# FÍSICA 4

## SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013

## GUÍA 8: OSCILADOR ARMÓNICO, POZOS DE POTENCIAL EN UNA DIMENSIÓN

Física moderna Argüello
Pag 180

0 1. Considere el siguiente potencial (pozo infinito):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ \infty & |x| > a/2 \end{cases}$$

donde $a$ es una constante y representa el ancho del pozo.

a) Halle las autofunciones de $\hat{H}$ y los niveles de energía de una partícula de masa $m$.

b) Grafique $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ y $\varphi_4$ y sus módulos al cuadrado, donde las $\varphi_i$ son las funciones de onda de los primeros cuatro estados de la partícula.

c) Calcule la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $(0, a/4)$ para estos cuatro autoestados.

0 d) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, $\Delta x$, $\Delta p$ y $\Delta x \Delta p$ para los mismos cuatro estados.

0 e) Calcule y grafique la probabilidad de que la partícula tenga momento lineal $p$ para el primer autoestado y para uno de $n$ grande.

f) Escriba una expresión general para $\psi(x,t)$.

2. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Encuentre las autofunciones de $\hat{H}$ y una ecuación para sus autovalores, para $E < 0$.

3. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Encuentre las autofunciones de $H$ y una ecuación para sus autovalores para $E < 0$. Compare con el problema anterior.

0 4. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > b \\ V_0 & a < |x| < b \\ 0 & |x| < a \end{cases}$$

$a$, $b$ y $V_0 > 0$. Hallar las ecuaciones de autovalores y escriba las funciones de onda correspondientes para los casos:

0 a) $0 < E < V_0$

0 b) $E > V_0$

0 5. Para el potencial del ejercicio 3 pero esta vez con $E > 0$, halle los coeficientes de reflexión y de transmisión.

6. Sea el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

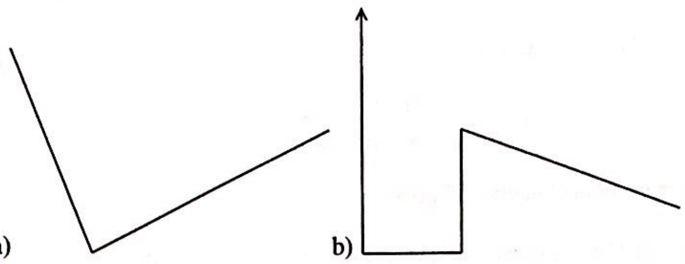
$a > 0$. Halle los coeficientes de reflexión y transmisión para los siguientes rangos de energía de la partícula:

a) $0 < E < V_0$

b) $E > V_0$.

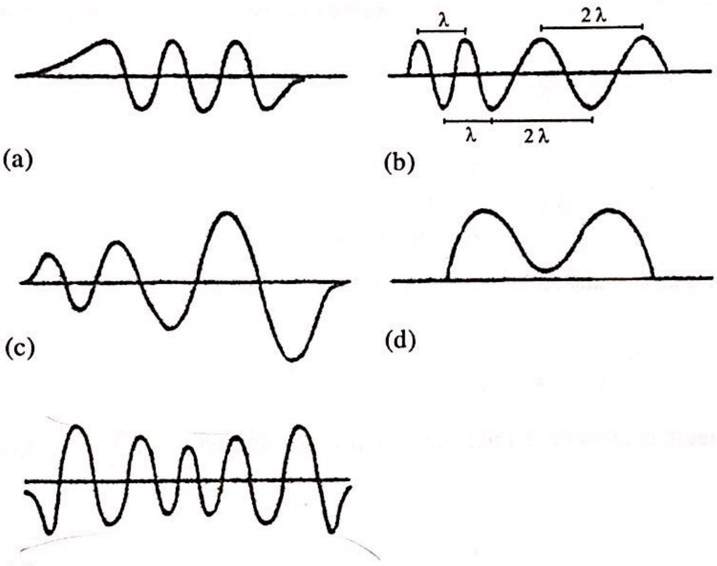
Discuta físicamente los resultados hallados.

7. Analice en cuáles de los siguientes potenciales existe al menos un estado ligado. Para aquéllos en donde los haya, realice gráficos cualitativos de las autofunciones de $\hat{H}$ para varios valores de energía.



a) b)

8. Dados los siguientes gráficos de autofunciones de $\hat{H}$, haga un diagrama cualitativo de los potenciales unidimensionales que las producen, marcando en cada caso una línea horizontal para la energía del sistema e indicando de qué nivel se trata (tome al estado fundamental como $n = 1$).




(a) (b) (c) (d) (e)

9. Sea un oscilador armónico con Hamiltoniano $H = p^2/2m + (m\omega^2/2)x^2$. Hallar $\beta$ para que $\phi_0 = A_0 \exp\left(-\beta x^2\right)$ sea autofunción de $\hat{H}$. ¿Cuál es la energía de este estado? ¿Qué argumentos usaría para demostrar que es el estado fundamental?

10. Proponiendo que $\phi(x) = h(x)\exp(-\beta x^2)$ es autofunción del hamiltoniano del oscilador armónico $\hat{H}$, hallar la ecuación diferencial que debe satisfacer $h(x)$. Muestre que $h(y) = y$ y $h(y) = \left(1 - 2y^2\right)$ con $y \equiv \sqrt{2\beta}x$ son soluciones con autovalores $3\hbar\omega/2$ y $5\hbar\omega/2$ . Grafique la probabilidad de hallar la partícula en función de $x$ y compare con el caso clásico. ¿Qué puede decir respecto de la paridad de las autofunciones de $\hat{H}$?

11. Calcule para el estado fundamental del oscilador armónico: $\langle \hat{T} \rangle$, $\langle \hat{V} \rangle$, $\langle \hat{H} \rangle$, $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ y $\Delta x \Delta p$.

12. Considere un pozo infinito unidimensional de ancho $a$ que en un momento dado se expande súbitamente hasta duplicar su ancho (*i.e.* pasa de $[0,a]$ a $[0,2a]$). La partícula que hay dentro, antes de la expansión se encuentra en el estado fundamental. Se pide:

*a)* Un gráfico del perfil de la función de onda en el instante inmediatamente posterior a la expansión, las nuevas autoenergías del hamiltoniano y los correspondientes períodos de oscilación (los períodos de oscilación de las autofunciones asociadas a cada energía).

*b)* El tiempo que debe dejarse transcurrir para poder restaurar el pozo a su anchura original, de modo tal que la función de onda vuelva a ser la correspondiente al estado fundamental del pozo de lado $a$.

*c)* Suponiendo que la función de onda del pozo expandido puede aproximarse por sus dos componentes de más baja energía, calcular en función del tiempo la probabilidad de encontrar a la partícula en la mitad nueva del pozo (o sea, entre $a$ y $2a$).

13. Sea una partícula de masa $m$ en un pozo de potencial infinito de ancho $a$ centrado en el origen. En $t = 0$ el estado del sistema es $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, donde las $\varphi_n(x)$ son las autofunciones de $\hat{H}$.

*a)* ¿Cuál es la probabilidad $P$ de que una medición de la energía de la partícula, efectuada en un instante $t$ cualquiera, dé un resultado mayor que $5E_1$, siendo $E_1$ la energía del estado fundamental? Si $P = 0$, ¿cuáles coeficientes deben ser cero y cuáles no?

*b)* Si solo $c_1$ y $c_2$ son distinctos de cero, normalizar la función de onda a $t = 0$ en función de ellos y calcular el valor medio de la energía en este estado. ¿Cuánto deben valer $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ para que sea $\langle H \rangle = 2{,}5E_1$? Si además $\langle \hat{x} \rangle = a/8$, calcular la fase de $c_2$ si $c_1$ es real y positivo.

*c)* Calcular $\varphi(x)$ y $\langle \hat{x} \rangle$ para un tiempo $t$.

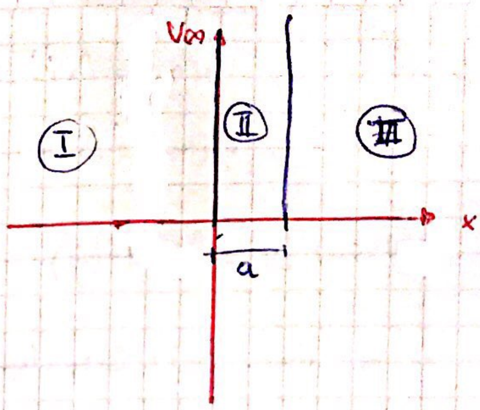
*d)* Calcular $\langle \hat{p} \rangle$ para todo tiempo por dos métodos: directamente y usando el teorema de Ehrenfest.

Ejercicio 1

Pozo infinito

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ \infty & x \le 0 \,;\, x \ge a \end{cases}$$

a representa el ancho del pozo




a) autofunciones de $\hat{H}$ y niveles de energía en partícula de masa m

$$\hat{H}\varphi_{(x)} = E\varphi(x) \Rightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0\right]\varphi(x) = E\varphi(x) \text{ '' } \quad \text{I y III}$$

$$\text{''} \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \infty\right]\varphi(x) = E\varphi(x) \text{ '' } \quad \text{II}$$

Contornos

$$\varphi \doteq \begin{cases} \varphi_1(x) & x \le 0 \\ \varphi_2(x) & 0 \le x \le a \\ \varphi_3(x) & x \ge a \end{cases}$$

$$\varphi_1\left(-\frac{a}{2}\right) = \varphi_2\left(-\frac{a}{2}\right) \quad ; \quad \varphi_2(a/2) = \varphi_3(a/2)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(-a/2) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(-a/2) \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(a/2) = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(a/2)$$

La función debe ser de cuadrado integrable

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$\rightarrow \varphi_1(-\infty) \Rightarrow 0 \quad ; \quad \varphi_3(-\infty) \rightarrow 0$$

Por último, integración (normalización) $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi \, dx = 1$

$\Rightarrow$ nos queda

$$\varphi = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \varphi_2(x) & 0 \le x \le a \\ 0 & x \ge a \end{cases}$$

en II $\quad \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_2 = E\varphi_2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_2 = 0$

llamo $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $\Rightarrow$ propongo solución $\varphi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

contornos: $\varphi(0) = 0 = A \Rightarrow A = 0$

$\varphi(a) = 0 = B\sin(ka) \Rightarrow \quad ka = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

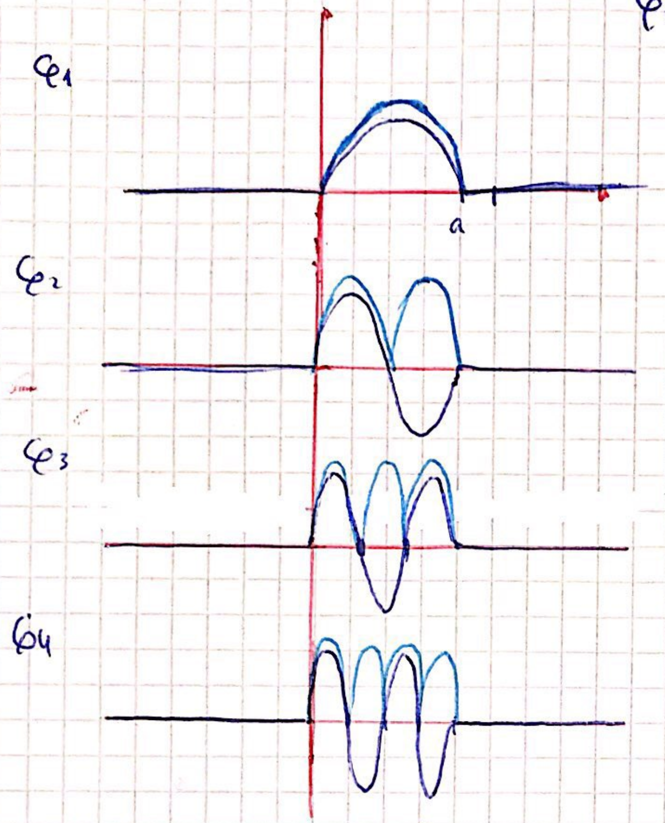
$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2 2m} = \frac{n^2h^2}{8a^2m}} \qquad n=1,2,3 \qquad \hbar = 2\pi h$$

Energía cuantizada

b) Grafique




$\varphi_1 = B\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$

$|\ |^2$

Para lo clásica era equiprobable hallar la partícula en cualquier valor de $0 \le x \le a$

$\varphi_2 = B\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$

$|\ |^2$

$n \to \infty$ se aproxima a la mecánica clásica

$\varphi_3 = B\sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$

$|\ |^2$

$\varphi_4 = B\sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right)$

$|\ |^2$

c) $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* \varphi \, dx = \int_0^a B^2 \sin^2(kx)\,dx = \int_0^a B^2 \frac{1}{2}\left(1-\cos(2kx)\right)dx$$

$$1 = \frac{B^2}{2}\left[a - \overbrace{\frac{\sin(2ka)}{2k}}^{=0}\right]$$ B es eso despejando

$$\Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$P_{(0,a/4)} = \int_0^{a/4} B^2 \sin^2(kx)\,dx$$ en cada autoestado es reemplazar la k por $\frac{n\pi}{a}$

d) $$\langle x \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* x \varphi \, dx}_{\text{en realidad con } \Psi, \text{ pero el } t \text{ se cancela}} = \int_0^a \frac{2}{a}\sin^2(kx)\,x\,dx \underset{\text{wolfram}}{=} \frac{2}{a}\left(\frac{-2kx(\sin(2kx) - kx) + \cos(2kx)}{8k^2}\right)\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{1}{4k^2a}\left[2ka^2 + \cos(2ka) - 1\right]$$

evaluar en $n=1,2,$ de k para el resultado final

$$\langle p \rangle = \int_0^a B\sin(kx)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}B\sin(kx)\right)dx = \int_0^a -B^2 i\hbar \sin(kx)\cos(kx)\,dx$$

$$= -\frac{2}{a}i\hbar\int_0^a \frac{\sin(2kx)}{2}dx = -\frac{2}{a}i\hbar\left(-\frac{\cos(2kx)}{4k}\right)\Big|_0^a = 0$$

(pues $\cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)\Big|_0^a = \cos(2n\pi) - 1 = 0$ ✓

$\Rightarrow \varphi$ no es autofunción de $p_x$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^a B^2(\sin(kx)x)^2dx \underset{\text{wolfram}}{=} B^2\left[\frac{4k^3x^3 + (3-6k^2x^2)\sin(2kx) - 6kx\cos(2kx)}{24k^3}\right]\Big|_0^a$$

ni ahí

$$\langle p_x^2 \rangle = \int_0^a B^2\sin(kx)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(kx)\right)dx = \int_0^a B^2\hbar^2k^2\sin^2(kx)\,dx$$

$$= \frac{B^2}{2}\hbar^2k^2a = \hbar^2k^2 = \frac{\hbar^2n^2\pi^2}{a^2}$$

utilizando un cálculo anterior

$\Rightarrow$ es un escalar $\therefore$ $p_x^2$ es observable

$P_x = \pm\frac{\hbar n\pi}{a}$ Como tanto el valor ⊕ como ⊖ son equiprobables, el valor medio es nulo (ya vimos antes)

Llamando $\Delta x$ al rango de valores de $x$ con prob $\neq 0$

$\Rightarrow \Delta x = a - 0 = a$

Haciendo análogo con $\Delta p_x = \frac{\hbar n\pi}{a} - \left(-\frac{\hbar n\pi}{a}\right) = \frac{2\hbar n\pi}{a} = \frac{nh}{a}$

$\Delta p_x \Delta x = nh \Rightarrow \Delta_x\Delta_p > h$

e) $$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ip/\hbar\, x}dx = \int_0^a \frac{B}{\sqrt{h}}\sin(kx)e^{-ip/\hbar\, x}dx$$

$$= \frac{B}{\sqrt{h}}\left[\int_0^a \sin(kx)\cos(+p/\hbar\, x)dx + i\int\sin(kx)\sin(-p/\hbar\, x)dx\right]$$

$$= \frac{B}{\sqrt{h}}\Big[$$

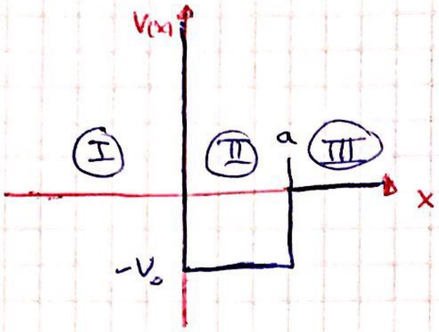
fiaca... después

f) $\psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

## Ejercicio 2

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x<0 \\ -V_0 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

Encuentre los autoestados de $\hat{H}$ y una ecuación para sus autovalores $(E<0)$




continuidad

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} \varphi_1(x) & x<0 \\ \varphi_2(x) & 0<x<a \\ \varphi_3(x) & x>a \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\varphi_1(0)=\varphi_2(0) \\ &\varphi_2(a)=\varphi_3(a). \\ &\frac{\partial\varphi_2(a)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_3(a)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\hat{H}\varphi = E\varphi \qquad \psi = \varphi(x)\, e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \qquad \varphi = \begin{cases} \varphi_1 & x<0 \\ \varphi_2 & 0<x<a \\ \varphi_3 & x>a \end{cases}$$

I $\varphi = 0$ $\quad \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \infty\right]\varphi = E\varphi$

II

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_2 + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}_{k^2}\varphi = 0 \qquad \Rightarrow k^2>0$$

Recordemos $E<0$

$|E|<|V_0|$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

III $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_2 + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}E}_{-\gamma^2}\varphi = 0 \qquad \gamma^2 = \frac{-2m}{\hbar^2}E > 0$

$$\Rightarrow \varphi_3(x) = C e^{\gamma x} + D e^{-\gamma x}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ A\cos(kx) + B\sin(kx) & 0<x<a \\ Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x} & x>a \end{cases}$$

Con los contornos

$\varphi_1(0) = 0 = \varphi_2(0) = A \Rightarrow A = 0$

$\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ . $\frac{\partial \varphi_2(a)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1(a)}{\partial x} \to kB\cos(ka) = C\gamma e^{\gamma a} - D\gamma e^{-\gamma a}$

$\Rightarrow B\sin(ka) = Ce^{\gamma a} + De^{-\gamma a}$

Además, por ser de cuadrado integrable, $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\therefore B\sin(ka) = De^{-\gamma a}$ ; $Bk\cos(ka) = -\gamma De^{-\gamma a} \Rightarrow tg(ka) = -\frac{k}{\gamma}$

$\Rightarrow tg^2(ka) = \frac{k^2}{\gamma^2} = \frac{\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}}{\frac{(-2mE)}{\hbar^2}}$

$$1 = \int_0^a B^2 \sin(kx)^2 dx + \int_a^{+\infty} D^2 e^{-2\gamma x} dx$$

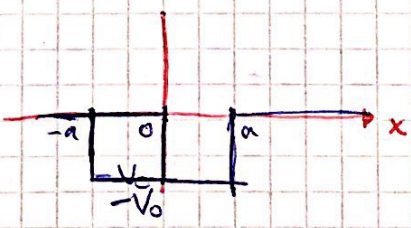
$\Rightarrow tg^2(ka) = \frac{-V_0 - E}{E}$

$$1 = \frac{B^2 a}{2} + D^2\left[\frac{1}{2\gamma e^{2\gamma a}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ B\sin(kx) & 0<x<a \\ De^{-\gamma t} & a<x \end{cases} \qquad tg(ka) = -\frac{k}{\gamma} \qquad tg^2(ka) = -\left(\frac{V_0+E}{E}\right)}$$ o $\gamma = -k\cotg(ka)$

## Ejercicio 3

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0<|x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$$




La única diferencia ahora, por simetrías, es que tenemos la otra parte

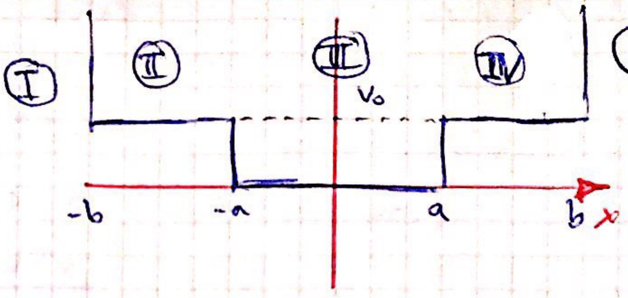
$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} Ce^{\gamma t} & x<-a \\ A\cos(kx) + B\sin(kx) & -a<x<a \\ De^{-\gamma t} & x>a \end{cases}$$

contornos $Ce^{\gamma a} = A\cos(ka) + B\sin(ka)$

Hecho en la teórica bien, la única diferencia es que $\varphi_2$ cambia entre sin y cos dependiendo de la energía.

Scanned with CamScanner

Ejercicio 4




$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x|>b \\ V_0 & a<|x|<b \\ 0 & |x|<a \end{cases}$$

$a, b, V_0 > 0$

a) $0 < E < V_0$

I $\wedge$ V $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-\infty)\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

II $\wedge$ IV $\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}_{-\gamma^2}\varphi = 0 \qquad \gamma^2>0 \quad \Rightarrow \varphi = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$

III $\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}}_{k^2}E\varphi = 0 \qquad k^2>0 \Rightarrow \varphi = \begin{cases} Ce^{ikx} + De^{-ikx} \\ C'\cos(kx) + D'\sin(kx) \\ C''\cos(kx+\alpha) \\ D''\sin(kx+\alpha) \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} 0 & x<-b \\ A_1e^{\gamma x} + B_1e^{-\gamma x} & -b\le x<-a \\ C\sin(kx+\alpha) & -a\le x\le a \\ A_2e^{\gamma x} + B_2e^{-\gamma x} & a<x\le b \\ 0 & x>b \end{cases}$$

$\varphi_1(-b) = \varphi_2(-b) = 0 \Rightarrow A_1e^{-\gamma b} + B_1e^{\gamma b} = 0 \Leftrightarrow A_1 = -B_1e^{2\gamma b}$

$\Rightarrow \varphi_2 = B_1(-e^{2\gamma b}e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})$

$\varphi_2(-a) = \varphi_3(-a) \Rightarrow B_1(-e^{2\gamma b-\gamma a} + e^{+\gamma a}) = C\sin(-ka+\alpha)$

$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(-a) = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(-a) \Rightarrow B_1\gamma(-e^{2\gamma b-\gamma a} - e^{+\gamma a}) = Ck\cos(-ka+\alpha)$

$$\Rightarrow tg(-ka+\alpha) = \frac{k}{\gamma}\left(\frac{-e^{2\gamma b}e^{-\gamma a} + e^{\gamma a}}{-e^{2\gamma b}e^{-\gamma a} - e^{\gamma a}}\right)$$

$\varphi_5(b) = \varphi_4(b) = 0 \Rightarrow A_2e^{\gamma b} + B_2e^{-\gamma b} = 0 \Leftrightarrow A_2 = -B_2e^{-2\gamma b}$

$\Rightarrow \varphi_4 = B_2(-e^{-2\gamma b}e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})$

$\varphi_4(a) = \varphi_3(a) \Rightarrow B_2(-e^{-2\gamma b}e^{\gamma a} + e^{-\gamma a}) = C\sin(ka+\alpha)$

$\frac{\partial \varphi_4(a)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3(a)}{\partial x} \Rightarrow B_2\gamma(-e^{-2\gamma b}e^{\gamma a} - e^{-\gamma a}) = Ck\cos(ka+\alpha)$

$$\Rightarrow tg(ka+\alpha) = \frac{k}{\gamma}\left(\frac{-e^{-2\gamma b}e^{\gamma a} + e^{-\gamma a}}{-e^{-2\gamma b}e^{\gamma a} - e^{-\gamma a}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} 0 & x < -b \\ B_1(-e^{2\gamma a} e^{+\gamma x} + e^{-\gamma x}) & -b \le x < -a \\ C\sin(kx+\alpha) & -a \le x \le a \\ B_2(-e^{-2\gamma b} e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) & a < x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

igualando $\frac{k}{\gamma}$ de las dos ecuaciones sale la de autovalores

b) $E > V_0$

I y V lo mismo

III lo mismo

II y IV cambia $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \underbrace{\frac{2m}{\hbar}(E-V_0)}_{>0 \text{ sea } \omega_0^2} = 0$

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} 0 & x < -b \\ A_1\cos(\omega_0 x + \beta_1) & -b \le x < -a \\ C\sin(kx+\alpha) & -a \le x \le a \\ A_2\cos(\omega_0 x + \beta_2) & a < x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$\varphi_1(-b) = \varphi_2(-b) = 0$

$\Rightarrow A_1\cos(-\omega_0 b + \beta_1) = 0 \Rightarrow -\omega_0 b + \beta_1 = \frac{\pi}{2} \therefore \beta_1 = \frac{\pi}{2} + \omega_0 b$

$\Rightarrow A_1\cos(\omega_0(x+b) + \frac{\pi}{2}) = \varphi_2 = A_1\left[\cos(\omega_0(x+b))\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(\omega_0(x+b))\sin(\frac{\pi}{2})\right]$

$\Rightarrow \varphi_2 = -A_1\sin(\omega_0(x+b))$

$\varphi_2(-a) = \varphi_3(-a) \Rightarrow -A_1\sin(\omega_0(-a+b)) = C\sin(ka+\alpha)$

$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(-a) = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(-a) \Rightarrow -A_1\omega_0\cos(\omega_0(-a+b)) = Ck\cos(-ka+\alpha)$

$\Rightarrow tg(\omega_0(-a+b))k = \omega_0\, tg(-ka+\alpha)$

$\varphi_5(b) = \varphi_4(b) = 0 \Rightarrow A_2\cos(\omega_0 b + \beta_2) = 0 \Rightarrow \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \omega_0 b$

$\Rightarrow \varphi_4 = A_2\cos(\omega_0(x-b) + \frac{\pi}{2}) = -A_2\sin(\omega_0(x-b))$

$\varphi_4(a) = \varphi_3(a) \Rightarrow -A_2\sin(\omega_0(a-b)) = C\sin(ka+\alpha)$

análogo $\quad tg(\omega_0(a-b))k = \omega_0\, tg(ka+\alpha)$

$\Rightarrow \quad tg(\omega_0(a-b))k = \omega_0\, tg(ka+\alpha)$

$\quad\;\; tg(\omega_0(-a+b))k = \omega_0\, tg(-ka+\alpha)$ y de ahí resolver...

$tg(-x) = -\tan(x) \Rightarrow \omega_0 = \omega_0$

$k \cot g(ka+\alpha) \cdot \underbrace{tg(\omega_0(a-b))}_{= -tg(\omega_0(-a+b))} = k \cot g(-ka+\alpha) \cdot tg(\omega_0(-a+b))$

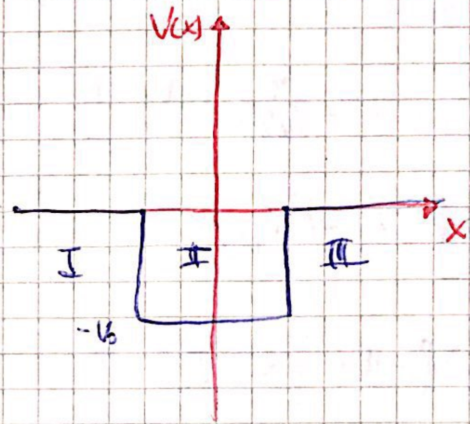
$\underbrace{\cot g(x)}_{1} = \underbrace{-\cot g(-x)}_{-1}$

$\Rightarrow -\cot g(ka+\alpha) = \cot g(-ka+\alpha)$

$\Rightarrow \cot g(-ka-\alpha) = \cot g(-ka+\alpha)$

Ejercicio 5

$V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0<|x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$




Ahora $E>0$

$\Rightarrow$ (I) $\wedge$ (III) $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}E}_{\gamma^2}\varphi = 0$

(II) $\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0+E)}_{k^2}\varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} A_1 e^{i\gamma x} + B_1 e^{-i\gamma x} & x<-a \\ A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} & -a<x<a \\ A_3 e^{i\gamma x} + B_3 e^{-i\gamma x} & x>a \end{cases}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0 \Rightarrow B_1 = A_3 = 0$ Contornos $\varphi_1(-a) = \varphi_2(-a)$ y todo eso

$\Rightarrow A_1 e^{-i\gamma a} = A_2 e^{-ika} + B_2 e^{ika}$ ; $A_1 \gamma e^{-i\gamma a} = A_2 k e^{-ika} - B_2 k e^{+ika}$

$B_3 e^{-i\gamma a} = A_2 e^{ika} + B_2 e^{-ika}$ ; $-B_3 \gamma e^{-i\gamma a} = A_2 k e^{ika} - B_2 k e^{-ika}$

ignoremos ; flashé que eran exp reales.

$$\bar{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right]$$

$$R = \frac{|J_r|}{|J_i|} \qquad T = \frac{|J_T|}{|\bar{J}_i|} \qquad R+T = 1$$

Por ejemplo, de I a II

$$J_I = \frac{\hbar}{2mi}\left[\varphi^* \frac{\partial}{\partial x}\varphi\,\hat{x} - \varphi\frac{\partial}{\partial x}\varphi^*\,\hat{x}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\Big[(A_1^* e^{-i\gamma x} + B_1^* e^{i\gamma x})(A_1 i\gamma e^{i\gamma x} - B_1 i\gamma e^{-i\gamma x})\hat{x} - (A_1 e^{i\gamma x} + B_1 e^{-i\gamma x})($$

$$(-A_1^* i\gamma e^{-i\gamma x} + B_1^* i\gamma e^{i\gamma x})\hat{x}\Big]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}\Big[\big(|A_1|^2 i\gamma - A_1^* B_1 i\gamma e^{-2i\gamma x} + A_1 B_1^* i\gamma e^{2i\gamma x} - |B_1|^2 i\gamma\big)\hat{x} - \big(-|A_1|^2 i\gamma + A_1 B_1^* i\gamma e^{2i\gamma} - B_1 A_1^* i\gamma e^{-2i\gamma} + |B_1|^2 i\gamma\big)\hat{x}\Big]$$

$$= \frac{\hbar^2}{m}\left[|A_1|^2 - |B_1|^2\right]\hat{x} = J_i\,\hat{x} - J_r\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} \quad \Rightarrow \cancel{T = 1 - \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}} \qquad T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \text{ cierto.}$$

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) \Rightarrow A_1 e^{-\gamma a i} + B_1 e^{i\gamma a} = A_2 e^{-ika} + B_2 e^{ika}$$

$$\frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2(a)}{\partial x} \Rightarrow A_1\gamma e^{-ia\gamma} - B_1\gamma e^{i\gamma a} = A_2 k e^{-ika} - B_2 k e^{ika}$$

$$\varphi_2(a) = \varphi_3(a) \Rightarrow A_2 e^{ika} + B_2 e^{-ika} = A_3 e^{i\gamma a} + B_3 e^{-i\gamma a}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(a) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(a) \Rightarrow A_2 k e^{ika} - B_2 k e^{-ika} = A_3\gamma e^{i\gamma a} - B_3\gamma e^{-i\gamma a}$$

~~⇒ si solo inciden~~ ⇒ si solo inciden $B_3 = 0$

$$\Rightarrow A_2 e^{ika} + B_2 e^{-ika} = A_3 e^{i\gamma a} \qquad \Rightarrow A_2 e^{ika} + B_2 e^{-ika} = \frac{k}{\gamma}(A_2 e^{ika} - B_2 e^{-ika})$$

$$A_2 k e^{ika} - B_2 k e^{-ika} = A_3\gamma e^{i\gamma a}$$

$$\Rightarrow A_2\left(1 - \frac{k}{\gamma}\right)e^{ika} = B_2\left(-1 - \frac{k}{\gamma}\right)e^{-ika}$$

~~que podemos mult. y dividir~~

$$\Rightarrow A_1 e^{-i\gamma a} + B_1 e^{i\gamma a} = B_2\left[\frac{(-1-\frac{k}{\gamma})}{(1-\frac{k}{\gamma})}e^{-2ika}e^{-ika} + e^{ika}\right] = B_2\left(c\,e^{-ika} + e^{ika}\right)$$

$$A_1\gamma e^{-i\gamma a} - B_1\gamma e^{i\gamma a} = B_2\left[\frac{(-1-k/\gamma)}{(1-k/\gamma)}e^{-2ika}e^{-ika} - e^{ika}\right]k = kB_2\left(c\,e^{-ika} - e^{ika}\right)$$

Vamos a ser físicos, supongamos $-a = 0 \Rightarrow$

$$A_2 + B_2 = A_1 + B_1$$

$$(A_2 - B_2)k = \gamma (A_1 - B_1)$$

$$A_2 = B_2 C$$

$$\Rightarrow A_1 + B_1 = B_2 (C+1)$$

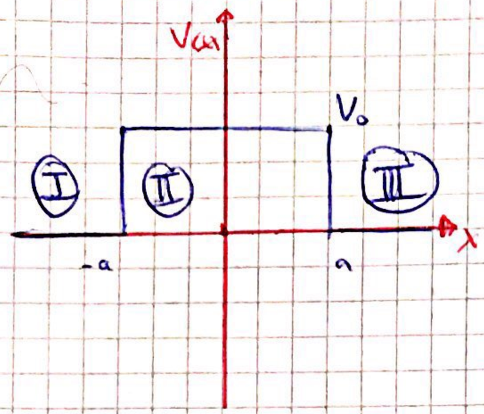
$$\gamma (A_1 - B_1) = k B_2 (C-1)$$

$$\Rightarrow A_1 + B_1 = \frac{\gamma}{k}(A_1 - B_1)$$

$$\Rightarrow A_1 \left(1 - \frac{\gamma}{k}\right) = B_1 \left(-1 - \gamma/k\right)$$

Scanned with CamScanner

Ejercicio 6




$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \le a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases}$$

a) $0 < E < V_0$

(I) y (III) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} E}_{\gamma^2} \varphi = 0$

(II) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}_{-k^2} \varphi = 0$ $\to ik$

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} A_1 e^{i\gamma x} + B_1 e^{-i\gamma x} & x < -a \\ A_2 e^{+kx} + B_2 e^{-kx} & -a < x < a \\ A_3 e^{i\gamma x} + B_3 e^{-i\gamma x} & x > a \end{cases} \qquad k = \sqrt{\left|\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\right|}$$

Considerando onda que incide de $-\infty$ a $+\infty$, no puede haber reflejada en $x > a$ $\Rightarrow B_3 = 0$

pongo $-a$ en $0$ $\Rightarrow$ $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$ $\qquad A_2 = A_1 + B_1 - B_2$

$$(A_1 - B_1) i\gamma = k(A_2 - B_2)$$

(3) $A_2 e^{ka} + B_2 e^{-ka} = A_3 e^{i\gamma a}$

$$\left(\frac{A_2}{e^{-ka}} - \frac{B_2}{e^{ka}}\right) k = i\gamma A_3 e^{i\gamma a}$$

$\Rightarrow (A_1 - B_1) i\gamma = k(A_1 + B_1 - 2B_2)$

$\Rightarrow (A_1 - B_1)\frac{i\gamma}{k} - A_1 - B_1 = -2B_2$ $\Rightarrow B_2 = \frac{1}{2}\left[A_1\left(1 - \frac{i\gamma}{k}\right) + B_1\left(1 + \frac{i\gamma}{k}\right)\right]$

Reemplazo en (3)

$\Rightarrow$ $(A_1 + B_1 - B_2) e^{ka} + B_2 e^{-ka} = A_3 e^{i\gamma a}$

$\Rightarrow (A_1 + B_1) e^{ka} + B_2 (e^{-ka} - e^{ka}) = A_3 e^{i\gamma a}$

$$(A_1+B_1-B_2)e^{ka}+B_2e^{-ka}=A_3e^{i\gamma a} \Rightarrow (A_1+B_1)e^{ka}+B_2(e^{-ka}-e^{ka})=A_3e^{i\gamma a}$$

$$k[(A_1+B_1-B_2)e^{ka}-B_2e^{-ka}]=i\gamma A_3e^{i\gamma a} \quad k[(A_1+B_1)e^{ka}+B_2(-e^{-ka}-e^{ka})]=i\gamma A_3e^{i\gamma a}$$

$$\frac{e^{ka}-e^{-ka}}{2}=\sinh(ka) \quad \frac{e^{ka}+e^{-ka}}{2}=\cosh(ka)$$

$$\Rightarrow (A_1+B_1)e^{ka}-B_2 2\sinh(ka)=A_3e^{i\gamma a}$$

$$\Rightarrow k[(A_1+B_1)e^{ka}-B_2 2\cosh(ka)]=i\gamma A_3e^{i\gamma a}$$

$$B_2=\frac{1}{2}\left[A_1\underbrace{\left(1-\frac{i\gamma}{k}\right)}_{c_1}+B_1\underbrace{\left(1+\frac{i\gamma}{k}\right)}_{c_2}\right]$$ Reemplazando

$$\Rightarrow (A_1+B_1)e^{ka}-[c_1A_1+c_2B_1]\sinh(ka)=A_3e^{i\gamma a}$$

$$k[(A_1+B_1)e^{ka}-[c_1A_1+c_2B_1]\cosh(ka)]=i\gamma A_3e^{i\gamma a}$$

despejo de la primera

## Ejercicio 9

$$H = \frac{p^2}{2m} + \left(\frac{m\omega^2}{2}\right)x^2 \qquad \phi_0 = A_0 e^{-\beta x^2}$$

$$\Rightarrow H\phi_0 = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right] A_0 e^{-\beta x^2} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_0(-\beta 2x)e^{-\beta x^2}\right)\right] + \frac{m\omega^2}{2}x^2 A_0 e^{-\beta x^2}$$

$$= A_0\left[\frac{\hbar^2\beta}{m}\left(e^{-\beta x^2} - 2x^2\beta e^{-\beta x^2}\right)\right] + \frac{m\omega^2}{2}x^2 A_0 \cancel{e^{-\beta x^2}} = E A_0 \cancel{e^{-\beta x^2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{2\hbar^2\beta^2}{m}x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{\hbar\beta}{m} = E_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\beta^2\hbar^2}{m} = \frac{m\omega^2}{2} \quad \boxed{\beta = \frac{m\omega}{2\hbar}} \quad y \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Como primer argumento comparando con el oscilador armónico tenemos esa $E$ como fundamental. Pero uno mejor es que al saltar de nivel se libera una energía $\hbar\omega$. Si bajara de nivel, entraría en niveles de energía negativos que no cumplirían la ecuación de Schrödinger para este sistema pues si $\beta < 0 \Rightarrow \phi_0 = A_0 e^{|\beta| x^2}$ que diverge en infinito. Potencial $>0$ siempre $\frac{m\omega^2}{2}x^2 \Rightarrow E<0$ no existe en el análisis

## Ejercicio 10

$$\phi(x) = h(x)\, e^{-\beta x^2}$$

a) Ecuación diferencial a satisfacer

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\phi = E\phi$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[(\dot h - 2\beta x h)e^{-\beta x^2}\right] = \left[E - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right] h e^{-\beta x^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\ddot h - 2\beta h - 2\beta x \dot h)\cancel{e^{-\beta x^2}} + (\dot h - 2\beta x h)(-2\beta x)\cancel{e^{-\beta x^2}}\right] = \left[E - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right] h \cancel{e^{-\beta x^2}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\ddot h - 2\beta h - 4\beta x \dot h + 4\beta^2x^2 h\right] = \left[E - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right] h$$

Si $h(y) = y = \sqrt{2\beta}\, x \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[0 - 2\beta\sqrt{2\beta}\,\cancel{x} - 4\beta \cancel{x}\sqrt{2\beta} + 4\beta^2x^2\sqrt{2\beta}\, x\right] = \left[E - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right]\cancel{\sqrt{2\beta}\, x}$

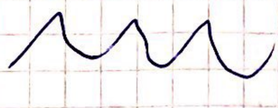
Scanned with CamScanner

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-6\beta\right] - \frac{\hbar^2}{2m}4\beta^2x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E \qquad \beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}3\frac{m\omega}{2\hbar} + x^2\left[\frac{m\omega^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m}2\frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2}\right] = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\omega\hbar}{2} + x^2\left[\cancel{\frac{m\omega^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}}\right] = E$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{3}{2}\omega\hbar}$$



clásico

La otra parte no aporta $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$

$$\underbrace{\sqrt{2\beta}x\, e^{-\beta x^2}} \qquad (1-2(\sqrt{2\beta}x)^2)e^{-\beta x^2}$$

La primera impar y la segunda es par

Ejercicio 11

$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ ; $\frac{3}{2}\hbar\omega = E_0$

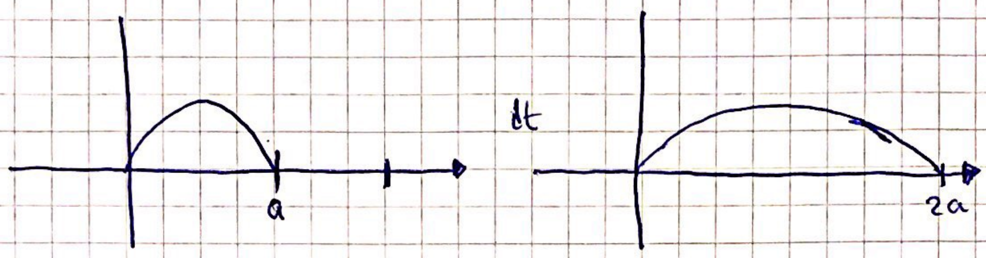
$\langle x \rangle$:

Ejercicio 12:

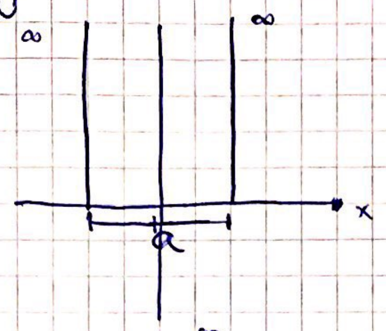
Osea en $t_0 = 0$

$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(a)^2}$ en un dt $E_f = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$

a)



Ejercicio 13




A $t=0$ $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$ con $\varphi_n$ las autofunciones de $\hat{\mathcal{H}}$

a) ¿Cual es la probabilidad P de que una medición de E de la partícula a en t cualquiera de un resultado mayor que $5E_1$, siendo $E_1$ la energía fundamental? Si $P=0$, ¿Que coef deben ser cero y cuales no?

$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(a)^2}$ $\Rightarrow$ $|C_n|^2$ sera la probabilidad de medir una energía $E_n$

$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ $E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = 4E_1$

$P_{>3} = \sum_{n=3}^{\infty} |C_n|^2$

Si $P=0$ $C_n$ y $n \geq 3 = 0$

b) a $t=0$ $1 = \int_0^a (C_1^*\varphi_1^* + C_2^*\varphi_2^*)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)\,dx$

$1 = \int_0^a C_1^*C_1\varphi_1^*\varphi_1 + C_2^*C_1\varphi_2^*\varphi_1 + C_1^*C_2\varphi_1^*\varphi_2 + C_2^*C_2\varphi_2^*\varphi_2\,dx$

Recordemos que por ser base
$\int \varphi_i^*\varphi_j = \delta_{ij}$ $\Rightarrow 1 = |C_1|^2 \underbrace{\int_0^a \varphi_1^*\varphi_1\,dx}_{1} + |C_2|^2 \underbrace{\int_0^a \varphi_2^*\varphi_2\,dx}_{1}$

Por normalización de cada una por sep

$\Rightarrow |C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$

Por otro lado me piden $\langle H \rangle = 2.5E_1$

$$\langle H\rangle = \int (C_1^*\varphi_1^* + C_2^*\varphi_2^*) H (C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = \int (C_1^*\varphi_1^* + C_2^*\varphi_2^*)(E_1C_1\varphi_1 + 4E_1C_2\varphi_2)$$

$$= E_1|C_1|^2 + 4E_1|C_2|^2$$

$$\Rightarrow |C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$$

$$\cancel{E_1}|C_1|^2 + 4\cancel{E_1}|C_2|^2 = 2.5E_1$$

$$1 - |C_2|^2 + 4|C_2|^2 = 2.5$$

$$\Rightarrow 3|C_2|^2 = 1.5 = \frac{3}{2} \Rightarrow |C_2|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |C_1|^2 = \frac{1}{2}$$

$\therefore C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_1} \qquad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta_2}$ Si $C_1$ es real positivo

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$$

$\langle\hat{x}\rangle = \frac{a}{8}$ fiaca... pero sale facil

$$\Rightarrow \frac{a}{8} = \int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1^* + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta}\varphi_2^*\right) x \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\varphi_2\right) dx$$

$$\frac{a}{8} = \int_0^a \frac{1}{2}\left[\varphi_1^* x \varphi_1 + e^{-i\theta}\varphi_2^* x \varphi_1 + e^{i\theta}\varphi_1^* x \varphi_2 + \varphi_2^* x \varphi_2\right] dx$$