

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

Rapport d'APP

Éléments de statique et dynamique
GEN411

Présenté à
Olivier Fournier & Rémy Rahem

Présenté par
Benjamin Chausse – CHAB1704
Shawn Couture – COUS1912

Sherbrooke – 14 janvier 2026

Table des matières

1 Analyse cinématique	2
1.1 Analyse géométrique	2
1.2 Vitesses	2
1.2.1 Composante x	2
1.2.2 Composante y	3
1.3 Accélérations	3
1.3.1 Composante x	3
1.3.2 Composante y	3
2 Cas d'études en cinématique	4
2.1 Mouvement contraint horizontalement	4
2.2 Mouvement contraint verticalement	5
3 Analyse statique	7
4 Analyse dynamique	9
4.1 Moments $\vec{M}_{B,B}$	9
4.2 Force \vec{F}_B	10
A Cinématique	12
A.1 Mouvement horizontal	12
A.2 Mouvement vertical	13
B Simulations statiques et dynamiques	14

1 Analyse cinématique

1.1 Analyse géométrique

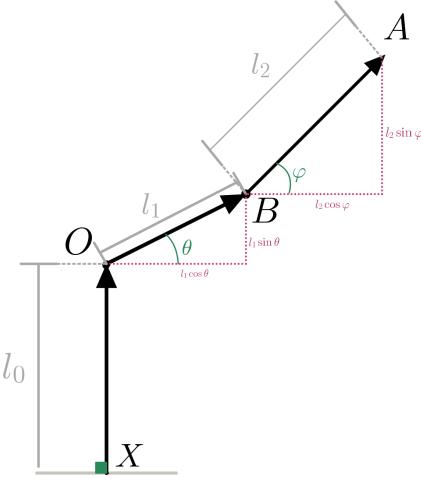


FIGURE 1-1 – Tiges du bras mécanique

$$\overrightarrow{XO} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} l_2 \cos \varphi \\ l_2 \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_0 + l_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \\ l_0 + l_1 \sin \theta + l_2 \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Autrement dit :

$$B_x(\theta) = l_1 \cos \theta \quad (1.4)$$

$$B_y(\theta) = l_0 + l_1 \sin \theta \quad (1.5)$$

$$A_x(\theta, \varphi) = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \quad (1.6)$$

$$A_y(\theta, \varphi) = l_0 + l_1 \sin \theta + l_2 \sin \varphi \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

1.2 Vitesses

Lorsque présenté avec des angles fixes, il est possible de trouver les coordonées x, y en fonction de ceux-ci. Toutefois, il se peut que ces angles varie dans le temps (essentiel à considérer pour déterminer la vitesse du point A). θ et φ sont donc dorénavant présentés comme des fonctions pour le reste de l'analyse cinématique générale du bras mécanique :

$$\theta \rightarrow \theta(t) \quad \varphi \rightarrow \varphi(t)$$

Déterminer la vitesse du point A ne devient par la suite qu'un exercice de dérivation dans le temps de la position, en utilisant les équations développées en 1.1 comme fondement. Afin d'en faciliter la résolution (et la lecture), cette opération est segmentée par composante x, y dans les sections suivantes.

1.2.1 Composante x

$$A_x(t) = l_1 \cos \theta(t) + l_2 \cos \varphi(t) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \cos(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \cos(\varphi(t)) \quad (1.10)$$

$$V_{Ax}(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \cos(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \cos(\varphi(t)) \quad (1.11)$$

$$V_{Ax}(t) = l_1 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\theta(t)) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \quad (1.12)$$

$$V_{Ax}(t) = l_1 (-\sin(\theta(t))\dot{\theta}(t)) + l_2 (-\sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)) \quad (1.13)$$

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) - l_2 \sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \quad (1.14)$$

1.2.2 Composante y

$$A_y(t) = l_0 + l_1 \sin(\theta(t)) + l_2 \sin(\varphi(t)) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_y(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_0 + \frac{\partial}{\partial t} l_1 \sin(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \sin(\varphi(t)) \quad (1.16)$$

$$V_{A_y}(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \sin(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \sin(\varphi(t)) \quad (1.17)$$

$$V_{A_y}(t) = l_1 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\theta(t)) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\varphi(t)) \quad (1.18)$$

$$V_{A_y}(t) = l_1 \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + l_2 \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.19)$$

1.3 Accélérations

L'accélération se définit comme étant la dérivée de la vitesse. Comme la vitesse à déjà été définie de façon générale en 1.2, il ne suffit qu'à en effectuer la dérivée (encore une fois par composante pour simplifier la lecture) afin d'obtenir un solution générale de l'accélération selon n'importe qu'elles fonction décrivant le mouvement angulaire des moteurs dans le temps.

1.3.1 Composante x

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{Ax}(t) = \frac{\partial}{\partial t} (-l_1 \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)) \quad (1.21)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \quad (1.22)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 (\cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t)^2 + \sin(\theta(t)) \ddot{\theta}(t)) - l_2 (\cos(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)^2 + \sin(\varphi(t)) \ddot{\varphi}(t)) \quad (1.23)$$

1.3.2 Composante y

$$\alpha_{Ay}(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.24)$$

$$\alpha_{Ay}(t) = l_1 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.25)$$

$$\alpha_{Ay}(t) = l_1 (-\sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \dot{\theta}(t) + \cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t)) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.26)$$

$$\alpha_{Ay}(t) = l_1 (\cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.27)$$

$$\alpha_{Ay}(t) = l_1 (\cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2) + l_2 (-\sin(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + \cos(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t)) \quad (1.28)$$

$$\alpha_{Ay}(t) = l_1 (\cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2) + l_2 (\cos(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t) - \sin(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)^2) \quad (1.29)$$

2 Cas d'études en cinématique

2.1 Mouvement contraint horizontalement

Il est possible de déterminer une relation entre θ et φ à l'aide de la figure A-2 :

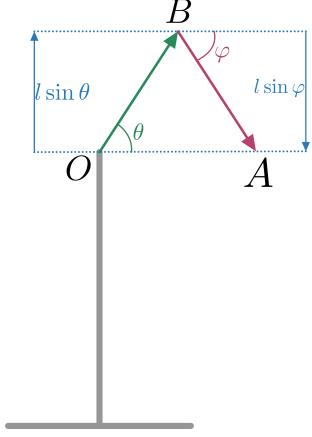


FIGURE 2-1 – A contraint à un mouvement en x

Ainsi, puisque dans ce cas d'étude spécifique, $\varphi = -\theta$, les solutions trouvées en 1.1 peuvent être transformées comme suit :

$$A_x(\theta, \varphi) = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \Rightarrow A_x(\theta) = l_1 \cos \theta + l_2 \cos(-\theta) \quad (2.6)$$

Avec peu, d'effort, ce même type de transformation peut être fait pour les équations de vitesses et d'accélération où θ dépend du temps. Puisque -1 est une constante, la dérivation est triviale :

$$\varphi(t) = -\theta(t) \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = -\dot{\theta}(t) \Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = -\ddot{\theta}(t) \quad (2.7)$$

Cela permet d'exprimer les équations de vitesse et d'accélération de A comme suit :

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) + l_2 \sin(-\theta(t))\dot{\theta}(t) \quad (2.8)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 \left(\cos(\theta(t))\dot{\theta}(t)^2 + \sin(\theta(t))\ddot{\theta}(t) \right) - l_2 \left(-\cos(-\theta(t))\dot{\theta}(t)^2 - \sin(-\theta(t))\ddot{\theta}(t) \right) \quad (2.9)$$

Dans le cadre de cette analyse, il est demandé de modéliser le bras entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ posant que la vitesse angulaire de θ est constante et vaut ω . Puisque $\dot{\theta}(t)$ est en soi une accélération angulaire, nous obtenons ceci :

$$\dot{\theta}(t) = \omega \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = \omega t \quad (2.10)$$

$$A_x(t) = l_1 \cos(\theta(t)) + l_2 \cos(-\theta(t)) \Rightarrow A_x(t) = l_1 \cos(\omega t) + l_2 \cos(-\omega t) \quad (2.11)$$

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\omega t)\omega + l_2 \sin(-\omega t)\omega \quad (2.12)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 (\cos(\omega t)\omega^2 + \sin(\omega t) \cdot 0) - l_2 (\cos(-\omega t)\omega^2 + \sin(-\omega t) \cdot 0) \quad (2.13)$$

$$= -l_1 \cos(\omega t)\omega^2 - l_2 \cos(-\omega t)\omega^2 \quad (2.14)$$

Toutefois l'analyse de ce cas porte sur les valeurs de position/vitesse/accélérations selon θ et non pas selon t . Les deux étant interdépendants les équation ci-dessus peuvent être mises selon θ puisque $\theta = \omega t$ implique que :

$$t = \frac{\theta}{\omega} \quad (2.15)$$

Ainsi :

$$A_x(\theta) = l_1 \cos(\omega \frac{\theta}{\omega}) + l_2 \cos(-\omega \frac{\theta}{\omega}) \quad (2.16)$$

$$= l \cos(\theta) + l \cos(-\theta) \quad (2.17)$$

$$= l [\cos(\theta) + \cos(-\theta)] \quad (2.18)$$

$$V_{Ax}(\theta) = -l_1 \sin(\omega \frac{\theta}{\omega})\omega + l_2 \sin(-\omega \frac{\theta}{\omega})\omega \quad (2.19)$$

$$= -l \sin(\theta)\omega + l \sin(-\theta)\omega \quad (2.20)$$

$$= -l \sin(\theta)\omega - l \sin(\theta)\omega \quad (2.21)$$

$$= -2l \sin(\theta)\omega \quad (2.22)$$

$$\alpha_{Ax}(\theta) = -l_1 \cos(\omega \frac{\theta}{\omega})\omega^2 + l_2 \cos(-\omega \frac{\theta}{\omega})\omega^2 \quad (2.23)$$

$$= -l \cos(\theta)\omega^2 - l \cos(-\theta)\omega^2 \quad (2.24)$$

$$= -l\omega^2 [\cos(\theta) + \cos(-\theta)] \quad (2.25)$$

$$= -l\omega^2 [\cos(\theta) + \cos(\theta)] \quad (2.26)$$

$$= -2l\omega^2 \cos(\theta) \quad (2.27)$$

Pour le cas à l'étude $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, une modélisation des équations (figure A-1) avec les valeurs spécifiées au tableau A-1 peut être trouvée en annexe. Aussi, les positions de départ et de fin du bras pour cette modélisation peuvent être consulté à la figure A-2.

2.2 Mouvement contraint verticalement

Dans ce cas de figure, la position en x du point A est définie comme étant toujours à une distance l de l'origine. D'ailleurs l correspond aussi à la longueur de l_1 et l_2 . L'équation générale de A_x peut être utilisé pour contraindre φ en fonction de θ :

$$A_x = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \Rightarrow l = l \cos \theta + l \cos \varphi \quad (2.28)$$

$$1 = \cos \theta + \cos \varphi \quad (2.29)$$

$$1 - \cos \theta = \cos \varphi \quad (2.30)$$

$$\varphi = \arccos(1 - \cos \theta) \quad (2.31)$$

Pour éviter d'avoir à dériver φ dans le temps, il est possible d'utiliser l'équation 2.29 et les dérivées partielles :

$$1 = \cos \theta + \cos \varphi \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} 1 = \frac{\partial}{\partial t} (\cos \theta + \cos \varphi) \quad (2.33)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi \quad (2.34)$$

$$0 = -\sin(\theta)\dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi \quad (2.35)$$

$$0 = -\sin(\theta)\dot{\theta} - \sin(\varphi)\dot{\varphi} \quad (2.36)$$

$$\sin(\varphi)\dot{\varphi} = -\sin(\theta)\dot{\theta} \quad (2.37)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\sin(\theta)}{\sin(\varphi)}\dot{\theta} \quad (2.38)$$

Enfin puisque le mouvement est contraint, par définition, à un mouvement que sur l'axe des y , il est seulement nécessaire d'analyser la position et la vitesse selon cet axe. Encore une fois, les équation générales sont utilisées comme point de départ :

$$A_y(t) = l_0 + l \sin \theta(t) + l \sin \varphi(t) \quad (2.39)$$

$$= l_0 + l \sin \theta(t) + l \sin \arccos(1 - \cos(\theta(t))) \quad (2.40)$$

$$= l_0 + l \sin \theta(t) + l \sin \arccos(1 - \cos(\theta(t))) \quad (2.41)$$

$$= l_0 + l [\sin \theta(t) + \sin \arccos(1 - \cos(\theta(t)))] \quad (2.42)$$

$$V_{A_y}(t) = l_1 \cos(\theta(t))\dot{\theta}(t) + l_2 \cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \quad (2.43)$$

$$= l \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + l \cos(\varphi(t)) \left(-\frac{\sin(\theta(t))}{\sin(\varphi(t))}\dot{\theta}(t) \right) \quad (2.44)$$

$$= l \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) - l \cos(\arccos(1 - \cos(\theta(t)))) \left(\frac{\sin(\theta(t))}{\sin(\arccos(1 - \cos(\theta(t))))}\dot{\theta}(t) \right) \quad (2.45)$$

Puisque la vitesse angulaire de θ est constante est la même que dans le cas d'étude horizontal, il est possible d'utiliser la relation de l'équation 2.10 pour éliminer tout $\dot{\theta}(t)$ et enfin tout considérer en fonction de θ au lieu du temps à l'aide de l'équation 2.15 :

$$A_y(t) = l_0 + l [\sin(\omega t) + \sin(\arccos(1 - \cos(\omega t)))] \quad (2.46)$$

$$A_y(\theta) = l_0 + l [\sin(\omega t) + \sin(\arccos(1 - \cos(\omega t)))] \quad (2.47)$$

$$= l_0 + l \left[\sin\left(\omega \frac{\theta}{\omega}\right) + \sin(\arccos(1 - \cos(\omega \frac{\theta}{\omega}))) \right] \quad (2.48)$$

$$= l_0 + l [\sin(\theta) + \sin(\arccos(1 - \cos(\theta)))] \quad (2.49)$$

$$V_{A_y}(t) = l \cos(\omega t) \omega - l \cos(\arccos(1 - \cos(\omega t))) \left(\frac{\sin(\omega t)}{\sin(\arccos(1 - \cos(\omega t)))} \omega \right) \quad (2.50)$$

$$V_{A_y}(\theta) = l \cos\left(\frac{\theta}{\omega}\right) \omega - l \cos(\arccos(1 - \cos(\frac{\theta}{\omega}))) \left(\frac{\sin(\frac{\theta}{\omega})}{\sin(\arccos(1 - \cos(\frac{\theta}{\omega})))} \omega \right) \quad (2.51)$$

$$= l \cos(\theta) \omega - l \cos(\arccos(1 - \cos \theta)) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\arccos(1 - \cos \theta))} \omega \right) \quad (2.52)$$

$$= l \cos(\theta) \omega - l \cos(\arccos(1 - \cos \theta)) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\arccos(1 - \cos \theta))} \omega \right) \quad (2.53)$$

$$= l \left[\cos(\theta) \omega - \cos(\arccos(1 - \cos \theta)) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\arccos(1 - \cos \theta))} \omega \right) \right] \quad (2.54)$$

Pour le cas à l'étude $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, une modélisation des équations (figure A-3) avec les valeurs spécifiées au tableau A-1 peut être trouvée en annexe. Aussi, les positions de départ et de fin du bras pour cette modélisation peuvent être consulté à la figure A-4.

3 Analyse statique

Dans un premier temps, il est demandé d'observer la force et le moment en B alors que le bras est immobile (statique) selon l'angle auquel il se trouve. Un DSL n'analysant que le segment \overline{BA} est utilisé pour faire abstraction de ce qui se produit en ce qui concerne \overline{OB} et de ses forces, considérant le tout comme des forces/moments externes nécessaires à garder la tige observée immobile.

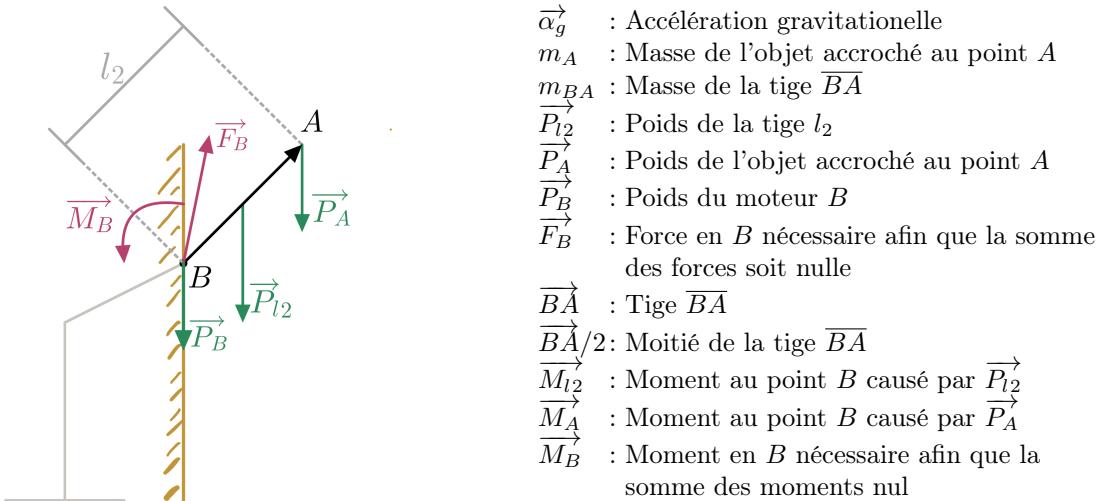


FIGURE 3-1 – DCL de la tige \overline{BA}

$$\overrightarrow{P_{l2}} = m_{BA} \cdot \overrightarrow{\alpha_g} = m_{BA} \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_{BA} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\overrightarrow{P_A} = m_A \cdot \overrightarrow{\alpha_g} = m_A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\overrightarrow{P_B} = m_B \cdot \overrightarrow{\alpha_g} = m_B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{P_{l2}} + \overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{P_B} = \overrightarrow{0} \quad (3.4)$$

$$\overrightarrow{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_{BA} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_A \\ 0 \end{bmatrix} + \overrightarrow{F_B} + \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\overrightarrow{F_B} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_{BA} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_A \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.81m_{BA} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9.81m_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9.81m_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\overrightarrow{F_B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.81(m_{BA} + m_A + M_B) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Les moments sont calculés en fonction du point O . Le moment causé par le poids du moteur n'est pas considéré puisqu'il est nul (il est à une distance 0 du point O).

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\overrightarrow{BA}/2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 \\ l_2 \sin(\varphi)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{P_A} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} l_2 \sin(\varphi) & 0 \\ -9.81m_A & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi) & l_2 \sin(\varphi) \\ 0 & -9.81m_A \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

$$= 0 \vec{i} - 0 \vec{j} + (-9.81m_A l_2 \cos(\varphi) - 0) \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81m_A l_2 \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\overrightarrow{M_{l2}} = (\overrightarrow{BA}/2) \times \overrightarrow{P_A} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 \\ l_2 \sin(\varphi)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81m_{BA} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} l_2 \sin(\varphi)/2 & 0 \\ -9.81m_{BA} & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 & l_2 \sin(\varphi)/2 \\ 0 & -9.81m_{BA} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

$$= 0 \vec{i} - 0 \vec{j} + \frac{-9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)}{2} \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)/2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_{l2} + \vec{M}_B = \vec{0} \quad (3.16)$$

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81m_A l_2 \cos(\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)/2 \end{bmatrix} + \vec{M}_B \quad (3.17)$$

$$\vec{M}_B = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81m_A l_2 \cos(\varphi) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)/2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.81m_A l_2 \cos(\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)/2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.81 \cos(\varphi) l_2 (m_A + m_{BA}/2) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Pour le cas statique, l'analyse porte sur l'évolution du couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ lorsque φ varie entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. La modélisation présentée à la figure B-1 utilise les valeurs spécifiées au tableau B-1. Dans ce cas, seules les forces gravitationnelles sont considérées, l'accélération angulaire étant nulle ($\ddot{\varphi} = 0$).

4 Analyse dynamique

4.1 Moments $\vec{M}_{B,B}$

Dans cette section-ci, le moment de force $\vec{M}_{B,B}$ est calculé à l'aide des moments trouvés lors de l'analyse statique. Hors, la somme des moments en dynamique est donnée par l'équation suivante :

$$\sum \vec{M}_X = I_X \cdot \alpha \quad (4.1)$$

En réutilisant les moments de la section de statique, l'équation devient comme suit, où $\vec{M}_{B,B}$ est le couple C_B recherché.

$$I_X \cdot \alpha_{BA} = \vec{M}_{B,B} + \vec{M}_{A,B} + \vec{M}_{BA,B} \quad (4.2)$$

$$I_X \cdot \alpha_{BA} = \vec{M}_{B,B} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \cdot m_A \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \cdot m_{BA} \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

L'équation de la somme des moments d'inertie dit qu'une inertie totale doit être obtenue. Hors, pour $\vec{M}_{BA,B}$ il s'agit d'une masse à une distance L d'un axe de rotation, pour $\vec{M}_{BA,B}$ il s'agit d'une tige uniforme et pour $M_{B,B}$, aucune inertie car le point est exactement au point choisi pour calculer les moments.

$$I_B = 0 \quad (4.4)$$

$$I_A = m \cdot l_2^2 \quad (4.5)$$

$$I_{AB} = \frac{m \cdot (l_2/2)^2}{3} \quad (4.6)$$

Voici la résolution de l'inertie totale :

$$I = 0 + m_A l_2^2 + \frac{m_{AB} \cdot l_2^2}{3} \quad (4.7)$$

$$I = m_A l_2^2 + \frac{m_{AB} \cdot l_2^2}{3} \quad (4.8)$$

$$I = l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{AB} \right) \quad (4.9)$$

Une fois remplacé dans l'équation, on peut isoler le moment recherché et calculer tout en fonction des composantes z puisque l'axe est colinéaire. Voici les démarches :

$$l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{AB} \right) \cdot \alpha_{BA} = \vec{M}_{B,B} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \cdot m_A \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \cdot m_{BA} \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$-\vec{M}_{B,B_z} = l_2 \cdot m_A \cdot g \cdot \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \cdot m_{BA} \cdot g \cdot \cos \varphi - l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{AB} \right) \cdot \alpha_{BA} \quad (4.11)$$

$$\vec{M}_{B,B_z} = -g \cdot l_2 \cdot \cos \varphi \left(m_A + \frac{1}{2} \cdot m_{BA} \right) + l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{AB} \right) \cdot \alpha_{BA} \quad (4.12)$$

4.2 Force \vec{F}_B

En dynamique, la somme des forces externes est :

$$\sum \vec{F}_e = m \cdot \vec{\gamma}_G \quad (4.13)$$

Hors, l'équation de la statique se transforme lorsqu'on veut trouver \vec{F}_B car la somme n'est plus égale à 0 :

$$m \cdot \vec{\gamma}_G = \vec{F}_B + \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot (m_B + m_{BA} + m_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

L'équation avec \vec{F}_B isolé est :

$$\vec{F}_B = m \cdot \vec{\gamma}_G - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot (m_B + m_{BA} + m_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

De l'équation plus haut, $\vec{\gamma}_G$ est l'accélération linéaire du centre de masse. m est la masse totale. $\vec{\gamma}_G$ est exprimé par une accélération tangentielle et une accélération centripète :

$$\vec{\gamma}_G = \vec{\gamma}_G^t + \vec{\gamma}_G^n \quad (4.16)$$

Où :

- l'accélération tangentielle est $\alpha \times \vec{r}$
- l'accélération centripète est $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

\vec{r} est en réalité $\vec{r}_{B/G}$ qui est ceci :

$$\vec{r} = \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

L'accélération est une constante, posée par la problématique. Et afin de simplifier les équations, la vitesse initiale est posée comme nulle : $\vec{\omega} = \vec{0}$. Ceci simplifie grandement l'équation. Une fois remplacé, on obtient :

$$\vec{\gamma}_G = \vec{\gamma}_G^t + \vec{\gamma}_G^n \quad (4.19)$$

$$\vec{\gamma}_G = \alpha \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (4.20)$$

$$\vec{\gamma}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{AB} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{0} \times (\vec{0} \times \vec{r}) \quad (4.21)$$

$$\vec{\gamma}_{G_x} = 0 \cdot 0 + \alpha_{AB} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \quad (4.22)$$

$$\vec{\gamma}_{G_y} = \alpha_{AB} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi - 0 \cdot 0 \quad (4.23)$$

$$\vec{\gamma}_{G_z} = 0 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi + 0 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \quad (4.24)$$

$$\vec{\gamma}_G = \begin{bmatrix} \alpha_{AB} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ \alpha_{AB} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Cela se remplace facilement dans l'équation initiale. Afin de rendre l'équation plus facile à lire, $m_t = m_B + m_{BA} + m_A$.

$$\vec{F}_B = m_{total} \cdot \vec{\gamma}_G - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot (m_B + m_{BA} + m_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\vec{F}_B = m_t \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{AB} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ \alpha_{AB} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot m_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\vec{F}_B = \begin{bmatrix} \alpha_{AB} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ \alpha_{AB} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot m_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\vec{F}_B = \begin{bmatrix} \alpha_{AB} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi - 0 \\ \alpha_{AB} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi - g \cdot m_t \\ 0 - 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\vec{F}_B = \begin{bmatrix} \alpha_{AB} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ (\alpha_{AB} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi) - g \cdot m_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Pour le cas dynamique, l'analyse examine l'évolution du couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ avec une accélération angulaire constante de $\alpha_{BA} = 5 \text{ rad/s}^2$. La modélisation présentée à la figure B-2 utilise également les valeurs spécifiées au tableau B-1. Contrairement au cas statique, ce scénario inclut les effets dynamiques dus à l'accélération du système, ce qui modifie significativement l'allure du couple résultant.

A Cinématique

TABLE A-1 – Valeurs des divers termes pour les cas d'étude cinématiques

Variable	Valeur
l_0	50 cm
l_1	25 cm
l_2	25 cm
ω	25 rad/s ²

A.1 Mouvement horizontal

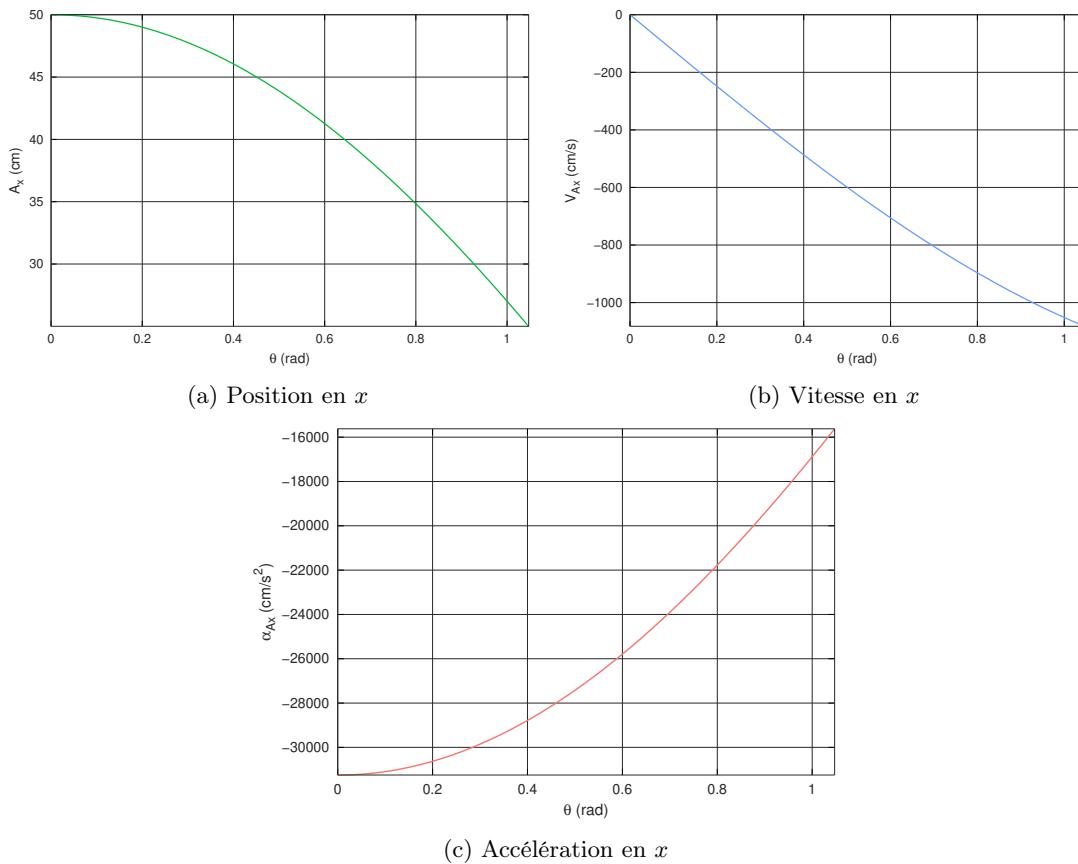


FIGURE A-1 – Attributs du point A lorsque contraint à un mouvement horizontal

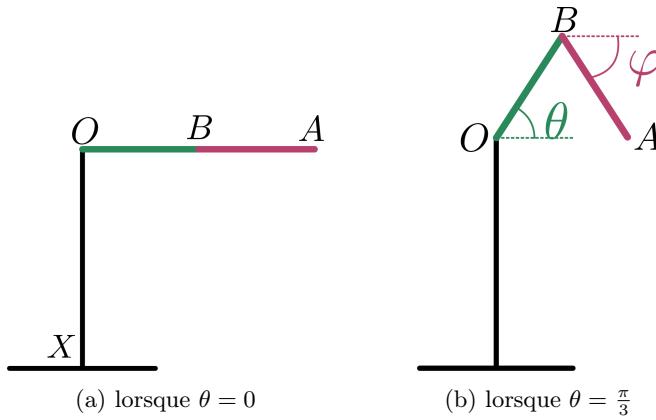


FIGURE A-2 – Positionnement du bras contraint à un mouvement en x selon θ

A.2 Mouvement vertical

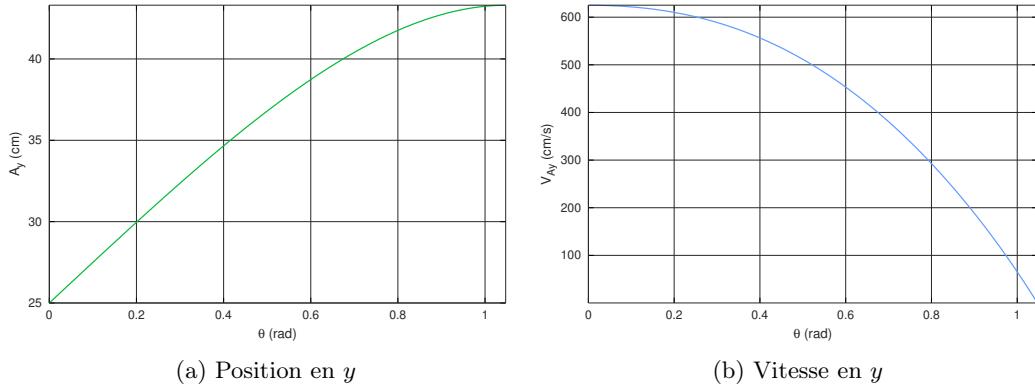


FIGURE A-3 – Attributs du point A lorsque contraint à un mouvement horizontal

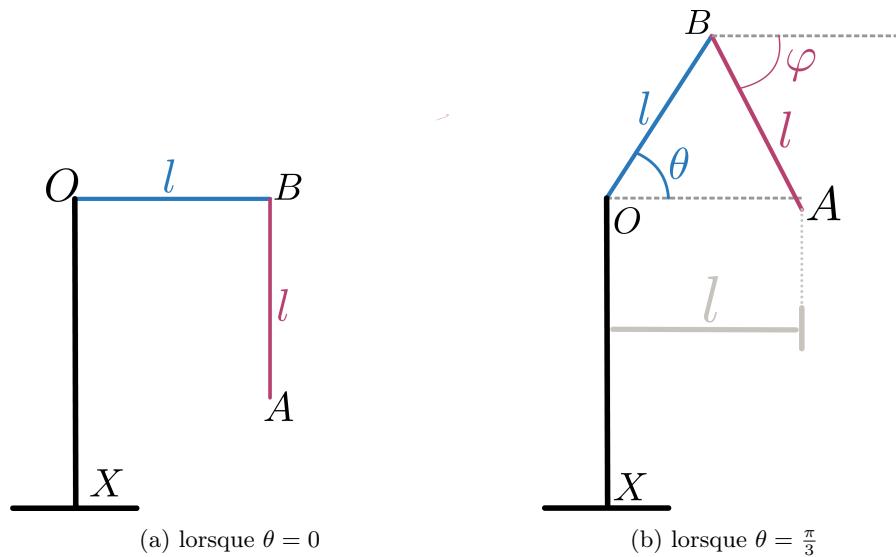


FIGURE A-4 – Positionnement du bras contraint à un mouvement en y selon θ

B Simulations statiques et dynamiques

TABLE B-1 – Valeurs des divers termes pour les cas d'étude statiques et dynamiques

Variable	Valeur
l_0	50 cm
l_1	25 cm
l_2	25 cm
m_A	100 g
m_{BA}	1 kg
α_{BA}	5 rad/s ²

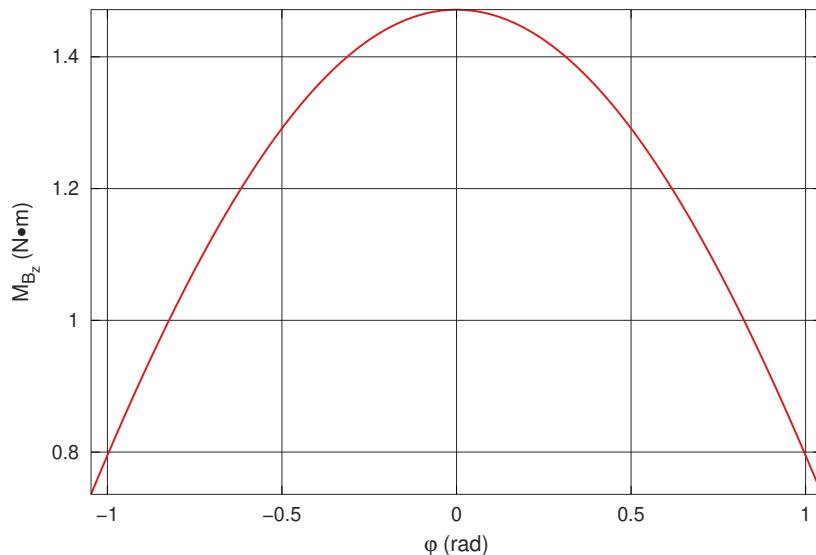


FIGURE B-1 – Couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ (cas statique)

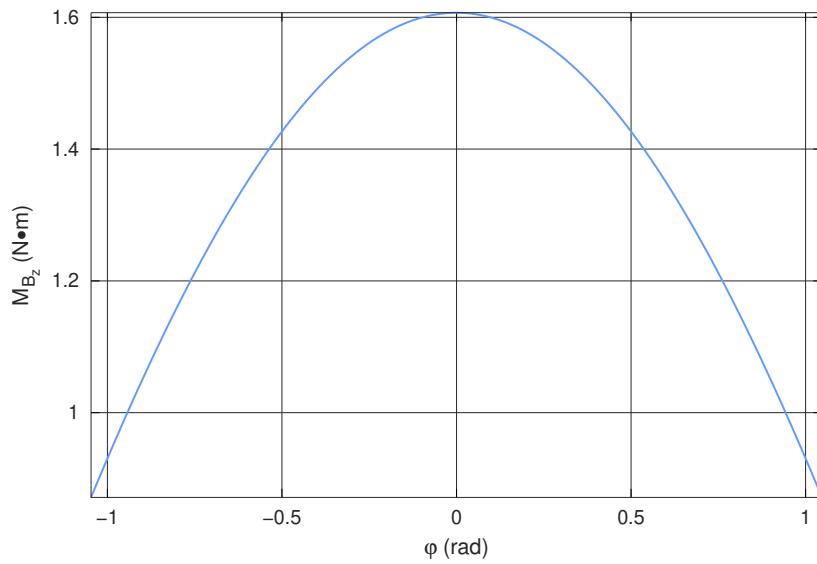


FIGURE B-2 – Couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ (cas dynamique avec $\ddot{\varphi} = 5 \text{ rad/s}^2$)