

## Física III

Miraylia & Chernomorets. Bibliografía: Trelles  
Griffiths  
Feynman

Cuerpo cargado: Que puede ser sometido a fuerzas electromagnéticas y no puramente gravitatoria.

Observaciones experimentales

Sean A, B, C tres tipos cargados

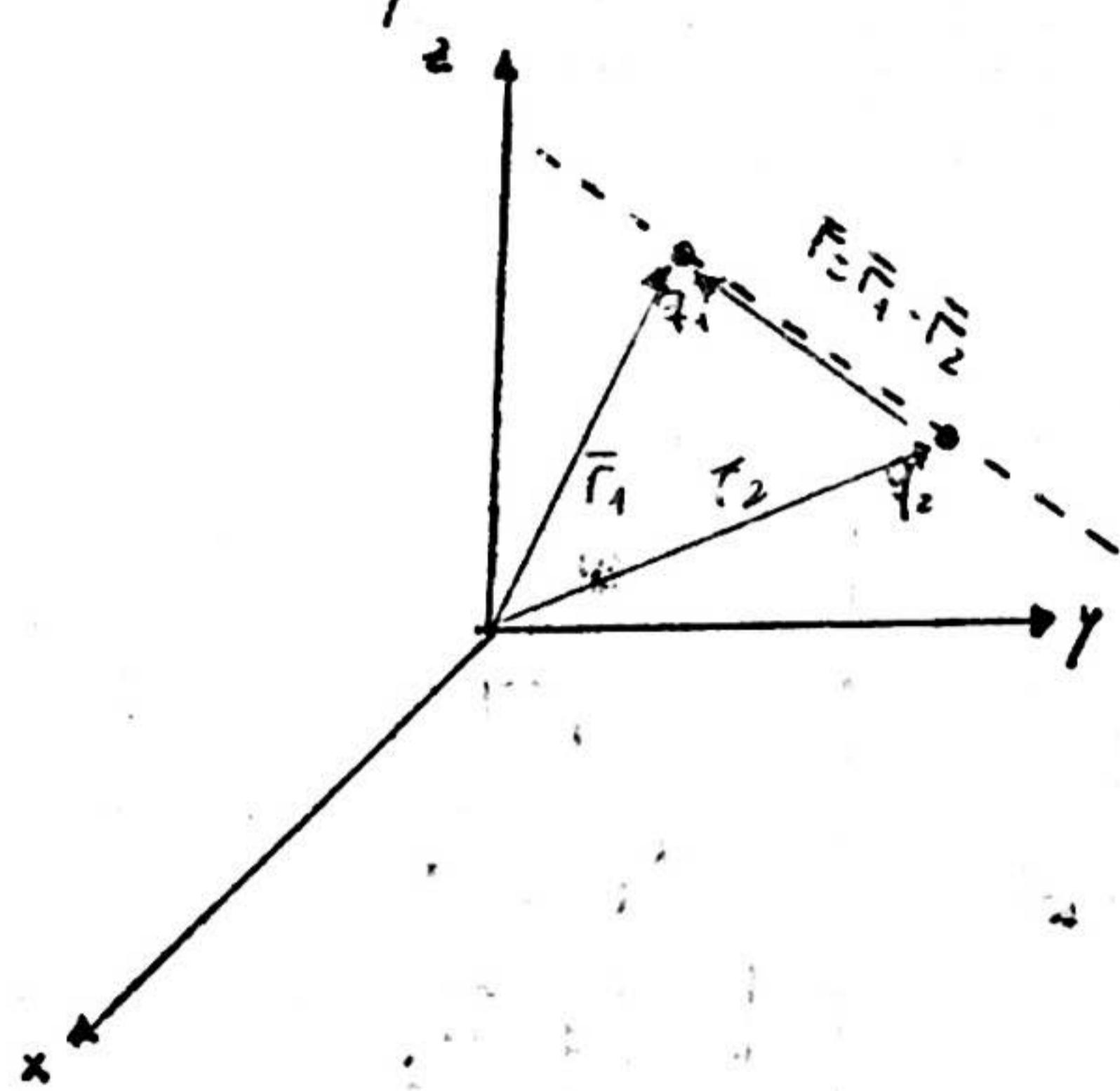
•) Si A y B se atraen  $\Rightarrow$  Se se atrae o repela a ambos

•) Si A y B se atraen  $\Rightarrow$  C se atrae con uno y se repela con el otro

De esta forma existen dos tipos de carga, positiva y negativa. La inexistencia de un tercer tipo de carga se puede observar de que nunca se encontraron tres cuerpos cargados atrayéndose

Ley de Coulomb (1785)

Se encuentra experimentalmente que la interacción electrostática entre dos cargas puntuales en reposo es proporcional a la carga de las partículas, inversamente proporcional al cuadrado de las distancias y tiene dirección en la línea que une las cargas



$$\bar{F}_{12} = k_e q_1 q_2 \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^3} = k_e q_1 q_2 \frac{\hat{r}}{\|\bar{r}\|^2}$$

$$k_e = \frac{k_0}{K} \quad k_e = 8.988 \exp^9 \frac{\text{kg m}^3}{\text{C}^2 \text{s}^2} = 8.988 \exp^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$$

(en el vacío)

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ; \quad \epsilon_0 = 8.8542 \exp^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad \begin{matrix} \text{Permitividad} \\ \text{eléctrica} \\ \text{del vacío} \end{matrix}$$

Unidades:  $[q] = \text{C}$  (Coulomb)       $[C] =$

Resultados:  $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \Rightarrow$  Se cumple el principio de acción y reacción

Si el signo  $(q_1 q_2) = +$  se repelen las partículas       $\bar{F}_{12} \parallel \hat{r} \quad \bar{F}_{21} \parallel (-\hat{r})$

Si el signo  $(q_1 q_2) = -$  se atraen las partículas       $\bar{F}_{12} \parallel (\hat{r}) \quad \bar{F}_{21} \parallel \hat{r}$

Comparación con la fuerza gravitatoria

$$\bar{F}_{21G} = G m_1 m_2 \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^3} \quad \text{con } G = 6.673 \exp^{-11} ; \quad (G \text{ es } 20 \text{ órdenes de magnitud menor que } k_e)$$

Comparando la interacción gravitatoria y eléctrica en un sistema electrón-proton ( $m_p = 1836 m_e$ ,  $m_e = 9.1094 \exp^{31} \text{kg}$ ), realizando cuentas, cuyo cálculo no aporta conocimiento, la interacción eléctrica resulta  $\approx 39$  órdenes de magnitud mayor.

## Principio de conservación de la carga eléctrica

En un sistema aislado, la carga eléctrica total se conserva, es decir:

$$Q_{TOT} = \sum_{i=1}^N q_i = \text{cte} \quad (\text{suma algebraica}). \quad \text{La carga en este sistema aislado no se crea ni se destruye.}$$

Si de alguna forma se crea una carga, debe crearse otra por otra carga igual de manera tal que el sistema mantenga su  $Q_T$ .

## Principio de superposición

La fuerza que ejerce una partícula  $q$  en  $\vec{r}$  debido a un sistema de partículas ( $q_i$  en  $\vec{r}_i$ )

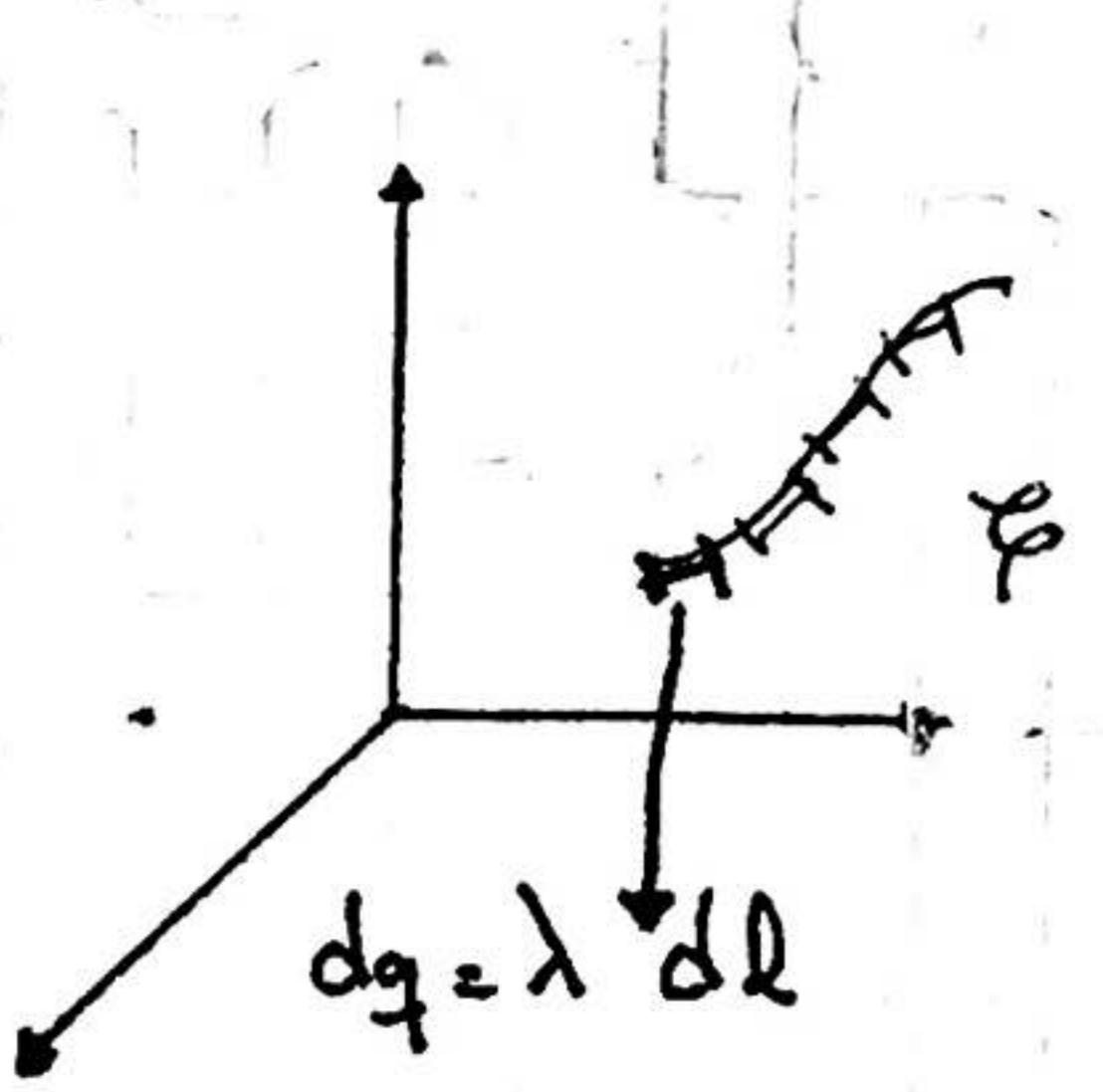
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N q q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

## Fuerzas en distribuciones de carga

En el caso de un cuerpo extenso la carga se encuentra "distribuida". Si tenemos un cuerpo continuo, la fuerza que ejerce este sobre una carga puntual  $q$  en  $\vec{r}$  la calculamos dividiendo el cuerpo en pequeños diferenciales: centrando en  $\vec{r}_i$  con carga  $dq_i$  y usar principio de superposición.

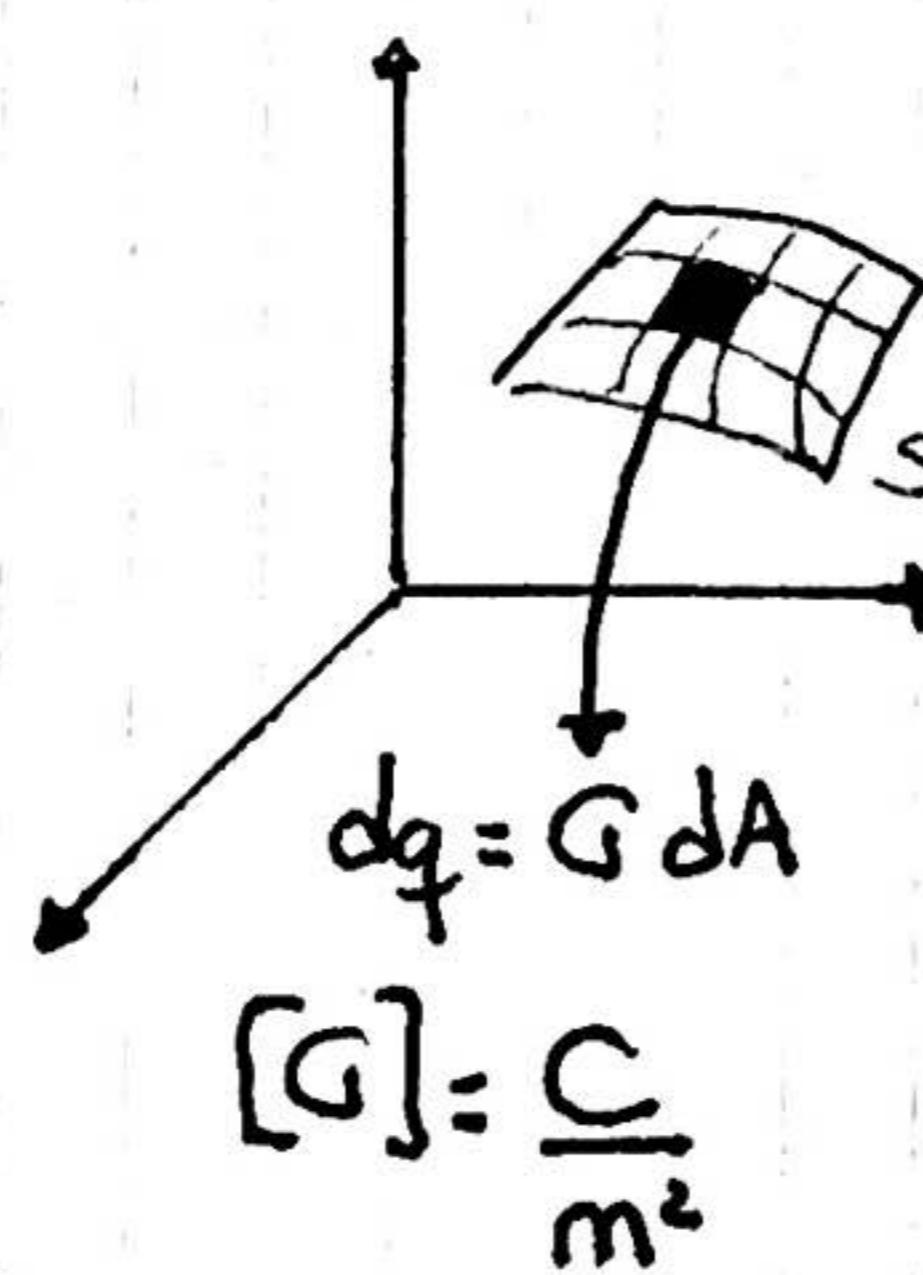
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{k e q d q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

Para una distribución continua de densidad de carga podemos especificar si el cuerpo es volumétrico, superficial o lineal para así pasar al cálculo diferencial



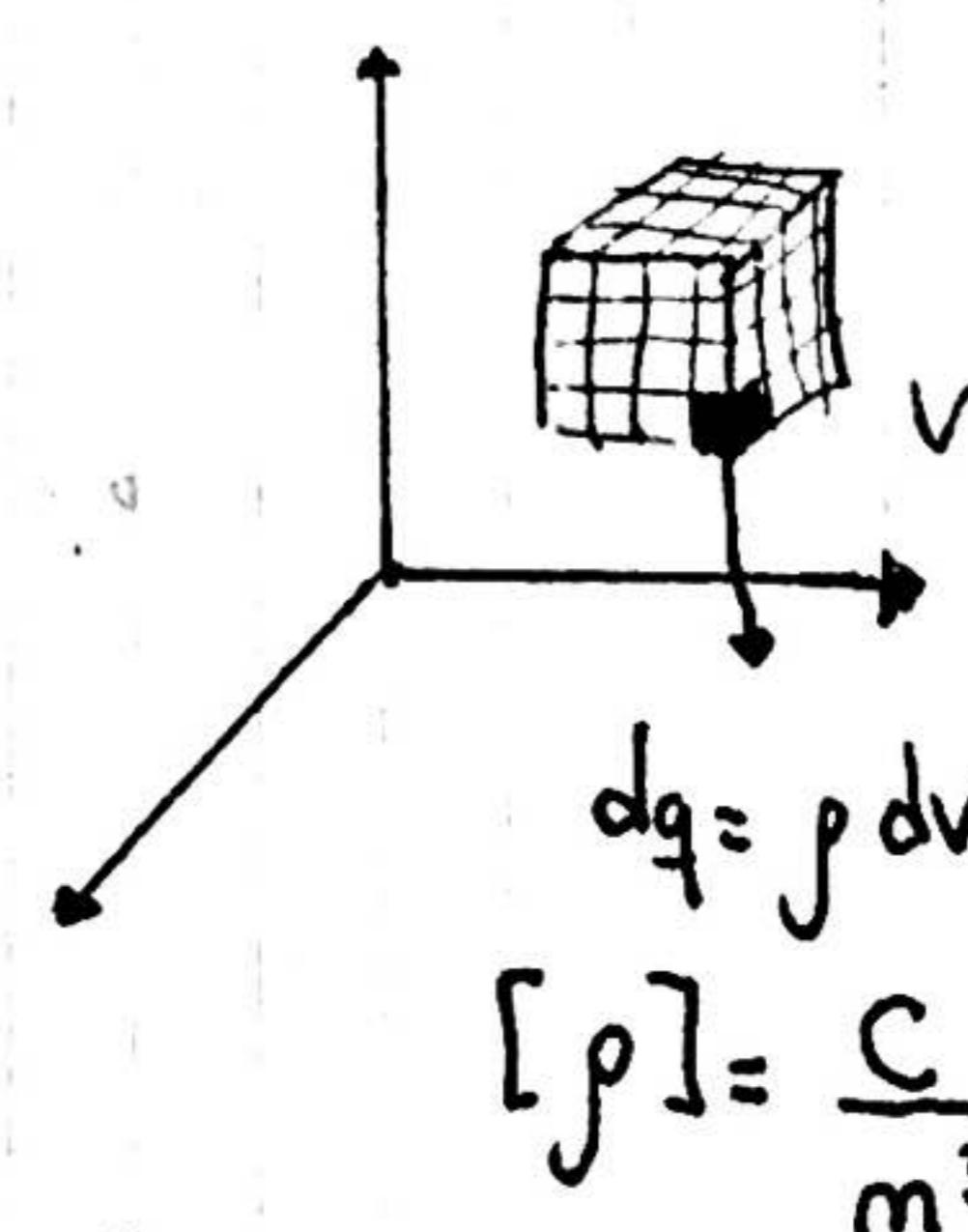
$$[\lambda] = \frac{C}{m}$$

Distribución curvilinea de carga (alambre)



$$[G] = \frac{C}{m^2}$$

Distribución superficial de carga (chapas)



$$[\rho] = \frac{C}{m^3}$$

Distribución en volumen de carga (cuerpos)

Pasando al límite diferencial  $\sum_{i=1}^N \rightarrow \int$  en variable continua.

$$\Rightarrow \vec{F} = \int k e q \left\{ \frac{dV_1 \rho(\vec{r}')}{dV_1' \rho(\vec{r}'')} \right\} \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{\|\vec{r} - \vec{r}''\|^3} dV'$$

Si ahora estamos interesados en la interacción entre dos cuerpos continuos, volvemos a dividir los cuerpos en diferenciales y usamos superposición y pasamos al límite integral. En los volúmenes tienen la fuerza  $\vec{F}_{12} = \iint_{V_2} \iint_{V_1} k e \frac{dV_1 \rho_1(\vec{r}_1)}{dq_1} \frac{dV_2 \rho_2(\vec{r}_2)}{dq_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}$

Sí por último nos interesa la fuerza que sienten dos cargas puntuales ( $q_a$  en  $\vec{r}_a$ ) y ( $q_b$  en  $\vec{r}_b$ ) pero tratados como distribución, vamos a utilizar la función "Delta de Dirac" que en  $\mathbb{R}^3$  podemos definir como

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \begin{cases} 0 & \text{sí } \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2 \text{ e } \infty \text{ si } \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \\ \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}^3 = 1 & \text{cuando } \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \text{ (o sea si } \vec{r} = \vec{r}_2 \text{ esta en la integral, vale 1)} \end{cases}$$

Tenemos así para las cargas puntuales entonces

$$\rho_a(\vec{r}_1) = q_a \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_a) \quad \rho_b(\vec{r}_2) = q_b \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_b) \quad \text{y usando la ecuación del caso anterior}$$

$$\vec{F}_{12} = \iint_{B_1 B_2} k_e q_a d\vec{r}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_a) q_b d\vec{r}_2 \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_b) \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}$$

$$\vec{F}_{12} = k_e q_a q_b \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} \quad \text{y recuperamos la ley de Coulomb}$$

### • Campo eléctrico

Sí tenemos una partícula  $q$  en  $\vec{r}$ , la fuerza que esta siente debido a otra  $q_1$  en  $\vec{r}_1$  o a un cuerpo cargado extenso viene dada por las siguientes expresiones respectivamente.

$$\vec{F} = \left[ k_e \frac{q q_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} \right] ; \quad \vec{E} = \left[ k_e \frac{q}{\text{Vol}} \int_{\text{Vol}} dV \rho(r') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] \quad \begin{matrix} \text{(dividiendo en diferenciales,} \\ \text{separación y límite室外)} \end{matrix}$$

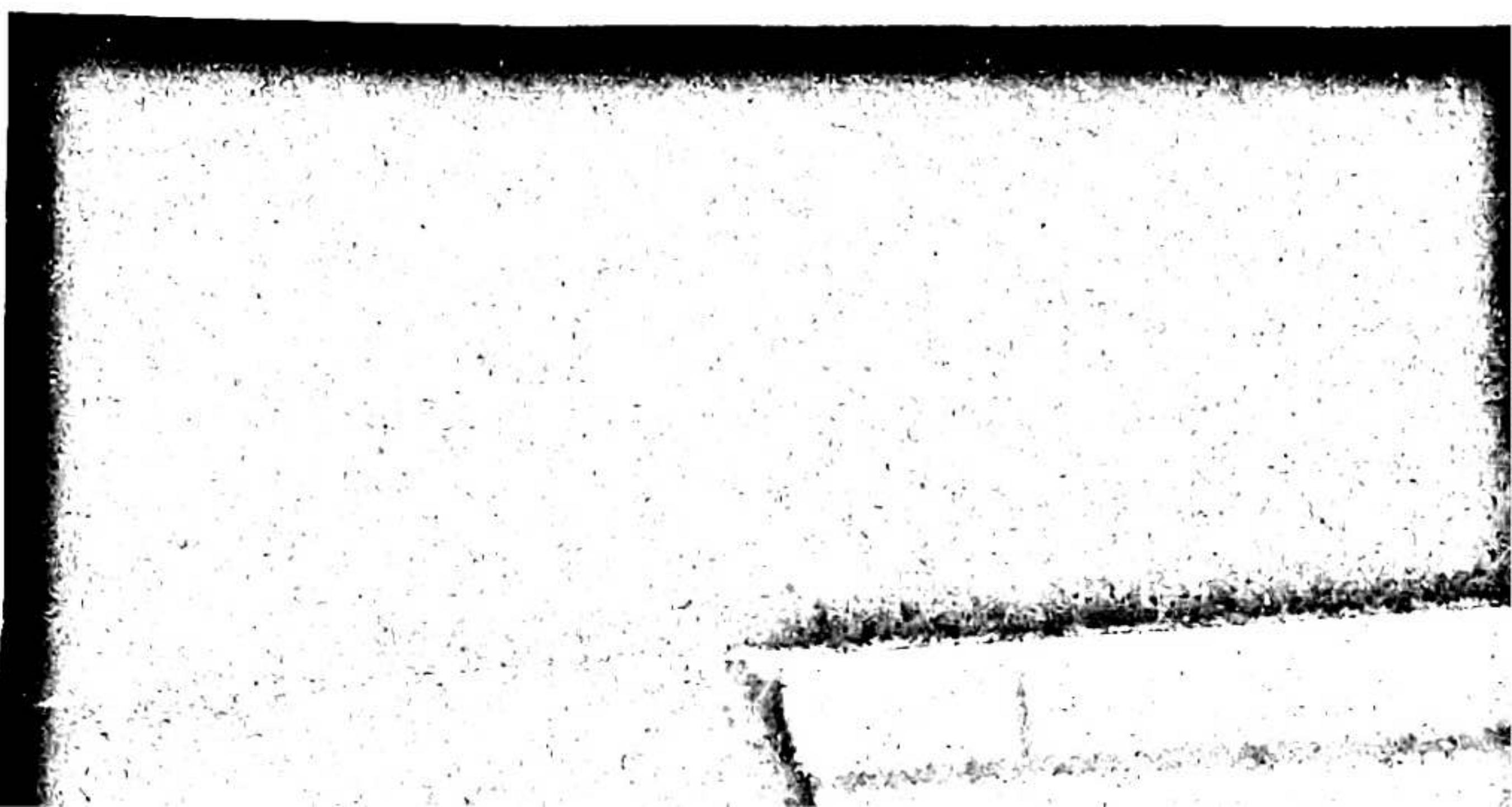
$$\text{Definimos así } \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{E}}{q} . \quad \vec{E} \text{ es una magnitud vectorial con } [E] = \frac{N}{C} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot C}$$

El límite de  $q \rightarrow 0$  conlleva un concepto físico importante. La carga debe ser lo suficiente pequeña para no distorsionar las distribuciones que ocasionan el campo  $\vec{E}$ . Además si lo definimos como  $\frac{\delta \vec{E}}{\delta q} = 0$ , no permite observar que llega a un valor constante solo dependiente de  $\vec{r}$  y de la fuente. Se sigue  $q$  = carga de prueba (por las razones previas)

### • Potencial eléctrico (electrostático)

$$\vec{E} = \int k_e d^3 r' \rho(r') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \cdot -\nabla \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int k_e d^3 r' \rho(r') (-1) \nabla \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$



$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \int k_e d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad \text{con} \quad \vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) = -\nabla \left( k_e \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

vale sacarlo afuera pues no está sobre la variable primada

$V(\vec{r})$  es el potencial eléctrico, es un escalar cuyas

unidades son  $[V] = \text{Voltios} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2 \text{C}}$ ; permitiéndonos así redifinir las unidades de  $\vec{E}$ .

$$[E] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$$

- Energía potencial eléctrica (electrostática)

Se puede obtener la energía potencial eléctrica de forma directa según

$$\vec{F} = q\vec{E} = -\nabla qV - \nabla U$$

$$U = qV \text{ es la energía potencial eléctrica}$$

$$[U] = \text{Joule} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Otra forma de definir el potencial eléctrico  $V = \frac{U}{q}$  (útil en circuitos) es: trabajo por unidad de carga.

- La fuerza eléctrica es conservativa (la es en electrostática)

Si  $\vec{E} = -\nabla V$ , entonces por teorema de campos conservativos,  $\text{rot}(\vec{E}) = 0$

(el rotor de una divergencia es nulo)  $\Rightarrow$  En electrostática, dada  $S$  abierta con  $\varphi = \partial S$

$$0 = \iint_S \text{rot}(\vec{E}) dS = \oint_{\varphi} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint_{\varphi} (q\vec{E}) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint_{\varphi} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Teo de Stokes

Como  $\oint_{\varphi} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ , implica que el trabajo a lo largo de una curva cerrada es nulo,

que es la definición básica de fuerza conservativa. En electrostática  $\text{rot}(\vec{E}) = 0$

- Ley de Gauss

Definimos  $d\phi_e = \vec{E} \cdot \hat{n} dS$  = diferencial de flujo eléctrico, entonces el flujo a través de una determinada superficie  $S$  será  $\phi_e = \iint_S d\phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} = \text{flujo eléctrico}$

Consideremos una partícula puntual con carga  $q_1$  en  $\vec{r}_1$ .  $\vec{E}_1 = \frac{k_e q_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3}$

$$\text{Además } \vec{E}_1 = -k_e q_1 \nabla \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|} \right)$$

$$; ) = \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$$

$$+ \pi \delta(\vec{r})$$

entre un volumen  $V$

$eV$  (osen  $q_1$  dentro de  $V$ )

$\pi V$  (osen  $q_1$  fuera de  $V$ )

$$\text{Por otro lado } \iiint_V d^3r \operatorname{div}(\vec{E}) = \iint_{S(V)} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S(V)} dS \vec{E} \cdot \hat{n} = \Phi_E$$

Teo de la div

$$\text{Luego } \iint_{S(V)} dS \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \text{ en nuestro caso } \begin{cases} \frac{q_i}{\epsilon_0} & \text{si } q_i \text{ dentro de } S \\ 0 & \text{si } q_i \text{ fuera de } S \end{cases}$$

Generalizando para cuerpos continuos, discretizamos en pequeños volúmenes con cargas

$$\delta q_i = d^3r \rho(r_i) \quad \text{Luego } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \delta q_i \delta(F - \vec{r}_i)$$

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \text{ dentro de } V} \delta q_i$$

Tomando el límite al continuo, pasamos de  
 $\sum_i \rightarrow \iiint_V$

y finalmente

$$\iint_{S(V)} dS \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3r' \rho(r') = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss en forma global  
 Util en casos de cuerpos con geometría sencilla

$$\text{Además } \iiint_V dV \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V d^3r' \rho(r')$$

$$\text{y esto vale } \forall \text{ volumen, } \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

y tenemos así la ley de Gauss en forma local

Y obtenemos así las ecuaciones fundamentales en electrostática

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} ; \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$$

Ecuación de la divergencia

Ecuación del rotor

### • Ecuaciones de Poisson y Laplace

Combinando la ecuación de la divergencia  $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$  y la de  $\operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$  que implica  $\vec{E} = -\operatorname{grad}(V)$  llegamos a la ecuación de Poisson

$$\nabla(-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \underbrace{\nabla^2 V}_{\text{Laplace}} = \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ecuación de Poisson}$$

Donde no hay carga presente  $\rho = 0$  y  $\nabla^2 V = 0$  Ecuación de Laplace.

Que deben resolverse con condiciones de contorno sobre una superficie cerrada y la solución es única.

• Información de  $V$  ( $V(r)$  conocido en todo punto de  $S$  cerrada): Condición de Dirichlet

• Información de  $\frac{\partial V}{\partial n}$  (Como vería  $V$  a lo largo de la  $S$  cerrada, esencialmente el campo eléctrico)  
 Condiciones de Neumann

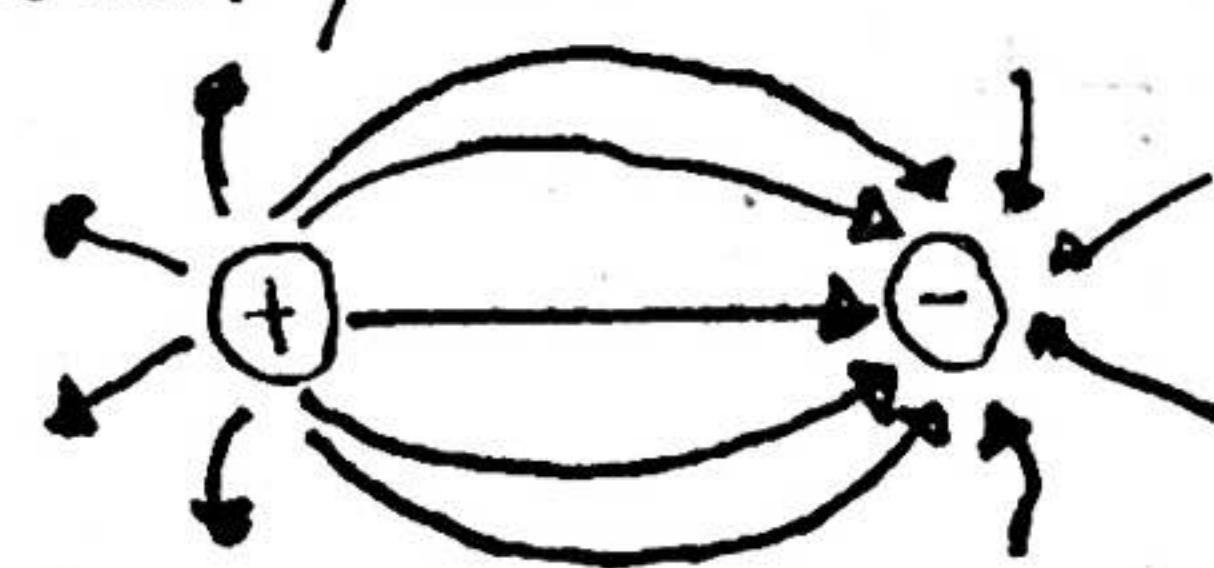
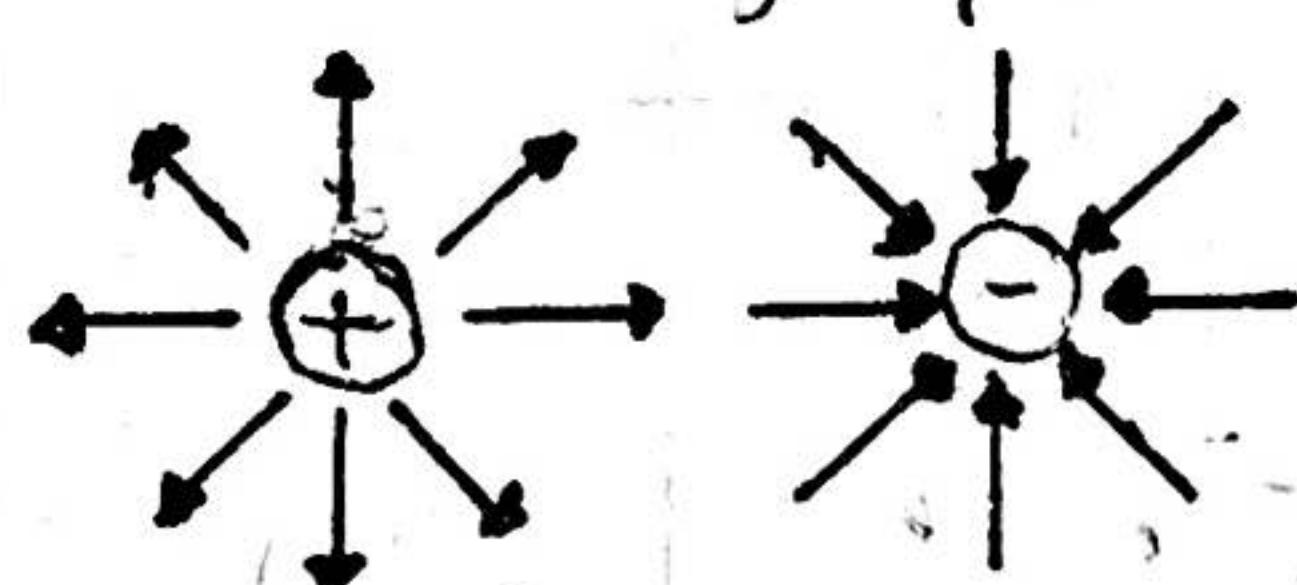
• Condiciones mixtas

## • Líneas de campo

Son curvas imaginarias que se dibujan de tal manera que su dirección en cualquier punto sea normal al campo eléctrico (coincidan en dirección)

- Las líneas de campo no se cruzan

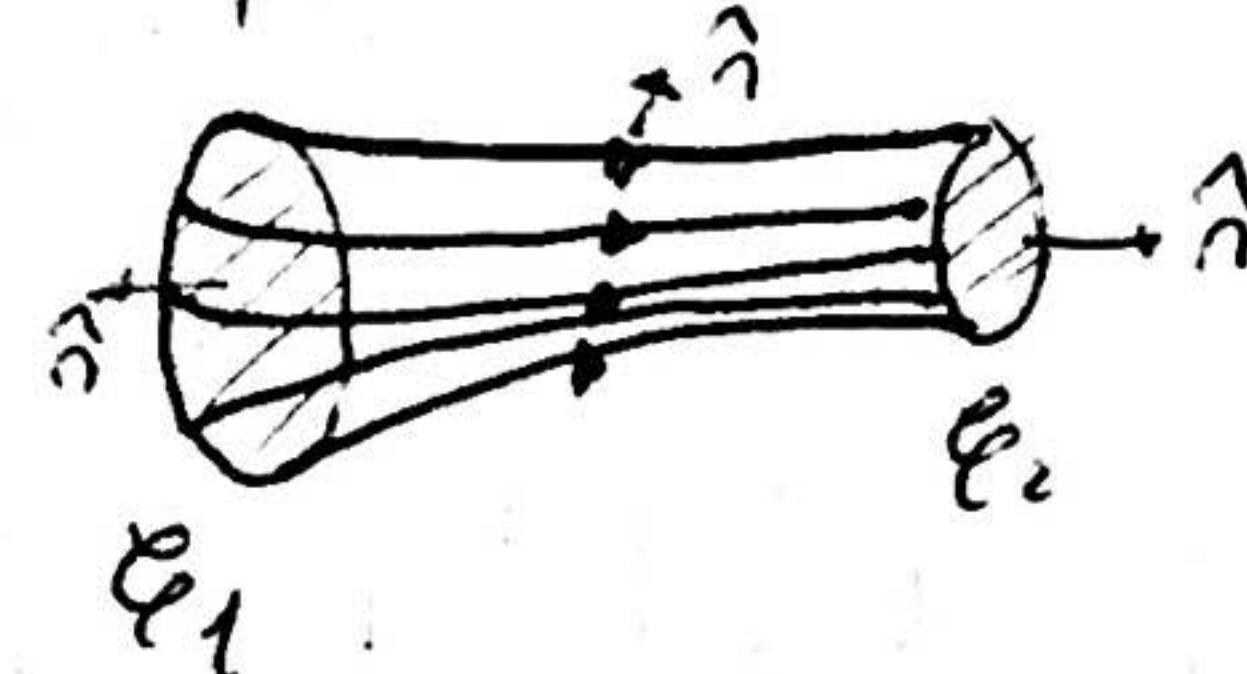
- Nacen en las cargas positivas (fuentes) y mueren en las negativas (sumideros)



(Campo eléctrico de un dipolo)

- El campo es más intenso donde se juntan las líneas de campo. Consideremos las líneas de campo que cortan dos  $\epsilon_1, \epsilon_2$  cerradas

Al aplicar la ley de Gauss y suponiendo no hay

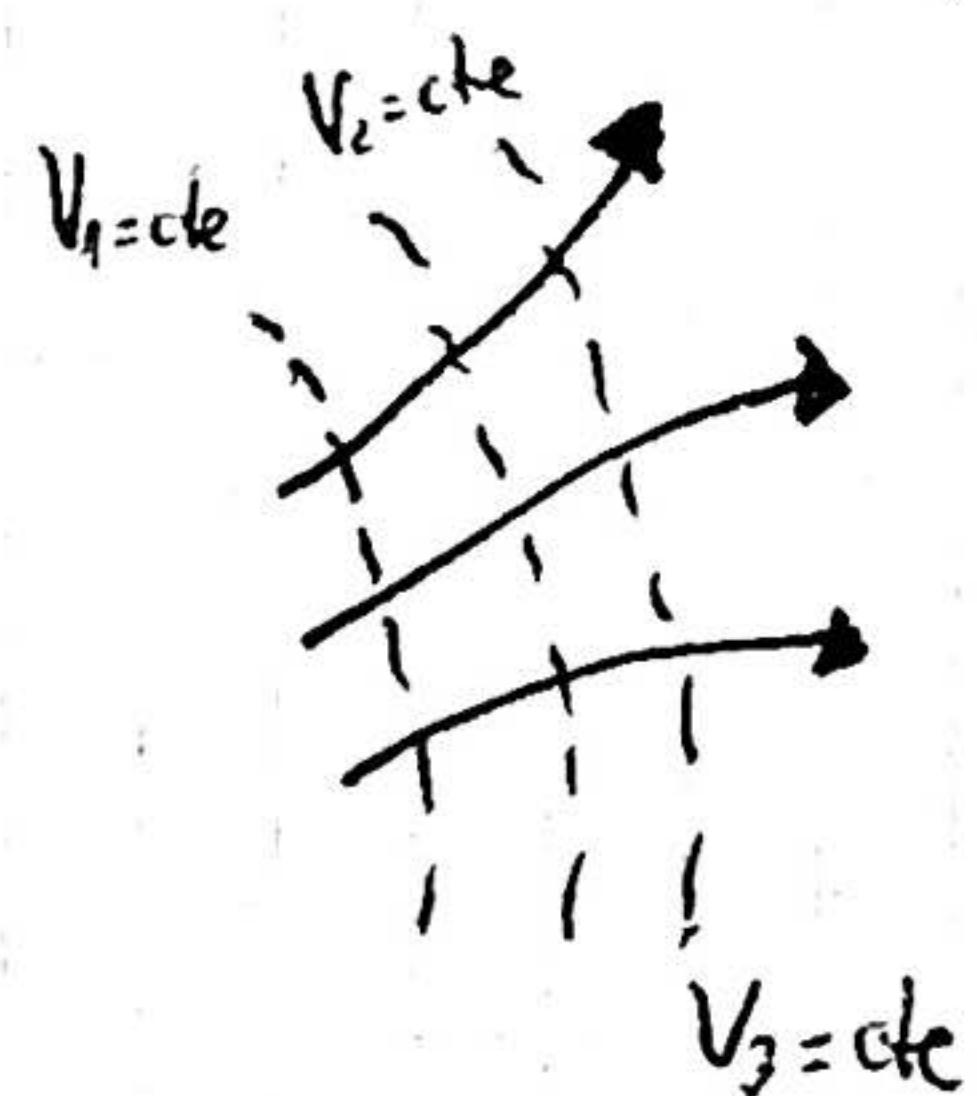


carga encerrada

$$\oint_S dS \bar{E} \cdot \hat{n} = \iint_{S_1} dS \bar{E}_1 \cdot \hat{n} + \iint_{S_2} dS \bar{E}_2 \cdot \hat{n} + \iint_{S_L} dS \bar{E} \cdot \hat{n}_{\perp} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{E}_1 \cdot \hat{S}_1 = \bar{E}_2 \cdot \hat{S}_2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{Luego si } S_1 > S_2 \quad \text{y al revés}$$

- Las líneas o superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.



La demostración es sencilla. Desarrollamos por Taylor en  $\vec{r} = \vec{r}_0$

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{\vec{r}_0} (x - x_0) + \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\vec{r}_0} (y - y_0) + \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{\vec{r}_0} (z - z_0) + \dots$$

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) + \underbrace{(\vec{F} - \vec{F}_0)}_{\delta \vec{r}} \cdot \nabla V = V(\vec{r}_0) + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\delta \vec{r}|} \bar{E} \cdot (-\hat{i})$$

Para que  $V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) = \text{cte}$  equipotencial  $\Rightarrow \delta \vec{r} \perp \bar{E}$

## Analogía con fluidos

fuentes y sumideros  $\Rightarrow$  canillas y rejillas

$E_2 > E_1 \Leftrightarrow S_1 > S_2 \Rightarrow$  velocidad de fluido mayor al extraer agua la manguera.

## • Expansión multipolar

Descripción del potencial eléctrico para una distribución de cargas, tan compleja como sea, a distancias muy grandes. En forma exacta  $V(\vec{r}) = \iiint_V k_e \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$

Si consideramos grandes distancias ( $\vec{r} \rightarrow \infty$ ) o más

específicamente a distancias muy grandes de las distancias características a nuestras (dimensiones del cuerpo).

-distribuciones de cargas  $|\bar{r}| \gg |\bar{r}'|$  podemos desarrollar como sigue

$$\text{(expansión elemental)} \quad \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \xrightarrow[\substack{\bar{r} \rightarrow \infty \\ (\bar{r} \gg |\bar{r}'|)}]{} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{r} \bar{r}'}{\bar{r}^3} + \frac{1}{2\bar{r}^3} \left[ \frac{3(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2}{\bar{r}^2} - \bar{r}'^2 \right] + O(\bar{r}^4)$$

Sigue de realizar un Taylor, que si bien no vale la pena su cálculo exacto (no aporta conocimiento), como idea de justificación

$$|\bar{r} - \bar{r}'| = [(\bar{r} - \bar{r}')(\bar{r} - \bar{r}')]^{\frac{1}{2}} = (\bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r}' + \bar{r}'^2)^{\frac{1}{2}} = \left[ 1 - \frac{2\bar{r}\bar{r}'}{\bar{r}^2} + \left( \frac{\bar{r}'}{\bar{r}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = \frac{1}{\bar{r}} \underbrace{\left[ 1 - \frac{2\bar{r}\bar{r}'}{\bar{r}^2} + \left( \frac{\bar{r}'}{\bar{r}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}_{\text{casi despreciable}} \approx (1 + \varepsilon)^\alpha \text{ con } \varepsilon = -\frac{2\bar{r}\bar{r}'}{\bar{r}^2}, \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (1 + \varepsilon)^\alpha$$

Luego  $V(\bar{r}) \xrightarrow[|\bar{r}| \gg |\bar{r}'|]{} \iiint_V k_e \rho(\bar{r}') \left[ \frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{r}\bar{r}'}{\bar{r}^3} + \frac{1}{2\bar{r}^3} [3(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 - \bar{r}'^2] \right] + \dots$

$$V(\bar{r}) \xrightarrow[|\bar{r}| \gg |\bar{r}'|]{} \frac{k_e q}{\bar{r}} + \frac{k_e \bar{p} \cdot \bar{r}}{\bar{r}^3} + k_e \bar{r} \times \bar{Q} \times \bar{r} + \dots$$

Que por supuesto como toda expansión cuenta de infinitos términos  $2^n$  potencias

$$q = \iiint_V \rho dV \equiv \text{momento monopolar (momento de orden 0) (representa la carga total del cuerpo)}$$

$$\bar{p} = \iiint_V \rho(\bar{r}') \bar{r}' dV \equiv \text{momento dipolar (como el CM de carga de la distribución)}$$

$$Q_{ij} = \iiint_V d^3 r' \rho(\bar{r}') [3x_i x_j - \bar{r}'^2 \delta_{ij}] \equiv \text{momento cuadrupolar}$$

sigue de  $3(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 - \bar{r}'^2 \bar{r}^2 = 3 \left( \sum_i x_i x'_i \right)^2 - \bar{r}'^2 \sum_i x_i'^2$

$$= \sum_{ij} 3(x_i x'_i x_j x'_j) - \bar{r}'^2 x_i x_j \delta_{ij} = \sum_{ij} x_i (3x_i x_j - \bar{r}'^2 \delta_{ij}) x_j$$

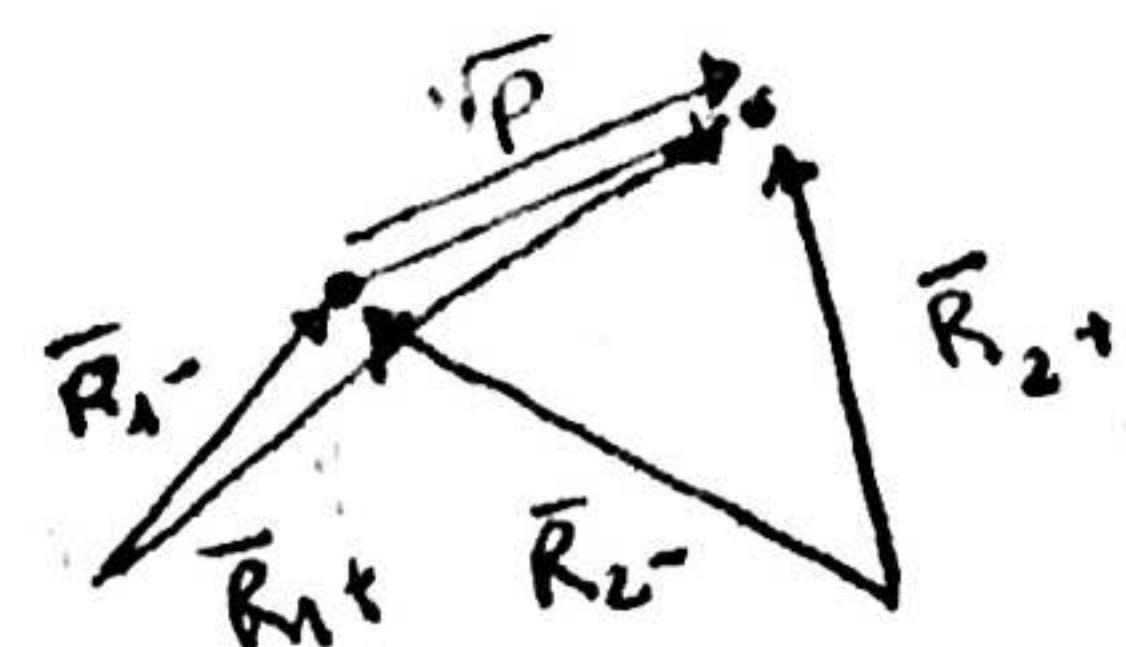
Cuando  $q=0$ ,  $\bar{p}$  no depende del origen de coordenadas, por ejemplo

$$\bar{p} = \iiint_V f(\bar{r}') d^3 r' \xrightarrow{\text{sí}} f(\bar{r}') = f_+ (\bar{r}') - f_- (\bar{r}'); \quad \bar{p} = \underbrace{\iiint_V f_+(\bar{r}') \bar{r}' d^3 r'}_{Q_+ \bar{R}_+} - \underbrace{\iiint_V f_-(\bar{r}') \bar{r}' d^3 r'}_{Q_- \bar{R}_-}$$

Tendremos así un  $\bar{p}$  proporcional a un CM positivo y negativo

$$\text{Si } q=0 \Rightarrow Q_+ = Q_-; \text{ Luego } \bar{p} = Q (\bar{R}_+ - \bar{R}_-)$$

que vectorialmente no depende de las coordenadas



En el caso discreto  $\bar{p} = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i q_i$  si cambia a otro sist.  $\bar{r}'' = \bar{r}' - \bar{a}$

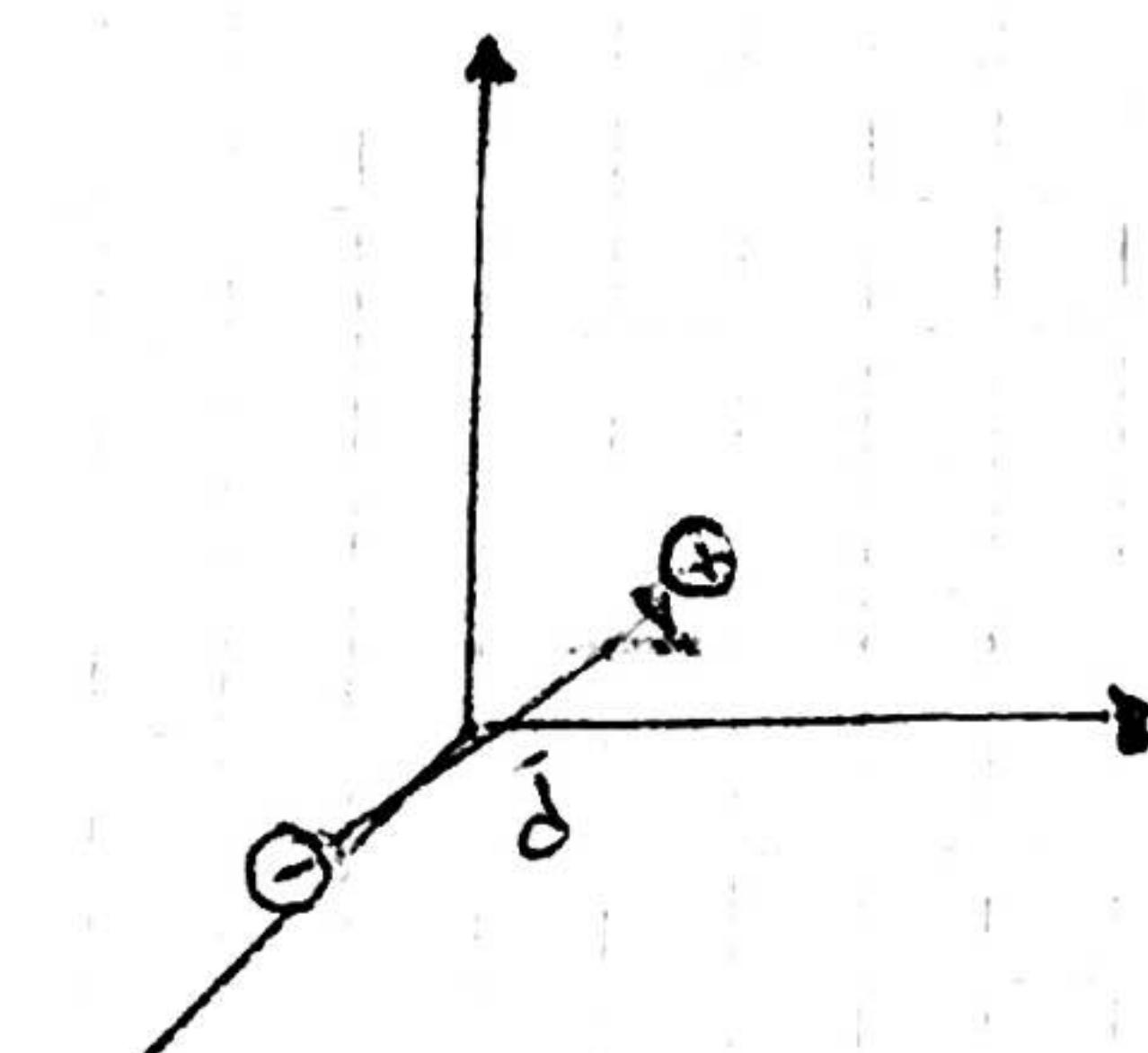
$$\Rightarrow \bar{p} = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i'' q_i + \sum_{i=1}^N a q_i$$

$$\underbrace{a q_i}_{\bar{a} Q_T = 0}$$

### • Dipolo

El caso más elemental de un dipolo elemental se ilustra como un par de cargas puntuales de igual magnitud  $q$  pero de signos opuestos separados una distancia  $\bar{d}$  finita.

Tenemos de esta forma  $p(\bar{r}) = q \delta(\bar{r} - \bar{d}/2) - q \delta(\bar{r} + \bar{d}/2)$



$$\bar{p} = \iiint d^3 r' [q \delta(\bar{r}' - \bar{d}/2) - q \delta(\bar{r}' + \bar{d}/2)] \bar{r}'$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\therefore \bar{p} = q \frac{\bar{d}}{2} - q \left( -\frac{\bar{d}}{2} \right) = q \bar{d} \quad (\bar{d} \text{ va de } \ominus \text{ a } \oplus)$$

$q = 0$ , trivial

$$\Rightarrow V(\bar{r}) = \frac{k_e \bar{p} \cdot \bar{r}}{r^3} \text{ para un dipolo, y como } \bar{E} = -\nabla V$$

$$\bar{E} = -\nabla \left( \frac{k_e \bar{p} \cdot \bar{r}}{r^3} \right) = -k_e \left[ \bar{p} \cdot \bar{r} \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \nabla (\bar{p} \cdot \bar{r}) \right] = (*)$$

$$(*) = -k_e \left[ \bar{p} \cdot \bar{r} \left( -\frac{3\bar{r}}{r^5} \right) + \frac{\bar{p}}{r^3} \right] = (**)$$

$$(**) = \frac{k_e}{r^3} \left[ 3(\hat{r} \cdot \bar{p}) \hat{r} - \bar{p} \right] \quad \bar{r} \cdot \bar{r} = r^2 \hat{r} \cdot \hat{r}$$

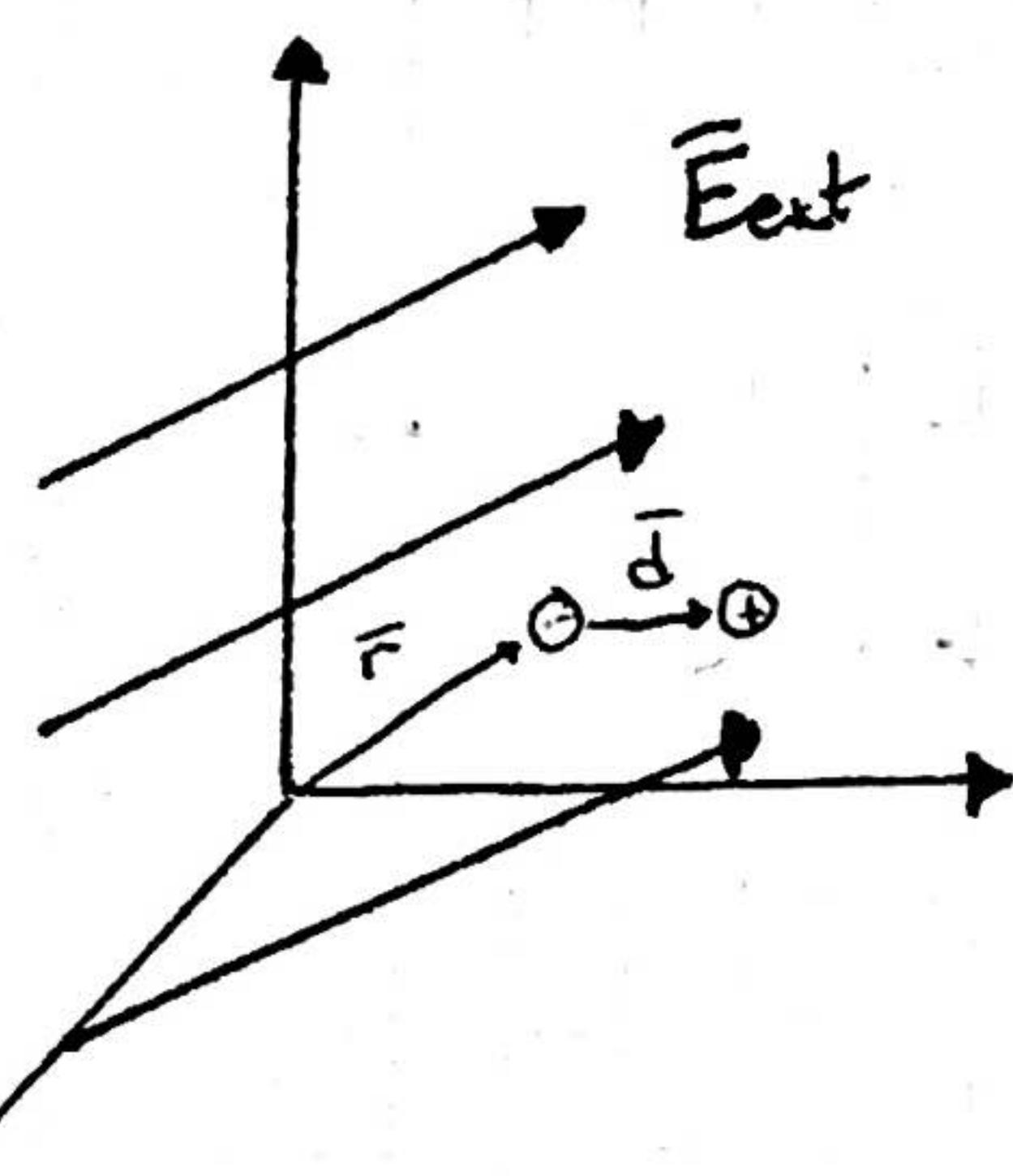
$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) &= \nabla \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \left( \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \left( -\frac{3}{2} \right), \dots, \dots \right) \\ &= -3 \frac{\bar{r}}{r^5} \end{aligned}$$

### Curiosidad

$$\bar{E} = -\bar{\phi} \times \bar{p} \quad \text{con} \quad \bar{\phi} = \frac{k_e}{r^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{r^2} \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

### • Dipolo en un campo eléctrico

El dipolo permanente debe considerarse aquí como un cuerpo rígido. En presencia de un campo eléctrico externo  $\bar{E}_{ext}$



Chernovretz Fuerza sobre un dipolo

$$F_i = q E_i(\bar{r} + \bar{d}) - q E_i(\bar{r}) \quad E_i(\bar{r} + \bar{d}) = E_i(\bar{r}) + \frac{\partial E_i}{\partial x} d_x + \frac{\partial E_i}{\partial y} d_y + \frac{\partial E_i}{\partial z} d_z + O(d^2)$$

$$\text{Luego } E_i(\bar{r} + \bar{d}) \approx E_i(\bar{r}) + \bar{d} \nabla E_i$$

$$\Rightarrow F_i \approx q E_i(\bar{r}) + q \frac{\bar{d}}{r^3} \nabla E_i - q E_i(\bar{r})$$

$$\Rightarrow \bar{F} = \bar{p} \cdot (\nabla \bar{E})$$



De esta forma resulta que si  $\bar{E} = \text{cte}$   $\Rightarrow \bar{F} = \bar{0}$ . Por otro lado, teniendo en cuenta que en electrotáctica  $\nabla \cdot \bar{E} = 0$  y en general  $\nabla \cdot \bar{p} = 0$

$$\nabla \cdot (\bar{p} \cdot \bar{E}) = \bar{p} \cdot \nabla \cdot \bar{E} + \bar{E} \cdot \nabla \cdot \bar{p} + \cancel{\bar{p} \times \nabla \times \bar{E}} + \cancel{\bar{E} \times \nabla \times \bar{p}} \Rightarrow \bar{p} \cdot \nabla \cdot \bar{E} = \nabla \cdot (\bar{p} \cdot \bar{E})$$

Luego si  $\bar{p} \perp \bar{E} \Rightarrow \bar{F} = \bar{0}$

Miraglia directamente dice que si  $\bar{E} = \text{cte}$  la resultante de fuerzas  $\bar{F}$  es nula por lo que su centro de masa permanece en reposo es decir  $\sum \bar{F} = q\bar{E} - q\bar{E} = \bar{0}$  CM en equilibrio

### Momento sobre un dipolo Chernomoretz

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^2 \bar{r}_i \times \bar{F}_i = (\bar{r} + \bar{d}) \times q\bar{E}(\bar{r} + \bar{d}) + \bar{r} \times -q\bar{E}(\bar{r})$$

Utilizando la aproximación de antes,  $\bar{\tau} = (\bar{r} + \bar{d}) \times q(\bar{E}(\bar{r}) + \bar{d} \nabla \cdot \bar{E}) - q\bar{r} \cancel{\bar{E}(\bar{r})}$   $\approx \bar{\tau} = \bar{r} \times (\bar{p} \nabla \cdot \bar{E}) + \bar{p} \times \bar{E} + \cancel{\bar{d} \times \bar{d} \nabla \bar{E} q}$   $\Rightarrow \bar{\tau} = \bar{r} \times \underbrace{(\bar{p} \nabla \cdot \bar{E})}_{\delta^2 \sim \text{despreciable}} + (\bar{p} \times \bar{E})$

donde el primer término representa el momento de  $\bar{F}$  respecto al origen elegido (centro de momentos) y varía al cambiar la posición de este. El segundo término no depende del CM elegido y tiende a alinear el dipolo con el campo exterior

Miraglia la hace corta,  $\bar{\tau} = \sum_{i=1}^2 \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \frac{\bar{d}}{2} \times q\bar{E} - \frac{\bar{d}}{2} \times -q\bar{E} = \bar{d} \times q\bar{E} = \bar{p} \times \bar{E}$

Esto implica que un dipolo oscila en presencia de un campo eléctrico como un péndulo intercambiando energía cinética y potencial.

Supongamos un dipolo originalmente alineado al campo  $\bar{E}$  ( $\bar{\tau} = \bar{0}$ ). Entonces para moverlo un ángulo  $\varphi$  debemos realizar un trabajo externo  $W_{ext}$  en contra del trabajo del campo  $\bar{E}$  en forma cuasistacionaria con  $\bar{\tau}_{ext} = -\bar{p} \times \bar{E}$

$$W_{ext} = - \int_{\bar{E}(\varphi=0)}^{\bar{E}(\varphi)} \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_0^\varphi d\varphi \cdot \bar{\tau}_{ext} = - \hat{\bar{r}} \cdot \hat{\bar{p}} \int_0^\varphi d\varphi p E \sin(\varphi) = p E(0)(\varphi) - p E(0)(0)$$

$$= \bar{p}(\varphi) \bar{E} - \bar{p}(0) \bar{E} = U(0) - U(\varphi) = -W_{\text{campo}} \quad U(\varphi) = -\bar{p} \cdot \bar{E} \quad \text{Energía potencial}$$

Notar que si  $\bar{E}$  es constante y homogéneo entonces el dipolo no se desplaza

La energía potencial del dipolo es  $U = -\bar{p} \cdot \bar{E}$  por lo que:

$$\bar{F} = -\nabla U = +\nabla(\bar{p} \cdot \bar{E}) = \bar{p} \cdot \nabla \bar{E} + \bar{E} \nabla \bar{p} + \bar{p} \times \nabla \times \bar{E} + \bar{E} \times \nabla \times \bar{p} = (\bar{p} \cdot \nabla) \bar{E}$$

en electrotáctica

Y así lo demuestra Miraglia  $\bar{F} = (\bar{p} \cdot \nabla) \bar{E} = \left( p_x \frac{\partial}{\partial x}, p_y \frac{\partial}{\partial y}, p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x, E_y, E_z)$

## Energía potencial de interacción (Trelles)

$$U = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{d}) \quad \text{según con la aproximación } V(\vec{r} + \vec{d}) \approx V(\vec{r}) + \vec{d} \cdot \nabla V$$

despreciando el resto de los términos de Taylor de orden cuadrado y superior.

$$U = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r}) + \vec{p} \cdot \nabla V = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (\text{no incluye la energía propia electrostática de la configuración de } q \text{ y } -q)$$

Interésante: Podemos usar  $U$  para analizar los equilibrios. Si  $\theta$  denota el ángulo entre  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$  tenemos  $U = -pE \cos(\theta) \quad \theta \in [-\pi, \pi]$



máximo en  $\theta = \pi$  (antiparalelos, eq inestable)  $\vec{p} \parallel (-\vec{E})$

mínimo en  $\theta = 0$  (paralelos, eq estable)  $\vec{p} \parallel \vec{E}$

### • Interacción carga-dipolo

Consideremos una carga puntual  $q$  situada en el origen que genera un campo eléctrico  $\vec{E} = \frac{k_e q \vec{r}}{r^3}$

y coloquemos en dicho campo un dipolo  $\vec{p}$  permanente en la posición  $\vec{r}$ .

$$\vec{F}_{\text{sobre dipolo}} = -\nabla U = \vec{p} \cdot \nabla \left( \frac{k_e q \vec{r}}{r^3} \right) = k_e q \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \right)$$

Veamos cuál es la componente de  $\vec{F}$  en la dirección radial,

para ello multiplicaremos ambos términos por  $\hat{r}$

$$\vec{F} \cdot \hat{r} = k_e q \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \right) \hat{r} = -2k_e q \left( \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^3} \right)$$

Lo que ocurre es que según la orientación del dipolo, la fuerza será hacia un lado o hacia el otro. Entonces vale:

- Si  $q > 0$  y  $\vec{p} \cdot \hat{r} > 0$ , entonces  $\vec{F} \cdot \hat{r} < 0$  y el dipolo es atruido
- Si  $q < 0$  y  $\vec{p} \cdot \hat{r} > 0$ , entonces  $\vec{F} \cdot \hat{r} > 0$  y el dipolo es repelido

### • Interacción dipolo-dipolo

Consideremos el campo eléctrico  $\vec{E}_1$  generado por un dipolo  $\vec{p}_1$  en el origen

$$\vec{E}_1 = \frac{k_e}{r^3} (3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}_1). \quad \text{Si colocamos en la configuración un segundo dipolo } \vec{p}_2 \text{ la energía de interacción será así: } U_{21} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\vec{p}_2 \cdot \frac{k_e}{r^3} (3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}_1) = (*)$$

$$(*) = \frac{k_e}{r^3} [\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})]$$

$$\boxed{\text{o matricialmente } \vec{p}_2 \cdot \vec{\phi} \times \vec{p}_1}$$

Notemos que  $U_{21}$  es igual a  $U_{12}$  (sería tener  $\vec{p}_2$  y luego traer cuasiestáticamente  $\vec{p}_1$ )

$U_{12} = U_{21} = U$ . Esto es esperado físicamente ya que la energía total no depende de como se arme la configuración. Utilizando  $\vec{F}_{21} = -\nabla U_{21}$  podemos calcular la fuerza de dipolo

interacción. Haciendo cuentas se llega a que:

$$\bar{F}_{21} = \frac{k_e}{r^4} [3(\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2) \hat{r} - 15(\bar{p}_1 \cdot \hat{r})(\bar{p}_2 \cdot \hat{r}) \hat{r} + 3(\bar{p}_2 \cdot \hat{r}) \bar{p}_1 + 3(\bar{p}_1 \cdot \hat{r}) \bar{p}_2]$$

Cuentas:  $-\nabla \left( \frac{k_e}{r^3} [(\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2) - 3(\bar{p}_1 \cdot \hat{r})(\bar{p}_2 \cdot \hat{r})] \right) = -k_e \nabla \left( \frac{\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2}{r^3} - \frac{3(\bar{p}_1 \cdot \hat{r})(\bar{p}_2 \cdot \hat{r})}{r^5} \right) = (x)$

$\bar{p}_1$  y  $\bar{p}_2$  ctes, y usamos que  $\nabla \hat{r} = 1$  y  $\nabla \cdot \left( \frac{1}{r^n} \right) = -\frac{n}{r^{n+2}}$  con  $n$  impar.

$$\Rightarrow (x) = -k_e \left[ -3 \frac{\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 \hat{r}}{r^5} - 3 \cdot (-5) \frac{(\bar{p}_1 \cdot \hat{r})(\bar{p}_2 \cdot \hat{r}) \hat{r}}{r^7} - 3 \frac{(\bar{p}_1 \cdot \hat{r})(\bar{p}_2 \cdot \hat{r})}{r^3} - 3 \frac{(\bar{p}_1 \cdot \hat{r}) (\bar{p}_2 \cdot \hat{r})}{r^3} \right]$$

$$= \frac{k_e}{r^4} [3(\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2) \hat{r} - 15(\bar{p}_1 \cdot \hat{r})(\bar{p}_2 \cdot \hat{r}) \hat{r} + 3(\bar{p}_1 \cdot \hat{r}) \bar{p}_2 + 3\bar{p}_1 \cdot (\bar{p}_2 \cdot \hat{r})]$$

Como se esperaba (Ni mati ni yo jaja) la interacción es del orden  $\frac{1}{r^4}$  y es muy débil

Pero se la debe tener en cuenta.

Cuatro casos particulares:

- (1)  $\bar{p}_1 = \hat{r}$ ,  $\bar{p}_2 = \hat{r} \Rightarrow$  se atraen

$$\bar{F}_{21} = -6k_e (\bar{p}_1 \bar{p}_2) \hat{r} / r^4$$

- (2)  $\bar{p}_1 = \hat{r}$ ,  $\bar{p}_2 = -\hat{r} \Rightarrow$  se repelen

$$\bar{F}_{21} = 6k_e (\bar{p}_1 \bar{p}_2) \hat{r} / r^4$$

- (3)  $\bar{p}_1 = \hat{p}_2$  y  $\hat{p}_1 \cdot \hat{r} = \hat{p}_2 \cdot \hat{r} = 0 \Rightarrow$  se repelen

$$\bar{F}_{21} = 3k_e (\bar{p}_1 \bar{p}_2) \hat{r} / r^4$$

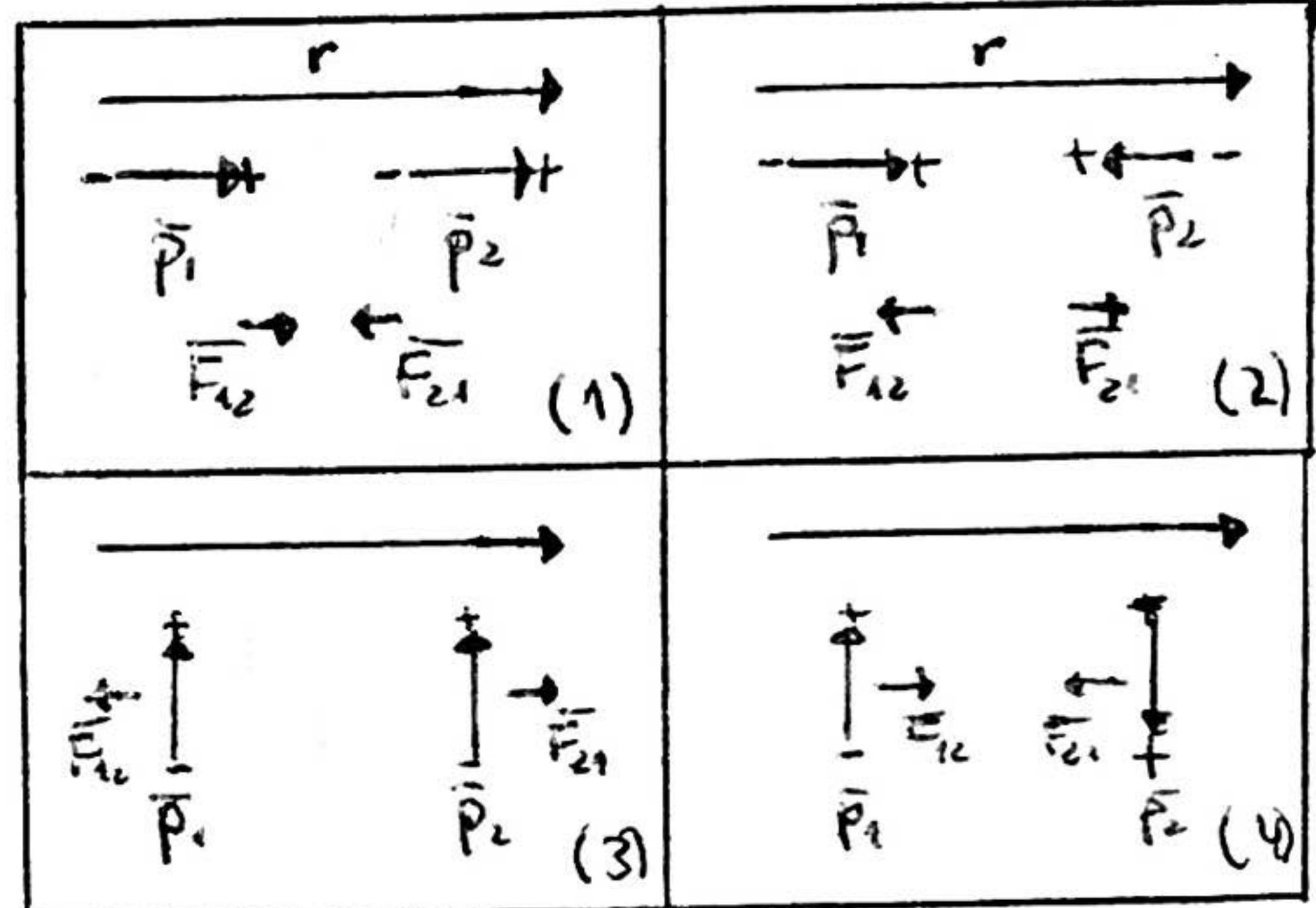
- (4)  $\bar{p}_1 = -\hat{p}_2$  y  $\hat{p}_1 \cdot \hat{r} = \hat{p}_2 \cdot \hat{r} = 0 \Rightarrow$  se atraen

$$\bar{F}_{21} = -3k_e (\bar{p}_1 \bar{p}_2) \hat{r} / r^4$$

- Dipolo inducido

Hasta ahora tratamos dipolos permanentes (como NaCl, H<sub>2</sub>O). Pero también una molécula o átomo neutro (sin momento dipolar permanente) en presencia de un campo eléctrico puede distorsionarse (redistribuir su carga) de forma que se induce un momento dipolar. A estos se los llama dipolos inducidos (el cálculo de este a nivel atómico se obtiene en cuántica)

Podemos hacer un modelo unidimensional sencillo para entenderlo. Supongamos un electrón de carga negativa -e ligado a su núcleo positivo con un resorte de la elasticidad. Lo consideramos en equilibrio (oscilando alrededor de esta posición)



En presencia de un  $\bar{E}$  externo el electrón sufre una  $\bar{F} = +q\bar{E} = -e\bar{E}$  que sale de planteur  $\bar{F}_{elect} = \bar{F}_{resort}$ . Luego  $\bar{d} = -\frac{e\bar{E}}{k}$  donde  $\bar{d}$  es la distancia que se modifica de la posición de equilibrio. Luego obtenemos nuestro dipolo como  $\bar{p} = q\bar{d}$

$$\Rightarrow \bar{p} = -e \cdot \left( -\frac{e}{k} \right) \bar{E} = \frac{e^2}{k} \bar{E} = \alpha \bar{E} \quad \alpha = \frac{e^2}{k} \text{ polarizabilidad (importante en Química)}$$

$$\bar{p} = \bar{\mu} = \alpha \bar{E} . \text{ Se dice que es inducido pues si } \bar{E} = 0 \Rightarrow \bar{\mu} = 0.$$

$$\text{La energía potencial será entonces } U = -\bar{\mu} \bar{E} = -\alpha \bar{E} \bar{E} = -\alpha E^2$$

Si ahora considero que el campo  $\bar{E} \leftrightarrow$  el de una carga puntual  $q$  a una distancia  $\bar{r}$  (campo fijo, no se mueve)  $\Rightarrow U = -\alpha \left[ \frac{k_e q}{r^2} \right]^2 = -\frac{\alpha k_e^2 q^2}{r^4}$

Si usamos en vez de una carga puntual un dipolo, cuádrupolo, etc. ocurre que la fuerza va disminuyendo. Si ahora el  $\bar{E}$  es creado por un dipolo permanente  $\bar{p}$  en  $\bar{r}$  entonces resulta

$$U = -\bar{\mu} \bar{E} = -\alpha \left( \frac{k_e}{r^3} [3(\bar{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \bar{p}] \right)^2 \propto -\frac{1}{r^6}$$

$$\text{Supongamos ahora que una partícula } q \text{ genera un campo } \bar{E}_q \text{ en el origen. } \bar{E}_q = \frac{k_e q}{r^3} \hat{r}$$

Allí colocamos un átomo que en presencia de ese campo se polariza generando un dipolo

$\bar{\mu} = \alpha \bar{E}_q$ . Este dipolo a su vez genera ahora un campo  $\bar{E}_p$  en la posición de la partícula  $q$ , que sufre una fuerza  $\bar{F} = q \bar{E}_p$

$$\bar{F} = q \bar{E}_p = -q \frac{k_e}{r^3} [3(\bar{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \bar{\mu}] \text{ con } \bar{\mu} = \alpha \left( -\frac{k_e q}{r^3} \hat{r} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{F} = -2q^2 k_e^2 \alpha \frac{\hat{r}}{r^6} = -\nabla U, \text{ luego } U = -\frac{\alpha q^2 k_e^2}{2 r^4} = \frac{1}{2} U_{\text{antes}}$$

Esto sucede porque la partícula  $q$  en este caso no es externa al sistema. Aquí si movemos la carga  $q$  alteramos el dipolo y este su campo (autoconsistencia o autoenergía)

Otro caso interesante es cuando dos átomos neutros se inducen como dipolos entre sí

La energía de interacción se comporta como  $\lim_{r \rightarrow \infty} U = -C_6 / r^6$  (límite de Lennard-Jones) generalización del pot. V d.W

$$U_{LJ} = U_{12,6} = \frac{6}{12-6} U_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \frac{12}{6} \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \text{ Lennard Jones con } U(r_0) = U_0 (-1)$$

Sale todo con expansión multipolar así que no hay mucho sentido en aplicarlo a psg dist.

- Potenciales a grandes distancias . Resumen - Tabla

Resumimos las interacciones entre cargas puntuales ( $\bullet$ ), dípolos permanentes ( $\square$ ), cuadrupolos ( $\square\square$ ) y dípolos inducidos ( $\text{moj}$ ). se resumen a continuación.

$q \bullet$	interactuando con $\bullet q'$	$U \propto \frac{1}{r}$
$q \bullet$	" $\uparrow \bar{p}$	$U \propto \frac{1}{r^2}$
$q \bullet$	" $\square Q$	$U \propto \frac{1}{r^3}$
$q \bullet$	" $\text{moj} \bar{\mu}$	$U \propto \frac{1}{r^4}$
$\bar{p} \uparrow$	" $\uparrow \bar{p}'$	$U \propto \frac{1}{r^3}$
$\bar{p} \uparrow$	" $\square Q$	$U \propto \frac{1}{r^4}$
$\bar{p} \uparrow$	" $\text{moj}$	$U \propto \frac{1}{r^6}$
$Q \square$	" $\square Q'$	$U \propto \frac{1}{r^5}$
$\text{moj}$	" $\text{moj}'$	$U \propto \frac{1}{r^6}$

Con esto se puede interpretar gran parte de la química (ligaduras - mecanismos de reacción) La Fisicoquímica (entalpia), Termodinámica etc.

- Energía electrostática

Energía requerida (trabajo) para construir una configuración de cargas.

- Sistema de cargas puntuales

Consideramos la energía necesaria para construir una configuración de cargas puntuales  $q_i$  en  $r_i$ . La vemos trayendo cuádruplicamente desde el infinito, considerando que  $V(\infty)=0$ .

La primera partícula no requiere trabajo. La segunda, en presencia de la primera tiene así un  $U_2 = q_2 V_{21}$  donde  $V_{21}$  es el potencial creado por la partícula uno en la posición dos.

En general  $V_{ji} = \frac{k_e q_i}{|r_j - r_i|}$ . Luego al traer la número tres  $U_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$  y así.

$$\text{De esta forma } U = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i \neq j} V_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j V_{ji}$$

$$\text{Usando el hecho de que } q_j V_{ji} = q_i V_{ij} \text{ obtenemos } U = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{i \neq j} q_j \frac{k_e}{|r_i - r_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{i \neq j} q_i p_{ij} q_j$$

que podemos colocar en forma vectormatricial, definiendo un vector  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$  y

$$\text{una matriz } \bar{p} \text{ con } p_{ij} = \frac{k_e}{|r_i - r_j|}, p_{ii} = 0 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \bar{q} \times \bar{p} \times \bar{q} \text{ y } V = \bar{p} \times \bar{q}$$

## • Distribución continua

Para una distribución continua, dividimos el volumen dado en pequeños volúmenes de carga  $dq = d^3r \rho(\vec{r})$  e integrar.  $U = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) V(\vec{r})$

Podemos reescribir

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{k_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') k_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Expresión muy utilizada en Química cuántica.

Otra expresión útil nos sale de reemplazar  $\nabla \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , de esta forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \epsilon_0 \nabla \bar{E} V \quad \text{y utilizando que } \nabla(\bar{E}V) = V \nabla \bar{E} + \bar{E} \nabla V$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \nabla(\bar{E}V) - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \bar{E} \cdot \nabla V = \frac{\epsilon_0}{2} \iint_{S(\mathbb{R}^3)} d\vec{s} \cdot (\bar{E}V) + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r E^2$$

+ que se corre en  
el infinito  
y usando teo de la div

$$\text{En el peor de los casos (carga coulombiana)} \quad \iint_{S(\mathbb{R}^3)} d\vec{s} \cdot (\bar{E}V) \sim SEV \rightarrow r^2 \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

No apuntando contribución, de esta forma

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r E^2$$

Finalmente

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') k_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) V(\vec{r})$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r E^2$$

## • Autoenergía

Notemos que si queremos calcular la energía para construir partículas puntuales utilizando las expresiones para cuerpos continuos, el cálculo diverge. Veamos por ejemplo si queremos construir una partícula puntual. Luego  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$  y resulta (en el origen está)

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} q\delta(\vec{r}) V(\vec{r}) = \frac{q}{2} V(0) = \infty \quad \text{Para salir del problema hay que escapar de la}$$

función  $\delta(\vec{r})$  y darle a la carga cierta dimensión. Digamos una esfera cargada uniformemente de radio  $R$ . De esta forma

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\frac{4\pi R^2}{3}} \Theta(R-r) \text{ con lo cual } V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} & r > R \\ \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} & r < R \end{cases}$$

y  $\int_{R^3} \rho(\vec{r}) d^3r = q$

Obtenemos así  $U = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$  y vemos efectivamente que si  $R \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow \infty$

Si igualamos  $U$  con la famosa expresión encontrada en la teoría de la relatividad

$U = E = mc^2$  vemos que  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = mc^2$  (despreciando el factor  $\frac{3}{5}$  que viene de la forma)

#### ENERGÍA DE LA PARTÍCULA EN REPOSO

Con lo que resulta así el llamado radio clásico de una partícula  $R = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$

Para el caso del electrón  $R_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 me c^2} = 2.8179 \times 10^{-15} \text{ m. } R_e \equiv \text{Radio de Thompson}$

aparece en muchos procesos de materia - radiación

#### • Materiales eléctricos

Se verán dos tipos de materiales: conductores & dieléctricos

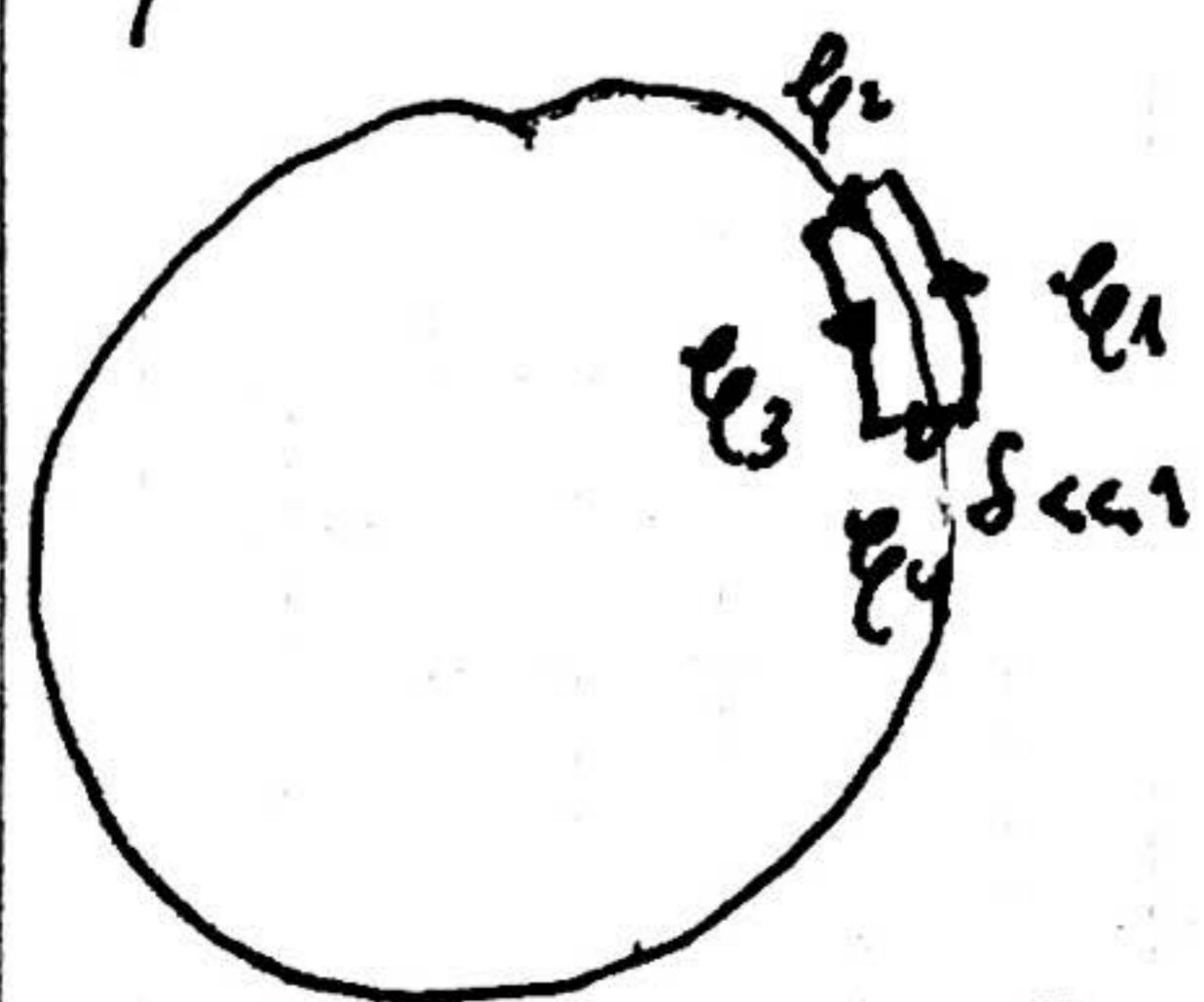
#### • Conductores ideales

Es una idealización de los metales. Estos se caracterizan por tener electrones libres que son apartados por las capas exteriores de los átomos. Estos reaccionan en presencia de campos eléctricos para neutralizarlo en su interior. Estos son delimitados por la geometría y la composición del material. Se mueven con velocidades muy altas y el tiempo de neutralización del campo eléctrico es muy bajo (por lo menos orden de nanosegundo).

Nosotros trabajamos con ellos en el equilibrio final. Tenemos así que dentro del conductor

$E=0$  físicos ;  $V=\text{cte}$  ingenieros

• El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es en dirección normal a la superficie y nulo en la dirección paralela



Si tomamos una  $\oint = \oint_1 U \oint_2 U \oint_3 U \oint_4$  cerrada como en la figura

la ley de Gauss en electrostática nos dice que  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

y utilizando además que el campo eléctrico dentro  $E$  del conductor es nulo y la  $\oint_2, \oint_4$  tienen & infinitesimal nos queda  $\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = 0$

A continuación la cuenta matemática

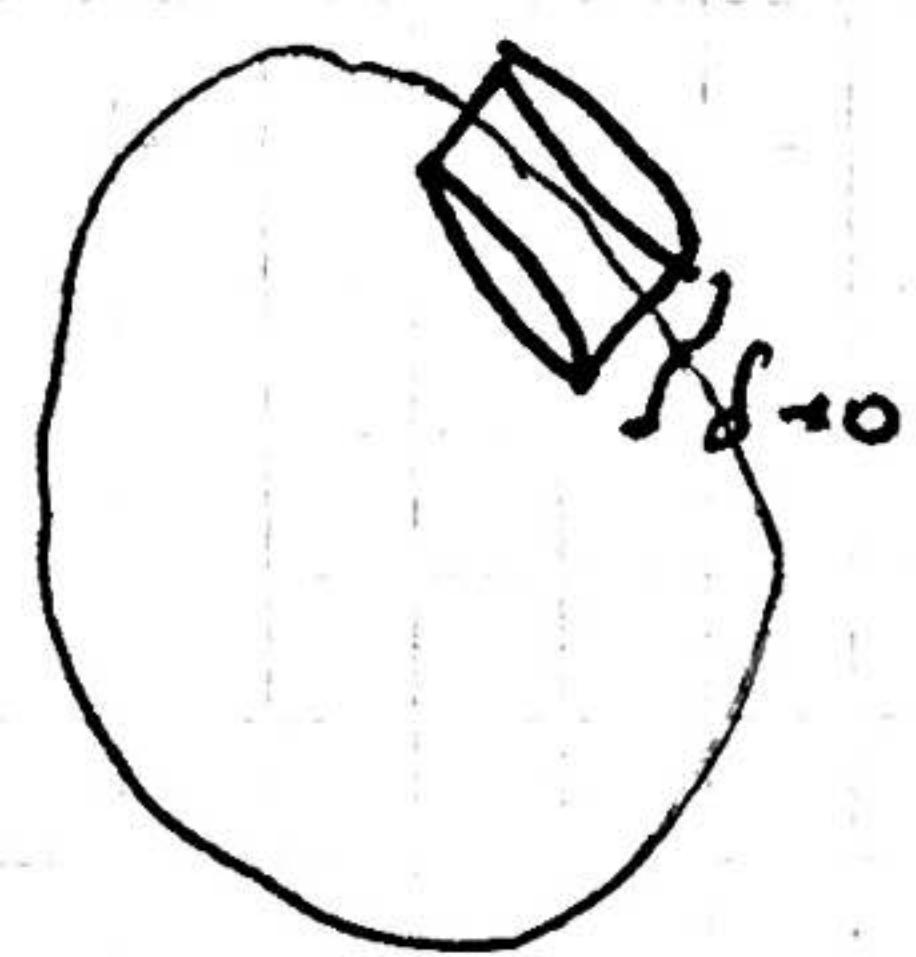
$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{\text{afuera}} \bar{E}_{\text{afuera}} \cdot d\bar{l} + \int_{\text{dentro}} \bar{E} \cdot d\bar{l} + \int_{\text{dentro}} \bar{E} \cdot d\bar{l} + \int_{\text{dentro}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

$$\frac{E_1}{\epsilon_1} \quad \frac{E_2}{\epsilon_2} \quad \frac{E_3}{\epsilon_3} \quad \frac{E_4}{\epsilon_4}$$

despreciable  $\delta \rightarrow 0$   $\delta \rightarrow 0$  despreciable

$$\Rightarrow \bar{E}_{\text{afuera}} \cdot d\bar{l} = E_1 = 0.$$

Si ahora tomamos una superficie cerrada como en la figura utilizando la ley de Gauss



$$\iint_S \bar{E} \cdot \hat{n} = q_{\text{enc}} \quad \text{y haciendo uso de que } \bar{E} = 0 \text{ dentro del conductor y definiendo la } q_{\text{enc}} \text{ como una } G \text{ tenemos}$$

$$\bar{E} \cdot \hat{n} = E_L = \frac{q}{\epsilon_0}$$

A continuación la cuenta matemática

$$\iint_S \bar{E} \cdot \hat{n} = \iint_S \frac{q}{\epsilon_0} dS \Rightarrow \underbrace{\iint_S \bar{E}_z \cdot \hat{n}}_{\text{superficie}} + \underbrace{\iint_{\text{topo 2}} \bar{E} \cdot \hat{n}}_{E=0 \text{ dentro}} + \underbrace{\iint_{\text{lateral}} \bar{E} \cdot \hat{n}}_{\delta \rightarrow 0 \text{ despreciable}} = \iint_{\text{topo 2}} \frac{q}{\epsilon_0} dS$$

$$\Rightarrow \bar{E} \cdot \hat{n} = E_L = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Si usamos el hecho de que  $V = \text{cte}$  (incluyendo la superficie) resulta obvio que el campo eléctrico es perpendicular a la superficie, por ser simplemente una superficie equipotencial.

Si  $\bar{E} = E_{||} + E_L$  y sean dos puntos de la superficie  $\Delta V_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$

$$\Rightarrow - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} E_{||} d\bar{l} = 0 \Rightarrow E_{||} = 0$$

- Se demuestra que en una cavidad dentro a un conductor, el campo eléctrico es nulo (Jaula de Faraday). Si se supiese que existe un campo eléctrico dentro de la cavidad

Efecto de puntas: El campo eléctrico es más intenso en las regiones de mayor curvatura de un conductor.

Supongamos dos esferas conductoras, cada una con su carga  $q_1$  (del mismo signo). Las unimos mediante un cable conductor y entonces ambas quedan sometidas al mismo potencial.

Por método de imágenes, por ejemplo, puedo idealizar el potencial de la esfera fuera de ella como el de una carga puntual. Tenemos así

$$\left\{ \begin{array}{l} V(R_1) = \frac{k_e q_1}{R_1} = \frac{k_e G_1 4\pi R_1^2}{R_1} = k_e G_1 4\pi R_1 \\ V(R_2) = \frac{k_e q_2}{R_2} = \frac{k_e G_2 4\pi R_2^2}{R_2} = k_e G_2 4\pi R_2 \end{array} \right. \quad \text{pues } q = G \text{ Vol (cedida)}$$

$$\text{Como están conectadas } V(R_1) = V(R_2) \Leftrightarrow G_1 R_1 = G_2 R_2 \Leftrightarrow \frac{G_1}{G_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

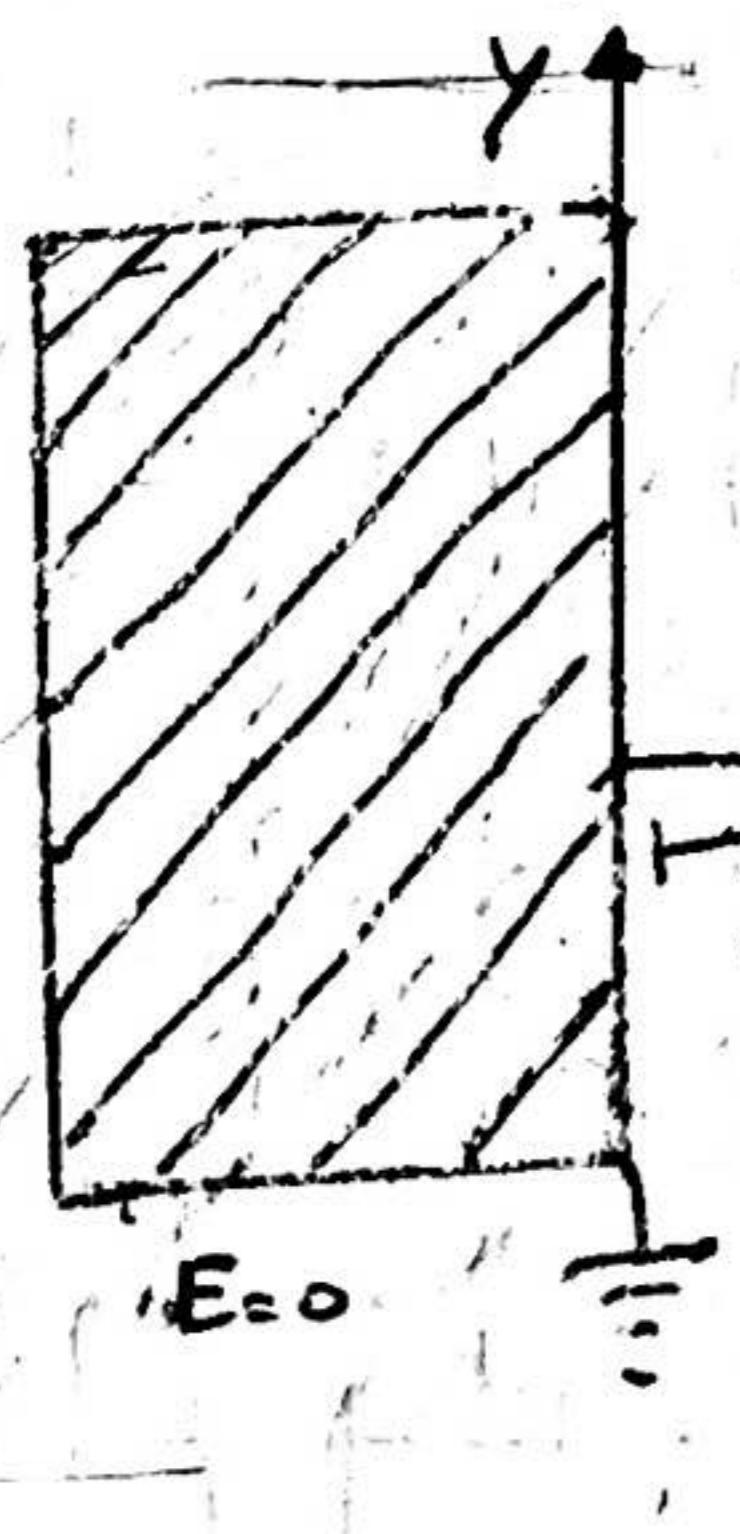
Entonces si nuestro  $R_2 > R_1$ , La esfera 1 más pequeña tendrá mucha mayor densidad de carga y por tanto más líneas de campo.



Esto se utiliza con los pararrayos, las puntas afiladas concentran muchas cargas y generan un  $\vec{E}$  que atrae a las cargas de las nubes. El aire se vuelve conductor y se arrancan electrones.

### ● Método de las imágenes

Supongamos una carga  $+q$  en  $\vec{d} = (d, 0, 0)$  frente a un semiespacio ( $x < 0$ ) conductor



conectado a un  $V = \text{cte} = 0$  y el espacio exterior está dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{k_e q}{|\vec{r} - \vec{d}|} + \iint_{\text{cuerpo}} \frac{k_e dS' G'(s')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{donde}$$

$\vec{r} = (x, y, z)$   
 $dS'$  es  $dy dz$ ,  $\vec{r}' = (0, y, z)$  y  $G'$  es la carga inducida en la superficie del conductor que no la conocemos.

Sabemos además que  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie del conductor.

Además, si tomamos el potencial en una superficie  $S$  que se cierra por el infinito tenemos que  $V(\infty) = 0$  y conocemos  $p(\vec{r})$  dentro de  $S$ . En consecuencia, el potencial  $V(\vec{r})$  será una solución única de la ecuación de Poisson en  $S$  pues cumple condiciones de Dirichlet.

El método de las imágenes consiste en este caso en inventar una carga  $q'$  en la posición  $\vec{d}' = (-d, 0, 0)$ . En este caso  $V(\vec{r}) = \frac{k\epsilon q}{|\vec{r}-\vec{d}|} + \frac{k\epsilon q'}{|\vec{r}+\vec{d}'|}$ . Queremos que en donde estaba el pleno se cumpla  $V=0 \Rightarrow q'=-q$ ,  $\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{d}'=-\vec{d}$ .

En este caso también conocemos el potencial para una superficie que se cierra en el infinito ( $V(\infty)=0$ ) y como cumple Dirichlet la solución será única. De esta forma ambos problemas tendrán igual solución (en el lado derecho).

Y el campo eléctrico en la superficie del conductor es  $\vec{E} = -\nabla V$

$$\text{Luego } \vec{E} = \frac{k\epsilon q (\vec{r}-\vec{d})}{|\vec{r}-\vec{d}|^3} - \frac{k\epsilon q (\vec{r}+\vec{d}')}{|\vec{r}+\vec{d}'|^3}$$

$$\vec{E}(x=0) = \frac{-k\epsilon q^2 \vec{d}}{|\vec{r}-\vec{d}|^3} \Rightarrow E_x(x=0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\text{Sabiendo que } \vec{E} \cdot \hat{n} = E \perp = E_x = \frac{G_i}{\epsilon_0} \text{ Entonces } G_i = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

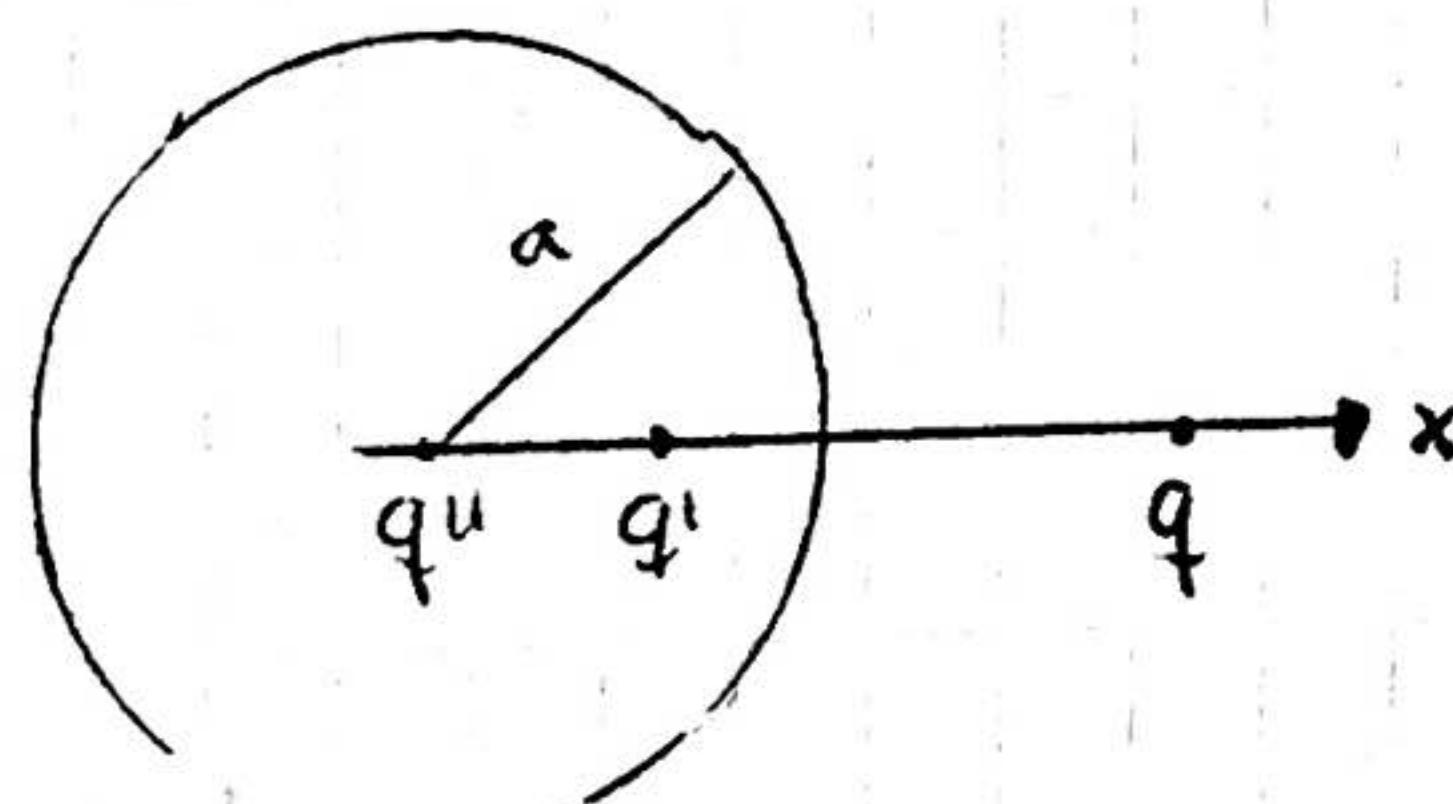
De esta forma podemos calcular la forma exacta.

Otros dos casos de interés son:

- Una carga puntual colocada frente a dos hemiespacios conductores.
- Una carga puntual  $q$  frente a una esfera conductora de radio  $a$ .

$$V(r=a) = \frac{k\epsilon q}{|\vec{r}-\vec{d}|} + \frac{k\epsilon q'}{|\vec{r}+\vec{d}'|} = 0 \quad d = \frac{a^2}{d} \quad y \quad q' = -q \frac{a}{d} \quad \text{luego,}$$

$$G_i = -\epsilon_0 E(r=a) = -\epsilon_0 \frac{\partial V(r)}{\partial r} \Big|_{r=a}^d \quad (\text{y si necesitamos } V=V_0 \neq 0 \text{ agregamos otra } q'' \text{ en el origen})$$



entonces  $G_i = -\epsilon_0 E(r=a) = -\epsilon_0 \frac{\partial V(r)}{\partial r} \Big|_{r=a}^d$

entonces  $G_i = -\epsilon_0 \frac{\partial V(r)}{\partial r} \Big|_{r=a}^d$

### • Conductores reales

Los electrones en un metal tienen una velocidad rápida pero finita. Si yo muevo una carga por fuera muy lentamente todo anda bien (waniestáticamente). Si en cambio muevo la carga externa muy rápidamente ocurre el fenómeno "overshooting" de superficie.

Por ejemplo, supongamos el piso de metal y movemos una carga positiva muy rápidamente, los electrones no tienen tiempo de seguirla y llegan con delay al lugar donde estaba antes la partícula, al llegar y no haber partícula cargada estos se repelen. Al repelirse dejan un hueco vacío que quería llegar y ocultan de esta forma. Se denomina plasmaón de superficie.

### • Sistema de conductores, energía potencial

Consideremos un sistema de  $N$  cuerpos conductores de forma arbitraria y carga arbitraria  $q_j$

Sabemos que :

- Las cargas netas de cada conductor se van a conservar (los electrones no pueden escapar)

- Las cargas se van a distribuir pero permaneciendo en la superficie.

Definimos una densidad superficial de carga normalizada en cada conductor

$$\frac{G_j^1(S_j)}{q_j} = \frac{G_j^1(S_j)}{\int_S dS} \quad / \quad \int_S dS G_j^1(S_j) = 1$$

- Dentro y en la superficie de cada conductor  $V=0$  ó  $\vec{E}=0$  y notamos  $V_j$  respecto  $V(\infty)=0$  por ejemplo.

De esta forma  $V(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N k_e \int_S dS_j \frac{G_j^1(S_j)}{\|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}\|}$

donde  $\vec{r}_{S_j}$  denota puntos sobre la superficie del conductor

y también  $V(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N q_j k_e \int_S dS_j \frac{G_j^1(S_j)}{\|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}\|}$  devolvemos  $P_j(\vec{r}) = k_e \int_S dS_j \frac{G_j^1(S_j)}{\|\vec{r} - \vec{r}_{S_j}\|}$

Si las superficies de los conductores son complicadas,  $P_j$  muy difíciles de calcular pues no se conoce  $G'_j(\bar{S}_j)$ . Podemos así dividir  $V(\bar{r})$  en  $N$  ecuaciones imponiendo  $N$  condiciones

$$V(\bar{r}) = V_i, \text{ si } \bar{r} \in \text{Cuerpo}_i$$

$$\Rightarrow V_i = V(r_i) = \sum_{j=1}^N P_j(r_i) q_j = \sum_{j \neq i} P_{ij} q_j \quad P_{ij} = \text{Coeficiente de potencial.}$$

$$P_{ij} = P_j(r_i), \quad r_i \in \text{Cuerpo}_i \quad i=1, \dots, N$$

Los elementos  $P_{ij}$  son una generalización de los  $p_{ij}$  en cargas puntuales.  $P_{ji} = P_{ij}$ . Se puede ver que si en vez de cuerpos suponemos puntos  $G'_j(\bar{s}_j) = \delta(\bar{r} - \bar{r}_j)$  y volvemos al caso de antes.

La energía de formación de este sistema será entonces  $U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int dS' G'_j(s_j) V(\bar{r}') =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j \int dS' G'_j(s_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j \quad \text{Donde usamos el hecho de potencial de un solo conductor.}$$

En representación vectorial.  $P_{ij}$  son los términos de  $\bar{P}$

$$\bar{V} = \bar{P} \times \bar{q} = \bar{q} \times \bar{P} \quad y \quad U = \frac{1}{2} \bar{q} \cdot \bar{V} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \bar{q} \times \bar{P} \times \bar{q} \quad (\text{Usando } P_{ji} = P_{ij})$$

Definiendo  $\bar{\bar{C}}$  como la matriz inversa de  $\bar{P}$   $\bar{\bar{C}} \times \bar{P} = \bar{P} \times \bar{\bar{C}} = 1$

$C_{ij} = \text{coeficiente de capacitancia.}$  Con  $C_{ij} = C_{ji}$  resulta que

$$\bar{q} = \bar{\bar{C}} \times \bar{V} = \bar{V} \times \bar{\bar{C}} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \bar{q} \times \bar{P} \times \bar{q} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{C}} \times \bar{V}) \times \bar{P} \times (\bar{\bar{C}} \times \bar{V}) = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{2} (\bar{V} \times \bar{\bar{C}}) \times \underbrace{\bar{P}}_1 \times (\bar{\bar{C}} \times \bar{V}) = \frac{1}{2} \bar{V} \times \bar{\bar{C}} \times \bar{V}$$

Si entonces nos interesa el caso para cada cuerpo es realizable, el caso general es complejo pues  $V_i = V_{ii} + V_{ij}$  donde  $V_{ii}$  es la contribución de la carga del conductor y  $V_{ij}$  debido al resto de conductores.

### • Capacitores (Condensadores)

Un condensador eléctrico es un elemento pasivo capaz de almacenar energía sosteniendo un campo eléctrico. Se forma por dos materiales conductores separados por un material dieléctrico o vacío y una diferencia de potencial.

Sean dos conductores (armaduras) de cualquier forma con cargas  $q_1 = +q, q_2 = -q$ , las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\begin{cases} V_1 = P_{11}q - P_{12}q \\ V_2 = P_{21}q - P_{22}q \end{cases} \quad \text{restando } V = V_1 - V_2 = (P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21})q$$

$C = \frac{q}{V}$  Capacitancia (Solo depende de la geometría y los materiales)

$$[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{\text{Coul}}{\text{Volt}} = \text{Faradio} \quad \text{Si considero } \bar{C} \text{ como matriz, } \bar{C} = \bar{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{1}{(P_{11} + P_{22} - 2P_{12})} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{(C_{11} + C_{22} - 2C_{12})} = \text{cte}$$

En la vida real  $C$  no se calcula, se mide. Todo elemento circuital puede colocarse en serie o paralelo.

Conexiones simples de capacitores:

- Conexión en paralelo: Si tenemos  $N$  capacitores  $C_1, \dots, C_N$  en paralelo, las armaduras estarán al mismo potencial, luego cada uno acumulará una  $q_i$  carga

$$\Rightarrow C_1 = \frac{q_1}{V}, C_2 = \frac{q_2}{V}, \dots, C_N = \frac{q_N}{V}, \text{ sumando } \sum_{i=1}^N C_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{V} = C$$

o sea el armado se comporta como un solo capacitor  $C$  que almacenará  $q = \sum_{i=1}^N q_i$

Dentro de una caja negra no podríamos diferenciarlos

- Conexión en serie: Ahora acumularán carga  $q$  igual y en cada uno de ellos habrá una cierta de tensión  $V_i$ .  $V_i = \frac{q}{C_i}$ , sumando  $\sum_{i=1}^N V_i = V = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} = \frac{q}{C}$

$$\Rightarrow C^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

(Para ver esto lindo mirar lo de Chernomoritz)

### Capacitor de placas paralelas

Sean dos placas paralelas infinitas (por ahora) cargadas con densidad superficial de carga  $G$  y  $-G$ , ubicadas en  $x = -\frac{l}{2}$  y  $x = +\frac{l}{2}$  respectivamente. La ecuación de Poisson resulta en términos de δ de Dirac como:

$$\nabla^2 V = -\frac{f}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left[ G\delta(x + \frac{l}{2}) - G\delta(x - \frac{l}{2}) \right]$$

Resolviendo resulta

(Aregar gráfico de situación y cuentas)

$$V(x) = \begin{cases} \frac{G}{\epsilon_0} \frac{l}{2} & x < -\frac{l}{2} \\ -\frac{G}{\epsilon_0} x & -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{G}{\epsilon_0} \frac{l}{2} & x > \frac{l}{2} \end{cases}$$

frente del capacitor el potencial es constante

y el campo eléctrico resulta ser

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = E_x \begin{cases} 0 & x < -\frac{l}{2} \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & x > \frac{l}{2} \end{cases} \text{ ó mejor } E_x = \frac{Q}{\epsilon_0} \Theta\left(x + \frac{l}{2}\right) - \frac{Q}{\epsilon_0} \Theta\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

que coincide pues  $\nabla^2 V = \nabla V = -\nabla E$  (recordando que la derivada de  $\Theta$  es  $\delta'$ )

Supongamos que ahora son unas chapas grandes pero finitas. Entonces  $\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{l}{2}$

$$= \frac{Q \cdot l}{S \cdot \epsilon_0} \quad \text{Como } C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{l} \quad (\text{medio x geometría}) \quad \text{Si hubiera un material dielectrónico cambiaría } \epsilon_0 \text{ por } \epsilon$$

• Energía almacenada en un capacitor de placas paralelas.

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3 r' |\bar{E}|^2 \quad \text{Considerando que } \bar{E} \neq 0 \text{ solo en el cubo de volumen } S \cdot l$$

$$\Rightarrow U \approx \frac{\epsilon_0}{2} |\bar{E}|^2 S l = \frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{Q}{\epsilon_0^2} \right| S \cdot l = \frac{\epsilon_0 Q^2}{2 S^2 \epsilon_0^2} S \cdot l \Rightarrow U = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0} \frac{l}{S} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}$$

$$\text{Definimos la densidad de energía por unidad de volumen eléctrica } w_e = \frac{U}{Sl} = \frac{\epsilon_0 |\bar{E}|^2}{2}$$

• Son igualmente calculables las simetrías usuales

- Dos cilindros concéntricos infinitos de radios  $R_1$  y  $R_2$

AGREGAR

- Dos esteras concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$

- Dielectricos

Ya hemos introducido los conductores y los henos caracterizado como un material que tiene electrones libres. En estos materiales tenemos dipolos libres (permanentes o inducidos). Ante la presencia de un campo eléctrico el medio se polariza. Aún cuando el material es, en principio, eléctricamente neutro los dipolos inducen un campo eléctrico que influye localmente. Podemos decir que los electrones libres hacen a los conductores, tanto como los dipolos a los dielectricos.

Modelo simple: Faraday fabrico dos capacitores idénticos geometricamente (caracterizados por  $S$  y por  $l$ ) uno en el vacío y otro con un material dielectrico dentro.

Primer experimento de Faraday: Al someter el capacitor en vacío a un  $V_0$  se observa una carga acumulada  $Q_0 / C_0 = \frac{Q_0}{V_0}$ . En el dielectrio en cambio se acumula una carga  $Q = K_e Q_0$

$$\text{con lo que } C = \frac{Q}{V_0} = \frac{K_e Q_0}{V_0} = K_e C_0 \text{ donde } K_e \text{ es una característica del medio.}$$

Segunda experiencia de Faraday: Conectemos ambos capacitores a una batería de modo tal que en las armaduras se depositen la misma carga  $Q_0$ . Se observa que el capacitor con dielectrio presenta una diferencia de potencial  $V = \frac{V_0}{K_e}$  donde  $V_0$  es la medida en el capacitor en vacío. Resulta lo mismo que antes pues  $C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0 K_e}{V_0} = K_e C_0$

Modelo simple para ingenieros: Consiste en pensar que hay una cierta  $Q_{ind}$  en la superficie del dielectrio en contacto con la armadura de signo opuesto, provocada por la alineación de los dipolos con el  $E_0$  / la carga total  $Q$  será  $Q_{ind} = Q_0 \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)$

Del capacitor en vacío podemos usar Gauss sin inconveniente

$$\text{sobre una placa y obtenemos } E_0 \oint_S dS \cdot \vec{E} \cdot \hat{n} = Q_0$$

$$\text{En el caso con el dielectrio } Q = Q_0 - Q_{ind}$$

$$\Rightarrow E_0 \oint_S dS \cdot \vec{E} \cdot \hat{n} = \frac{Q_0}{K_e} \text{ de esta forma si definimos } \bar{E} = K_e E_0 \text{ permitividad eléctrica del medio}$$

Tenemos así  $E_0 \bar{E}_0 \propto \bar{E} \bar{E}$ . Definimos el vector desplazamiento eléctrico  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

$$\text{Y obtenemos así la ley de Gauss más general } \oint_S dS \cdot \bar{D} \cdot \hat{n} = Q_0 \text{ Ley de Gauss para medios dielectricos (materiales)}$$

Comparando los integrandos  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}_0 = \epsilon \bar{E}$  Podemos pensar así que tenemos dos campos eléctricos.  $\bar{E}_0$  (generado por  $Q_0$ ) y  $\bar{E}_{ind}$

$$\text{por } Q_{\text{ind}} \text{ y } \therefore \text{se opone a } \bar{E}_0 / \bar{E} = \bar{E}_0 - \bar{E}_{\text{ind}} = \underbrace{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \bar{E}_0}_{\bar{E}} = \frac{1}{K_e} \bar{E}_0$$

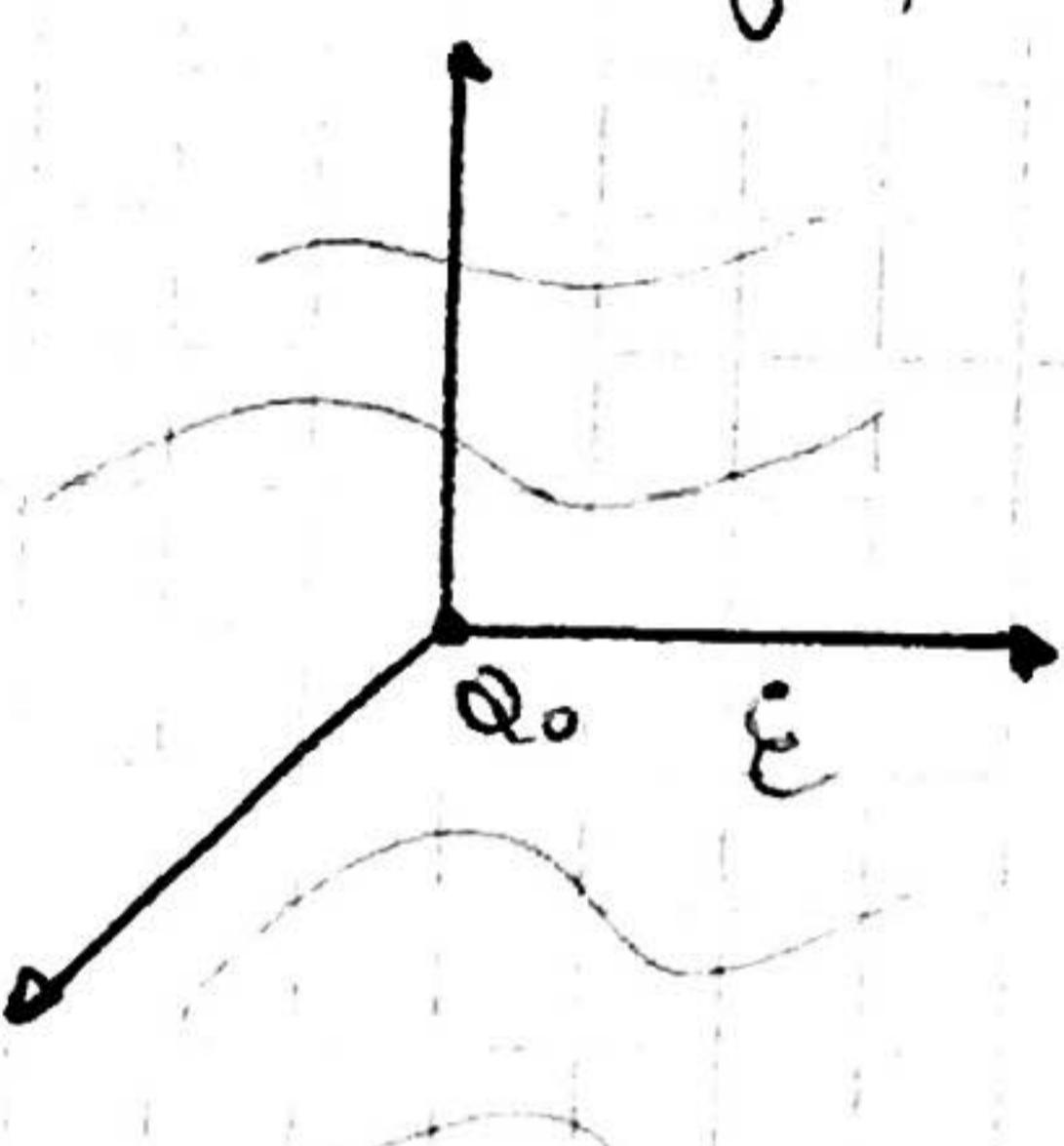
$\Rightarrow \bar{E}_{\text{ind}} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \bar{E}_0$ . Este es generado por la densidad de cargas  $Q_{\text{ind}}$  así como  $\bar{E}_0$  es creando por las  $Q_{\text{lib}}$

$$\begin{cases} \bar{E}_{\text{ind}} = G_{\text{ind}} \frac{Q_{\text{ind}}}{\epsilon_0 S \cdot \epsilon_0} \\ \bar{E}_{\text{ind}} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \bar{E}_0 = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{Q_0}{\epsilon_0} = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{Q_0}{S \cdot \epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow Q_{\text{ind}} = Q_0 \left(1 - \frac{1}{K_e}\right)$$

Par de ejemplos: Partícula con carga  $Q_0$  en medio dielectrónico fluido con  $\epsilon$ .

Si tomo una esfera e integro.

$$\oint_S dS \bar{D} \cdot \hat{n} = Q_0 \Rightarrow D = \frac{Q_0}{4\pi r^2} = \epsilon E \Rightarrow E = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon r^2}$$



Que equivale a Coulomb. con  $\epsilon$ . Se puede decir que  $Q_0$  resulta apantallada y se compone con  $\frac{Q_0 \epsilon_0}{\epsilon} = \frac{Q_0}{K_e}$

Como segundo ejemplo usamos el capacitor con dielectrónico caracterizado por  $\epsilon$ . Usando gauss en un cilindro de superficie  $S$  que encierra la armadura

$$D = G_0 = \epsilon E \Rightarrow E = \frac{G_0}{\epsilon} \text{ que es como en vacío pero } \epsilon \text{ en vez de } \epsilon_0.$$

$$\oint_S dS \bar{D} \cdot \hat{n} = Q_0 \Rightarrow D = \frac{Q_0}{S} = G_0$$

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{\epsilon \cdot l} = \frac{Q_0}{l \frac{G_0}{\epsilon}} = \frac{\epsilon Q_0}{l G_0} = \frac{\epsilon \cdot S}{l} = K_e \frac{\epsilon_0 S}{l} = K_e C_0$$

### • Electrostática macroscópica (Dielectricos como lo ven los físicos)

Consideremos un elemento de volumen  $d^3 r'$  centrado en  $\bar{r}'_j$ . Un solo dipolo  $\bar{p}_j$  en la ubicación  $\bar{r}_j$  dentro de dicho diferencial genera un potencial  $V_j$  en  $\bar{r}$  dado por

$$V_j(\bar{r}) = k_e \frac{\bar{p}_j(\bar{r} - \bar{r}'_j)}{|\bar{r} - \bar{r}'_j|^3} \quad \text{Sumemos ahora} \quad \sum_j V_j(\bar{r}) = d \langle V(\bar{r}) \rangle = k_e \sum_j \frac{\bar{p}_j \cdot (\bar{r} - \bar{r}'_j)}{|\bar{r} - \bar{r}'_j|^3} \quad \bar{r}_j \approx \bar{r}'$$

$$\approx k_e \sum_j \frac{\bar{p}_j \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = k_e \sum_j \bar{p}_j \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \quad \text{Definiendo } \bar{P}(\bar{r}) = \frac{\sum_j \bar{p}_j}{d^3 r'} = \text{densidad de dipolos por unidad de Vol.}$$

$$\sum_j V_j(\bar{r}) d \langle V(\bar{r}) \rangle = k_e \bar{P}(\bar{r}') \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d^3 r'$$

$$\text{Integrando } \langle V(\bar{r}) \rangle = k_e \int_{V,1} d^3 r' P(\bar{r}') \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

Si nos interesa  $\langle \bar{E}(\vec{r}) \rangle = -\nabla \langle V(\vec{r}) \rangle$ , llegando a

$$\langle \bar{E}(\vec{r}) \rangle = ke \int d^3 r' \left[ \frac{3(\bar{P}(\vec{r}'))(\vec{r}-\vec{r}')}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}^3} - \frac{\bar{P}(\vec{r}')}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}^3} \right]$$

(Se puede verificar que esta bien probando con un dipolo  $\Rightarrow \bar{P} = \bar{p}\delta(\vec{r})$ )

$$\text{Siguiendo } \langle V(\vec{r}) \rangle = ke \int d^3 r' \bar{P}(\vec{r}') \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}^3} \quad \text{donde } \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}^3} = \nabla' \left( \frac{1}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \right)$$

$$\Rightarrow \langle V(\vec{r}) \rangle = ke \int d^3 r' \bar{P}(\vec{r}') \nabla' \left( \frac{1}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \right)$$

$$\text{Además } \nabla' \left( \bar{P}(\vec{r}') \frac{1}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \right) = \frac{\nabla' \bar{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \bar{P}(\vec{r}') \nabla' \left( \frac{1}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \right)$$

$$\Rightarrow \langle V(\vec{r}) \rangle = ke \int d^3 r' \nabla' \left( \bar{P}(\vec{r}') \frac{1}{{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \right) - ke \int d^3 r' \frac{\nabla' \bar{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{utilizando teo de la div}$$

$$\langle V(\vec{r}) \rangle = ke \iint_{S(V)} ds' \left[ \bar{P}(\vec{r}') \hat{n} \right] - ke \int_V d^3 r' \frac{\nabla' \bar{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Primero camino: Integrando solo en el volumen  $V$  donde  $\bar{P}(\vec{r}') \neq 0 \Rightarrow$  podemos interpretar que  $\langle V(\vec{r}) \rangle$  es ocasionado por las densidades de carga inducidas, por el volumen  $p_{ind}$  y por la sup  $G_{ind}$   $\Rightarrow \langle V(\vec{r}) \rangle = ke \iint_{S(V)} ds' \frac{G_{ind}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + ke \int_V d^3 r' \frac{p_{ind}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$p_{ind}(\vec{r}') = -\nabla' \bar{P}(\vec{r}') \quad y \quad G_{ind}(\vec{r}') = +\bar{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}$$

$G_{ind}$  es la misma de antes en la superficie del dielectro en contacto con la armadura. Además aparece una densidad en volumen  $p_{ind}$  relacionada con la variación de la densidad, si la hubiere.

Ya que las inducciones deben mantener la carga, pues el cuerpo era originalmente neutro tenemos  $0 = \int_V d^3 r' p_{ind}(\vec{r}') + \iint_{S(V)} ds' G_{ind}(\vec{r}') = \int_V d^3 r' (-\nabla' \bar{P}(\vec{r}')) + \iint_{S(V)} ds' [\bar{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}]$

que se satisface pues es el teo de la div.

Segundo camino: Si integramos en todo el espacio ( $\int_{\infty} \dots$ ) allí  $\bar{P}(\vec{r}') = 0$ , por lo que el segundo término es nulo. Solo quedamos con  $\int_{\infty} d^3 r' p_{ind}(\vec{r}') = 0$  pues las densidades de polarización no generan carga solo reordenan los dipolos.<sup>100</sup> Lo cual es obvio pues reescribiendo y usando teo de la div  $\int_{\infty} d^3 r' p_{ind}(\vec{r}') = \int_{\infty} d^3 r' -\nabla' \bar{P}(\vec{r}') = \iint_{S(r \rightarrow \infty)} ds' [-\bar{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}] = 0$

Finalmente obtenemos:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \bar{E} = \rho_{\text{ind}} + \rho_0 = \rho_{\text{TOTAL}} = \rho_0 - \nabla \cdot \bar{P} \Rightarrow \nabla (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho_0$$

llamamos vector desplazamiento  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$  con  $\nabla \cdot \bar{D} = \rho_0$

$\Rightarrow$  Ley de Gauss en medios dielectricos  $\oint_S dS \cdot \bar{D} \cdot \hat{n} = Q_0$

$$\text{Y en electrostática } \nabla \times \bar{D} = \underbrace{\nabla \times \epsilon_0 \bar{E}}_{=0} + \nabla \times \bar{P} = \nabla \times \bar{P}$$

Así

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{D} &= \rho_0 & \nabla \cdot \bar{E} &= \frac{\rho_0 + \rho_{\text{ind}}}{\epsilon_0} & -\nabla \cdot \bar{P} &= \rho_{\text{ind}} \\ \nabla \times \bar{D} &= \nabla \times \bar{P} & \nabla \times \bar{E} &= 0 & \bar{P} \cdot \hat{n} &= G_{\text{ind}} \end{aligned}$$

$$\bar{D} \text{ nos independiza de } \rho_{\text{ind}} \text{ desconocido. Es un artefacto matemático } \bar{E} = \bar{D} - \frac{\bar{P}}{\epsilon_0}$$

Si hacemos un Taylor de  $\bar{P}$

$$\bar{P} = \bar{P}(\bar{r}) = \bar{P}_0 + \bar{x}_1 \langle \bar{E} \rangle + \langle \bar{E} \rangle \bar{x}_2 \langle \bar{E} \rangle + O(\bar{E}^3)$$

Si  $\bar{P}_0 \neq 0$  significan que el material tiene una polarización en ausencia de  $\bar{E}$ . El material se llama electréte y tener una física similar al magnetismo (ferromagnetismo) por lo que a veces se los llama ferroeléctricos. Si  $\bar{P}_0 = 0$  y el segundo término alcanza para describir la polarización

$\Rightarrow \bar{P} = \bar{x}_1 \bar{E}$  y el término se llama lineal. Si además es isotrópico  $\Rightarrow \bar{x}_1 = \chi(\bar{r}) \equiv$  susceptibilidad eléctrica.

Si es ademas homogéneo  $\chi = \text{cte} \Rightarrow$  material LIH con  $\chi = \epsilon - \epsilon_0$

$$\bar{P} = \chi_e \langle \bar{E} \rangle = (\epsilon - \epsilon_0) \langle \bar{E} \rangle \quad \bar{D} = \epsilon_0 \langle \bar{E} \rangle + \bar{P} = \epsilon_0 \langle \bar{E} \rangle + (\epsilon - \epsilon_0) \langle \bar{E} \rangle = \epsilon \langle \bar{E} \rangle$$

Vemos que  $\langle \bar{E} \rangle$  es un valor medio,  $\bar{P}$  también (densidad de dipolo)  $\therefore$  deberían ser  $\langle \bar{P} \rangle, \langle \bar{D} \rangle$ .

No se usa, se sobreentiende y por este concepto de valores medios se lo llama electrostática macroscópica.

Efecto de bordes: Analizamos nuevamente el capacitor de placas paralelas con medio LIH de polarización constante  $P$ . Por simplicidad trabajaremos en una dimensión e integraremos en el infinito como dice el segundo camino.

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{l}{2} \\ P & -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2} \\ 0 & x > \frac{l}{2} \end{cases} \quad \delta' P(x) = P \delta'(x + \frac{l}{2}) - P \delta'(x - \frac{l}{2})$$

$$\text{El camino dos solo define } \rho_{\text{ind}} = -\nabla \bar{P} \Rightarrow \rho_{\text{ind}}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} P(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ P \delta(x + \frac{l}{2}) - P \delta(x - \frac{l}{2}) \right]$$

$$= (-P) \delta(x + \frac{l}{2}) + P \delta(x - \frac{l}{2}) \equiv G_{\text{ind}}(x) \quad \text{Osea tenemos dos densidades de carga } -P \text{ y } P$$

en  $x = -\frac{l}{2}$  y  $x = \frac{l}{2}$  respectivamente. Y estas son las dos densidades de carga inducidas

Objetivo 4

Y la ecuación de neutralidad se cumple a la perfección.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 d\chi dr = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(-\rho) \delta(x+l_z) + \rho \delta(x-l_z)] = -\rho + \rho = 0$$

En conclusión, las densidades superficiales son los efectos de bordes.

### • Energía electrostática en presencia de dielectrjos

Repetimos como en el vacío. Para construir una distribución de cargas (densidad volumétrica) de cargas  $\rho_0$  en un medio dielectrjo, lo hacenos en presencia de  $\langle V \rangle$  y los dipolos del medio  $\Rightarrow$  en una distribución continua  $U = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho_0(\vec{r}') \langle V(\vec{r}') \rangle$

$$\text{donde } \langle V(\vec{r}) \rangle = k_e \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' \frac{(\rho_0(\vec{r}') - \nabla \bar{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{el de las cargas y polarización})$$

$$\text{Sabiendo que } \nabla \cdot \bar{D} = \rho_0 \quad U = \frac{1}{2} \int d^3 r' \nabla \cdot \bar{D}(\vec{r}') \langle V(\vec{r}') \rangle$$

$$\text{donde } \nabla \cdot [\bar{D} \cdot \langle V \rangle] = (\nabla \cdot \bar{D}) \langle V \rangle + \bar{D} \cdot \nabla \langle V \rangle \\ = -\langle \bar{E} \rangle$$

$$\text{Así } \nabla \cdot \bar{D} \cdot \langle V \rangle = \nabla \cdot [\bar{D} \cdot \langle V \rangle] + \bar{D} \cdot \langle \bar{E} \rangle \quad \text{y entonces}$$

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r' \nabla \cdot (\bar{D} \cdot \langle V \rangle) + \frac{1}{2} \int d^3 r' \bar{D} \cdot \langle \bar{E} \rangle \quad \text{y utilizando el teorema de la divergencia}$$

$$U = \frac{1}{2} \iint_S dS' \bar{D} \cdot \langle V \rangle + \frac{1}{2} \int_V d^3 r' \bar{D} \cdot \langle \bar{E} \rangle$$

Si nos vamos al infinito (ejemplo una esfera de radio  $r \rightarrow \infty$ )

$$\frac{1}{2} \iint_S dS' \bar{D} \cdot \langle V \rangle \sim \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \langle V \rangle \sim \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

$$\text{Así } U = \frac{1}{2} \int_V d^3 r' \bar{D}(\vec{r}') \cdot \langle \bar{E}(\vec{r}') \rangle \quad \text{si el medio es LHM } \langle \bar{E} \rangle = \frac{\bar{D}}{\epsilon}$$

$$\text{y luego } U = \frac{1}{2} \int_V \frac{d^3 r' |\bar{D}|^2}{\epsilon}$$

Ejemplo : Siguiendo el capacitor de placas paralelas con medio LHM caracterizado por  $\epsilon$ .

$$\text{tenemos } U = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} (S \cdot l) = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \cdot S \cdot l = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{S \epsilon \cdot \epsilon} \cdot S \cdot l = \frac{Q_0^2 \cdot l}{2 \epsilon \cdot S} = \frac{1}{K_e} \frac{Q_0^2 l}{2 S} = \frac{U_0}{K_e}$$

$$\propto U_0$$

## Sobre la ley de Coulomb en medios LHM

Consideremos una partícula cargada en el origen  $q_0$  en una esfera LHM de radio  $R_0$ . Usando Gauss en dielectricos:

$$q_0 = \iint_S dS \bar{D} \cdot \hat{n} \Rightarrow \bar{D} = \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi r^2}$$

$$\text{Como LHM } \langle \bar{E} \rangle = \frac{\bar{D}}{\epsilon} = \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi \epsilon r^2} = \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 K_e r^2} = \frac{q \hat{r}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \text{ con } q = \frac{q_0}{K_e}$$

Así vemos que  $q_0$  está apantallada un factor  $K_e \geq 1$ . Veamos la polarización

$$\bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0 \langle \bar{E} \rangle = \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{q_0 \hat{r}}{4\pi r^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Supongamos que } q_0 \text{ está entre } R_0 &\in R_0 \Rightarrow Q_{ind} = \iint_S dS G_{ind} = \iint_S dS (\bar{P} \cdot \hat{n}) + \iint_S dS (\bar{P} \cdot \hat{A}) \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{q_0}{4\pi r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 \hat{r} \cdot \hat{n}_i}_{Q_i} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{K_e}\right) \frac{q_0}{4\pi R_0^2} \hat{r} \cdot \hat{n}_e \cdot 4\pi R_0^2}_{Q_i} = 0 \text{ neutralidad.} \end{aligned}$$

$q_i$  es la carga inducida que apantalla la carga y  $Q_i = -q_i$  es la remanente en la superficie externa. Si  $R_0 \rightarrow \infty \Rightarrow$  la carga total de la partícula será

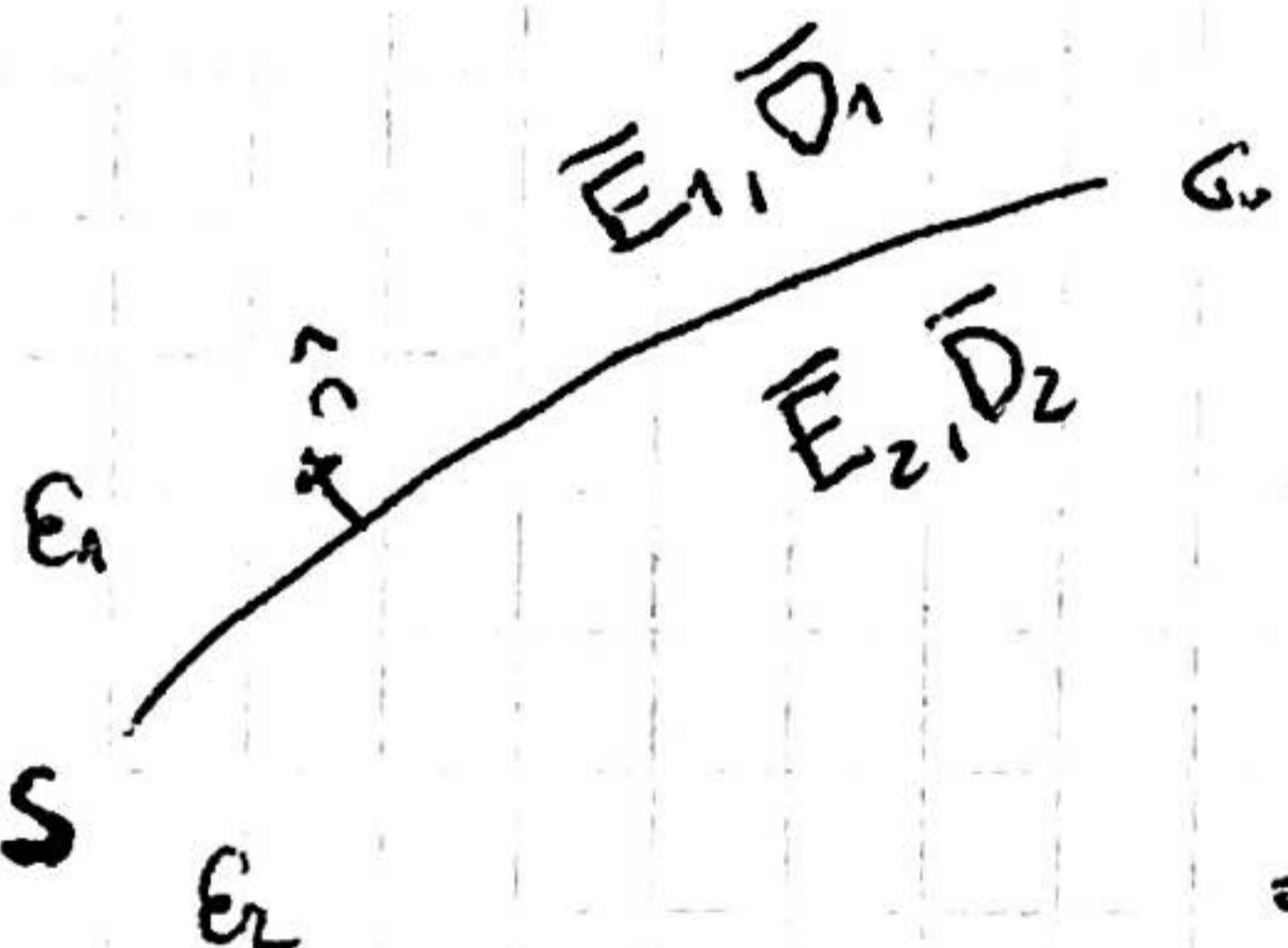
$$Q = q_0 + q_i = q_0 - \left(1 - \frac{1}{K_e}\right) q_0 = \frac{q_0}{K_e} \text{ queda apantallada un factor } K_e = \epsilon_0$$

$$\text{Utilizando la ley de Coulomb en LHM } \langle \bar{E}(r) \rangle = \frac{q}{4\pi \epsilon} \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|r - r'|^3} = -\nabla \langle V \rangle$$

y llegamos a la ecuación de Poisson de medios dielectricos LHM

$$\nabla^2 V = -\frac{q_0}{\epsilon}$$

## Condiciones de contorno entre dos medios dielectricos



Si hacemos un cilindro de altura diferencial

$$\begin{aligned} \iint_S dS (\bar{D} \cdot \hat{n}) &= q_0 = \iiint_{\text{Vol}} G_0 \\ \Rightarrow \iint_{\text{topo}} (\bar{D}_1 \cdot \hat{n} - \bar{D}_2 \cdot \hat{n}) &= \iint_{\text{topo}} G_0 \\ \Leftrightarrow D_{1\perp} - D_{2\perp} &= G_0 \end{aligned}$$

Si ahora hacemos una circulación de "altura" diferenciable

$$\oint \langle \bar{E} \rangle \cdot d\ell = 0 \Rightarrow (\langle E_1 \rangle - \langle E_2 \rangle) \times \hat{n} = 0 \Leftrightarrow E_{1\parallel} - E_{2\parallel} = 0$$

Hoja 16

Hablamos considerando estrictamente dielectricos. En algunos casos se puede modelizar  $K_c = \epsilon/\epsilon_0 \rightarrow \infty$

Si no hay  $\epsilon_0$ ,  $D_{1L} = \epsilon_1 E_{1L}$ ,  $D_{2L} = \epsilon_2 E_{2L}$ . Si el medio 1 es conductor entonces  $E_1 = 0$

$\Rightarrow E_1 \rightarrow \infty$  de forma que  $\epsilon_1 \cdot E_1 = \infty \cdot 0 = \epsilon_2 E_{2L}$   
 $(D_{1L} = D_{2L})$

Clausius-Mossotti

- Materiales Ohmicos y circuitos de corriente continua

- Ley de Ohm macroscópica, Modelo de Drude

Supongamos un electrón ( $q = -e$ ) que se mueve libremente en presencia de un campo  $\vec{E}$ . Según la ley de Newton  $\vec{F} = -e\vec{E} = m_e \vec{a} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt}$  y electrón se acelera. Si el medio fuese un conductor ideal, el electrón se movería a la superficie y permanecería allí, pues no puede escapar. Si es un material Ohmico el electrón choca con los otros electrones e iones del cuerpo y recibe una fuerza de rozamiento  $\vec{F}_r = -\alpha \vec{v} \Rightarrow$  Newton  $-e\vec{E} - \alpha \vec{v} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\alpha$  tiene unidades de inversa sobre tiempo, así nos conviene escribir  $\frac{m_e}{\alpha} = \tau$  (relaxation time o mean free time) y tiene que ver con el tiempo entre colisiones. En estacionario  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ , así  $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$  velocidad de desplazamiento; que corresponde a la velocidad de los electrones en la dirección del campo. Si tenemos  $n = \frac{N}{V}$  densidad de electrones (o el portador de carga que sea), podemos definir la densidad de corriente

$$\bar{J} = -e n \vec{v} = -e \cdot n \left( -\frac{e\tau}{m_e} \right) \vec{E} = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

Ley de Ohm macroscópica

$$\bar{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \equiv \text{conductividad}; \rho \equiv \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \equiv \text{resistividad}$$

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega \text{metros}} = \frac{A}{m} \quad [\rho] = \Omega \text{metros} = \Omega \cdot m$$

- Corriente eléctrica

Supongamos una densidad de corriente  $\bar{J} = \sum_j q_j n_j \vec{v}_j$  (electrones, iones, agujeros, etc, portadores de carga). Se define la corriente eléctrica  $i$  como la cantidad de carga (Coulombs) que fluye sobre una determinada superficie  $S$  por unidad de tiempo (en forma análoga al caudal de fluido).  $i = \frac{dq}{dt}$ . Es un escalar de unidad  $[i] = \frac{C}{s} = \text{Amperio}$ . En general vale

$$i = \frac{Q}{t} = \iint_S \bar{J} \cdot \hat{n} dS = \text{corriente eléctrica}$$

En casos simplificados  $i = \bar{J} \cdot \hat{n} S = q n S (\vec{v} \cdot \hat{n})$ . Vale entonces

$i = q n S (\vec{v} \cdot \hat{n}) = -q n S (-\vec{v} \cdot \hat{n})$  Luego vale igual para  $q \oplus$  que se mueve con dirección  $\vec{v}$  y carga  $q \ominus$  en dirección  $-\vec{v}$

### Velocidad de desplazamiento

Supongamos un simple conductor cilíndrico (un cubo) por el que circulan electrones caracterizados por  $\bar{J}$ .

$$i = \iint_S \bar{J} \cdot \hat{n} dS = JS = e \cdot n \cdot v \cdot S \Rightarrow v = \frac{i}{e n S} = \frac{v \text{ de desplazamiento de los electrones en la dirección de } \vec{E}}{e n S}$$

## Ley de Ohm macroscópica

Volvamos al conductor más simple, nuevamente el cable cilíndrico.

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds = JS = GES \quad E = -\nabla V = -\frac{dV}{dx} = \frac{V}{l}$$

Así  $i = G \frac{V \cdot S}{l}$  llamando  $R = \frac{l}{G} \cdot \frac{1}{S}$  = resistencia (medio & geométrica)

entonces

$$R = \frac{V}{i} \quad \text{Ley de Ohm macroscópica}$$

$$[R] = \frac{\text{Vol}}{\text{Ampere}} = \Omega_{\text{hm}} = \Omega$$

O equivalentemente  $C = \frac{1}{R} = G \frac{S}{l}$  conductancia

$$[C] = \frac{\text{Ampere}}{\text{Vol}} = \frac{1}{l} = \text{mho} = \text{S}$$

Notese que si reescribimos la ley de Ohm sabiendo que (en una dirección)  $E = -\frac{dV}{dx}$  e

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = G S \frac{dV}{dx} \quad \text{que tiene la misma estructura que la propagación de calor } Q$$

$$\frac{dQ}{dt} = -k_T S \frac{dT}{dx} \quad k_T \text{ conductividad térmica} \quad \frac{dT}{dx} \text{ gradiente de temperatura}$$

La razón es que tanto el calor como la corriente eléctrica son transportados (avanzadamente) por electrones. Un buen conductor de electricidad es generalmente buen conductor de calor.

También hay una ecuación parecida a estas dos en fluidos reales con viscosidad en términos de caudal y  $\nabla P$  presión

Resistencia = elemento circuitual

Conexiones simples de resistencia

• Conexión en paralelo: Si tenemos  $N$  resistencias  $R_1, \dots, R_N$  conectadas a la misma diferencia de potencial y por cada  $R_i$  pasa cierta  $i$ :  $i = \sum_{i=1}^N i$  entonces

$$i_i = \frac{V}{R_i} \Rightarrow i = V \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} = \frac{V}{R_{\text{eq}}} \quad \text{con } R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

• Conexión en serie: Si conectamos  $N$  resistencias en serie por todos circula la misma  $i$  y tienen cada una una caída de tensión  $V_i$ . Así  $V_i = i R_i$  luego  $V = \sum_{i=1}^N V_i = i \sum_{i=1}^N R_i$

$$\text{Así } R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N R_i$$

• Variación de la resistencia con la temperatura

En la práctica se encuentra que la resistividad cambia con la temperatura, o sea  $\rho = \rho(T)$

Majia 18

Si hacemos una serie de potencias alrededor de  $T_0$  ( $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ) resulta:

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} (T - T_0) + O[(T - T_0)^2] = \rho(T_0) [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$\alpha = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} \approx \bar{\alpha} = \frac{1}{\rho(T_0)} \frac{\rho(T) - \rho(T_0)}{T - T_0} \quad \text{a } \bar{\alpha} \text{ se lo conoce como:}$$

$\bar{\alpha}$  = coeficiente medio de temperatura de la resistividad

### ● Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias

La ecuación de continuidad expresa el principio de conservación de la carga (válida en fluidos y cuántica). Consideremos una superficie cerrada  $S$  que intercambia carga con el exterior vía una densidad de corriente  $\vec{J}$ . La corriente que ingresa a  $V(S)$  es:

$$i = \iint_S dS \vec{J} \cdot \hat{n} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{y } \hat{n} \text{ es el vector saliente. Por otro lado la carga interior}$$

$$\text{estará dada por: } Q(t) = \iiint_V d^3r' \rho(t, \vec{r}') \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_V d^3r' \rho(t, \vec{r}') \right) = \iiint_V d^3r' \frac{\partial \rho(t, \vec{r}')}{\partial t}$$

(asumiendo que no se deforma el material). La conservación de la carga implica que todo lo que entra se acumula o lo que sale se pierde.

$(\vec{J} \cdot \hat{n} > 0 \text{ sale carga})$   
 $(\vec{J} \cdot \hat{n} < 0 \text{ entra carga})$

Por lo tanto  $\iint_S dS \vec{J} \cdot \hat{n} + \iiint_V \frac{\partial \rho(t, \vec{r}')}{\partial t} = 0$

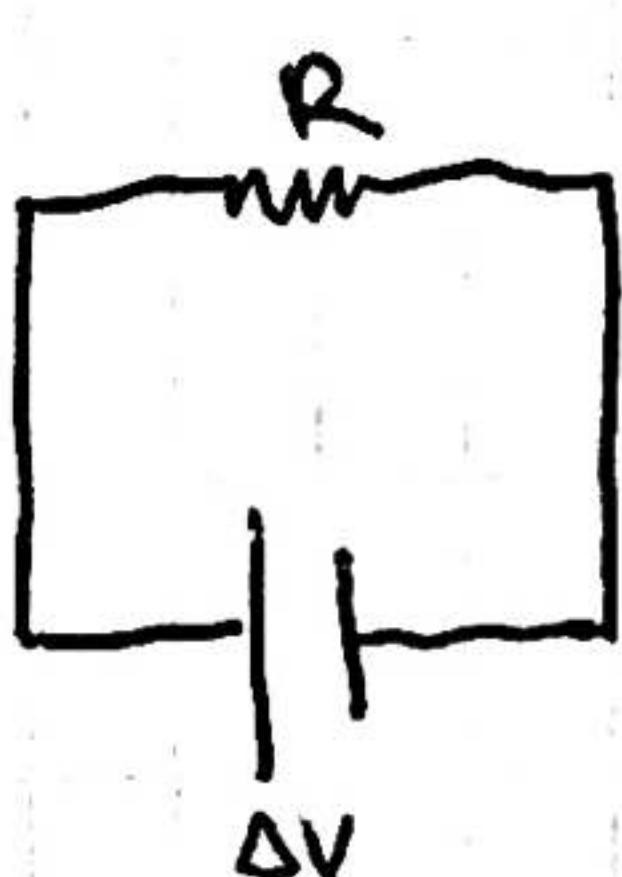
Usando teo de la div.  $\iiint_V d^3r' \left[ \frac{\partial \rho(t, \vec{r}')}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} \right] = 0$ . Y como vale  $\nabla \cdot \vec{V}$  se sigue

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{ecuación de continuidad}}$$

En el caso particular que no se acumule carga en ningún lugar  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , y se sigue

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \vec{J} \quad \text{regimen estacionario}$$

Ejemplo:



estacionario  
 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$



carga de capacitor  
state de estacionario

## Circulación del campo eléctrico. Fuerza electromotriz

Debido al rozamiento, para mantener la corriente eléctrica en un circuito es necesaria la existencia de fuerzas externas (digamos químicas) no conservativas que compensen la energía disipada por los choques

Circulación sin f.e.m.: Tomemos una espira cerrada de material Ohmico y supongamos que

circule una corriente eléctrica en un determinado campo  $\bar{E}$ . Sabemos que los electrones

reciben  $\bar{F} = -e\bar{E}$  y  $\bar{E}$  debe satisfacer  $\nabla \cdot \bar{E} = 0$  o análogo  $\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$ . Ya que

los electrones solo circulan por la espira nos ocuparemos solo de la componente paralela  $d\bar{l}$ .

Si el material es Ohmico  $\bar{J} = G\bar{E} \Rightarrow 0 = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \oint \frac{\bar{J}}{G} \cdot d\bar{l} = \oint \bar{J} \cdot d\bar{l}$

$$\approx (\rho \circ p) J \cdot l > 0 \text{ lo que resulta contradictorio (a menos que } \rho = 0)$$

No es posible que el flujo  $\bar{J}$  se mantenga constante en t.

Si  $J = 0 \Rightarrow$  no hay conducción

Si  $\rho = 0 \Rightarrow$  superconductor

Circulación con f.e.m.: Supongamos el mismo circuito, pero ahora hay una batería en cierto punto del circuito. Dentro de la batería se hace un trabajo por unidad de carga  $\frac{W}{q}$ . Los electrones sufren una cierta fuerza "química" no conservativa  $\bar{F}_{quim}$ . Así podemos imaginar un campo no conservativo  $\frac{\bar{F}_{quim}}{q}$ . Sean dos puntos a, b del circuito que encierran la batería.

$$\bar{J} = G \left( \bar{E} + \frac{\bar{F}_{quim}}{q} \right) \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{G} \bar{J} - \frac{\bar{F}_{quim}}{q}; \text{ integrando resulta}$$

$$\int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_a^b \frac{1}{G} \bar{J} \cdot d\bar{l} - \int_a^b \frac{\bar{F}_{quim}}{q} \cdot d\bar{l}$$

$$\text{Analizando cada término} \quad \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_a^b \nabla V \cdot d\bar{l} = V(a) - V(b)$$

$$\int_a^b \frac{1}{G} \bar{J} \cdot d\bar{l} = \frac{\bar{J} \Delta l}{G} = \frac{i \Delta l}{A/G} = i \left( \frac{\Delta l}{AG} \right) = iR$$

$$\int_a^b \frac{\bar{F}_{quim}}{q} \cdot d\bar{l} = E \equiv \text{fuerza electromotriz. y } E \text{ es un trabajo } (\bar{F}_{quim} \cdot d\bar{l}) \text{ por unidad de carga. Denominado f.e.m } [E] = \text{Volts}$$

Consideramos  $E > 0$  pues  $\bar{F}_{quim} \cdot d\bar{l} > 0 \Rightarrow \bar{F}_{quim}$  trabaja en la dirección  $d\bar{l}$ , si no negativa

$$\text{Así } V(a) - V(b) = iR - E \quad (\text{Si } a=b \Rightarrow E=iR \text{ lo esperado})$$

### ● Ley de Joule

Consideremos un circuito simple: Una batería conectada a un aparato, por el circuito circula una corriente  $i$  y entre los extremos del aparato hay una dif. de potencial  $V$ . Un diferencial de carga  $dq$  que se mueve entre los extremos del aparato disminuye su energía potencial  $dU$

$$dU = Vdq = V(idt) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Vi = \frac{\text{Joule}}{\text{Segundo}} = \text{potencia} = \text{Watt}$$

Esta es la potencia  $W$  entregada por la batería al aparato, así

$$W = Vi \quad \text{Ley de Joule}$$

Si el aparato es equivalente a una resistencia  $W = Vi = R i^2 = \frac{V^2}{R}$  energía dissipada (irreversible)

Si el aparato es un capacitor o inductor  $\exists$  energía acumulada (reversible)

### ● Leyes de Kirchoff

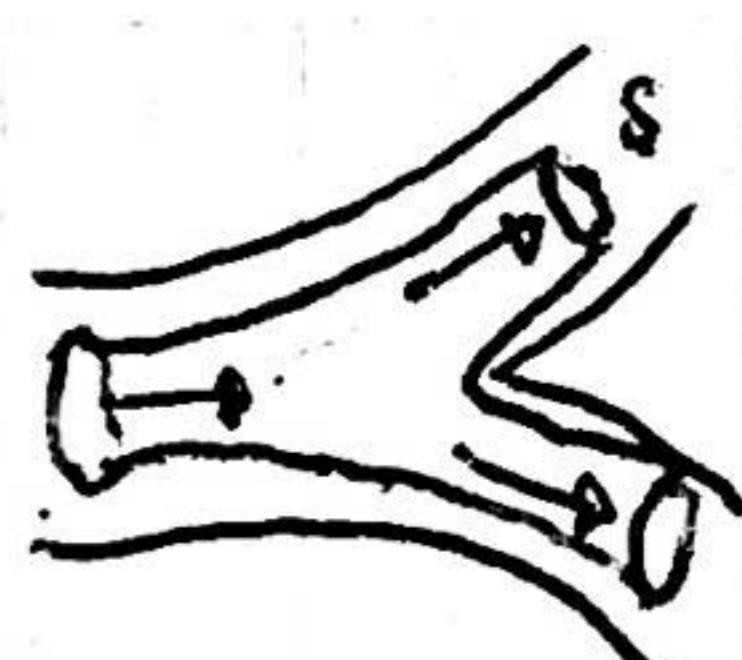
Las dos leyes constituyen dos reglas que permiten resolver los sistemas de manera sistemática

#### Definiciones:

- Rama: Todo conjunto de elementos conectados en serie de forma que la corriente que circula por ellos es la misma
- Nodo: Intersección de tres o más ramas (branch point)
- Malla: Recorrido cerrado sobre ramas del circuito (loop)

1era ley. Ley de nodos: La suma algebraica de las corrientes que salen de un nodo es nula.

$\sum i_k = 0$ . Es una aplicación de la corriente estacionaria  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Si encerramos el nodo con una superficie cerrada



$$0 = \oint_S ds \vec{J} \cdot \hat{n} = \sum_{n=1}^N \vec{J}_n \cdot \vec{S}_n = \sum_{n=1}^N i_n$$

Justificamos que la corriente encerrada por  $S$  no puede variar pues no hay elementos activos que suministren o almacenen.  $\Rightarrow$  la corriente que entra = la que sale

2da ley. Ley de mallas: La suma algebraica de las caídas de potencial a lo largo de un circuito cerrado debe ser nula, o sea:

$$\sum_n E_n - \sum_j i_j R_j = 0 \quad \text{con } i_j \text{ la corriente}$$

que circula por  $R_j$

Como demostración

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\frac{1}{q} \oint \vec{T} \cdot d\vec{l}}_{\sum_j i R_j} - \underbrace{\oint \frac{\vec{F}_{\text{externo}} \cdot d\vec{l}}{q}}_{\sum_i E_i}$$

Resistencia interna (Batería real)

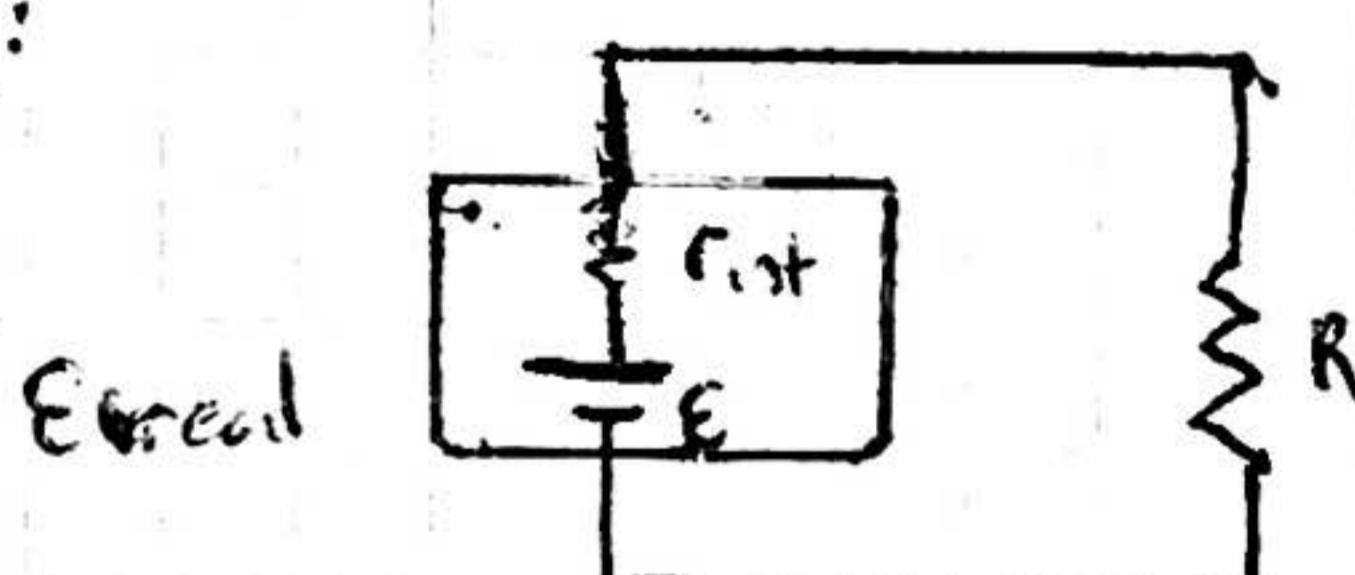
Las baterías tienen resistencia interna. Se puede demostrar su existencia haciendo un cortocircuito entre sus bornes. Así  $i = \frac{E}{R} = \frac{E}{0} = \infty$ , que no es cierto, si no que se llega a cierta corriente

$i_{\text{máx}} = \frac{E}{r_{\text{int}}}$ . Así la fuerza electromotriz real  $E_{\text{real}} = E(i)$  no es  $E$  ideal. La forma

sencilla de modelarlo es  $E_{\text{real}} = E_{\text{ideal}}(i) = E - ir_{\text{int}}$ . Si no hay corriente circulando

$E_{\text{real}}(0) = E$  y mientras  $i$  aumenta disminuye  $E_{\text{real}}$

Ejemplo:



$$E = i(r_{\text{int}} + R) \Leftrightarrow i = \frac{E}{(r_{\text{int}} + R)}$$

Así la potencia disipada en  $R$  es  $P_R = i^2 R$

$$P_R = \left( \frac{E}{(r_{\text{int}} + R)} \right)^2 R$$

Para reducir la resistencia interna conviene apilar pilas

en paralelo.  $\begin{cases} r_i = r_{i1} + r_{i2} & \text{serie} \\ r_i^{-1} = \frac{1}{r_{i1}} + \frac{1}{r_{i2}} & \text{paralelo} \end{cases}$

## ● Magnetismo

La fuerza que sufre una partícula con carga  $q$  y velocidad  $\vec{v}$  en presencia de un campo magnético  $\vec{B}$  está dada por  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

El campo  $\vec{B}$  es ocasionado por corrientes eléctricas.

Ley de Biot & Savart

Se encuentra experimentalmente que un diferencial de circuito  $d\vec{l}_1$  situado en  $\vec{r}_1$  por el que circula una corriente  $i_1$  genera un  $d\vec{B} = k_m \frac{i_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$

Si el circuito es cerrado (y debe serlo) entonces el campo generado por la espira es:

$$\vec{B} = k_m \oint \frac{i_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad \text{con } k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = \text{constante magnética}$$

$$\mu_0 = 4\pi \text{ exp}^{-7} \frac{\text{Tesla.m}}{\text{Ampere}} = \text{permisividad magnética del vacío.}$$

$$[B] = \text{Tesla} = \frac{\text{N.seg}}{\text{C.m}} = \frac{\text{kg}}{\text{C.m}} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} = \text{exp}^4 \text{ Gauss}$$

Para medir  $\vec{B}$  necesito dos mediciones,  $\vec{F}_1$  con  $q, \vec{v}_1$  y  $\vec{F}_2$  con  $q, \vec{v}_2 / \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

y resulta así:

En cambio para  $\vec{E}$  una medición basta pues  $\vec{E} \parallel \vec{F}$

El campo magnético de la Tierra  $\approx 0,5$  Gauss ;  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  speed of light

Las fuerzas magnéticas no realizan trabajo

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\text{Pero } \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB \hat{n} / \begin{matrix} \hat{n} \perp \vec{v} \\ \hat{n} \perp \vec{B} \end{matrix}$$

$$\text{así } dW = 0$$

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Fuerza magnética sobre una corriente

Una corriente es un conjunto de cargas en movimiento, por la relación de Lorentz es natural pensar que el campo magnético  $\vec{B}$  ejerce fuerza sobre un hilo conductor que circula  $i$ . Supongamos un segmento de un conductor de longitud  $d\ell$  (de un alambre  $S-10$ ) por el cual circulan cargas eléctricas  $+e$  en el sentido de  $i$ . La carga encerrada en un volumen  $dV = S d\ell$  es  $dq = e N_e = e n dV = e n S d\ell$

con  $e$  = carga del electrón y  $n = \frac{N_e}{dV} = \frac{N_e}{S d\ell}$  densidad de electrones

Estos electrones se desplazan con  $\vec{v}_0$ . Por la ley de Biot & Savart nos dice que en presencia de  $\vec{B}$  sufre un  $d\vec{F} = dq \vec{v}_0 \times \vec{B} = e n d\ell S \vec{v}_0 \times \vec{B} = dV e n \underbrace{\vec{v}_0 \times \vec{B}}_{\vec{J}} = dV \vec{J} \times \vec{B}$  con  $\vec{J}$  densidad de corriente. Para el conductor lineal hacemos

$$dV \vec{v}_0 = S d\ell \vec{v}_0 = S v_0 d\ell \text{ pues } \vec{v}_0 \parallel d\ell \Rightarrow \vec{v}_0 d\ell = v_0 d\ell$$

$$\text{Así } d\vec{F} = e n S v_0 d\ell \times \vec{B} = i d\ell \times \vec{B} \quad i = \iint_S d\ell \vec{J} \cdot \hat{n} = e n S v_0$$

También puede ser que la corriente se desplace en una superficie, así  $d\vec{F} = d^2 s \vec{g} \times \vec{B}$   $\vec{g}(s)$  = densidad superficial de corriente  $i = \int d\ell_1 \cdot \vec{g} = \int d\ell_1 \hat{n} \cdot \vec{g}$

donde  $d\vec{l}_1$  es la longitud transversal del segmento y  $\hat{n}$  su perpendicular. Así

$$\vec{F} = \left\{ \begin{array}{l} \oint i_1 d\vec{l}_1 \\ \oint dS_1 \vec{g}(\vec{r}_1) \\ \int d^3 r_1 \vec{J}(\vec{r}_1) \end{array} \right\} \times \vec{B}(\vec{r}_1)$$

También el campo magnético  $\vec{B}$  puede ser generado por una corriente lineal,  $\vec{g}$  o  $\vec{J}$

$$\vec{B} = \left\{ \begin{array}{l} \oint i_1 d\vec{l}_1 \\ \oint dS_1 \vec{g}(\vec{r}_1) \\ \int d^3 r_1 \vec{J}(\vec{r}_1) \end{array} \right\} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

### • Acción y reacción

Consideremos la acción de dos espiras  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  con corrientes  $i_1$  e  $i_2$ . Por Biot & Savart  $\vec{F}_{12} = i_1 \oint_{\mathcal{E}_1} d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) = i_1 \oint_{\mathcal{E}_1} d\vec{l}_1 \times k_m \oint_{\mathcal{E}_2} i_2 d\vec{l}_2 \times \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{12} = k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{E}_1} \oint_{\mathcal{E}_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$$\text{Por otro lado } \vec{F}_{21} = k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{E}_2} \oint_{\mathcal{E}_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{|\vec{r}_{21}|^3}$$

$$d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}) = \underbrace{d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12})}_{= -\vec{r}_{21}} - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{12}$$

$$\text{El primer término se anula pues } k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{E}_2} \oint_{\mathcal{E}_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} = 0$$

quedando solo el segundo término

$$\vec{F}_{12} = -k_m i_1 i_2 \oint_{\mathcal{E}_1} \oint_{\mathcal{E}_2} \frac{(d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} = -\vec{F}_{21} . \text{ Entonces vale acción y reacción}$$

La generalización a  $\vec{g}$  y  $\vec{J}$  es inmediata.

### • Movimiento de una partícula en un campo magnético

Sea una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  con velocidad  $\vec{v}(t)$  en un campo magnético  $\vec{B}$

$$\text{Sufre así una fuerza de Lorentz } \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ newton}$$

Hojas 21

Que se puede resolver como 6 ec de orden 1 acopladas

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m} F_x(V_x, V_y, V_z, r_x, r_y, r_z, t); \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{m} F_y(\bar{V}, \bar{r}, t); \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{m} F_z(\bar{r}, \bar{V}, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x; \quad \frac{dy}{dt} = V_y; \quad \frac{dz}{dt} = V_z \quad \text{con } 6 \text{ ci } \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0; \quad \bar{V}(t_0) = \bar{V}_0$$

Veamos un caso sencillo: Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  ingresa con  $\bar{V} = V\hat{e}_x$  a un  $\bar{B}$  perpendicular  $\bar{B} = B\hat{e}_z \Rightarrow \bar{F} = q\bar{V} \times \bar{B} = qvB\hat{e}_y$  sufre fuerza central.

Así se produce un mci con aci con radio de giro  $r$  y  $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$$F = qvB = ma_c = m\omega^2 r = m\omega v = m\frac{v^2}{r}$$

Así  $\omega = \frac{q}{m} B$ ;  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B$  frecuencia de ciclotrón

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \text{radio de giro}$$

### Efecto Hall (1879)

11 Cap 22.

• Potencial vector  $\bar{A}$

$$\text{Como } \nabla \cdot \bar{B} = 0 \Rightarrow \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

$$\text{Se define } \bar{A}(\bar{r}) = \text{km} \left\{ \begin{array}{l} \oint i d\bar{l}' \\ \iint d\bar{s}' \bar{J}(\bar{s}') \\ \int d^3 r' \bar{J}(\bar{r}') \end{array} \right\} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

Vemos que efectivamente  $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$

$$\nabla \times \left( \text{km} \left( \int d^3 r' \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \right) = \text{km} \left\{ \nabla \times \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) d^3 r' \right\}$$

(utilizo punto)

Utilizando que  $\nabla \times (\lambda \bar{C}) = \lambda \nabla \times \bar{C} + \bar{C} \times \nabla \lambda$

$$\nabla \times \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \nabla \times \bar{J}(\bar{r}') + \nabla \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \times \bar{J}(\bar{r}')$$

$$= -\bar{J}(\bar{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right)$$

$$\text{Así } \nabla \times \bar{A} = -\text{km} \left\{ \int d^3 r' \bar{J}(\bar{r}') \times \left( \frac{-(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} \right) \right\} = \bar{B}$$

Observar que si  $\bar{A}_2 = \bar{A} + \bar{f}$  donde  $\bar{f}$  es un campo irrotacional  $\Rightarrow$

$$\bar{B}' = \nabla \times \bar{A}_2 = \nabla \times \bar{A} + \nabla \times \bar{f} = \nabla \times \bar{A} = \bar{B}$$

Definirnos fijar la medida al fijar  $\nabla \cdot \bar{A}$ . En el caso estático  $\nabla \cdot \bar{A} = 0$  medida de Gauß

$$\nabla \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = \underbrace{\nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}')}_{=0} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} + \bar{J}(\bar{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right)$$

$$\nabla' \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = \underbrace{\nabla' \cdot \bar{J}(\bar{r}')}_{\text{corriente}} \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} + \bar{J}(\bar{r}') \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \quad \text{pues}$$

estacionaria magnetostática

$$\text{Luego } \nabla' \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = -\nabla \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right)$$

$$\text{Así } \nabla \cdot \bar{A} = \text{km} \int_{R_3} d^3 r' \nabla \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = -\text{km} \int_{R_3} d^3 r' \nabla' \left( \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = -\iint_{S(R_3)} d\bar{s}' \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \cdot \hat{n} = 0$$

Pues  $\bar{J}(\bar{r}')$  es nula en el infinito.

## Ley de Gauss y Ampere

de Gauss local

Ley

La divergencia es nula  $\nabla \cdot \bar{B} = 0$  pues  $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$  osea no hay fuentes de  $\bar{B}$ .

Las líneas de  $\bar{B}$  son cerradas y no existen monopolos magnéticos.

$$\text{Así } \int_V dV \cdot \nabla \cdot \bar{B} = \iint_S dS \cdot \bar{B} \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{ley de Gauss en magnetismo global}$$

Análogo a la electricidad llamo  $d\phi_B = dS \bar{B} \cdot \hat{n}$  diferencial de flujo magnético resulta que la integral sobre una superficie cerrada de  $\phi_B$  es cero:

$$\nabla \times \bar{B} = \nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla^2 \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$$

$$\text{Así } \nabla \times \bar{B} = -\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \int d^3 r' \bar{J}(r') \frac{1}{|r - r'|} = 4\pi \mu_0 \bar{J}(r)$$

$\underbrace{\phantom{d^3 r' \bar{J}(r')} \quad}_{-4\pi \delta(r - r')}$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}(r) \quad \text{Ley de Ampere local}$$

$$\iint_S dS \cdot (\nabla \times \bar{B}) = \mu_0 \iint_S dS \cdot \bar{J}(r) = \int_S \bar{B} \cdot d\ell \quad \text{equivalente a la ley de Ampere global}$$

(útil en simetría cilíndrica)

## Propiedades del potencial vector

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \bar{A} = 0 \quad (\text{Gauge de Coulomb})$$

Supongamos que partimos de nuestro gauge de Coulomb, podemos construir cualquier potencial vector  $\bar{A}_\lambda$  /  $\bar{A}_\lambda = \bar{A} + \nabla \cdot \lambda$   $\bar{B}_\lambda = \bar{B}$ . Hay así expresiones de  $\lambda$  que producen un  $\bar{A}_\lambda$  más conveniente en cada situación.

$$\text{Aun así, el gauge de Coulomb no es único} \quad 0 = \nabla \cdot \bar{A}_\lambda = \nabla \cdot \bar{A} + \nabla^2 \lambda = \nabla^2 \lambda$$

o sea que vale  $\nabla^2 \lambda = 0$  o sea infinitos  $\bar{A}_\lambda$  posibles (como la constante de  $\nabla$ )

## Potencial magnético escalar

$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$ . Si estamos lejos de la fuente  $\bar{J}(r) = 0$ , así  $\nabla \times \bar{B} = 0$ . Podemos así pensar que hay un potencial escalar magnético  $V_m$  /  $\bar{B} = -\nabla V_m$ . Si además aplicamos la ley

de Gauss,  $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ , así  $V_m$  satisface Laplace  $\nabla^2 V_m = 0$   $\therefore$  lejos de las fuentes

$\bar{E}$  y  $\bar{B}$  son similares matemáticamente

También en un volumen donde  $\bar{J} = 0$

## • Expansión multipolar de $\bar{A}$

Objetivo: Determinar la expresión del campo magnético a grandes distancias.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{A}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} k_m \oint \frac{i d\bar{l}'}{|r - \bar{r}'|^3} = k_m \oint i d\bar{l}' \left[ \frac{1}{r} + \frac{\bar{r}_0 \bar{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} (3(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 - r'^2 r^2) + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \right]$$

$$= k_m \frac{i}{r} \oint d\bar{l}' + k_m \frac{i}{r^3} \underbrace{\oint d\bar{l}' (\bar{r} \cdot \bar{r}')}_{\text{cuadrupolo}} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

con  $r \gg$  dimensiones del cuerpo

$\oint d\bar{l}' = 0$  no hay monopolos magnéticos.

$$\oint d\bar{l}' (\bar{r} \cdot \bar{r}') = \iint d^2 s' \hat{n}' \times \nabla' (\bar{r} \cdot \bar{r}') = \iint d^2 s' \hat{n} \times \bar{r}$$

$s' = \partial \bar{s}'$        $s' = \partial \bar{s}'$



$$\text{Reemplazando } \bar{A}(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} k_m \left( i \iint d^2 s' \hat{n} \right) \times \bar{r} = k_m \frac{\bar{m} \times \bar{r}}{r^3}$$

$$\bar{m} = i \iint d^2 s' \hat{n} = i S \hat{n} \text{ dipolo magnético}$$

La contribución más importante a grandes

distancias es el dipolo magnético (corriente por área)  
en  $\hat{n}$

$$\text{Así } \boxed{\bar{A}_{\text{dip}} = k_m \frac{\bar{m} \times \bar{r}}{r^3}}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{m} &= \frac{i}{2} \oint \bar{r}' \times d\bar{l}' \text{ otra expresión,} \\ &\text{usada para Kepler mostrando} \\ &\text{velocidad acelerar constante} \end{aligned} \right)$$

## • Dipolo magnético

Sale inmediato, el campo generado por un dipolo es:  $\bar{B}_{\text{dip}} = \nabla \times \bar{A}_{\text{dip}}$

$$\Rightarrow \bar{B}_{\text{dip}} = \nabla \times \bar{A}_{\text{dip}} = \nabla \times \left( k_m \frac{\bar{m} \times \bar{r}}{r^3} \right) = k_m \left[ -(\bar{m} \cdot \nabla) \frac{\bar{r}}{r^3} + \bar{m} \left( \nabla \frac{1}{r^3} \right) \right]$$

$$\text{haciendo cuentas } \bar{m} \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{\bar{m}}{r^3} - \frac{3(\bar{m} \cdot \bar{r})}{r^5} \bar{r} \quad y \quad \nabla \bar{r} = 0$$

$$\text{Así } \bar{B}_{\text{dip}} = \frac{k_m}{r^3} [3(\bar{m} \cdot \bar{r}) \hat{r} - \bar{m}] \quad \text{Como el dipolo eléctrico con } \bar{B} \equiv \bar{E} \text{ y } \bar{m} \equiv \bar{p}; \text{ k_m k_e}$$

$$\text{Así podemos inferir su potencial magnético escalar } V_m = k_m \frac{\bar{m} \cdot \bar{r}}{r^3} \quad y \quad \bar{B} = -\nabla V_m$$

## • Dipolo magnético en un campo magnético

$$\text{Supongamos un dipolo } \bar{m} \text{ y un campo } \bar{B} \text{ constante. } \bar{F} = \oint d\bar{F} = \oint i d\bar{l} \times \bar{B} \quad \left| \begin{array}{l} \text{g.cte} \\ = 0 \end{array} \right. = i \left( \oint d\bar{l} \right) \times \bar{B}$$

así  $\bar{F} = 0$  como en el campo eléctrico.

De todas formas sufre un torque, tratando el dipolo como un rígido

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint \vec{r} \times d\vec{F} = \oint \vec{r} \times (\sigma d\vec{l} \times \vec{B}) = \oint \left[ \vec{B}(\vec{r}, \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{r}) \right] \\ &= i \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot (\vec{r}, \vec{B}) - i \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot (d\vec{l}, \vec{r}) = i \iint_S d\vec{S} \times \nabla(\vec{r}, \vec{B}) - i \vec{B} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Así,  $\vec{G} = i \iint_S d\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$  igual al cargo eléctrico

Veamos la energía potencial ( $U$ ) de un dipolo en un  $\vec{B} = \text{cte.}$

$$U = \int_{\mathcal{C}} dU = \int_{\mathcal{C}} \vec{G} \cdot d\vec{\theta} = \int_{\mathcal{C}} (\vec{m} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\theta} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$
 energía potencial

Por último, la fuerza que siente un dipolo en un campo variable externo

$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{m} + \vec{m} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{m})$$

$= 0 \quad = 0 \quad = 0$   
 $\Rightarrow \vec{F} = 0$  (no hay corrientes ley de  $\vec{B}$ ) (fuerza)

Así,  $\vec{F} = (\vec{m} \nabla) \vec{B} = \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (B_x, B_y, B_z)$  como en electricidad

Si pensamos que  $\vec{B}$  es generado por un bobinado de espiras al que podemos asignar un dipolo

$\vec{M} = \Sigma m_i$ , al actuar sobre  $\vec{m}$  lo atraerá o repelerá como en electricidad

### • Ley de Faraday (1831)

Sea una espira  $\mathcal{C}$  (circuito),  $\mathcal{C} = \partial S$  abierta y  $\hat{n}$  su normal. En ausencia de campos y baterías en el circuito resulta obvio que la corriente que circula en la espira es nula. Si la atraviesa un campo magnético  $\vec{B}$  decimos que encierra un flujo magnético  $\Phi_B$  /

$\Phi_B = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \cdot \hat{n}$ . La ley de Faraday dice que el cambio temporal del flujo magnético produce una f.e.m en el circuito  $E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

Hecho experimental que combina ley de Coulomb y Biot & Savart. El signo menos indica que la f.e.m se opone a la variación de flujo (Ley de Lenz). Físicamente una variación temporal del flujo se genera un campo eléctrico  $\vec{E}$  cuya integral curvilinea cerrada nos da la f.e.m  $E = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Esta f.e.m genera una corriente eléctrica tal como una batería pero no está localizada.

Se desplaza a través del circuito.  $E = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{1}{2} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}$  usando Stokes

$$\iint_S d\vec{S} \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}$$
 (asumiendo no deformaciones)

Como esto vale en todo circuito  $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  generalizando  $\nabla \times \bar{E} = 0$  en los casos estacionarios que  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$

Este campo no tiene origen de una diferencia de potencial /  $\bar{E} = -\nabla V$  sino que de  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ .

$$\text{Veamos } E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S dS \nabla \times \bar{A} \cdot \hat{n} = -\oint \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \cdot d\bar{l}$$

Stokes

$$\Rightarrow \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \text{ Si además hubiera baterías}$$

$$\boxed{\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}}$$

Algunos detalles: Si hay  $N$  espiras  $\phi_B$  considera todas, y si tienen igual área  $\phi_B \Rightarrow N\phi_B$ . Si  $E > 0$  la circulación es  $\parallel d\bar{l}$  o sea  $\bar{E} \parallel d\bar{l}$ , sino, al contrario.

### ● Inducción electromagnética

#### Autoinductancia

Sea un circuito  $\mathcal{C}_1$  por el cual circula una corriente  $i_1(t)$ , según Biot & Savart genera un  $\bar{B} = k_m i_1 \oint \frac{d\bar{l} \times (\bar{r} - \bar{r}_1)}{4\pi r^3}$  y produce un flujo  $\phi = \iint dS \bar{B} \cdot \hat{n}$

La ley de Faraday nos indica que también aparece una fem  $\varepsilon$  cuando hay una variación del flujo propio  $\phi$  ya sea por una variación de la corriente  $i_1(t)$  o por una variación de la forma de la espira  $C_1(t)$ . A este fenómeno se lo llama autoinducción. Suponiendo un circuito rígido y que  $\phi$  sólo depende temporalmente de  $i_1$ , tenemos

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt},$$

donde hemos definido la autoinductancia  $L$  tal que

$$L = \frac{d\phi}{di}, \text{ autoinductancia}.$$

La unidad es el Henry

$$[L] = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} = \frac{\text{Volt} \times \text{seg} \times \text{seg}}{\text{Coulomb}} = \text{Henry}.$$

En este caso  $\phi = L i$  (análogo a  $V = Ri$ )

#### Inductancia mutua

Consideremos dos circuitos próximos  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  por el cual circulan corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ . Así las fem inducidas son:  $\varepsilon_j = -\frac{d\phi_j}{dt}$   $j=1,2$

con  $\phi_1$  y  $\phi_2$  los flujos encerrados por  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ . Si están próximos  $\bar{B}_1(t)$  alcanza a  $\phi_2$  y suma al flujo generado por  $i_1(t)$  y viceversa.  $\Rightarrow \phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}; \phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$

De esta forma podemos escribir  $E_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(\phi_{11} + \phi_{12}) = -\frac{d\phi_{11}}{dt} - \frac{d\phi_{12}}{dt}$

$$\Rightarrow E_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} : L_{ij} = \frac{d\phi_{ij}}{dt} \equiv \text{coeficiente de inductancia mutua}$$

$$* \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \text{o sea } \vec{E} = \vec{L} \cdot \frac{d}{dt} \vec{i}$$

• Fórmula de Neuman: Probemos  $L_{ij} = L_{ji}$

$$\text{Partamos de las definiciones. } L_{12} = \frac{d\phi_{12}}{di_2} = \frac{d}{di_2} \iint_{S_1} dS_1 \vec{B}_2(\vec{s}_1) \cdot \hat{n} =$$

$$= \frac{d}{di_2} \left( \iint_{S_1} dS_1 \left( k_m i_2 \oint_{\vec{C}_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right) \cdot \hat{n} \right)$$

$$\text{Usando que } \oint_{\vec{C}_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \nabla_1 \times \left( \oint_{\vec{C}_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right)$$

$$L_{12} = \frac{d}{di_2} \iint_{S_1} k_m dS_1 \left( \nabla_1 \times \left( \oint_{\vec{C}_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) \cdot \hat{n} \right) = k_m \iint_{S_1} dS_1 \nabla_1 \times \left( \oint_{\vec{C}_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) \cdot \hat{n}$$

$$\text{Usando Stokes: } L_{12} = k_m \iint_{\vec{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \text{ que es análogo en } L_{21}$$

$$\text{Y la autoinducción será } L_{11} = k_m \iint_{\vec{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_1|}$$

Hay que tener cuidado de dos ciertas anchoas a los conductores para renover la singularidad en el denominador y luego tender el ancho a cero

### Ensamble de bobinas

Tercer elemento circuital. Se pueden conectar en serie o paralelo.

Consideremos que se encuentran lejos y podemos despreciar la inductancia mutua

Sí conectamos  $L_{11}, \dots, L_n$  inductancias en paralelo. Los extremos estarán a potencial y por cada inductancia pasa  $\frac{di_1}{dt}, \dots, \frac{di_n}{dt}$  / si  $i = i_1 + \dots + i_n$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{di_j}{dt} = -\frac{E}{L_j} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} = \frac{d(i_1 + \dots + i_n)}{dt} = -E \left( \frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) = -\frac{E}{L} = \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow (L_{eq})^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

Sí ahora las conectamos en serie por todos pondrá igual  $\frac{di}{dt}$  y cada una tendrá caídas de tensión  $E_j \Rightarrow E_j = -L_j \frac{di}{dt}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \epsilon_j = \sum_{j=1}^n -L_j \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt} = E \Rightarrow L_{eq} = \sum_{j=1}^n L_j$$

Ahora consideremos que si interactúan y haya inducción mutua. Veamos solo dos.

En paralelo

$$E = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \Rightarrow i = i_1 + i_2 \text{ con } E = -L \frac{di}{dt}$$

$$E = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{Haciendo } L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \rightarrow \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

∴ en el límite  $M \rightarrow 0$  recobramos lo anterior.

En serie

$$\epsilon_1 = (-L_1 - M) \frac{di}{dt}; \quad \epsilon_2 = (-L_2 - M) \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow E = \epsilon_1 + \epsilon_2 = (-L_1 - M) \frac{di}{dt} + (-L_2 - M) \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M \rightarrow L_1 + L_2$$

Ejemplo: Si usamos a  $M$  como sintetizador podemos variar con una perilla  $\hat{B}_2 \cdot \hat{S}_1$

$$M = L_{12} = \frac{d\phi}{dt} \sim \hat{B}_2 \cdot \hat{S}_1 = B_2 S_1 \hat{B}_2 \cdot \hat{S}_1 \Rightarrow |L_1 + L_2 - 2|M| < L < |L_1 + L_2 + 2|M|$$

## • Energía magnetostática

### • Energía acumulada por un circuito

Empezaremos determinando la energía necesaria para hacer circular  $i$  por un circuito de

autoinductancia  $L$ . Connectemos el circuito a una batería con fem  $E$ . Comenzamos a circular  $i$  casi instantáneamente corriente hasta tener  $i$  con la ayuda de una resistencia  $R$ .

Aplicando Kirchhoff  $iR = E - \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow i^2 R = iE - i \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow iE = i^2 R + i \frac{d\phi}{dt}$

$= i^2 R + \frac{d}{dt} \left( L \frac{i^2}{2} \right)$  Así  $W_{fem} = W_R + W_L$   $\phi$  es el auto flujo magnético (auto)

$iE$  es la potencia entregada por la batería ( $W_{fem}$ ).  $i^2 R$  es la pot dissipada por  $R$  ( $W_R$ )  $W_L = i \frac{d\phi}{dt}$  potencia almacenada por la espira con  $\phi = \phi(t)$ ,

el flujo magnético: Como  $W_L = \frac{dU}{dt} \Rightarrow dU = W_L dt$

$$\Rightarrow U = \int_0^t W_L(t) dt = \int_0^t \left( i \frac{d\left( \frac{L i^2}{2} \right)}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} L i^2$$

$$\text{donde } i = i(t \rightarrow \infty) \quad \text{y} \quad L = i\phi \Rightarrow U = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \phi i = \frac{1}{2L} \phi^2$$

Energía acumulada por ensamblaje de circuitos

Paramos a un sistema de circuitos acoplados. Usando superposición

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1} \underbrace{\phi_j}_{\phi_j} i_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1} i_j \left( \sum_{i=1} \phi_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1} i_j \left( \sum_{i=1} L_{ji} i_i \right) = \left( \frac{1}{2} \sum_{j,i=1} \epsilon_j L_{ji} i_i \right)$$

matricialmente

$$U = \frac{1}{2} \bar{i} \bar{\phi} = \frac{1}{2} \bar{i} \bar{L} \bar{i} \quad (\text{Como en electricidad pero aca } j=i \text{ se puede, pues autoinducción})$$

$$\phi = \iint_S dS \bar{B} \cdot \hat{n} = \iint_S dS \nabla \times \bar{A} \cdot \hat{n} = \oint_{\partial S} d\bar{l} \cdot \bar{A}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{j=1} i_j \oint_{\partial S_j} \bar{B} \cdot \hat{n}_j \cdot \bar{A} = \frac{1}{2} \sum_{j=1} \iint_{S_j} dS_j \hat{n}_j \cdot \bar{A} = \frac{1}{2} \int_{\infty} d^3r \bar{J} \cdot \bar{A}$$

$$\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \underbrace{\bar{B} \cdot \nabla \times \bar{A}}_{\bar{B}} - \bar{A} \cdot \underbrace{\nabla \times \bar{B}}_{\mu_0 \bar{J}} = \mu_0 \left( \frac{1}{\mu_0} B^2 - \bar{A} \cdot \bar{J} \right)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\infty} d^3r |\bar{B}|^2 - \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \int_{\infty} d^3r \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B})}_{\iint_S dS \hat{n} (\bar{A} \times \bar{B}) \rightarrow 0}$$

Pues en el infinito tiende a cero rápidamente

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\infty} d^3r' |\bar{B}|^2$$

$$\text{En definitiva: } U = \frac{1}{2} \int_{\infty} d^3r \bar{J} \cdot \bar{A} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\infty} d^3r |\bar{B}|^2 = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \bar{J}(\vec{r}) \frac{\bar{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

### • Materiales magnéticos

Estrictamente, en magnetismo no hay un similar a conductores ideales, simplemente no hay monopólos magnéticos que puedan comportarse como un gas de electrones libres de modo tal que hagan  $B = 0$  dentro de un determinado cuerpo. Sin embargo hay equivalentes a los dieléctricos, que son los materiales magnéticos. La física es esencialmente la misma: ante un campo magnético local los dipolos magnéticos se alinean y el medio se magnetiza. Por campo magnético local nos referimos al campo externo ( $\bar{B}_0$ ) mas los campos creados por los dipolos vecinos ( $\bar{B}_{ind}$ ). En electricidad construimos un vector de desplazamiento  $\bar{D} = \epsilon_0 \langle \bar{E} \rangle + \bar{P}$  y lo relacionamos a las cargas libres ó externas  $\rho_0$ . Aquí seguiremos un camino análogo: construiremos un vector llamado intensidad magnética  $\bar{H} = \langle \bar{B} \rangle / \mu_0 - \bar{M}$  y lo relacionaremos con las corrientes libres o externas  $\bar{J}_0$ . El magnetismo es más rico. En muchísimos casos los materiales eléctricos pueden ser considerados LIH. En magnetismo no tantos. Hay físicas muy particulares tales como el ferromagnetismo que son más comunes y variadas que los electretos.

Podemos decir que  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$ , son símiles matemáticos. La polarización eléctrica induce cargas y el campo magnético induce corrientes. En magnetismo los efectos se interpretan como cargas magnéticas o polos. Para el caso de  $M = cte$  por ejemplo, resulta que cuando  $\vec{M}(\vec{r}) \cdot \hat{n}$  sobrevive en la superficie y produce  $\sigma_M$ . Llamamos

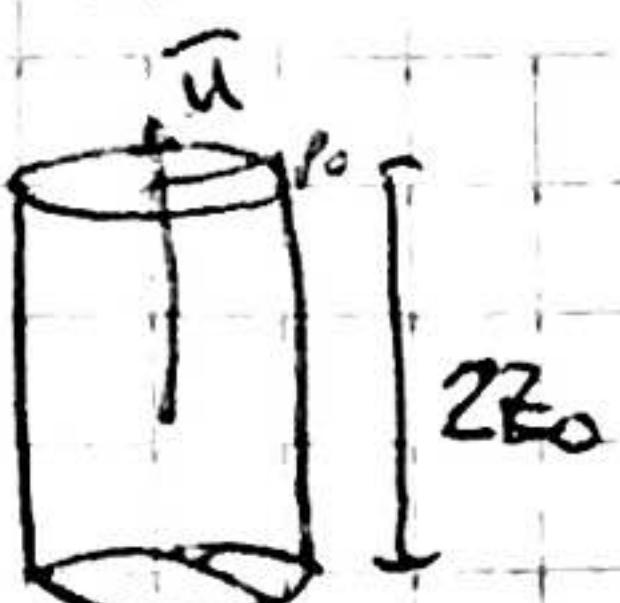
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M} \cdot \hat{n} > 0, \text{ polo norte}, \\ \vec{M} \cdot \hat{n} < 0, \text{ polo sur}. \end{array} \right. \quad (224)$$

Como siempre, se podría integrar en todo el espacio hasta el infinito, por lo cual la integral de superficie allí se me anula, y  $\rho_M$  tiene la información superficial con el salto brusco de  $\vec{M}$ . Y así lo veremos en la próxima sección.

### Efecto de bordes: Imán permanente

Vamos a calcular como son los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  de una barra imantada con  $M = cte$ .

Consideremos una barra cilíndrica de radio  $r_0$  y largo  $2Z_0$  imantada en la dirección z. La magnetización está dada por



$$\vec{M} = M_z \hat{z} = M_0 \Theta(r_0 - \rho) \Theta(|Z_0| - |z|) \hat{z}$$

Localización de los polos  $\nabla \cdot \vec{H} = \rho_M = -\nabla \cdot \vec{M} = -\nabla (M_0 \Theta(r_0 - \rho) \Theta(|Z_0| - |z|) \hat{z})$

$$\Rightarrow \rho_M = -M_0 \Theta(r_0 - \rho) \frac{\partial}{\partial z} \Theta(|Z_0| - |z|) = -M_0 \Theta(r_0 - \rho) \frac{\partial}{\partial z} [\Theta(z_0 - (-z)) - \Theta(z_0 - z)]$$

$$= -M_0 \Theta(r_0 - \rho) \delta(z_0 - (-z)) + M_0 \Theta(r_0 - \rho) \delta(z_0 - z) \quad \text{que son dos discos ubicados en más/menos } z_0 \text{ de radio } \rho \Rightarrow \begin{cases} M_0 \Theta(r_0 - \rho) \delta(z_0 - z) = \text{polo norte} \\ -M_0 \Theta(r_0 - \rho) \delta(z_0 - (-z)) = \text{polo sur} \end{cases}$$

Las líneas de  $\vec{H}$  se comportan igual a electricidad, salen del polo norte (cargas positivas) y entran al sur (negativas)

Localización de las corrientes inducidas: Fuentes de  $\vec{B}$  vienen de  $\nabla \times \langle \vec{B} \rangle = \vec{J}_{ind} = \nabla \times \vec{M}$

$$\Rightarrow \vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & M_z \end{pmatrix} = -\hat{x} M_0 \Theta(r_0 - \rho) \frac{\partial}{\partial z} \Theta(|Z_0| - |z|) = M_0 \Theta(r_0 - \rho) \delta(z_0 - z) \hat{x} = \vec{J}_{ind}$$

que es la densidad de corriente superficiales que dan lugar a las corrientes inducidas descritas en el modelo sencillo. De vuelta, las corrientes superficiales son los efectos de los bordes (la derivada de  $\Theta$  es la  $\delta$ ).

Algo importante: las líneas de  $\vec{B}$  (que resulta de  $\vec{J}_{ind}$  según la ley de Biot y Savart) son cerradas. Mientras que las líneas de  $\vec{H}$  salen del polo norte y entran en el sur, también dentro del material. Allí  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  tienen sentidos opuestos ya que  $\vec{H} = \langle \vec{B} \rangle / \mu_0 - \vec{M}$ .

## Energía en presencia de materiales magnéticos

En vacío tenemos  $U = \frac{1}{2} \int d^3r' \bar{J}_0(r') \cdot \bar{A}_0(r')$  con  $\bar{A}_0$  el potencial vector en vacío determinado por  $\bar{J}_0$ .

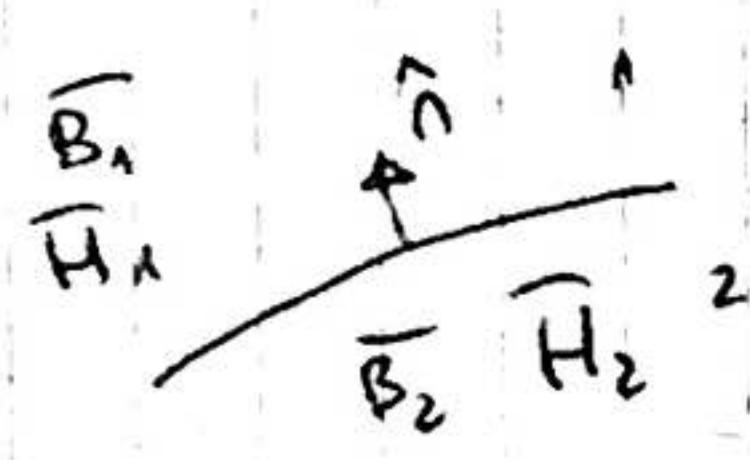
Cuando hay materiales magnéticos debemos construir  $\bar{J}_0$  en presencia de  $\langle \bar{A} \rangle$  causada también por los dipolos magnéticos. Entonces  $U = \frac{1}{2} \int d^3r' \bar{J}_0 \cdot \langle \bar{A} \rangle$

$$\nabla(\langle \bar{A} \rangle \times \bar{H}) = \bar{H} \cdot \underbrace{\nabla \times \langle \bar{A} \rangle}_{\langle \bar{B} \rangle} - \langle \bar{A} \rangle \cdot \underbrace{\nabla \times \bar{H}}_{\bar{J}_0}$$

$$\text{Así } U = \frac{1}{2} \int d^3r' \bar{H} \cdot \bar{B} - \frac{1}{2} \underbrace{\int d^3r' \nabla(\langle \bar{A} \rangle \times \bar{H})}_{\iint_S \langle \bar{A} \rangle \times \bar{H} \rightarrow 0 \text{ en } \infty}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \bar{H} \cdot \bar{B}$$

## Condiciones de contorno entre medios magnéticos



Si tomamos un cilindro de  $\delta \ll 1$

$$\iint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \Rightarrow (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\text{con } \iint_S \bar{B}_1 \cdot \hat{n} dS - \iint_S \bar{B}_2 \cdot \hat{n} dS = 0$$

Si hacemos una circulación en un plano cuyo versor perpendicular sea  $\hat{n}_a$  y el versor en el plano de la circulación sea  $\hat{n}_b$  (tal que  $\hat{n}_a \times \hat{n}_b = \hat{n}$ ,  $\hat{n}_a$  y  $\hat{n}_b$  tangentes a la superficie), entonces

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = i_{0\text{enc}} = \int \vec{g}_0 \cdot \hat{n}_a dl_b,$$

donde  $\vec{g}_0$  es la corriente libre superficial. Luego definiendo  $\bar{l}_b = l_b \hat{n}_b$

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 \cdot (-\bar{l}_b) + \bar{H}_2 \cdot \bar{l}_b &= \vec{g}_0 \cdot \hat{n}_a l_b, \\ (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) \cdot \hat{n}_b &= \vec{g}_0 \cdot \hat{n}_a, \end{aligned}$$

que es equivalente a escribir

$$\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \vec{g}_0,$$

Resumiendo

$$\boxed{\begin{aligned} (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) \cdot \hat{n} &= 0, \\ \hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) &= \vec{g}_0. \end{aligned}}$$

Y así se determina la componente perpendicular de la inducción magnética y la paralela de la intensidad magnética. En el caso de tener  $\vec{g}_0 = 0$ , resulta

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \text{ y } H_{2\parallel} = H_{1\parallel}$$

Con lo cual se termina de definir la ley de Snell.

En magnetismo no existe el equivalente a conductores ideales, pero si consideramos medios LIH, entonces  $B_{1,2} = \mu_{1,2} H_{1,2}$  y

$$H_{2\perp} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1\perp} \quad y \quad H_{2\parallel} = H_{1\parallel}$$

Si  $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ ,  $H_{2\perp}/H_{1\perp} \rightarrow 0$  y el sistema "luce" como un conductor eléctrico. Las líneas de  $\bar{H}$  salen casi perpendiculares hacia el medio 2, tal como el campo eléctrico de los conductores eléctricos ( $\mu_{\text{metal}}$ ).

Supongamos dos bobinas cilíndricas ideales geométricamente idénticas, caracterizadas por  $n = \frac{N}{l}$ ,  $S$  y  $l$ . Solo que una se encuentra vacío y la otra con un cierto material magnético adentro.

Experimentalmente se observa que  $L = K_m L_0$ . Si a la bobina en vacío se la somete a un cierto potencial  $V_0(t)$  de modo que produzca una variación de corriente  $\frac{di_0(t)}{dt} \Rightarrow L_0 = -\frac{V_0(t)}{\frac{di_0(t)}{dt}} = \mu_0 n^2 S l$

Si en la otra bobina forzamos igual  $\frac{di(t)}{dt}$  se mide en los extremos una caída de tensión  $V(t) = K_m V_0(t)$

$$\Rightarrow L = -\frac{V(t)}{\frac{di(t)}{dt}} = -\frac{K_m V_0(t)}{\frac{di_0(t)}{dt}} = K_m L_0$$

Lo que podría pasar es que  $K_m = K_m(i_0)$  por eso se realiza una segunda experiencia.

Forzamos ambas a  $V_0(t)$  y entonces  $L$  obtiene una  $\frac{di(t)}{dt} = \left(\frac{1}{K_m}\right) \frac{di_0(t)}{dt}$

$$\text{que haciendo cuentas } L = \frac{V_0(t)}{\frac{di(t)}{dt}} = \frac{K_m V_0(t)}{\frac{di_0(t)}{dt}} = K_m L_0$$

Modelamos así que hay una corriente inducida  $i_{\text{ind}}$  en la superficie del material en contacto con cada espira de igual signo que la externa, tal que la corriente total sea la suma.  $\Rightarrow$  hipótesis  $i_{\text{total}} = i_0(K_m - 1)$

En la bobina podemos usar ley de Ampere sin problemas  $\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_{\text{corr}}$

$$= \mu_0 N i_0 = \mu_0 I_0 \text{ en vacío}$$

$$= \mu_0 N (i_0 + i_{\text{ind}}) = \mu_0 (I_0 + I_{\text{ind}}) \text{ en bobina rellena.}$$

En principio no conocemos  $I_{\text{ind}}$ ; pero usando la suposición

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 (I_0 + I_{\text{ind}}) = \mu_0 (I_0 + I_0(K_m - 1)) = \mu_0 K_m I_0$$

$$\text{Definimos } \mu = \mu_0 K_m \Rightarrow \frac{1}{\mu_0 K_m} \oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\mu} \oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = I_0$$

Llamando  $\bar{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$   $\equiv$  intensidad magnética

$$\bar{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \equiv \text{intensidad magnética}$$

Asi  $\oint d\vec{l} \cdot \bar{H} = I_0$  Ley de Ampere en medios magnéticos

$$\text{Comparando } \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} \Rightarrow \bar{B} = \mu_0 \bar{B}_0 = k_m \bar{B}_0$$

Podemos considerar que tenemos dos campos magnéticos:  $\bar{B}_0$  (externo generado por  $I_0$ ) y otro  $\bar{B}_{ind}$  (generado por  $I_{ind}$ ) /  $\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_{ind} \Rightarrow \bar{B}_{ind} = \bar{B} - \bar{B}_0 = (k_m - 1)\bar{B}_0$   
de lo que resulta  $\mu_0 I_{ind} = \oint d\bar{l} \cdot \bar{B}_{ind} = \oint d\bar{l} \cdot \bar{B}_0 (k_m - 1) = I_0 \mu_0 (k_m - 1)$   
 $= I_0 \mu_0 (k_m - 1)$ ;  $I_{ind} = I_0 (k_m - 1)$  que es el punto de partida

### Magnetostática macroscópica

Pasemos a una descripción macroscópica en términos de valores medios a nivel microscópico

Al igual que en dielectrinos, proponemos que hay dipolos eléctricos en el material que van a alinearse con el campo exterior que coloquemos. Consideremos un elemento de volumen  $d^3 r'$  centrado en  $\bar{r}'_j$ . Un solo dipolo magnético  $\bar{m}_j$  en  $\bar{r}'_j$  genera un potencial  $\bar{A}_j(\bar{r})$  en  $\bar{r}$ , dado

$$\text{por } \bar{A}_j(\bar{r}) = k_m \frac{\bar{m}_j \times (\bar{r} - \bar{r}'_j)}{|\bar{r} - \bar{r}'_j|^3}; \text{ Sumando todos } \sum_j \bar{A}_j(\bar{r}) = d \langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle$$

los del  
elemento  
de volumen

$$d \langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle = \sum_j k_m \frac{\bar{m}_j \times (\bar{r} - \bar{r}'_j)}{|\bar{r} - \bar{r}'_j|^3} \Big|_{\bar{r}'_j \approx \bar{r}} = k_m \sum_j \frac{\bar{m}_j \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

Definiendo  $\bar{M}(\bar{r}') = \sum_j \frac{\bar{m}_j}{d^3 r'}$  = Magnetización ó densidad de dipolos magnéticos por u de Vol

$$\text{y haciendo } \sum_j \bar{A}_j(\bar{r}) = d \langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle = \frac{k_m \bar{M}(\bar{r}') \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d^3 r'$$

$$\Rightarrow \langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle = k_m \int d^3 r' \frac{\bar{M}(\bar{r}') \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = k_m \int d^3 r' \bar{M}(\bar{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right)$$

$$\text{Y usando } \nabla' \times \frac{\bar{M}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = \frac{(\nabla' \times \bar{M}(\bar{r}'))}{|\bar{r} - \bar{r}''|} + \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}''|} \times \bar{M}(\bar{r}') \right) \\ = -\bar{M}(\bar{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}''|} \right)$$

$$\text{Así } \langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle = k_m \int_V \frac{(\nabla' \times \bar{M}(\bar{r}')) d^3 r'}{|\bar{r} - \bar{r}''|} - k_m \int_V d^3 r' \nabla' \times \left( \frac{\bar{M}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}''|} \right) - \iint_{S(V)} d\bar{s} \hat{n} \times \frac{\bar{M}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}''|}$$

$$\Rightarrow \langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle = k_m \int_V \frac{(\nabla' \times \bar{M}(\bar{r}')) d^3 r'}{|\bar{r} - \bar{r}''|} + k_m \iint_{S(V)} d\bar{s} \left( \frac{\bar{M}(\bar{r}') \times \hat{n}}{|\bar{r} - \bar{r}''|} \right)$$

Primer camino: Si integramos solo en el volumen  $V$  (donde  $\bar{M}(\bar{r}) \neq 0$ ), podemos interpretar que  $\langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle$  es ocasionado por dos densidades de corrientes, en el volumen y la superficie

$$\text{Así } \langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle = k_m \int_V \frac{\bar{J}_{mig}(\bar{r}') d^3 r'}{|\bar{r} - \bar{r}''|} + k_m \iint_{S(V)} d\bar{s} \frac{\bar{G}_{mig}}{|\bar{r} - \bar{r}''|}$$

$$\bar{J}_{\text{mag}}(\bar{r}') = \nabla' \times \bar{M}(\bar{r}') \equiv \text{densidad de corriente inducida volumétrica.}$$

$$\bar{g}_{\text{mag}}(\bar{r}') = \bar{M}(\bar{r}') \hat{x} \hat{n} \equiv \text{densidad de corriente inducida superficial.}$$

$\bar{g}_{\text{mag}}$  produce la corriente inducida  $J_{\text{ind}}$  de cortes que se forma en la superficie del material en contacto con cada espira. También como en electricidad aparece una corriente inducida volumétrica  $\bar{J}_{\text{mag}}(\bar{r}')$ . Ya que las corrientes inducidas no inducen corrientes netas

$$0 = \int_V d^3 r' \bar{J}_{\text{mag}}(\bar{r}') + \iint_S \bar{g}_{\text{mag}}(\bar{r}') \hat{n} \cdot dS \quad \text{y} \quad 0 = \int_V d^3 r' [\nabla' \times \bar{M}(\bar{r}')] + \iint_S \bar{M}(\bar{r}') \hat{n} \cdot dS - \iint_S dS' \hat{n} \times \bar{H}(\bar{r}')$$

que se cumple por teorema del rotar.

Segundo camino: Si integramos en todo el espacio ( $\bar{M}(\bar{r}') = 0$ )

$$\Rightarrow \langle \bar{A}(\bar{r}') \rangle = \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \bar{J}_{\text{mag}}(\bar{r}') \quad \text{entonces aca la condición de corriente nula se reduce a que} \quad \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \bar{J}_{\text{mag}}(\bar{r}') = 0$$

Si ahora vamos a la ecuación del rotar de  $\bar{B}$  considerando que hay  $J_{\text{ind}}$  y  $\bar{J}_0$

$$\nabla \times \langle \bar{B} \rangle = \mu_0 \bar{J}_{\text{TOTAL}} = \mu_0 (\bar{J}_0 + \bar{J}_{\text{mag}}) = \mu_0 \bar{J}_0 + \mu_0 \nabla \times \bar{M}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left( \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} - \bar{M} \right) = \bar{J}_0 = \nabla \times \bar{H} \quad \text{con} \quad \bar{H} = \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} - \bar{M} \quad \begin{matrix} \text{intensidad} \\ \text{magnética} \end{matrix}$$

$$\text{Y entonces} \quad \nabla \cdot \bar{H} = \nabla \cdot \left( \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} - \bar{M} \right) = - \nabla \cdot \bar{M}$$

En total

$\nabla \cdot \bar{H} = - \nabla \cdot \bar{M}$	$\nabla \cdot \langle \bar{B} \rangle = 0$
$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_0$	$\nabla \times \langle \bar{B} \rangle = \mu_0 (\bar{J}_0 + \bar{J}_{\text{mag}})$

Con las versiones integrales

$$\oint_C d\ell \cdot \bar{B} = \mu_0 (I_0 + I_{\text{mag}}) \quad ; \quad \oint_C d\ell \cdot \bar{H} = I_0$$

Ley de Ampere en medios magnéticos

$$\iint_S dS \langle \bar{B} \rangle \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{Ley de Gaus en magnetismo}$$

$$\iint_S dS \bar{H} \cdot \hat{n} = - \int_V d^3 r' \nabla' \cdot \bar{M}(\bar{r}')$$

## Medios lineales, isotropos y homogéneos

$\bar{H}$  depende de  $\bar{M}$  como  $\bar{H} = \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} - \bar{M}$ . Lo más general es que la polarización sea expresada en términos de una serie de potencias de  $\bar{H}$

$$\bar{M} = \bar{M}(\bar{r}) = M_0 + \bar{\chi}_1 \cdot \bar{H} + \bar{H} \times \bar{\chi}_2 \times \bar{H} + O(\bar{H}^3)$$

A diferencia de electricidad,  $\bar{P}$  se desarrolla con  $\bar{E}$  y no  $\bar{D}$ . Si  $M_0 \neq 0$  significa que el material tiene una magnetización permanente, aún sin  $\bar{H}$ . Es un imán (en particular los ferromagnéticos). Si  $M_0 = 0$  y el segundo término basta para describir la magnetización  $\bar{M} = \bar{\chi}_1 \bar{H}$  y el término es lineal. Si el medio es isotropo  $\bar{\chi}_1 = \chi(\bar{r})$ . Si además es homogéneo (LIH)  $\chi(\bar{r}) = \chi_m$  es susceptibilidad magnética.  $\chi_m = \frac{(h - h_0)}{\mu_0}$

$$\text{Así } \bar{H} = \chi_m \bar{H} = \frac{(h - h_0)}{\mu_0} \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} - \bar{M} = \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} - \frac{(h - h_0)}{\mu_0} \bar{H}$$

$$\Leftrightarrow \bar{H} = \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} \quad (\langle \bar{B} \rangle, \bar{M}, \bar{H} \text{ todos valores medios})$$

### Polar norte y sur

Dado  $\langle \bar{A}(\bar{r}) \rangle$  como es  $\langle \bar{B}(\bar{r}) \rangle = \nabla \times \bar{A}(\bar{r})$ ;  $\langle \bar{B}(\bar{r}) \rangle = \mu_0 \nabla \times \left\{ d^3 r' \bar{M}(\bar{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \right\}$

$$\text{Usando que } \nabla \times \left[ \bar{M}(\bar{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \right] = -\nabla \left[ \bar{M}(\bar{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right] + 4\pi \bar{M}(\bar{r}') \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \bar{B}(\bar{r}) \rangle &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left\{ d^3 r' \bar{M}(\bar{r}') \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \right\} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' 4\pi \bar{M}(\bar{r}') \delta(\bar{r} - \bar{r}') \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla V_H(\bar{r}) + \mu_0 \bar{M}(\bar{r}) \quad \text{donde hemos } V_H(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \bar{M}(\bar{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \end{aligned}$$

avía que  $\bar{H} = \frac{\langle \bar{B} \rangle}{\mu_0} - \bar{M} = -\nabla V_H$ . Encontramos una expresión de  $\bar{H}$  totalmente análoga a electricidad

Veamos las fuentes de "cargas" de  $\bar{H}$

$$\bar{M}(\bar{r}') \nabla' \left( \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = \nabla' \left( \frac{\bar{M}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) - \frac{\nabla'(\bar{M}(\bar{r}'))}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

$$\text{Con lo que } V_H(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \nabla' \left( \frac{\bar{M}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) - \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\nabla'(\bar{M}(\bar{r}'))}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

$$\Rightarrow V_H(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S dS \frac{G_H(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\mathcal{P}_H(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

$$\left\{ G_H(\bar{r}') = \bar{M}(\bar{r}'). \hat{n} \text{ densidad superficial de polos magnéticos} \right.$$

$$\left. \mathcal{P}_H(\bar{r}') = -\nabla \cdot \bar{M}(\bar{r}') \text{ densidad volumétrica de polo magnético} \right.$$