# 第四篇 图论

*Graph Theory*

# 什么是图论

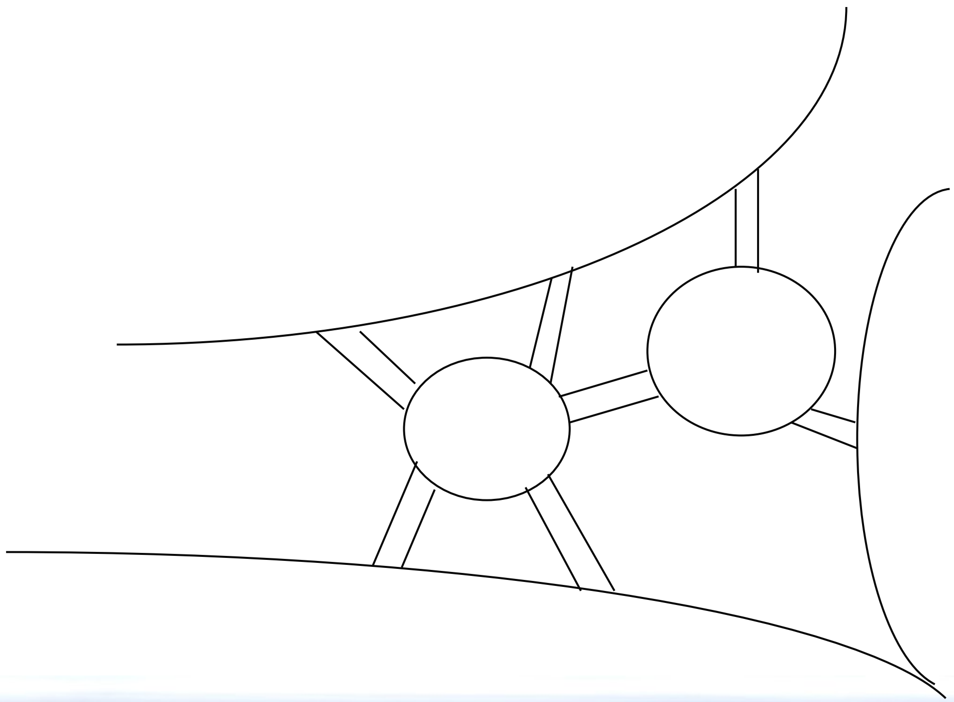
- 图论（Graph Theory）是数学的一个分支。它以图为研究对象。
- 图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系；用点表示事物，用连接两点的线表示相应两个事物间的关系。
- 从一般意义而言，它描述了客观世界中的拓扑结构。

# 什么是图论

- 人们常称1736年是图论历史元年，因为在这一年瑞士数学家欧拉（Euler）发表了图论的首篇论文——《哥尼斯堡七桥问题无解》，所以人们普遍认为欧拉是图论的创始人。
- 1936年，匈牙利数学家寇尼格（Konig）出版了图论的第一部专著《有限图与无限图理论》，这是图论发展史上的重要的里程碑，它标志着图论将进入突飞猛进发展的新阶段。

# 哥尼斯堡七桥问题

18 世纪在哥尼斯堡城 ( 今俄罗斯加里宁格勒 ) 的普莱格尔河上有 7 座桥，将河中的两个岛和河岸连结，如图所示。城中的居民经常沿河过桥散步，于是提出了一个问题：能否一次走遍 7 座桥，而每座桥只许通过一次，最后仍回到起始地点。这就是著名的哥尼斯堡七桥问题。



# 图论的应用

- 图论的应用

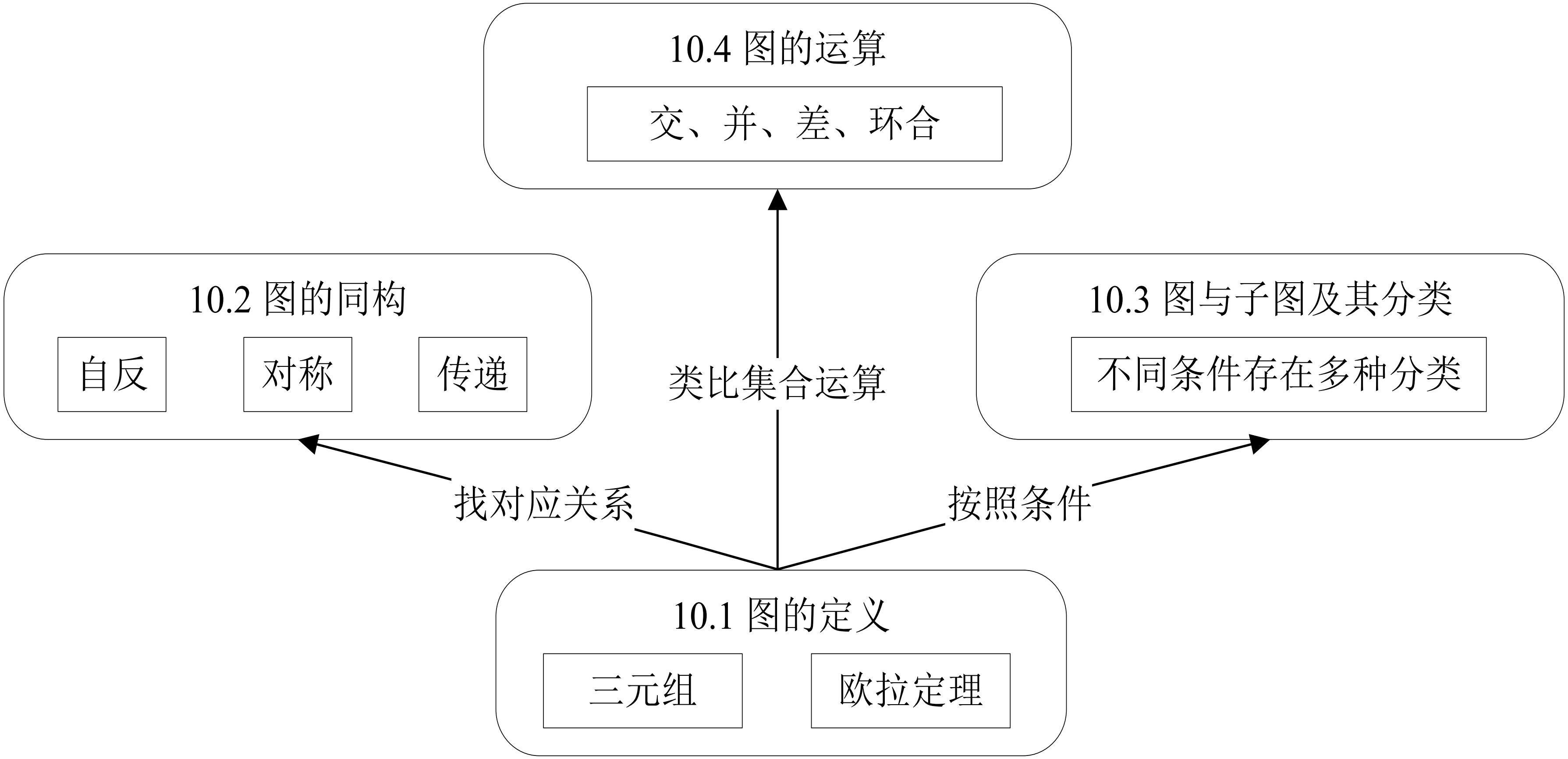
计算机科学、物理学、化学、运筹学、信息论、控制论、网络通讯、社会科学以及经济管理、军事、国防、工农业生产等方面都得到广泛的应用。

# 图论的知识体系

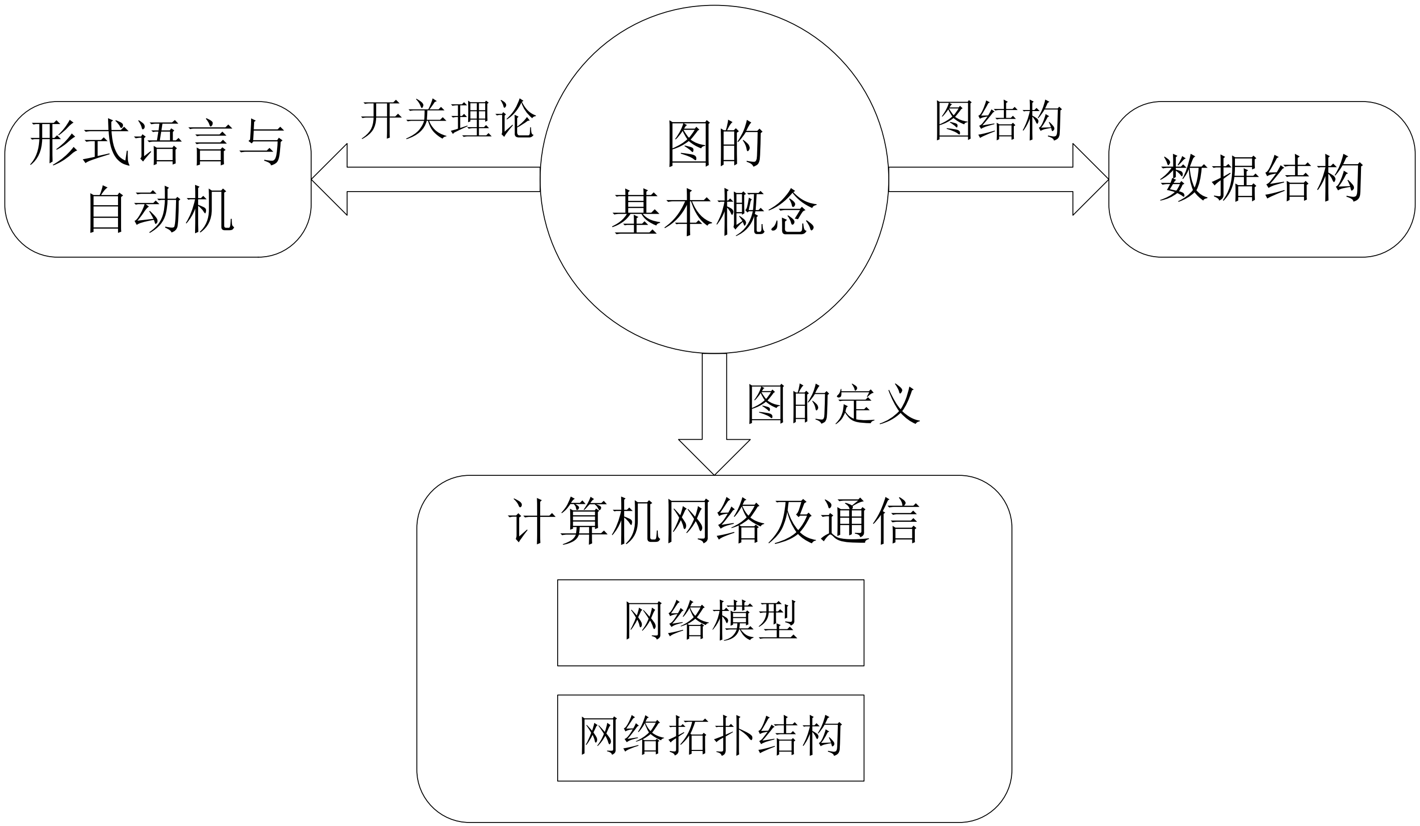
- 图
  - 第10章 图的基本概念
    - 图的定义
    - 图的同构
    - 图与子图及其分类
    - 图的运算
  - 第11章 图的连通性
    - 通路与回路
    - 无向图的连通性
    - 有向图的连通性
  - 第12章 图的矩阵表示
    - 邻接矩阵、可达矩阵、关联矩阵
  - 第13章 特殊图
    - 欧拉图、哈密顿图、二分图、平面图：定义、判定、简单应用
    - 树
      - 术语、性质
      - 生成树 ⇒ 最小生成树
      - 根树 ⇒ 二叉树

# 第十章 图的基本概念

# 本章各节间的关系概图


10.4 图的运算
交、并、差、环合
10.2 图的同构
自反
对称
传递
类比集合运算
10.3 图与子图及其分类
不同条件存在多种分类
找对应关系
按照条件
10.1 图的定义
三元组
欧拉定理

# 图的基本概念在计算机科学技术相关领域的应用



# 10.1 图的定义

**预备知识:**

- 有序积: $A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$

  有序对: $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$

- 无序积: $A \& B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$

  无序对: $(x, y) = (y, x)$

- 多重集: $\{a, a, a, b, b, c\} \neq \{a, b, c\}$

  重复度: $a$的重复度为3, $b$的为2, $c$的为1

# 10.1 图的定义

定义10.1无向图$G = <V, E>$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为顶点

(2) $E$为$V\&V$ 的多重集，其元素称为无向边，简称边

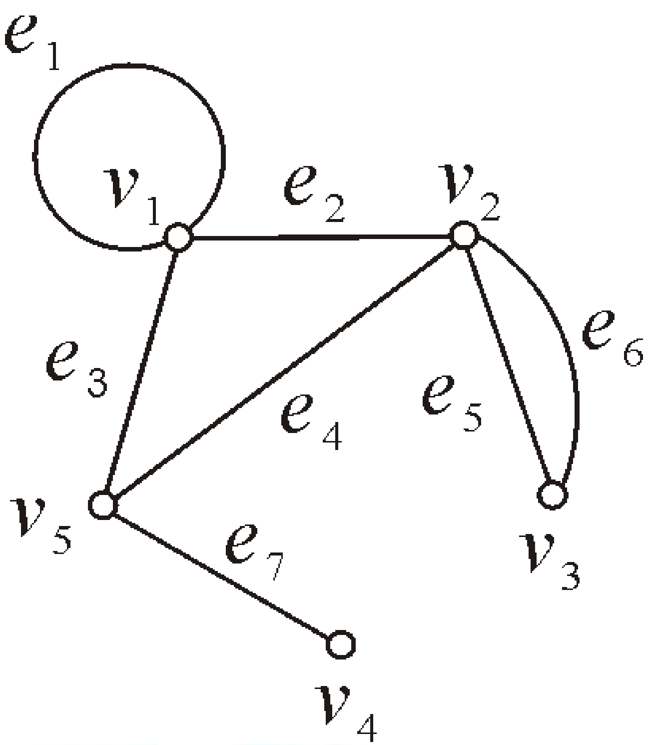
实例

设$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3),$

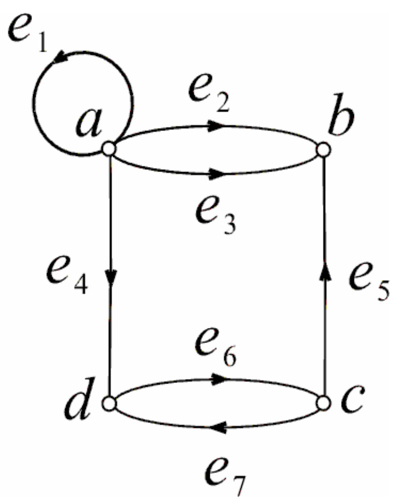
$(v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G = <V, E>$为一无向图



# 10.1 图的定义

- 定义10.2有向图D= <*V*, *E*>, 其中
  - (1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为顶点
  - (2) *E*为$V \times V$的多重集，其元素称为有向边
- 下图表示的是一个有向图
  - 试写出它的*V*和*E*




- 注意：
  - ① 可用*G*泛指图（无向的或有向的）
  - ② G的顶点集*V*(*G*)和边集 *E*(*G*), *V*(*D*), *E*(*D*)

# 10.1 图的定义

几个概念：

无向图：每一条边都是无向边的图；

有向图：每一条边都是有向边的图；

混合图：既有无向边又有有向边的图；

*n*阶图：顶点数称为图的阶，*n*个顶点的图；

邻接结点：在一个图中，若两个结点由一条边关联，则这两个结点为邻接结点；

邻接边：关联于同一结点上的两条相互邻接的边；

自回路或环：仅关联一个结点的边；

孤立结点：在一个图中不与任何结点邻接的结点；

零图：由孤立结点构成的图（*一条边也没有的图*）；

平凡图：仅由一个孤立结点构成的图（*1阶零图*）。

# 10.1 图的定义

平行边：连接于同一对结点间的多条边；

伪图：含有环的图；

多重图：含有平行边的图；

简单图：不含平行边和环的图；

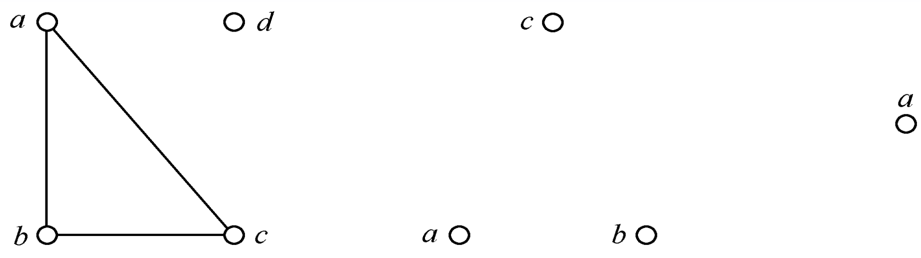
基图：将有向图的各条有向边改成无向边后所得到的无向图称为这个有向图的基图；

标定图：如果给每一个顶点和每一条边指定一个符号则为标定图；否则称为非标定图；

空图：顶点集为空集的图——$\varnothing$；

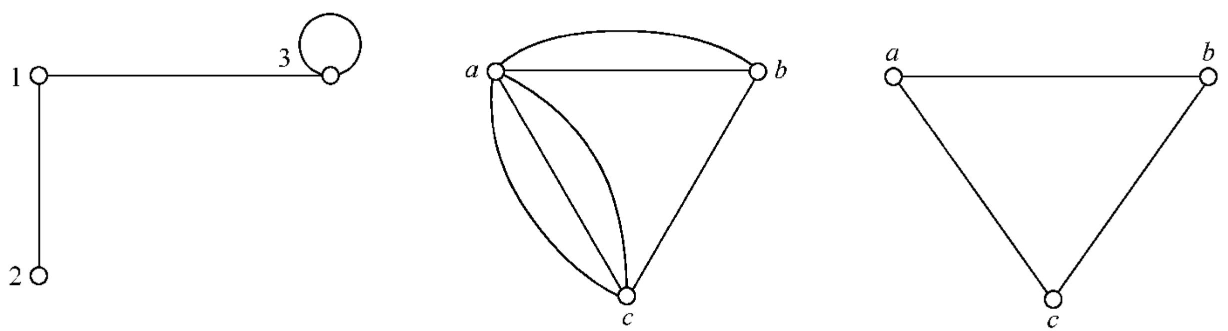
# 10.1 图的定义

## 例图：




（a） （b） （c）

孤立结点、零图和平凡图

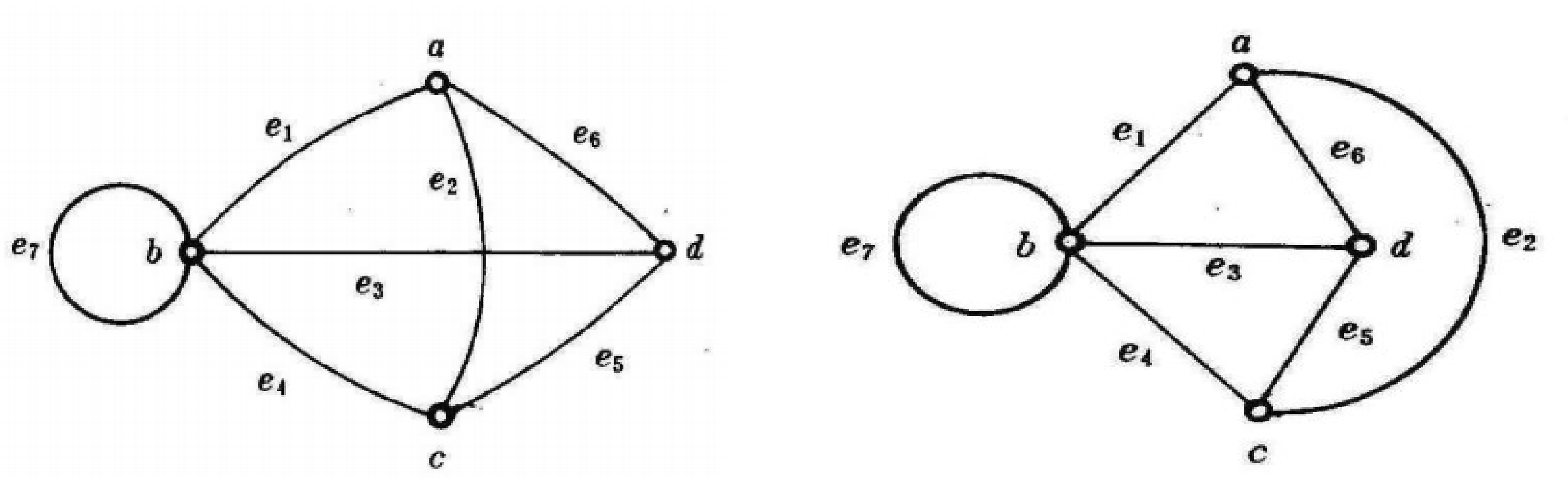



（a） （b） （c）

环、平行边、伪图、多重图和简单图

# 10.1 图的定义

**例10.1：** 设无向图$G=\langle V(G), E(G)\rangle$，其中$V(G)=\{a, b, c, d\}$, $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$, $e_1=(a, b)$, $e_2=(a, c)$, $e_3=(b, d)$, $e_4=(b, c)$, $e_5=(d, c)$, $e_6=(a, d)$, $e_7=(b, b)$，则图G可用图10.6($a$)或($b$)表示。




*a* *b*

图10.6 例10.1图

# 10.1 图的定义

**定义10.3** 在图G=<V，E>中，与某一结点$v$（$v$∈V），关联的边数称为该结点的**度数**，记作deg($v$)。

**入度**：G是有向图，射入结点$v$（$v$∈V）的边数为其入度，记作 $\deg_D^-(v)$ 。

**出度**：G是有向图，射出结点的边数为其出度，记作 $\deg_D^+(v)$ 。

**最大度**：$\Delta(G)=\max\{\deg v \mid v\in V(G)\}$

**最小度**：$\delta(G)=\min\{\deg v \mid v\in V(G)\}$

# 10.1 图的定义

**定理10. 1：** **（握手定理、欧拉定理）** 每个图中，结点的度数和等于边数的两倍。

对于无向图，有 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$，

对于有向图，有 $\sum_{v \in V} (\deg^-(v) + \deg^+(v)) = 2|E|$。

**证：**

因为图中每条边关联两个结点，而一条边为每个关联结点贡献的度数为1，因此，一个图中结点度数的总和等于边数的两倍。

# 10.1 图的定义

定理10.2　在任何图中，度数为奇数的结点个数必是偶数。

证：

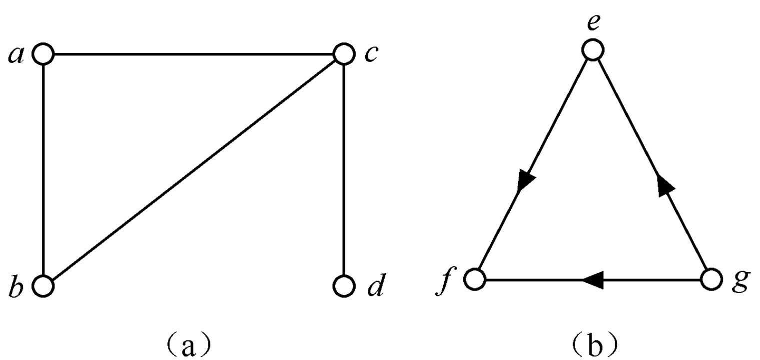
设$V_1$为图G中度数为奇数的结点集，$V_2$为图G中度数为偶数的结点集，则根据定理10.1，有：

$$\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)=2|E|$$

由于 $\sum_{v\in V_2}\deg(v)$ 为偶数之和，2|E|又为偶数，所以：

$$\sum_{v\in V_1}\deg(v)=2|E|-\sum_{v\in V_2}\deg(v)$$

必为偶数。




定理10.2的示例

# 10.1 图的定义

例10.2　中秋晚会上大家握手言欢，试证明握过奇数次手的人数是偶数。

证:

构造一个无向图G，G中的每一个结点表示一个参加中秋晚会的人，若两个人握手一次，则在两人对应的结点间连接一条边。于是每个人握手的次数等于对应结点的度数。由定理10.2知，度数为奇数的结点个数是偶数，所以握过奇数次手的人数为偶数。证毕。

# 10.1 图的定义

**定理10.3** 在任意有向图中，所有结点入度之和等于所有结点出度之和。

证:

因为每一条有向边必对应一个入度和一个出度，若一个结点具有一个入度或出度，则必关联一条有向边，所以，有向图中各结点入度之和等于边数，各结点出度之和也等于边数。因此任何有向图中，入度之和等于出度之和。

# 10.1 图的定义

**度数序列：** 设V = $\{v_1, v_2, v_3 \cdots, v_n\}$为图的顶点集，称（ $deg(v_1)$ ， $deg(v_2)$ ， … ， $deg(v_n)$）为G的度数序列。

**可图化：** 对于顶点标定的无向图，它的度数列是唯一的，反之，对于给定的非负整数列$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，若存在以V= $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为顶点集的$n$阶无向图G，使得$deg(v_i)=d_i$，$i=1, \cdots, n$则称$d$是可图化的。

**可简单图化：** 若所得到的图是简单图，则称$d$是可简单图化的。

# 10.1 图的定义

**定理10. 4：** 非负整数列$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$是可图化的当且仅当$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数。

证:

(⇒) 握手定理

(⇐) 奇数度点两两之间连一边, 剩余度用环来实现.

# 10.1 图的定义

可简单图化**必要**条件

❖ **定理: 设G为任意$n$阶无向简单图，则 $0 \le \Delta(G) \le n-1$。**

**反证法即可证明**

# 10.1 图的定义

## *Havel*定理(可简单图化充要条件)

- 定理(V. *Havel*, 1955):设非负整数列$d=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$满足:

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=0(mod\ 2)$$

若 $n-1\geq d_1\geq d_2\geq\ldots\geq d_n\geq 0$, 则d可简单图化当且仅当

$$d'=(d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d1+1}-1, d_{d1+2}, \ldots, d_n)$$

可简单图化.

- 例: $d=(4,4,3,3,2,2)$, $d'=(3,2,2,1,2)$

# 10.1 图的定义

## *Havel*定理的直观说明

- 我们把$d$排序以后，找出度最大的点(设度为$d_1$)，把它和度次大的$d_1$个点之间连边，然后这个点就可以不管了，一直继续这个过程，直到建出完整的图，或出现负度等明显不合理的情况。

- 例: $d=(4,4,3,3,2,2)$, $d'=(3,2,2,1,2)$

# 10.1 图的定义

- **例:** 判断下列非负整数列是否可简单图化. (1) (5,5,4,4,2,2) (2)(4,4,3,3,2,2)

- **解:** (1) (5,5,4,4,2,2), (4,3,3,1,1),

(2,2,0,0), (1,-1,0), 不可简单图化.

(2) (4,4,3,3,2,2), (3,2,2,1,2), (3,2,2,2,1),

(1,1,1,1), (0,1,1), (1,1), 可简单图化.

顶点度数排序！！！

# 10.1 图的定义

例10.3　判断下列各非负整数列哪些是可图化的？哪些是可简单图化的？

（1）（5, 5, 4, 4, 2, 1）　（2）（5, 4, 3, 2, 2）

（3）$(d_1, d_2, \ldots, d_n)$，$d_1 > d_2 > \ldots > d_n >= 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数

（4）（3, 3, 3, 1）

解:

由定理10.4，除（1）不可图化外，其余各序列都可图化。

都是不可简单图化的。

（2）中序列有5个数，最大的数是5。它不可简单图化。

类似可证（3）不可简单图化。

（4）（3, 3, 3, 1），(2, 2, 0), (1, −1), 所以不可简单图化。

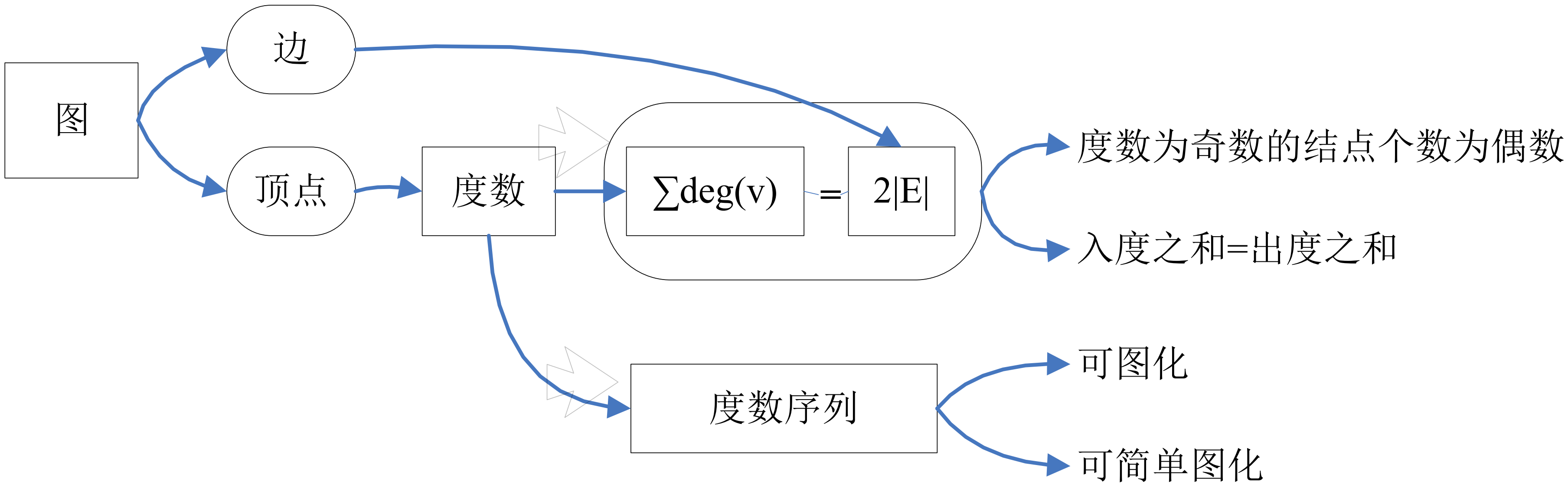
# 10.1 图的定义

## 小结：

（1）理解与图的定义有关的诸多概念，以及它们之间的相互关系；

（2）理解握手定理及其推论的内容，并能熟练地应用它们。

关于图的定义思维形式注记图如下所示。

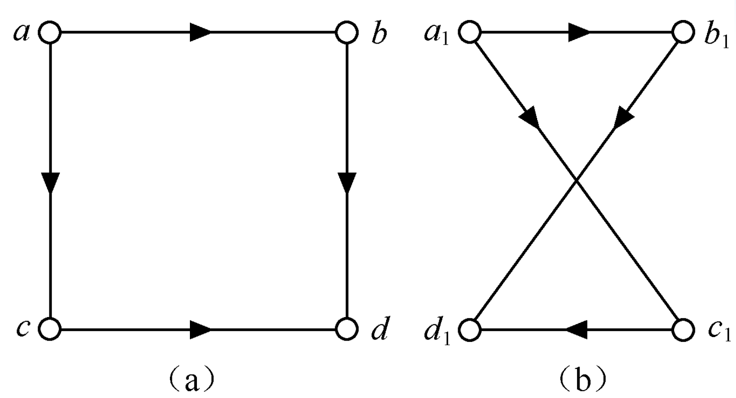


# 10.2 图的同构

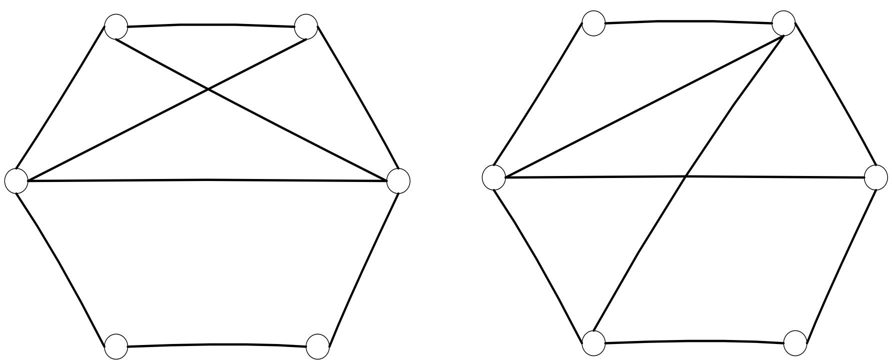
**定义10.4**：设图G=⟨V, E⟩及G′=⟨V′, E′⟩。若存在一一映射 $g: v_i \to v_i'$，$\forall v_i, v_j \in V, (v_i, v_i) \in E$ 且e=($v_i$, $v_i$)（或⟨$v_i$, $v_i$⟩）是G的一条边，当且仅当 $e' = (g(v_i), g(v_j))$（或 $< g(v_i), g(v_j) >$）是G′的一条边，则称G与G′同构，记作 $G \cong G'$。

# 10.2 图的同构

## 图的同构举例：




同构的图



不同构的图

# 10.2 图的同构

## 判断两图是否同构

- 充分必要条件

至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件。

- 必要条件

阶数相同、边数相同、度数序列相同等。

- 处理方法

（1）从定义入手；

（2）构造双射函数（顶点和边一一对应）。

# 10.2 图的同构

## 小结：

理解图同构的定义，不符合阶数相同、边数相同、度数序列相同的图一定不同构。关于图的同构的思维形式注记图如下所示。

- 图同构
  - 定义
  - 性质：自反、对称、传递
  - 必要条件：
    - 阶数相等
    - 边数相等
    - 度数列相等

# 10.3 图与子图及其分类

**定义10.5：** 设G为$n$阶无向简单图，若G中每一对结点间都有边相连，则称G为$n$阶无向完全图，简称**$n$阶完全图**，记作 $K_n$（$n$>=1）。设D为$n$阶有向简单图，若D中每个顶点都邻接到其余的$n$-1个顶点，则称D是**$n$阶有向完全图**。设D为$n$阶有向简单图，若D的基图为$n$阶无向完全图，则称D是**$n$阶竞赛图**。

# 10.3 图与子图及其分类

$K_1 \sim K_5$：

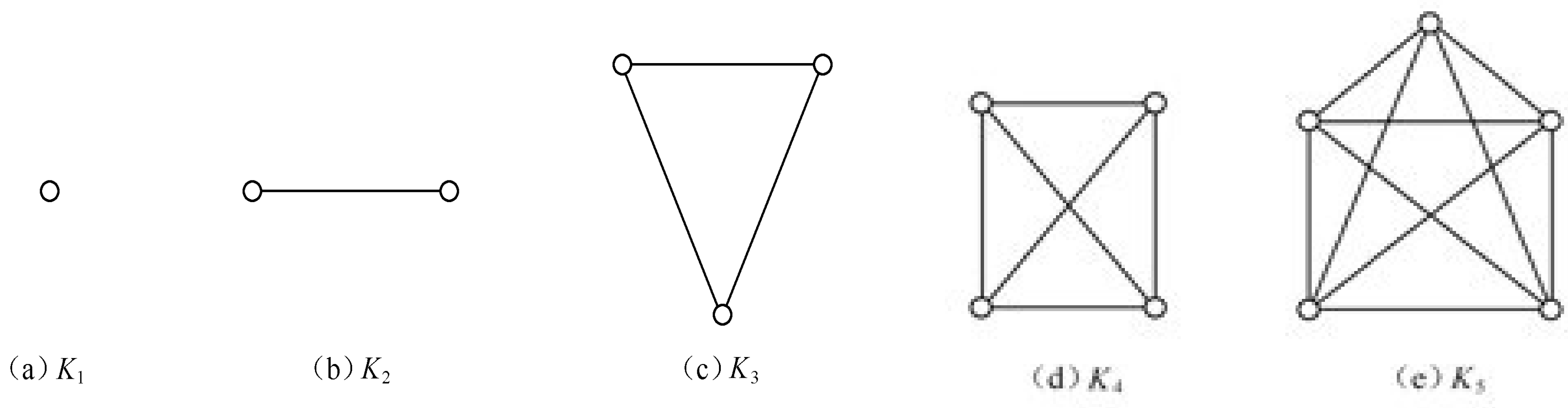



图10.13 完全图举例

# 10.3 图与子图及其分类

**定理10.5：** $K_n$ 的边数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$。

**证：** 在 $K_n$ 中，任意两个结点都有边相连，由于n个结点中任取两个结点的组合数为 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$，故 $K_n$ 的边数为 $|E|=\frac{1}{2}n(n-1)$ 。

证毕。

*图10.13中，的结点数n分别为1，2，3，4，5，其边数* $|E|=\frac{1}{2}n(n-1)$ *分别为0，1，3，6，10。*

# 10.3 图与子图及其分类

**定义10.6：** 如果简单图G的所有结点具有相同的度数，则称图G为**正则图**。图中所有结点的度数为r的正则图记作$r$-正则图。

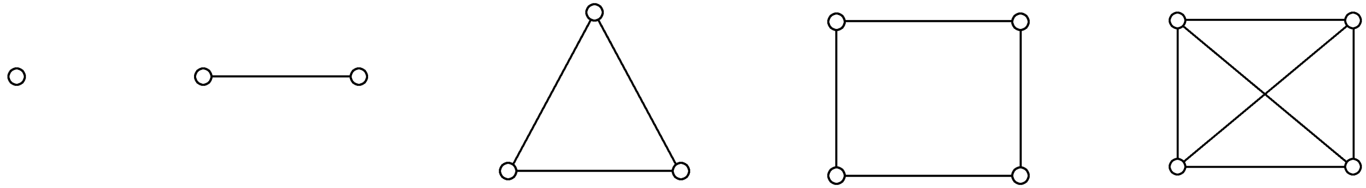


图10.14　0-正则、1-正则、2-正则、3-正则

# 10.3 图与子图及其分类

**补图：**给定一个图G，由G中所有的结点，以及能使G成为完全图的所有添加边所组成的图，称为G相对于完全图的**补图**，简称为G的补图，记为 $\overline{G}$ 。

**自补图：**若图 $G \cong \overline{G}$ ，则称G是**自补图**。

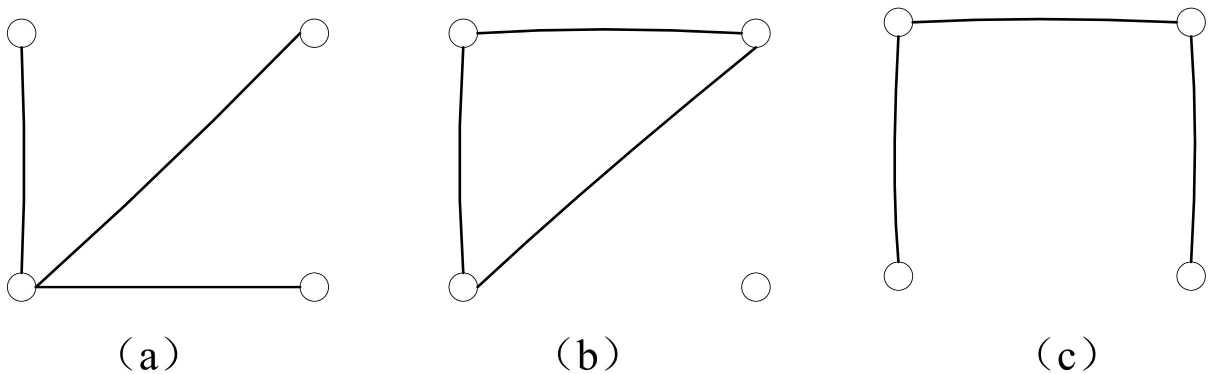



图10.15 补图与自补图

# 10.3 图与子图及其分类

**定义10.7：** 设图G=<V, E>，如果有图 $G'=(V',E')$，且 $E'\subseteq E, V'\subseteq V$，则称G′为图G的**子图**。G为G′的母图，记作 $G'\subseteq G$。又若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称G′为G的**真子图**。若 $V'=V$，则称G′为G的**生成子图**。

# 10.3 图与子图及其分类

**例10. 4：** 求图10. 16生成子图。

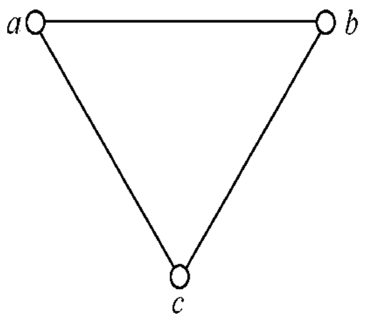
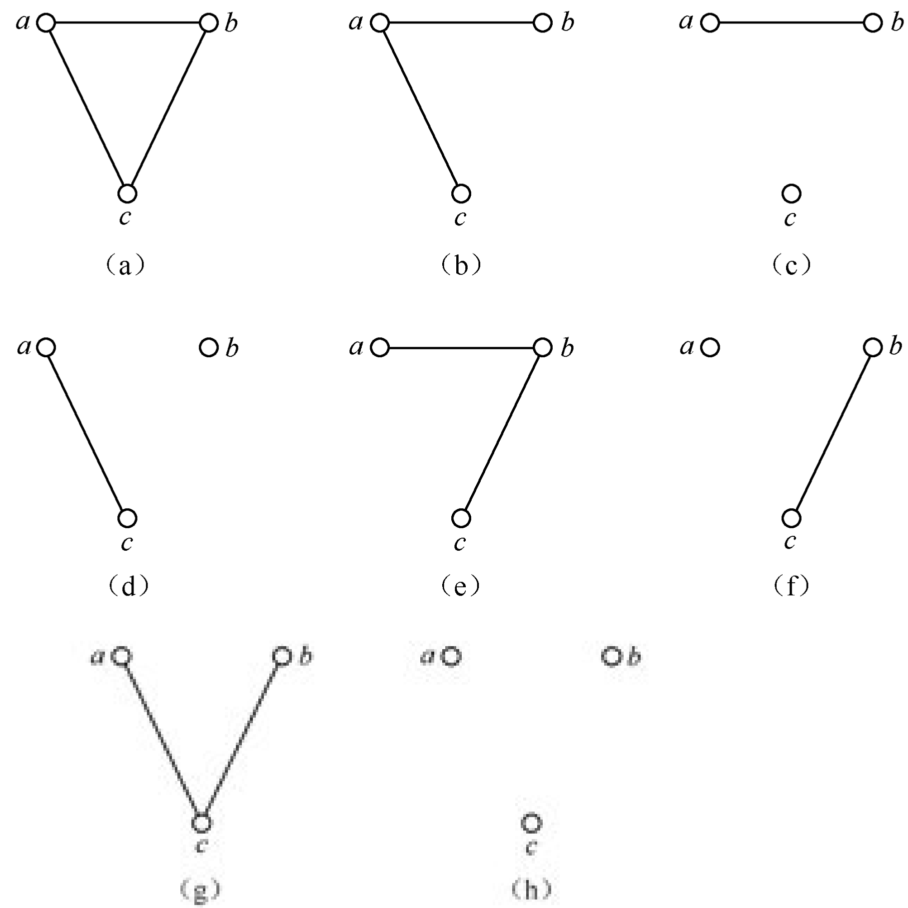


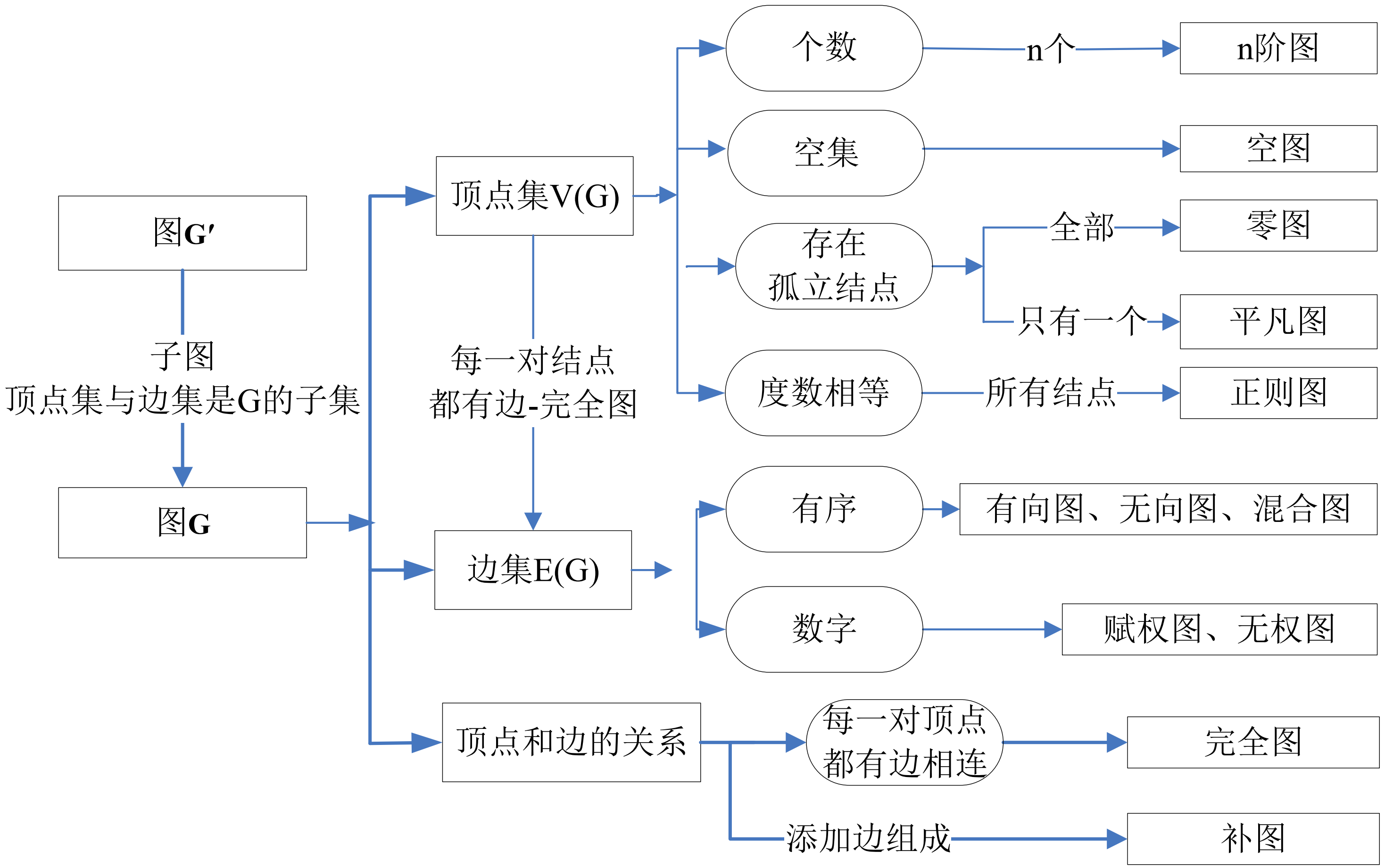

图10.16 求生成子图

**解：** 图10. 16的生成子图如下：



# 10.3 图与子图及其分类

**小结：**按照不同的标准，可以将图划分很多种类。关于图的分类的思维形式注记图如图下所示。



# 10.4 图的运算

**定义10.8：** 设图 $G_1=<V_1,E_1>,G_2=<V_2,E_2>$ ，若 $V_1\cap V_2=\Phi$，则称$G_1$与$G_2$是**不交的**。若 $E_1\cap E_2=\Phi$ ，则称$G_1$与$G_2$是**边不交**的或边不重的。

# 10.4 图的运算

**定义10.9：** 设 $G_1=<V_1,E_1>, G_2=<V_2, E_2>$ 为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）。

1）称以 $V_1\cup V_2$ 为顶点集，以 $E_1\cup E_2$ 为边集的图G1为G2与的**并图**，记作 $G_1\cup G_2$ 即 $G_1\cup G_2=<V_1\cup V_2,E_1\cup E_2>$。

2）称以 $E_1-E_2$ 为边集，以 $E_1-E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G1与G2的**差图**，记作 $G_1-G_2$ 。

3）称以 $E_1\cap E_2$ 为边集，以 $E_1\cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G1与G2的**交图**，记作 $G_1\cap G_2$。

4）称以 $E_1\oplus E_2$ 为边集，以 $E_1\oplus E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G1与G2的**环和**，记作 $G_1\oplus G_2$ 。

# 10.4 图的运算

## 图运算的三种基本操作：

1）**删除图中的边**。设$e\in E$，从G中删除$e$所得的图记为G-$e$。又设 $E'\subseteq E$从G中删除E'中所有的边所得的图记为G-E'。

2）**删除图中的结点**。设$v\in V$，从G中删除v及与v相关联的边所得的图记为G-$v$。又设$V'\subseteq V$，从G中删除V'中所有结点及与这些结点关联的所有边所得的图记为G-V'。

3）**向图中添加边**。设$u$，$v\in V$，将边[$u$，$v$]添加到图G中所得的新图中记为 $G\cup[u, v]$。

## 小结：

关于图的运算有两大类型，一种是对于普通集合运算的延伸；一种是对于图的操作。关于图的运算的思维形式注记图如下所示。

# 10.5 常见题型解析

1）利用图的定义解决实际问题。

2）根据握手定理求图的结点数、边数等，考察对图的基本概念的理解。

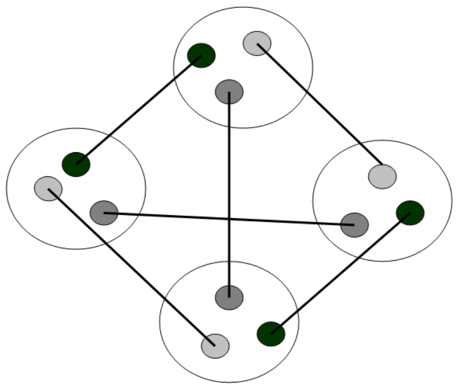
3）判断证明图同构。

4）补图与自补图。

## 1）利用图的定义解决实际问题

例10.5 现有$n$个盒子，若每对盒子里都恰有一对相同颜色的球，且每种颜色的球恰好有2个，放在不同的盒子中，问这$n$个盒子共有多少种不同颜色的球？

解：如图所示，用$n$个结点表示n个盒子，若有两个不同的盒子放有相同颜色的球，则在这两个盒子对应的结点间连一条无向边，从而将问题转化为求这个无向图的边数的问题。根据题意，将得到一个无向完全图$K_n$，$K_n$共有$n(n-1)/2$条边，所以这$n$个盒子共有$n(n-1)/2$种不同颜色的球。



## 2）根据握手定理求图的结点数、边数等，考察对图的基本概念的理解

**例10.6** 设无向图G有16条边，有3个4度结点，4个3度结点，其余结点的度数均小于3，问：G中至少有几个结点？

解：当其余结点都为2度时，结点数最少。根据定理10.1列方程：$3\times4+4\times3+2\times x=2\times16$。解方程得：$x=4$。无向图G中的结点数为：$4+3+4=11$。所以，G中至少有11个结点。

**例10.7** 设图G有n个结点，$n+1$条边，证明：G中至少有1个结点度数大于等于3。

证:

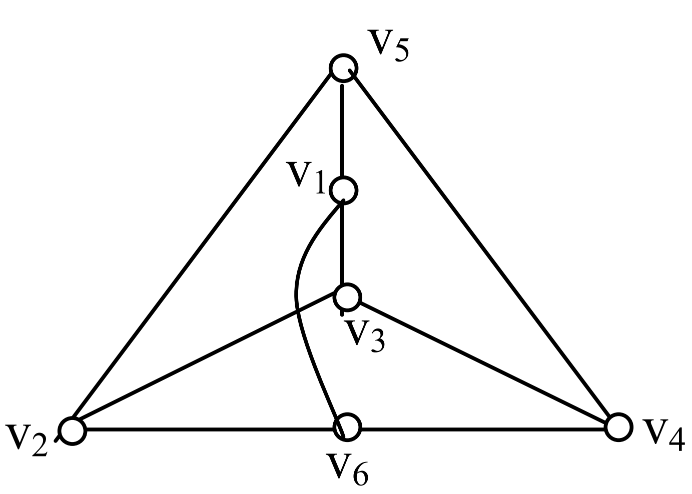
反证法。设G=<V,E>，$\forall v \in V$，$\deg(v)\leq 2$。所有结点的度数之和$2(n+1)$小于等于$2n$。即$2(n+1)\leq 2n$，化简后，$2\leq 0$，矛盾。

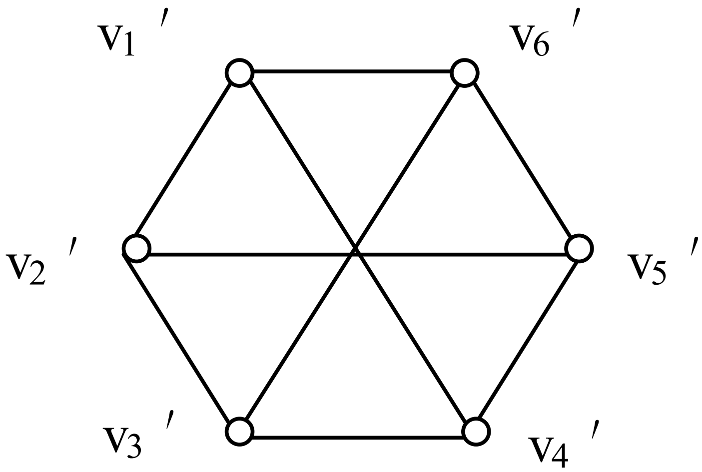
所以，G中至少有1个结点度数大于等于3。

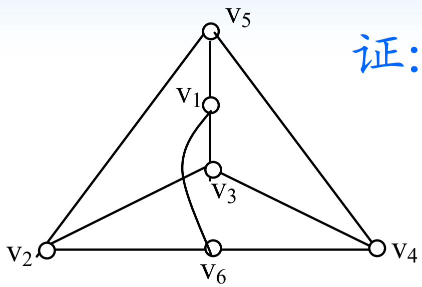
证毕。

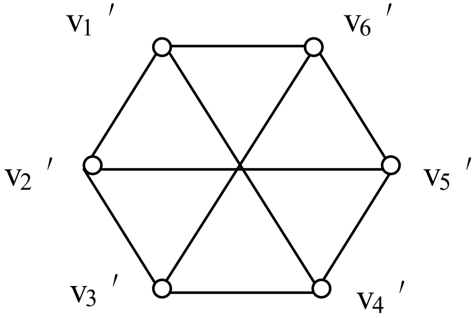
## 3）判断或证明图同构

**例10.8** 证明下面两图同构。






证:

$\varphi(v_1)=v_1'$; $\varphi(v_2)=v_3'$; $\varphi(v_3)=v_2'$

$\varphi(v_4)=v_5'$; $\varphi(v_5)=v_4'$; $\varphi(v_6)=v_6'$

$\psi(v_1, v_3)=(v_1', v_2')$; $\psi(v_1, v_5)=(v_1', v_4')$

$\psi(v_1, v_6)=(v_1', v_6')$; $\psi(v_2, v_3)=(v_3', v_2')$

$\psi(v_2, v_5)=(v_3', v_4')$; $\psi(v_2, v_6)=(v_3', v_6')$

$\psi(v_3, v_4)=(v_2', v_5')$; $\psi(v_4, v_5)=(v_5', v_4')$

$\psi(v_4, v_6)=(v_5', v_6')$

显然使下式成立:

$\psi(v_i, v_j)=(v_i', v_j') \Rightarrow \varphi(v_i)=v_i' \wedge \varphi(v_j)=v_j' (1 \le i \cdot j \le 6)$

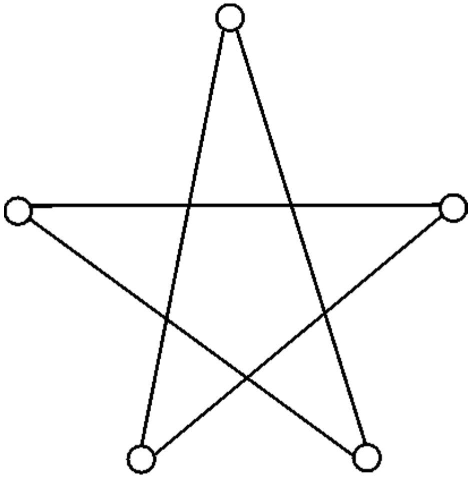
于是图G与图G′ 同构。

# 4）补图与自补图

**例10.9 设G是$n$阶自补图，试证明$n=4k$或$n=4k+1$，其中$k$为正整数。画出5个结点的自补图。是否有3个结点或6个结点的自补图？**

证：设G是$n$阶自补图，则由自补图的定义，G的边数为 $\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}$ ，显然，它应是整数。

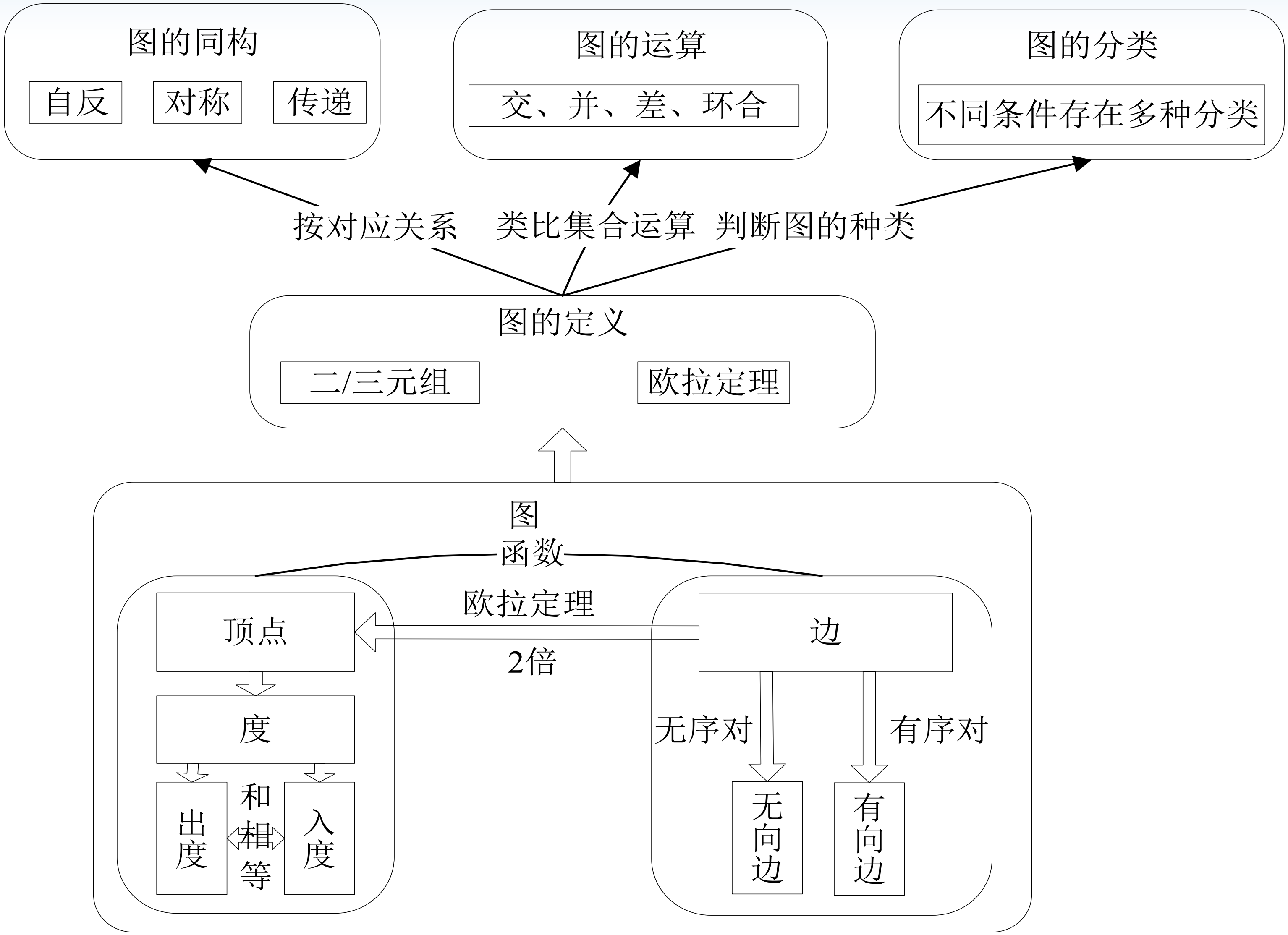
即 $\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=k$ 。于是有$n(n-1)=4k$，因为$n$和$n-1$是两个相邻数，所以 $n=4k'$或$n-1=4k'$ ，即$n=4k'$或$n=4k'+1$。



5个结点的自补图如右图所示。因为3和6都不能表示成为$n=4k'$或$n=4k'+1$ ，所以，没有3个结点或6个结点的自补图。

证毕。

# 本章小结


图的同构
自反
对称
传递
图的运算
交、并、差、环合
图的分类
不同条件存在多种分类
按对应关系
类比集合运算
判断图的种类
图的定义
二/三元组
欧拉定理
图
函数
顶点
欧拉定理
2倍
边
度
出度
和相等
入度
无序对
有序对
无向边
有向边