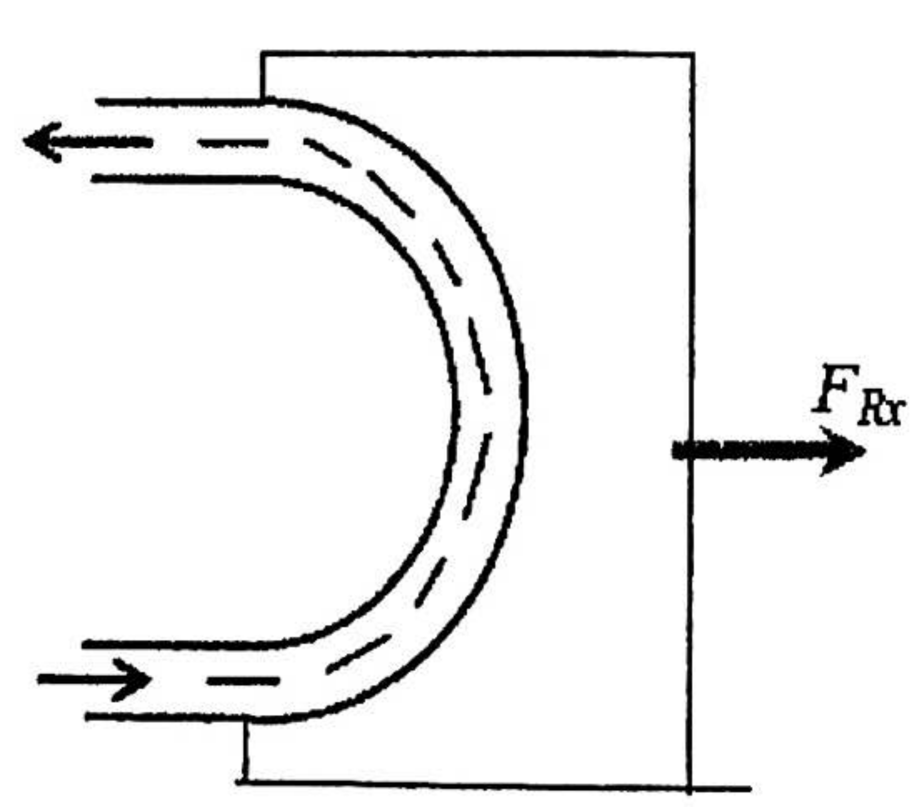
Primer Parcial
Estructura de la Materia 1 - Segundo Cuatrimestre de 2016

Resolver cada ejercicio en hojas separadas - Justificar todas las respuestas

Problema 1: Asumiendo que la distribución de densidad de una estrella de masa M y radio R es: $\rho(r) = \rho_c(1 - r/R)$ (ρ_c la densidad en el centro de la estrella).
a) Calcular cómo varía la masa de la estrella como función de su radio: $m(r)$ para $r < R$.
b) Suponiendo que la estrella se encuentra en equilibrio hidrostático y que la única fuerza relevante para el problema es la gravitatoria calcular como varía la presión en el interior de la estrella.

Problema 2: Un chorro de agua horizontal incide sobre una placa curvada que desvía el chorro haciéndolo retornar por su dirrección original tal como se indica en la figura 1 (el chorro visto desde arriba).
a) Calcular la velocidad del chorro a la salida sabiendo que ingresa con velocidad v_0 y las áreas de los chorros incidente y saliente son iguales.
b) Calcular el valor de la fuerza que debe aplicarse sobre la placa para que ésta permanezca en reposo.

Problema 3: Un cilindro infinito de radio a se encuentra inmerso en un fluido de densidad ρ incompresible, irrotacional y estacionario. Sobre el cilindro se ubica una singularidad (dipolo con $\mu > 0$) como se muestra en la figura 2.
a) Hallar el potencial complejo para esta configuración. Identificar qué tipo de singularidad se introduce en el interior del cilindro y dar su ubicación.
b) Obtener una ecuación para las líneas de corriente de la forma $f(x, y) = c$. Decir cómo serán las ecuaciones para las trayectorias y las líneas de traza.
c) Calcular la fuerza que ejerce el fluido sobre el cilindro.
d) Discutir (cualitativamente) cómo varía el resultado anterior si se reemplaza el dipolo por un dipolo formado por vórtices.



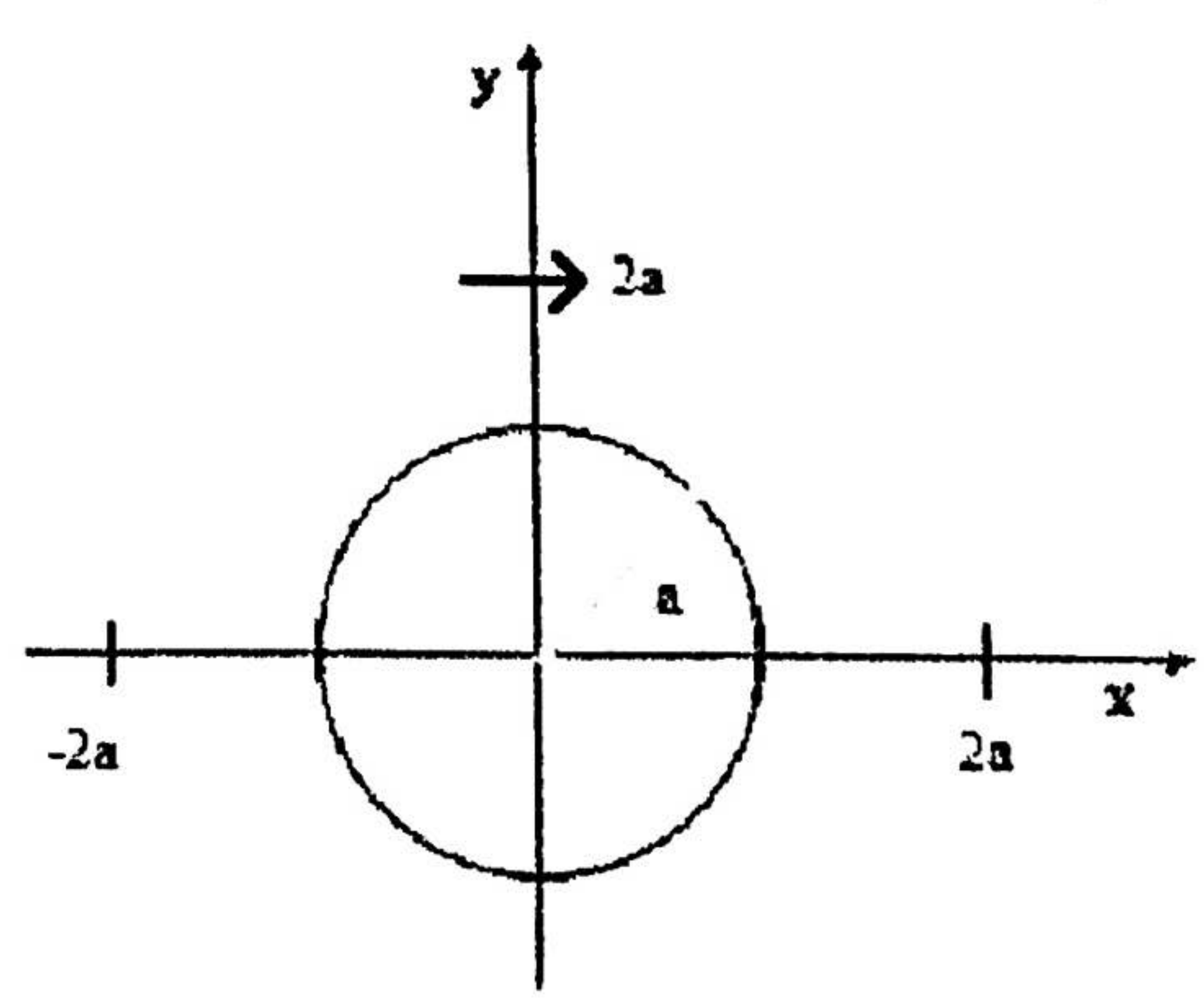
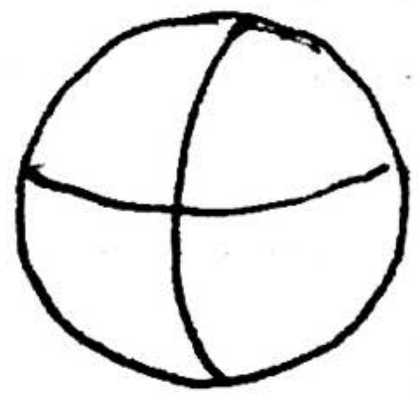


Figura 1 // Figura 2

Problema 1

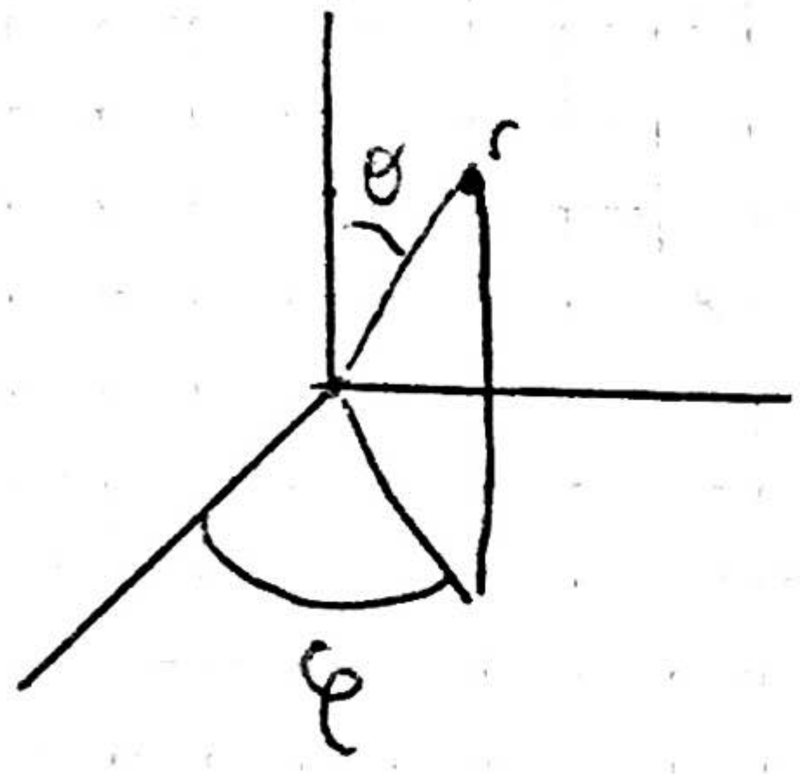


masa M

radio R

$$\frac{\partial m}{\partial V} = \rho$$

$$\Rightarrow \partial m = \rho\, dV$$



$$\Rightarrow m(r) = \int_0^r \int_0^{4\pi} \rho_c\left(1-\frac{r}{R}\right) r^2\, d\Omega\, dr$$

(Nota, en este caso como $\rho \neq \rho(\theta,\varphi)$ puedo pasar de $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r)\, r^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$ a $\int_0^{4\pi} f(r)\, r^2\, d\Omega$)

$$\Rightarrow m(r) = \int_0^r 4\pi \rho_c \left(1-\frac{r}{R}\right) r^2\, dr$$

$$\Rightarrow \boxed{m(r) = 4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) = \frac{4\pi\rho_c r^3}{3}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)}$$ B

(en particular si $r=R$, $M = \frac{4\pi\rho_c R^3}{12}$)

b) Suponiendo que la esfera se encuentra en equilibrio hidrostático y la única fuerza relevante es $\underline{F_G} = -\frac{m(r)G}{r^2}\hat{r}$

por condición hidrostática $\quad \underline{\dot{a}} = 0 = \underline{f_m} + \frac{1}{\rho}\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = \underline{f_m} - \frac{\underline{\nabla} p}{\rho} = 0$

por pascal

$$\Rightarrow -\frac{m(r)G}{r^2}\hat{r} = +\frac{1}{\rho}\frac{\partial(r^2 p)}{\partial r}\hat{r}$$

(puedo las componentes θ, φ por la simetría del problema)

$$G\left(-\frac{4\pi\rho_c r^3}{3r^2}\right)\left(1-\frac{3r}{4R}\right) = +\frac{1}{\rho_c\left(1-\frac{r}{R}\right)}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 p)$$

$$\left(-\frac{4\pi}{3}\rho_c^2\right)\left(r - \frac{3r^2}{4R}\right)\left(1-\frac{r}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 p)$$

$$-\frac{4\pi}{3}\rho_c^2\left[\frac{3r^3}{4R^2} - \frac{3r^2}{4R} - \frac{r^2}{R} + r\right] = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 p)$$

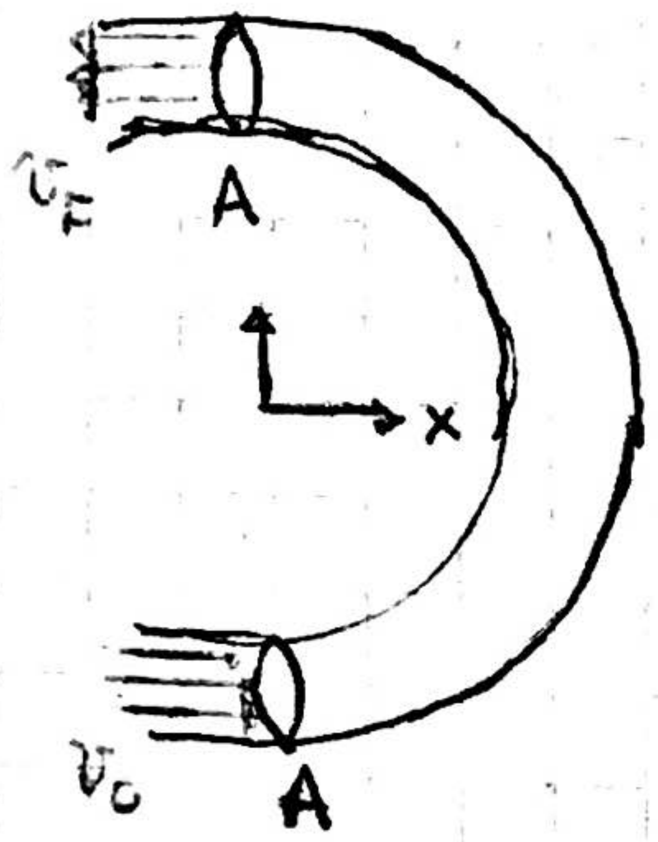
$$\Rightarrow \int_0^r -\frac{4\pi}{3}\rho_c^2 G\left[\frac{3}{4}\frac{r^3}{R^2}-\frac{7}{4}\frac{r^2}{R}+r\right]dr = r^2 P$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{4\pi}{3}\rho_c^2 G\right)\left[\frac{3}{16}\frac{r^4}{R^2}-\frac{7}{12}\frac{r^3}{R}+\frac{r^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P = -\frac{4\pi}{3}\rho_c^2 G\left[\frac{3}{16}\frac{r^2}{R^2}-\frac{7}{12}\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\right]}$$

Problema 2

Datos: A, v_0



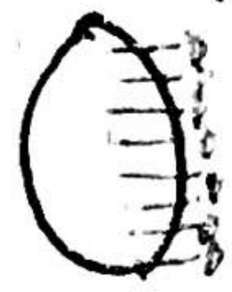
$\rightarrow E_{Rx}$

$\underline{g}$ ⊗

- Fluído no viscoso

a) ¿v_F?

Supongo que tanto la velocidad de salida como la de entrada son uniformes en superficie, de forma tal que quedan unidireccionadas en mi dirección $\hat{x}$



¿QUÉ ASUMÍS PARA QUE SEA ASÍ? IDEAL, INCOMPRESIBLE...

Puedo así aplicar conservación de caudal pues lo que entra debe ser igual a lo que sale, de forma / $Q_0 = A v_0 = A v_F = Q_F$ (mis velocidades estan en el mismo eje ∴ su módulo viene de una sola componente)

$\Rightarrow \boxed{v_F = v_0}$ $\quad \underline{v}_0 = v_0 \hat{x}$; $\underline{v}_F = -v_0 \hat{x}$

b) $\underline{E}_{Rx}$ / la barra este en reposo

Si estoy en reposo puedo aplicar de la conservación del momento lineal

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = 0 = \underbrace{\underline{f}_V}_{=0} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}}$$

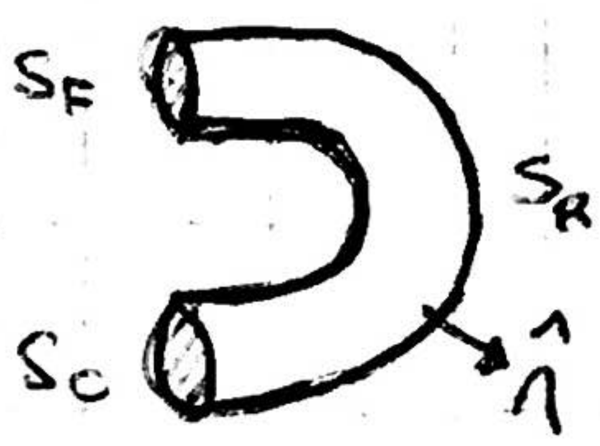
Fuerzas en volumen no tengo pues me dicen se ve desde arriba $\Rightarrow \underline{g}$ no importa en el ejercicio

$$\Rightarrow \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} \, dV \overset{\text{gauss}}{=} \oint_S \underline{\underline{T}} \cdot d\underline{S} = 0$$

Además en reposo en un fluído no viscoso

$$T_{ij} = -\rho u_i u_j - p\delta_{ij}$$

donde S va a ser el contorno de mi tubería



Así $S = S_F \cup S_0 \cup S_R$ con normal exterior

$$\therefore \; -\oint_S \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \hat{n}) dS - \oint_S p \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

Voy a suponer $\underline{v} \perp \hat{n}$ en toda la tubería salvo las tapas (donde ya ~~dije~~ supuse es uniforme en dirección)

$$\Rightarrow -\oint_S \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\hat{n})\,dS = -\int_{S_0} \rho \underline{v}_0\hat{x}(v_0\hat{x}\cdot(-\hat{x}))\,dS_0 - \int_{S_F} \rho v_F\hat{x}(v_F\hat{x}\cdot\hat{x})\cdot dS_F$$

$$\begin{cases} \vec{v}_F = v_F\,\hat{x} \\ \hat{n}_{S_F} = -\hat{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \int_{S_0} \rho v_0^2\,\hat{x}\,dS_0 + \int_{S_F} \rho v_F^2\,\hat{x}\,dS_F = \left(\rho v_0^2 A + \rho v_0^2 A\right)\hat{x}$$

suponiendo ρ uniforme

En cuanto a la presión

$$-\int_{S_0} p_S(-\hat{x})\,dS_0 - \int_{S_F} p_F(\hat{x})\,dS_F - \int_{S_R} p\cdot\hat{n}\,dS_R =$$

$$\therefore \int_{S_0}(p_S - p_F)\,\hat{x}\,dS_0 \overbrace{-\int_{S_R} p\cdot\hat{n}\,dS_R}^{\underline{E}_{Rx}} + \underbrace{\left(\rho v_0^2 A - \rho v_0^2 A\right)}_{=0}\hat{x} = 0$$

Como supuse ρ uniforme, me encuentro en una situación estacionaria, el fluido es no viscoso, y en particular $\underline{E}$ externas $=0$ ($\underline{E}_{Rx}$ no cuenta pues es la causante del equilibrio)

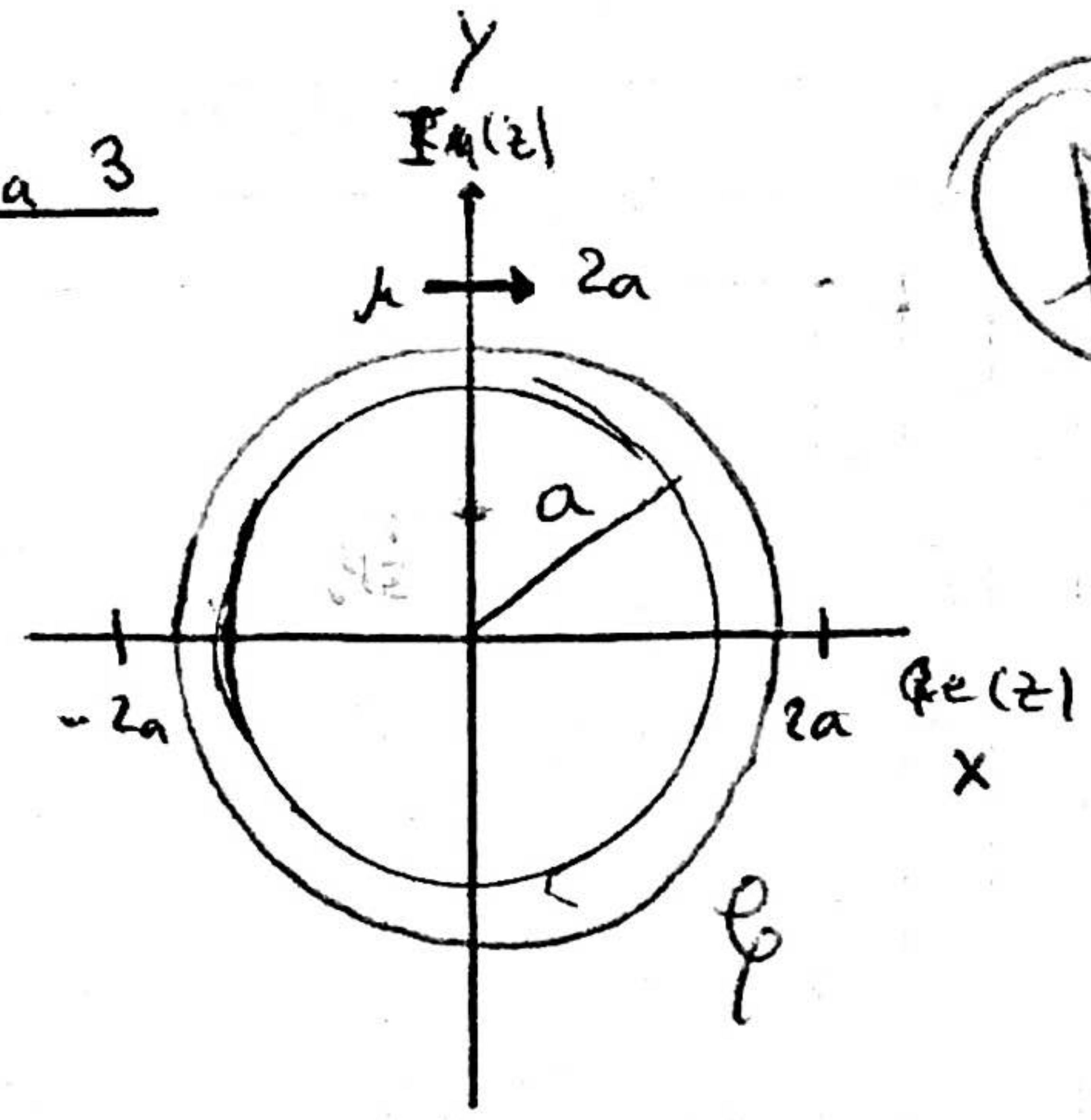
$\Rightarrow$ Bernoulli $\quad \dfrac{v_0^2}{2} + \dfrac{p_S}{\rho} = \dfrac{v_F^2}{2} + \dfrac{p_F}{\rho} = C_{\text{línea}} \Leftrightarrow p_S = p_F$

$$\boxed{\therefore\ \underline{E}_{Rx} = 0}$$

¿QUE SIGNIFICA ESTE RESULTADO

Emiliano Forte   Hoja 3/4

Problema 3



A

fluido densidad ρ

- incompresible $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$
  $\Rightarrow \underline{\nabla}\phi = \underline{u}$
- irrotacional $\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} \times \psi = \underline{u}$
- estacionario

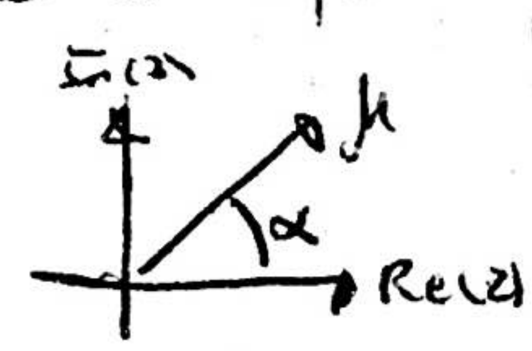
Bajo nuestras hipótesis $\underline{u} = \underline{\nabla}\phi = \underline{\nabla} \times (\psi \hat{z}) \Rightarrow$ puedo pasar al plano complejo (me dio fiaca hacer dos gráficos iguales por eso tiene los dos ejes Real y Complejo)

Defino $W(z) = \phi + i\psi$ $\qquad U = u_x + u_y i$

$\therefore \frac{\partial W}{\partial z} = U^*$ $\qquad U^* = u_x - i u_y$

a) Para obtener el potencial complejo utilizo el potencial de un dipolo

$W = -\frac{\mu_Q e^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)}$ y el teorema del círculo



$$\therefore W(z) = W_\mu(i2a) + \overline{W_\mu}\left(\frac{a^2}{z}\right) = \frac{-\mu_Q e^{i\alpha}}{2\pi(z - i2a)} + \left(\frac{-\mu_Q e^{-i\alpha}}{2\pi\left(\frac{a^2}{z} + i2a\right)}\right)$$

En este caso $\alpha = 0$

$$y \therefore \boxed{W(z) = \frac{-\mu}{2\pi(z - i2a)} \frac{-\mu_Q}{2\pi\left(\frac{a^2}{z} + i2a\right)}}$$

Básicamente el teo del círculo me introduce otro dipolo contrario (tenía $\xrightarrow{\mu}$) (me introduce $\xleftarrow{\mu}$) para modelar el contorno que versa a iz y centrado en $(0, a/2)$ $\left[\frac{ia}{2}\right]$

b) Para las líneas de corriente tomo $\psi(x,y) = cte$

$\frac{a^2}{z} + i2a = \frac{a^2 + i2az}{z}$
$= \frac{i2a}{z}\left(z - \frac{ia}{2}\right)$

Osea $Im(W) = \psi$

$$\Rightarrow W(z) = -\frac{\mu}{2\pi(z - i2a)} - \frac{\mu}{2\pi} \frac{z}{i2a} \frac{1}{\left(z - \frac{ia}{2}\right)} \qquad \frac{\mu}{2\pi} = \gamma$$

$$W(z) = \frac{-\gamma}{(z - i2a)} + \frac{\gamma i z}{(z - ia/2)}$$

~~Im(W)~~ $= W = -\frac{\gamma\,(x+i(2a-y))}{\sqrt{x^2+(y-2a)^2}} + \frac{i\gamma\,(x+iy)\,(x+i(a/2-y))}{\sqrt{x^2+(y-a/2)^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{Im(W) = \frac{\gamma\,(y-2a)}{\sqrt{x^2+(y-2a)^2}} + \frac{\gamma\,(x^2-y(a/2-y))}{\sqrt{x^2+(y-a/2)^2}} = \psi = c \Rightarrow \text{líneas de corriente}}$$

c) ¿$\underline{F}$? (sobre cilindro)

Por teorema de Blasius $F^* = F_x - iF_y = \frac{\rho i}{2}\oint_{\boxed{\mathcal{C}}} \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dz$

Tomando mi curva que encierra el cilindro puedo aplicar teorema del residuo

$$\Rightarrow \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dz}_{\bullet} = (2\pi i)\sum_{k=1}^{n} Res\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2, z_k\right\}$$ con z_k los residuos interiores a $\mathcal{C}$

$$W(z) = \frac{-\gamma}{(z-2ia)} + \frac{i\gamma z}{(z-ia/2)} \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\gamma}{(z-2ia)^2} + \frac{i\gamma(z-ia/2) - i\gamma z}{(z-ia/2)^2}$$

$$= \frac{\gamma}{(z-2ia)^2} + \frac{i\gamma}{(z-ia/2)} - \frac{i\gamma z}{(z-ia/2)^2}$$

usando $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{(z-2ia)^4} \underbrace{\frac{-\gamma^2}{(z-ia/2)^2}}_{f(z)} \underbrace{\frac{-\gamma^2 z^2}{(z-ia/2)^4}}_{g(z)} + \underbrace{\frac{2i\gamma^2}{(z-2ia)^2(z-ia/2)}}_{h(z)} + \underbrace{\frac{2\gamma^2 z}{(z-ia/2)^3}}_{\Omega(z)} \underbrace{\frac{-2i\gamma^2 z}{(z-2ia)^2(z-ia/2)^2}}_{\tau(z)}$$

tengo $z = 2ia$ exterior

$z = ia/2$ interior

$\Rightarrow \bullet = \sum Res\{f(z), g(z), h(z), \Omega(z), \tau(z), ia/2\}$

Es fácil ver que $Res(f(z)) = 0$ pues polo de orden 2 y f es su propio desarrollo de Laurent

$Res(h(z)) = h(ia/2)\cdot(z-ia/2)$ pues polo de orden 1

$$\lim_{z\to ia/2} \frac{1}{0!}\cdot\frac{2i\gamma^2}{(z-2ia)^2} = \frac{-8i\gamma^2\,9}{2a^2}$$

Emiliano Fortes

polo orden 4

$$\mathrm{Res}(g(z)) = \lim_{z \to ia/2} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{-\gamma^2 z^2}{(z - ia/2)^4} \cdot (z - ia/2)^4\right) = 0$$

$$\mathrm{Res}(\Omega(z)) = \lim_{z \to ia/2} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{z\gamma^2 z}{(z - ia/2)^3} \cdot (z - ia/2)^3\right) = 0$$

polo orden 3

$$\mathrm{Res}(\tau(z)) = \lim_{z \to ia/2} \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{-2i\gamma^2 z}{(z-2ia)^2 (z - ia/2)^2} \cdot (z - ia/2)^2\right]$$

polo orden 2

$$= \lim_{z \to ia/2}\left[\frac{-2i\gamma^2}{(z-2ia)^2} + \frac{4i\gamma^2 z}{(z-2ia)^3}\right] = \varepsilon$$

$$\boxed{\Rightarrow F_x - iF_y = \underbrace{\frac{i\rho}{2} \cdot (2\pi i)}_{-\pi\rho}\left[\frac{-9\gamma^2}{2a^2} + \varepsilon\right] \qquad E = (F_x + F_y) \text{ sale despejando}}$$

Hay que hacer las cuentas!!

d) Si tuviera un dipolo formado por vórtices

$$W(z) = \frac{i\mu_\pi e^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)}$$

básicamente obtendría casi lo mismo, pero mi parte real y compleja se ~~alternan~~ invierten

$\Rightarrow$ Básicamente daría casi lo mismo alternando x, y, pero no exactamente igual