第二篇 集合论

Set Theory

引言

- 集合是数学中最为基本的概念，又是数学各分支、自然科学及社会科学各领域的最普遍采用的描述工具。
- 集合论是以集合概念为基础，研究集合的一般性质的数学分支学科，是现代数学的理论基础。
  - 由于集合论的语言适合于描述和研究离散对象及其关系，所以是计算机科学与工程的理论基础。
  - 集合的元素已由数学的“数集”和“点集”拓展成包含文字、符号、图形、图表和声音等多媒体的信息，构成了可以包含各种数据类型的集合。
- 与计算机科学的联系
  - 在程序设计、数据库、形式语言和自动机理论等学科领域中都有重要的应用。

集合论的创立

- 1874年，德国数学家康托尔（G. Cantor，1845年—1918年）创立了朴素集合论，为数学的统一提供了基础。
- 正当集合论被誉为绝对严格的数学基础时，1900年前后，集合论的悖论相继发现，尤其是罗素悖论的提出，动摇了整个数学的基础。使人们对数学的严密可靠性产生了怀疑，从而触发了极为严重的第三次数学危机。
- 为了排除悖论，克服危机，恢复数学的“绝对严格性”，数学家和逻辑学家做了大量工作，展开了激烈的论战。于是在20世纪初，便产生了一个新的数学领域——数学基础，并逐步形成了三大学派，即布劳威尔（Brouwer）的直觉主义、罗素（Russell）的逻辑主义以及希尔伯特（Hilbert）的形式主义。同时，数学家对集合论也进行了公理化改造，建立了各种形式的公理集合论。

集合论的争议
(有关集合论的悖论)

- (1) “理发师悖论”

一天，萨维尔村理发师挂出一块招牌：“村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发，我也只给这些人理发。”于是有人问他：“您的头发由谁理呢?”理发师顿时哑口无言。

因为，如果他给自己理发，那么他就属于自己给自己理发的那类人。但是，招牌上说明他不给这类人理发，因此他不能自己理。

如果由另外一个人给他理发，他就是不给自己理发的人，而招牌上明明说他要给所有不自己理发的男人理发，因此，他应该自己理。

由此可见，不管怎样的推论，理发师所说的话总是自相矛盾的。

集合论的争议(续)
(有关集合论的悖论)

- (2) 罗素悖论

1902年，英国数学家罗素提出了这样一个理论：以M表示是其自身成员的集合的集合，N表示不是其自身成员的集合的集合。然后问N是否为它自身的成员？

如果N是它自身的成员，则N属于M而不属于N，也就是说N不是它自身的成员；另一方面，如果N不是它自身的成员，则N属于N而不属于M，也就是说N是它自身的成员。无论出现哪一种情况都将导出矛盾的结论，这就是著名的罗素悖论。

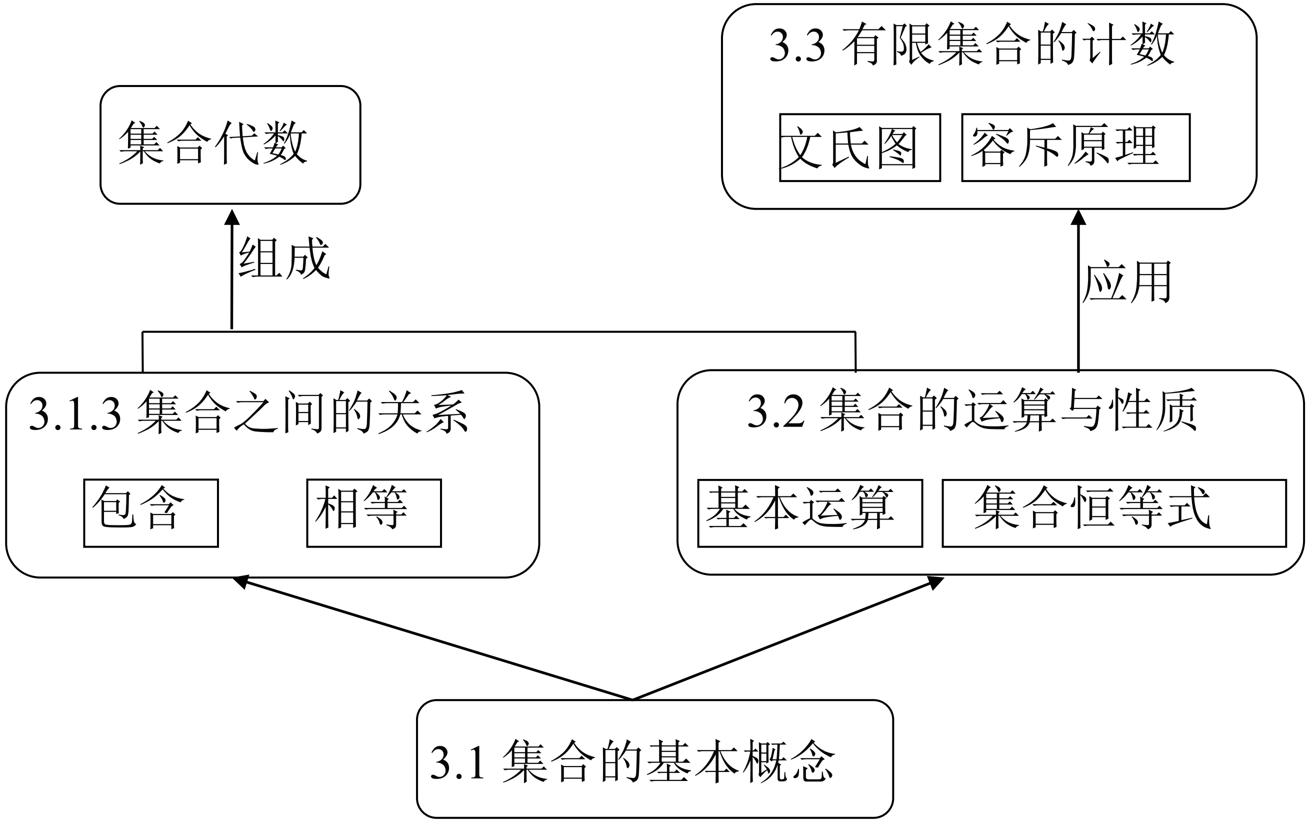
为了避免出现悖论,我们应该避免使用诸如“所有的集合组成的集合”这一类的术语.

集合论的知识体系

- 集合论
  - 第3章 集合
    - 集合的基本概念
    - 集合的运算与性质
    - 有限集合的计数
  - 第4章 二元关系
    - 关系的定义及表示方法
    - 关系的运算
    - 关系的性质及其判断方法
    - 等价关系、等价类与划分
    - 相容关系、相容类与覆盖
    - 偏序关系
  - 第5章 函数
    - 函数的基本概念
    - 函数的运算
  - 第6章 集合的基数

第三章 集 合

集合部分知识逻辑概图


3.3 有限集合的计数
文氏图
容斥原理
集合代数
组成
应用
3.1.3 集合之间的关系
包含
相等
3.2 集合的运算与性质
基本运算
集合恒等式
3.1 集合的基本概念

3.1集合的概念与关系

集合：一些事物的整体。

3.1.1集合的基本概念

- 集合作为数学的一个基本而又简单的原始概念，是不能精确定义的。
- 集合：
  - 传统意义上，一般我们把一些事物汇集到一起组成一个整体称为集合。
- 元素：集合中的对象称为集合的元素。
- 例如，

（1）图书馆的藏书组成一个集合，任一本书是该集合的元素。

（2）直线上的所有点组成实数集合R，每一个实数都是集合R的元素。

（3）26个英文字母组成一个集合，任一英文字母是该集合的元素。

（4）小于10的正奇数集合O可以表示为$O=\{1, 3, 5, 7, 9\}$。

3.1.1集合的基本概念

❖ 通常用大写字母如*A*、*B*、*C*等表示集合，用小写字母如*a*、*b*、*c*等表示集合中的元素。下面将本书中常用的集合符号列举如下：

N：自然数集合

Z：整数集合

Z^+：正整数的集合

Q：有理数集合

R：实数集合

C：复数集合

3.1.1集合的基本概念

- 集合中的元素具有以下性质：

（1）集合中的元素是确定的。所谓确定的，是指任何一个对象是不是集合的元素是明确的，不能模棱两可。

（2）集合中的元素是互不相同的，或者说是不重复的。如果同一个元素在集合中多次出现，应该认为是一个元素，如集合$\{a, b, c\} = \{a, b, b, c\}$。

（3）集合中的元素之间没有次序关系。如集合$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$。

（4）集合的元素是任意的对象。对象是可以独立存在的具体的或抽象的客体。它可以是独立存在的数、字母、人或其他物体，也可以是抽象的概念，当然也可以是集合。例如，集合$\{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$的元素$\{3\}$和$\{1, 2\}$就是集合。

（5）集合中元素之间可以有某种关联，也可以彼此毫无关系。

3.1.1集合的基本概念

- 元素和集合之间的关系是隶属关系，即属于或不属于。
  - 若元素a是集合A的元素时，记作$a \in A$，读作“a属于A”；
  - 反之，写成$a \notin A$，读作“a不属于A”。
  - 例如，$A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, 这里$2 \in A$，$\{3\} \in A$，但$3 \notin A$。

3.1.2 集合的表示法

❖ 表示一个集合通常有两种方法：列举法和谓词表示法。

1）列举法（或枚举法）：将集合的元素全部写在一对花括号内，元素之间用逗号分开。例如，

（1）$A = \{a, b, c, d\}$

（2）$B = \{1, 2, 3\}$

（3）$C = \{$张, 王, 李, 赵$\}$等。

❖ 列举法一般用于有限集合和有规律的无限集合。

❖ 例如，

（1）$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

（2）$B = \{10, 20, 30, \ldots\}$

（3）$Z = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$等。

3.1.2 集合的表示法

2）描述法（谓词公式法）：用$A=\{x \mid P(x)\}$来表示所有具有性质P的一些对象组成的集合，其中$P(x)$是谓词。

❖ 例如：

（1）$A = \{x \mid x\in R \wedge x^2-1=0\}$表示方程$x^2-1=0$的实数解集，也可以表示成$A = \{-1, 1\}$。

（2）$B = \{x \mid x\in Z \wedge 3<x\leq 6\}$，即$B = \{4, 5, 6\}$。

（3）$C= \{x \mid x$是本校在校学生$\}$等。

3.1.2 集合的表示法

❖ 集合是多种多样的，我们可以根据集合中元素的个数对其进行分类。

定义3.1 集合S中元素的个数有限时，称S为有限集合；否则，称S为无限集合。若S为有限集，S中元素的个数称为S的基数，记为$|S|$。（关于集合基数的定义将在第6章详细讨论）

❖ 例如：

（1）$A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$是有限集，且$|A| = 4$。

（2）令S为英语字母集，那么$|S| = 26$。

（3）全体正偶数的集合$\{2, 4, 6, \ldots\}$是无限集。

3.1.2 集合的表示法

❖ 下面介绍两个特殊集合。

定义3.2 不包含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$。符号化表示为：

$$\varnothing=\{x \mid P(x) \land \neg P(x)\}$$

其中$P(x)$是任意谓词。空集是不包含任何元素的集合，所以，$|\varnothing|=0$。

❖ 说明：

（1）$\varnothing \neq \{\varnothing\}$，前者是空集，是没有元素的集合；后者是以$\varnothing$作为元素的集合。

（2）空集是客观存在的，例如，$\{x|x \in \mathrm{R} \land x^2+1=0\}$，即方程$x^2+1=0$的实数解的集合是空集。

3.1.2 集合的表示法

定义3.3 如果一个集合包含了所要讨论的每一个元素，则称该集合为全集，记作E。全集的符号化表示为：

$$E = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$$

其中$P(x)$是任意谓词。

- 全集是一个相对的概念。由于所研究的问题不同，所取的全集也不同。
- 例如，
  - 在研究整数间的问题时，可把整数集Z取作全集。
  - 在研究平面几何的问题时，可把整个坐标平面取作全集。

3.1.3 集合之间的关系

- 包含与相等是集合间的两种基本关系，也是集合论中的两个基本概念。

外延公理 两个集合A与B相等当且仅当其元素相同，记作$A = B$。

- 即$A=B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- 例如，

  若$A = \{2, 3\}$，$B = \{$小于4的素数$\}$，则$A = B$。

- 外延公理事实上刻画了集合元素的“相异性”、“无序性”，以及集合表示形式的“不唯一性”。

3.1.3 集合之间的关系

定义3.4 设A和B是任意两个集合，如果集合A的每个元素都是集合B的元素，则称A为B的一个子集。这时也称A被B包含或B包含A。记作$A \subseteq B$或$B \supseteq A$。如果A不是B的子集，即A至少有一个元素不属于B，则记作$A \nsubseteq \mathrm{B}$。

- $A \subseteq B$用谓词公式表示为：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

- $A \nsubseteq B$用谓词公式表示为：

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$$

- 例如：

（1）若$A=\{a, b, c\}$，$B=\{a, e, i, o, u\}$，$D=\{a, c\}$，则有$D \subseteq A$，$D \nsubseteq B$。

（2）若$A=\{a, b, c\}$，$B=\{c, a, b\}$，则有$B \subseteq A$，$A \subseteq B$。

（3）$\mathrm{N} \subseteq \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R} \subseteq \mathrm{C}$。

3.1.3 集合之间的关系

❖ 根据子集的定义可以证明，包含关系具有下列一些性质。

定理3.1 设A，B和C是任意集合，则：

（1）$\varnothing \subseteq A$

（2）$A \subseteq A$

（3）$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

证：（1）、（2）由定义显然成立。

（3）$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$

$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in C)$

$\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in C))$

$\Rightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$

$\Leftrightarrow A \subseteq C$

3.1.3 集合之间的关系

- 平凡子集：

  由定理3.1的（1）、（2），任意一个非空集合A至少有两个子集，一个是空集$\varnothing$，另一个是它本身A，称为A的平凡子集。

- 一般而言，A的每个元素都能确定A的一个子集。即若$a \in A$，则$\{a\} \subseteq A$。

3.1.3 集合之间的关系

定理3.2 集合A和集合B相等的充分必要条件是这两个集合互为子集。如果A和B不相等，则记作$A \neq B$。

证：集合相等可用谓词公式表示为，

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

由外延公理可得，$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

- 例如：

（1）若$A=\{a, b, c\}$，$B=\{c, a, b\}$，有$B \subseteq A$且$A \subseteq B$，则有$A=B$。

（2）设$A=\{\{1, 2\}, 4\}$，$B=\{1, 2, 4\}$，则$A \neq B$

3.1.3 集合之间的关系

定理3.3 空集是唯一的。

证：设有两个空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，由定理3.1的（1）有，

$$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \text{且} \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$$

根据定理3.2，得$\varnothing_1 = \varnothing_2$。

定义3.5 设A、B是集合，如果$A \subseteq B$且$A \neq B$，则称A为B的真子集，记作$A \subset B$或$B \supset A$。如果A不是B的真子集，记为$A \not\subset B$。

真子集用谓词公式表示为：

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

例如：

（1）$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$，但$\mathrm{N} \not\subset \mathrm{N}$。

（2）若$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{b, c\}$，则$B \subset A$，但$A \not\subset A$。

3.1.3 集合之间的关系

例3.1 确定下列命题是否为真。

（1）$\varnothing \subseteq \varnothing$

（2）$\varnothing \in \varnothing$

（3）$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

（4）$\varnothing \in \{\varnothing\}$

解：

由定理3.1有，（1）、（3）为真，

由空集的定义，（2）为假。（4）为真。

3.1.4 幂集和集族

- 含有n个元素的集合简称n元集，它的含有$m(m\leq n)$个元素的子集叫做它的m元子集。
- 任给一个n元集，怎样求出它的全部子集呢？举例说明如下。

例3.2 求$A=\{a, b, c\}$的全部子集。

解：将A的子集按基数从小到大分类，

0元子集：有 C_3^0=1个，即空集$\varnothing$；

1元子集：有 C_3^1=3个，$\{a\}$，$\{b\}$和$\{c\}$；

2元子集：有 C_3^2=3个，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$和$\{b, c\}$；

3元子集：有 C_3^3=1个，$\{a, b, c\}$。

集合A共有8 个子集。

3.1.4 幂集和集族

定义3.6 给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的幂集，记为$P(A)$（或2^A）。幂集的符号化表示为，

$$P(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$$

如例3.2中，$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$。

对任意集合A，因为$\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$，所以一定有 $A \in P(A)$，$\varnothing \in P(A)$。

例3.3 令$A = \varnothing$，$B = \{\varnothing, a, \{a\}\}$，求$P(A)$、$P(B)$和$P(P(A))$。

解：

$$P(A) = \{\varnothing\}$$

$$P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$

$$P(B) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, a\}, \{\varnothing, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\varnothing, a, \{a\}\}\}。$$

3.1.4 幂集和集族

定理3.4 如果$|A| = n$，则$|P(A)| = 2^n$。

证：A的$k(k=1, 2, \ldots, n)$元子集的个数为 ，所以 C_n^k

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

根据此定理，当集合A的基数逐渐增长时，幂集$P(A)$的基数将以指数形式增长。

3.1.4 幂集和集族

定理3.5 设A，B为任意集合，则$A\subseteq B$当且仅当$P(A)\subseteq P(B)$。

证：必要性：对任意的x，

$x\in P(A)$

$\Leftrightarrow x\subseteq A$，因为$A\subseteq B$，

$\Rightarrow x\subseteq B$

$\Leftrightarrow x\in P(B)$

所以$P(A)\subseteq P(B)$。

充分性：

假设$A\nsubseteq B$，那么至少有一元素$a\in A$且$a\notin B$，考虑集合$\{a\}$，有$\{a\}\in P(A)$且$\{a\}\notin P(B)$，与$P(A)\subseteq P(B)$矛盾，故$A\subseteq B$。

定理得证。

3.1.4 幂集和集族

定义3.7 以集合为元素的集合称为集族。

例如，

$A = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{f\}, \{1, 2, 3\}\}$、$B = \{\mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}\}$为集族。

定义3.8 给定集合A，由集合A的子集为元素组成的集合，称为集合A的子集族。

由定义3.8，A的所有子集族都是其幂集$P(A)$的子集。

如例3.2中，$A=\{a, b, c\}$，

$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$，

则$B=\{\varnothing\}$，$C=\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，$D=\{\{a\}, \{b, c\}\}$等均是$A$的子集族。

3.1.5文氏图

- 还可以用文氏图（Venn Diagram）形象地表示集合。
- 表示方法:
  - 在文氏图中全集E用长方形表示。
  - 在长方形内部，其他集合由各自不同的圆（或任何其他的适当的闭曲线）表示，圆的内部表示集合。
  - 有时用点来表示集合中特定的元素。
  - 如果没有关于集合不交的说明，任何两个圆应彼此相交。

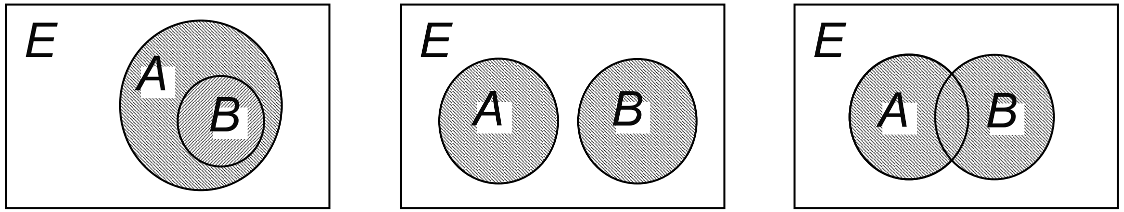
3.1.5文氏图

❖ 文氏图常用于表示集合之间的关系。设*A*、*B*为任意两个集合，具体表示方法如下：

（1）如果$B \subset A$，则表示*B*的圆在表示*A*的圆内，如图（a）所示。

（2）如果*A*与*B*不交，即它们没有公共元素，则表示*A*和*B*的两个圆在图中是分离的，如图（b）所示。

（3）如果*A*与*B*相交却不包含，即有某些元素在*A*中但不在*B*中，某些元素在*B*中但不在*A*中，而有些元素可能同时属于*A*与*B*，有些元素可能既不在*A*中也不在*B*中。表示方法如图（c）所示。



(a)　　(b)　　(c)

小结

集合
- 集合的特征：元素的确定性、相异性、无序性
- 元素与集合的关系：$\in$、$\notin$
- 集合与集合的关系
  - 包含：$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - 相等：$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- 集合的文氏图表示

3.2 集合的运算与性质

集合运算是指用已知的集合去生成新的集合。

3.2.1 集合的运算

定义3.9 设A和B是任意两个集合，

（1）A和B的所有公共元素组成的集合称为A和B的交集，记为A∩B，即：

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$$

（2）将A和B的所有元素合在一起构成的集合称为A和B的并集,记为A∪B，

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$$

（3）从集合A中去掉集合B的元素得到的集合称为A和B的差集，也称作B对A的相对补集，记为A−B，即：

$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

例3.4 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，求$A\cap B$、$A\cup B$、$A-B$和$B-A$。

解：$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{2, 3\}$

$A-B=\{1, 4\}$, $B-A=\{5\}$

3.2.1 集合的运算

例3.6 设$A \subseteq B$，求证：$A \cap C \subseteq B \cap C$。

证：

对任意的x，

$x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C$

$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C$（因为$A \subseteq B$）

$\Leftrightarrow x \in B \cap C$

因此，$A \cap C \subseteq B \cap C$。

3.2.1 集合的运算

定义3.10 若集合A和B没有公共元素，即A∩B=∅，则称A和B不相交。

如令A={1, 2, 3}，B={4, 5}，则$A∩B$=∅。

定义3.11 设A为任意集合，A的绝对补集简称补集，记作~A（或$\overline{A}$），定义为：

$$\sim A= E-A=\{x \mid x\in E\wedge x\notin A\}$$

因为E是全集，x∈E是真命题，所以~A可以定义为：

$$\sim A=\{x \mid x\notin A\}$$

它是一元运算，是差运算的特例。

例如，E={a, b, c, d}，A={a, c}，则

$\sim A$={b, d}。

3.2.1 集合的运算

定义3.12 设A和B是任意两个集合，A与B的对称差记作A⊕B，定义为：

$$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$$

例如，$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$，则

$$A-B=\{1, 2, 3\}，B-A=\{6, 7, 8\}，$$

$$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)= \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}。$$

集合的基本运算可以用文氏图给予形象的描述。(具体见教材图3.4)

说明：在以上讨论的各种运算中，幂集、绝对补运算的优先级要高于并、交、相对补、对称差等二元运算。

3.2.2 集合的运算性质

下面的恒等式给出了集合运算的主要算律。

定理3.6 设A, B, C为任意的集合，集合运算满足以下所列规律。

（1）双重否定律 $\sim(\sim A)=A$

（2）幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

（3）交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

（4）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

（5）分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（6）吸收律 $A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$

（7）德摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$，$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

$\sim E=\varnothing$，$\sim\varnothing=E$

3.2.2 集合的运算性质

（8）同一律 $A\cap E=A$，$A\cup\varnothing=A$；

（9）零律 $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup E=E$

（10）排中律 $A\cup\sim A=E$

（11）矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$

不难看出，集合运算的规律和谓词演算的规律是一致的，所以谓词演算的方法是证明集合恒等式的基本方法。

3.2.2 集合的运算性质

例3.8 证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，即定理3.6的（7）。

证：对任意的x，

$$
\begin{aligned}
x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg x\in(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg x\in B\wedge\neg x\in C\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A-B)\wedge(x\in A-C)\\
&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

故 $\mathrm{A}-(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}-\mathrm{C})$。

3.2.2 集合的运算性质

例3.9 求证$A\cap(A\cup B)=A$，即定理3.6的（6）。

证：假设定理3.6中的其它恒等式均成立，则

$A\cap(A\cup B)$

$=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$　　（同一律）

$=A\cup(\varnothing\cap B)$　　（分配律）

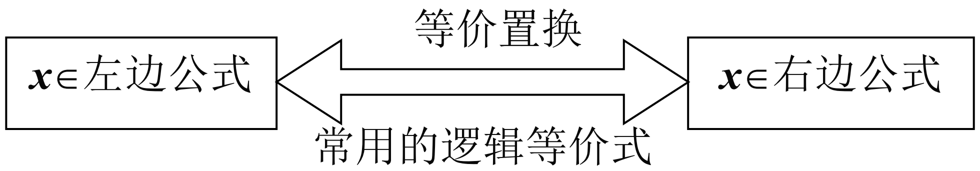
$=A\cup\varnothing$　　（零律）

$=A$　　（同一律）

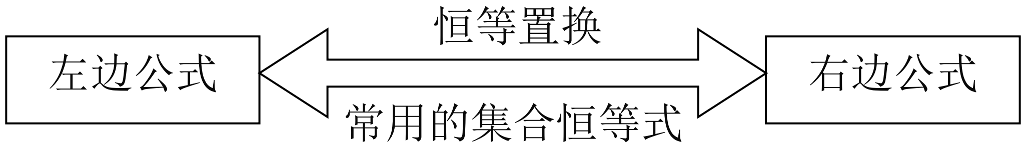
3.2.2 集合的运算性质

说明：证明集合恒等式的方法有两种：

（1）根据定义进行证明，在叙述中采用半形式化的方法，证明中大量用到数理逻辑的等价式及推理规则。如例3.8。思维形式注记图如下。



（2）恒等演算，利用已有的集合恒等式证明新的恒等式，如例3.9。思维形式注记图如下。



3.2.2 集合的运算性质

定理3.7 设A, B, C是任意集合，则

（1）$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$

（2）$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$

（3）$A-B=A \cap \sim B$

（4）$A-B \subseteq A$

（5）$(A-B) \cup B = A \cup B$，$(A \cup B)-B = A-B$

（6）若$A \subseteq C$，$B \subseteq C$，则$A \cup B \subseteq C$

（7）若$A \subseteq B$，$A \subseteq C$，则$A \subseteq B \cap C$

（8）若$A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$

证明略, 见教材。

3.2.2 集合的运算性质

定理3.8 对于任意集合A，B，C，

（1）$A \oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

（2）$A \oplus B=B \oplus A$

（3）$A \oplus A=\varnothing$

（4）$A \oplus \varnothing=A$

（5）$\sim A \oplus \sim B=A \oplus B$

（6）$(A \oplus B) \oplus C=A \oplus (B \oplus C)$

可根据定义或用恒等演算法证明，证明略。

3.2.2 集合的运算性质

例3.10 已知$A\oplus B=A\oplus C$，证明$B=C$。

证：已知$A\oplus B=A\oplus C$，则

$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$

$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$ （由定理3.8（6））

$\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$ （由定理3.8（3））

所以，$B=C$ （由定理3.8（4））

并与交运算可以推广到多个集合的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\{x \mid x\in A_1\wedge x\in A_2\wedge\ldots\wedge x\in A_n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\{x \mid x\in A_1\vee x\in A_2\vee\ldots\vee x\in A_n\}$$

3.2.2 集合的运算性质

例3.11 化简集合表达式：$(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

解：$(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

$=(B\cap\sim(A\cap C))\cup(B\cap(A\cap C))$ （由定理3.7（3），交换律，结合律）

$=B\cap(\sim(A\cap C)\cup(A\cap C))$ （分配律）

$=B\cap E$ （排中律）

$=B$ （同一律）

例3.12 已知$A\cup B=A\cup C$，$A\cap B=A\cap C$，试证$B=C$。

证：$B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)$

$=(B\cap A)\cup(B\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$=(A\cup B)\cap C=(A\cup C)\cap C$

$=C$

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定义3.14 由两个元素x和y按一定的顺序排列成的二元组叫做一个有序对，也称序偶，记作$<x, y>$，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。

例如，平面直角坐标系中点的坐标就是有序对，$<1, 3>$, $<3, 1>$, $<2, 0>$等代表平面中不同的点。

由定义可知，有序对具有如下性质：

（1）当$x \neq y$时,$<x, y> \neq <y, x>$，即与顺序有关。

（2）给定两个有序对$<x, y>$和$<u, v>$，$<x, y> = <u, v>$的充分必要条件是$x=u$且$y=v$。

（3）有序对$<x, y>$与集合$\{x, y\}$不同，后者中的元素是无次序的。如当$x \neq y$时，$\{x, y\} = \{y, x\}$。

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定义3.16 设A，B为集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的笛卡儿积，记作A×B。笛卡儿积的符号化表示为：

$$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$$

例如，$A=\{a, b\}$，$B=\{0, 1, 2\}$，则

$$A\times B=\{<a,0>, <a,1>, <a,2>, <b,0>, <b,1>, <b,2>\}$$

$$B\times A=\{<0,a>, <0,b>, <1,a>, <1,b>, <2,a>, <2,b>\}$$

可见，在一般情况下，$A\times B\neq B\times A$。

从笛卡儿积的定义和逻辑演算的知识可得：

（1）若$<x, y>\in A\times B$，则有$x\in A$和$y\in B$。

（2）若$<x, y>\notin A\times B$，则有$x\notin A$或$y\notin B$。

（3）由排列组合的知识易得，如果$|A|=m$，$|B|=n$，则$|A\times B|=|B\times A|=m\times n$。

3.2.3 有序对与笛卡儿积

作为集合的一种二元运算，笛卡儿积运算具有如下性质：

（1）对任意集合A，有$\varnothing\times A = A\times\varnothing = \varnothing$

（2）当$A\neq B\wedge A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$时，有$A\times B\neq B\times A$，即笛卡儿积运算不适合交换律。

（3）当A, B, C都不是空集时，有$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$，即笛卡儿积运算不满足结合律。

（4）笛卡儿积运算对$\cup$和$\cap$运算满足分配律。即对任意的集合A, B, C有，

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

3.2.3 有序对与笛卡儿积

例如，设$A=\{1\}$，$B=\{1, 2\}$，$C=\{2, 3\}$，则

$A\times(B\cup C) = \{1\}\times\{1, 2, 3\} = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$

$(A\times B)\cup(A\times C) = \{1\}\times\{1,2\}\cup\{1\}\times\{2,3\} = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$

$A\times(B\cap C) = \{1\}\times\{2\} = \{<1,2>\}$

$(A\times B)\cap(A\times C) = \{<1,1>,<1,2>\}\cap\{<1,2>,<1,3>\} = \{<1,2>\}$

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定理3.9 设A, B, C为集合，$C\neq\varnothing$，则

（1）$A\subseteq B$的充分必要条件是$A\times C\subseteq B\times C$。

（2）$A\subseteq B$的充分必要条件是$C\times A\subseteq C\times B$。

证：仅证明（1），可类似地证明（2）。

必要条件：对于任意的$<x,y>$，

$$<x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow x\in B\wedge y\in C \Leftrightarrow <x,y>\in B\times C$$

所以$A\times C\subseteq B\times C$。

充分条件：因为$C\neq\varnothing$，所以存在$y\in C$，对于任意的x，

$$x\in A \Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow <x,y>\in A\times C \Rightarrow <x,y>\in B\times C$$

$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C \Rightarrow x\in B$$

所以$A\subseteq B$。

3.2.3 有序对与笛卡儿积

定理3.10 设A, B, C, D为非空集合，则$A\times B\subseteq C\times D$的充分必要条件是$A\subseteq C$且$B\subseteq D$。

证：必要条件：对于任意的x，y，

$$x\in A\wedge y\in B \Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B \Rightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D \Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D$$

所以$A\subseteq C$且$B\subseteq D$。

充分条件：对于任意的$\langle x, y\rangle$，

$$\langle x, y\rangle\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow x\in C\wedge y\in D \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in C\times D$$

所以$A\times B\subseteq C\times D$。

例3.13 设$A=\{1,2\}$，求$P(A)\times A$。

解：$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$，

$$P(A)\times A = \{\langle\varnothing, 1\rangle,\langle\varnothing, 2\rangle,\langle\{1\}, 1\rangle,\langle\{1\}, 2\rangle,\langle\{2\}, 1\rangle,\langle\{2\}, 2\rangle, \langle\{1, 2\}, 1\rangle,\langle\{1, 2\}, 2\rangle\}。$$

3.2.3 有序对与笛卡儿积

例3.14 设A, B, C, D为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由。

（1）$A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$

（2）$A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$

（3）$A=B \land C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

（4）存在集合A，使得$A\subseteq A\times A$

解：（1）不一定为真, 当$A=\varnothing$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$时有$A\times B=A\times C=\varnothing$, 但$B\neq C$。

（2）不一定为真，当$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$时有

$$A-(B\times C) = \{1\}-\{<1, 2>\} = \{1\}$$

$$(A-B)\times(A-C) = \varnothing\times\{1\} = \varnothing$$

（3）为真，由恒等置换的原理可证。

（4）为真，当$A=\varnothing$时，有$A\subseteq A\times A$成立。

小结

集合运算

- 分类：并、交、差（相对补）、补（绝对补）和对称差
- 运算的性质：常用的集合恒等式或集合的运算定律
- 证明集合恒等式的方法
  - 恒等演算法：集合恒等式
  - 谓词演算法：逻辑等价式
- 笛卡儿积运算的性质
  - 若$|A|=m$，$|B|=n$，则$|A\times B|=|B\times A|=m\times n$
  - 不满足交换律
  - 不满足结合律
  - 对$\cup$和$\cap$运算满足分配律

3.3 有限集合的计数

❖ 集合的运算，可用于有限个元素的计数问题。

3.3 有限集合的计数

❖ 思考题：没有时间上学

- “但是我没有时间上学，”埃迪向劝学员解释道，“我一天睡眠8小时，以每天为24小时计，一年中的睡眠时间加起来大约122天。星期六和星期天不上课，一年总共是104天。我们有60天的暑假。我每天用膳要花3小时--一年就要45天以上。我每天至少还得有2小时的娱乐活动--一年就要超过30天。”
- 埃迪边说边匆匆写下这些数字，然后他把所有的天数加起来。结果是361。
  - 睡眠(一天8小时) 122
  - 星期六和星期天 104
  - 暑假 60
  - 用膳(一天3小时) 45
  - 娱乐(一天2小时) 30
  - 总 和 361天
- “你瞧，”埃迪接着说，“剩下给我病卧在床的只有4天，我还没有把每年7天的学校假期考虑在内呢!”
- 劝学员搔搔头。“这里有差错，”他咕哝道。但是，他左思右想,也未能发现埃迪的数据有何不准确之处。你能解释错误何在吗?

3.3 有限集合的计数

❖ 使用文氏图可以很方便地解决有限集的计数问题。具体方法如下：

1）根据已知条件画出对应的文氏图。

一般地说，一条性质决定一个集合。有多少条性质，就有多少个集合。如果没有特殊的说明，任何两个集合都画成相交的。

2）将已知集合的元素数填入表示该集合的区域内。

通常从n个集合的交集填起，根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。如果交集的数字是未知的，可以设为x。

3）根据题目中的条件，列出一次方程或方程组，就可以求得所需要的结果。用文氏图求解有限集计数问题的思维形式注记图如下。

问题描述 → 文氏图 → 填入区域元素数 → 列方程并求解

3.3 有限集合的计数

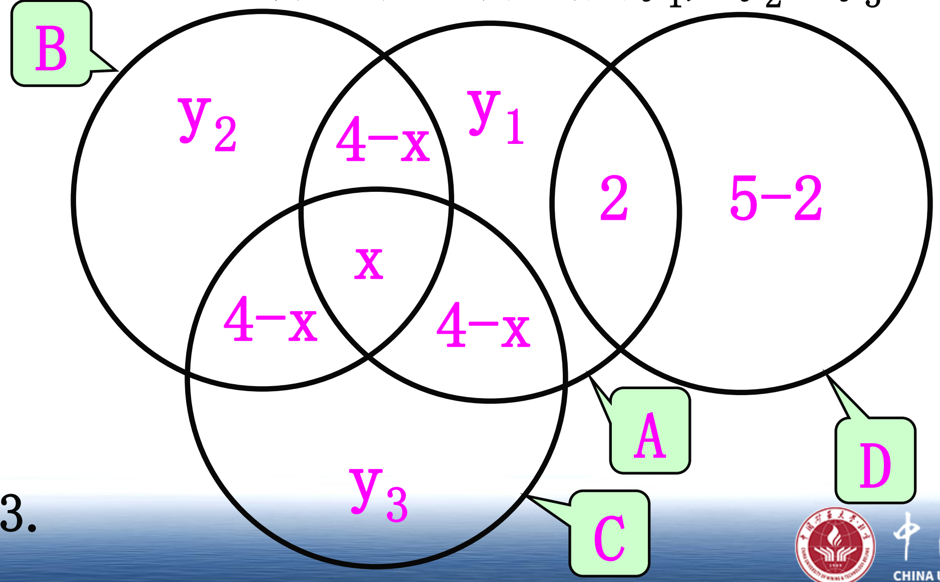
例3.15 对24名人员掌握外语情况的调查.其统计结果如下:

- 会英、日、德、法分别为:13, 5, 10和9人;
- 同时会英语和日语的有2人;
- 会英、德和法语中任两种语言的都是4人.

已知会日语的人既不懂法语也不懂德语, 分别求只会一种语言(英、德、法、日)的人数和会三种语言的人数.

解　令A, B, C和D分别表示会英、法、德、日语的人的集合.

设同时会三种语言的有x人, 只会英、法或德语一种语言的分别为y_1, y_2和y_3.画出的图如右图.



列出下面方程组:

$$y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13$$
$$y_2 + 2(4-x) + x = 9$$
$$y_3 + 2(4-x) + x = 10$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + 3(4-x) + x = 24-5$$

解得: $x = 1$, $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

3.3 有限集合的计数

例3.16 求1到1000之间(包含1和1000在内)，既不能被5和6，也不能被8整除的数有多少个.

解 设

$S = \{ x \mid x \in Z \wedge 1 \leq x \leq 1000 \}$

$A = \{ x \mid x \in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B = \{ x \mid x \in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C = \{ x \mid x \in S \wedge x$可被8整除$\}$

$|A| = int(1000/5) = 200$

$|B| = int(1000/6) = 166$

$|C| = int(1000/8) = 125$

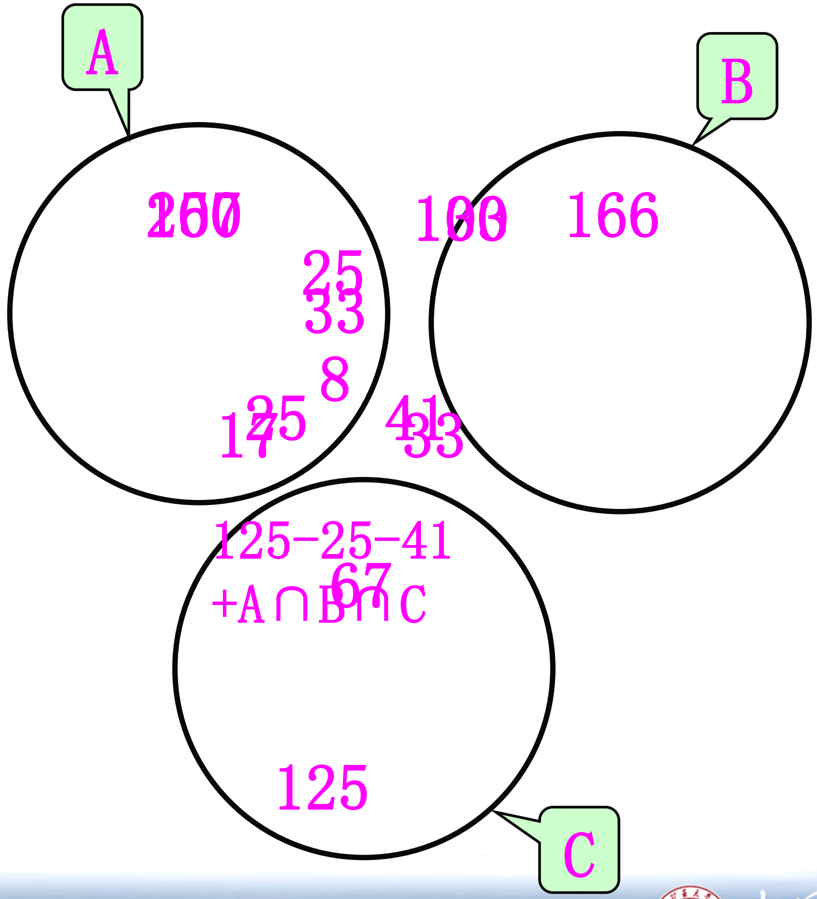
$|A \cap B| = int(1000/lcm(5,6)) = 33$

$|A \cap C| = int(1000/lcm(5,8)) = 25$

$|B \cap C| = int(1000/lcm(6,8)) = 41$

$|A \cap B \cap C| = int(1000/lcm(5,6,8)) = 8$

1000-(150+100+67+25+17+33+8)=600



3.3 有限集合的计数

定理3.11(容斥原理) 设$A_1, A_2, \ldots, A_m$是有限集合S的子集，则:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

3.3 有限集合的计数

根据容斥原理，例3.16中所求的元素数为：

$$|A \cap B \cap C| = |S| - (|A|+|B|+|C|) + (|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

$$=1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

欧拉函数

- 例3.18 求欧拉函数的值
- 欧拉函数Φ是数论中的一个重要函数，设n是正整数，Φ(n)表示{1, 2, …, n}中与n互素的数的个数．例如Φ(12)=4，因为与12互素的数有1, 5, 7, 11．这里认为Φ(1)=1．利用容斥原理给出欧拉函数的计算公式.
- 分析

(1)将全集看成为{1,2,…,n}

(2)素因子！

(3) 容斥原理。

欧拉函数（续）

- 求素因子

给定正整数n, n的素因子分解式为， $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$

令$A_i = \{x \mid 1 \le x \le n$且$p_i$整除$x\}$,i=1,2,…,k

则有 $\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$

- 容斥原理

首先计算 $|A_i| = \dfrac{n}{p_i}, i = 1,2,\ldots,k$ $|A_i \cap A_j| = \dfrac{n}{p_i p_j}, 1 \le i < j \le k$

由容斥原理得

$$
\begin{aligned}
\phi(n) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}| \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) - \ldots + (-1)^k \left(\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}
$$

小结

文氏图的作用：

① 形象地描述集合之间的关系。

② 形象地描述集合的运算。

③ 方便地解决有限集的计数问题。

文氏图

描述集合之间的关系

描述集合的运算

容斥原理

解决有限集的计数问题

常见题型分析

- 判断一个命题或真或假。
- 判别元素是否属于给定的集合
- 集合运算。
- 证明两集合之间的关系：包含关系或集合相等。
- 有限集合的计数。

本章小结

本章主要内容的知识逻辑结构图：