Ιδιοτητες Αλγεβρας Boole
Δυϊσμος, Νομοι De Morgan,
Θεωρημα Απορροφησης

Αρχιτεκτονικη Διαλεξη 1

Άλγεβρα Boole $B = \{(0,1) +, \cdot, '\}$

$x' = \bar{x}$

or: $+ \equiv \vee$ ($\equiv$ είναι το ισοδυναμεί)

and: $\cdot \equiv \wedge$

Invert $' \equiv \neg$, NOT, OXI

Ιδιότητες της Αλγεβρα Boole:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha \longleftrightarrow \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ "Αντιμεταθετική"
- $\alpha + 1 = 1 \longleftrightarrow \alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha + 0 = \alpha \longleftrightarrow \alpha \cdot 1 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + c) = (\alpha + \beta) + c \longleftrightarrow \alpha(\beta \cdot c) = (\alpha \cdot \beta)c$ "Προσεταιριστική"
- $\alpha \cdot (\beta + c) = \alpha\beta + \alpha c \longleftrightarrow \alpha + \beta c = (\alpha + \beta)(\alpha + c)$ "Επιμεριστική"
- $\alpha + \bar{\alpha} = 1$ $\alpha + \alpha = \alpha$ $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ $\alpha \cdot \bar{\alpha} = 0$ $\alpha + \bar{\alpha} = 1$

- **Δυϊσμος**

Αν αντικαταστήσω το $0 \longleftrightarrow 1$ ή το $+ \longleftrightarrow \cdot$ σε οποιαδήποτε ιδιότητα συνεχίζει να ισχύει

$0' = 1$ $1' = 0$ $\bar{x} = x'$ $(\alpha\beta)' = \overline{\alpha\beta}$ $(\alpha')' = \alpha$ $\alpha' b = \bar{\alpha} b$

Νόμοι de Morgan: $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ $\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n$

$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ $\overline{x_1 + x_2 + x_3 + x_n} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_n$

Θεώρημα Απορρόφησης: $\alpha + \alpha \cdot \beta = \alpha$ $\alpha + \bar{\alpha}\beta = \alpha + \beta$

$\overline{\alpha + \beta \bar{c}} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\beta \bar{c}} = \bar{\alpha} \beta c$

$\overline{\alpha + \bar{\beta}\bar{c}} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\bar{\beta}\bar{c}} = \bar{\alpha}(\bar{\bar{\beta}} + \bar{\bar{c}}) = \bar{\alpha}(\beta + c) = \bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}c$

Λογικές Πύλες

AND

(όσες εισόδους θέλω)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

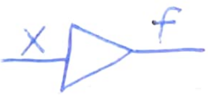
x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT
(Inverter)
(Αντιστροφέας)

(μόνο 1 είσοδο)

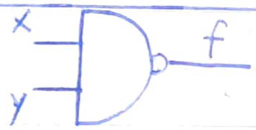
x	f
0	1
1	0

Buffer



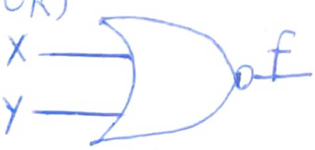
x	f
0	0
1	1

NAND
(Not And)



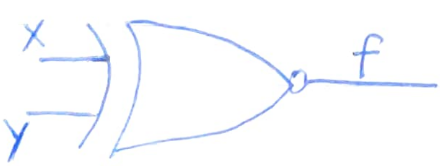
x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR
(Not OR)



x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

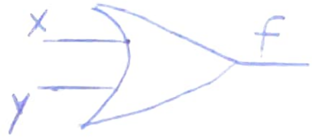
XNOR
(exclusive not or)



x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

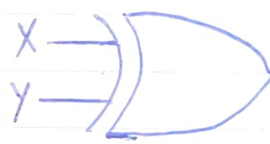
(όσες εισόδους θέλω)



x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

XOR
(exclusive or)

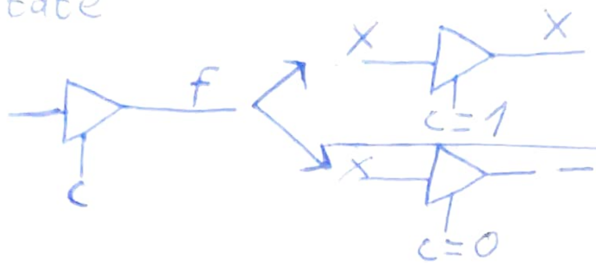
x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$f = x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$$

Tri-state

x



Αν $c=1$, τότε $f=x$

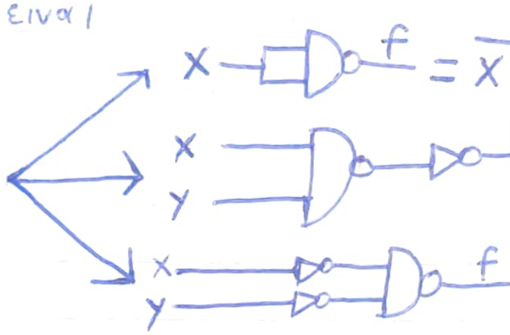
Αν $c=0$, τότε $f=z$

$z \to$ υψηλή εμπέδηση (ούτε 1 ούτε 0)

Ποιά είναι άλγεβρα Boole?

$B=\{(0,1),+,\cdot,'\}$ είναι

$B=\{(0,1), NAND\}$

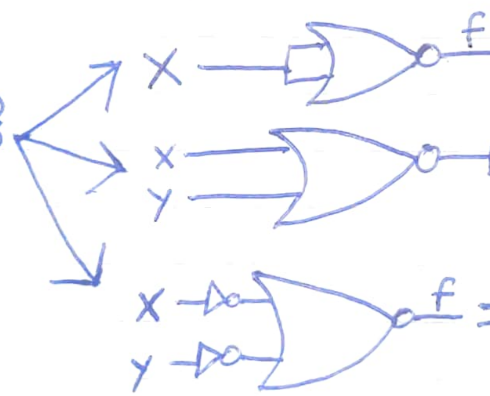


$f=\overline{x\cdot x}$ δλδ (Not)

$f=\overline{\overline{xy}}=xy$ (And)

$f=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}=\bar{\bar{x}}+\bar{\bar{y}}=x+y$ (or)

$B=\{(0,1), NOR\}$



$f=\overline{x+x}=\bar{x}$ δλδ (Not)

$f=\overline{\overline{x+y}}=x+y$ (or)

$f=\overline{\bar{x}+\bar{y}}=\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}=xy$ (And)

Κανονικές Μορφές (κάθε όρος περιλαμβάνει ΟΛΕΣ τις μεταβλητές

$$f(x,y,z)=x+y\bar{z}=x(y+\bar{y})(z+\bar{z})+y\bar{z}(x+\bar{x})=$$

$$=xyz+\underbrace{xy\bar{z}+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}}_{a+a=a}+\bar{x}y\bar{z}=xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}$$

$$=f\,\Sigma m(2,4,5,6,7)$$

5

$$f(x,y,z)=x+y\bar{z}=(x+y)(x+\bar{z})=(x+y+z\bar{z})(x+y\bar{y}+\bar{z})=$$

$$=(x+y+z)\underbrace{(x+y+\bar{z})(x+y+\bar{z})}_{aa=a}(x+\bar{y}+\bar{z})=(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+\bar{z})$$

$$=f\,\Pi m(0,1,3)$$

3

$n=$ όροι της συνάρτησης 2^n όροι εδώ 3 όροι (x,y,z) άρα $2^3=8$

έχω $3+5=8$

xyz	Ελαχιστόροι	min term	Μεγιστοροι	max term
0 0 0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	m_0	$x+y+z$	M_0
0 0 1	$\bar{x}\bar{y}z$	m_1	$x+y+\bar{z}$	M_1
0 1 0	$\bar{x}y\bar{z}$	m_2	$x+\bar{y}+z$	M_2
0 1 1	$\bar{x}yz$	m_3	$x+\bar{y}+\bar{z}$	M_3
1 0 0	$x\bar{y}\bar{z}$	m_4	$\bar{x}+y+z$	M_4
1 0 1	$x\bar{y}z$	m_5	$\bar{x}+y+\bar{z}$	M_5
1 1 0	$xy\bar{z}$	m_6	$\bar{x}+\bar{y}+z$	M_6
1 1 1	xyz	m_7	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$	M_7