dado ese $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \,/\, |f_n(z)-f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_0$, $\forall z \in A$

(Pues $f_n \rightrightarrows f$ en A)

$\Rightarrow |f_{n_0}(z)-f(z)| = |f(z)-f_{n_0}(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |f_{n_0}(z_0)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Basta analizar $|f_{n_0}(z)-f_{n_0}(z_0)|$. Como por hipótesis $f_{n_0}$ es continua en $z_0$, $\exists \delta>0 \,/$

$|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f_{n_0}(z)-f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Luego para $\varepsilon$, con este $\delta$, $|z-z_0|<\delta$

$$\Rightarrow |f(z)-f(z_0)| \leq \underbrace{|f(z)-f_{n_0}(z)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(z)-f_{n_0}(z_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(z_0)-f(z_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

qed

DEMO 8

- Series de funciones

Tenemos $\{f_n\}_{n\geq 1}$ sucesión de funciones, a partir de ella construyo $S_k(z) = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)$. $S_k$ es una sucesión de sumas parciales, con $\{S_k\}_{k\geq 1}$, sucesión de funciones $S_k$, $A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Para todo $z \in A$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es una serie numérica con $S_k = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)$ sucesión numérica.

Luego, se aplican todos los resultados de series numéricas en complejos. Si ahora miramos a $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ como una sucesión de funciones, podemos aplicarle los distintos conceptos de convergencia para sucesiones de funciones.

Definición (Convergencia puntual de serie): $f_n: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $S: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente a S en A, si la sucesión de sumas parciales $S_k(z) = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)$ converge puntualmente a S en A. Es decir, para cada $z \in A$, se tiene que $\forall \varepsilon>0$, $\exists k_0(z_0,\varepsilon) \,/\, \left|\sum_{n=1}^{k} f_n(z) - S(z)\right| < \varepsilon$ $\forall k \geq k_0 \in \mathbb{N}$

Notamos: $S(z) = \lim_{k\to\infty} S_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

Definición (Convergencia uniforme de serie): Sean $f_n: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $S: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente a S en A si la sucesión de sumas parciales $S_k(z) = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)$ converge uniformemente a S en A. Es decir, para cada $z\in A$, se tiene que $\forall \varepsilon>0$, $\exists k_0 = k_0(\varepsilon) \,/\, \left|\sum_{n=1}^{k} f_n(z) - S(z)\right| < \varepsilon$ $\forall k \geq k_0 \in \mathbb{N}$.

- Criterio de Weierstrass para convergencia absoluta y uniforme (Criterio de las mayorantes)

Sean $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ sucesión de funciones. Supongamos que existen constantes $M_n$ tales que:

i) $|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in A$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente $\left(\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty\right)$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente en A

Demostración:

i) Probemos la convergencia absoluta de la serie en A. Sea $z \in A$, veamos que evaluando la serie en $z$, converge en módulo, osea, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge con $z$ fijo

Por hipótesis, $|f_n(z)| \leq M_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, además se que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge y por el criterio de comparación para series de números reales positivos como $|f_n(z)| \leq M_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, luego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente para $z$ fijo

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ como $|f_n(z)| \leq M_n$ y la segunda converge $\Rightarrow$ la primera también

ii) Ahora veamos que la serie es uniformemente convergente en A. Sabemos que para cada $z$ fijo $\in A$, la serie es absolutamente convergente. Es decir, $\exists\, S(z)$ /

$S(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(z) = \lim_{k\to\infty} S_k(z)$. Con lo cual $S_k(z) \xrightarrow[k\to\infty]{} S(z)$ osea la sucesión de sumas parciales converge $\forall z$. (Probamos convergencia puntual). Veamos que en realidad $S_k \rightrightarrows S$ en A. (converge uniformemente)

Fijamos $z$ en A y para $k \in \mathbb{N}$ miramos $S_k - S$

$$|S_k(z) - S(z)| = |S_k(z) - \lim_{m\to\infty} S_m(z)| = \lim_{m\to\infty} |S_k(z) - S_m(z)| = \star$$

Veamos $|S_m(z) - S_k(z)| = \left| \sum_{n=1}^{m} f_n(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n(z) \right| \underset{\text{si } m>k}{=} \left| \sum_{n=k+1}^{m} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |f_n(z)| = (*)$

$(*) \underset{\text{hipot}}{\leq} \sum_{n=k+1}^{m} M_n = \sum_{n=1}^{m} M_n - \sum_{n=1}^{k} M_n$

converge por hipot = número

Siguiendo el cálculo $\star = \lim_{m\to\infty} |S_m(z) - S_k(z)| \leq \lim_{m\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{m} M_n - \sum_{n=1}^{k} M_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n - \sum_{n=1}^{k} M_n < \varepsilon$

$\forall k \geq k_0(\varepsilon)$

Entonces $|S_k(z) - S(z)| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0(\varepsilon), \forall z \in A$ con lo cual $S_k$ converge uniformemente a $S$ en A

q e d

DEMO 9

Hoja 9

- Series de potencias

Veremos series de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, con $\{a_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, donde $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$

- **Teorema**: Consideramos la serie de potencias: $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, entonces existe $R$ / $0 \leq R \leq \infty$ y tal que

(1) • Si $z$ es tal que $|z-z_0| < R$, la serie converge absolutamente

(2) • Si $z$ es tal que $|z-z_0| > R$, la serie diverge.

(3) • Si $r < R$ la serie converge converge uniformemente en el disco $\overline{D_{z_0}(r)} = \{z \in \mathbb{C} / |z-z_0| \leq r\}$, donde $R$ es el radio de convergencia de la serie

(4) • Si $z$ es tal que $|z-z_0| = R$, el criterio no dice nada

Demostración:

Pasamos por un Lema

**Lema de Abel**: Consideramos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Supongamos que $\exists\, r_0 > 0 / |a_n| r_0^n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D_{z_0}}(r)$ para cada $r < r_0$ donde $\overline{D}_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} / |z-z_0| < r\}$

Demostración: Fijo un $r < r_0$ y miramos los $z / |z-z_0| < r$. Sea $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$

Luego $|f_n(z)| = |a_n(z-z_0)^n| = |a_n||z-z_0|^n \leq |a_n| r^n = |a_n| \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cdot r_0^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$

Aplico el criterio de Weierstraß de los mayorantes con $A = D_{z_0}(r)$, $M_n = M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ y luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniforme y absolutamente en $D_{z_0}(r)$ qed

Ahora seguimos con el teorema.

Sea $R = \text{supremo}(B)$ con $B = \left\{ r \geq 0 / \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ es convergente} \right\}$ ; vemos que $B \subseteq \mathbb{R} \neq \{\emptyset\}$ pues $0 \in B$

* Si $B$ no esta acotado, $R = \infty$, * Si esta acotado superiormente $0 \leq R < \infty$

(3) Tomemos $r < R$, luego existe $r_0$ donde $r < r_0 \leq R$ / $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_0^n$ es convergente. Por ser así $\exists\, M / \forall n \in \mathbb{N}$ vale que $|a_n| r_0^n \leq M$. Entonces, por el Lema de Abel, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es absoluta y uniformemente convergente en $D_{z_0}(r)$.

(1) Sea $z / |z-z_0| < R$. Tomemos $r / |z-z_0| < r < R \Rightarrow z \in D_{z_0}(r)$. Luego la serie converge absolutamente para $z$.

(2) Supongamos que existe $z_1 / |z_1 - z_0| > R$ y la serie es convergente, es decir, la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge. Si esto ocurriera, entonces $|a_n(z-z_0)^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, y por lo tanto existiría $M>0$ / $|a_n||z_1-z_0|^n \leq M$. Sea $r_0 = |z_1 - z_0|$ aplicamos Lema de Abel. Tomamos $r$ / $R<r<r_0$. Luego por el lema la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absoluta y uniformemente en $D_{z_0}(r)$. Si $z_2$ es tal que $|z_2-z_0|=r$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(z_2-z_0)^n|$ converge, pues $z_2$ esta en el borde de $\overline{D}_{z_0}(r)$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(z_2-z_0)^n| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| r^n$ converge. Absurdo, pues $R$ era supremo de $B$ y $r>R$. $\Rightarrow$ Solo puede ser que la serie diverge $\forall z / |z-z_0|>R$

qed

DEMO 10

## Criterios útiles para el cálculo de radio de convergencia

- Criterio de D'Alembert del cociente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ a_n>0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \quad \begin{cases} l<1 & \text{converge} \\ l>1 & \text{diverge} \\ l=1 & \text{no sé nada} \end{cases}$$

- Criterio de Cauchy o de la raiz

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n,\ b_n>0 \quad \sqrt[n]{b_n} \to l \quad \begin{cases} l<1 & \text{converge} \\ l>1 & \text{diverge} \\ l=1 & \text{no sé nada} \end{cases}$$

## Propiedades de las series de funciones

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R>0$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ define una función en $D_{z_0}(R)$

Si $r<R$ $\underbrace{\sum_{n=0}^{k} a_n(z-z_0)^n}_{S_k(z)}$ converge uniformemente a $f$ en $\overline{D}(z_0,r)$

continuas en $\overline{D}_{z_0}(r)$ $\rightarrow$ $f$ continua en $\overline{D}(z_0,r)$

$\Rightarrow$ $f$ continua en $D_{z_0}(R)$

- **Proposición:** Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R>0$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ define una función holomorfa en $D_{z_0}(R)$. Además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ tiene igual radio de convergencia y se cumple que:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \text{ en } D_{z_0}(r) \quad y \quad f^{(n)}(z_0) = a_n n!$$

Demostración: $R$ radio de convergencia de $\sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n$

$R = \sup\{r\geq 0, \sum_{n=0} |a_n| r^n \text{ converge}\}$ $R'$ radio de convergencia de $\sum_{n=1} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

qvq $R=R'$ Sean $F(w) = \sum_{n=0} a_n w^n$, $|w|<R$ $\wedge$ $G(w) = \sum_{n=1} n a_n w^{n-1}$ $|w|<R'$

osea qvq si $w_0$ / $|w_0|<R$, $\exists f'(w_0) = G(w_0)$. Es decir:

$$\lim_{w\to w_0} \frac{F(w)-F(w_0)}{w-w_0} = G(w_0) \Leftrightarrow \lim_{w\to w_0} \frac{F(w)-F(w_0)}{w-w_0} - G(w_0) = 0$$

Hoja 10

q.q. $S(\omega)\to 0$, $S(\omega)$ en $|\omega|<R$

Sea $S(\omega) = \dfrac{F(\omega)-F(\omega_0)}{\omega-\omega_0} - G(\omega_0) = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\omega^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\omega_0^n}{\omega-\omega_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \omega_0^{n-1}$

$$\Rightarrow S(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{\omega^n - \omega_0^n}{\omega-\omega_0} - n\omega_0^{n-1} \right)$$

Los términos $n=0$ se cancelan

$$\frac{\omega^n-\omega_0^n}{\omega-\omega_0} = \omega^{n-1} + \omega^{n-2}\omega_0 + \omega^{n-3}\omega_0^2 + \dots + \omega\omega_0^{n-2} + \omega_0^{n-1}$$

$$\Rightarrow S(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \omega^{n-1} + \omega^{n-2}\omega_0 + \dots + \omega_0^{n-1} - n\omega_0^{n-1} \right)$$

Como $|\omega_0|<R$ tomo $r / |\omega_0|<r<R$. Veamos que la serie converge uniformemente en $|\omega|\leq r$. Utilizando el Criterio de Weierstrass

$$|a_n(\omega^{n-1} + \omega_0\omega^{n-2} + \dots + \omega_0^{n-2}\omega + \omega_0^{n-1} - n\omega_0^{n-1})| \leq |a_n|(\underbrace{r^{n-1}+r^{n-1}+\dots+r^{n-1}+r^{n-1}}_{n \text{ veces}} + nr^{n-1}) =$$

$= |a_n| 2n r^{n-1} = M_n$. Aquí converge uniformemente ya que $r<R$

$\forall \omega / |\omega|\leq r$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge pues $r<R=R'$ y entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < +\infty$

Probamos que $S(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega^{n-1} + \omega^{n-2}\omega_0 + \dots + \omega_0^{n-1} - n\omega_0^{n-1})$ converge uniformemente en $|\omega|\leq r$ es decir $S_k(\omega) \rightrightarrows S(\omega)$ en $|\omega|<r$. Luego $S_k(\omega)$ son continuas si $|\omega|\leq r \Rightarrow S$ continua si $|\omega|\leq r$

$S_k(\omega_0)=0 \ \forall k \quad S_k(\omega_0) \to S(\omega_0)=0$

Como $S_k$ son continuas en $|\omega|\leq r$ y $S_k \rightrightarrows S$ en $|\omega|\leq r \Rightarrow S$ es continua en $|\omega|\leq r$

$$\Rightarrow \lim_{\omega\to\omega_0} S(\omega) = S(\omega_0) = 0 \qquad \text{qed}$$

DEMO 11

<u>Observación</u>: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R>0$ para $z\in D_{z_0}(R)$.

$f$ es holomorfa en $D_{z_0}(R)$ y

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ en $D_{z_0}(R)$ es holomorfa y

$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}$ en $D_{z_0}(R)$ es holomorfa y

$\vdots$

$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$ en $D_{z_0}(R)$

$f(z_0) = a_0,\ f'(z_0) = a_1, \dots, f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\dots 1\, a_k = k!\, a_k$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}$$

Corolario: Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R>0$ entonces $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tiene derivadas de todos los órdenes en $D_{z_0}(r)$ y se tiene

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \text{en } D_{z_0}(r)$$

**Definición**: Sea $f$ una función que viene dada como $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R=+\infty$. Decimos que $f$ es una función entera

**Definición**: Sea $f: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z_0\in A$ y supongamos que $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en $|z-z_0|<\delta$, con radio de convergencia $R\geq\delta>0$. Entonces diremos que $f$ es analítica en $z_0$. (la serie de potencias en $z_0$ coincide con la función en el entorno donde es derivable R)

Diremos que es analítica en $A$, si lo es $\forall z\in A$

Observación: La demostración anterior dice que si $f$ analítica en $A \Rightarrow$ holomorfa en $A$

- **Proposición**: Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, con radio de convergencia $R>0$. Supongamos que $\exists\, z_j\to z_0$, $z_j\neq z_0$ tales que $f(z_j)=0\ \forall j$. Entonces $a_n=0\ \forall n$ y $\therefore f\equiv 0$

**Demostración**: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ continua en $D_{z_0}(r)$. Entonces $\underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(z_j)}} \to \underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(z_0)}}$

$\Rightarrow f(z_0)=0 \Rightarrow a_0=0$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \underset{j=n-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1}(z-z_0)^{j+1} = (z-z_0)\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1}(z-z_0)^j}_{\varphi(z)}$$

Así $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$ x hipótesis $0=f(z_j)=\underbrace{(z_j-z_0)}_{\neq 0}\varphi(z_j) \Rightarrow \varphi(z_j)=0\ \forall j$

$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(z_j)}} \to \underset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(z_0)}} \Rightarrow \varphi(z_0)=0 \Rightarrow a_1=0$

pues es continua

Luego $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tomando $j=n-2$, repito sucesivamente

$\Rightarrow a_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}$, $\Rightarrow f\equiv 0$ qed

DEMO 12

**Definición**: ($e^z$) Llamamos $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ $R=+\infty$ ($\forall z\in\mathbb{C}$) exponencial

- Sean $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$
- $y\in\mathbb{R}$ $e^{iy}=\cos(y)+i\sin(y)$
- $z=x+iy$ $e^z=e^x(\cos(y)+i\sin(y))$

- **Integración en $\mathbb{C}$**

**Definición**: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ continua. $f(t)=u(t)+iv(t)$, $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas

Definimos $\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt$

Hoja 11

Propiedades

$$\int_a^b f(t)\,dt = z_0 \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt$$

$$\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

i) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g$ funciones $\Rightarrow \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

ii) $a < b < c \Rightarrow \int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

iii) $\overline{\int_a^b f(t)\,dt} = \int_a^b \overline{f(t)}\,dt$

iv) $\underbrace{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|}_{\text{en } \mathbb{C}} \leq \underbrace{\int_a^b |f(t)|dt}_{\text{en } \mathbb{R}}$

v) Si $|f| \leq M$ en $[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M(b-a)$

Demostración de iv) $\int_a^b f(t)dt = z_0$ en $\mathbb{C}$. Si es cero nada que probar ($|0| \leq 0$)

Si $z_0 \neq 0 \Rightarrow z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$

$$r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b f(t)\,dt \Rightarrow r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b f(t)\,dt$$

$$r_0 = \mathrm{Re}(r_0) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta_0} \int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta_0} f(t)\right)dt$$

$$\mathrm{Re}(e^{-i\theta_0} f(t)) \leq |\mathrm{Re}(e^{-i\theta_0} f(t))| \underset{|x| \leq |x^2+y^2|}{\leq} |e^{-i\theta_0} f(t)| = |f(t)|$$

$$r_0 = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta_0} f(t))dt \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad \text{y} \quad r_0 = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \quad \text{qed}$$

DEMO 13

- Curvas en $\mathbb{C}$

Definición (Curva en $\mathbb{C}$):

Una curva $\gamma$ en $\mathbb{C}$ es un conjunto que es la imagen de una función $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($\gamma = z([a,b])$). A la función $z$ la llamamos parametrización de $\gamma$. Asumimos

i) $z \in C^1[[a,b]]$

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

ii) $z'(t) \neq 0$ en $[a,b]$

Diremos que $\gamma$ es abierta simple si $z$ es inyectiva en $[a,b]$. Diremos que es cerrada simple si $z$ inyectiva en $[a,b)$ y $z(a)=z(b)$ (asumimos también $z'(a)=z'(b)$)

Observaciones:

- Nuestras curvas cumplirán estas hipótesis o serán unión de curvas que las cumplen
- Nuestras curvas tendrán varias parametrizaciones, siempre trabajamos con una "buena"
- Las curvas están orientadas por la parametrización que las define.
- Con nuestras definiciones e hipótesis, las curvas tienen recta tangente en todo punto $z(t_0) \subset \gamma$ / $L = z(t_0) + \lambda z'(t_0)$
- Las integrales que se definen sobre $\mathbb{R}^2$ están bien definidas sobre nuestras curvas.

Definición: Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua. Sea $\gamma$ una curva dada por la parametrización $z: [a,b] \to \mathbb{C}$ $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$ la integral de $f$ sobre $\gamma$.

(invariante ante reparametrizaciones)

Definición: Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ una curva dada por la parametrización $z:[a,b] \to \mathbb{C}$. Llamamos $-\gamma$ a la curva opuesta dada por $\tilde{z}: [-b,-a] \to \mathbb{C}$, $\tilde{z}(t) = z(-t)$

Propiedades:

- $\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,dz = \alpha \int_\gamma f\,dz + \beta \int_\gamma g\,dz \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz \quad (\gamma_1+\gamma_2 = \text{unión de } \gamma_1, \gamma_2)$

- $\int_{-\gamma} f\,dz = \int_\gamma -f\,dz$

- $\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq M \operatorname{long}(\gamma)$ si $|f| \leq M$ sobre $\gamma$

Demostración: $\left|\int_\gamma f\,dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))\, z'(t)|\,dt \leq \int_a^b M\, |z'(t)\,dt|$

$= M \underbrace{\int_a^b \sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}\,dt}_{\text{longitud de arco}}$

DEMO 14

Hoja 12

## Integral curvilínea en $\mathbb{C}$.

Sea $A\subset\mathbb{C}$, $f: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ continua, $f=u+iv$, $\gamma$ curva orientada por $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ parametrización, $z(t)=x(t)+iy(t)$

$$\int_\gamma f\,dz=\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt=\int_a^b\left[u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))\right](x'(t)+iy'(t))\,dt=$$

$$=\int_a^b u(x(t),y(t)).x'(t)-v(x(t),y(t)).y'(t)\,dt+i\int_a^b v(x(t),y(t))\,x'(t)+u(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

$$=\int_\gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\gamma v\,dx+u\,dy$$

- **Proposición**: Sea $A\subseteq\mathbb{C}$, $A$ abierto conexo, $f: A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ continua. Son equivalentes las siguientes afirmaciones

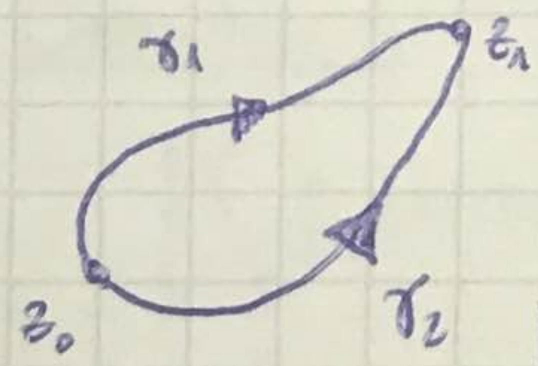
i) $\oint_\gamma f\,dz=0$ $\forall$ curva cerrada $\gamma\subseteq A$

ii) Dado $z_0, z_1\in A$ y dada $\gamma\subset A$ una curva que va de $z_0$ a $z_1$ $\int_\gamma f\,dz$ depende de $z_0$ y $z_1$ y no de la curva $\gamma$ que las une.

iii) $\exists$ $F$ holomorfa en $A$ / $F'=f$ en $A$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii) Dados $z_0, z_1$, sean $\gamma_1, \gamma_2$ dos curvas distintas que van de $z_0$ a $z_1$.




Me formo $\gamma$ cerrada / $\gamma=\gamma_1\cup(-\gamma_2)$

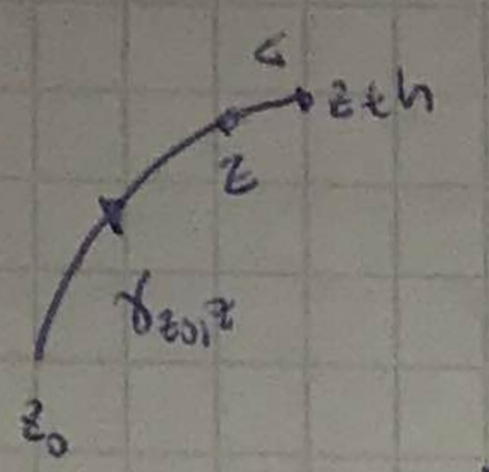
Luego por hipótesis $\oint_\gamma f\,dz=0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1\cup(-\gamma_2)} f\,dz=0$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f\,dz+\int_{-\gamma_2} f\,dz=\int_{\gamma_1} f_1\,dz-\int_{\gamma_2} f\,dz=0$$

finalmente $\int_{\gamma_1} f\,dz=\int_{\gamma_2} f\,dz$

Observación: Si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ se autocortan, busco una $\gamma_3$ que cierre $\gamma_1$ y $\gamma_2$ pero no las corte y luego $\oint_{\gamma_1\cup\gamma_3} f\,dz=\oint_{\gamma_2\cup\gamma_3} f\,dz=0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f\,dz=\int_{\gamma_2} f\,dz$

ii) $\Rightarrow$ iii) Fijamos $z_0\in A$. Tomo $z\in A$. Sea $\gamma_{z_0,z}$ una curva cualquiera que va de $z_0$ a $z$. Defino $F(z)=\int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,dw$ (bien definido por hipótesis ii)



Tomamos $h\in\mathbb{C}$ con $|h|<<1$. $G$ representa el segmento que une $z$ con $z+h$. Entonces $\gamma_{z_0,z}+G$ = curva de $z_0$ a $z+h$

$$F(z+h)=\int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,dw+\int_G f(w)\,dw$$

$\Rightarrow F(z+h)-F(z)=\int_G f(w)\,dw$ Parametrizo $G$ como $z:[0,1]\to\mathbb{C}$

$z(t)=z+th$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\cdot\int_G f(w)\,dw-f(z)$$

Analizo $\int_G 1\,dw=\int_0^1 G'(t)\,dt=\int_0^1 h\,dt=h \Rightarrow \frac{1}{h}\int_G dw=1$

Luego $f(z)=1\cdot f(z)=\frac{1}{h}\int_G dw\; f(z)=\frac{1}{h}\int_G f(z)\,dw$

De esta forma $\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_G f(w)\,dw-\frac{1}{h}\int_G f(z)\,dw=(*)$

$(*)=\frac{1}{h}\int_G \big(f(w)-\underbrace{f(z)}_{z\text{ fijo}}\big)\,dw$

Tomando modulos $\left|\frac{1}{h}\int_G (f(w)-f(z))\,dw\right|\le\frac{1}{|h|}\sup|f(w)-f(z)|\,\overbrace{long(G)}^{|h|}=\sup_G|f(w)-f(z)|$

$$\Bigg|\underbrace{\frac{F(z+h)-F(z)}{h}}_{F'(z)}-f(z)\Bigg|\le\sup_G|f(w)-f(z)|$$

Como $f$ es continua en $z$, dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta\,/\,|w-z|<\delta\Rightarrow|f(w)-f(z)|<\varepsilon$

$w=z(t)$ para algún $t\Rightarrow|w-z|=|z+th-z|=t|h|\underset{t\in[0,1]}{\le}|h|$ si $|h|<\delta\Rightarrow|f(w)-f(z)|<\varepsilon$

Luego $\sup_G|f(w)-f(z)|<\varepsilon$ si $|h|<\delta$ y $\Rightarrow\lim_{h\to0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$

Es decir $\exists\,F'(z)=f(z)$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sup $\exists\,F:A\to\mathbb{C}\,/\,F'=f$. Sea $\gamma$ una curva cerrada qvq $\oint_\gamma f\,dz=0$ 6

Sea $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ una parametrización de $\gamma$

$\oint_\gamma f\,dz=\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt=\int_a^b F'(z(t))\,z'(t)\,dt$. Si $F(z(t))$ es $C^1$ vale $\frac{d\,F(z(t))}{dt}=F'(z(t))\,z'(t)$

$\Rightarrow \oint_\gamma f\,dz = \int_a^b \frac{d}{dt}[F(z(t))]\,dt = F(z(b)) - F(z(a)) = 0$ pues $z(a) = z(b)$

Como vimos (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) vale todo qed

**DEMO 15**

**Notación:** Cuando $f$ esta en las hipótesis de la proposición. Notamos

$$\int_{z_1}^{z_2} f\,dz = \int_\gamma f\,dz \quad \forall \text{ curva que va de } z_1 \text{ a } z_2$$

**Corolario: Barrow:** Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ abierto conexo. Suponiendo que $F$ holomorfa / $F' = f$ en $A \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$

**Demostración bonus por que la tengo grande:**

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))(z'(t))\,dt \underset{F \text{ holomorfa} \Rightarrow C^1}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))\,dt = \int_a^b dF(z(t)) = F(z(t))\Big|_a^b$$

$$= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_2) - F(z_1)$$

**Proposición:** Sea $f_n$ una sucesión de funciones $f_n: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_n$ continuas. Supongamos que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en $A$ a $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sea $\gamma \subseteq A$ una curva, entonces $\int_\gamma f_n(z)\,dz \rightrightarrows \int_\gamma f(z)\,dz$

**Demostración:**

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,dz \right| \leq \sup_\gamma |f_n(z) - f(z)| \cdot \text{long}(\gamma)$$

Como $f_n \rightrightarrows f$ en $A$ entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ / $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$ $\forall z \in A$. $\Rightarrow \sup_\gamma |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

Luego $\sup_\gamma |f_n(z) - f(z)|\, \text{long}(\gamma) < \varepsilon\, \text{long}(\gamma)$ si $n \geq n_0$ lo que nos implica

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \rightrightarrows \int_\gamma f(z)\,dz$$

qed

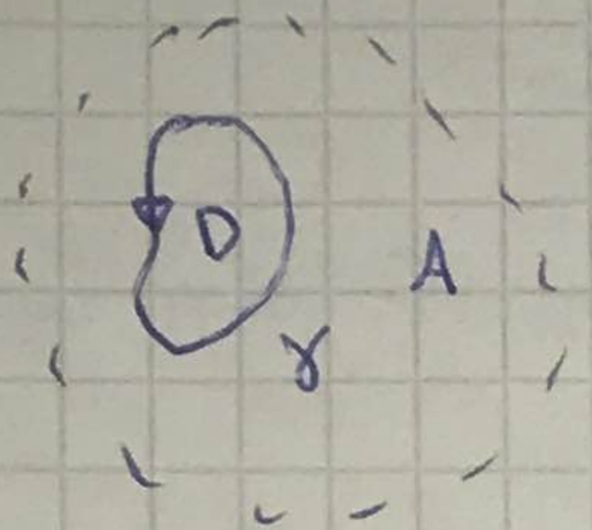
**DEMO 16**

## Teorema de Cauchy:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f$ holomorfa en $A$ abierto conexo, $f = u + iv$; $u, v$ de clase $C^1$.

Sea $\gamma \subseteq A$ una curva cerrada simple / la región encerrada por $\gamma$ está enteramente contenida en $A$. Entonces $\int_\gamma f\,dz = 0$

**Demostración:**




Supongamos $\gamma$ orientada positivamente. Sea $z(t) = x(t) + iy(t)$, $z: [a, b]$ parametrización de $\gamma$ con orientación positiva. $D = \text{int}(\gamma)$

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt = \int_a^b u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)) \cdot (x'(t) + i y'(t))\,dt = \odot$$

$$\odot = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i \int_\gamma v\,dx + u\,dy \underset{\text{Teo de Green}}{=} \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial(u)}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy + \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy$$

Pues como $f$ es holomorfa en $A$, $u, v$ cumplen C-R $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

qed

DEMO 17

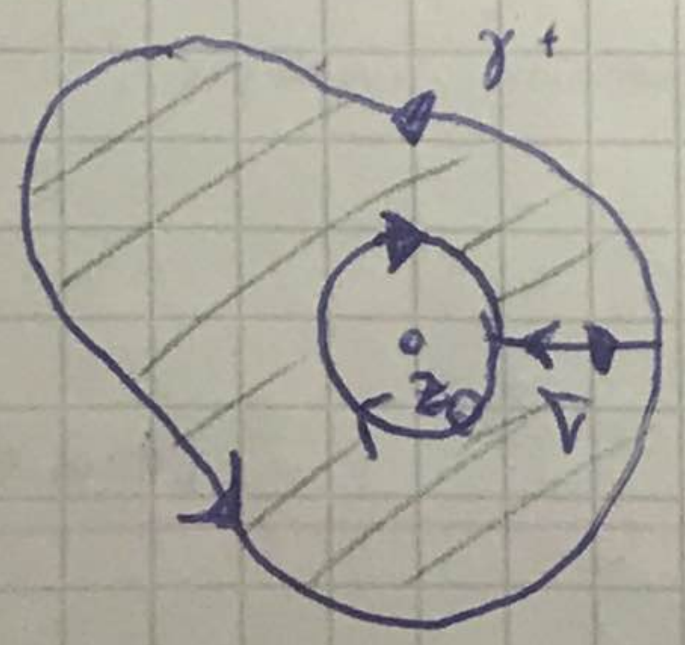
## Teorema de Cauchy-Goursat

Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f$ holomorfa en $A$ abierto conexo. Sea $\gamma$ una curva cerrada / la región encerrada por $\gamma$ está contenida en $A \Rightarrow \int_\gamma f\,dz = 0$

## Fórmula de Cauchy

Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A$ abierto conexo, $f$ holomorfa en $A$. Sea $\gamma \subseteq A$ una curva cerrada simple / la región encerrada por $\gamma$ está enteramente contenida en $A$. Si $z_0$ está en la región encerrada por $\gamma$, entonces $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$

**Demostración:**




Como $\frac{f(z)}{z - z_0}$ no es holomorfa en el interior de $\gamma$ pues no está definida en $z = z_0$ defino $C_r = \{|z - z_0| = r,\ z \in \mathbb{C}\}$ y

Defino así $\tilde{\gamma} = \gamma^+ \cup \varsigma^+ \cup C_r^- \cup \varsigma^-$ curva cerrada (no simple)

y $\frac{f(z)}{z - z_0}$ es ahora holomorfa en el interior de $\tilde{\gamma}$

Por teo de Cauchy-Goursat $\oint_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 0 = (*)$

Hoja 14

$$(*) = \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \cancel{\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz} + \int_{C_r^-} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \cancel{\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$\int_{C_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_r^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \int_{C_r^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

Analicemos el primer término. $\left|\int_{C_r^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \sup_{C_r^+}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \log(C_r^+) = (\circ)$

$$(\circ) \underset{|z-z_0|=r}{=} \frac{1}{\cancel{r}} \sup_{C_r^+} |f(z)-f(z_0)| \cdot 2\pi \cancel{r} < 2\pi\varepsilon$$

$f$ continua en $z_0$ por ser holomorfa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$ si $r < \delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$

o equivalentemente $|f(z)-f(z_0)| \underset{z\to z_0}{\to} 0$ y $z \to z_0$ si $r \to 0$

es decir que si $r \to 0 \Rightarrow \int_{C_r^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$

Luego $\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \underbrace{\int_{C_r^+} \frac{f(z)-f(z)}{z-z_0}\,dz}_{\to 0} + f(z_0)\underbrace{\int_{C_r^+} \frac{1}{z-z_0}\,dz}_{\to 2\pi i}$ cuando $r \to 0$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\right) = f(z_0)$$

qed

DEMO 18

- Teorema de Taylor

Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A$ abierto, $f$ holomorfa en $A$. Entonces $f$ es analítica en $A$.

La serie de $f$ de Taylor centrada en $z_0$ converge a $f$ en cada disco $D_{z_0}(r) \subset A$

Demostración: Sea $z_0 \in A$, $R / D_{z_0}(R) \subset A$. Tomo $z / |z-z_0| < R$ y $r / |z-z_0| < r < R$

$C_r = \{w \in \mathbb{C} / |w-z_0| = r\}$, Aplico la fórmula de Cauchy en $C_r$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-w} = \frac{1}{w-z_0}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$$

$$w \in C_r \Rightarrow \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{\overset{<r}{|z-z_0|}}{r} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \quad \text{así} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w)$$

Analizo convergencia uniforme, uso criterio de Weierstraß

$$\cdot |f_n(w)| = \frac{|z-z_0|^n}{|w-z_0|^{n+1}} |f(w)| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}} M = \frac{M}{r}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n = M_n$$

$f(w)$ acotada pues es continua

$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ pues es una serie geometrica, entonces la serie converge uniformemente en $C_r$

Luego $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw$. Como $f_n(w)$ converge uniformemente puedo intercambiar el orden en la sumatoria e integral.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right)(z-z_0)^n = \sum a_n (z-z_0)^n$$

donde $a_n$ no depende de $z$ pues $r$ y $r_0$ no dependen de $z$

Como $\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ es holomorfa en $w \neq z_0$, si tomo $r_0 /\ 0 < r_0 < R$

$$\underset{\text{Cauchy Goursat}}{\Rightarrow} \int_{C_r^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \int_{C_{r_0}^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_0}^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw; \quad 0 < r_0 < R \text{ cualquiera}$$

PINTA REHACER

qed ??

DEMO 19

- Corolario: Formula de cauchy generalizada.

Sea $A$ abierto conexo, $f$ holomorfa en $A$, $\gamma \subset A$ curva cerrada simple, el interior de $\gamma$ enteramente contenido en $A$, $z_0$ en el interior de $\gamma$

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Demostración: $r_0 > 0$, $D_{z_0}(r_0) \subseteq A \Rightarrow$ por demostración de Taylor

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_0}^+} \frac{f(w)\, dw}{(w-z_0)^{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy Goursat}}}{=} \int_{\gamma^+} \frac{f(w)\, dw}{(w-z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i}$$

Finalmente $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$ qed

DEMO 20

Hoja 15

- Corolario: Estimaciones de Cauchy

Sea $f$ holomorfa en $D_{z_0}(R)$ y $M$ / $|f(z)| \leq M$ en $D$. $\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}$

Demostración: $0<r<R$, por fórmula de Cauchy generalizada

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r^+} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} d\omega \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{\omega\in C_r} \left| \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} \right| \operatorname{long}(C_r) = \circledast$$

$$\circledast \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \sup_{\omega\in C_r} |f(\omega)| \cdot 2\pi r \leq \frac{M n!}{r^n}$$ q.e.d

DEMO 21

- Teorema de Louville:

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y acotada $\Rightarrow f$ es constante en $\mathbb{C}$

Demostración: $M$ / $|f(z)| \leq M \; \forall z \in \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $R>0 \Rightarrow D_{z_0}(R) \subseteq \mathbb{C}$

$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \Rightarrow |f'| = 0 \Rightarrow f' = 0$. $z_0$ es arbitrario, luego $f$ = cte

q.e.d

DEMO 22

- Teorema del valor medio

Sea $f$ holomorfa en $D_{z_0}(R)$ y $0<r<R \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$ para algún $r$

Demostración: Aplico fórmula de Cauchy en $C_r^+$, de esta forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \qquad (z(t) = z_0 + re^{it})$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it}) \cdot \cancel{r}\cancel{i}\cancel{e^{it}}}{\cancel{z_0}+\cancel{re^{it}}-\cancel{z_0}} dt = \int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\, dt \; \frac{1}{2\pi}$$ qed

DEMO 23

- Teorema: Principio de módulo máximo

Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A$ abierto conexo, $f$ holomorfa en $A$. Supongamos que $\exists\, z_0 \in A$ / $|f(z_0)| \geq |f(z)| \; \forall z \in A$. Entonces $f(z) \equiv f(z_0) \; \forall z \in A$

Demostración: Sea $z_0 \in A$ / $|f(z_0)| \geq |f(z)| \; \forall z \in A \;\wedge\; R>0$ / $D_{z_0}(R) \subseteq A$.

Por el teorema del valor medio $\exists\, r$ / $0<r<R$ donde $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$

Luego $|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})| dt = \circledast$

$$\circledast \underset{\text{hipótesis}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = \frac{1}{\cancel{2\pi}} |f(z_0)| \cancel{2\pi} = |f(z_0)|$$

de esta forma las desigualdades son igualdades.

De esta forma $\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})| dt = \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt \iff \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0)|-|f(z_0+re^{it})|}_{\geq 0 \;=g(t);\,[0,2\pi]\to\mathbb{R}} dt = 0$

continua.

Como $g\geq 0$ por hipót, $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0 \Rightarrow g=0$

$\Rightarrow |f(z_0)| = |f(z_0+re^{it})| \quad \forall t\in[0,2\pi],\ \forall r\in[0,R]$

$\Rightarrow |f(z_0)| = |f(z)|$ en $D_{z_0}(R) \overset{*}{\Rightarrow} f(z) = f(z_0) = \text{cte}$ en $D$

si $|f|=$cte $\Rightarrow f=$cte

Veo para $P\in A$, como $A$ es abierto conexo, $\exists$ poligonal $\gamma$ de $z_0$ a $P$ y contenida en $A$.

Sea $d>0$ la menor distancia entre puntos de $\gamma$ y la frontera de $A$, $z_0, z_1, \dots, z_n$ puntos de $\gamma$ / $|z_i - z_{i-1}| < \frac{d}{2}$, $z_n = P$. Se así que $f(z) = f(z_0)$ en $D_{z_0}(d)$.

Como $|z_1 - z_0| < \frac{d}{2} \Rightarrow f(z_1) = f(z_0)$ $\quad |f(z_1)| \geq |f(z)|$ en $D_{z_1}(d) \Rightarrow f(z) = f(z_1)$ en $D_{z_1}(d)$

y así sucesivamente. Por inducción $f(z_0) = f(z_1) = \dots = f(z_n) = f(P)$

Como $P$ es arbitrario $\in A$, se sigue $f(z) = f(z_0)\ \forall z\in A$. q.e.d

DEMO 24

- **Corolario**: Sea $A$ abierto conexo, $f$ holomorfa en $A$ y continua en $\overline{A}$

$\Rightarrow |f|$ alcanza máximo en $\partial A$ $\left(\max_{\overline{A}} |f| = \max_{\partial A} |f|\right)$

**Demostración**: $|f|$ continua en $\overline{A}$ cerrado y acotado

$\Rightarrow \exists\, z_0 \in \overline{A}$ / $|f(z_0)| \geq |f(z)|\ \forall z\in\overline{A}$. $z_0$ puede estar en $\partial A$ o dentro de $A$

Si $z_0\in A$ interior $\Rightarrow f(z) = f(z_0)$ (módulo máximo) $\forall z\in A$ en particular $\forall z\in\overline{A}$

por continuidad $\max_{z\in\overline{A}} |f| = \max_{z\in\partial A} |f|$

Si $z_0 \in \partial A$, nada que demostrar, trivial. qed

DEMO 25

- **Teorema de ¿Mojera??**: Sea $A\subseteq\mathbb{C}$ abierto conexo, $f$ continua en $A$ / $\forall\, \gamma\subset A$ curva cerrada se tiene $\int_\gamma f\,dz = 0 \Rightarrow f$ es holomorfa

**Demostración**: Estas hipótesis implican que $f$ tiene una primitiva holomorfa $F$ / $F' = f$

Ahora sabemos por Teo de Taylor que $F'$ también es holomorfa $\Rightarrow f$ es holomorfa

qed

DEMO 27

Hoja 16

## Teorema de Laurent

Sean $R_1, R_2$ / $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ y supongamos que $f$ es holomorfa en $D_{z_0}(R_1,R_2) = \{z\in\mathbb{C} / R_1<|z-z_0|<R_2\}$ $\Rightarrow$ $f$ tiene un desarrollo de la forma:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ en } D_{z_0}(R_1,R_2)$$

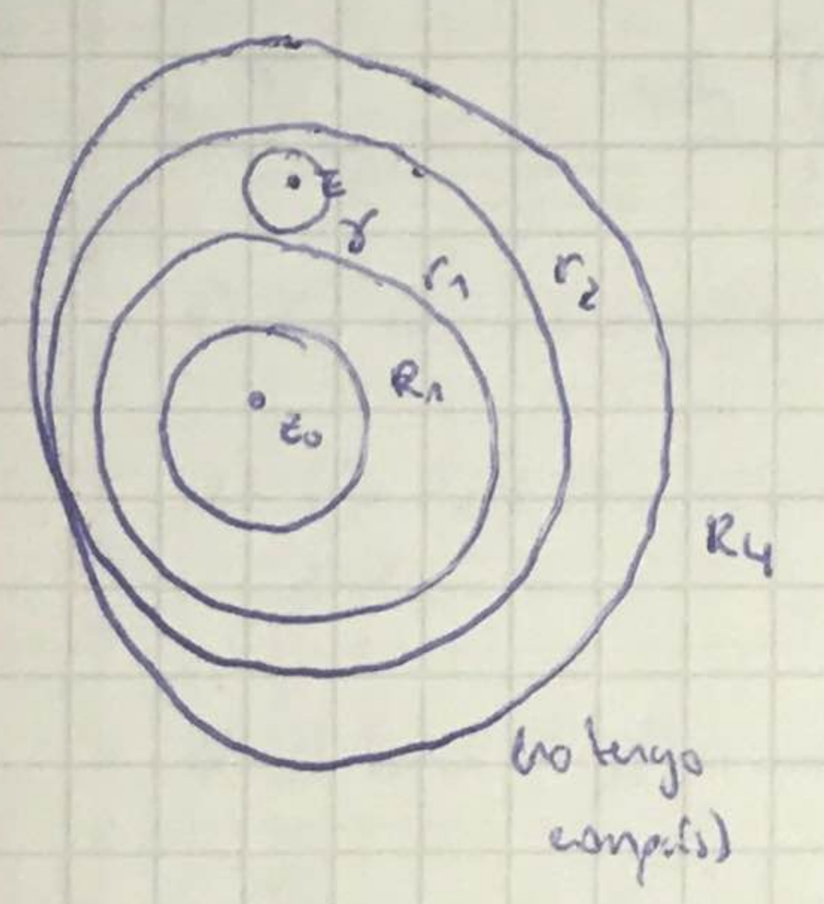
donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$ $n\geq 0$

$r$ / $R_1<r<R_2$

$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\,dw$ $n\geq 1$ $\qquad C_r=\{|w-z_0|=r\}$

La serie converge absolutamente en $R_1<|z-z_0|<R_2$ y uniformemente en cada región $R_1<r_1\le|z-z_0|\le r_2<R_2$. El desarrollo es único

Demostración: Sea $z$ / $R_1<|z_1-z_0|<R_2$ tomo $r_1,r_2$ / $R_1<r_1<|z-z_0|<R_2$




Sea $\gamma$ una curva cerrada simple tal que $z$ está en el interior $\gamma$ contenida en el anillo limitado por $C_{r_1}$ y $C_{r_2}$. Por la fórmula de Cauchy $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$. Sean $G_1,G_2$ segmentos tal que $G_1$ une $C_{r_1}$ con $\gamma$ y $G_2$ une $C_{r_2}$ con $\gamma$, entonces llamo

$\tilde\gamma = C_{r_2}^+ + G_2 + \gamma^- + G_1 + C_{r_1}^- + (-G_1) + (-G_2)$ donde

$\tilde\gamma$ es una curva cerrada / $\frac{f(w)}{w-z}$ es holomorfa en su interior.

$$\int_{\tilde\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Tc-G}\\ \text{Cauchy-Goursat}}}{=} 0 = \int_{C_{r_2}^+} + \cancel{\int_{G_2}} + \int_{\gamma^-} + \cancel{\int_{G_1}} + \int_{C_{r_1}^-} + \cancel{\int_{-G_1}} + \cancel{\int_{-G_2}}$$

Luego $0=\int_{C_{r_2}^+}+\int_{\gamma^-}+\int_{C_{r_1}^-}$ así $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}^+}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}^+}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$

Tomo $w\in C_{r_2}$ $\frac{f(w)}{w-z} = f(w)\frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{f(w)}{w-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z_0-z}{w-z_0}}$ veamos $\left|\frac{z-z_0}{w-z}\right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$

$C_{r_2}=\{|w-z_0|=r_2\}$

de esta forma $\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}}_{f_n(w)}$

Analizo convergencia uniforme en $C_{r_2}$ $|f_n(w)| = \frac{|f(w)|\,|z-z_0|^n}{|w-z_0|^{n+1}} \le \frac{M|z-z_0|^n}{r_2^{n+1}} = \frac{M}{r_2}\left(\overset{<1}{\frac{|z-z_0|}{r_2}}\right)^n = M_n$

$(\exists M_n / \sum M_n<\infty)$

$\Rightarrow \sum M_n < +\infty \Rightarrow$ converge absoluta y uniformemente por el criterio de Weierstrass

Tomo $w \in C_{r_1} = \{|w - z_0| = r_1\}$

$$\frac{f(w)}{w-z} = f(w)\frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{f(w)}{z_0-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\cdot\frac{f(w)}{z_0-z}$$

$$\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1 \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} -f(w)\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Analizamos convergencia uniforme en $C_{r_1}$ ($M_n / \sum M_n < \infty$)

$$|f_n(w)| \leq \frac{M\, r_1^n}{|z-z_0|^{n+1}} = \frac{M}{|z-z_0|}\left(\underbrace{\frac{r_1}{|z-z_0|}}_{<1}\right)^n = M_n \Rightarrow \sum^{\infty} M_n < +\infty$$

$\Rightarrow$ converge uniformemente por Weierstrass

$$\text{Así } f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}^+} -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}dw$$

$$\left(\text{Recordando} \quad S_k(w) = \sum_{n=0}^{k}(\;) \quad S_k \rightrightarrows S \text{ en } C_r^+ \qquad \int_{C_r^+} S = \lim_{k\to+\infty}\int_{C_r^+}\sum^{k} = \lim_{k\to\infty}\sum^{k}\int_{C_r^+} = \sum^{\infty}\int_{C_r^+}\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right](z-z_0)^n + \sum_{\substack{n=0 \\ \downarrow \\ n=m-1}}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}}dw\right](z-z_0)^{-n-1}$$

pues ambas convergen en la región de integración

$$\text{así } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad \text{si } R_1 < r < R_2$$

$$z / R_1 < |z-z_0| < R_2$$

$$\text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \qquad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-m+1}}$$

REHACER

DEMO 28

Hoja 17

# Singularidades

## Clasificación de singularidades

Decimos que $z_0$ es un punto singular de $f$ (o singularidad) si $f$ no es holomorfa en $z_0$.

Tenemos dos situaciones posibles:

(i) $\exists R>0$ / $f$ es holomorfa en $0<|z-z_0|<R \Rightarrow$ singularidad aislada

(ii) $\nexists R>0$ / $f$ es holomorfa en $0<|z-z_0|<R \Rightarrow$ singularidad no aislada

Clasificación de singularidades aisladas

a) $\forall n\geq 1$; $a_{-n}=0$ no hay potencias negativas $\Rightarrow z_0$ singularidad evitable

b) $\exists p\geq 1$ / $a_{-p}\neq 0$ y $\forall n>p$ $a_{-n}=0$ hay finitas potencias negativas $\Rightarrow z_0$ polo de orden $p$

c) $\exists$ infinitos $n\geq 1$ / $a_{-n}\neq 0$ hay infinitas potencias negativas $\Rightarrow z_0$ singularidad esencial

**Proposición:** Sea $z_0$ una singularidad aislada de $f$, $\Rightarrow$ son equivalentes

1) $z_0$ es una singularidad evitable

2) $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \in \mathbb{C}$

3) $\exists \delta>0$ / $|f|$ es acotada en $0<|z-z_0|<\delta$

Demostración:

1 $\Rightarrow$ 2 Por hipótesis $\exists R>0$ / $f$ es holomorfa en $0<|z-z_0|<R$ y

$\underbrace{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{\text{continua en } z_0} \Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = a_0 \in \mathbb{C}$

2 $\Rightarrow$ 3 Si $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = w_0\in\mathbb{C}$, tomo $\varepsilon=1 \Rightarrow \exists \delta>0$ / si $0<|z-z_0|<\delta$

implica $|f(z)-w_0|<1$. $|f(z)|\leq |f(z)-w_0|+|w_0|<1+|w_0|$ si $0<|z-z_0|<\delta$

$\therefore |f|$ es acotada

3 $\Rightarrow$ 1 $\exists R>0$ / $f$ holomorfa en $0<|z-z_0|<R$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$. Por hipótesis, $\exists M>0$ / $|f|\leq M$ en $0<|z-z_0|<\delta$

$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw \quad C_r=\{|w-z_0|=r\}$; $0<r<R$

DEMO 29

Tomo $0<r<\delta \Rightarrow |a_{-n}|\leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{-n+1}}\overbrace{2\pi r}^{\text{long}(C_r)} = M\cdot r^n \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \quad n\geq 1 \Rightarrow a_{-n}=0\ \forall n\geq 1$

qed

• Proposición: Sea $z_0$ una singularidad aislada de $f$, son equivalentes:

1) $z_0$ es un polo de $f$

2) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ (Osea, $\forall M>0, \exists \delta>0 \ / \ 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)| > M$)

3) La función $\frac{1}{f}$ extendida por 0 en $z_0$, es holomorfa en $z_0$

$$\left(\frac{1}{f(z_0)} = 0\right)$$

Demostración:

① ⇒ ② $f$ holomorfa en $0<|z-z_0|<R$ $\quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad k \geq 1$

$z_0$ polo de orden $k$ de $f$ si $a_{-k} \neq 0$. Reemplazamos $j = n+k$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-k}(z-z_0)^{j-k} = (z-z_0)^{-k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j-k}(z-z_0)^j}_{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k}\varphi(z)$$

$\varphi$ es holomorfa en $z_0$, $\varphi(z_0) = a_{-k} \neq 0$

Luego $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \underbrace{\frac{1}{|z-z_0|^k}}_{\to\infty} \underbrace{|\varphi(z)|}_{\text{acotado}} \to +\infty$ o equiv $\left(\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty\right)$

$\varphi(z) \to \varphi(z_0)$

② ⇒ ③ $f$ holomorfa en $0<|z-z_0|<R$ y $|f(z)|>1$ si $0<|z-z_0|<\delta$

$\Rightarrow f(z) \neq 0$ en $0<|z-z_0|<\delta$

Como $|f(z)|>1$ $\quad |f(z)| \xrightarrow[z\to z_0]{} +\infty \Rightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \in \mathbb{C}$ (es decir que $z_0$ debe ser singularidad evitable de $\frac{1}{f}$)

$\Rightarrow \frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en $0<|z-z_0|<\delta$

Luego $\frac{1}{f(z)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{g(z)} \quad 0<|z-z_0|<\delta$

De esta forma $g(z) = \begin{cases} 1/f(z) & 0<|z-z_0|<\delta \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$

③ ⇒ ①

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con $g(z_0) = a_0 = 0$. De esta forma, $\exists k \geq 1 \ / \ a_k \neq 0$ y $a_n = 0$ $n<k$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \overset{j=n-k}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k}(z-z_0)^{j+k} = (z-z_0)^k \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k}(z-z_0)^j}$$

$\eta(z)$ holomorfa en $z_0$

$\Rightarrow g(z) = (z-z_0)^k \eta(z) = \frac{1}{f(z)}$ en $0<|z-z_0|<\delta$ $\quad \eta(z_0) = a_k \neq 0$ ⊙

⊙ ⇒ $\frac{1}{\eta}$ es holomorfa y no nula en $0<|z-z_0|<\delta$ y tiene desarrollo de Taylor

Hoja 18

así $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \frac{1}{\eta(z)}$ holomorfa en $z_0$ $\Rightarrow$ $z$ polo de orden $k$ de $f$

qed
(releer)

DEMO 30

Definición: (Cero de función): Sí $f$ es holomorfa en $z_0$, $f \not\equiv 0$. Decimos que $z_0$ es un cero de $f$ de orden $k \geq 1$ si $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0, \dots, f^{k-1}(z_0) = 0 \wedge f^k(z_0) \neq 0$

- Proposición: Sea $z_0$ una singularidad aislada de $f$, son equivalentes:

① $z_0$ es una singularidad esencial

② $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

Demostración:

① $\Rightarrow$ ② $z_0$ es una singularidad esencial. Supongamos que $\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$

Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ absurdo pues sería singularidad evitable

Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ $\Rightarrow$ absurdo por que sería polo

Luego solo puede ser $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

② $\Rightarrow$ ① Si $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$ $\Rightarrow$ no es una singularidad evitable pues debería $\exists$ y ser $\omega_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ no es un polo pues debería $\exists$ y ser $\infty$

Luego solo puede ser $z_0$ singularidad esencial qed

DEMO 31

- Singularidades en el infinito

Estudiar el comportamiento de $f(z)$ para $|z|$ grande que equivale a estudiar el comportamiento de $f(1/\omega)$ para $\omega$ pequeño

Definición: $f$ es holomorfa en el infinito si $F(\omega) = f(1/\omega)$ es holomorfa en $\omega = 0$

Definición: Diremos que $f$ tiene una singularidad aislada en el infinito si $F(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ tiene una singularidad aislada en $\omega = 0$. Si esto no ocurre diremos que $f$ tiene una singularidad no aislada en el infinito.

$F(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ tiene una singularidad aislada en $\omega = 0$ sí,

$F(\omega)$ holomorfa en $0 < |\omega| < \varepsilon$

$f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ es holomorfa en $0 < |\omega| < \varepsilon$

## Clasificación de singularidades aisladas en el infinito

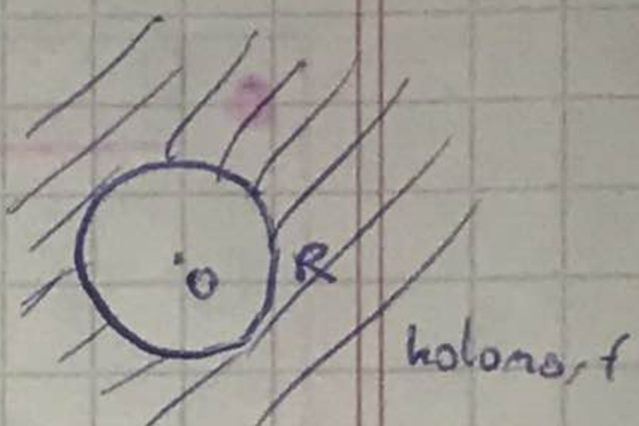
Decimos que $f$ tiene una singularidad evitable en $\infty$ si $f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ tiene una sing. evitable en $\omega = 0$

$f$ tiene un polo en $\infty$ si $f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ tiene un polo en $\omega = 0$

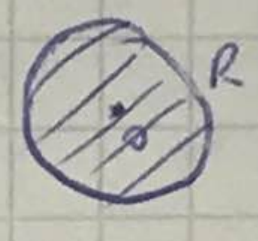
$f$ tiene una singularidad esencial en $\infty$ si $f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ tiene una esencial en $\omega = 0$

## Desarrollo de Laurent en el infinito

Supongamos $f$ holomorfa en $|z| > R$ ; $\underline{f(\omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ $\quad ||z|| > R$




$F(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ $\quad 0 < |\omega| < \frac{1}{R}$ $\quad \omega \neq 0$ $\quad \left|\frac{1}{\omega}\right| > R$ ; $|\omega| < \frac{1}{R}$



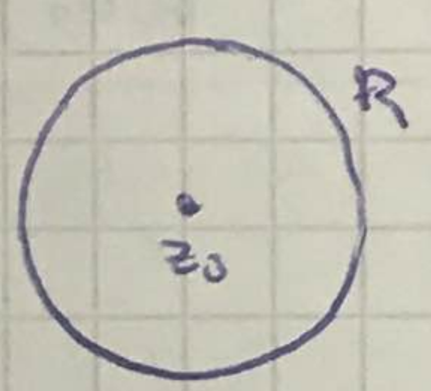

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n W^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} W^n$$

- $f$ tiene una singularidad evitable en el infinito si el desarrollo de $\underline{f(\omega)}$ no tiene potencias positivas
- $f$ tiene un polo en el infinito si el desarrollo de $\underline{f(\omega)}$ tiene finitas potencias positivas
- $f$ tiene una singularidad esencial en el infinito si el desarrollo de $\underline{f(\omega)}$ tiene infinitas potencias positivas

Notación = $\mathbb{C}_\infty$ el conjunto formado por $\mathbb{C} \cup$ "el punto del infinito"

## Residuos

Sea $z_0$ una singularidad aislada de $f \Rightarrow \exists R > 0$ / $f$ holomorfa en $0 < |z - z_0| < R$




Tengo el desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ $\quad 0 < |z - z_0| < R$

con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ $\quad 0 < r < R$

si $n = -1$ $\quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+} f(\omega) d\omega$

Llamamos residuo de $f$ en $z_0$ a $a_{-1}$ y notamos

$$\text{Res}[f, z_0] = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^+} f(\omega) d\omega$$

**Proposición:** Sea $z_0$ un polo de orden $(p+1)$ de $f$. Entonces:

$$\text{Res}[f, z_0] = \frac{g^{(p)}(z_0)}{p!} \quad \text{con } g(z) = f(z)(z - z_0)^{p+1}$$

**Demostración:** $f$ holomorfa en $0 < |z - z_0| < R$. Allí el desarrollo de Laurent es de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-(p+1)}}{(z - z_0)^{p+1}} + \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + \dots \quad \text{con } a_{-p-1} \neq 0$$

Hoja 19

$$\Rightarrow \underbrace{f(z)(z-z_0)^{p+1}}_{g(z)} = a_{-(p+1)} + a_{-p}(z-z_0) + \dots + a_1 (z-z_0)^p + \dots$$

DEMO 32

$$\Rightarrow a_{-1} = \frac{g^{(p)}(z_0)}{p!} = \text{Res}[f, z_0]$$

qed

<u>Corolario:</u> Supongamos que $z_0$ es un polo simple (de orden 1) de $f$, entonces:

$$\text{Res}[f, z_0] = (z-z_0) f(z) \Big|_{z=z_0}$$ (en sentido de límite)

- <u>Teorema de los residuos</u>

Sea $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $A$ abierto, $f$ holomorfa en $A$ salvo en un número finito de puntos de $A$ que son singularidades aisladas. Sea $\gamma \subseteq A$ curva cerrada simple / $\text{int}(\gamma) \subseteq A$ y $\gamma$ no pasa por ninguna singularidad de $f$. Sean $z_1, \dots, z_k$ las singularidades de $f$ en $\text{int}(\gamma)$, entonces

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}[f, z_j]$$

<u>Demostración:</u> Definimos una curva $\tilde{\gamma}$ cerrada / $f$ holomorfa en su interior

Para cada $j$ $1 \leq j \leq k$, sea $C_j$ una circunferencia centrada en $z_j$ que no contenga otra singularidad. Sea $G_j$ el segmento que une $\gamma$ con $C_j$

$$\tilde{\gamma} = \gamma^+ + C_1^- + \dots + C_k^- + G_1 + \dots + G_k + (-G_1) + \dots + (-G_k)$$. Así $f$ holomorfa en $\tilde{\gamma}$

$\Rightarrow$ Vale Cauchy-Goursat y $0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma^+} f(z)dz + \sum_{j=1}^{k} \int_{C_j^-} f(z)dz$

(los de $G_i$ se cancelan con $-G_i$). Como $z_j$ es singularidad aislada de $f$, $\text{Res}[f, z_j]$

$= a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j^+} f(z)dz$ $\quad \Rightarrow 0 = \int_{\gamma^+} f(z)dz - \sum_{j=1}^{k} \int_{C_j^+} f(z)dz$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Res}[f, z_j]$$

qed

DEMO 33