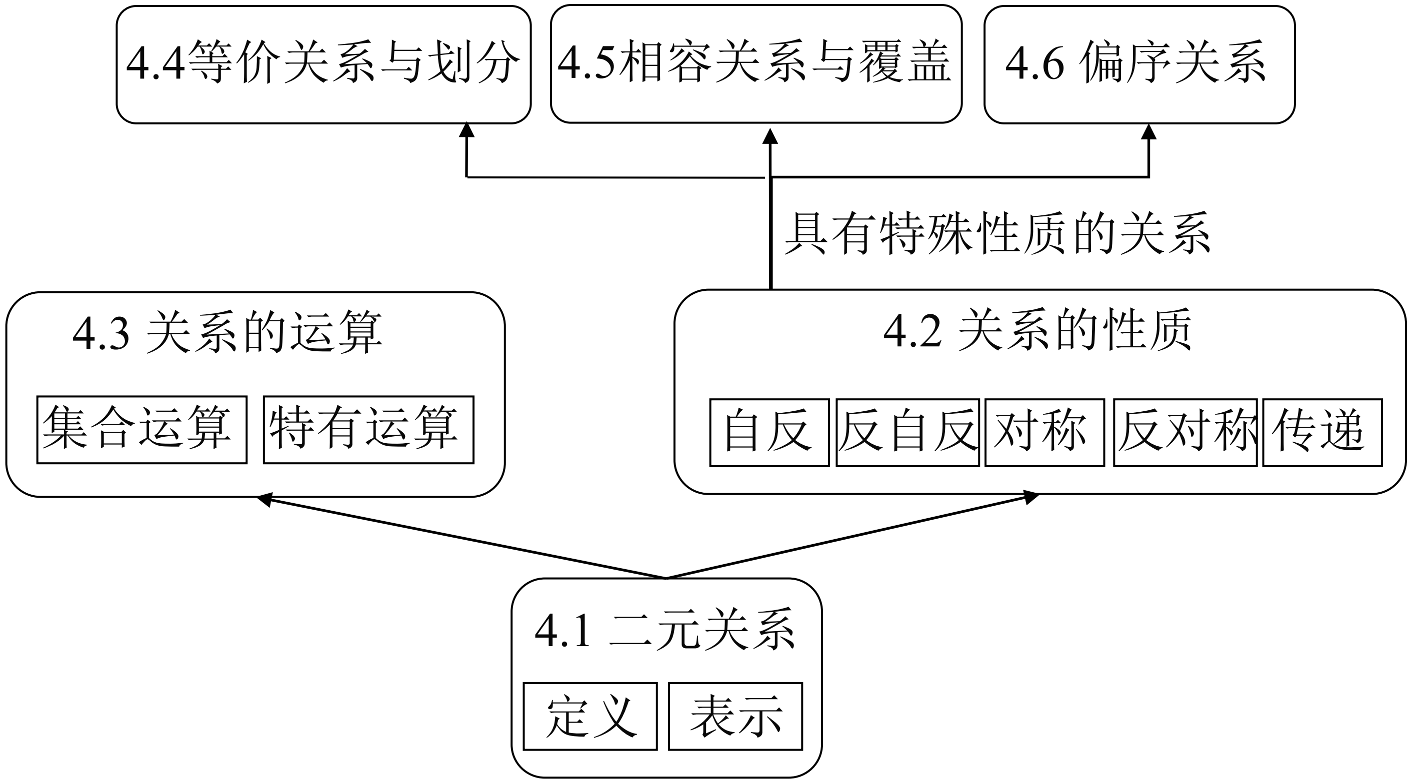
第四章二元关系

二元关系知识逻辑概图


4.4等价关系与划分
4.5相容关系与覆盖
4.6 偏序关系
具有特殊性质的关系
4.3 关系的运算
集合运算
特有运算
4.2 关系的性质
自反
反自反
对称
反对称
传递
4.1 二元关系
定义
表示

关系在计算机科学技术中的应用

- 关系在计算机科学中的应用
  - 关系数据库
  - 等价关系用于信息检索
  - 偏序关系用于项目管理

4.1 关系的概念

二元关系：仅含有序对的集合或此意义下的空集。

4.1.1 关系的定义

- 二元关系在日常生活中普遍存在，例如，人与人之间有“同学”关系、“师生”关系，两个数之间有“大于”关系、“等于”关系，函数(程序)之间有“调用”关系。无论是在数学上或是在计算机科学中关系都有着重要的地位。

例如，有A，B，C三个人和四项工作α，β，γ，δ，已知A可以从事工作α，δ，B可以从事工作γ，C可以从事工作α，β。那么人和工作之间的对应关系可以记作

$$R=\{<A, \alpha>, <A, \delta>, <B, \gamma>, <C, \alpha>, <C, \beta>\}$$

有序对反映了两个元素之间存在关系。

4.1.1关系的定义

定义4.1 设A，B为集合，A×B的任何子集称作从A到B的二元关系，特别当A=B时，称做A上的二元关系。二元关系简称为关系，一般记作R。即若R⊆A×B，R是从A到B的二元关系，若R⊆A×A，R是A上的二元关系。

对于二元关系R，如果$<x, y>\in R$，则记作xRy，称x与y之间有关系R；相反，若$<x, y>\notin R$，则称x与y之间没有关系R，记为$x\,\widetilde{R}\,y$。

例如R_1={<1, 2>, <a, b>}，R_2={<1, 2>, a, b}，$R_3=\varnothing$，则R_1、R_3是二元关系，而R_2不是关系，除非将a和b定义为有序对。

例如，若$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{0, 1, 2\}$，则

$R_1=\{<2, 2>, <3, 1>, <4, 0>\}$，$R_2= A\times B$，$R_3=\varnothing$

等都是从A到B的关系, 而$R_4=\{<3, 4>\}$是A上的关系, 不是从A到B的关系。

4.1.1关系的定义

定理4.1 设A是具有n个元素的有限集，则A上的二元关系有 2^{n^2} 种。

证：若$|A|=n$，由排列组合原理知$|A\times A|=n^2$，则$A\times A$有2^{n^2}个子集，每一个子集代表一个A上的二元关系，所以A上有2^{n^2}个不同的二元关系。

例如若$|A|=3$，则A上有 $2^{3^2}=512$个不同的二元关系。

可以将二元关系扩展到n元关系，其定义如下：

定义4.2 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个集合，$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$的任一子集，都称为$A_1, A_2, \ldots, A_n$间的一个n元关系。即若R是$A_1, A_2, \ldots, A_n$间的一个n元关系，则$R\subseteq A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$。

4.1.2 特殊的关系

设A、B为任意集合，以下介绍3种特殊的关系：空关系$\varnothing$，全域关系E和恒等关系I_A。

定义4.3 设A、B为任意集合，

（1）空集$\varnothing$是$A\times B$的子集，叫做从A到B的空关系。

（2）$E = A\times B$，叫做从A到B的全域关系。

（3）$I_A = \{<x, x> \mid x\in A\}$，叫做A上的恒等关系。

例4.1 设$A =\{a, b\}, B=\{1, 2\}$, 求A上的恒等关系I_A和A到B的全域关系E。

解：

A上的恒等关系$I_A = \{<a, a>, <b, b>\}$。

A到B的全域关系$E = A\times B=\{<a, 1>, <a, 2>, <b, 1>, <b, 2>\}$。

4.1.2 特殊的关系

除了以上3种特殊的关系以外，还有一些常用的关系如下：

（1）小于等于关系：设A为实数集R的子集，

$$L_A = \{<x, y> | x, y \in A \wedge x \le y\}$$

叫做A上的小于等于关系。

（2）整除关系：设A为非零整数集Z^*的子集，

$$D_A = \{<x, y> | x, y \in A \wedge x\text{是}y\text{的因子}\}$$

称为A上的整除关系。

（3）包含关系：设A为任意一个集族，

$$R_\subseteq = \{<x, y> | x, y \in A \wedge x \subseteq y\}$$

称为A上的包含关系。

类似还可定义大于等于关系，小于关系，大于关系，真包含关系等。

4.1.2 特殊的关系

例4.2 （1）设A={-1, 0.5, 4}，B={1, 2, 3, 6}，求L_A与D_B。

（2）设C={a, b}，求$R_\subseteq = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P(C) \wedge x \subseteq y\}$。

解：

（1）$L_A = \{\langle -1, -1\rangle, \langle -1, 0.5\rangle, \langle -1, 4\rangle, \langle 0.5, 0.5\rangle, \langle 0.5, 4\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

$D_B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 6, 6\rangle\}$

（2）$P(C) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, C\}$，

$R_\subseteq = \{\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \langle\varnothing, \{a\}\rangle, \langle\varnothing, \{b\}\rangle, \langle\varnothing, C\rangle, \langle\{a\}, \{a\}\rangle, \langle\{a\}, C\rangle,$

$\langle\{b\}, \{b\}\rangle, \langle\{b\}, C\rangle, \langle C, C\rangle\}$

4.1.3 关系的表示

由二元关系的定义可以看出，二元关系是集合，所以集合的各种表示方法也适用于关系。

1. 列举法

可以用表示集合的列举法表示二元关系。例4.1中的A到B的全域关系$E = A\times B=\{<a, 1>, <a, 2>, <b, 1>, <b, 2>\}$，$A$上的恒等关系$I_A = \{<a, a>, <b, b>\}$等都是用列举法表示的。

2. 描述法

二元关系也可以用表示集合的描述法表示。上述常用的小于等于关系$L_A=\{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x\le y\}$、整除关系$D_A = \{<x, y> \mid x, y\in A \wedge x$是$y$的因子$\}$以及包含关系$R_{\subseteq} = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x\subseteq y\}$等都是用描述法表示的二元关系。

4.1.3 关系的表示

3. 矩阵表示法

矩阵表示法只适用于有限集上的关系。

设A、B都是有限集，$A=\{a_1, a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，从$A$到$B$的关系$R$可以用一个$m\times n$的矩阵$M_R$来表示，

$$M_R = (r_{ij})_{m\times n}$$

M_R的第i行第j列的元素r_{ij}取值如下：

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若} a_i R b_j \\ 0 & \text{若} a_i \tilde{R} b_j \end{cases} \text{,其中} i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

矩阵M_R称为二元关系R的关系矩阵。

4.1.3 关系的表示

例4.5 设A={1, 2, 3, 4}，定义A上的二元关系R：

$<a, b>\in R$当且仅当$a<b$。

求R的集合表示和关系矩阵。

解：由定义求得

R = {<1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>}，

其关系矩阵为：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1.3 关系的表示

4. 关系图表示法

❖ 关系图表示法只适用于有限集上的关系。

❖ 若A、B都是有限集，从A到B的关系R还可以用图表示。表示二元关系R的图G_R叫作R的关系图。从A到B的二元关系的关系图和A上的二元关系的关系图的定义不一样，分别描述如下。

（1）从A到B的二元关系的关系图

设集合$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$、$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$R$是从$A$到$B$的二元关系，其关系图$G_R$的绘制方法如下：

① 画出m个小圆圈表示A的元素，分别标记为$a_1, a_2, \ldots, a_m$；再画出n个小圆圈表示B的元素，分别标记为$b_1, b_2, \ldots, b_n$。这些小圆圈叫作关系图的顶点或结点。

② 如果a_iRb_j，则从顶点a_i到顶点b_j画一条有向边。

4.1.3 关系的表示

（2）A上的二元关系的关系图

设集合$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$R$是$A$上的二元关系，其关系图$G_R$的绘制方法如下。

① 画出m个小圆圈表示A的元素，分别标记为$a_1, a_2, \ldots, a_m$。

② 如果a_iRa_j，则从顶点a_i到顶点a_j画一条有向边。

例4.6 设有六个程序$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$，它们之间有一定的调用关系：

R：p_1Rp_2、p_3Rp_4、p_4Rp_5、p_5Rp_2、p_2Rp_6、p_3Rp_1

则关系R是集合$P=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$上的二元关系，且

$$R=\{\langle p_1, p_2\rangle, \langle p_3, p_4\rangle, \langle p_4, p_5\rangle, \langle p_5, p_2\rangle, \langle p_2, p_6\rangle, \langle p_3, p_1\rangle\}$$

其图形表示如图4.4所示。

4.1.3 关系的表示

❖ 例4.4 设$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3\}$，R是A到B的二元关系，定义为：$R=\{<a_1, b_1>, <a_1, b_3>, <a_2, b_2>, <a_2, b_3>, <a_3, b_1>, <a_4, b_1>, <a_4, b_2>\}$, 二元关系$R$的关系图如图4.3所示。

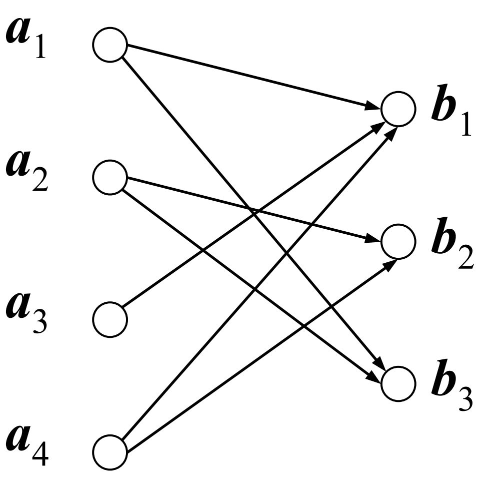


图4.3 例4.4的关系图

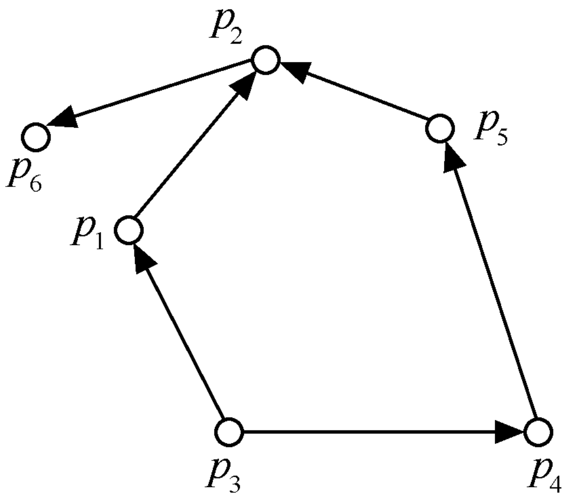


图4.4 例4.6的关系图

小结

二元关系

- 定义：
  - $R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R$是从$A$到$B$的关系
  - $R \subseteq A \times A \Leftrightarrow R$是$A$上的关系
- 特殊关系：
  - 空关系、全域关系和恒等关系。
  - 小于等于关系、整除关系和包含关系等。
- 关系的表示法：
  - 集合表示法：包括列举法和描述法，便于书写。
  - 矩阵表示法：便于计算机存储。
  - 关系图表示法：直观、清晰。

4.2 关系的性质

关系的性质主要有五种：自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性。

4.2 关系的性质

定义4.4 设R为A上的关系，

（1）若$\forall x(x \in A \rightarrow <x, x> \in R)$，则称R在A上是自反的。

（2）若$\forall x(x \in A \rightarrow <x, x> \notin R)$，则称R在A上是反自反的。

例如以下关系是自反的：

A上的全域关系E_A，恒等关系I_A，小于等于关系L_A以及整除关系D_A等都是A上的自反关系，包含关系$R_{\subseteq}$是给定集合族上的自反关系。

以下关系是反自反的：

小于关系和真包含关系都是给定集合或集合族上的反自反关系，空关系$\varnothing$是A上的反自反关系。

4.2 关系的性质

自反关系与反自反关系的关系矩阵与关系图：

（1）若R在A上是自反的，由定义4.4可知，R的关系矩阵M_R的主对角线元素全为1，在关系图G_R中每一个顶点上都有环。

（2）若R在A上是反自反的，由定义4.4可知，R的关系矩阵M_R的主对角线元素全为0，在R的关系图G_R中每一个顶点上都没有环。

4.2 关系的性质

定义4.5 设R为A上的关系，

（1）若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \rightarrow <y, x> \in R)$，则称R在A上是对称的。

（2）若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \rightarrow x = y)$，则称R在A上是反对称的。

例如A上的全域关系E_A，恒等关系I_A和空关系$\varnothing$都是A上的对称关系。

并且恒等关系I_A和空关系$\varnothing$也是A上的反对称关系。

A上的小于等于关系L_A以及整除关系D_A等都是A上的反对称关系。

一个街道上的“邻居”关系是对称的，人与人之间的“母女”关系是反对称的。

4.2 关系的性质

对称关系与反对称关系的关系矩阵与关系图：

（1）若R在A上是对称的，由定义4.5可知，R的关系矩阵M_R是对称矩阵。在R的关系图G_R中，如果两个不同的顶点间有边，一定有方向相反的两条边。

（2）若R在A上是反对称的，由定义4.5可知，R的关系矩阵M_R中，以主对角线为轴的对称位置上不能同时为1（主对角线除外）。在R的关系图G_R中每两个不同的顶点间不能有方向相反的两条边。

4.2 关系的性质

定义4.6 设R为A上的关系，若

$$\forall x\,\forall y\,\forall z(x, y, z\in A\wedge\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, z\rangle\in R\rightarrow\langle x, z\rangle\in R)$$

则称R为A上的传递关系。

例如A上的全域关系E_A，恒等关系I_A和空关系$\varnothing$等都是A上的传递关系。小于等于关系、整除关系、包含关系等都是相应集合上的传递关系。

4.2 关系的性质

传递关系的关系矩阵与关系图：

若R在A上是传递的，由定义4.6易知，R的关系矩阵M_R中若有$(m_R)_{ij}=1\wedge(m_R)_{jk}=1$，则必有$(m_R)_{ik}=1$。在$R$的关系图$G_R$中，如果顶点$x$到$y$、$y$到$z$有边，则$x$到$z$一定存在有向边。

说明：

1. 关系的性质明显地反映在它的关系矩阵和关系图上，表4. 1(见教材P148)总结了以上五种性质在关系矩阵和关系图中的特点。
2. 综上所述，共有三种判断关系性质的方法：

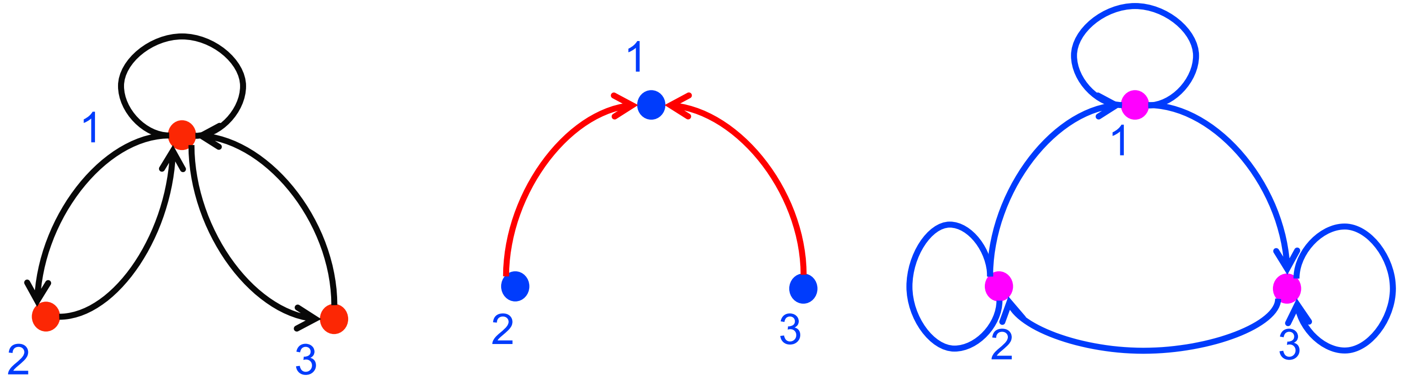
（1）根据定义判断关系的集合表达式。

（2）根据关系矩阵判断。

（3）根据关系图判断。

4.2 关系的性质

例4.10 判断下图中关系的性质，并说明理由。



解：（1）该关系是对称的，因为无单向边。它不是自反的也不是反自反的，因为有的顶点有环，有的顶点没有环。它不是反对称的，因为图中有双向边。它也不是传递的，因为图中有边<3, 1>和<1, 3>，但没有从3到3的边，即顶点3无环。

（2）该关系是反自反的但不是自反的，因为每个顶点都没有环。它是反对称的但不是对称的，因为图中只有单向边。它也是传递的，因为不存在顶点x, y, z，使得x到y有边，y到z有边，但x到z没有边。

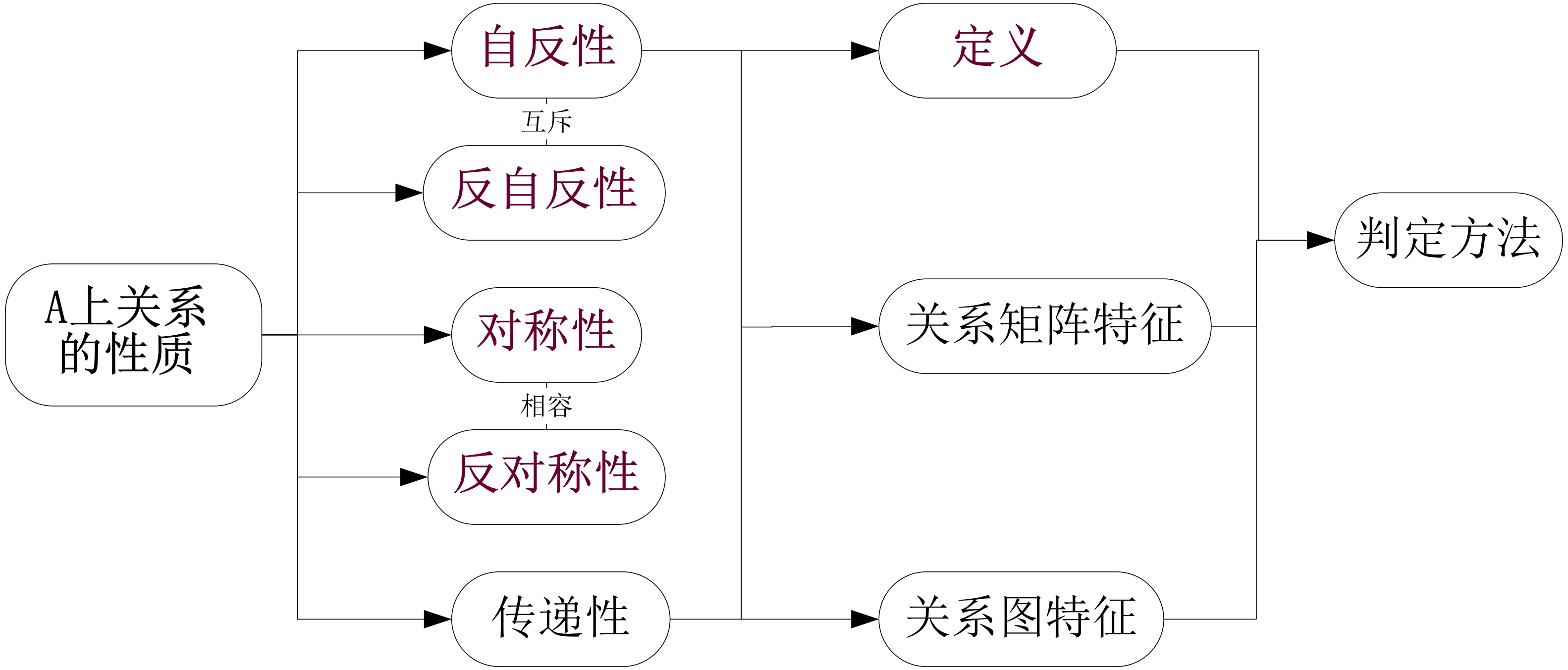
4.2 关系的性质

（3）该关系是自反的但不是反自反的，因为每个顶点都有环。它是反对称的但不是对称的，因为图中只有单向边。它不是传递的，因为2到1有边，1到3有边，但2到3没有边。

小结

关系的性质
- 分类：自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性。
- 关系矩阵与关系图的特征，见表4.1。
- 判断方法：
  - ① 根据定义判断
  - ② 判断关系矩阵
  - ③ 判断关系图

上节复习



4.3 关系的运算

- 关系是有序对的集合。所以集合的并、交、补、对称差等运算也适用于关系。
- 本节我们介绍关系所特有的7种基本运算及性质。

4.3.1定义域与值域

定义4.7 设R是二元关系，

（1）R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域，记作$domR$，可表示为：

$$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y(<x, y>\in R)\}$$

（2）R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域，记作$ranR$，可表示为：

$$\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x(<x,y>\in R)\}$$

（3）定义域和值域的并集称为R的域，记作$fldR$，可表示为：

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R\cup \mathrm{ran}R$$

4.3.1定义域与值域

例4.11 已知$R = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <4, 2>\}$，则

$\mathrm{dom}R = \{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R = \{1,2,3,4\}$

定理4.2 若R和S是集合A到B的两个二元关系，则：

（1）$\mathrm{dom}R\cup S = \mathrm{dom}R\cup \mathrm{dom}S$

（2）$\mathrm{dom}R\cap S \subseteq \mathrm{dom}R\cap\mathrm{dom}S$

（3）$\mathrm{dom}R-\mathrm{dom}S \subseteq \mathrm{dom}R-S$

（4）$\mathrm{ran}R\cup S = \mathrm{ran}R\cup \mathrm{ran}S$

（5）$\mathrm{ran}R\cap S \subseteq \mathrm{ran}R\cap\mathrm{ran}S$

（6）$\mathrm{ran}R-\mathrm{ran}S \subseteq \mathrm{ran}R-S$　　　证明略, 见教材。

4.3.2 限制与像

定义4.8 设R为二元关系，A为集合，

（1）R在A上的限制记作$R\upharpoonright A$，其中

$$R\upharpoonright A = \{<x, y> | xRy \wedge x \in A\}$$

（2）A在R下的像记作$R[A]$，其中

$$R[A] = \text{ran}\,(R\upharpoonright A)$$

由定义可得出，R在A上的限制$R\upharpoonright A$是R的子关系，而A在R下的像$R[A]$是ran$R$的子集。

例4.13 设$R = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 2>\}$

$R\upharpoonright\{2\} = \{<2, 2>, <2, 4>\}$, $\quad R\upharpoonright\varnothing = \varnothing$

$R\upharpoonright\{1,3\} = \{<1,2>, <1,3>, <3,2>\}$, $\quad R[\{2\}] = \{2,4\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$, $\quad R[\{3\}] = \text{ran}(R\upharpoonright\{3\}) = \text{ran}(\{<3,2>\}) = \{2\}$

4.3.2 限制与像

定理4.3 设R为二元关系，A和B为集合，则有

（1）$R\upharpoonright(A\cup B) = R\upharpoonright A\cup R\upharpoonright B$

（2）$R[A\cup B] = R[A]\cup R[B]$

（3）$R\upharpoonright(A\cap B) = R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$

（4）$R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

证：（3）对任意的$<x, y>$，

$<x, y>\in R\upharpoonright(A\cap B) \Leftrightarrow <x, y>\in R\wedge x\in A\cap B$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R\wedge(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow (<x, y>\in R\wedge x\in A)\wedge(<x, y>\in R\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R\upharpoonright A\wedge<x, y>\in R\upharpoonright B \Leftrightarrow <x, y>\in R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$

所以有$R\upharpoonright(A\cap B) = R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$。

其他证明略。

4.3.3 逆运算

定义4.9 设R是二元关系，R的逆关系简称R的逆，记作R^{-1}，定义如下：

$$R^{-1}=\{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$$

例4.14 已知$A=\{0, 1, 2\}$，$R=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$是$A$上的二元关系，则

$$R^{-1} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

容易证明，

（1）R^{-1}的关系矩阵 是R的关系矩阵M_R的转置矩阵，即 $= M_R^T$。

（2）在R的关系图中, 简单地颠倒每条边的箭头方向就得到R^{-1}的关系图。

4.3.3 逆运算

定理4.4 设R是任意的关系，则有

（1）$(R^{-1})^{-1} = R$

（2）$\mathrm{dom}R^{-1} = \mathrm{ran}R$，$\mathrm{ran}R^{-1} = \mathrm{dom}R$

定理4.5 设R、S是任意的关系，则有

（1）$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$。

（2）$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$。

（3）$(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$

（4）$(X\times Y)^{-1}=Y\times X$

4.3.4 复合运算

定义4.10 设R，S为任意的二元关系，R与S的复合记作R◦S，定义为：

$$R\circ S=\{\langle x, y\rangle \mid \exists z(xRz \wedge zSy)\}$$

复合运算是关系的二元运算，它能够由两个关系生成一个新的关系。

例4.15 设$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,4\rangle\}$，$S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$，则

$$R\circ S = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

$$S\circ R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

由该例可以看出，关系的复合运算不满足交换律，即$R\circ S \neq S\circ R$。

4.3.4 复合运算

关系矩阵M_R和M_S的布尔乘法:

设集合$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$Z=\{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$，$R$是从$X$到$Y$的二元关系，其关系矩阵是$M_R$，$S$是从$Y$到$Z$的二元关系，其关系矩阵是$M_S$，求$R \circ S$的关系矩阵$M_{R \circ S}$的方法如下：

$$M_R = [a_{ik}]_{m \times n} \qquad M_S = [b_{kj}]_{n \times p}$$

$$M_{R \circ S} = M_R \circ M_S = [c_{ij}]_{m \times p}$$ ，其中

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj})\ i = 1, 2, \ldots, m，\ j = 1, 2, \ldots, p$$

与线性代数中的矩阵乘法公式相比，只要把矩阵乘法公式中的数乘改为合取，把数加改为析取，就得到了关系矩阵的布尔乘法公式。

4.3.4 复合运算

定理4.6 设R、S、T是任意的关系，则有

（1）$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

（2）$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$

证：（2）对于任意的$<x,y>$，

$<x,y>\in(R\circ S)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x>\in R\circ S$

$\Leftrightarrow \exists u(<y,u>\in R \wedge <u,x>\in S)$

$\Leftrightarrow \exists u(<x,u>\in S^{-1} \wedge <u,y>\in R^{-1})$

$\Leftrightarrow <x,y>\in S^{-1}\circ R^{-1}$

所以$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$。

4.3.4 复合运算

定理4.7 设R是A上的关系，则有

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

定理4.8 设R、S、T为任意的关系，则有

（1）$R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$

（2）$(S\cup T)\circ R=S\circ R\cup T\circ R$

（3）$R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T$

（4）$(S\cap T)\circ R\subseteq S\circ R\cap T\circ R$

定理4.9 设R、S、T、Q为任意的关系，满足$\mathrm{S}\subseteq\mathrm{T}$，则有：

（1）$R\circ S\subseteq R\circ T$

（2）$S\circ Q\subseteq T\circ Q$

4.3.4 复合运算

定义4.11 设R为A上的关系，n为自然数，则R的n次幂定义为：

（1）$R^0 = \{<x, x>|x \in A\} = I_A$

（2）$R^{n+1} = R^n \circ R,\ n \geq 0$

由该定义可以看出，A上的任何二元关系的0次幂都相等，等于A上的恒等关系I_A，并且有：

$$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$$

给定A上的关系R和自然数n，怎样计算R^n呢？若n是0或1，结果是很简单的。下面考虑$n \geq 2$的情况：

（1）如果R是用集合表达式给出的，可以根据定义通过n-1次右复合计算得到R^n。

4.3.4 复合运算

（2）如果R是用关系矩阵M_R给出的，则R^n的关系矩阵是 n个矩阵M_R的布尔乘法：

$$M_{R^n} = \underbrace{M_R \circ M_R \circ \ldots \circ M_R}_{n个} = M_R^{\ n}$$

（3）如果R是用关系图G给出的，可以直接由图G得到R^n的关系图G^n：

① G^n的顶点集与G相同。

② 考察G的每个顶点x_i，如果在G中从x_i出发经过n步长的路径到达顶点x_j，则在G^n中加一条从x_i到x_j的边。

③ 当把所有这样的边都找到以后，就得到图G^n。

4.3.4 复合运算

例4.17 设$A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>\}$, 求$R$的各次幂。

解：（1）根据定义求：

$$R^0 = I_A$$

$$R^1 = R$$

$$R^2 = R\circ R = \{<a, a>, <a, c>,<b, b>, <b, d>\}$$

$$R^3 = R^2\circ R = \{<a, b>, <a, d>,<b, a>, <b, c>\}$$

$$R^4 = R^3\circ R = \{<a, a>, <a, c>,<b, b>, <b, d>\}= R^2$$

由此可以得到

$$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots$$

$$R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$$

用关系矩阵、关系图求可得到相同的结果.

4.3.4 复合运算

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = M_R^2 M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^4 = M_R^3 M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，$M^4 = M^2$，即$R^4 = R^2$. 由此可得:

$$R^2 = R^4 = R^6 = ...$$

$$R^3 = R^5 = R^7 = ...$$

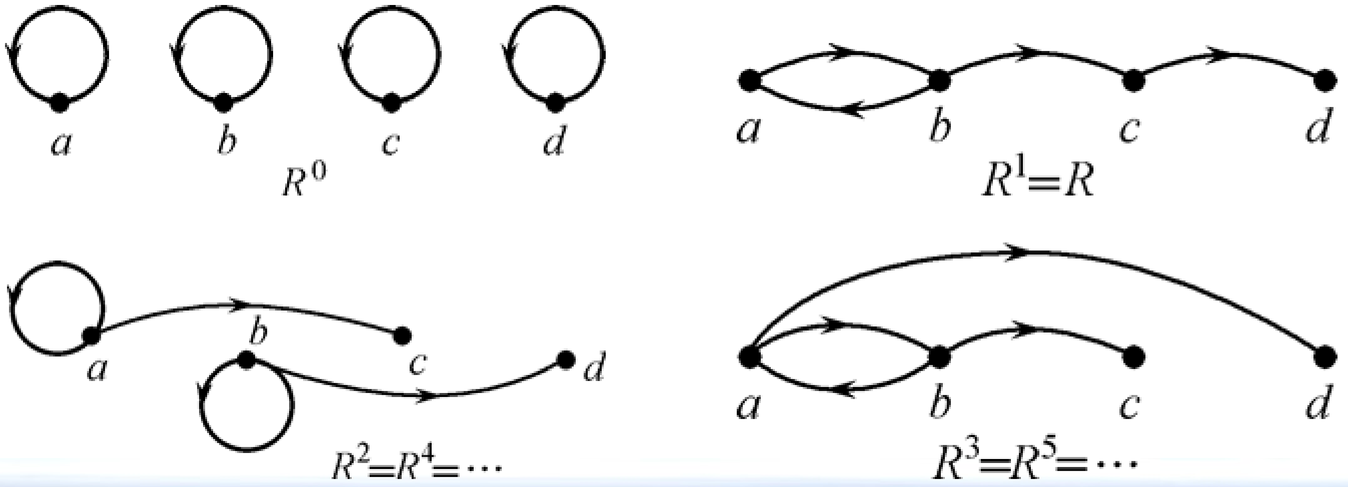
4.3.4 复合运算

关系R^0，即：I_A的关系矩阵是

$$M_{I_A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

至此，R各次幂的关系矩阵都得到了.

用关系图的方法得到R^0，R^1，R^2，R^3，…，的关系图如下图所示.



4.3.4 复合运算

幂运算的性质:

定理4.10 设R是集合A上的二元关系，m，n是任意自然数，则

（1）$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

（2）$(R^m)^n = R^{mn}$

定理4.11 设A是具有n个元素的有限集，R为A上的关系，则存在自然数s和t，使得$R^s = R^t$。

证：R为A上的关系，对任何自然数k，R^k都是A上的关系。由定理4.1，A上的二元关系共有2^{n^2}种，所以当列出R的各次幂$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots$时，必存在自然数$s$和$t$，使得$R^s = R^t$ (鸽笼原理)。

4.3.5 关系的性质与运算的联系

第4.2节我们讨论过，非空集合A上的关系的性质主要有自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性等五种。下面给出这五种性质成立的充分必要条件，可用于判断一个关系是否具有某种性质。

定理4.12 设R是A上的关系，则

（1）R在A上自反当且仅当$I_A \subseteq R$。

（2）R在A上反自反当且仅当$R \cap I_A = \varnothing$。

（3）R在A上对称当且仅当$R = R^{-1}$。

（4）R在A上反对称当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

（5）R在A上传递当且仅当$R \circ R \subseteq$ R。

4.3.5 关系的性质与运算的联系

证 (1.1) 必要性

R在A上自反的，任取$\langle x, x\rangle$

$$\langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R.$$

即：$I_A \subseteq R$.

(1.2)充分性

$I_A \subseteq R$，任取x,

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R.$$

因此，R在A上是自反的.

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(2). R在A上反自反当且仅当$R \cap I_A = \phi$

证(2.1) 必要性(用反证法)

假设$R \cap I_A \neq \phi$，那么一定存在$\langle x, y\rangle \in R \cap I_A$. 由于$I_A$是A上的恒等关系，从而推出$x=y, x \in A$且$\langle x, x\rangle \in R$. 这与R在A上是反自反的相矛盾.

(2.2) 充分性

任取x，则有:

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin R \quad (\text{由于} R \cap I_A = \phi)$$

从而证明了R在A上是反自反的.

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(3). R在A上对称当且仅当$R = R^{-1}$

证　(3.1) 必要性

任取⟨x, y⟩, 有:

$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1}$

所以, $R = R^{-1}$.

(3.2) 充分性

任取⟨x, y⟩, 由 “$R = R^{-1}$” 可得:

$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R$

所以, R在A上是对称的.

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(4) R在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

证(4.1) 必要性

任取$\langle x, y\rangle$，有:

$\langle x, y\rangle \in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\wedge\langle x, y\rangle\in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, x\rangle\in R$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in I_A$

(4.2) 充分性

任取$\langle x, y\rangle$，有:

$\langle x, y\rangle \in R\wedge\langle y, x\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\wedge\langle x, y\rangle\in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in I_A$

$\Rightarrow x = y$

从而证明了R是A上是反对称的.

4.3.5 关系的性质与运算的联系

(5) R在A上传递当且仅当$R \circ R \subseteq R$

证 (5.1) 必要性

任取<x, y>, 有:

$\langle x, y\rangle \in R \circ R$

$\Rightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$

所以, $R \circ R \subseteq R$.

(5.2) 充分性

任取<x, y>, <y, z>∈R, 有:

$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \circ R \qquad (R \circ R \subseteq R)$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$

所以, R是A上是传递的.

4.3.5 关系的性质与运算的联系

除基本定义之外，五种性质的基本判定方法.

性质 表示	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \phi$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	对称矩阵	若r_{ij}=1且$i \neq j$，则，$r_{ji} = 0$	对M^2中1所在的位置，M中相应的位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两个顶点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k也有边

4.3.5 关系的性质与运算的联系

下面研究关系的性质和运算之间的联系。

下表给出了关系的性质和运算之间的联系，其中的√和×分别表示“能保持”和“不一定能保持”的含义。

原有性质 \ 运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

4.3.5 关系的性质与运算的联系

例4.18 设A是集合，R_1, R_2是A上的关系，证明：

若R_1, R_2是自反的和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的。

证：由于R_1和R_2是A上的自反关系，故有

$$I_A \subseteq R_1 \text{且} I_A \subseteq R_2$$

从而得到$I_A \subseteq R_1 \cup R_2$。根据定理4.12可知$R_1 \cup R_2$在$A$上是自反的。

再由R_1和R_2的对称性有

$$R_1 = R_1^{-1} \text{且} R_2 = R_2^{-1}$$

根据定理4.5有

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$$

根据定理4.12可知$R_1 \cup R_2$在A上是对称的。

4.3.6 关系的闭包运算

关系*R*的闭包：对*R*扩充最少的有序对而得到具有某种性质的新关系。

定义4.12 设*R*是非空集合*A*上的任意关系，若*A*上存在一个关系R'满足：

（1）*R*'是自反的（对称的或传递的）。

（2）$R \subseteq R'$。

（3）对*A*上的任何包含R的自反（对称或传递）关系*R*"，都有$R' \subseteq R''$。

则称*R*'是*R*的自反闭包（对称闭包或传递闭包）。

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

自反闭包 $\rho(R)$
对称闭包 $\sigma(R)$
传递闭包 $\tau(R)$

例如设*R*是集合*A*={a, b, c}上的二元关系，且*R*={<a, b>, <a, c>}，则

$r(R)=\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle\}$

$s(R)=\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$

$t(R)=R$

4.3.6 关系的闭包运算

下面的定理给出了构造闭包的方法。

定理4.13 设R是非空集合A上的关系，则有

（1）$r(R) = R \cup R^0$

（2）$s(R) = R \cup R^{-1}$

（3）$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

证明思路：

- (1) 根据定义及符号化表示，等值演算；
- (2) 根据已有的定理进行推导；
- (3) (1)(2)的综合利用。

4.3.6 关系的闭包运算

(1) $r(R) = R \cup R^0$

证

(1) 由$I_A = R^0 \subseteq R \cup R^0$可知：$R \cup R^0$是自反的，且满足：$R \subseteq R \cup R^0$.

设R”是A上包含R的自反关系，则有$R \subseteq R''$和$I_A \subseteq R''$

任取<x, y>，一定有：

$\langle x, y\rangle \in R \cup R^0$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in R^0 \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R'' \vee \langle x, y\rangle \in R'' \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R''$

从而证明了$R \cup R^0 \subseteq R''$.

综上所述$R \cup R^0$满足“自反闭包定义”中的三个条件.

所以，$r(R) = R \cup R^0$.

4.3.6 关系的闭包运算

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(2) 显然 $R \subseteq R \cup R^{-1}$,

对任意的 $<x, y> \in R \cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y> \in R \vee <x, y> \in R^{-1}$

若 $<x, y> \in R$ 则 $<y, x> \in R^{-1}$、

从而 $<y, x> \in R \cup R^{-1}$,

若 $<x, y> \in R^{-1}$ 则 $<y, x> \in R$、

从而 $<y, x> \in R \cup R^{-1}$,

故 $R \cup R^{-1}$ 具有对称的性质。

4.3.6 关系的闭包运算

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

设 S 是 A上另外任一个满足对称性且 $R \subseteq S$的二元关系

对任意的 $\langle x,y \rangle \in R \cup R^{-1}$

必定有 $\langle x,y \rangle \in R$ 或 $\langle x,y \rangle \in R^{-1}$,

若 $\langle x,y \rangle \in R$ 则 $\langle x,y \rangle \in S$;

若 $\langle x,y \rangle \in R^{-1}$ 则必定有 $\langle y,x \rangle \in R$,

必定有 $\langle y,x \rangle \in S$,

又因为 S 是对称的，故 $\langle x,y \rangle \in S$。

所以 $R \cup R^{-1} \subseteq S$。因此 $s(R) = R \cup R^{-1}$。

4.3.6 关系的闭包运算

(3) $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$

(3) 先证：$R^1 \cup R^2 \cup \cdots \subseteq t(R)$

证明对任意的正整数n，有：$R^n \subseteq t(R)$. 用归纳法.

(3.1) n=1时，有：$R^1 = R \subseteq t(R)$.

(3.2) 假设：$R^n \subseteq t(R)$成立，那么，对任意的$\langle x, y\rangle$，有：

$\langle x, y\rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R^1$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R^1)$

$\Rightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in t(R) \wedge \langle t, y\rangle \in t(R))$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in t(R)$ (因为t(R)是传递的)

这就证明了$R^{n+1} \subseteq t(R)$，由归纳法命题得证.

4.3.6 关系的闭包运算

再证：$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \cdots$,

首先证明$R^1 \cup R^2 \cup \cdots$是传递的.

任取$\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$, 则:

$$\langle x, y\rangle \in (R^1 \cup R^2 \cup \cdots) \wedge \langle y, z\rangle \in (R^1 \cup R^2 \cup \cdots)$$

$$\Rightarrow \exists s(\langle x, y\rangle \in R^s) \wedge \exists t(\langle y, z\rangle \in R^t)$$

$$\Rightarrow \exists s \exists t(\langle x, z\rangle \in R^s \circ R^t)$$

$$\Rightarrow \exists s \exists t(\langle x, z\rangle \in R^{s+t})$$

$$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R^1 \cup R^2 \cup \cdots$$

由此可见，关系$R^1 \cup R^2 \cup \cdots$具有传递性.

再根据传递闭包的定义可知：$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \cdots$ 。

根据上述证明过程可知：$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \cdots$ 。

4.3.6 关系的闭包运算

推论4.1 设R是给定集合A上的二元关系，A是含有n个元素的集合，则$\exists t\in Z^+$，满足

$$t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^t。$$

定理证明略，见教材。

推论4.2设R是给定集合A上的二元关系，设A是含有n个元素的集合，那么

$$t(R) \subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n。$$

定理证明略，见教材。

4.3.6 关系的闭包运算

根据定理4.13，可以得到求闭包的三种方法：

（1）根据定理4.13通过集合运算求得。

（2）利用关系矩阵求闭包。

设关系R、r(R)、s(R)、t(R)的关系矩阵分别是M、M_r、M_s和M_t，定理4.13中的公式转换成矩阵表示：

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M^T$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

其中， E：与M同阶的单位矩阵。

M^T：M的转置。

“+”：矩阵中对应元素的逻辑加(按位或)。

4.3.6 关系的闭包运算

（3）利用关系图求闭包。

设关系R、r(R)、s(R)、t(R)的关系图分别是G、Gr、Gs和Gt，则Gr、Gs、Gt的顶点集与G的顶点集相等。除了G的边以外，依下述方法添加新的边：

Gr：考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是Gr。

Gs：考察G的每一条边，如果有一条x_i到x_j的单向边，$i \neq j$，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边．最终得到Gs。

Gt：考察G 的每个顶点 x_i, 找 x_i可达的所有顶点 x_j(允许i=j)，如果没有从 x_i 到 x_j的边, 就加上这条边, 得到图Gt。

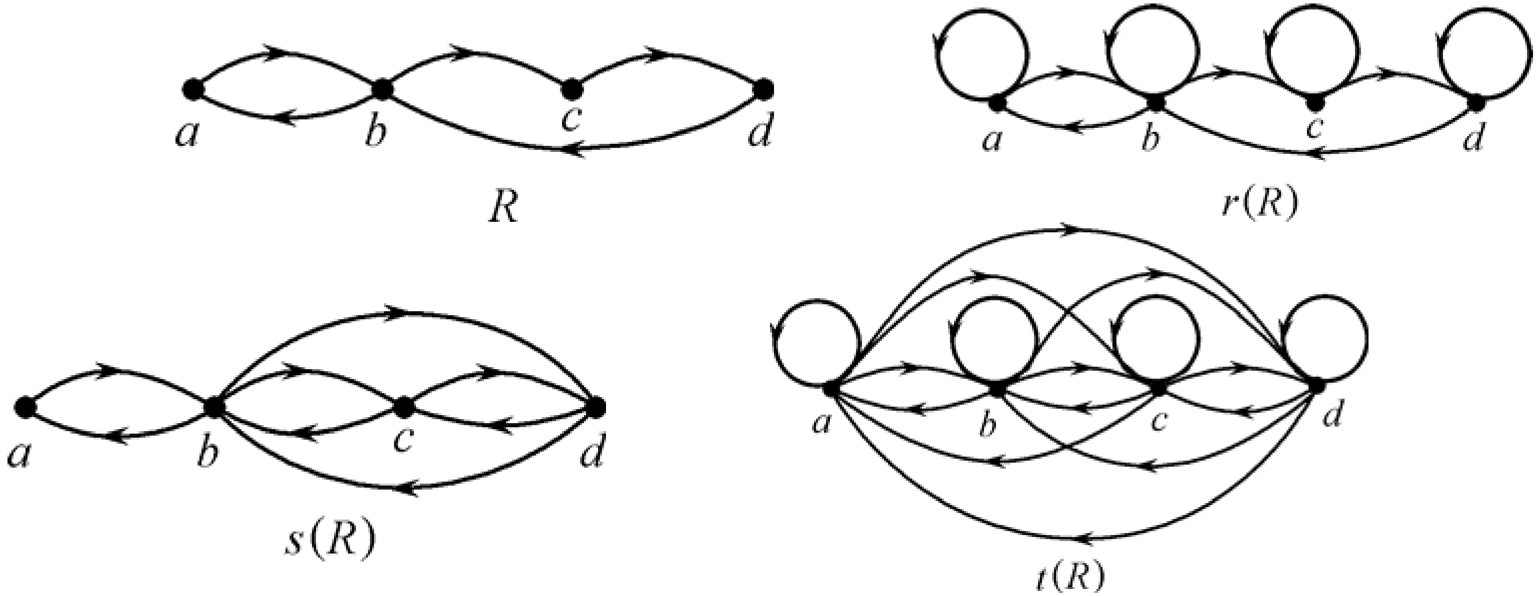
4.3.6 关系的闭包运算

例4.20设A = { a, b, c, d }, R = { <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b> }, 从R的关系图得到r(R), s(R), t(R)的关系图. (练习)

R

4.3.6 关系的闭包运算

例4.20 设A = { a, b, c, d }, R = { <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b> }, 则R和r(R), s(R), t(R)的关系图如下图所示.其中r(R), s(R), t(R)的关系图就是使用上述方法直接从R的关系图得到的.



4.3.6 关系的闭包运算

- 利用计算机求关系的传递闭包可以采用矩阵的表示方法. 设A = { x_1, x_2, ..., x_n }, R为A上的二元关系, 其关系矩阵为M, 那么,
- $$M_t = M + M^2 + \ldots + M^{2^{n^2}}$$
- 因为在R的关系图中, 从顶点x_i到x_j且不含回路的路径最多n步长. 只要找到所有这样的路径, 就可找到那些在传递闭包关系图中的边.

4.3.6 关系的闭包运算

一个更有效的方法沃舍尔(Warshall)算法.（Warshall 在 1962 年提出）。

考虑n+1个矩阵的序列$M_0, M_1, \ldots, M_n$.

$M_k[i,j]=1$当且仅当在R关系图中存在一条从x_i到x_j的路径，并且这条路径除端点外中间只经过$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$中的结点.

不难证明M_0是R的关系矩阵，而M_n就对应R的传递闭包.

沃舍尔算法从M_0开始，顺序计算$M_1, M_2, \ldots$直到M_n为止.

4.3.6 关系的闭包运算

假设已有M_k, 如何计算M_{k+1}?

$M_{k+1}[i, j] = 1$当且仅当在R的关系图中存在一条xi到xj, 并且中间只经过$\{ x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \}$的路径.

这时可将路径分成两种情况:

- $M_k[i, j] = 1$;
- $M_k[i, k+1] = 1$ 且 $M_k[k+1, j] = 1$

4.3.6 关系的闭包运算

算法 **Warshall**

输入: M　　(R的关系矩阵)

输出: Mt　　(t(R)的关系矩阵)

1. Mt ← M
2. for k ← 1 to n do
3. 　for i ← 1 to n do
4. 　　for j ← 1 to n do
5. 　　　Mt[i, j] = Mt[i, j] + Mt[i, k] * Mt[k, j]

逻辑加

逻辑乘

考虑例4.20中的关系R, 利用沃舍尔算法计算的矩阵序列如下面所示, 所得到的传递闭包实际上就是全域关系E_A.

$$M_0=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad M_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad M_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

4.3.6 关系的闭包运算

下面我们讨论关系闭包的主要性质。

定理4.14 设R是非空集合A上的一个二元关系，则

（1）R是自反的，当且仅当$r(R) = R$。

（2）R是对称的，当且仅当$s(R) = R$。

（3）R是传递的，当且仅当$t(R) = R$。

证 只证(1)的必要性.

因为 $r(R) = R \cup R^0$.

显然有$R \subseteq r(R)$, 又由于R是自反关系, 根据自反闭包的定义, 有: $r(R) \subseteq R$, 从而得到$r(R) = R$.

4.3.6 关系的闭包运算

定理4.15 设R_1、R_2是非空集合A上的二元关系，若$R_1 \subseteq R_2$，则

（1）$r(R_1) \subseteq r(R_2)$

（2）$s(R_1) \subseteq s(R_2)$

（3）$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明见教材。

定理4.16 设R_1，R_2都为集合A上的二元关系，则

（1）$r(R_1 \cup R_2)=r(R_1) \cup r(R_2)$。

（2）$s(R_1 \cup R_2)=s(R_1) \cup s(R_2)$。

（3）$t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$。

证明见教材。

4.3.6 关系的闭包运算

定理4.17 设R是非空集合A上的一个二元关系，那么：

（1）rs(R)=sr(R)

（2）rt(R)=tr(R)

（3）ts(R)⊇st(R)

证明略，见教材。

定理4.18 设R是非空集合A上的一个二元关系，那么：

（1）若R是自反的，则s(R)与t(R)也是自反的。

（2）若R是对称的，则r(R)与t(R)也是对称的。

（3）若R是传递的，则r(R)是传递的。

证明略，见教材。

4.3.6 关系的闭包运算

说明：定理4.18讨论了关系性质和闭包运算之间的联系：

（1）如果关系*R*是自反的，那么经过求闭包的运算以后所得到的关系仍旧是自反的。

（2）如果关系*R*是对称的，那么经过求闭包的运算以后所得到的关系仍旧是对称的。

（3）但是对于传递的关系则不然，它的自反闭包仍旧保持传递性，而对称闭包就有可能失去传递性。

因此，在计算关系R的自反、对称、传递的闭包时, 为了不失传递性, 传递闭包运算应放在对称闭包运算的后边.若令tsr(R)表示R的自反、对称、传递闭包, 则

$$tsr(R) = t(s(r(R)))$$

小结

- 关系的运算
  - 分类：
    - 集合运算：并、交、补和对称差等。
    - 特有运算：定义域与值域, 限制与像, 逆运算,复合运算与幂运算
  - 运算的优先级
  - 运算的性质
  - 关系矩阵和关系图：
    - 逆运算
    - 复合运算
    - 幂运算
  - 关系的性质和运算之间的联系，见表4.2。
  - 关系的闭包
    - 分类：自反闭包，对称闭包，传递闭包。
    - 构造闭包：
      - $\mathrm{r}(R) = R \cup R^0$
      - $\mathrm{s}(R) = R \cup R^{-1}$
      - $\mathrm{t}(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$
      - 构造方法
        - ① 集合运算
        - ② 关系矩阵法
        - ③ 关系图法
    - 闭包运算的主要性质。

4.4 等价关系与划分

- 等价关系：同时具有自反、对称和传递性 。
- 等价关系是最重要、最常见的二元关系之一。

4.4 等价关系与划分

定义4.13 设R为非空集合A上的关系，如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系。设R为等价关系，如果$<x,y>\in R$，称x等价于y，记作$x\sim y$。

- 例如，实数集上的相等关系、幂集上的各子集间的相等关系，三角形集合上的三角形的相似关系都是等价关系。
- 因为等价关系是自反、对称和传递的，可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是等价关系。

4.4 等价关系与划分

例4.21 设$A=\{1, 2, \dots, 8\}$，A上的关系R定义如下：

$$R=\{<x, y> \mid x, y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3\}$$

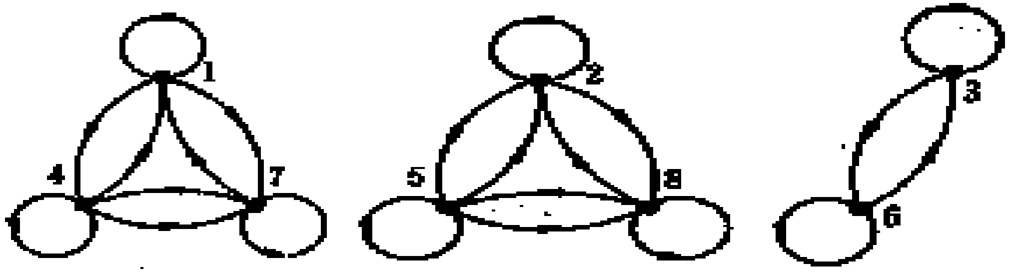
其中$x\equiv y \pmod 3$叫做x与y模3相等，即x除以3的余数与y除以3的余数相等或$x-y$可被3整除。可以验证R为A上的等价关系：

（1）自反：$\forall x\in A$，$x\equiv x \pmod 3$，即$<x, x>\in R$。

（2）对称：$\forall x, y\in A$，若$x\equiv y \pmod 3$即$<x, y>\in R$，则$y\equiv x \pmod 3$即$<y, x>\in R$。

（3）传递：$\forall x, y, z\in A$，若$x\equiv y \pmod 3$且$y\equiv z \pmod 3$，则$x\equiv z \pmod 3$。

该关系的关系图如下：



4.4 等价关系与划分

定义4.14 设R为非空集合A上的等价关系，∀x∈A，令

$$[x]_R=\{y \mid y\in A\wedge xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类，简称为x的等价类，简记为[x]。x的等价类就是A中所有与x等价的元素构成的集合。

如例4.21中的等价类有：

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

4.4 等价关系与划分

定理4.19 设R是非空集合A上的等价关系，则

（1）∀x∈A，必定有[x]≠∅且[x]⊆A。

（2）∀x, y∈A，如果xRy，那么[x]=[y]。

（3）∀x, y∈A，如果x $\tilde{R}$ y，那么[x]∩[y]= ∅。

（4） $\bigcup_{x\in A}[x] = A$

定义4.15 设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类为元素构成的集合称为A关于R的商集，记作A/R，表示为

$$A/R = \{ [x]_R \mid x\in A\}$$

例4.21中A关于R的商集是：

$$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$$

4.4 等价关系与划分

定义4.16 设A是非空集合，若A的子集族π（以A的子集为元素构成的集合）满足以下条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\forall x \forall y(x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

（3）$\bigcup_{x \in \pi} x = A$

则称π为A的一个划分，且称π中的元素为A的划分块。

例4.22 设A={1, 2, 3}，判断下列子集族是否为A的划分？

$\pi_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$，$\pi_2 = \{\{1\}, \{1, 3\}\}$

$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$，$\pi_4 = \{\{1, 2, 3\}\}$

$\pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$，$\pi_6 = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3\}\}$

根据定义4.16可以判断π_3，π_4，π_5为集合A的划分，其他都不是A的划分。

4.4 等价关系与划分

根据等价类的性质（定理4.19）以及划分的定义（定义4.16），显然有下面的结论：

（1）商集就是A的一个划分，等价类就是划分块。如例4.21中的商集$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$是$A$的一个划分。

（2）给定集合A上的一个等价关系R决定了A的一个划分，并且不同的等价关系将对应于不同的划分。

（3）给定集合A的一个划分确定该集合上的一个等价关系。

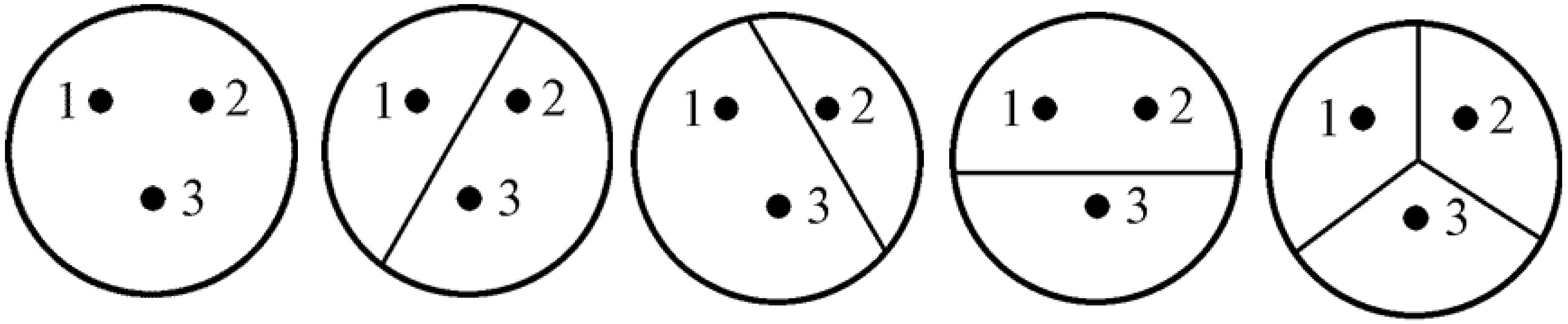
A上的等价关系与A的划分是一一对应的：

$$\boxed{A\text{上的等价关系}} \xLeftrightarrow{\text{一一对应}} \boxed{A\text{的划分}}$$

4.4 等价关系与划分

例4.24 求出A={1, 2, 3}上所有的等价关系。

解：先求出A的所有的划分，这些划分与A上的等价关系之间的一一对应是:



π_1 π_2 π_3 π_4 π_5

$\pi_1 = \{\{1, 2, 3\}\}$ $\qquad R_1 = E_A$

$\pi_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ $\qquad R_2 = \{<2, 3>, <3, 2>\} \cup I_A$

$\pi_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$ $\qquad R_3 = \{<1, 3>, <3, 1>\} \cup I_A$

$\pi_4 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ $\qquad R_4 = \{<1, 2>, <2, 1>\} \cup I_A$

$\pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ $\qquad R_5 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>\} = I_A$

小结

（1）等价关系同时具有自反、对称和传递性。

（2）可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是等价关系。

（3）等价类的定义与性质。

（4）商集的定义。

（5）划分的定义。

（6）A上的等价关系与A的划分是一一对应的。

（7）由给定的划分确定其对应的等价关系共有3种方法：

① 通过集合运算求。

② 利用关系矩阵求。

③ 利用关系图求。

4.5 相容关系与覆盖

- 相容关系：同时具有自反性和对称性。

4.5 相容关系与覆盖

定义4.17 设R为非空集合A上的关系，如果R是自反的和对称的，则称R为A上的相容关系。

根据该定义，相容关系有以下三个性质：

（1）所有的等价关系都是相容关系。

（2）相容关系的关系矩阵主对角线全为1且是对称矩阵。

（3）相容关系的关系图每一个节点上都有环，且每两个不同节点间如果有边，一定有方向相反的两条边。

例4.25 设$A=\{2166, 243, 375, 648, 455\}$，定义该集合上的关系$R$为：

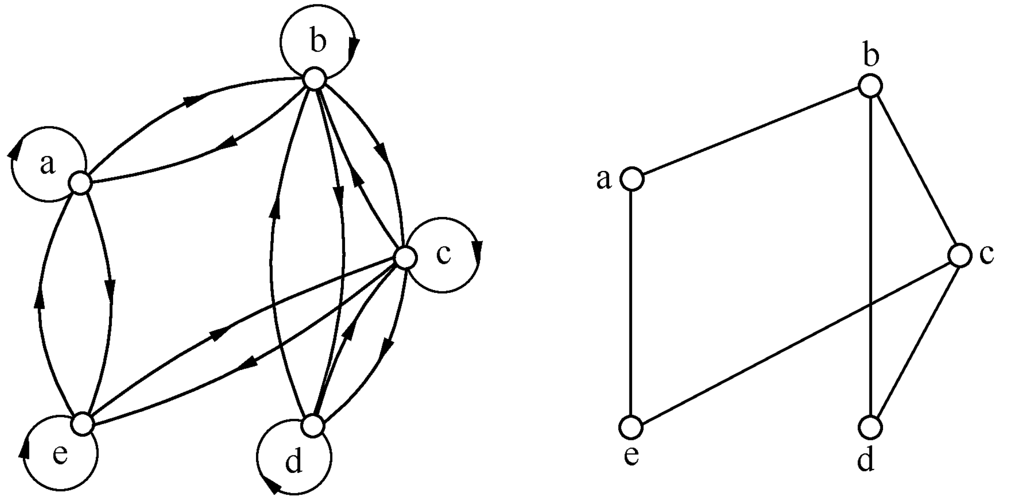
$$R=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\wedge x\text{和}y\text{至少有一个相同的数码}\}$$

显然，R是自反的和对称的，但它不是可传递的，故R是A上的一个相容关系。

4.5 相容关系与覆盖

相容关系的图形表示中，每个环不必画出，两个元素之间方向相反的有向边用一条无向边替代，这样的图称为相容关系的简化关系图。

例4.26 设集合A={a, b, c, d, e}，R={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <e, e>, <a, b>, <b, a>, <a, e>, <e, a>, <b, c>, <c, b>, <b, d>, <d, b>, <c, d>, <d, c>, <c, e>, <e, c>}，易知R是A上的相容关系，则其关系图和简化关系图如下：



（a）　　　　（b）

4.5 相容关系与覆盖

定义4.18 设R是非空集合A上的相容关系，集合$C \subseteq A$，若对任意的$x, y \in C$都有xRy成立，则称C是由相容关系R产生的相容类。

如果R是A上的相容关系, C是由相容关系R产生的相容类,从定义可看出:

（1）相容类C一定是A的子集。

（2）因为相容关系R是自反的，即$\forall x \in A$， 有xRx，所以$\{x\}$是由相容关系R产生的一个相容类，即A中的任何元素组成的单元素集是由相容关系R产生的一个相容类。

定义4.19 设R是非空集合A上的相容关系，C是R产生的相容类。如果它不是其他任何相容类的真子集，则称C为最大相容类，记为C_R。

根据定义4.19，最大相容类C_R具有如下的性质：

（1）C_R中任意元素x与C_R中的所有元素都有相容关系R。

（2）$A - C_R$中没有一个元素与C_R中的所有元素都有相容关系R。

4.5 相容关系与覆盖

利用相容关系的简化关系图求最大相容类的方法：

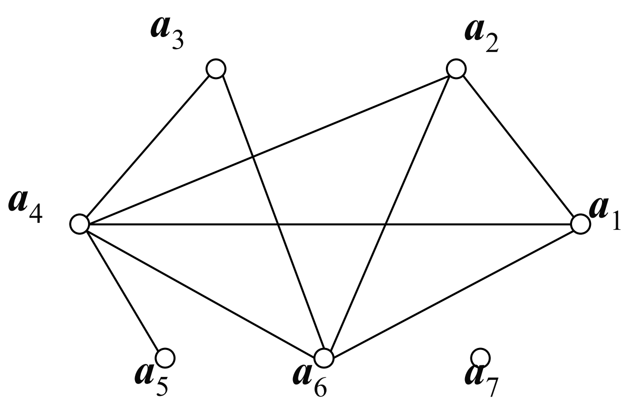
（1）最大完全多边形的顶点构成的集合是最大相容类。

（2）孤立点构成的集合是最大相容类。

（3）如果一条边不是任何完全多边形的边，则它的两个端点构成的集合是最大相容类。

❖ 例4.28 设给定相容关系的简化关系图如下图所示，写出其所有最大相容类。

解：最大相容类为$\{a_1, a_2, a_4, a_6\}$，$\{a_3, a_4, a_6\}$，$\{a_4, a_5\}$，$\{a_7\}$。



4.5 相容关系与覆盖

定理4.20 设R是非空有限集合A上的相容关系，C是R产生的相容类，那么必存在最大相容类C_R，使得$C \subseteq C_R$。

定义4.20 设A是非空集合，若A的子集族π满足以下条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\bigcup_{x \in \pi} x = A$

则称π为集合A的一个**覆盖**。

定理4.21 设A是有限集合，R是A上的相容关系，由R产生的所有最大相容类构成的集合是A的覆盖，叫作集合A的**完全覆盖**，记为$C_R(A)$。

4.5 相容关系与覆盖

定理4.22 给定集合A的覆盖$\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$，则由它确定的关系R= $A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\dots\cup A_n\times A_n$是A上的相容关系。

定理4.23 集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

小结

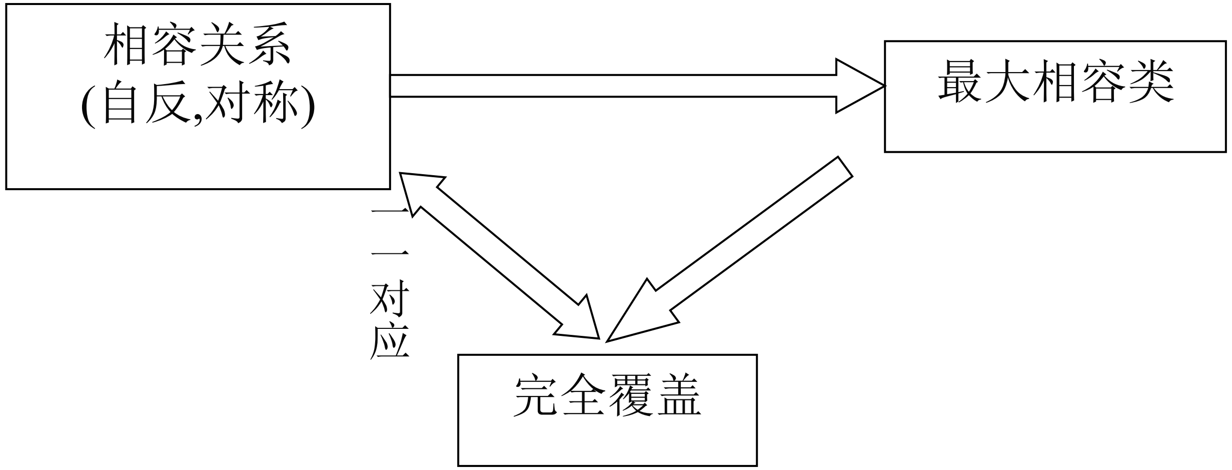
（1）相容关系同时具有自反、对称性。

（2）可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是相容关系。

（3）相容类、最大相容类的定义。

（4）覆盖的定义，完全覆盖。

（5）覆盖与相容关系之间不具有一一对应关系；集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。



4.6 偏序关系

- 偏序关系：同时具有自反、反对称和传递性

4.6 偏序关系

定义4.21 设R为非空集合A上的一个二元关系，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系，记作≼。设≼是偏序关系，若<x, y>∈≼，则记作x≼y，读作x“小于或等于” y。集合A与A上的偏序关系≼一起组成的有序对<A, ≼>叫做偏序集。

如以下关系都是偏序关系：

（1）非空集合A上的恒等关系I_A。

（2）实数集R上的“≤”、“≥”关系。

（3）正整数集$Z+$上的整除关系。

例4.30 设R是非空集合A上的一个二元关系，求证若R是一个偏序关系，则其逆关系R^{-1}也是一个偏序关系(练习)。

因为R是一个偏序关系，则它具有自反、反对称和传递性，容易证明R^{-1}也具有自反、反对称和传递性。故R^{-1}也是一个偏序关系。

4.6 偏序关系

定义4.22 设<A, ≼>为偏序集，定义

（1）$\forall x, y \in A$，$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$，x<y读作x“小于”y，这里所说的“小于”是指在偏序中x排在y的前边。

（2）$\forall x, y \in A$，x与y可比$\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

例如，$<A, \preccurlyeq>$是偏序集，其中$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，是A上的整除关系，则有

（1）1<2<4，1<3等。

（2）1=1，2=2，3=3等。

（3）2与3是不可比的。

4.6 偏序关系

定义4.23 设<A, ≤>为偏序集，若∀x, y∈A，x与y都是可比的，则称≤为A上的全序关系（或线序关系）。且称<A, ≤ >为全序集。

例如，集合$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$上的

（1）“小于等于”关系是全序关系，因为任何两个数总是可比大小的。

（2）“整除关系”不是全序关系，因为2与3是不可比的。

4.6 偏序关系

定义4.24 设<A, ≼ >为偏序集，对于任意的x, y∈A，如果x < y并且不存在z∈A使得x<z<y，则称y盖住x。作为集合A上的一个二元关系，盖住关系COV A可表示为：

$$\mathrm{COV}\ A=\{<x, y> \mid x, y \in A \wedge y\text{盖住}x\}$$

根据定义4.24，$\forall<x, y>$，

$<x, y>\in \mathrm{COV}\ A$

$\Leftrightarrow y$盖住x

$\Rightarrow x \preccurlyeq y$

$\Leftrightarrow <x, y>\in \preccurlyeq$

所以$\mathrm{COV}\ A \subseteq \preccurlyeq$。

4.6 偏序关系

对于偏序集<A, ≤ >，它的盖住关系COV A是唯一的，所以可以利用盖住关系作图，表示该偏序集<A, ≤ >。这个图叫作哈斯图。

偏序集<A, ≤>的哈斯图的画法如下：

（1）用“∘”表示A中的每一个元素；

（2）$\forall x, y \in A$，若$x<y$，则把x画在y的下面；

（3）$\forall x, y \in A$，若y盖住x，则用一条线段连接x和y。

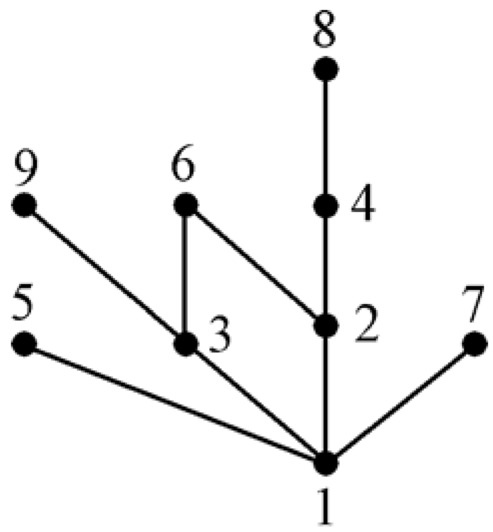
4.6 偏序关系

例32　画出偏序集<{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, $R_{整除}$>和<P({ a, b, c }), $R_{\subseteq}$>的哈斯图.

解:

COV({ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }) ={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<1,5>,<2,6>, <3,6>,<1,7>,<4,8>,<3,9>}

偏序集<{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, $R_{整除}$>的哈斯图如右图所示.



$\langle\{1,2,\cdots,9\},R_{整除}\rangle$

4.6 偏序关系

P({a, b, c}) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}。

P({a, b, c})上的盖住关系为：

COV *P*({a, b, c}) = {<∅, {a}>, <∅, {b}>, <∅, {c}>,

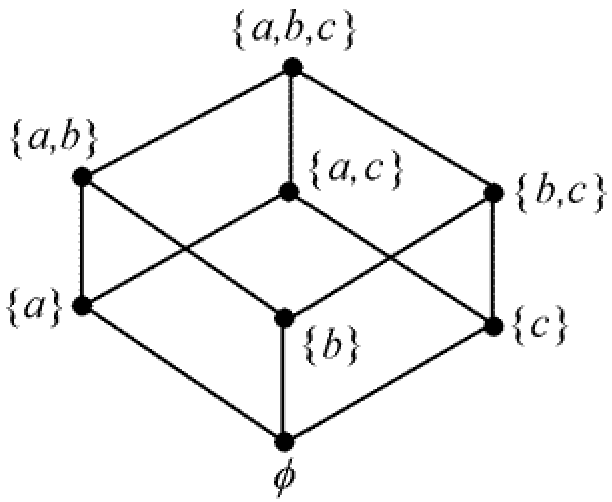
<{a}, {a, b}>, <{a}, {a, c}>,

<{b}, {a, b}>, <{b}, {b, c}>,

<{c}, {a, c}>, <{c}, {b, c}>,

<{a, b}, {a, b, c}>, <{a, c}, {a, b, c}>, <{b, c}, {a, b, c}>}

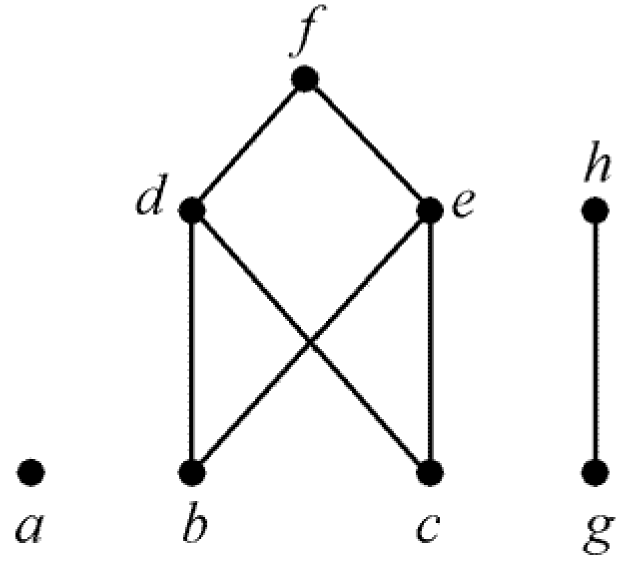
哈斯图如右图所示：



$\langle P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq}\rangle$

4.6 偏序关系

例33　已知偏序集<A，R>的哈斯图如下图，试求出集合A和关系R的表达式.



解

A = { a, b, c, d, e, f, g, h }

R = { <b,d>, <b,e>, <b,f>, <c,d>, <c,e>, <c,f>, <d,f>, <e,f>, <g,h> } ∪ I_A

4.6 偏序关系

定义4.25 设<A, ≼>为偏序集，B⊆A，y∈B，

（1）若$\forall x(x\in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立，则称y是B的最小元。

（2）若$\forall x(x\in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立，则称y是B的最大元。

（3）若$\neg\exists x(x\in B \wedge x \preccurlyeq y)$成立，则称y是B的极小元。

（4）若$\neg\exists x(x\in B \wedge y \preccurlyeq x)$成立，则称y是B的极大元。

- 最小元是B中最小的元素, 它与B中其它元素都可比;
- 极小元不一定与B中元素都可比, 只要没有比它小的元素, 它就是极小元.
- 对于有穷集B, 极小元一定存在, 而且还可能有多个.
- 若B中只有一个极小元, 则它一定是B的最小元.
- 类似的, 极大元与最大元也有这种区别.

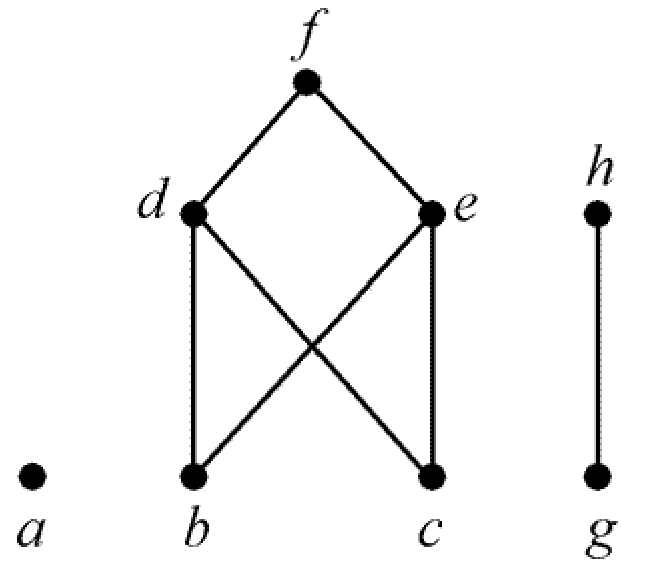
4.6 偏序关系

当B＝A时，B的最大元、最小元、极大元和极小元称为偏序集<A, ≼ >的最大元、最小元、极大元和极小元。

定理4.24 设<*A*, ≼ >是偏序集，$B \subseteq A$，如果B有最大元（最小元），则必唯一。

4.6 偏序关系

例34　设偏序集<A，≤>如下图所示，求A的极小元，最小元，极大元，最大元.



解　　极小元：a，b，c，g.

极大元：a，f，h.

没有最小元与最大元.

由这个例子可以知道，哈斯图中的孤立顶点既是极小元也是极大元.

4.6 偏序关系

例35　设X为集合，$A=P(X)-\{\phi\}-\{X\}$，且$A\neq\phi$.
若$|X|=n$，问：

(1) 偏序集$\langle A, R_{\subseteq}\rangle$是否存在最大元？

(2) 偏序集$\langle A, R_{\subseteq}\rangle$是否存在最小元？

(3) 偏序集$\langle A, R_{\subseteq}\rangle$中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由.

解

因为**$A=P(X)-\{\phi\}-\{X\}$**，且**$A\neq\phi$**，所以**$n\geq 2$**。

$\langle A, R_{\subseteq}\rangle$不存在最小元和最大元，因为$n\geqslant 2$。

考察幂集$P(X)$的哈斯图：

最底层的顶点是空集，记作第0层；

第1层是单元集；

第2层是二元子集；

…

第n-1层是X的n-1元子集；

第n层(最高层)只有一个顶点X.

偏序集$\langle A, R_{\subseteq}\rangle$与$\langle P(X), R_{\subseteq}\rangle$相比，恰好缺少第0层与第n层.

因此，$\langle A, R_{\subseteq}\rangle$的极小元就是X的所有单元集$\{x\}(x\in X)$，极大元恰好少一个元素$X-\{x\}(x\in X)$.

4.6 偏序关系

定义4.26 设$<A, \leqslant>$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in A$，

（1）若$\forall x(x\in B \rightarrow x \leqslant y)$成立，则称y是B的上界。

（2）若$\forall x(x\in B \rightarrow y \leqslant x)$ 成立，则称y是B的下界。

（3）令C={y | y为B的上界}，则称C的最小元为B的最小上界或上确界。

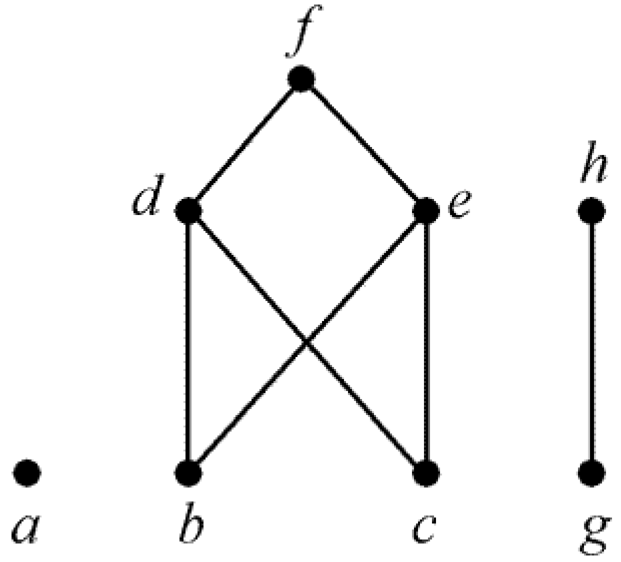
（4）令D={y | y为B的下界}，则称D的最大元为B的最大下界或下确界。

由上面定义可知:

- B的最小元一定是B的下界, 同时也是B的最大下界;
- B的最大元一定是B的上界, 同时也是B的最小上界.
- 反过来不一定正确, B的下界不一定是B的最小元, 因为它可能不是B中的元素, B的上界也不一定是B的最大元.
- B的上界, 下界, 最小上界, 最大下界都可能不存在.如果存在, 最小上界与最大下界是唯一的.

4.6 偏序关系

考虑下图中的偏序集. 令B = { b, c, d }, 求B的极小元、最小元、极大元、最大元、下界, 最大下界, 上界, 最小上界. (练习)



小结

（1）偏序关系同时具有自反、反对称和传递性，可以通过关系矩阵和关系图判断某关系是否是偏序关系。

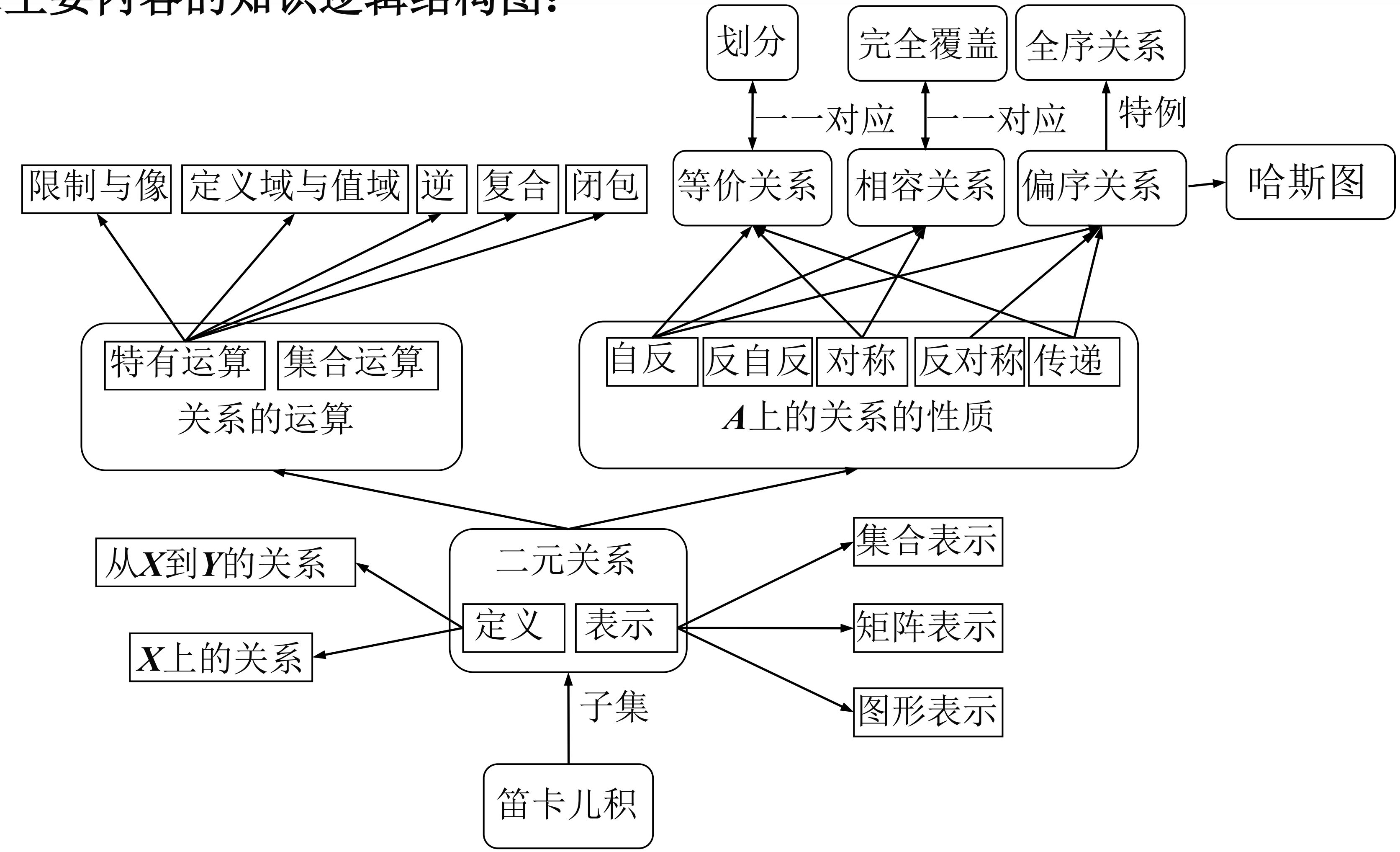
（2）偏序集、全序关系、小于、可比和盖住等常用的概念。

（3）哈斯图是偏序关系的简化关系图，哈斯图的画法。

（4）偏序集中的一些特殊元素的定义、性质与求解：最大元、最小元、极大元和极小元；上界、上确界、下界和下确界。

本章小结

本章主要内容的知识逻辑结构图：



常见题型

- 求某关系的集合表示；画出某关系的关系矩阵或关系图
- 关系的运算，可利用集合表示、关系图或关系矩阵求得运算结果
- 判断或证明关系的性质。
- 计算关系的闭包。
- 根据等价关系求集合的划分，或由集合的划分求集合上的等价关系。
- 画出偏序关系的哈斯图，或根据哈斯图求偏序关系的集合表示。
- 求最大元、最小元、极大元和极小元；求上界、最小上界、下界和最大下界。

关系性质的证明方法

1. 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$

前提　　推理过程　　结论

2. 证明R在A上对称

任取$\langle x, y\rangle$,

$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$

前提　　推理过程　　结论

关系性质的证明方法

3. 证明R在A上反对称

任取$\langle x, y\rangle$,

$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow x = y$

前提　　推理过程　　结论

4. 证明R在A上传递

任取$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle$,

$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$

前提　　推理过程　　结论

关系等式或包含式的证明方法

证明中用到关系运算的定义和公式，如：

- $x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(\langle x, y\rangle \in R)$
- $y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(\langle x, y\rangle \in R)$
- $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R^{-1}$
- $\langle x, y\rangle \in R\circ S \Leftrightarrow \exists t\ (\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in S)$
- $\langle x, y\rangle \in R\upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R$
- $y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R)$
- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots$

例题

例4.40 R是二元关系，且$R=R\circ R\circ R\circ R$，选择下面的哪一个一定是传递的。

（1）R　　（2）$R\circ R$　　（3）$R\circ R\circ R$　　（4）$R\circ R\circ R\circ R$

解　根据定理4.12知，若二元关系R是传递的，一定有$R\circ R\subseteq R$。

由于$R=R\circ R\circ R\circ R$，所以

$$R\circ R\circ R=R\circ R\circ(R\circ R\circ R\circ R)=(R\circ R\circ R)\circ(R\circ R\circ R)$$

于是，R的三次幂一定是传递的。那么正确答案是（3）。

例题

例4.41 设A={1, 2, 3, 4, 5}，那么 A上有多少个是等价关系？

解由于某集合上的划分与该集合上的等价关系之间是一一对应的关系，所以A有多少种划分就有多少个等价关系。以划分中等价类中元素数目分类：

① 等价类中元素最多只有一个的划分只有1种；

② 等价类中元素最多有两个的划分共有$C_5^2+C_5^2\times C_3^2/P_2^2$=25种；

③等价类中元素最多有三个的划分共有 $C_5^3\times 2$ =20种;

④ 等价类中元素最多有四个的划分共有C_5^4=5种；

⑤ 等价类中元素最多有五个的划分只有1种。

因此，总共的等价关系共有1+25+20+5+1=52种。

例题

例4.42 已知Z^+及Z^+上的关系R如下，

$$R=\{<ni, nj> \mid ni/nj\text{能表示成}2^n\text{形式}，ni, nj \in Z^+，n\in Z\}$$

试证明R是等价关系，并指出等价类是什么。

解：（1）$\forall ni\in Z^+$，有$ni/ni = 1 = 2^0$，故$<ni, ni>\in R$，所以R是自反的。

（2）$\forall ni, nj\in Z^+$，若$<ni, nj>\in R$，即$ni/nj=2^k$（k是整数），所以$nj/ni=2^{-k}$，所以$<nj, ni>\in R$，所以R是对称的。

（3）$\forall ni, nj, np\in Z^+$，若$<ni, nj>\in R\wedge<nj, np>\in R$，则$ni/nj=2^{k1}\wedge nj/np=2^{k2}$（$k1, k2$是整数），则$ni/np=2^{k1+k2}$，则$<nj, np>\in R$，故$R$是传递的。

总之，R是Z^+上的等价关系，等价类是：

$[1]_R=\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\}$

$[3]_R=\{3, 3\times2^1, 3\times2^2, \ldots, 3\times2^n, \ldots\}$

$[5]_R=\{5, 5\times2^1, 5\times2^2, \ldots, 5\times2^n, \ldots\}$

……

例题

例4.44 图4.29（a）为一偏序集<*A*, *R*>的哈斯图。

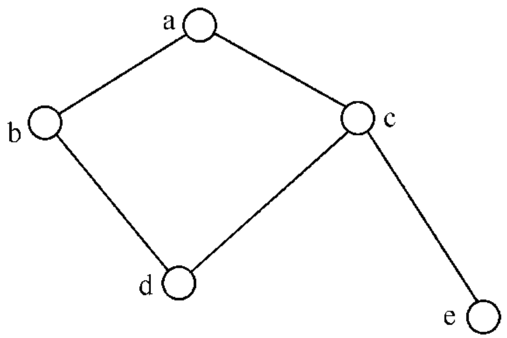
（1）下列命题哪些为真？

a*R*b，d*R*a，c*R*d，c*R*b，b*R*e，a*R*a，e*R*a

（2）恢复R的关系图。

（3）指出A的最大、最小元，极大、极小元。

（4）求出子集*B*1={c, d, e}，*B*2={a,b, c, d}，*B*3={b, c, d, e}的上、下界，上、下确界。



（a）