中国矿业大学(北京)
CHINA UNIVERSITY OF MINING AND TECHNOLOGY-BEIJING

离散数学

Discrete Mathematics

第一篇 数理逻辑

Mathematical Logic

什么是数理逻辑

- 数理逻辑是用数学方法来研究推理规律的数学学科。
  - 主要研究内容：推理
    - 着重于推理过程是否正确
    - 着重于语句之间的关系
  - 主要研究方法：数学的方法
    - 引进一套符号体系的方法。
  - 所以数理逻辑又称符号逻辑。
- 与计算机科学的联系
  - 计算机及计算机科学与数理逻辑有着十分密切的关系。人们说数字电子计算机是数理逻辑与电子学结合的产物。

Dijkstra算法及其它

- **迪杰斯特拉Dijkstra(**艾兹格·迪杰斯特拉**)算法（最短路径算法）**

  有向图中任意两个顶点之间的最短路径问题。

  1972图灵奖（http://baike.baidu.com/view/358075.htm）。

- **Dijkstra的话**

  “我现在年纪大了，搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了，我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多错误，不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道。要是我能年轻20岁的话我要回去学逻辑。”

  程序＝算法＋数据；　算法＝逻辑＋控制

数理逻辑的知识体系

- 数理逻辑
  - 第1章 命题逻辑
    - 命题逻辑基本概念
    - 命题公式
    - 命题公式标准型（范式）
    - 命题公式间的关系
      - 基本逻辑等价式
      - 基本逻辑蕴涵式
    - 命题推理理论
  - 第2章 谓词逻辑
    - 谓词逻辑基本概念
    - 谓词公式
    - 谓词公式标准型（前束范式）
    - 谓词公式间的关系
      - 基本逻辑等价式
      - 基本逻辑蕴涵式
    - 谓词推理理论

第一章命题逻辑

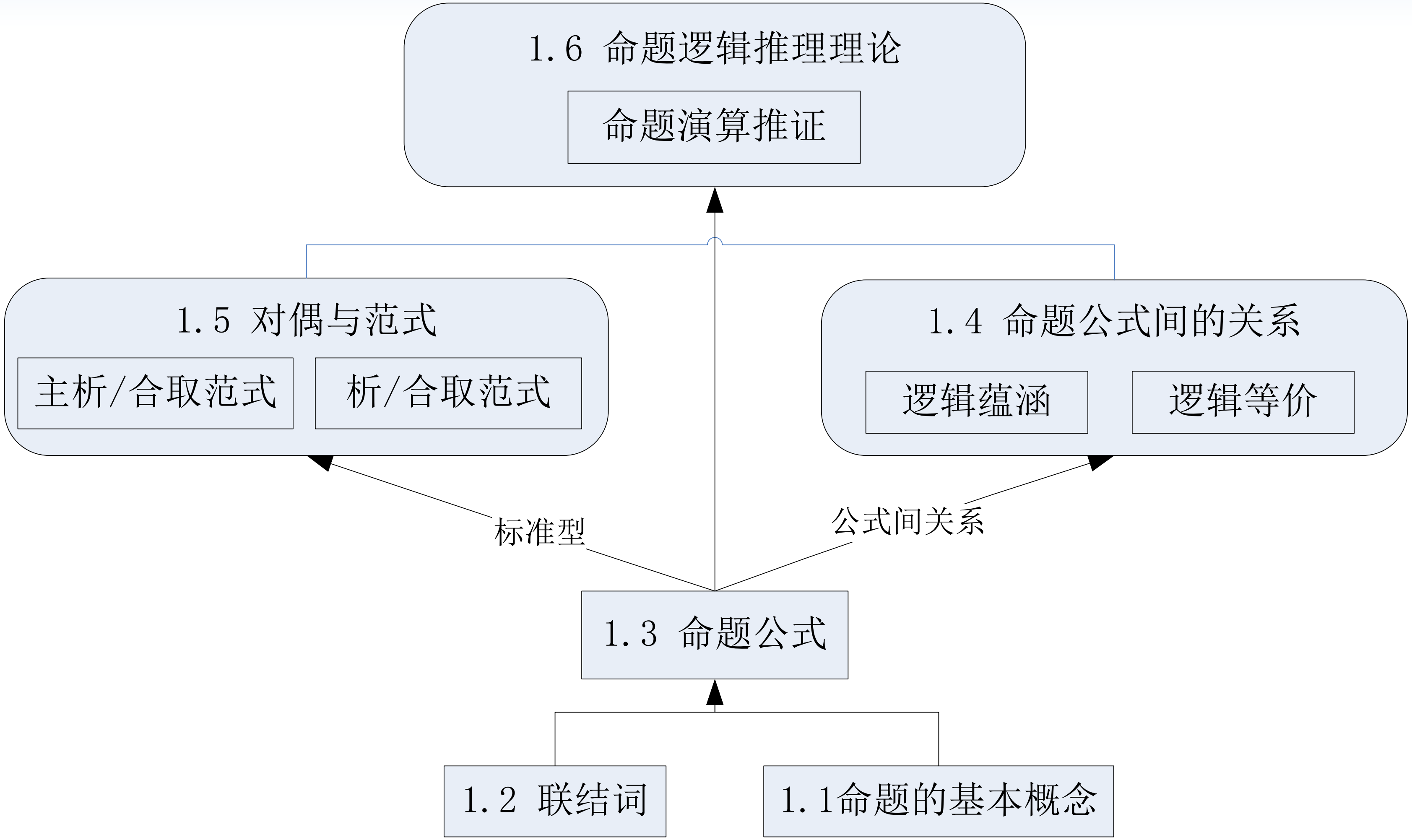
引言

- 逻辑主要研究推理过程，而推理过程必须依靠命题来表述。

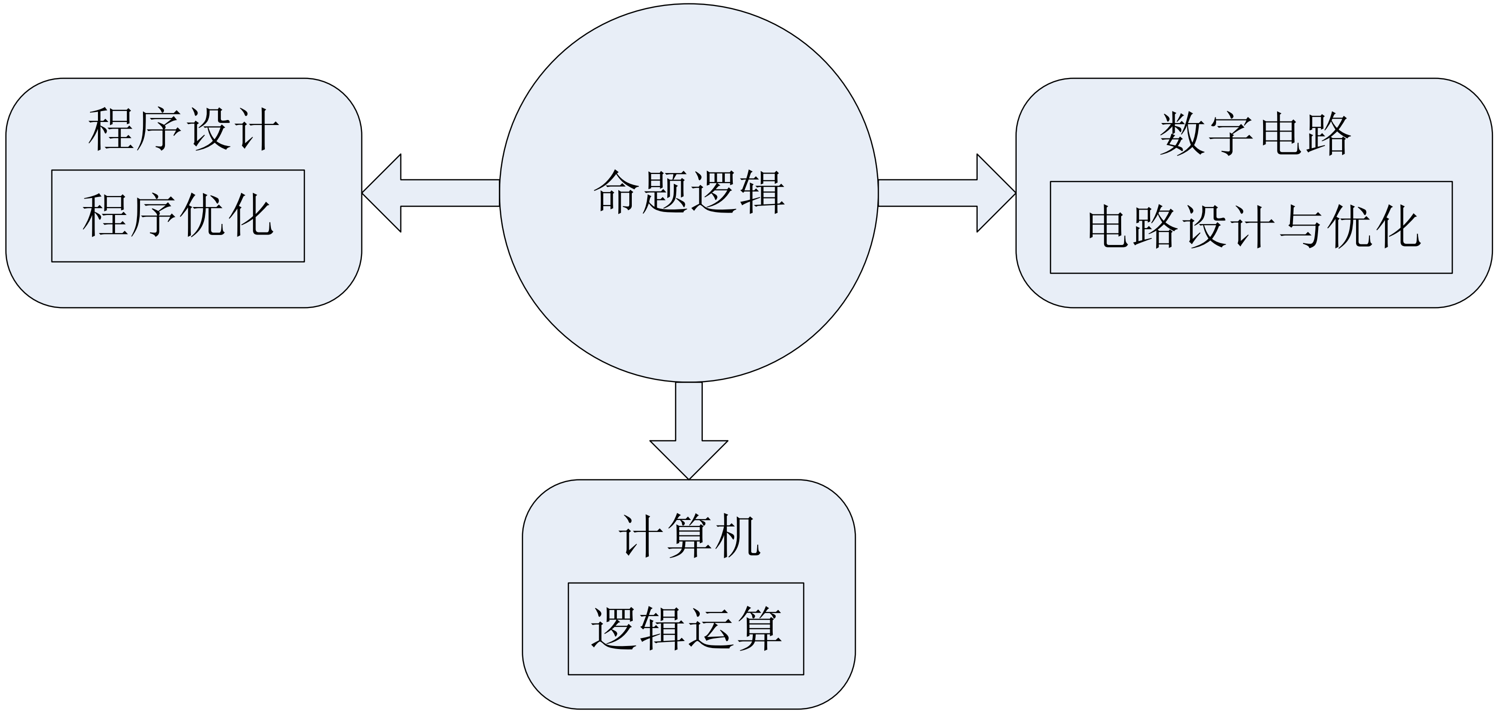
- 在命题逻辑中，“命题”被看作最小单位。

- 命题逻辑是数理逻辑中最基本、最简单的部分。

命题逻辑部分知识逻辑概图



命题逻辑在计算机科学技术相关领域的应用概图



1.1.命题的基本概念

命题：具有真假意义的陈述句。

1.1.1 命题

- 什么是命题
  - 推理是数理逻辑研究的中心问题，推理的前提和结论都是表达判断的陈述句，因而表达判断的陈述句构成了推理的基本单位，称具有真假意义的陈述句为命题。
- 真值
  - 命题总是具有一个确定真或假的“值”，称为真值。
  - 真值只有“真”和“假”两种，分别记为True（真）和False（假），用1和0表示。
  - 真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。
- 判断给定的句子是否为命题的基本步骤
  - 首先应是陈述句；
  - 其次要有唯一的真值。

1.1.1 命题

- 1）该吃早饭了！

  祈使句，不是命题。

- 2）多漂亮的花呀！

  感叹句，不是命题。

- 3）明天你有什么安排吗？

  疑问句，不是命题。

- 4）我正在说谎。

  不是命题。因为无法判定其真假值，若假设它为假即我正在说谎，则意味着它的反为真，即我正在说实话，二者相矛盾；若假定它为真即我正在说实话，则意味着它的反为假，我正在说谎，二者也相矛盾。这其实是一个语义上的悖论。悖论不是命题。

1.1.1 命题

- 5） x-y ＞2。

  不是命题。因为x, y的值不确定，某些x, y使x−y＞2为真，某些x, y使x−y＞2为假，即x−y＞2的真假随x, y的值的变化而变化。因此x−y＞2的真假无法确定，所以x−y＞2不是命题。

- 6）不在同一直线上的三点确定一个平面。

  是命题。

- 7）北京是中华人民共和国的首都。

  是命题。

- 8）下一个星期天会下雪。

  是命题。因为它的真值虽然目前无法确定，但它是有唯一真值的。

1.1.1 命题

- 9）这碗汤味淡了。

是命题。它的真假似乎不能唯一的判定，因为它因人而异，但这个语句的真假取决于说话人的主观判断（即可以认为此语句是“我认为这碗汤味淡了”的缩写）。

- 10）1011+1000=10011。

是命题，虽然当它表示的数是十进制数或其他非二进制数时此语句是假的，当它表示的数为二进制数时，此命题是真的。但是，这个语句毕竟是处于一系列语句中的一个特定位置上，由前后文关系，立即可以确定它所表示的数是二进制数还是非二进制数，并且一个数不可能既是二进制数，又是其他非二进制数。故此语句是能分辨真假的。

1.1.2 命题的分类

- 命题可以分为两种类型：
  - 一种命题是不能再分解为更简单命题的，称作原子命题，又可称为简单命题；
  - 另一种命题是通过联结词、标点符号将原子命题联结而成，称作复合命题。例如：
    - 1）玫瑰是红的并且紫罗兰是蓝的。
    - 2）如果明天是个好天气，我们就去野炊。
- 复合命题的基本性质是：其真值可以由其原子命题的真值以及它们复合成该复合命题的联结方式确定。

1.1.3 命题标识符

❖ 命题标识符

- 为了能用数学的方法来研究命题之间的逻辑关系和推理，需要将命题符号化。
- 通常使用大写字母P, Q, …或用带下标的大写字母或用数字，如A_i，[12]等表示命题。
  - 例如： P：今天下雨
  - 意味着P表示“今天下雨”这个命题的名。
  - 也可用数字表示此命题
  - 例如： [12]：今天下雨
- 表示命题的符号称为命题标识符，P和[12]就是命题标识符。

1.1.3 命题标识符

- 命题常元
  - 一个命题标识符如果表示确定的简单命题，就称为命题常元。
- 命题变元
  - 如果一个命题标识符只表示任意简单命题的位置标志，就称它为命题变元。
  - 因为命题变元可以表示任意简单命题，所以它不能确定真值，故命题变元不是命题。
- 指派
  - 当命题变元P用一个特定的简单命题取代时，P才能确定真值，这时也称对P进行指派。

小结

- 只有陈述句才有可能是命题，但并不是所有的陈述句都能成为命题。
- 本小节的思维形式注记图：

命题
- 特征
  - 陈述句
  - 真(1)或假(0)
- 分类
  - 原子命题
  - 复合命题(联结词，标点，简单命题)
- 命题标识符：大写字母，大写字母加下标，数字

1.2 联 结 词

联结词：确定复合命题的逻辑形式。

- 原子命题和联结词可以组合成复合命题。
- 联结词确定复合命题的逻辑形式，它来源于自然语言中的联结词，但与自然语言中的联结词有一定的差别；
- 从本质上讲，这里讨论的联结词只注重“真值”，而不顾及具体内容，故亦称“真值联结词”。

1.2.1 否定联结词

- 定义1.1 设P为任一命题，复合命题“非P”（或“P的否定”）称为P的否定式，记作¬P，读作“非P”。¬称为否定联结词。
- ¬P的逻辑关系为P不成立，¬P为真当且仅当P为假。
- 命题P的真值与其否定¬P的真值之间的关系

P	¬ P
0	1
1	0

1.2.1 否定联结词

例1.2 设 P：这是一个三角形

¬P：这不是一个三角形

例1.3 设 P：雪是白色的

¬P：雪不是白色的

在此例中，不能将¬P认为是命题“雪是黑色的”。因为雪不是白色的情况中有蓝色、红色等许多种可能。

- 在日常语言中，还可以用“非”、“不”、“没有”、“无”、“并不”等多种方式表示否定。

1.2.2 合取联结词

- 定义1.2 设P,Q为任意二命题，复合命题“P并且Q”（或“P与Q”）称为P和Q的合取式，记作P∧Q，读作“P与Q”，∧称为合取联结词。
- P∧Q的逻辑关系为P与Q同时成立。P∧Q为真当且仅当P与Q同时为真。
- 命题P∧Q的真值与命题P和命题Q的真值之间的关系如表所示。

P	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.2 合取联结词

- 在自然语言中，还可用“并且”、“同时”、“以及”、“既……又……”、“不但……而且……”、“虽然……但是……”等多种方式表达合取。

例1.4 设 P：今天打雷

Q：今天下雨

则 $P \wedge Q$：今天打雷且下雨

例1.5 设 P：小李在看书

Q：小李在听音乐

则 $P \wedge Q$：小李一边在看书，一边在听音乐

1.2.3 析取联结词

- 定义1.3　设P,Q为任意二命题，复合命题“P或Q”称为P和Q的析取式。记作P∨Q，读作“P或Q”，∨称为析取联结词。
- P∨Q的逻辑关系为P与Q中至少一个成立。P∨Q为真当且仅当P与Q中至少一个为真。
- 命题P∨Q的真值与命题P和命题Q的真值之间的关系如表所示。

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.2.3 析取联结词

- 联结词∨是可兼或，因为当命题P和Q的真值都为真时，其值也为真。但自然语言中的“或”既可以是“排斥或”也可以是“可兼或”。

例1.6 晚上我们去教室学习或去电影院看电影。（排斥或）

例1.7 他可能数学考了100分或英语考了100分。（可兼或）

例1.8 刘静今天跑了200米或300米远。（既不表示“可兼或”也不表示“排斥或”，它只是表示刘静所跑的大概路程，因此它不是命题联结词，故例1.8是原子命题。）

1.2.3 析取联结词

- 由以上例子可以看出联结词“∨”和自然语言中的“或”的意义不完全相同。
- 与“∧”联结词相似，在自然语言中，通常是具有某种关系的两条语句之间使用析取“或”，但在数理逻辑中，任何两个命题都可以通过用析取“∨”联结起来得到一个新命题。

例1.9 设 P：今天打雷

Q：今天打闪

则 P∨Q：今天打雷或今天打闪

例1.10 设 P：今天是星期一

Q：今天天气很好

则 P∨Q：今天是星期一或天气很好

1.2.4 蕴涵联结词

- 定义1.4 设P,Q为任意二命题，复合命题“如果P，则Q”称为P和Q的蕴涵式，记为$P \to Q$，读作“如果P则Q”。$\to$称为蕴涵联结词。称P为前件，Q为后件。
- $P \to Q$的逻辑关系为Q是P的必要条件。$P \to Q$为假当且仅当P为真Q为假。
- 命题$P\to Q$的真值与命题P和命题Q的真值之间的关系如表所示。

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1.2.4 蕴涵联结词

- 说明：
  - 1）蕴涵联结词也称为条件联结词。“如果P，则Q”也称为P与Q的条件式。
  - 2）务必注意:蕴涵式的真值关系不太符合自然语言中的习惯.
  - 3）给定命题公式$P\rightarrow Q$，命题公式$Q\rightarrow P$称为$P\rightarrow Q$的逆换式；$\neg P\rightarrow\neg Q$称为$P\rightarrow Q$的反换式；$\neg Q\rightarrow\neg P$称为它的逆反式。逆换式类似于中学数学里所学的命题的逆命题；反换式类似于否命题；逆反式类似于逆否命题。

1.2.4 蕴涵联结词

例1.11 甲对乙说："如果今晚我们班上不开会，则我就和你一起去玩。"请问：在什么情形下，乙认为甲的这句话是假？

解：如果班上没有开会，甲与乙一起去玩，则自然认为甲说的话为真；

如果班上没有开会，甲没有与乙一起去玩，则显然认为甲的话为假；

如果班上开会了，甲没有与乙一起去玩，则没有理由认为甲的话为假；

如果班上开会了，但甲未参加而与乙一起去玩了，则也不能认为甲的话为假。

- 在自然语言中，对于"如果……则……"这样的语句，当前提为假时，结论不管真假，这个语句的意义是无法判断的。因此在条件命题中，当前提为假时无论结论真值如何，其取值都为真的情况称为"善意的推定"。

1.2.4 蕴涵联结词

例1.12 设 P：明天天气晴朗

Q：我们就去郊游

则 $P \to Q$：如果明天天气晴朗，我们就去郊游。

例1.13 设 P：a＞4

Q：a^2＞16

则 $P \to Q$：如果a＞4，则a^2＞16。

- 对于“如果P则Q”在日常语言中有多种表达方式，诸如“只要P就Q”、“当P则Q”、“因为P所以Q”、“P仅当Q”、“只有Q才P”、“除非Q才P”、“除非Q，否则非P”等。尽管叙述的方式表面看起来不同，但只要表示Q是P的必要条件，都可以符号化为$P \to Q$。

1.2.5 等价联结词

- 定义1.5 设P,Q为任意二命题，复合命题“P当且仅当Q”称为命题P和Q的等价式。记为$P \leftrightarrow Q$，读作“P当且仅当Q”，$\leftrightarrow$称作等价联结词。
- $P \leftrightarrow Q$的逻辑关系为P与Q互为充分必要条件。$P \leftrightarrow Q$为真当且仅当P与Q同时为真或同时为假。
- 命题$P \leftrightarrow Q$的真值与命题P和命题Q的真值之间的关系如表所示。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.5 等价联结词

❖ 说明：

- 1）等价联结词也称为双条件联结词。“P当且仅当Q”也称为P与Q的双条件式。
- 2）“P当且仅当Q”的含义与“若P则Q，并且若Q则P”的含义相同，即$P \leftrightarrow Q$与$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$逻辑关系完全一样。

1.2.5 等价联结词

例1.14 设 P：四边形ABCD是平行四边形

Q：ABCD的对边平行

则 $P \leftrightarrow Q$：四边形ABCD是平行四边形，当且仅当它的对边平行。

例1.15 设 P：5＞3

Q：5−3＞0

则 $P \leftrightarrow Q$：5＞3当且仅当5−3＞0

- 与联结词“∧”、“∨”、“→”一样，等价式“$P \leftrightarrow Q$”的构成也不要求命题P和命题Q之间存在任何联系，它的真值仅仅与P和Q的真值有关。

1.2.5 复合命题的真值

❖ 使用多个联结词可以组成更复杂的复合命题，并可使用圆括号（、），（、）必须成对出现。

❖ 联结词的运算优先顺序为：（），¬，∧，∨，→，↔；同一优先级的运算从左至右顺序进行。

例1.16 设 P：5＞3

Q：2+2=4

R：乌鸦是白色的

求下列复合命题的真值：

1）$((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \wedge R$

2）$(Q \vee R) \rightarrow (P \rightarrow \neg R)$

解：P，Q，R的真值分别为1，1，0，根据运算规则算出1），2）的真值分别是0，1。

小结

- 在命题逻辑中，否定联结词、合取联结词和析取联结词这三个联结词就足够了，但为了方便，还定义了其他的联结词。
- 析取联结词是可兼的也可称为是相容的。
- 象初等代数的运算一样，析取联结词和合取联结词也都满足交换律和结合律。

小结

❖ **本小节的思维形式注记图：**

联结词

¬假为真，真为假，对应（非、不、没有、无、并不 ）

∧一个为假就为假，对应（并且、同时、以及、既…又…、
不但…而且…、虽然…但是… ）

∨一个为真就为真，对应（或）

→前真后假才为假，对应（当…则…、因为…所以… 、仅当、只有…才… 、
除非…才…、除非… ，否则非…）

↔同真同假才为真，对应（当且仅当、充分必要）

作业

- 扩展阅读：1.A, 1.B, 1.C
- 掌握联结词的定义
- 习题： 1(判断是否是命题)

1.3 命题公式

命题公式：由命题变元、联结词和括号按照一定的规则组成的字符串。

1.3.1 命题公式的定义

- 定义1.6 命题演算的合式公式，又称命题公式（简称公式），是如下递归定义的：
  - 1）单个命题变元是合式公式，并简称为原子命题公式；
  - 2）如果A是合式公式，那么$(\neg A)$也是合式公式；
  - 3）如果A, B都是合式公式，那么$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$都是合式公式；
  - 4）当且仅当有限次地应用1), 2), 3)所得到的字符串是合式公式。
- 根据定义1.6可知，P, $(\neg P)$, $(P \rightarrow (P \vee Q))$, $((\neg P \wedge Q) \wedge P)$, $((P \leftrightarrow Q) \rightarrow R)$都是命题公式。而$(\vee P)$, $(P \leftrightarrow Q$, $(P \vee Q) \rightarrow R)$都不是命题公式。

1.3.1 命题公式的定义

- 注意：
- 这个合式公式的定义，是以递归形式给出的，其中1）称为基础，2）3）称为归纳，4）称为界限。
- 命题公式本身不一定是命题，只有对公式中的每一个命题变元指派真值后它才是一个命题。
- 由命题变元、联结词和圆括号组成的字符串可构成命题公式，但并不是由这三类字符组成的每一个字符串都可以成为命题公式。

1.3.1 命题公式的定义

- 定义1.7 如果一个命题公式中总共包含有n个不同的命题变元，则称其为n元命题公式。

例1.17 $((P\land Q)\rightarrow(\neg(Q\land R)))$是三元命题公式

$(\neg P)$是一元命题公式。

- 按照如下原则，可以减少公式中括号的数量：
  - 1）省去最外层括号，如$(\neg P)$, $(P\rightarrow Q)$可以分别写为$\neg P$和$P\rightarrow Q$;
  - 2）规定5个联结词运算的优先级顺序为：$\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow$;
  - 3）同级的联结词，按其出现的先后次序（从左到右）。

例1.18 $((P\rightarrow((Q\land(\neg R))\lor S))\leftrightarrow T)$ 可简化为 $P\rightarrow Q\land\neg R\lor S\leftrightarrow T$

$(((P\rightarrow Q)\land(\neg R)\lor S)\leftrightarrow T)$ 可简化为 $(P\rightarrow Q)\land\neg R\lor S\leftrightarrow T$

1.3.2 命题公式的层次

- 定义1.8 1）若公式A是单个的命题变元，则称A为0层公式。

  2）称A是n+1（n≥0）层公式是指下面情况之一：

  - （1）$A=\neg B$, B是n层公式；
  - （2）$A=B\wedge C$,其中B, C分别为i层和j层公式，且$n=\max(i,j)$;
  - （3）$A=B\vee C$,其中B, C的层次同（2）；
  - （4）$A=B\rightarrow C$,其中B, C的层次同（2）；
  - （5）$A=B\leftrightarrow C$,其中B, C的层次同（2）；

  3）若公式A的层次为k,则称A是k层公式。

例1.19 $(\neg P\wedge Q)\rightarrow R$为3层公式。

$(\neg(P\rightarrow\neg Q))\wedge((R\vee S)\leftrightarrow\neg P)$ 为4层公式。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- 定义1.9 设$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现在公式A中的所有命题变元，给$P_1, P_2, \ldots, P_n$各指派一个真值，称为对A的一个赋值或解释。若指派的一组值使A的值为1，则称这组值为A的成真赋值。若使A的值为0，则称这组值为A的成假赋值。

例1.20 给出公式：$(P \vee Q) \rightarrow R$的两种赋值，使公式的值分别为真和假。

解：1）将P解释为：2是偶数，Q为3是偶数，R解释为：2+3是偶数。显然P,Q,R的真值分别是1，0，0，故$(P \vee Q) \rightarrow R$的真值为0。

2）将P解释为：2是偶数，Q解释为3是偶数，R解释为2*3是偶数。显然P,Q,R的真值分别是1，0，1，故$(P \vee Q) \rightarrow R$的真值为1。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- 本书中，含n个命题变元的命题公式的赋值形式作如下规定：
  - 1）设A中含的命题变元为$P_1, P_2, \ldots, P_n$，赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$($\alpha_i$为0或1)是指$P_1=\alpha_1, P_2=\alpha_2\ldots P_n=\alpha_n$。
  - 2）设A中含的命题变元为P, Q, R …，赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$($\alpha_i$为0或1)是指$P=\alpha_1, Q=\alpha_2, \ldots$，即按字典顺序赋值。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- **定义1.10** 设$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现在公式A中的所有命题变元，将公式A在所有2^n个赋值下的取值情况列成表，称为A的**真值表**。

- **构造真值表的具体步骤：**
  - 1）找出公式中所含的全体命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$(若无下标就按字典顺序排列)，列出所有可能2^n个赋值；
    - 建议：赋值从00…0开始，然后按二进制加法依次写出各赋值，直到11…1为止。
  - 2）按从低到高的顺序写出公式的各个层次；
  - 3）对应各个赋值，计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

例1.21 试构造$(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$的真值表。

解：第一步：列出全体命题变元P, Q, R及其所有的可能赋值；

P Q R				
0 0 0				
0 0 1				
0 1 0				
0 1 1				
1 0 0				
1 0 1				
1 1 0				
1 1 1				

例1.21 试构造$(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$的真值表。

第二步：从低到高的顺序写出公式的各个层次；

P Q R	$\neg P$	$\neg R$	$\neg P \wedge Q$	$(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$
0 0 0				
0 0 1				
0 1 0				
0 1 1				
1 0 0				
1 0 1				
1 1 0				
1 1 1				

例1.21 试构造$(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$的真值表。

第三步：对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值。

P Q R	$\neg P$	$\neg R$	$\neg P \wedge Q$	$(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	0	1	0
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	1	0	1
1 1 1	0	0	0	1

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

例1.22 试构造$(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg Q)$的真值表。

解：

P Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\vee\neg P$	$Q\vee\neg Q$	$(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg Q)$
0 0	1	1	1	1	1
0 1	1	0	1	1	1
1 0	0	1	1	1	1
1 1	0	0	1	1	1

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

例1.23 试构造¬(P→Q)∧Q∧R的真值表。

解：

P Q R	P→Q	¬(P→Q)	¬(P→Q)∧Q	¬(P→Q)∧Q∧R
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	0	0
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	0	0	0

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

❖ 定义1.11 设A为任一命题公式，

- 1）若A在它的所有赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式；
- 2）若A在它的所有赋值下取值均为假，则称A是矛盾式或永假式；
- 3）若A不是矛盾式，则称A是可满足式。

❖ 从定义1.11不难看出以下几点：

- 1）A是可满足式的逻辑等价定义是：A至少存在一个成真赋值。
- 2）重言式一定是可满足式，但反之未必。因而，若公式A是可满足式，且它至少存在一个成假赋值，则称A为非重言式的可满足式。
- 3）重言式的否定是矛盾式，矛盾式的否定是重言式。

1.3.3 命题公式的赋值与真值表

- 真值表可用来判断公式的类型：
  - 1）若真值表最后一列（即命题公式对应的真值）全为1，则公式为重言式；
  - 2）若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式；
  - 3）若真值表最后一列中至少有一个1，则公式为可满足式。
- 但当公式中命题变元较多时，真值表的方法计算量大，后面我们会介绍其他的方法。

1.3.4 命题的符号化

- 将一个用文字叙述的命题写成由命题标识符、联结词和括号表示的命题公式的过程，称为命题的符号化，或称为命题的翻译。
- 在数理逻辑中，进行推理的第一步就是将命题符号化。其大概步骤如下：
  - 1）找出命题中所包含的原子命题并用命题标识符表示；
  - 2）确定命题中的连词对应的联结词；
  - 3）用正确的语法将原命题表示成由命题标识符、联结词和括号组成的命题公式。

1.3.4 命题的符号化

例1.24 虽然这一次你取得了第一名，但这并不代表你永远是第一名。

解：设P：这一次你取得了第一名

Q：这代表你永远是第一名

原命题可表示为 $P\wedge\neg Q$。

例1.25 她不但外表美而且心灵美。

解：本例中的“不但……而且……”的意义是合取的意思。

设 P：她的外表美

Q：她的心灵美

原命题可表示为 $P\wedge Q$。

1.3.4 命题的符号化

例1.26 除非你努力，否则你将失败。

解：本命题的意义可理解为：如果你不努力，那么你将失败。

设 P：你努力

Q：你将失败

原命题可表示为 $\neg P \rightarrow Q$。

原命题可表示为 $\neg Q \rightarrow P$(如果你没失败，那么你努力了或除非你努力才能不失败)。

例1.27 张三或李四都可以做这件事。

解：本命题的意义是：张三可以做这件事，并且李四也可以做这件事。

设 P：张三可以做这件事

Q：李四可以做这件事

原命题可表示为 $P \wedge Q$。

1.3.4 命题的符号化

例1.28 伦敦到巴黎的第K123次列车是上午9点或10点开。

解 本命题中由两个原子命题，分别用命题标识符P、Q表示为

P：伦敦到巴黎的第K123次列车是上午9点开

Q：伦敦到巴黎的第K123次列车是上午10点开

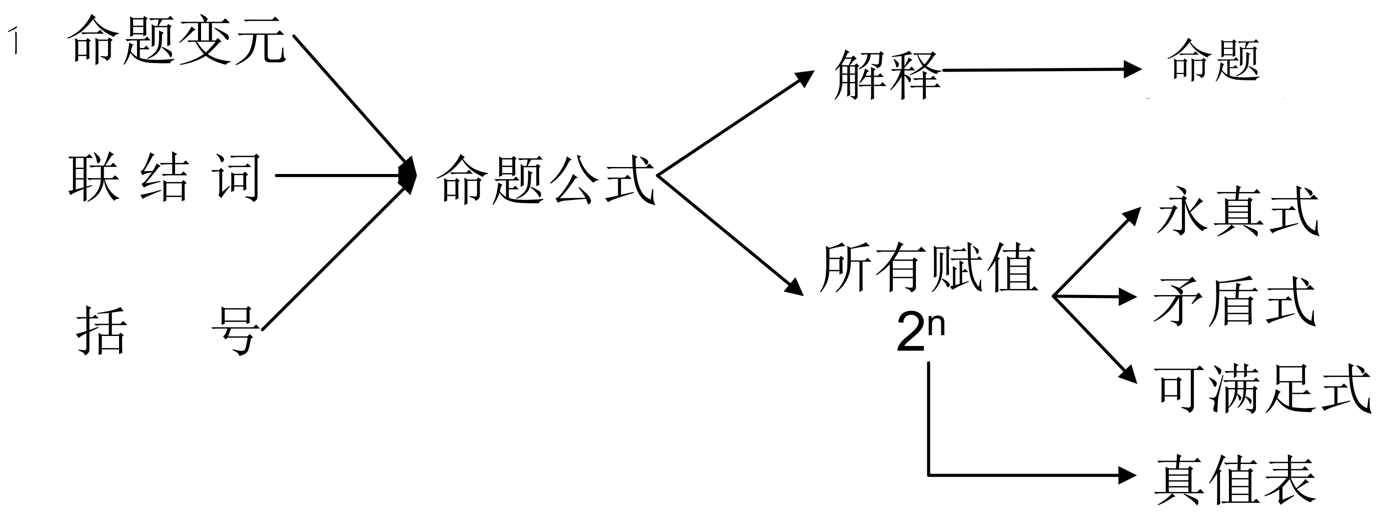
根据实际情况，可分析本例中的“或”是不可兼或，但联结词∨是“可兼或”。因此原命题一般不能表示为P∨Q。

P Q	原命题	原命题的否定
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

从上表可看出仅用联结词中的任何一个都不能描述原命题中的不可兼或。但若将表中原命题的真值分别取反，则原命题的否定可表示为P ↔ Q。因此原命题可表示为¬(P↔Q)。

小结

- 命题公式赋值后成为命题。
- 命题公式分为：重言式、矛盾式和非重言式的可满足式。
- 真值表可以判断命题公式的类型。
- 本小节的思维形式注记图：



练习&作业

例. 下面命题符号化，并指出真值

(1) 只要8能被4整除, 8就能被2整除.

(2) 因为8能被4整除, 所以8能被2整除.

(3) 8能被4整除仅当8能被2整除.

(4) 8能被4整除当8能被2整除.

(5) 只有8能被4整除才有8能被2整除.

(6) 除非8能被4整除8才能被2整除.

(7) 除非8能被4整除, 否则非8能被2整除.

作业：习题1,2

1.4 命题公式间的关系

公式间两类重要的关系：逻辑等价和逻辑蕴涵。

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 定义1.12 设A, B是两个命题公式，若对出现在A与B中的所有命题变元的任一组赋值，公式A和B的真值都相同，则称公式A与B是逻辑等价或称逻辑相等，记作A⇔B.
- 逻辑等价也称为等价的、逻辑等值的、等值的。
- A, B构成的等价式A↔B为重言式。
- 在此要注意区别“⇔”与“↔”：
  - 首先，“↔”是一种逻辑联结词，是一种逻辑运算，A↔B的结果仍是一个命题公式。
  - 而逻辑等价“⇔”则是描述了两个公式A与B之间的一种逻辑关系，A⇔B表示“命题公式A与命题公式B是逻辑等价的”，A⇔B的结果不是命题公式。

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 为了判断两个公式是否是逻辑等价，一般可以通过将两个公式的真值表列出，判断两个真值表是否相同来判定。

例1.29 试判断$(P\land Q)\lor(P\land \neg Q)$与$P$是否是逻辑等价的。

解：这两个公式的真值表如表所示。

P Q	$(P\land Q)\lor(P\land \neg Q)$	P
0 0	0	0
0 1	0	0
1 0	1	1
1 1	1	1

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 最基本、最重要的逻辑等价公式：
  - 1）双重否定律

    $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

  - 2）幂等律

    $A \Leftrightarrow A \vee A$

    $A \Leftrightarrow A \wedge A$

  - 3）交换律

    $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

    $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

  - 4）结合律

    $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

    $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 5）分配律

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ （∨对∧的分配律）

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ （∧对∨的分配律）

- 6）德摩根律

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

- 7）吸收律

$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

- 8）零律

$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$

$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 9）同一律

  $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

  $A \vee 0 \Leftrightarrow A$

- 10）排中律

  $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

- 11）矛盾律

  $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

- 12）蕴涵律

  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

- 13）等价律

  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

1.4.1 命题公式间的逻辑等价

- 14）假言易位律

  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

- 15）等价否定律

  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

- 16）归谬律

  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

- 由于A,B,C可以代表任意的公式，因而称这样的逻辑等价式为命题定律，每个命题定律都给出了无穷多个同类型的具体的逻辑等价式。
- 如：在蕴涵律中，取A=P，B=Q时，得逻辑等价式$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$；当取$A=P \vee R$，$B=P \wedge Q$时，得逻辑等价式$(P \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg (P \vee R) \vee (P \wedge Q)$；这些具体的逻辑等价式都被称为原来命题定律的代入实例。

1.4.2 等价置换

- 定义1.13 如果X是命题公式A的连续的一部分，且X本身也是一个命题公式，则称X为公式A的子公式。

例1.30 公式$(\neg B\wedge C)$是公式$(\neg A\wedge(\neg B\wedge C))\vee(B\wedge C)\vee(A\wedge C)$的子公式，

但$\vee(B\wedge C)$却不是公式$(\neg A\wedge(\neg B\wedge C))\vee(B\wedge C)\vee(A\wedge C)$的子公式，

因为$\vee(B\wedge C)$虽是公式$(\neg A\wedge(\neg B\wedge C))\vee(B\wedge C)\vee(A\wedge C)$中连续的一部分，但它自身不是公式。

1.4.2 等价置换

- **定理1.1（置换规则）** 设X是公式A的子公式且X ⇔ Y，若B是在A中一处或多处出现的X代以Y所得的公式，则A ⇔ B。

证：欲证A ⇔ B只需证A ↔B是重言式即可。

对于包含在A和B中的一切命题变元的任意一个赋值，A与B的差别仅在于X出现的某些地方替换成了Y，由于X ⇔ Y，那么对任意赋值X与Y的真值都相同，故A与B的取值也相同，从而A ↔B的真值为1。又由于赋值的任意性，故A ↔ B恒取值为1。即A ↔B是重言式，所以A ⇔ B。

证毕。

- 满足定理1.1条件的置换称为等价置换（或等价代换）。

1.4.2 等价置换

- 利用已知的最基本逻辑等价式和等价置换不仅可以证明一些较为复杂的命题公式间的逻辑等价、判断公式的类型，并且进行一些实际问题的分析，此类方法称为逻辑等价演算或等值演算的方法。
- 1）利用逻辑等价演算的方法，验证公式间的逻辑等价

例1.31 证明$(P\rightarrow Q)\rightarrow R \Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

证：（从左边开始）

$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\rightarrow R$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$ (蕴涵律)

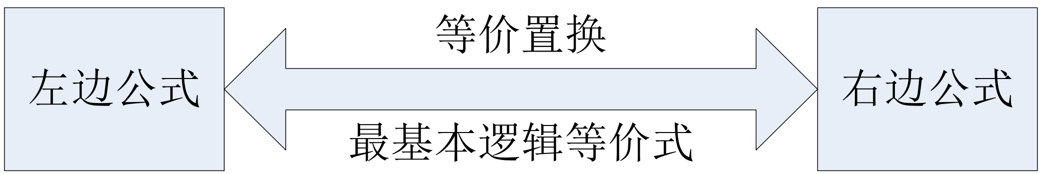
$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee R$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ (分配律)

证毕。

1.4.2 等价置换

- 说明：由于公式之间的逻辑等价具有自反性、对称性和传递性，所以上述演算中得到的5个公式彼此之间都是逻辑等价的。
- 注记：利用逻辑等价演算验证两公式间是逻辑等价的思维形式注记图



例1.32 证明 $(P\vee Q)\to R \Leftrightarrow (P\to R)\wedge(Q\to R)$

证：（从右边开始）

$(P\to R)\wedge(Q\to R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q)\vee R$ (分配律)

$\Leftrightarrow \neg(P\vee Q)\vee R$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\to R$ (蕴涵律)

证毕。

1.4.2 等价置换

- 2）判断公式类型

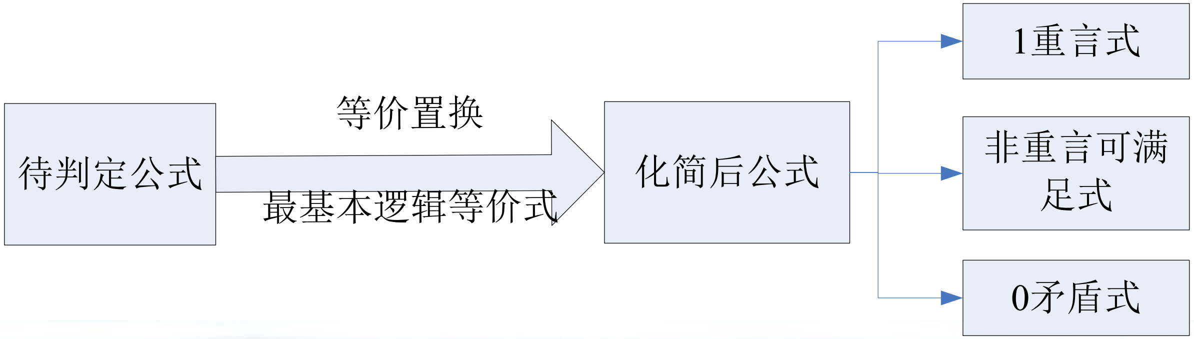
例1.33 利用逻辑等价演算，判断下列公式的类型

（1）$(P\to Q)\wedge P\to Q$

（2）$\neg(P\to(P\vee Q))\wedge R$

（3）$P\wedge(((P\vee Q)\wedge\neg P)\to Q)$

注记：利用逻辑等价演算，进行公式类型判断的基本思路是：通过等价置换将原公式化简到较简单的形式，如果和1逻辑等价，则原公式为重言式；如果和0逻辑等价，则原公式为矛盾式；如果不是以上两种形式，也可以较方便地判断公式的类型。思维形式注记图如图所示：



1.4.2 等价置换

解：（1）$(P\rightarrow Q)\wedge P\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge P\rightarrow Q$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)\vee Q$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow(\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg P)\vee Q$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee\neg P)\vee Q$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow((P\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg P))\vee Q$ (分配律)

$\Leftrightarrow(1\wedge(\neg Q\vee\neg P))\vee Q$ (排中律)

$\Leftrightarrow(\neg Q\vee\neg P)\vee Q$ (同一律)

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee Q$ (交换律)

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee Q)$ (结合律)

$\Leftrightarrow\neg P\vee 1$ (排中律)

$\Leftrightarrow 1$ (零律)

该公式为重言式。

1.4.2 等价置换

（2）$\neg(P\rightarrow(P\vee Q))\wedge R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee(P\vee Q))\wedge R$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg(P\vee Q))\wedge R$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg P\wedge\neg Q)\wedge R$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow(0\wedge\neg Q)\wedge R$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow 0\wedge R$ (零律)

$\Leftrightarrow 0$ (零律)

该公式为矛盾式。

1.4.2 等价置换

（3）$P\wedge(((P\vee Q)\wedge\neg P)\to Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg((P\vee Q)\wedge\neg P)\vee Q)$ (蕴涵律)

$\Leftrightarrow P\wedge((\neg(P\vee Q)\vee P)\vee Q)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow P\wedge((\neg P\wedge\neg Q)\vee P)\vee Q)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (P\wedge((\neg P\wedge\neg Q)\vee P))\vee(P\wedge Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow P\vee(P\wedge Q)$ (吸收律)

$\Leftrightarrow P$ (吸收律)

- 因为有成真赋值和成假赋值，所以该公式为可满足式。
- 由上例可以看出，由于逻辑等价演算的目标不很明确，所以利用逻辑等价关系判断公式类型不是很方便，特别是判断非重言式的可满足式就更不方便了。

1.4.2 等价置换

❖ 3）实际问题分析

例1.34 在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断：

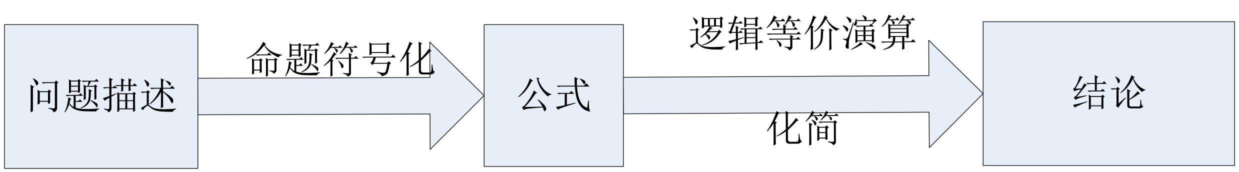
甲说王教授不是苏州人，是上海人。

乙说王教授不是上海人，是苏州人。

丙说王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完以上3人的判断后，王教授笑着说，他们3人中有一人说的全对，有一人说对了一半，另一人说的全不对。试用逻辑等价演算法分析王教授到底是哪里人？

❖ 注记：此类自然语言描述的问题要通过逻辑等价演算法分析，首先要对问题描述进行命题的符号化得到该问题对应的命题公式，然后，利用逻辑等价演算的方法对公式进行化简，最后得到结论。思维形式注记图所示：



1.4.2 等价置换

解：设 P：王教授是苏州人。 Q：王教授是上海人 。 R：王教授是杭州人。

P,Q,R中必有一个真命题，两个假命题，要通过逻辑演算将真命题找出来。

设甲的判断为$A1=\neg P\wedge Q$　乙的判断为$A2=P\wedge\neg Q$　丙的判断为$A3=\neg Q\wedge\neg R$

则 甲的判断全对 $B1=A1=\neg P\wedge Q$；甲的判断对一半 $B2=((\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q))$；甲的判断全错 $B3=P\wedge\neg Q$

乙的判断全对 $C1=A2=P\wedge\neg Q$；乙的判断对一半 $C2=((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))$；乙的判断全错 $C3=\neg P\wedge Q$

丙的判断全对 $D1=A3=\neg Q\wedge\neg R$；丙的判断对一半 $D2=(Q\wedge\neg R)\vee(\neg Q\wedge R))$；丙的判断全错 $D3=Q\wedge R$

由王教授所说

$E=(B1\wedge C2\wedge D3)\vee(B1\wedge C3\wedge D2)\vee(B2\wedge C1\wedge D3)\vee(B2\wedge C3\wedge D1)\vee(B3\vee C1\wedge D2)\vee(B3\wedge C2\wedge D1)$ 为真命题。

1.4.2 等价置换

而 $B1 \wedge C2 \wedge D3 = (\neg P \wedge Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (((\neg P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q))) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q)) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow 0$

$B1 \wedge C3 \wedge D2 = (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \wedge ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$

$B2 \wedge C1 \wedge D3 = ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (P \wedge \neg Q) \wedge (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge 0$

$\Leftrightarrow 0$

1.4.2 等价置换

类似可得 $B2 \wedge C3 \wedge D1 \Leftrightarrow 0$

$$B3 \wedge C1 \wedge D2 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$$

$$B3 \wedge C2 \wedge D1 \Leftrightarrow 0$$

于是，由同一律可知

$$E \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

但因为王教授不能既是上海人，又是杭州人，因而P,R必有一个假命题

即$P \wedge \neg Q \wedge R \Leftrightarrow 0$，于是

$$E \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$

为真命题。

因而必有P,R为假命题，Q为真命题，即王教授是上海人。甲说的全对，丙说对了一半，而乙全说错了。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

- 定义1.14 设A、B是任意公式，若A→B是重言式，则称A逻辑蕴涵B，记为$A \Rightarrow B$。
- 在此要注意区别“⇒”与“→”：首先，“→”是一种逻辑联结词，A→B是命题公式，其中“→”是一种逻辑运算，A→B的结果仍是一个命题公式。而“⇒”则是描述了两个公式A与B之间的一种关系，“$A \Rightarrow B$”仅仅表示公式间的一种关系，它不是公式，而“⇒”也不是联结词。
- 为了证明两个公式间具有逻辑蕴涵关系，即欲要证明$A \Rightarrow B$，可以用列真值表的办法，证明$A \to B$是重言式即可。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

例1.35 试证$P\wedge Q \Rightarrow P$。

证：列出如表所示的真值表。

P Q	$P\wedge Q$	$P\wedge Q \rightarrow P$
0 0	0	1
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	1

公式$P\wedge Q \rightarrow P$是重言式，根据定义1.14，故$P\wedge Q \Rightarrow P$。

就像联结词$\leftrightarrow$与$\rightarrow$的关系一样，逻辑等价和逻辑蕴涵之间也有紧密地联系。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

❖ 定理1.2 设A、B为任意两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$的充分必要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$。

证：先证必要性。

因为$A \Leftrightarrow B$，则$A \leftrightarrow B$是重言式，又因为$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$，所以$(A \to B)$和$(B \to A)$均为重言式，因此$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$。

再证充分性。

因为$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，故$(A \to B)$和$(B \to A)$均为重言式，从而$(A \to B) \wedge (B \to A)$是重言式，又由于$(A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$，故$A \leftrightarrow B$是重言式，因此$A \Leftrightarrow B$。

证毕。

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

- 最基本、最重要的逻辑蕴涵公式（称为推理定律）

1）附加律

$A \Rightarrow (A \vee B)$

2）化简律

$(A \wedge B) \Rightarrow A$

3）假言推理

$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$

4）拒取式

$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

5）析取三段论

$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

6）假言三段论

$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

1.4.3 命题公式间的逻辑蕴涵

7）等价三段论

$$(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$$

8）构造性二难

$$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$$

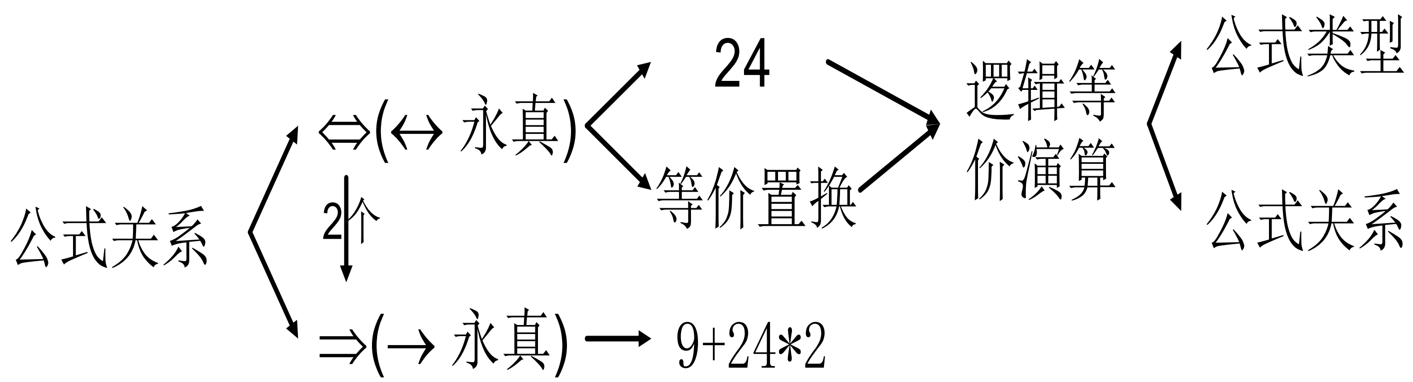
9）破坏性二难

$$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$$

- 这9组逻辑蕴涵式（推理定律），它将成为命题逻辑推理理论中证明的根据。
- 在1.4.1中的24组逻辑等价式中的每一组都派生出两条推理定律。

小结

- **24组基本逻辑等价式，9组基本逻辑蕴涵式应熟记。**
- 逻辑等价演算可以用于验证公式间的逻辑等价关系、判断公式类型等。
- 逻辑等价和逻辑蕴涵之间有紧密的联系。
- 本小节思维形式注记图：



作业

- 习题5

1.5 对偶与范式

任一命题公式都存在着与之逻辑等价的主析取和主合取范式，并且是唯一的。

1.5.1* 对偶

❖ 定义1.15 在给定的仅使用联结词¬, ∧, ∨的命题公式A中，若把∧和∨互换，0和1互换而得到一个命题公式A*，则称A*是A的对偶式。

- 显然，A也是A*的对偶式。
- 可见，A*和A互为对偶式且(A*)*=A。

例1.36 写出下列公式的对偶式。

1）$(A \lor B) \land (A \lor C)$

2）$A \land 0$

解：所求得的对偶式为

1）$(A \land B) \lor (A \land C)$

2）$A \lor 1$

❖ 定理1.3 设A*和A互为对偶式，$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现在A和A*中的命题变元，则

1）$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

2）$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

1.5.1* 对偶

- **定理1.4** 设A和B是两个命题公式，若$A \Leftrightarrow B$，则$A^* \Leftrightarrow B^*$。

证：令$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现在公式A和B中的所有命题变元，因为有

$A (P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B (P_1, P_2, \ldots, P_n)$

故 $\neg A (P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow \neg B (P_1, P_2, \ldots, P_n)$

根据定理1.3可得

$\neg A (P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^* (\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

$\neg B (P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B^* (\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n$

因此 $A^* (\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$证毕。

- 说明：
  - 1）对于含有$\neg, \wedge, \vee$之外联结词的公式，必须利用逻辑等价演算将其他联结词消去后，才能求其对偶式。
  - 2）一般情况下，公式与其对偶式不是逻辑等价的。

1.5.2 范式

- 定义1.16 命题变元和命题变元的否定称为文字。
- 定义1.17 仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。
- 一个文字既是简单析取式，又是简单合取式。

例1.37 判断以下公式是否为简单析（合）取式

1) $\neg P$

2) $\neg\neg P$

3) $P \wedge \neg Q$

4) $\neg(P \wedge \neg Q)$

解： 1) 是简单析取式，也是简单合取式；

2) 不是；

3) 是简单合取式；

4) 不是。

1.5.2 范式

- 定理1.5 1）一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式。
  2）一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式。
- 定义1.18 1）由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式。
  2）由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式。
  3）析取范式与合取范式统称为范式。
- 无论是简单析取式或是简单合取式，都既是析取范式又是合取范式。
- 定理1.6 1）一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。
  2）一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

1.5.2 范式

❖ 定理1.7（范式存在定理）任一命题公式都存在与之逻辑等价的析取范式与合取范式。

证：以下的步骤也是求公式范式的步骤（此为构造性证明方法之一）：

1）利用蕴涵律和等价律消去联结词→, ↔

蕴涵律：$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价律：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

2）利用双重否定律消去连续的否定号

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

3）利用德摩根律内移否定号

德摩根律：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

4）利用∨对∧的分配律求合取范式，∧对∨的分配律求析取范式。

∨对∧的分配律：$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

∧对∨的分配律：$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

由以上步骤，可将任一公式化成与之逻辑等价的析取范式或合取范式，

证毕。

1.5.2 范式

❖ 求析（合）取范式的思维形式注记图如图：

$$\text{公式} \xrightarrow[\text{蕴涵律}]{\text{等价律}} \text{消}\rightarrow, \leftrightarrow \xrightarrow[\text{否定律}]{\text{双重}} \text{消}\neg\neg \xrightarrow[\text{根律}]{\text{德摩}} \text{内移}\neg$$

$$\text{内移}\neg \xrightarrow[\text{分配律}]{\wedge\text{对}\vee} \text{析取范式}$$

$$\text{内移}\neg \xrightarrow[\text{分配律}]{\vee\text{对}\wedge} \text{合取范式}$$

1.5.2 范式

例1.38 求$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的析取范式与合取范式

解：1）求析取范式

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\leftrightarrow R$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((\neg P\vee Q)\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow(\neg P\vee Q))$ （消去↔）

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P\vee Q)\vee R)\wedge(\neg R\vee \neg P\vee Q)$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((P\wedge \neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R)$ （否定号内移）

$\Leftrightarrow ((P\wedge \neg Q)\wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R))\vee(R\wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R))$ （∧对∨分配律）

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge \neg P)\vee(P\wedge \neg Q\wedge Q)\vee(P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(R\wedge \neg P)\vee(R\wedge Q)\vee(R\wedge \neg R)$ （∧对∨分配律）

$\Leftrightarrow (P\wedge \neg Q\wedge \neg R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ （矛盾律、同一律、交换律）

1.5.2 范式

2）求合取范式

求析取范式和求合取范式的前两步是相同的，只是在利用分配律时有所不同。

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$ （∨对∧分配律）

1.5.2 范式

例1.39 求公式$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$的析取范式和合取范式。

解：1）求析取范式

$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee R))$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)$ （∧对∨的分配律）

2）求合取范式

求析取方式和求合取范式的前两步是相同的，只是在利用分配律时有所不同。

$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ （∨对∧的分配律）

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ （合取范式同时也是析取范式）

1.5.3 主范式

- 定义1.19 在含有n个命题变元的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变元和它的否定式不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次；且第i个命题变元或它的否定式出现在从左算起的第i位上（若命题变元无脚标，就按字典顺序排列），称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）。
- 1）关于极小项的性质及说明：
  - （1）由于每个命题变元在极小项中以原形或否定式形式出现且仅出现一次，因而n个命题变元共可产生2^n个不同的极小项。
  - （2）每个极小项都有且仅有一个成真赋值；若成真赋值所对应的二进制数转换为十进制数i，就将所对应极小项记作m_i.
  - （3）2^n个极小项两两互不逻辑等价。
  - （4）任意两个不同极小项的合取式永假。
  - （5）2^n个极小项的析取式永真。

1.5.3 主范式

- 2）关于极大项的性质：
  - （1）n个命题变元共可产生2^n个极大项；
  - （2）每个极大项有且仅有一个成假赋值，将其对应的十进制数i做极大项的脚标，记作M_i。
  - （3）2^n个极大项两两互不逻辑等价。
  - （4）任意两个不同极大项的析取式永真。
  - （5）2^n个极大项的合取式永假。

1.5.3 主范式

P, Q形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称

1.5.3 主范式

P, Q形成的极小项与极大项（续）

首先，写名称;

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
		m_0 m_1 m_2 m_3			M_0 M_1 M_2 M_3

1.5.3 主范式

P, Q形成的极小项与极大项（续）

首先，写名称;

其次，填成真（假）赋值;

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
	0 0	m_0		0 0	M_0
	0 1	m_1		0 1	M_1
	1 0	m_2		1 0	M_2
	1 1	m_3		1 1	M_3

1.5.3 主范式

P, Q形成的极小项与极大项（续）

首先，写名称;

其次，填成真（假）赋值;

最后，填公式.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg P\wedge\neg Q$	0 0	m_0	$P\vee Q$	0 0	M_0
$\neg P\wedge Q$	0 1	m_1	$P\vee\neg Q$	0 1	M_1
$P\wedge\neg Q$	1 0	m_2	$\neg P\vee Q$	1 0	M_2
$P\wedge Q$	1 1	m_3	$\neg P\vee\neg Q$	1 1	M_3

1.5.3 主范式

- 定理1.8 设m_i与M_i是命题变元$P_1,P_2,…,P_n$形成的极小项和极大项，则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i; \qquad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

- 定义1.20 1）由有限个极小项构成的析取式称为主析取范式。

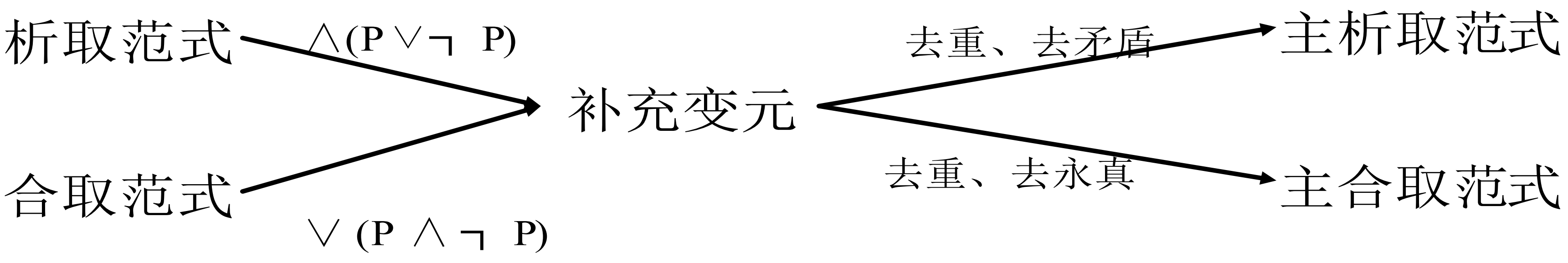
  2）由有限个极大项构成的合取式称为主合取范式。

  3）主析取范式与主合取范式统称为主范式。

- 定理1.9（范式定理） 任何命题公式都存在着与之逻辑等价的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。

1.5.3 主范式

- 基于逻辑等价演算的方法求主范式的步骤如下：
  - 1) 求出析取范式（合取范式）；
  - 2) 补充命题变元；
  - 3) 消去重复出现的极小（大）项和矛盾式（重言式）。
- 求主范式的思维形式注记图如图 所示。



- 注意：在求给定公式的主析取范式（主合取范式）时，一定根据公式中命题变元的个数决定极小项（极大项）中文字的个数。

  在求主范式的过程中，每个极大项和极小项中的命题变元和其否定都应该按照序号或字典顺序，最后**求得的主范式一般用极大项或极小项的符号表示，并且按极小项（极大项）符号的脚标由小到大顺序排列**。

1.5.3 主范式

例1.40 求$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的主析取范式与主合取范式。

解：1）求主析取范式

在例1.38中已求出公式的析取范式：

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$

分析：

（1）因为公式含三个命题变元，所以极小项均由三个文字组成。

（2）简单合取式$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$已是极小项$m_4$。

（3）在此析取范式中，简单合取式$\neg P\wedge R$，$Q\wedge R$都不是极小项。下面分别求出它们派生的极小项（补充命题变元）。

例1.40 求$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的主析取范式与主合取范式

$(\neg P\wedge R)$

$\Leftrightarrow \neg P\wedge(\neg Q\vee Q)\wedge R$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3$

$(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee P)\wedge(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m_3\vee m_7$

于是

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$

例1.40 求$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的主析取范式与主合取范式

2）求主合取范式

在例1.38中已求出公式的合取范式:

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee \neg R)$

分析：

（1）因为公式含三个命题变元，所以极大项均由三个文字组成。

（2）简单析取式$\neg P\vee Q\vee \neg R$已是极大项M_5。

（3）在此合取范式中，简单析取式$P\vee R$，$\neg Q\vee R$都不是极大项。下面分别求出它们派生的极大项（补充命题变元）

例1.40 求$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$的主析取范式与主合取范式

$(P\vee R)$

$\Leftrightarrow P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$

$(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\vee(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow M_2\wedge M_6$

于是

$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_5\wedge M_6$

1.5.3 主范式

- 另两种求主范式的方法：
  - 1）利用真值表求公式的主范式
    - 所有成真赋值对应的极小项的析取式就是主析取范式；
    - 所有成假赋值对应的极大项的合取式就是主合取范式。
  - 2）利用公式的主析（合）取范式求公式的主合（析）取范式
    - 设公式A的主析取范式中含有s个极小项，则A有s个成真赋值，有2^n-s个成假赋值（n为A中含有命题变元的个数），写出各成假赋值对应的极大项，将它们合取起来就为A的主合取范式。
- 已知公式A中含有3个命题变元P，Q，R，且它的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_5 \vee m_7$$

则A的成真赋值为000、010、101、111，易知成假赋值为001、011、100、110，它们对应的极大项分别是$P \vee Q \vee \neg R$、$P \vee \neg Q \vee \neg R$、$\neg P \vee Q \vee R$、$\neg P \vee \neg Q \vee R$，用符号表示为$M_1$，$M_3$，$M_4$和$M_6$，于是，A的主合取范式为

$$A \Leftrightarrow M_1 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_6$$

- 也就是说同一公式的主析取范式的极小项的脚标和主合取范式极大项的脚标是互补的。

1.5.3 主范式

- 主范式有很多用途，在此总结几点：
  - 1）求公式的成真赋值与成假赋值
    - 若公式A中含n个命题变元，A的主析取范式含$s(0\leq s\leq 2^n)$个极小项，则A仅有s个成真赋值，它们是所含极小项脚标的二进制表示，其余2^n-s个赋值都是成假赋值。由此可以给出公式的真值表。
  - 2）判断公式的类型
    - 设公式A中含n个命题变元，容易看出：

    （1） A为重言式当且仅当A的主析取范式含全部2^n个极小项（A的主合取范式不含任何极大项，此时，记A的主合取范式为1）。

    （2） A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项（A的主合取范式含全部2^n个极大项）。此时，记A的主析取范式为0。

    （3） A为可满足式当且仅当A的主析取范式至少含一个极小项（A的主合取范式至多含2^n-1个极大项）。

1.5.3 主范式

- 3）判断两个命题公式是否逻辑等价
  - 设公式A、B共含有 n 个命题变元，按 n 个命题变元求出A与B的主析（合）取范式A’与B’。若A’＝B’, 则A⇔B；否则，A与B不逻辑等价。
- A⇔B当且仅当A与B有相同的真值表，又当且仅当A与B有相同的主范式。因而可以这样说，真值表与主范式是描述命题公式标准形式的两种不同的逻辑等价形式。

1.5.3 主范式

❖ 4）应用主析取范式分析和解决实际问题

例1.41 某科研所要从 3 名科研骨干A、B、C中挑选1～2名出国进修。由于工作原因，选派时要满足以下条件：

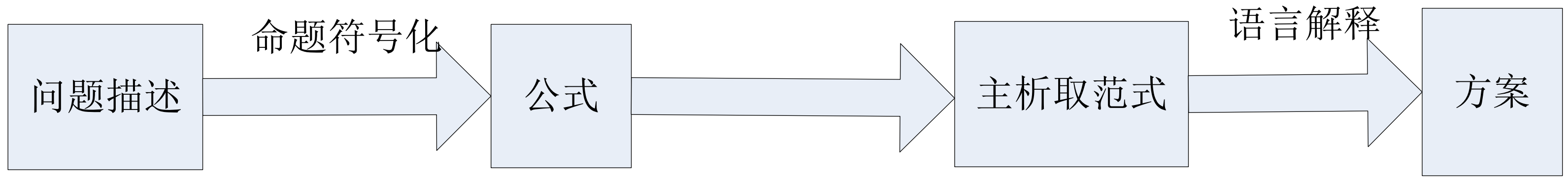
1）若A去，则C同去。

2）若B去，则C不能去。

3）若C不去，则A或B可以去。

问应如何选派他们去？

注记：此类问题要通过求主析取范式的方法分析，首先要对问题描述进行命题符号化得到该问题对应的命题公式，而问题的求解就是求出该命题公式的成真赋值，所以，通过逻辑等价演算求出公式的主析取范式就得到了问题的解决方案。思维形式注记图如图所示。



1.5.3 主范式

解：设 P: 派A去.;　　Q: 派B去;　　R: 派C去.

由已知条件可得公式

$$(P\to R)\land(Q\to\neg R)\land(\neg R\to(P\lor Q))$$

经过演算可得

$$(P\to R)\land(Q\to\neg R)\land(\neg R\to(P\lor Q))$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\lor R)\land(\neg Q\lor\neg R)\land(R\lor(P\lor Q))$$

$$\Leftrightarrow((\neg P\land\neg Q)\lor(\neg P\land\neg R)\lor(\neg Q\land R))\land(P\lor Q\lor R)$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\land\neg Q\land R)\lor(\neg P\land Q\land\neg R)\lor(P\land\neg Q\land R)\lor(\neg Q\land R)$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\land\neg Q\land R)\lor(\neg P\land Q\land\neg R)\lor(P\land\neg Q\land R)\lor((P\lor\neg P)\land(\neg Q\land R))$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\land\neg Q\land R)\lor(\neg P\land Q\land\neg R)\lor(P\land\neg Q\land R)$$

$$\Leftrightarrow m_1\lor m_2\lor m_5$$

由于 $m_1=\neg P\land\neg Q\land R,\ m_2=\neg P\land Q\land\neg R, m_5=P\land\neg Q\land R$

可知，选派方案有3种：

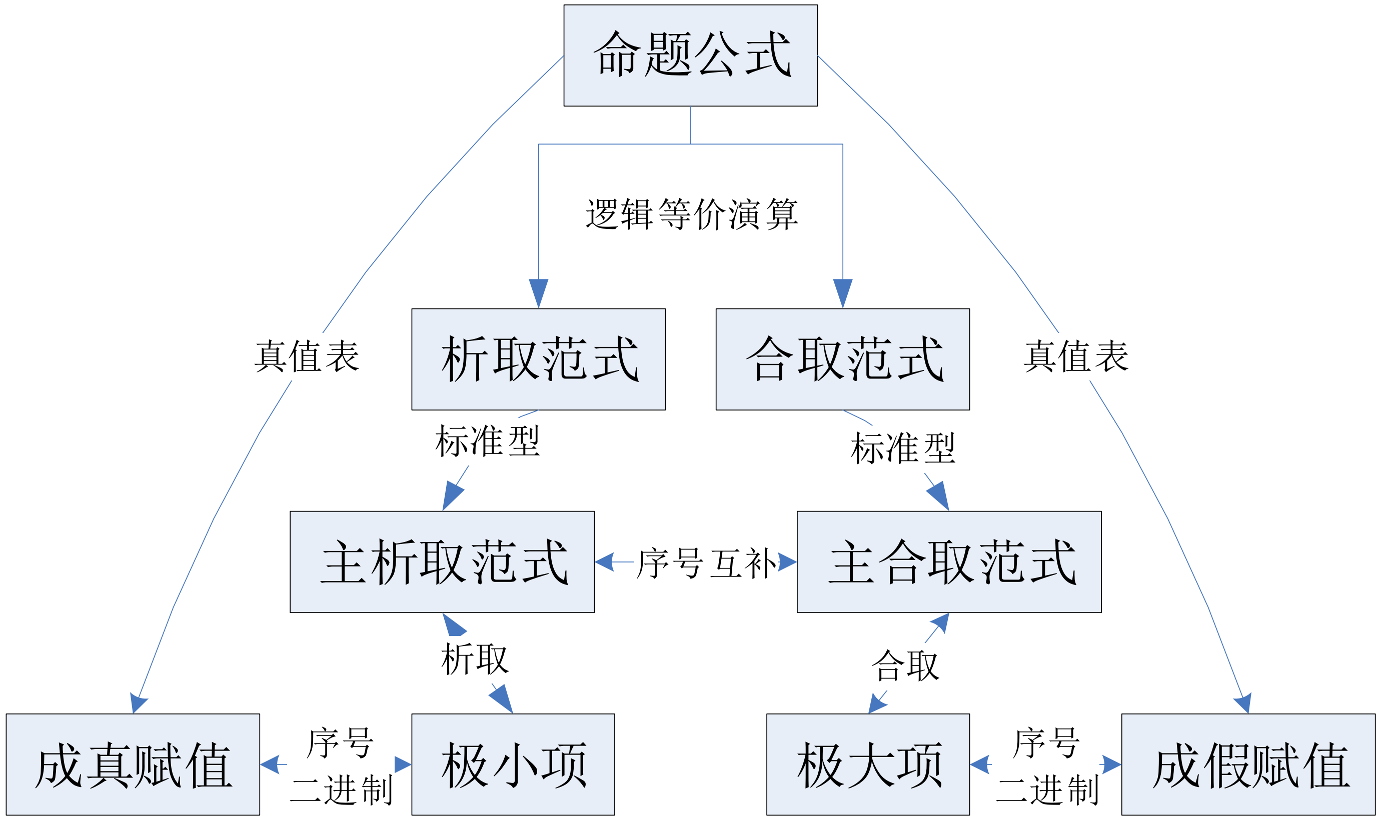
C去，而A, B都不去。　　B去，而A, C都不去。　　A, C去，而B不去。

小结

- 任何命题公式都存在着与之逻辑等价的析取范式和合取范式
- 任何命题公式都存在着与之逻辑等价的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。
- 求主范式的方法有逻辑等价演算的方法、真值表的方法，也可以利用主析（合）取范式求主合（析）取范式。
- 主析取范式中的极小项对应公式的成真赋值，主合取范式中的极大项对应公式的成假赋值。
- 主范式可以用于验证公式间的逻辑等价、判断公式类型、求公式的成真赋值和成假赋值等。

小结

❖ 本小节内容的思维形式注记图：



作业

- 习题8

1.6 命题逻辑推理理论

命题公式$A_1,A_2,\ldots,A_k$推B的推理正确当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式。

- 数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理规律。
- 推理就是由已知命题得到新命题的思维过程，也是一种思维形式。
- 已知的命题称为前提或假设，推得的新命题称为推理的结论。
- 推理一般分为两类：演绎推理和归纳推理。
- 演绎推理：前提和结论之间的联系是必然的，是一种由一般到特殊的推理方法，是一种确定性推理。
- 归纳推理：由个别到一般的推理

1.6.1 有效推理的概念

❖ 定义1.21 设$A_1,A_2,\ldots,A_k$和B都是命题公式，若对于$A_1,A_2,\ldots,A_k$和B中出现的命题变元的任意一组赋值，

或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为假，

或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，B也为真，

则称由前提$A_1,A_2,\ldots,A_k$推出B的推理是有效的或正确的，并称B是有效结论。

1.6.1 有效推理的概念

❖ 说明：1）由前提$A_1,A_2,\ldots,A_k$推结论B的推理是否正确与诸前提的排列次序无关。因而前提的公式不一定是序列，而是一个有限的公式集合，若将这个集合记为Γ(伽马)，可将由Γ推B的推理记为$\Gamma \vdash B$。若推理是正确的，则记为$\Gamma \vDash B$，否则记为$\Gamma \nvDash B$。这里，可以称$\Gamma \vdash B$和$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\} \vdash B$ 为推理的形式结构。

2）设$A_1,A_2,\ldots,A_k$，B中共出现n个命题变元，对于任何一组赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$($\alpha_i$ =0或者1，i=1,2,…,n)，前提和结论的取值情况有以下四种：

(1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，B为0.　(2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，B为1.

(3) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，B为0.　(4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，B为1.

3）由以上的讨论可知，推理正确，并不能保证结论B一定为真，这与数学中的推理是不同的。

❖ 这个与前面我们所介绍的哪个内容非常相关？——蕴涵联结词!

1.6.1 有效推理的概念

例1.42 判断下列推理是否正确：

1）$\{Q, Q \to P\} \vdash P$

2）$\{P, Q \to P\} \vdash Q$

解：根据有效推理定义，只要给出前提合取式与结论的真值表，判断是否出现前提合取式为真，结论为假的情况。

（1）由以下真值表可知，没有出现前提合取式为真，结论为假的情况，因而1）中推理正确，即$\{Q, Q \to P\} \vDash P$。

（2）由以下真值表可知，在赋值为10时，出现前提合取式为真，结论为假的情况，因而2）中推理不正确，即$\{P, Q \to P\} \nvDash Q$。

P Q	$Q \wedge (Q \to P)$ P	$P \wedge (Q \to P)$ Q
0 0	0 0	0 0
0 1	0 0	0 1
1 0	0 1	1 0
1 1	1 1	1 1

1.6.1 有效推理的概念

- 命题公式$A_1,A_2,\ldots,A_k$推B的推理正确当且仅当 $(A_1\wedge A_2 \wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow B$ 为重言式;
- 推理的形式结构：$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}\vdash B$是有效的当且仅当$(A_1\wedge A_2 \wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow B$为重言式。$(A_1\wedge A_2 \wedge\ldots\wedge A_k)\rightarrow B$也称为上述推理的形式结构。
- 推理正确$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}\vDash B$可记为$A_1\wedge A_2 \wedge\ldots\wedge A_k\Rightarrow B$。
- 通过前面的学习，已有三种判断推理有效性的方法：真值表法、逻辑等价演算法、主析（合）取范式法

1.6.2 命题演算推证

- 命题演算推证由三个要素组成：推理根据、推理规则和证明方法。
  - **1）推理根据：** 命题演算推证的命题定律和推理定律；即主要指已知的基本逻辑等价式和逻辑蕴涵式（见表1.17）
  - **2）推理规则:**
    - **（1） 前提引入规则（P规则）**：在推证的任何步骤上都可以引入前提。
    - **（2） 结论引入规则（T规则）**：在推证的任何步骤上所得到的结论都可以作为后继证明的前提。
    - **（3）附加前提规则（CP规则）**：若从A和B能有效地推出C，则从A可有效地推出B →C。（通常在结论为蕴涵式时使用）

1.6.2 命题演算推证

❖ **推证格式**中包含：步骤号，给定前提或得出的结论，推理时所用规则和定律类型。

例1.43 构造下列推理的证明：

前提：$(\neg P \to Q)$，$(P \to R)$，$(\neg Q \vee S)$

结论:$S \vee R$。

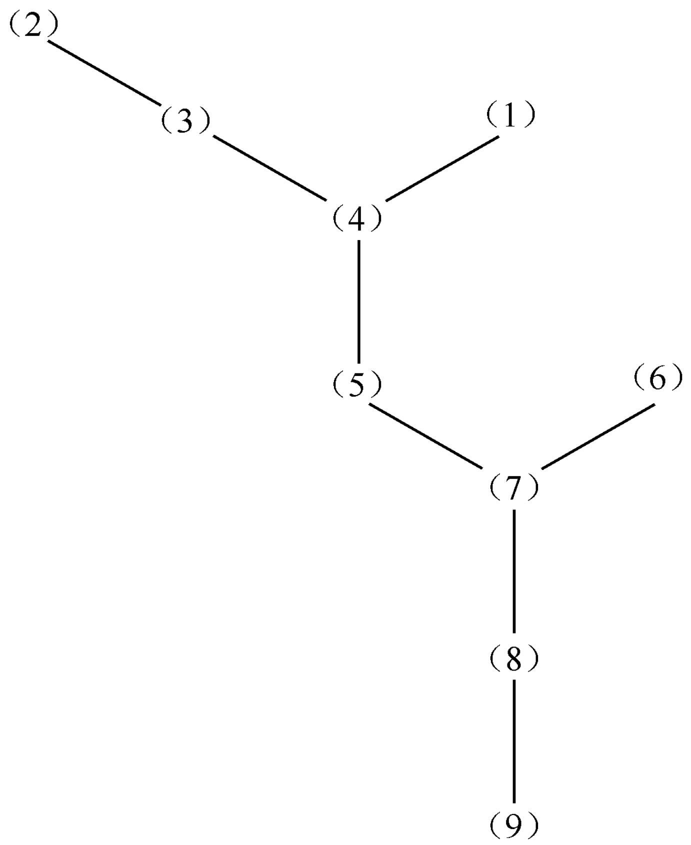
证：

(1) $\neg P \to Q$	P
(2) $\neg Q \vee S$	P
(3) $Q \to S$	T (2) E
(4) $\neg P \to S$	T (1)(3) I
(5) $\neg S \to P$	T (4) E
(6) $P \to R$	P
(7) $\neg S \to R$	T (5)(6) I
(8) $\neg\neg S \vee R$	T (7) E
(9) $S \vee R$	T (8) E

证毕。

1.6.2 命题演算推证

❖ 上述推证过程可以用一棵倒置的树来形象地表示，前提作为树的“叶子”节点，逻辑结果作为树的“分支节点”，结论作为树的“树根”。



1.6.2 命题演算推证

例1.44 构造推理的证明：$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$

证：

(1) $P \vee Q$	P
(2) $\neg P \rightarrow Q$	T (1) E
(3) $Q \rightarrow R$	P
(4) $\neg P \rightarrow R$	T (2)(3) I
(5) $P \rightarrow R$	P
(6) $\neg R \rightarrow \neg P$	T (5) E
(7) $\neg R \rightarrow R$	T (6)(4) I
(8) $\neg\neg R \vee R$	T (7) E
(9) $R \vee R$	T (8) E
(10) R	T (9) E

证毕。

1.6.2 命题演算推证

- 3）证明方法包括：
  - (1) 直接证法：如前例所示。
  - (2) 间接证明方法：反证法 和 附加前提证法 。
- ①反证法
  - 在命题演算推证中，为了证明某个结论是某些前提的有效结论，通常先假设结论的否定成立，然后推出此假设与前提相矛盾。此类间接证法又称为反证法 。
- 定义1.22 假设公式$A_1, A_2, \ldots, A_m$中的全体命题变元为$P_1, P_2, \ldots, P_n$。若存在某些赋值，使得$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$的真值为1，则称公式$A_1, A_2, \ldots, A_m$是相容的；若对于任何赋值都使得$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$的真值都为0，则称公式$A_1, A_2, \ldots, A_m$是不相容的。

1.6.2 命题演算推证

❖ 定理1.10 设命题公式集合$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$是相容的，那么从$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$出发可逻辑地推出结论B的充分必要条件是从$\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B\}$可逻辑地推出一个矛盾式。

证： 先证必要性。

由于$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow B$，所以$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m) \rightarrow B$是重言式。

因而对能使$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$的真值为1的赋值必然使B的真值也为1，从而$\neg B$的真值为0。

因此$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B$是矛盾式。

故从$\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B\}$可逻辑地推出一个矛盾式。

1.6.2 命题演算推证

再证充分性。

由于从{$A_1, A_2, \ldots, A_m, \neg B$}可逻辑地推出一个矛盾式，即

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B \Rightarrow P \wedge \neg P$$（P是任意命题变元）

因而

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B \rightarrow (P \wedge \neg P)$$

是永真式。故

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge \neg B$$

必为矛盾式。

又由于{$A_1, A_2, \ldots, A_m$}是相容的，那么任意使$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$的真值为1的赋值必然使$\neg B$的真值为0，从而B的真值为1。

故有$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow B$，即从{$A_1, A_2, \ldots, A_m$}出发可逻辑推出结论B。

证毕。

1.6.2 命题演算推证

例1.46 如果今天我没课，则我去机房上机或去图书馆查资料；若机房没有空机器，则我没法去上机；今天我没课，机房也没有空机器，所以我去图书馆查资料。

证：设P：今天我没课； Q：我去机房上机； R：我去图书馆查资料； S：机房没有空机器

则上述语句可翻译为： $(P \to Q \vee R) \wedge (S \to \neg Q) \wedge P \wedge S \Rightarrow R$

(1) $\neg R$ P（结论的否定）

(2) $P \to Q \vee R$ P

(3) P P

(4) $Q \vee R$ T (2)(3) I

(5) Q T (4)(1) I

(6) $S \to \neg Q$ P

(7) S P

(8) $\neg Q$ T (6)(7) I

(9) $Q \wedge \neg Q$ T (5)(8) I

证毕。

1.6.2 命题演算推证

② 附加前提证法

- 间接证法的另一种情况是：若要证$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow (B \rightarrow C)$, 只要证$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge B \Rightarrow C$即可。
- 事实上：设$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$为S,即证$S \Rightarrow (B \rightarrow C)$或$S \Rightarrow (\neg B \vee C)$，即证$S \rightarrow (\neg B \vee C)$为永真式。因为

$S \rightarrow (\neg B \vee C) \Leftrightarrow \neg S \vee (\neg B \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg S \vee \neg B) \vee C)$

$\Leftrightarrow \neg(S \wedge B) \vee C$

$\Leftrightarrow (S \wedge B) \rightarrow C$

如有$(S \wedge B) \Rightarrow C$，即证得$S \Rightarrow (B \rightarrow C)$。

由$(S \wedge B) \Rightarrow C$证得$S \Rightarrow (B \rightarrow C)$，就是前面提到的CP规则；其中的 B称为附加前提。

1.6.2 命题演算推证

例1.47 试证明$(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (R \to \neg S) \Rightarrow S \to Q$.

证：

(1) $P \to R$	P
(2) $R \to \neg S$	P
(3) $P \to \neg S$	T (1)(2) I
(4) S	CP
(5) $\neg P$	T (3)(4) I
(6) $P \vee Q$	P
(7) Q	T (5)(6) I

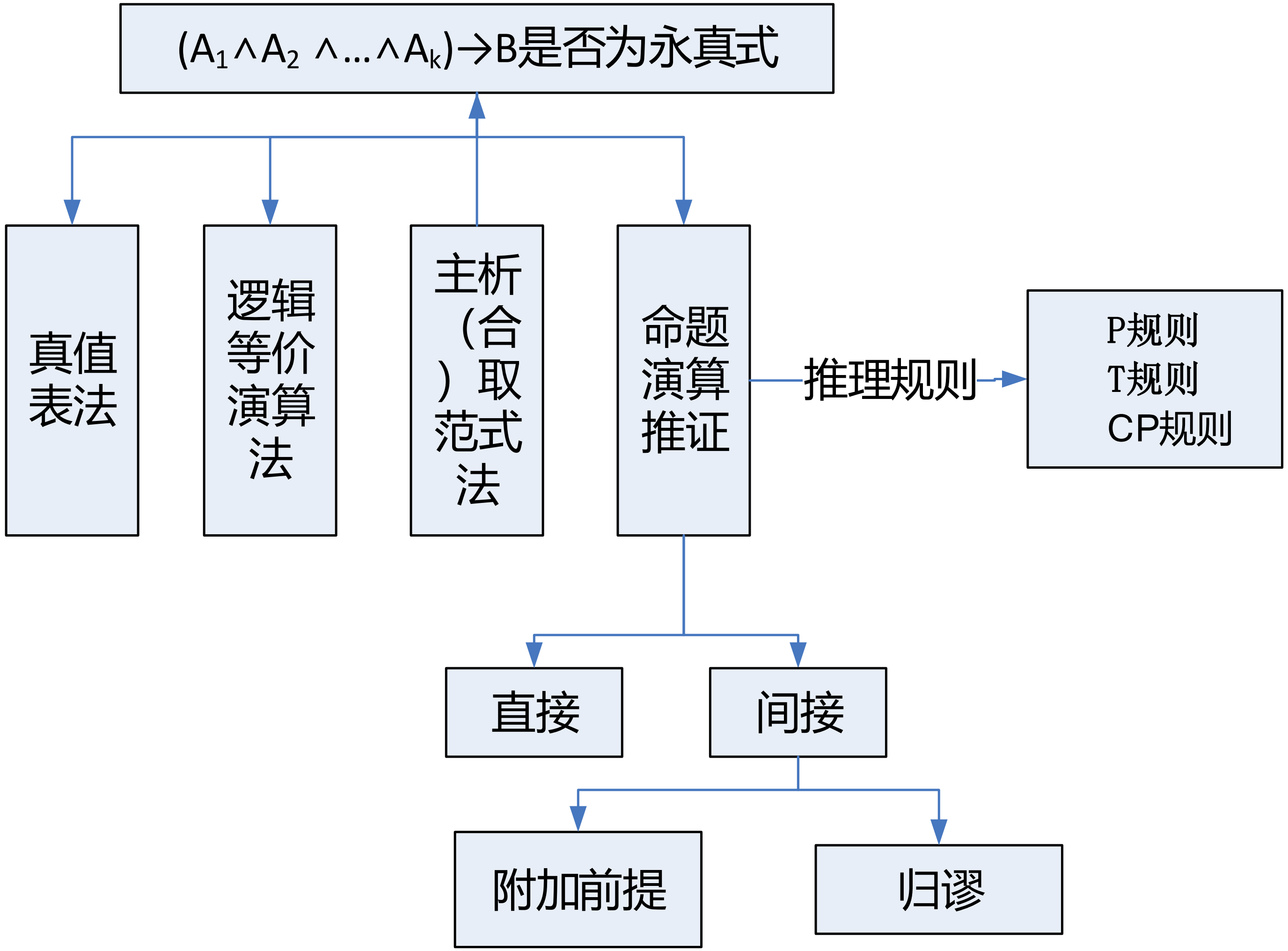
证毕。

小结

- 若推理形式结构的符号化表示：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$为重言式，则推理是有效的，并记为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \Rightarrow B$。
- 判断推理正确的方法有：真值表法、逻辑等价演算法、主析（合）取范式法以及命题演算推证的证明法。
- 命题演算推证的证明中内含的证明方法有：直接证明法、间接证明法；间接证明法又包括归谬证明法和附加前提证明法。

小结

- 本小节的思维形式注记图：



1.7 常见题型解析

- 1）命题的符号化
  - 要想解决实际问题，很多时候需要我们将实际问题中的自然语言描述进行符号化。这类习题的思路是：
  - 符号化原子命题→确定联结词→符号化联结词→复合命题符号化
- 2）求公式的主析取/合取范式
  - 求一个公式的主析取范式或主合取范式主要有三种方法：真值表法、逻辑等价演算法以及利用主析取范式求主合取范式或利用主合取范式求主析取范式。

1.7 常见题型解析

❖ 3）求公式的成真赋值与成假赋值

- 一般采用真值表法或求主范式的方法，主析取范式的极小项对应成真赋值，主合取范式的极大项对应成假赋值。
- 如果公式形式过于繁琐，也可采用逻辑等价演算的方法将公式转化为与之逻辑等价的较简单公式后，再使用上述方法。

❖ 4）判断公式类型

- 公式的类型主要有三种：重言式、矛盾式和非重言可满足式。
- 判断的方法常用的主要是真值表法和主范式的方法。
- 可以借助逻辑等价演算的方法进行简化后再进行判断。
- 对于非重言可满足式只需要分别找到一个成真赋值和一个成假赋值即可。

1.7 常见题型解析

❖ 5）判断/证明两个命题公式的逻辑等价关系

- 基本方法是真值表法（较直观）和主范式方法；
- 如果确定是证明两个公式的逻辑等价关系，比较方便的方法是逻辑等价演算的方法；
- 如果确定不是逻辑等价的，可以通过找出一个赋值，在此赋值下两公式真值不等证明公式间非逻辑等价。

1.7 常见题型解析

6）判断推理是否正确

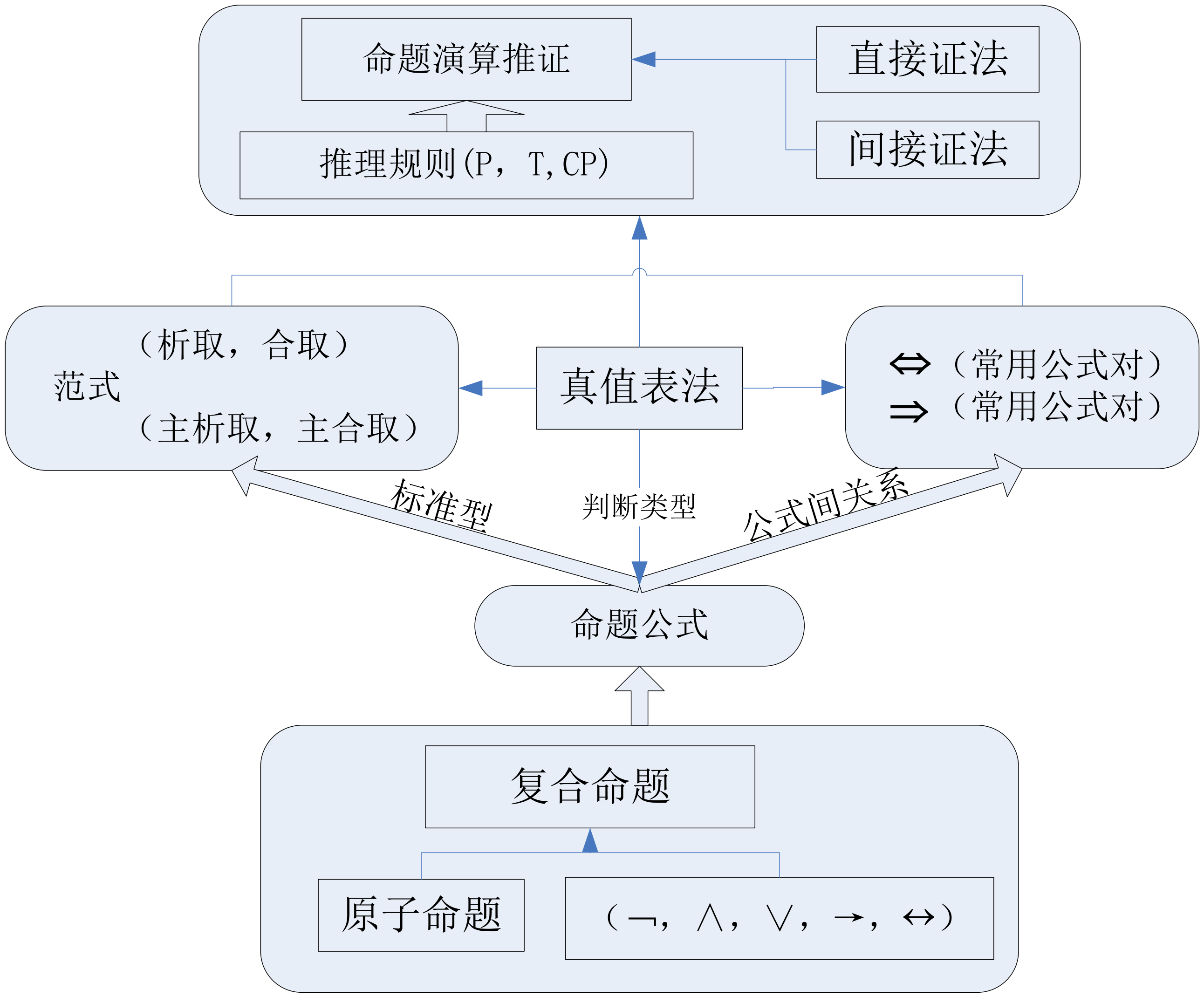
- 判断推理是否正确的实质是判断前提的合取与结论构成的蕴涵式是否为永真式。
- 一般，判断推理正确可使用的方法有真值表法、逻辑等价演算法、主析（合）取范式法和命题演算推证法等。
- 但一般比较有效的方法是命题演算推证法。这类方法证明过程中要注意一般首尾相接的原则，即一般上一步骤的结论是下一步骤的前提。

1.7 常见题型解析

7）解决逻辑难题

- 这类问题一般都来自于现实生活，所以解决这类问题首先需要进行命题的符号化，然后根据具体问题，确定解决思路。
- 对于推理问题，命题演算推理是比较有效的方法。

本章知识逻辑结构图


命题演算推证
直接证法
间接证法
推理规则(P, T, CP)
范式
(析取，合取)
(主析取，主合取)
真值表法
⇔（常用公式对）
⇒（常用公式对）
标准型
判断类型
公式间关系
命题公式
复合命题
原子命题
（¬，∧，∨，→，↔）