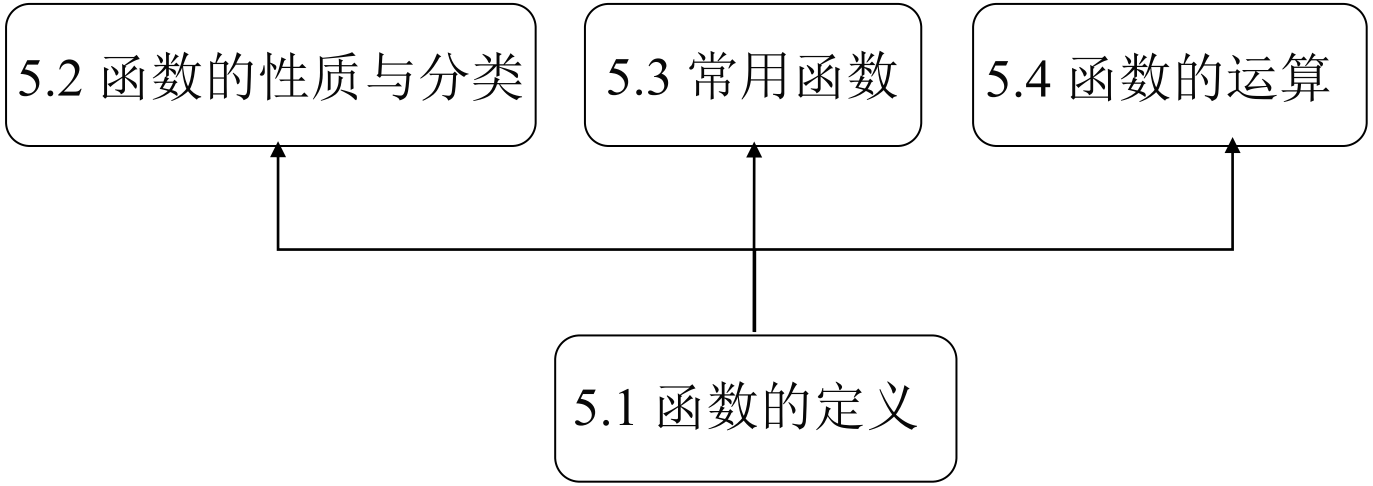
第五章 函数

函数部分知识逻辑概图



5.1 函数的定义

函数是一种具有特殊性质的二元关系。

5.1 函数的定义

定义5.1 设f为二元关系，若对任意的$x \in domf$都存在唯一的$y \in ranf$使得xfy成立，则称f为函数。对于函数f，如果$<x, y> \in f$，常记作$y = f(x)$，x称为自变量，y称为x在f作用下的像（或函数值）。

函数是一种特殊的二元关系，特点如下：

（1）函数的定义中强调像y是唯一的，称作像的唯一性。像的唯一性可以描述为：设$f(x_1) = y_1$且$f(x_2) = y_2$，如果$x_1 = x_2$，那么$y_1 = y_2$；或者如果$y_1 \neq y_2$，那么，$x_1 \neq x_2$。

（2）该定义并不排斥多个元素拥有相同的像的情况。即若$x_1 \neq x_2$，可以有$f(x_1) = f(x_2)$。

例5.1 判断如下关系是否为函数？

$f_1 = \{<x_1, y_1>, <x_2, y_1>, <x_3, y_2>\}$，$f_2 = \{<x_1, y_1>, <x_1, y_2>, <x_2, y_1>, <x_3, y_2>\}$

解：f_1是函数，满足函数的定义。f_2不是函数，因为对应于x_1，存在y_1和y_2，使得$x_1 f y_1$、$x_1 f y_2$同时成立，与函数定义矛盾。

5.1 函数的定义

定义5.2 设f、g为函数，则

$$f = g \Leftrightarrow f \subseteq g \wedge g \subseteq f$$

由该定义可知，若两函数f和g相等，一定满足如下两条件：

（1）dom$f$ = domg

（2）$\forall x \in$ dom$f$ = domg，都有$f(x) = g(x)$。

例如函数$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$和$g(x) = x$-1是不相等的，因为dom$f = \{x \mid x \in R \wedge x \neq -1\}$

而domg = R，dom$f \neq$ domg。所以$f \neq g$。

定义5.3 设A，B是集合，如果函数f满足以下条件：

（1）$dom f = A$

（2）$ran f \subseteq B$

则称f为从A到B的函数，记作f: A→B。

5.1 函数的定义

定义5.4 设A，B为集合，所有从A到B的函数的集合记作B^A，读作“B上A”，集合表示为

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$$

例5.5 设$A = \{a, b, c\}$，$B=\{\alpha, \beta\}$，求B^A？

解：$A\times B=\{<a, \alpha>, <a, \beta>, <b, \alpha>, <b, \beta>, <c, \alpha>, <c, \beta>\}$，$A\times B$有$2^6$个可能的子集，但其中只有$2^3$个子集能成为从$A$到$B$的函数，分别为$f_0=\{<a, \alpha>, <b, \alpha>, <c, \alpha>\}$，$f_1=\{<a, \alpha>, <b, \alpha>, <c, \beta>\}$，

$f_2=\{<a, \alpha>, <b, \beta>, <c, \alpha>\}$，$f_3=\{<a, \alpha>, <b, \beta>, <c, \beta>\}$，

$f_4=\{<a, \beta>, <b, \alpha>, <c, \alpha>\}$，$f_5=\{<a, \beta>, <b, \alpha>, <c, \beta>\}$，

$f_6=\{<a, \beta>, <b, \beta>, <c, \alpha>\}$，$f_7=\{<a, \beta>, <b, \beta>, <c, \beta>\}$

所以$B^A = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$。 ，

5.1 函数的定义

定理5.1 设A和B都为有限集，$|A| = m$，$|B| = n$，且$m, n > 0$，则从A到B共有n^m个不同的函数，即$|B^A|=n^m$。

当A或B中至少有一个集合是空集时，可以分成下面三种情况：

（1）$A = \varnothing$且$B = \varnothing$，则$B^A = \varnothing^\varnothing = \{\varnothing\}$。

（2）$A = \varnothing$且$B \neq \varnothing$，则$B^A = B^\varnothing = \{\varnothing\}$。

（3）$A \neq \varnothing$且$B = \varnothing$，，则$B^A = \varnothing^A = \varnothing$。

定义5.5 设函数$f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，

（1）令$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$，称$f(A_1)$为$A_1$在$f$下的像。特别当$A_1=A$时，称$f(A)$为函数的像。

（2）令$f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$，称$f^{-1}(B_1)$为$B_1$在$f$下的完全原像。

5.1 函数的定义

定理5.2 设f是从X到Y的函数，A、B都是X的子集，则

（1）$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

（2）$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

例5.7 设$X=\{a, b, c\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$，$f: X \to Y$为：

$$f(a) = 1，f(b) = f(c) = 2$$

令$A=\{a, b\}$，$B=\{c\}$，于是

$$A \cap B=\varnothing，f(A \cap B)=\varnothing$$

但是

$$f(A) \cap f(B)=\{1, 2\} \cap \{2\} \neq \varnothing$$

这表明$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$。

小结

（1）函数是一种具有特殊性质的二元关系，即函数值的唯一性。

（2）函数相等就是集合相等。

（3）从A到B的函数$f: A\to B$。

（4）函数的图形表示。

（5）设A和B都为有限集，$|B^A|=|B|^{|A|}$。

（6）像和完全原像。

5.2 函数的性质与分类

具有不同性质的三种特殊的函数：满射、单射和双射。

5.2 函数的性质与分类

定义5.6 设函数f: A→B，

（1）若ranf = B，则称f: A→B是满射的。

（2）若∀y ∈ ranf，都存在唯一的x∈A，使得f(x) = y，则称f: A→B是单射的。

（3）若f: A→B既是满射的，又是单射的，则称f: A→B是双射的（或一一映射）。

由定义易得出：

（1）若$f: A\to B$是满射的，则对于$\forall y\in B$，都存在$x\in A$，使得$f(x) = y$。

（2）若$f: A\to B$是单射的，则对于$\forall x_1, x_2\in A$，

① 若$x_1 \neq x_2$，一定有$f(x_1) \neq f(x_2)$。或者

② 若$f(x_1) = f(x_2)$，一定有$x_1 = x_2$。

5.2 函数的性质与分类

定理5.3 设A和B为有限集，若A和B的元素个数相等，即$|A|=|B|$，从A到B的函数f是单射当且仅当它是一个满射。

例5.9 判断下面函数是否为满射，单射，双射，为什么？

（1）$f:\{1,2\}\to\{0\}$，$f(1)=f(2)=0$。

（2）$f: N\to N$，$f(x)=2x$。

（3）$f: Z\to Z$，$f(x)=x+1$。

解：（1）$\mathrm{ran}f=\{0\}$，所以f是满射。$1\neq 2$，但$f(1)=f(2)$，所以f不是单射。不是双射。

（2）$\mathrm{ran}f=\{2x \mid x\in N\}\subset N$,所以$f$不是满射。对于任意的$x_1,x_2\in N$,若$f(x_1)=f(x_2)$, 即$2x_1=2x_2$, 则有$x_1=x_2$。所以$f$是单射。所以$f$不是双射。

（3）$\mathrm{ran}f=Z$，所以f是满射。对于任意的$x_1,x_2\in Z$，若$f(x_1)=f(x_2)$，即$x_1+1=x_2+1$，则可得出$x_1=x_2$。所以f是单射。所以f是双射。

小结

满射、单射和双射三种性质的定义、判断与证明。

$$\text{函数的性质}\left\{\begin{array}{c}\text{满射}\\ \text{单射}\\ \text{双射}\end{array}\right\}\longrightarrow\text{判断与证明}$$

5.3 常用函数

- 本节介绍几个常用函数。

5.3 常用函数

定义5.7

（1）设$f: A \to B$，若$\exists c \in B$，使得$\forall x \in A$，都有$f(x) = c$，则称$f: A \to B$是常函数。

（2）A上的恒等关系I_A是从A到A的函数，称为A上的恒等函数，对于所有的$x \in A$都有$I_A(x) = x$。

（3）设$<A, \leqslant>$，$<B, \leqslant>$为偏序集，$f: A \to B$，若$\forall x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 < x_2$就有$f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称f为单调递增的；若$\forall x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 < x_2$就有$f(x_1) < f(x_2)$，则称f为严格单调递增的。类似地也可以定义单调递减和严格单调递减的函数，它们统称为单调函数。

5.3 常用函数

（4）设A为集合，对于任意的$A' \subseteq A$，A'的特征函数定义为

$$\chi_{A'}(x)=\begin{cases}1 & x\in A' \\ 0 & x\in A-A'\end{cases}$$

（5）设R是A上的等价关系，令

$f: A \to A/R$且

$f(x) = [x]$，$\forall x \in A$

称f是从A到商集A/R的自然映射。

小结

本节介绍了常函数、恒等函数、集合的特征函数和自然映射等常用函数的定义与性质。

常用函数
- 常函数
- 恒等函数
- 集合的特征函数
- 自然映射
- 单调递增(减)函数和严格单调递增(减)函数

5.4 函数的运算

- 本节介绍函数的复合运算和逆运算及其基本性质和运算规律。

5.4.1 复合运算

函数的复合就是关系的复合。

定理5.4 设 f、g为函数，则$f \circ g$也是函数，且具有以下性质：

（1）$dom(f \circ g) = \{x \mid x \in domf \wedge f(x) \in domg\}$

（2）$\forall x \in dom(f \circ g)$，有$f \circ g(x)=g(f(x))$

例5.12 令

$f: R^+ \to R$，$f(x) = \ln x$

$g: R \to R$，$g(x) = x+1$

则有，

$dom(f \circ g) = R^+$

$\forall x \in dom(f \circ g)$，$f \circ g(x) = g(f(x)) = \ln x + 1$

$dom(g \circ f) = (-1,+\infty)$

$\forall x \in dom(g \circ f)$，$g \circ f(x) = f(g(x)) = \ln(x+1)$

5.4.1 复合运算

推论1 设f，g，h为函数，则$(f\circ g)\circ h$和$f\circ(g\circ h)$都是函数，且

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

推论2 设f: A→B，g: B→C，则$f\circ g$: A→C，且对任意的$x\in A$有

$$f\circ g(x)=g(f(x))。$$

定理5.5 设f: A→B，g: B→C，

（1）如果f: A→B，g: B→C都是满射的，则$f\circ g$: A→C也是满射。

（2）如果f: A→B，g: B→C都是单射的，则$f\circ g$: A→C也是单射。

（3）如果f: A→B，g: B→C都是双射的，则$f\circ g$: A→C也是双射。

定理5.5说明函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质。但该定理的逆命题不为真.

5.4.1 复合运算

定理5.6设f: A→B，g: B→C，

（1）如果f∘g: A→C是满射，则g: B→C一定是满射。

（2）如果f∘g: A→C是单射，则f: A→B一定是单射。

（3）如果f∘g: A→C是双射，则g: B→C一定是满射，f: A→B一定是单射。

例5.14 已知$A = \{x_1, x_2, x_3\}$，$B = \{y_1, y_2, y_3\}$，$C = \{z_1, z_2\}$。令

$$f = \{<x_1, y_1>, <x_2, y_2>, <x_3, y_2>\}$$

$$g = \{<y_1, z_1>, <y_2, z_2>, <y_3, z_2>\}$$

则有

$$f \circ g = \{<x_1, z_1>, <x_2, z_2>, <x_3, z_2>\}$$

可以看出$g: B \to C$和$f \circ g: A \to C$都是满射的，但$f: A \to B$不是满射。满足定理5.6（1）。

5.4.1 复合运算

定理5.7 设$f: A\rightarrow B$，则有

$$f = f\circ I_B = I_A\circ f$$

定理5.7说明了恒等函数在函数的复合运算中的特殊性质。特别有

$$\forall f \in A^A，\ f\circ I_A = I_A\circ f = f$$

5.4.2 逆运算

任何关系都存在逆关系，作为满足一定条件的二元关系，函数的逆关系不一定都是函数。

例如令

$$f = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$$

可求得

$$f^{-1} = \{\langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, c\rangle\},$$

显然f是函数，但f的逆关系f^{-1}不是函数。

5.4.2 逆运算

定理5.8 设f: $A \to B$是双射的，则f^{-1}是函数，并且是从B到A的双射函数。称双射函数f: A→B是可逆的，并称f^{-1}为f的反函数。

证：（1）先证f^{-1}是从B到A的函数$f^{-1}: B \to A$，且f^{-1}是满射的。

由关系的逆运算的性质（定理4.4）得

$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B$

$\mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$

f^{-1}是从B到A的关系。

对任意的$x \in \mathrm{dom}\, f^{-1}$，若同时存在$y_1, y_2$

$<x, y_1> \in f^{-1} \wedge <x, y_2> \in f^{-1}$

$\Leftrightarrow <y_1, x> \in f \wedge <y_2, x> \in f$（关系逆运算的定义）

$\Rightarrow y_1 = y_2$（f是单射的）

所以$f^{-1}: B \to A$是函数。

又由于$\mathrm{ran}\, f^{-1} = A$，所以$f^{-1}: B \to A$是满射的。

5.4.2 逆运算

（2）再证 $f^{-1}: B \to A$是单射的。

对任意的$x_1, x_2 \in \mathrm{dom}\, f^{-1}$，若有

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$

$\Leftrightarrow <x_1, y> \in f^{-1} \wedge <x_2, y> \in f^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x_1> \in f \wedge <y, x_2> \in f$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ （f是函数）

所以f^{-1}是单射的。

由（1）、（2）得$f^{-1}: B \to A$是双射的。

证毕。

5.4.2 逆运算

定理5.9 对任何双射函数f: $A\to B$及其反函数f^{-1}: $B\to A$，它们的复合函数都是恒等函数，且满足

$$f\circ f^{-1}=I_A，\ f^{-1}\circ f=I_B$$

证：由定理5.4的推论2得

$f^{-1}\circ f: B\to B$，$f\circ f^{-1}: A\to A$

对任意的$\langle x, y\rangle$，

$\langle x, y\rangle\in f\circ f^{-1}$

$\Rightarrow \exists u(\langle x, u\rangle\in f\wedge\langle u, y\rangle\in f^{-1})$

$\Rightarrow \exists u(\langle x, u\rangle\in f\wedge\langle y, u\rangle\in f)$

$\Rightarrow x=y\wedge x, y\in A$ （f是单射）

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in I_A$

所以$f\circ f^{-1}\subseteq I_A$。

5.4.2 逆运算

对任意的$<x, y>$，

$<x, y> \in I_A$

$\Rightarrow x = y \land x, y \in A$

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \land <y, u> \in f)$ （$f: A \rightarrow B$）

$\Rightarrow \exists u(<x, u> \in f \land <u, y> \in f^{-1})$

$\Rightarrow <x, y> \in f \circ f^{-1}$

所以$I_A \subseteq f \circ f^{-1}$ 。所以有$f \circ f^{-1} = I_A$。

同理可证$f^{-1} \circ f = I_B$

证毕。

5.4.2 逆运算

定理5.10 设f: A→B，g: B→A，则$f^{-1}=g$当且仅当$f\circ g=I_A$且$g\circ f=I_B$。

证：必要条件：

已知$g=f^{-1}$，这就是说f是可逆的，则有

$f\circ g=f\circ f^{-1}=I_A$

$g\circ f=f^{-1}\circ f=I_B$

充分条件：

已知$f\circ g=I_A$且$g\circ f=I_B$，由于I_A和I_B均为双射，由定理5.6知，f和g都是双射的。因此，f和g都是可逆的，均有反函数存在，于是

$g=I_B\circ g=(f^{-1}\circ f)\circ g=f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ I_A=f^{-1}$

证毕。

小结

本节介绍函数在复合运算和逆运算中所特有的性质：

（1）函数的复合仍然是函数，但函数的逆不一定是函数，只有双射函数的逆才是函数，并且是双射的。

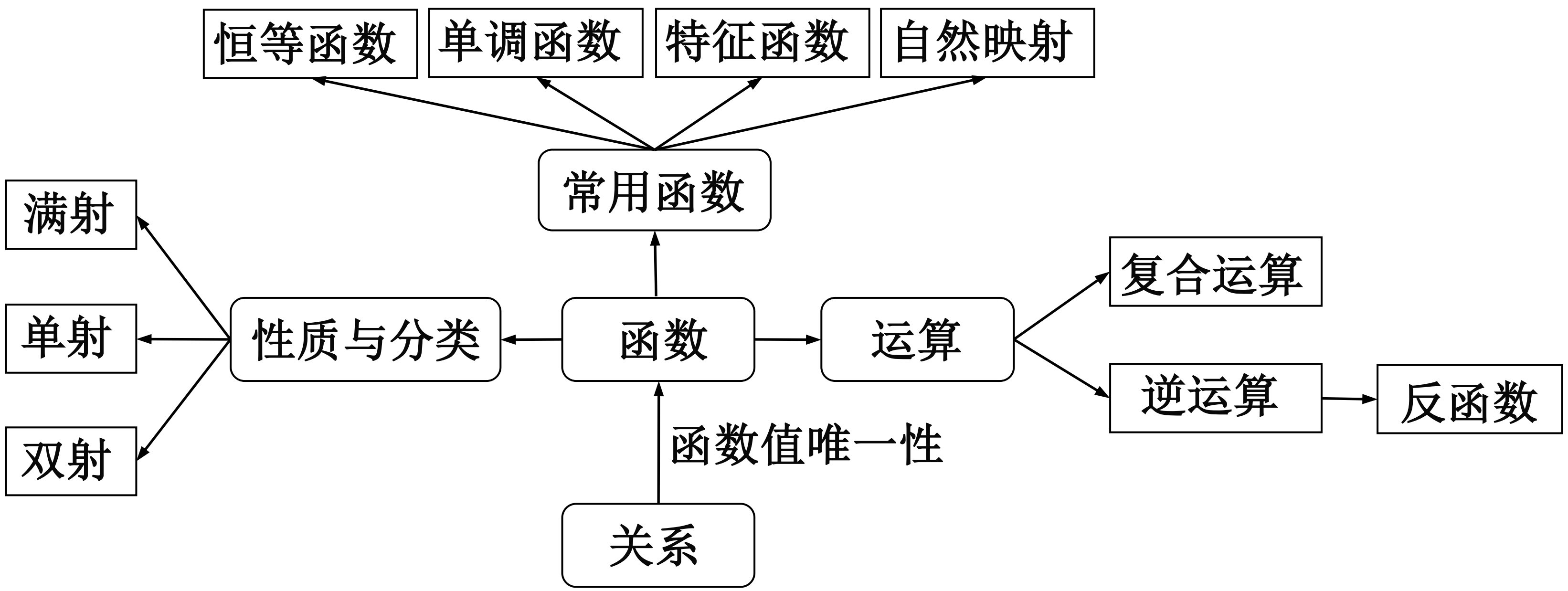
（2）函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质。

（3）反函数的定义与性质。

- 函数的运算
  - 复合
    - 函数的复合仍然是函数
    - $\forall x \in \mathrm{dom}(f \circ g), f \circ g(x) = g(f(x))$
    - 函数的复合运算能够保持函数的满射、单射和双射等性质
  - 逆
    - 函数的逆关系不一定都是函数
    - 只有双射函数f是可逆的，称f^{-1}为反函数，也是双射的
    - 对双射函数$f: A \to B$有$f \circ f^{-1} = I_A$，$f^{-1} \circ f = I_B$。

本章小结

在函数的定义中给出了一个关系*R*成为函数所必须满足的条件，介绍了一些如恒等函数、常函数、特征函数等常用函数。本章重点介绍了函数的运算、性质与分类。



常见题型

1）根据集合表示或图形表示等判断某个关系是否是函数。

2）证明函数间的关系如相等、包含等。

3）求函数的像和完全原像。

4）证明或判断函数的性质，即是否是满射的、单射的或双射的。

5）函数的复合运算和逆运算。

证明方法

1. 证明 $f: A \to B$是满射的方法： 任取 $y \in B$, 找到 x （即给出x的表示）或者证明存在$x \in A$，使得 $f(x)=y$.

2. 证明 $f: A \to B$是单射的方法

方法一 $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow x_1=x_2$$

推理前提　　推理过程　　推理结论

方法二 $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

推理前提　　推理过程　　推理结论

证明方法

3. 证明 $f:A\to B$不是满射的方法： 找到 $y\in B$, $y\notin \mathrm{ran}f$

4. 证明 $f:A\to B$不是单射的方法：找到 $x_1, x_2\in A$, $x_1\neq x_2$, 且

   $f(x_1)=f(x_2)$

第六章 集合的基数

集合的基数知识逻辑概图

6.2 基数的比较

方法 | 基数序列

↑

6.1 基数的基本概念

等势 | 基数 → 在第三篇代数结构中有应用

6.1 基本概念

定义6.1 设A和B是任意集合，若存在从A到B的双射，则称A与B是**等势的**，记为$A \approx B$。若A与B不等势，则记为$A \not\approx B$。

- 通俗地讲，集合的势是度量集合所含元素多少的量，集合的势越大，所含元素越多。

6.1 基本概念

可以证明，等势具有下列性质：自反性、对称性和传递性。

定理6.1 等势是任何集合族上的等价关系。

证：对任意的集合A，B，C，

（1）$A \approx A$

$I_A: A \to A$是A上的双射函数，因此$A \approx A$。等势关系满足自反性。

（2）若$A \approx B$，则$B \approx A$。

若$A \approx B$，则存在双射$f: A \to B$，则有$f^{-1}: B \to A$是双射，因而$B \approx A$。等势关系满足对称性。

（3）若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$。

若$A \approx B$，$B \approx C$，则存在双射$f: A \to B$，$g: B \to C$，则有$f \circ g: A \to C$是双射，故$A \approx C$。等势关系满足传递性。

综上可见，等势关系是个等价关系。

6.1 基本概念

一些等势集合的例子：

例6.1 下列集合是等势的。

（1）$N \approx Z \approx Q$

（2）$R \approx (0, 1) \approx (a, b)$，$a, b \in R$，$a<b$

证明见教材。

例6.2 设A为任意集合，则$P(A) \approx \{0, 1\}^{A}$。

证明见教材。

6.1 基本概念

定义6.2 设A为任意集合，如果存在自然数n，使得A ≈ {0, 1, 2,…, n−l}，则称A为有限集，否则称A为无限集。

例6.3 根据上述定义，有以下结论。

（1）$A=\{a, b, c\}$为一有限集。

（2）自然数集N为无限集。

证明见教材。

6.1 基本概念

基数的不完全归纳的描述性定义：

定义6.3

（1）对于有限集合A，存在自然数n，使得$A \approx \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$，则称$n$为$A$的基数（cardinal number），记作$|A|$（或card$A$）。即

$$|A| = n \text{（或card} A = n\text{）}$$

（2）设A为任意集合，如果有$A \approx N$，N为自然数集，则称集合A的基数为$\aleph_0$（读作“阿列夫零”）。即

$$|A| = \aleph_0 \text{（或card} A = \aleph_0\text{）}$$

显然，自然数集、整数集、偶数集、有理数集等集合的基数均为$\aleph_0$。

6.1 基本概念

基数的不完全归纳的描述性定义：

定义6.3（续）

（3）设A为任意集合，如果有$A \approx R$，R为实数集，则称集合A的基数为$\aleph$（读作“阿列夫”）。即

$$|A| = \aleph \text{（或} \mathrm{card} A = \aleph \text{）}$$

具有基数$\aleph$的集合常称为连续统（continuum）。

（4）存在着集合其基数大于$\aleph$（由6.2中定理6.5（康托定理））。

由（1）可知，有限集合的基数就是其所含元素的个数。两个有限集合A和B等势当且仅当A和B的元素个数相同。

例6.4 求证$|[0, 1]| = |(0, 1)| = \aleph$。

证明见教材。

6.1 基本概念

例6.5 求下列集合的基数。

（1）$T = \{x \mid x$是单词“BASEBALL”中的字母$\}$

（2）$B = \{x \mid x \in R \wedge x^2 = 9 \wedge 2x=8\}$

（3）$C = P(A)$，$A = \{1, 3, 5, 7\}$

解：

（1）$T = \{\mathrm{A, B, E, L, S}\}$，得$|T| = 5$。

（2）$B = \varnothing$，得$|B| = 0$。

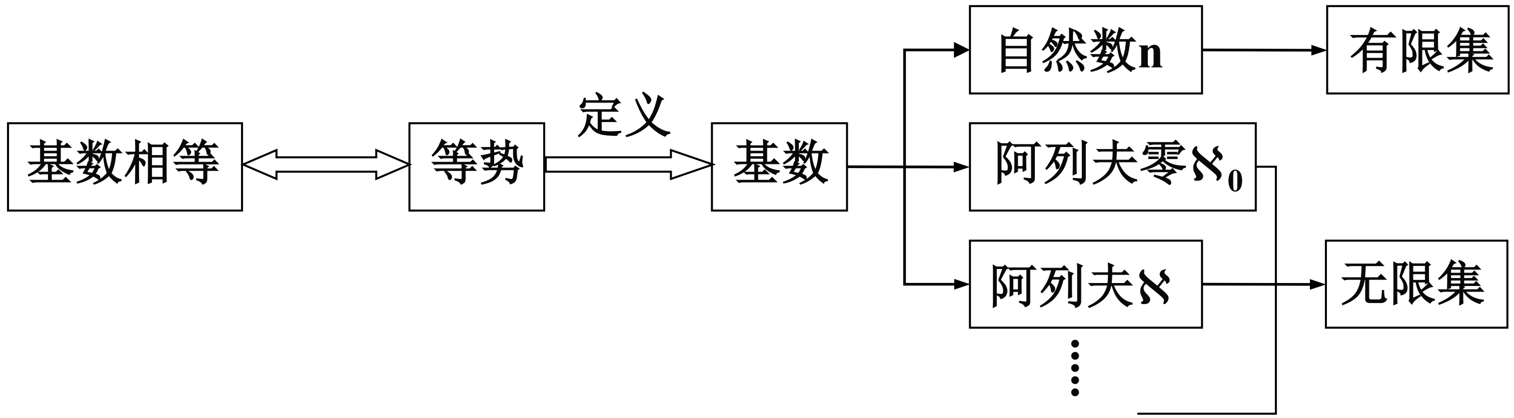
（3）由$|A| = 4$，得$|P(A)| = 2^4 = 16$。

小结

（1）等势、集合基数、有限集、无限集等基本概念。

（2）典型的集合等势：$N\approx Z\approx Q\approx N\times N$，$R\approx(0, 1)\approx[0, 1]\approx(a, b)\approx(a, b]$ $\approx[a, b)$，$a, b\in R$，$a<b$。

（3）典型集合的基数：有限集的基数是某自然数n，自然数集的基数是$\aleph_0$，实数集的基数是$\aleph$。



6.2 基数的比较

定义6.4 设A、B为任意集合，

（1）若有一个从A到B的双射函数，则称A，B基数相等（即定义6.1的A与B等势），记为

$$|A|=|B|$$

（2）若有一个从A到B的单射函数，则称A的基数小于等于B的基数，记为

$$|A|\leq|B|$$

（3）如果$|A|\leq|B|$且$|A|\neq|B|$，则称A的基数小于B的基数，记为

$$|A|<|B|$$

6.2 基数的比较

根据定义6.4，可得出以下结论（证明略）：

（1）对任何自然数m，n，若$m\leq n$，则

$$|\{0, 1, 2,\ldots, m-1\}|\leq|\{0, 1, 2,\ldots, n-1\}|$$

（2）对任何自然数n，$n<\aleph_0$，即

$$|\{0, 1, 2,\ldots, n-1\}|<|\{0, 1, 2,\ldots\}|$$

（3）$\aleph_0<\aleph$，即

$$|\{0, 1, 2,\ldots\}|<|R|$$

6.2 基数的比较

定理6.2 基数的≤关系为全序关系。即满足：

（1）对任意的集合A，有$|A|\le|A|$。

（2）对任意的集合A，B，如果$|A|\le|B|$，$|B|\le|A|$，则$|A|=|B|$。

（3）对任意的集合A，B，C，若$|A|\le|B|$，$|B|\le|C|$，则$|A|\le|C|$。

（4）对任意的集合A，B，以下三个式子：

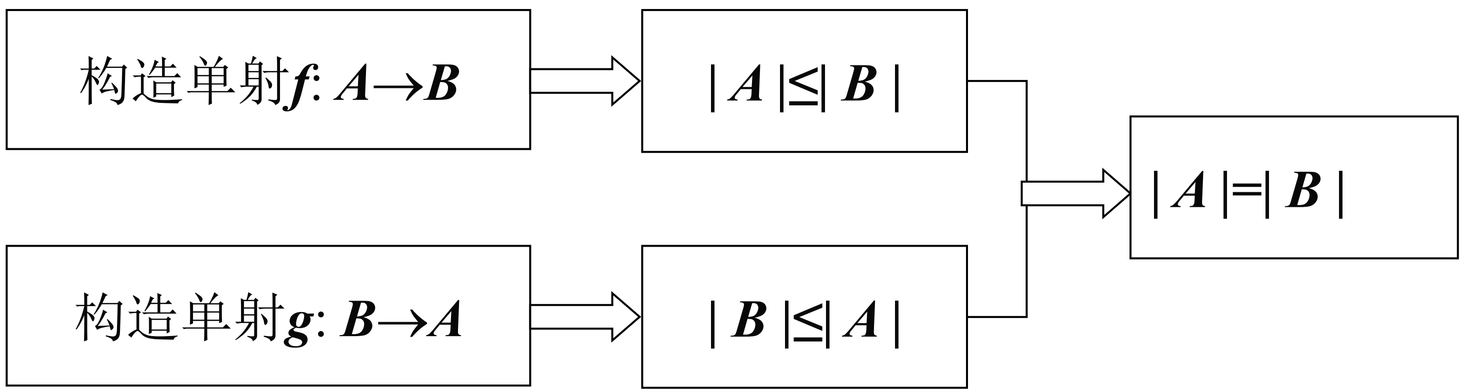
$$|A|<|B|,\quad |A|=|B|,\quad |B|<|A|$$

必成立其一且仅成立其一。这个性质称为基数的三歧性。

基数满足（1）～（3），说明基数的≤关系为偏序关系，满足（4）则≤为全序关系。该定理可根据定义6.4及函数的性质，这里证明略。

6.2 基数的比较

说明： 定理6.2为证明两个集合基数相等提供了一种有效的方法。如果我们能构造一个单射$f: A\to B$，即说明$|A|\le|B|$。同时，若能构造一个单射$g: B\to A$，即说明$|B|\le|A|$。因此根据定理6.2就得到$|A|=|B|$。该方法的思维形式注记图如下：



例6.6 利用定理6.2证明例6.4中的$|[0, 1]| = |(0, 1)|$。

定理6.3 设A是有限集，则$|A| < \aleph_0 < \aleph$。

6.2 基数的比较

定义6.5 设A为集合，若card$A \leq \aleph_0$，则称A为可数集或可列集。

显然，可数集包括有限集和可数无限集，而其它无限集称为不可数集。

关于可数集有下面的命题：

（1）可数集的任何子集都是可数集。

（2）两个可数集的并是可数集。

（3）两个可数集的笛卡儿积是可数集。

（4）可数个可数集的并仍是可数集。

6.2 基数的比较

引理6.1 任一无限集，必含有无限可数子集。

证：设A为任一无限集，显然$A \neq \varnothing$，在A中任取一个元素记为a_0，$A_1=A-\{a_0\}$仍为无限集，再在A_1中任取一个元素记为a_1，$A_2=A_1-\{a_1\}$依然为无限集，继续下去将得到一个无限可数子集$B=\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$。

定理6.4 $\aleph_0$是最小的无限集基数。即对任一无限集A，有$\aleph_0 \leq |A|$。

证：因为A为无限集，那么根据引理6.1，A必有一可数无限子集B，构造函数

$$f: B \to A，f(x)=x$$

f为单射，因此$|B| \leq |A|$，即$\aleph_0 \leq |A|$。$\aleph_0$是最小的无限集基数。

6.2 基数的比较

下面定理表明没有最大基数，或者没有最大集合。

定理6.5（康托定理） 设A为任意集合，则$|A|<|P(A)|$。

证：（1）首先证明$|A|\leq|P(A)|$，为此构造函数

$$f: A\to P(A)，f(x)=\{x\}$$

f是单射函数，故$|A|\leq|P(A)|$。

（2）其次证明$|A|\neq|P(A)|$，我们将证明任何函数$g: A\to P(A)$都不是满射的。

对任意的函数$g: A\to P(A)$，构造如下集合B：

$$B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin g(x)\}$$

则$B\subseteq A$即$B\in P(A)$。则对任意的$x\in A$有$x\in B\Leftrightarrow x\notin g(x)$。

所以对任意的$x\in A$，都有$g(x)\neq B$，则$B\notin \operatorname{ran} g$. $g: A\to P(A)$不是满射的，所以不是双射的。因此有$|A|\neq|P(A)|$。

6.2 基数的比较

说明：将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中，

（1）0, 1, 2, ... , *n*, ...恰好是全体自然数，是有穷集合的基数，也叫做有穷基数。

（2）$\aleph_0$, $\aleph$, ...是无穷集合的基数，也叫做无穷基数。

（3）$\aleph_0$是最小的无穷基数。

（4）$\aleph$后面还有更大的基数，如$|P(R)|$等，不存在最大的基数。

小结

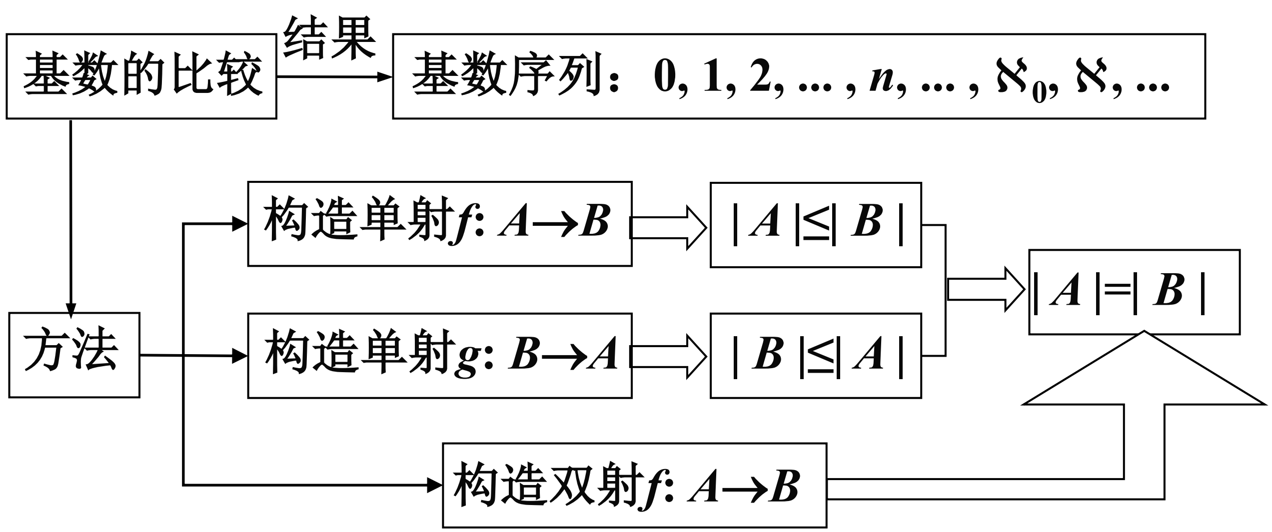
（1）基数的比较：已知的基数按从小到大的顺序排列是0, 1, 2, ... , n, ... , $\aleph_0$, $\aleph$, ...。$\aleph_0$是最小的无穷基数，不存在最大的基数。

（2）证明集合基数相等有两种方法：

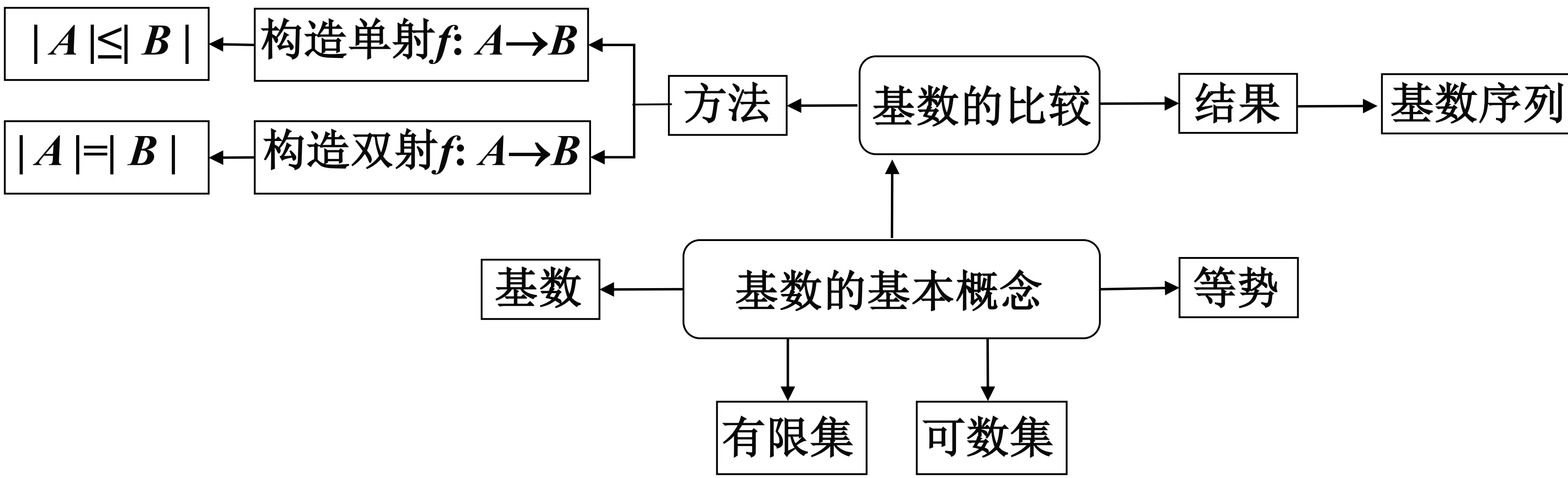
① 构造一个双射函数

② 构造两个单射函数。

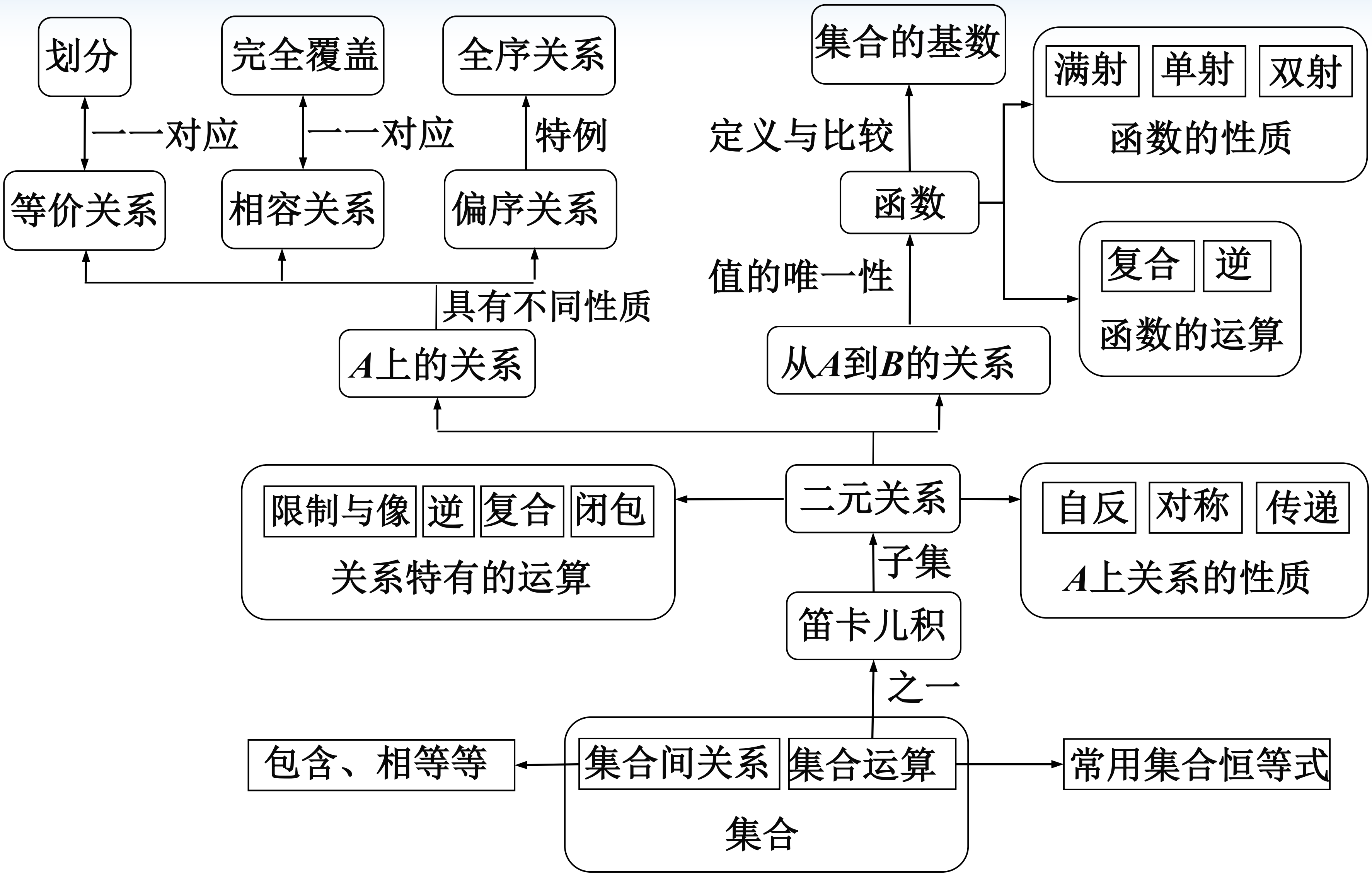
（3）可数集（或可列集）的定义。



本章小结



本篇知识逻辑结构图


划分
完全覆盖
全序关系
一一对应
一一对应
特例
等价关系
相容关系
偏序关系
具有不同性质
A上的关系
集合的基数
定义与比较
函数
满射
单射
双射
函数的性质
复合
逆
函数的运算
值的唯一性
从A到B的关系
限制与像
逆
复合
闭包
关系特有的运算
二元关系
自反
对称
传递
A上关系的性质
子集
笛卡儿积
之一
包含、相等等
集合间关系
集合运算
常用集合恒等式
集合