

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

Rapport d'APP

Éléments de statique et dynamique
GEN411

Présenté à
Olivier Fournier & Rémy Rahem

Présenté par
Benjamin Chausse – CHAB1704
Shawn Couture – COUS1912

Sherbrooke – 14 janvier 2026

Table des matières

1	Analyse cinématique	2
1.1	Analyse géométrique	2
1.2	Vitesses	2
1.2.1	Composante x	2
1.2.2	Composante y	3
1.3	Accélérations	3
1.3.1	Composante x	3
1.3.2	Composante y	3
2	Cas d'études en cinématique	4
2.1	Mouvement contraint horizontalement	4
2.2	Mouvement contraint verticalement	5
3	Analyse statique	7
4	Analyse dynamique	8
4.1	Moments $\vec{M}_{B,B}$	8
4.2	Force \vec{F}_B	9
A	Cinématique	11
A.1	Mouvement horizontal	11
A.2	Mouvement vertical	12
B	Simulations statiques et dynamiques	13

1 Analyse cinématique

1.1 Analyse géométrique

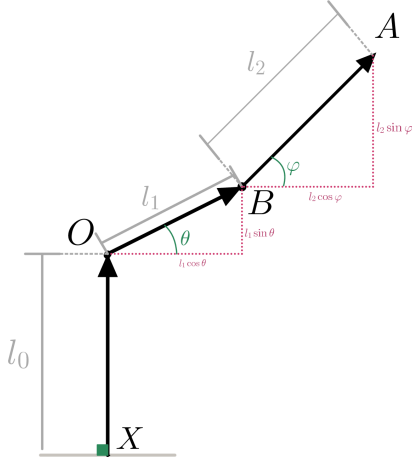


FIGURE 1-1 – Tiges du bras mécanique

$$\overrightarrow{XO} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} l_2 \cos \varphi \\ l_2 \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_0 + l_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\vec{A} = \vec{B} + \overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \\ l_0 + l_1 \sin \theta + l_2 \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Autrement dit :

$$B_x(\theta) = l_1 \cos \theta \quad (1.4)$$

$$B_y(\theta) = l_0 + l_1 \sin \theta \quad (1.5)$$

$$A_x(\theta, \varphi) = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \quad (1.6)$$

$$A_y(\theta, \varphi) = l_0 + l_1 \sin \theta + l_2 \sin \varphi \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

1.2 Vitesses

Lorsque des angles fixes sont considérés, il est possible de trouver les coordonnées x, y en fonction de ceux-ci. Toutefois, il se peut que ces angles varient dans le temps (essentiel à considérer pour déterminer la vitesse du point A). θ et φ sont donc dorénavant présentés comme des fonctions pour le reste de l'analyse cinématique générale du bras mécanique :

$$\theta \rightarrow \theta(t) \quad \varphi \rightarrow \varphi(t)$$

Déterminer la vitesse du point A ne devient par la suite qu'un exercice de dérivation dans le temps de la position, en utilisant les équations développées à la section 1.1 comme fondement. Afin d'en faciliter la résolution (et la lecture), cette opération est segmentée par composantes x et y dans les sections suivantes.

1.2.1 Composante x

$$A_x(t) = l_1 \cos \theta(t) + l_2 \cos \varphi(t) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \cos(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \cos(\varphi(t)) \quad (1.10)$$

$$V_{Ax}(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \cos(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \cos(\varphi(t)) \quad (1.11)$$

$$V_{Ax}(t) = l_1 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\theta(t)) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \quad (1.12)$$

$$V_{Ax}(t) = l_1 \left(-\sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \right) + l_2 \left(-\sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \right) \quad (1.13)$$

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \quad (1.14)$$

1.2.2 Composante y

$$A_y(t) = l_0 + l_1 \sin(\theta(t)) + l_2 \sin(\varphi(t)) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A_y(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_0 + \frac{\partial}{\partial t} l_1 \sin(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \sin(\varphi(t)) \quad (1.16)$$

$$V_{A_y}(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \sin(\theta(t)) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \sin(\varphi(t)) \quad (1.17)$$

$$V_{A_y}(t) = l_1 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\theta(t)) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\varphi(t)) \quad (1.18)$$

$$V_{A_y}(t) = l_1 \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + l_2 \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.19)$$

1.3 Accélérations

L'accélération se définit comme étant la dérivée de la vitesse. Comme la vitesse a déjà été définie de façon générale à la section 1.2, il ne suffit qu'à en effectuer la dérivée (encore une fois par composante pour simplifier la lecture) afin d'obtenir une solution générale de l'accélération selon n'importe quelles fonctions décrivant le mouvement angulaire des moteurs dans le temps.

1.3.1 Composante x

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{Ax}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-l_1 \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \right) \quad (1.21)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \frac{\partial}{\partial t} \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \quad (1.22)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 \left(\cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t)^2 + \sin(\theta(t)) \ddot{\theta}(t) \right) - l_2 \left(\cos(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)^2 + \sin(\varphi(t)) \ddot{\varphi}(t) \right) \quad (1.23)$$

1.3.2 Composante y

$$\alpha_{A_y}(t) = \frac{\partial}{\partial t} l_1 \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + \frac{\partial}{\partial t} l_2 \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.24)$$

$$\alpha_{A_y}(t) = l_1 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.25)$$

$$\alpha_{A_y}(t) = l_1 \left(-\sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \dot{\theta}(t) + \cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) \right) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.26)$$

$$\alpha_{A_y}(t) = l_1 \left(\cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 \right) + l_2 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (1.27)$$

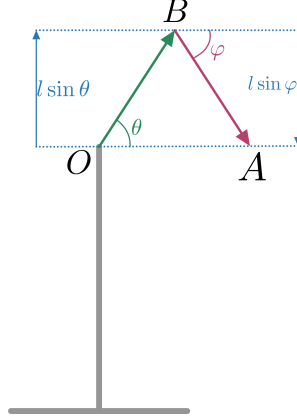
$$\alpha_{A_y}(t) = l_1 \left(\cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 \right) + l_2 \left(-\sin(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + \cos(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t) \right) \quad (1.28)$$

$$\alpha_{A_y}(t) = l_1 \left(\cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 \right) + l_2 \left(\cos(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t) - \sin(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 \right) \quad (1.29)$$

2 Cas d'études en cinématique

2.1 Mouvement contraint horizontalement

Il est possible de déterminer une relation entre θ et φ à l'aide de la figure A-2 :



$$0 = l \sin \theta + l \sin \varphi \quad (2.1)$$

$$0 = \sin \theta + \sin \varphi \quad (2.2)$$

$$\sin \varphi = -\sin \theta \quad (2.3)$$

$$\sin \varphi = \sin(-\theta) \quad (2.4)$$

$$\varphi = -\theta \quad (2.5)$$

FIGURE 2-1 – A contraint à un mouvement en x

Ainsi, puisque dans ce cas d'étude spécifique, $\varphi = -\theta$, les solutions trouvées en 1.1 peuvent être transformées comme suit :

$$A_x(\theta, \varphi) = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \Rightarrow A_x(\theta) = l_1 \cos \theta + l_2 \cos(-\theta) \quad (2.6)$$

Avec peu d'effort, ce même type de transformation peut être fait pour les équations de vitesse et d'accélération où θ dépend du temps. Puisque -1 est une constante, la dérivation est triviale :

$$\varphi(t) = -\theta(t) \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = -\dot{\theta}(t) \Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = -\ddot{\theta}(t) \quad (2.7)$$

Cela permet d'exprimer les équations de vitesse et d'accélération de A comme suit :

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) + l_2 \sin(-\theta(t))\dot{\theta}(t) \quad (2.8)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 \left(\cos(\theta(t))\dot{\theta}(t)^2 + \sin(\theta(t))\ddot{\theta}(t) \right) - l_2 \left(-\cos(-\theta(t))\dot{\theta}(t)^2 - \sin(-\theta(t))\ddot{\theta}(t) \right) \quad (2.9)$$

Dans le cadre de cette analyse, il est demandé de modéliser le bras entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ en posant que la vitesse angulaire de θ est constante et vaut ω . Puisque $\dot{\theta}(t)$ est en soi une vitesse angulaire, nous obtenons ceci :

$$\dot{\theta}(t) = \omega \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = \omega t \quad (2.10)$$

$$A_x(t) = l_1 \cos(\theta(t)) + l_2 \cos(-\theta(t)) \Rightarrow A_x(t) = l_1 \cos(\omega t) + l_2 \cos(-\omega t) \quad (2.11)$$

$$V_{Ax}(t) = -l_1 \sin(\omega t)\omega + l_2 \sin(-\omega t)\omega \quad (2.12)$$

$$\alpha_{Ax}(t) = -l_1 (\cos(\omega t)\omega^2 + \sin(\omega t) \cdot 0) - l_2 (\cos(-\omega t)\omega^2 + \sin(-\omega t) \cdot 0) \quad (2.13)$$

$$= -l_1 \cos(\omega t)\omega^2 - l_2 \cos(-\omega t)\omega^2 \quad (2.14)$$

Toutefois l'analyse de ce cas porte sur les valeurs de position/vitesse/accélérations selon θ et non pas selon t . Les deux étant interdépendants, les équations ci-dessus peuvent être exprimées selon θ puisque $\theta = \omega t$ implique que :

$$t = \frac{\theta}{\omega} \quad (2.15)$$

Ainsi :

$$A_x(\theta) = l_1 \cos(\omega \frac{\theta}{\omega}) + l_2 \cos(-\omega \frac{\theta}{\omega}) \quad (2.16)$$

$$= l \cos(\theta) + l \cos(-\theta) \quad (2.17)$$

$$= l [\cos(\theta) + \cos(-\theta)] \quad (2.18)$$

$$V_{Ax}(\theta) = -l_1 \sin(\omega \frac{\theta}{\omega})\omega + l_2 \sin(-\omega \frac{\theta}{\omega})\omega \quad (2.19)$$

$$= -l \sin(\theta)\omega + l \sin(-\theta)\omega \quad (2.20)$$

$$= -l \sin(\theta)\omega - l \sin(\theta)\omega \quad (2.21)$$

$$= -2l \sin(\theta)\omega \quad (2.22)$$

$$\alpha_{Ax}(\theta) = -l_1 \cos(\omega \frac{\theta}{\omega})\omega^2 + l_2 \cos(-\omega \frac{\theta}{\omega})\omega^2 \quad (2.23)$$

$$= -l \cos(\theta)\omega^2 - l \cos(-\theta)\omega^2 \quad (2.24)$$

$$= -l\omega^2 [\cos(\theta) + \cos(-\theta)] \quad (2.25)$$

$$= -l\omega^2 [\cos(\theta) + \cos(\theta)] \quad (2.26)$$

$$= -2l\omega^2 \cos(\theta) \quad (2.27)$$

Pour le cas à l'étude $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, une modélisation des équations (figure A-1) avec les valeurs spécifiées au tableau A-1 peut être trouvée en annexe. Aussi, les positions de départ et de fin du bras pour cette modélisation peuvent être consultées à la figure A-2.

2.2 Mouvement contraint verticalement

Dans ce cas de figure, la position en x du point A est définie comme étant toujours à une distance l de l'origine. D'ailleurs, l correspond aussi à la longueur de l_1 et l_2 . L'équation générale de A_x peut être utilisée pour contraindre φ en fonction de θ :

$$A_x = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \varphi \Rightarrow l = l \cos \theta + l \cos \varphi \quad (2.28)$$

$$1 = \cos \theta + \cos \varphi \quad (2.29)$$

$$1 - \cos \theta = \cos \varphi \quad (2.30)$$

$$\varphi = \arccos(1 - \cos \theta) \quad (2.31)$$

Pour éviter d'avoir à dériver φ dans le temps, il est possible d'utiliser l'équation 2.29 et les dérivées partielles :

$$1 = \cos \theta + \cos \varphi \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} 1 = \frac{\partial}{\partial t} (\cos \theta + \cos \varphi) \quad (2.33)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi \quad (2.34)$$

$$0 = -\sin(\theta)\dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi \quad (2.35)$$

$$0 = -\sin(\theta)\dot{\theta} - \sin(\varphi)\dot{\varphi} \quad (2.36)$$

$$\sin(\varphi)\dot{\varphi} = -\sin(\theta)\dot{\theta} \quad (2.37)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\sin(\theta)}{\sin(\varphi)}\dot{\theta} \quad (2.38)$$

Enfin, puisque le mouvement est contraint, par définition, à un mouvement uniquement sur l'axe des y , il est seulement nécessaire d'analyser la position et la vitesse selon cet axe. Encore une fois, les équations générales sont utilisées comme point de départ :

$$A_y(t) = l_0 + l \sin \theta(t) + l \sin \varphi(t) \quad (2.39)$$

$$= l_0 + l \sin \theta(t) + l \sin \arccos(1 - \cos(\theta(t))) \quad (2.40)$$

$$= l_0 + l \sin \theta(t) + l \sin \arccos(1 - \cos(\theta(t))) \quad (2.41)$$

$$= l_0 + l [\sin \theta(t) + \sin \arccos(1 - \cos(\theta(t)))] \quad (2.42)$$

$$V_{A_y}(t) = l_1 \cos(\theta(t))\dot{\theta}(t) + l_2 \cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \quad (2.43)$$

$$= l \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + l \cos(\varphi(t)) \left(-\frac{\sin(\theta(t))}{\sin(\varphi(t))} \dot{\theta}(t) \right) \quad (2.44)$$

$$= l \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) - l \cos(\arccos(1 - \cos(\theta(t)))) \left(\frac{\sin(\theta(t))}{\sin(\arccos(1 - \cos(\theta(t))))} \dot{\theta}(t) \right) \quad (2.45)$$

Puisque la vitesse angulaire de θ est constante et est la même que dans le cas d'étude horizontal, il est possible d'utiliser la relation de l'équation 2.10 pour éliminer tout $\dot{\theta}(t)$ et enfin tout considérer en fonction de θ au lieu du temps à l'aide de l'équation 2.15 :

$$A_y(t) = l_0 + l [\sin(\omega t) + \sin(\arccos(1 - \cos(\omega t)))] \quad (2.46)$$

$$A_y(\theta) = l_0 + l [\sin(\omega t) + \sin(\arccos(1 - \cos(\omega t)))] \quad (2.47)$$

$$= l_0 + l \left[\sin\left(\omega \frac{\theta}{\omega}\right) + \sin(\arccos(1 - \cos(\omega \frac{\theta}{\omega}))) \right] \quad (2.48)$$

$$= l_0 + l [\sin(\theta) + \sin(\arccos(1 - \cos(\theta)))] \quad (2.49)$$

$$V_{A_y}(t) = l \cos(\omega t)\omega - l \cos(\arccos(1 - \cos(\omega t))) \left(\frac{\sin(\omega t)}{\sin(\arccos(1 - \cos(\omega t)))} \omega \right) \quad (2.50)$$

$$V_{A_y}(\theta) = l \cos(\omega \frac{\theta}{\omega})\omega - l \cos(\arccos(1 - \cos(\omega \frac{\theta}{\omega}))) \left(\frac{\sin(\omega \frac{\theta}{\omega})}{\sin(\arccos(1 - \cos(\omega \frac{\theta}{\omega})))} \omega \right) \quad (2.51)$$

$$= l \cos(\theta)\omega - l \cos(\arccos(1 - \cos(\theta))) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\arccos(1 - \cos(\theta)))} \omega \right) \quad (2.52)$$

$$= l \cos(\theta)\omega - l \cos(\arccos(1 - \cos(\theta))) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\arccos(1 - \cos(\theta)))} \omega \right) \quad (2.53)$$

$$= l \left[\cos(\theta)\omega - \cos(\arccos(1 - \cos(\theta))) \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\arccos(1 - \cos(\theta)))} \omega \right) \right] \quad (2.54)$$

Pour le cas à l'étude $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, une modélisation des équations (figure A-3) avec les valeurs spécifiées au tableau A-1 peut être trouvée en annexe. Aussi, les positions de départ et de fin du bras pour cette modélisation peuvent être consultées à la figure A-4.

3 Analyse statique

Dans un premier temps, il est demandé d'observer la force et le moment en B alors que le bras est immobile (statique) selon l'angle auquel il se trouve. Un DCL n'analysant que le segment \overline{BA} est utilisé pour faire abstraction de ce qui se produit en ce qui concerne \overline{OB} et ses forces, considérant le tout comme des forces et moments externes nécessaires pour maintenir la tige observée immobile.

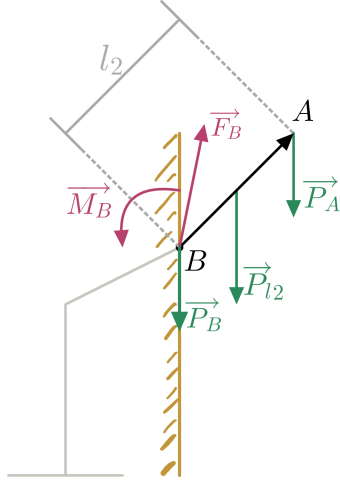


FIGURE 3-1 – DCL de la tige \overline{BA}

- $\vec{\alpha}_g$: Accélération gravitationnelle
- m_A : Masse de l'objet accroché au point A
- m_{BA} : Masse de la tige \overline{BA}
- \vec{P}_{l2} : Poids de la tige l_2
- \vec{P}_A : Poids de l'objet accroché au point A
- \vec{P}_B : Poids du moteur B
- \vec{F}_B : Force en B nécessaire pour que la somme des forces soit nulle
- \overrightarrow{BA} : Tige \overline{BA}
- $\overrightarrow{BA}/2$: Moitié de la tige \overline{BA}
- \vec{M}_{l2} : Moment au point B causé par \vec{P}_{l2}
- \vec{M}_A : Moment au point B causé par \vec{P}_A
- \vec{M}_B : Moment en B nécessaire pour que la somme des moments soit nulle

$$\vec{P}_{l2} = m_{BA} \cdot \vec{\alpha}_g = -9.81m_{BA} \vec{j} \quad (3.1)$$

$$\vec{P}_A = m_A \cdot \vec{\alpha}_g = -9.81m_A \vec{j} \quad (3.2)$$

$$\vec{P}_B = m_B \cdot \vec{\alpha}_g = -9.81m_B \vec{j} \quad (3.3)$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P}_{l2} + \vec{P}_A + \vec{F}_B + \vec{P}_B = \vec{0} \quad (3.4)$$

$$\vec{0} = -9.81m_{BA} \vec{j} + (-9.81m_A \vec{j}) + \vec{F}_B + (-9.81m_B \vec{j}) \quad (3.5)$$

$$\vec{F}_B = 9.81m_{BA} \vec{j} + 9.81m_A \vec{j} + 9.81m_B \vec{j} \quad (3.6)$$

$$\vec{F}_B = 9.81(m_{BA} + m_A + m_B) \vec{j} \quad (3.7)$$

Les moments sont calculés par rapport au point B . Le moment causé par le poids du moteur n'est pas considéré puisqu'il est nul (le bras de levier est nul).

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\overrightarrow{BA}/2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 \\ l_2 \sin(\varphi)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\vec{M}_A = \vec{BA} \times \vec{P}_A = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \times (-9.81m_A \vec{j}) \quad (3.10)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} l_2 \sin(\varphi) & 0 \\ -9.81m_A & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi) & l_2 \sin(\varphi) \\ 0 & -9.81m_A \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

$$= 0 \vec{i} - 0 \vec{j} + (-9.81m_A l_2 \cos(\varphi) - 0) \vec{k} = -9.81m_A l_2 \cos(\varphi) \vec{k} \quad (3.12)$$

$$\vec{M}_{l_2} = (\vec{BA}/2) \times \vec{P}_{l_2} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 \\ l_2 \sin(\varphi)/2 \\ 0 \end{bmatrix} \times (-9.81m_{BA} \vec{j}) \quad (3.13)$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} l_2 \sin(\varphi)/2 & 0 \\ -9.81m_{BA} & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} l_2 \cos(\varphi)/2 & l_2 \sin(\varphi)/2 \\ 0 & -9.81m_{BA} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

$$= 0 \vec{i} - 0 \vec{j} + \frac{-9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)}{2} \vec{k} = -\frac{9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)}{2} \vec{k} \quad (3.15)$$

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_{l_2} + \vec{M}_B = \vec{0} \quad (3.16)$$

$$\vec{0} = -9.81m_A l_2 \cos(\varphi) \vec{k} + \left(-\frac{9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)}{2} \vec{k} \right) + \vec{M}_B \quad (3.17)$$

$$\vec{M}_B = 9.81m_A l_2 \cos(\varphi) \vec{k} + \frac{9.81m_{BA} l_2 \cos(\varphi)}{2} \vec{k} \quad (3.18)$$

$$= 9.81 \cos(\varphi) l_2 (m_A + m_{BA}/2) \vec{k} \quad (3.19)$$

Pour le cas statique, l'analyse porte sur l'évolution du couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ lorsque φ varie entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. La modélisation présentée à la figure B-1 utilise les valeurs spécifiées au tableau B-1. Dans ce cas, seules les forces gravitationnelles sont considérées, l'accélération angulaire étant nulle ($\ddot{\varphi} = 0$).

4 Analyse dynamique

4.1 Moments $\vec{M}_{B,B}$

Dans cette section, le moment de force $\vec{M}_{B,B}$ est calculé à l'aide des moments trouvés lors de l'analyse statique. Or, la somme des moments en dynamique est donnée par l'équation suivante :

$$\sum \vec{M}_X = I_X \cdot \alpha \quad (4.1)$$

En réutilisant les moments de la section statique, l'équation devient :

$$I_X \cdot \alpha_{BA} = \vec{M}_{B,B} + \vec{M}_{A,B} + \vec{M}_{BA,B} \quad (4.2)$$

$$I_X \cdot \alpha_{BA} = \vec{M}_{B,B} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \cdot m_A \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \cdot m_{BA} \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

L'équation de la somme des moments d'inertie indique qu'une inertie totale doit être obtenue. Or, pour $\vec{M}_{A,B}$, il s'agit d'une masse à une distance L d'un axe de rotation ; pour $\vec{M}_{BA,B}$, il s'agit d'une tige uniforme ; et pour $\vec{M}_{B,B}$, l'inertie est nulle car le point coïncide avec le centre de rotation.

$$I_B = 0 \quad (4.4)$$

$$I_A = m \cdot l_2^2 \quad (4.5)$$

$$I_{BA} = \frac{m \cdot (l_2/2)^2}{3} \quad (4.6)$$

Voici la résolution de l'inertie totale :

$$I = 0 + m_A l_2^2 + \frac{m_{BA} \cdot l_2^2}{3} \quad (4.7)$$

$$I = m_A l_2^2 + \frac{m_{BA} \cdot l_2^2}{3} \quad (4.8)$$

$$I = l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{BA} \right) \quad (4.9)$$

Une fois remplacée dans l'équation, on peut isoler le moment recherché et calculer le tout en fonction de la composante z , puisque l'axe est colinéaire.

Voici la démarche :

$$l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{BA} \right) \cdot \alpha_{BA} = \vec{M}_{B,B} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \cdot m_A \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \cdot m_{BA} \cdot g \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$- \vec{M}_{B,B_z} = l_2 \cdot m_A \cdot g \cdot \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \cdot m_{BA} \cdot g \cdot \cos \varphi - l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{BA} \right) \cdot \alpha_{BA} \quad (4.11)$$

$$\vec{M}_{B,B_z} = -g \cdot l_2 \cdot \cos \varphi \left(m_A + \frac{1}{2} \cdot m_{BA} \right) + l_2^2 \cdot \left(m_A^2 + \frac{1}{3} m_{BA} \right) \cdot \alpha_{BA} \quad (4.12)$$

4.2 Force \vec{F}_B

En dynamique, la somme des forces externes est :

$$\sum \vec{F}_e = m \cdot \vec{\gamma}_G \quad (4.13)$$

Or, l'équation de la statique se transforme lorsqu'on veut trouver \vec{F}_B , car la somme n'est plus égale à 0 :

$$m \cdot \vec{\gamma}_G = \vec{F}_B + \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot (m_B + m_{BA} + m_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

L'équation avec \vec{F}_B isolé est :

$$\vec{F}_B = m \cdot \vec{\gamma}_G - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot (m_B + m_{BA} + m_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

De l'équation précédente, $\vec{\gamma}_G$ est l'accélération linéaire du centre de masse et m est la masse totale. $\vec{\gamma}_G$ est décomposé en une accélération tangentielle et une accélération normale :

$$\vec{\gamma}_G = \vec{\gamma}_G^t + \vec{\gamma}_G^n \quad (4.16)$$

Où :

- l'accélération tangentielle est $\alpha \times \vec{r}'$;
- l'accélération normale est $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.

\vec{r} est en réalité $\vec{r}_{B/G}$, défini comme suit :

$$\vec{r} = \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

L'accélération est une constante posée par la problématique. Afin de simplifier les équations, la vitesse initiale est considérée comme nulle : $\vec{\omega} = \vec{0}$. Ceci simplifie grandement l'équation finale. Une fois les valeurs remplacées, on obtient :

$$\vec{\gamma}_G = \vec{\gamma}_G^t + \vec{\gamma}_G^n \quad (4.19)$$

$$\vec{\gamma}_G = \alpha \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (4.20)$$

$$\vec{\gamma}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{BA} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{0} \times (\vec{0} \times \vec{r}) \quad (4.21)$$

$$\vec{\gamma}_{G_x} = 0 \cdot 0 + \alpha_{BA} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \quad (4.22)$$

$$\vec{\gamma}_{G_y} = \alpha_{BA} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi - 0 \cdot 0 \quad (4.23)$$

$$\vec{\gamma}_{G_z} = 0 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi + 0 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \quad (4.24)$$

$$\vec{\gamma}_G = \begin{bmatrix} \alpha_{BA} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ \alpha_{BA} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Cela se remplace facilement dans l'équation initiale. Afin de rendre l'expression plus lisible, on pose $m_t = m_B + m_{BA} + m_A$.

$$\vec{F}_B = m_{total} \cdot \vec{\gamma}_G - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot (m_B + m_{BA} + m_A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\vec{F}_B = m_t \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{BA} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ \alpha_{BA} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot m_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\vec{F}_B = \begin{bmatrix} \alpha_{BA} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ \alpha_{BA} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g \cdot m_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\vec{F}_B = \begin{bmatrix} \alpha_{BA} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi - 0 \\ \alpha_{BA} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi - g \cdot m_t \\ 0 - 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\vec{F}_B = \begin{bmatrix} \alpha_{BA} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \cos \varphi \\ (\alpha_{BA} \cdot m_t \frac{l_2}{2} \cdot \sin \varphi) - g \cdot m_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Pour le cas dynamique, l'analyse examine l'évolution du couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ avec une accélération angulaire constante $\alpha_{BA} = 5 \text{ rad/s}^2$. La modélisation présentée à la figure B-2 utilise également les valeurs spécifiées au tableau B-1. Contrairement au cas statique, ce scénario inclut les effets dynamiques dus à l'accélération du système, ce qui modifie significativement l'allure du couple résultant.

A Cinématique

TABLE A-1 – Valeurs des paramètres pour les cas d'études cinématiques

Variable	Valeur
l_0	50 cm
l_1	25 cm
l_2	25 cm
ω	25 rad/s ²

A.1 Mouvement horizontal

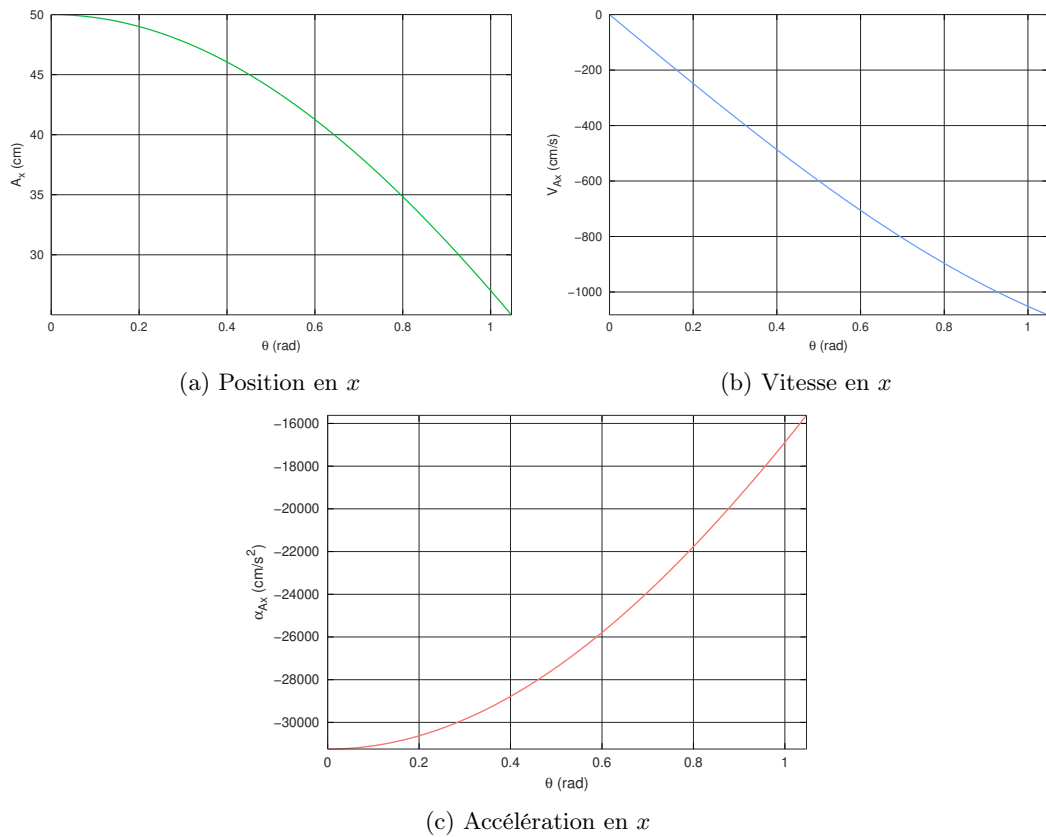


FIGURE A-1 – Attributs du point A lorsqu'il est contraint à un mouvement horizontal

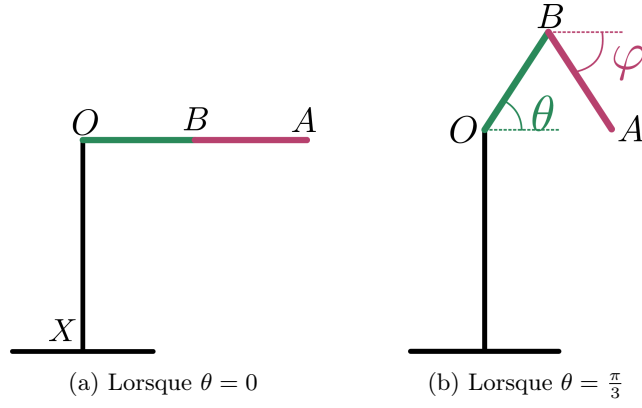


FIGURE A-2 – Positionnement du bras contraint à un mouvement en x selon θ

A.2 Mouvement vertical

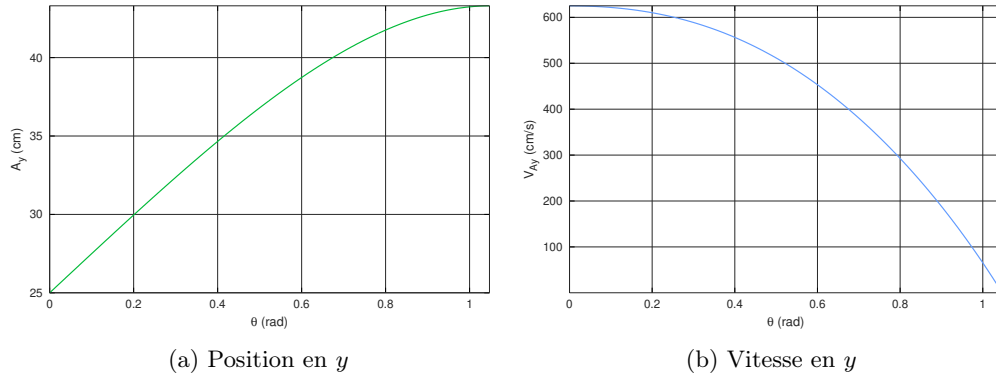


FIGURE A-3 – Attributs du point A lorsqu'il est contraint à un mouvement vertical

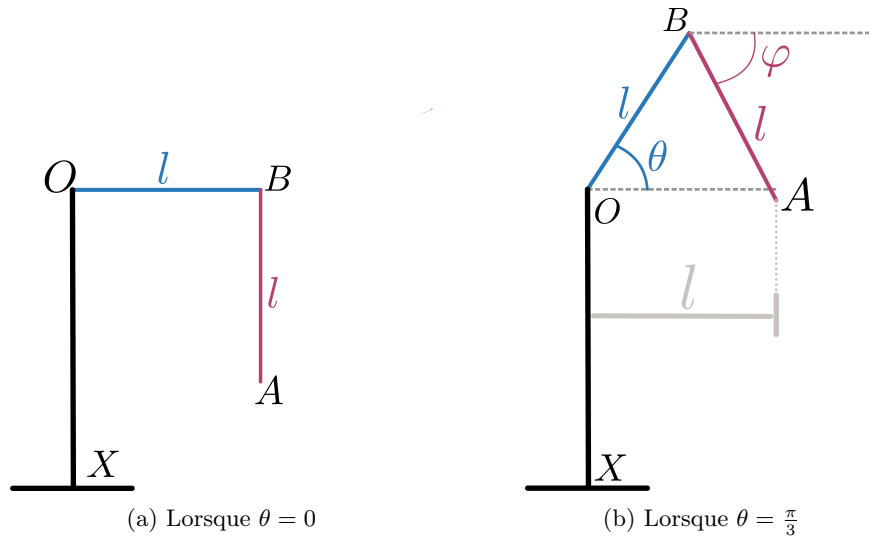


FIGURE A-4 – Positionnement du bras contraint à un mouvement en y selon θ

B Simulations statiques et dynamiques

TABLE B-1 – Valeurs des paramètres pour les cas d'études statiques et dynamiques

Variable	Valeur
l_0	50 cm
l_1	25 cm
l_2	25 cm
m_A	100 g
m_{BA}	1 kg
α_{BA}	5 rad/s ²

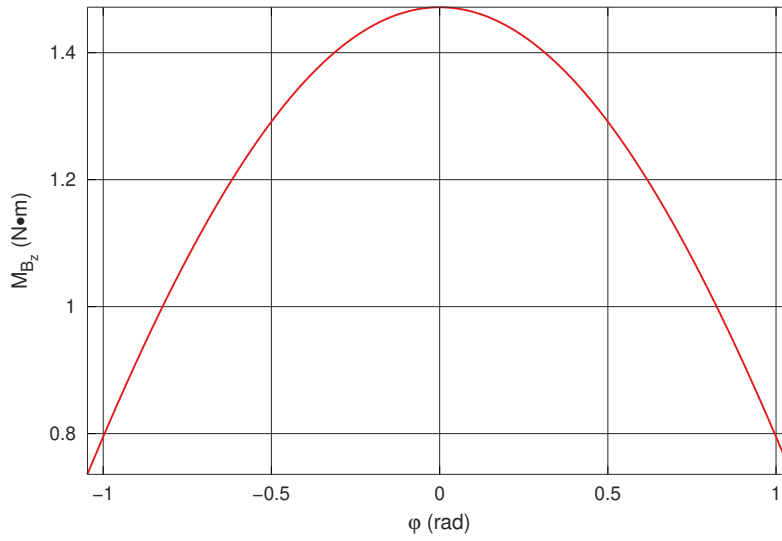


FIGURE B-1 – Couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ (cas statique)

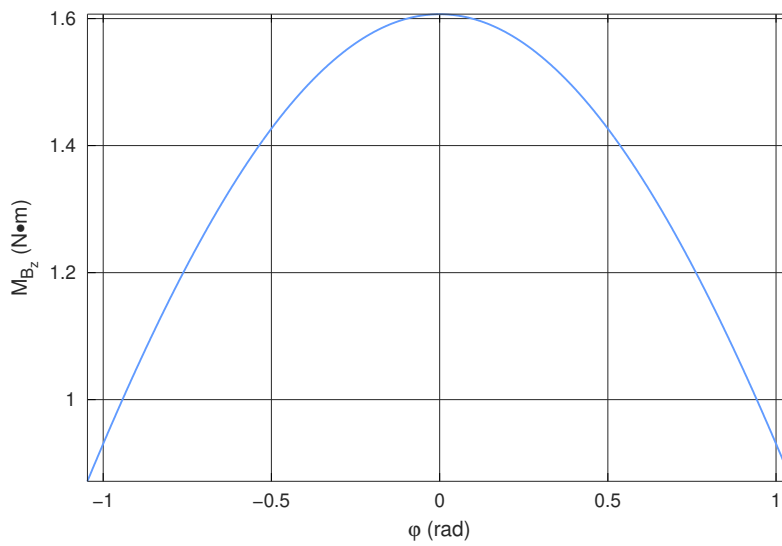


FIGURE B-2 – Couple résultant M_{B_z} en fonction de l'angle φ (cas dynamique avec $\ddot{\varphi} = 5 \text{ rad/s}^2$)