8/10 A

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre: Emiliano Fortes
No. de libreta: 126/14 Turno de TP: Tarde

Matemática 4 - 2ndo Parcial (03/07/2015)

Justificar todas las respuestas
(una respuesta correcta pero mal o no justificada no será tomada en cuenta.)
Se aprueba sumando al menos 5 puntos y habiendo hecho como mínimo un ejercico completamente bien.

2,5

1) (2.5pt) Consideramos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \text{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)}.$$

a) Verificar que el ∞ es una singularidad aislada y clasificarla.
b) Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$ donde γ es el círculo centrado en 0 de radio 3 recorrido una vez en sentido positivo.

2,25

2) (2.5pt) Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 2}\,dx.$$

3) (3pt)

1,25

a) (1.5pt) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica, par, definida por $f(x) = x(\pi - x)$ en $[0, \pi]$. Hallar la serie de Fourier Sf de f. ¿En que puntos x de $\mathbb{R}$ vale la igualdad $f(x) = Sf(x)$?

b) (1.5pt) Resolver:

1,25 α

$$\begin{cases} u_t(x,t) - t u_{xx}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty). \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x) & \forall x \in (0,\pi). \end{cases}$$

4) (2pt) Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$, resolver (usando la transformada de Fourier)

2

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 3\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = u(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verifique que la función u hallada es efectivamente de clase C^1 y es solución de (1).

Ejercicio 1 : Consideremos $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}$

a) Verificar que el infinito es singularidad aislada y clasificarla

CA $\dfrac{1}{\frac{1}{z}-1} = \dfrac{z}{1-z}$

$z \to \infty$. Analizo $\lim\limits_{z\to 0} \left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \lim\limits_{z\to 0} \left| \overset{\to 0}{z^2} \dfrac{1}{\underbrace{\sin\left(\underbrace{\frac{z}{1-z}}_{\to 0}\right)}_{\to 0}} \right| = \dfrac{0}{0}$?

Analizando por L'Hôpital,

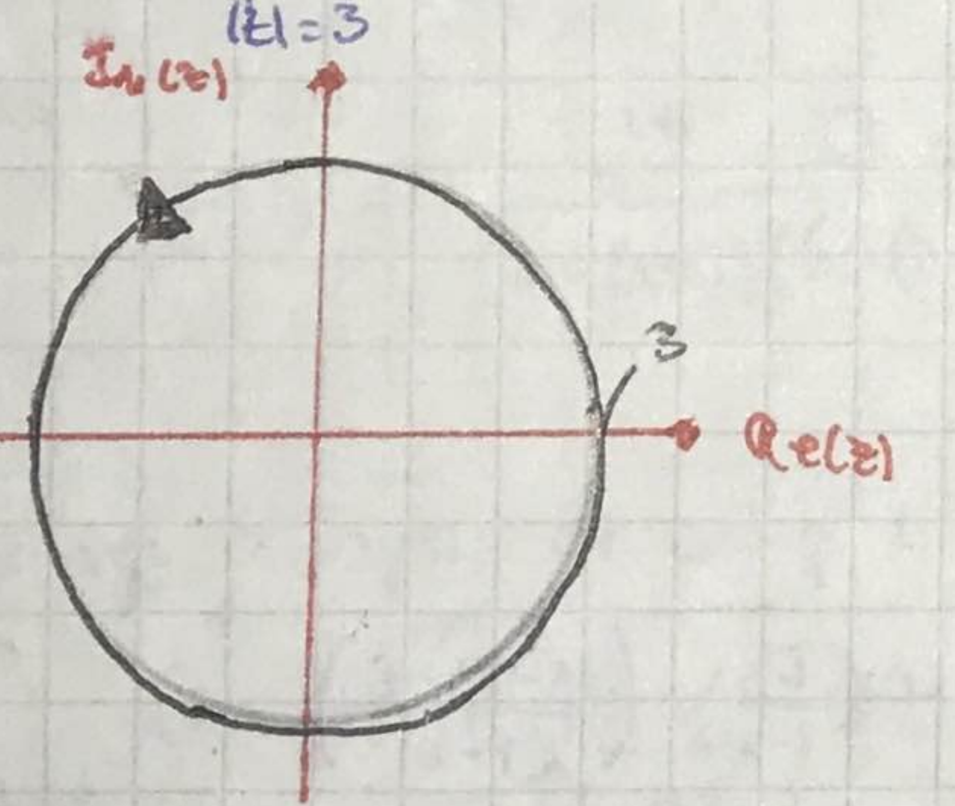
$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overset{\to 0}{2z}}{\underbrace{\cos\left(\frac{z}{1-z}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{(1-z)+z}{(1-z)^2}\right)}_{\to 1}} = 0$, luego el límite anterior existía y valía cero

$\lim\limits_{z\to 0} \left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| = 0$

por lo tanto 0 es una singularidad evitable para $f(1/z)$ e infinito lo es para $f(z)$. ~~Además por ser evitable, es aislada.~~

OK.

b) Calcular $\oint_{|z|=3} f(z)\,dz$.



Por residuos, como f holomorfa en $\mathbb{C} - \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ y supongamos que $\oint_{|z|=R} f(z)dz$ / $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ estan encerrados por la bola de radio R

$\Rightarrow \oint_{|z|=R} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i)$

En nuestro caso, las singularidades de f en $\mathbb{C}_\infty$ son $\left\{0, 1, \frac{1}{k\pi}+1, \infty\right\}$ ✓

$\dfrac{1}{z-1} = k\pi \overset{z\neq 1}{\Leftrightarrow} 1 = (z-1)k\pi$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{k\pi} + 1$ < 3
$\forall k>0$
y algun k negativo k_0

$k \in \mathbb{Z} - 0$

~~$\Rightarrow \oint_{|z|=3} f(z)dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1) + \sum \mathrm{Res}\left(f, \frac{1}{k\pi}+1\right)\right)$~~

encerrados por la bola, veamos cuales son

el [illegible] de los residuos vale si hay una cantidad finita de singularidades.

$-3 < \frac{1}{k\pi} + 1 < 3 \iff -4 < \frac{1}{k\pi} < 2$ si $k>0$ $\quad -4k\pi < 1 < 2k\pi$

Vale $\forall k>0$

si $k<0$ $\quad -4k\pi > +1 > +2k\pi$

$-4 < +\frac{1}{k\pi} < 2 \iff$ vale $\forall k$ negativo

$$\cancel{\Rightarrow \oint_{|z|=3} f(z)dz = 2\pi i \left(Res(f,0) + Res(f,1) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0\\ k=-\infty}}^{+\infty} Res\left(f, \frac{1}{k\pi}+1\right)\right)}$$

No lo puedo calcular, pero utilizo la propiedad del residuo infinito /

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa $- \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} Res(f, z_i) + Res(f, \infty) = 0$$

es casi la def del residuo al ∞.

$\Rightarrow$ en nuestro caso $\oint_{|z|=3} f(z)\,dz = -2\pi i\, Res(f,\infty)$.

Calculandolo, para esto, $-Res(f,\infty) = Res\left(+\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$ lo calculo como polo de

$$\lim_{z\to 0} \left| +\frac{1}{\cancel{z^2}} \cdot \cancel{z^2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{z}{1-z}\right)} \right| = +\infty$$

$\therefore$ lo calculo como un polo, que a ojo veo que cumple de orden 1

$$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{z}{1-z}\right)} = \frac{0}{0}$$

si $\lim \neq 0 \neq \infty$ $\Rightarrow$ es de orden 1, y además, el lim será su residuo

L'Hôpital, $\lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{z}{1-z}\right) \cdot \left(\frac{(1-z)+z}{(1-z)^2}\right)} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = 1$$

y $-Res(f,\infty) = 1$

Finalmente, $\boxed{\oint_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i}$

Ejercicio 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)\,dx}{x^2-2x+2}$$

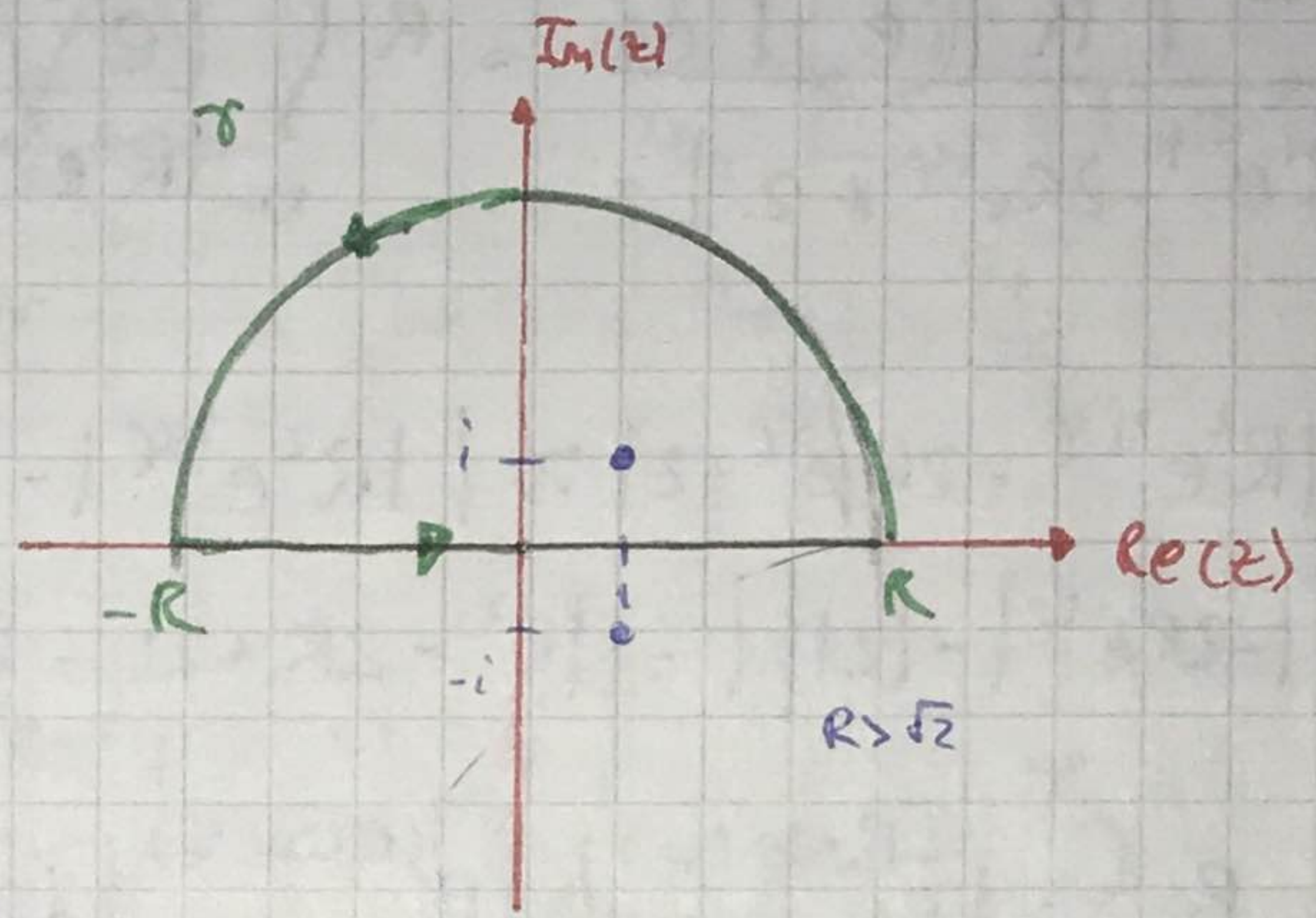
$\frac{\cos(x)}{x^2-2x+2}$ se comporta como $\frac{\cos(x)}{x^2}$ en infinito

$\therefore$ como esta converge, lo hace a su valor principal, y la primera también (útil después)

Cambiamos la integral por una de contorno compleja

usemos $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}$

e integremos sobre γ



Singularidades de $f(z)$

$z^2-2z+2=0$

$\Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

$z = 1+i$

$z = 1-i$

Por un lado

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+i)$$

Hallemoslo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-(1+i))(z-(1-i))} = \frac{\varphi(z)}{(z-(1+i))} \quad \text{con } \varphi(z) = \frac{e^{iz}}{(z-(1-i))} \quad \text{y } \varphi(1+i) \neq 0$$

Vemos que $1+i$ es un polo de orden 1

$$\varphi(1+i) = \frac{e^{i-1}}{(2i)}$$

si $\lim_{z \to 1+i} \cancel{(z-(1+i))} \cdot \frac{\varphi(z)}{\cancel{(1-(1+i))}} \neq 0 \neq \infty$

$= \frac{e^{i-1}}{2i}$ polo de orden 1 y su residuo es justamente $\varphi(1+i)$

Pues f cerca del $1+i$ se escribe como $f(z) = \varphi(1+i) + \varphi'(1+i) + \varphi''\frac{(1+i)}{2} \ldots$

Luego $\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi \cancel{i} \frac{e^{i-1}}{\cancel{2i}}$

pero también vale $\oint_\gamma f(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\varphi}} \cdot Rie^{i\varphi}d\varphi}{R^2e^{2i\varphi} - 2Re^{i\varphi}+2} + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}$

Parametrizando $z = Re^{i\varphi}$

$dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

Llegamos a la igualdad

$$\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\varphi}}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi}{R^2e^{2i\varphi}+2Re^{i\varphi}+2} + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx = \pi e^{i-1} \leftarrow \bullet$$

Analizemos la primer integral $\left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\varphi}}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi}{R^2e^{2i\varphi}-2Re^{i\varphi}+2} \right| \leq \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\varphi}}\, iRe^{i\varphi}\, d\varphi}{R^2e^{2i\varphi}-2Re^{i\varphi}+2} \right|$

$$\leq \int_0^\pi \frac{|e^{iRe^{i\varphi}}|\cdot R\, \overbrace{|ie^{i\varphi}|}^{=1}}{|R^2e^{2i\varphi}-2Re^{i\varphi}+2|}\,d\varphi = R\int_0^\pi \frac{|e^{iR(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))}|}{|R^2e^{2i\varphi}-2Re^{i\varphi}+2|}\,d\varphi \quad (*)$$

Analizo $|R^2e^{2i\varphi}-2Re^{i\varphi}+2| \geq \big|\, |R^2e^{2i\varphi}| - |-2Re^{i\varphi}+2| \,\big|$

? $\geq \big| R^2 - \big| |-2Re^{i\varphi}| - |2| \big| \big| = |R^2-2R+2| = R^2-2R+2 \qquad R > \sqrt{2}$

$$\Rightarrow (*) \leq \frac{R}{R^2-2R+2}\int_0^\pi |e^{-R\sin(\varphi)}|\cdot \overbrace{|e^{iR\cos(\varphi)}|}^{=1}\,d\varphi = \frac{R}{R^2-2R+2}\int_0^\pi \overbrace{\frac{1}{e^{R\sin(\varphi)}}}^{<1}\,d\varphi$$

$$< \frac{R}{R^2-2R+2}\cdot\pi \qquad \lim_{R\to+\infty} \frac{R}{R^2-2R+2} = 0$$

Tomando $\lim_{R\to+\infty}$ de la expresión $\bullet$

llegamos a $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\overbrace{e^{ix}}^{=\cos(x)+i\sin(x)}}{x^2-2x+2}\,dx = \pi e^{i-1}$

(que es el valor principal, y como converge, es su valor)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2-2x+2} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2-2x+2} = \pi e^{i-1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2-2x+2} = \mathrm{Re}(\pi e^{i-1})}$$

¿cuánto es explícitamente?

$$e^{i-1} = \frac{e^i}{e} = \frac{\cos(1)+i\sin(1)}{e}.$$

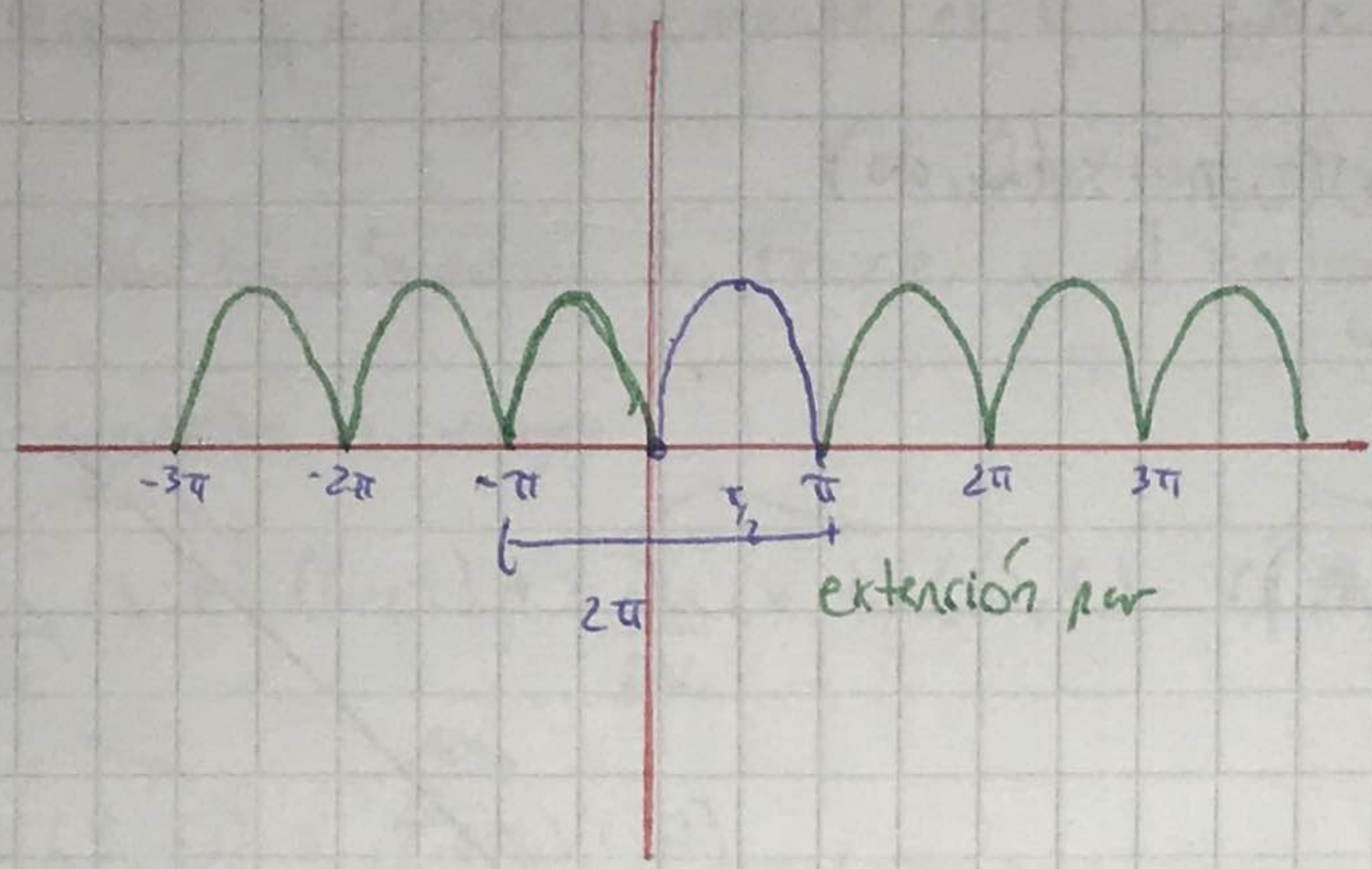
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots\, dx = \frac{\pi}{e}\cos(1).$$

Emiliano Fortes

Ejercicio 3

a) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π periódica, par, definida por $f(x) = x(\pi - x)$ en $[0,\pi]$.

Hallar Sf de f. ¿En que puntos x de $\mathbb{R}$ vale $f(x) = Sf(x)$?



$(x\pi - x^2)' = \pi - 2x$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$\Rightarrow \frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(\omega n x)\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\omega n x)\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(nx)\,dx = 0$$ por f es par en $[0,2\pi]$ y sin es impar en $[0,2\pi]$

paridad $\int_0^{2\pi} = 2\int_0^{\pi}$

$$\Rightarrow Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$$

por paridad $\int_0^{2\pi} = 2\int_0^{\pi}$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\pi - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{\cancel{6}\,3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\pi\cos(nx)\,dx - \int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x\sin(nx)}{n} + \frac{\pi\cos(nx)}{n^2} - \frac{x^2\sin(nx)}{n} - \frac{2x\cos(nx)}{n^2} + \frac{\sin(nx)}{n^3}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi(-1)^n}{n^2} - \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \frac{\pi}{n^2}\right]$$

$$= 2\left[-\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2}{n^2}\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ -2 & \text{si } n \text{ par}\end{cases}$$

$$\boxed{Sf(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2}\left[-(-1)^n - 1\right]\cos(nx)}$$

PARTES

$$\int x\cos(nx)\,dx = +\frac{x\sin(nx)}{n} - \int \frac{\sin(nx)}{n}\,dx$$

$$= \frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

PARTES

$$\int x^2\cos(nx) = \frac{x^2\sin(nx)}{n} - \int \frac{2x\sin(nx)}{n}\,dx$$

$$= \frac{x^2\sin(nx)}{n} - 2\left(-\frac{x\cos(nx)}{n^2} - \int -\frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{x^2\sin(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

Si no pifie a las cuentas, esa es la serie de la función, que converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$ pues f es continua (se ve en el gráfico), es C^1 a trozos, siendo los puntos problemáticos para la derivada los $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$, donde existe $f'^{-}(x)$ y $f'^{+}(x)$ pues f es una parábola excepto en $k\pi$, y además f es 2π-periódica, cumpliendo todas las condiciones de convergencia uniforme

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - t\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x) & \forall x \in (0,\pi) \end{cases}$$

Ejercicio 4: Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$, resolver usando TF.

$$\begin{cases} u_t(x,t) + 3u_x(x,t) = u(x,t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Verifique que efectivamente es C^1 la ~~sfunción~~ función

Aplicando transformada de Fourier (respecto de x) y el hecho de su linealidad, obtengo las siguientes ecuaciones

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)}(\omega,t) + 3\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}(\omega,t) = \widehat{u(x,t)}(\omega,t)$$

$$\widehat{u(x,0)} = \widehat{f(x)}(\omega)$$

Como $\widehat{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}}(\omega,t)$ depende de t y estamos transformando respecto de x

$$\Rightarrow \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)}(\omega,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{u(x,t)}(\omega,t)\right)$$

Para el término $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}(\cancel{x,t})}(\omega,t) = i\omega\, \widehat{u(x,t)}(\omega,t)$

por propiedad de derivada en TF

finalmente $\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_{(\omega,t)} + 3i\omega\,\hat{u}_{(\omega,t)} = \hat{u}_{(\omega,t)}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) = (1-3i\omega)\,\hat{u}(\omega,t) \quad ✓$$

Que tiene como solución a la ecuación diferencial

$$\hat{u}(\omega,t) = e^{(1-3i\omega)t} g(\omega) \quad ✓$$

Reemplazando en la segunda ecuación

$$\hat{u}(\omega,0) = e^{(1-3i\omega)0} g(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \hat{f}(\omega) \quad ✓$$

Luego $\hat{u}(\omega,t) = e^{(1-3i\omega)t}\hat{f}(\omega) = e^{t}\cdot e^{-3i\omega t}\hat{f}(\omega)$ ✓

Antitransformando, e^t actua como constante y $e^{-3i\omega t}$ es un corrimiento en la f, finalmente $u(x,t) = e^t f(x-3t)$ ✓

Chequiemos:

$e^t \cdot f(x-3t)$ es C^1 pues es multiplicación de funciones C^1

(e^t es C^1, $f(x-3t)$ es una función C^1

compuesta por otra C^1)

$u(x,0) = e^0 f(x-3.0) = f(x)$ ✓

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = u(x,t) \Leftrightarrow \left(e^t f(x-3t) - 3e^t \cancel{f'(x-3t)}\right) + 3e^t \cancel{f'(x-3t)} = e^t f(x-3t)$ ✓ ✓

$\boxed{\text{Rta: } u(x,t) = e^t f(x-3t)}$