离散数学

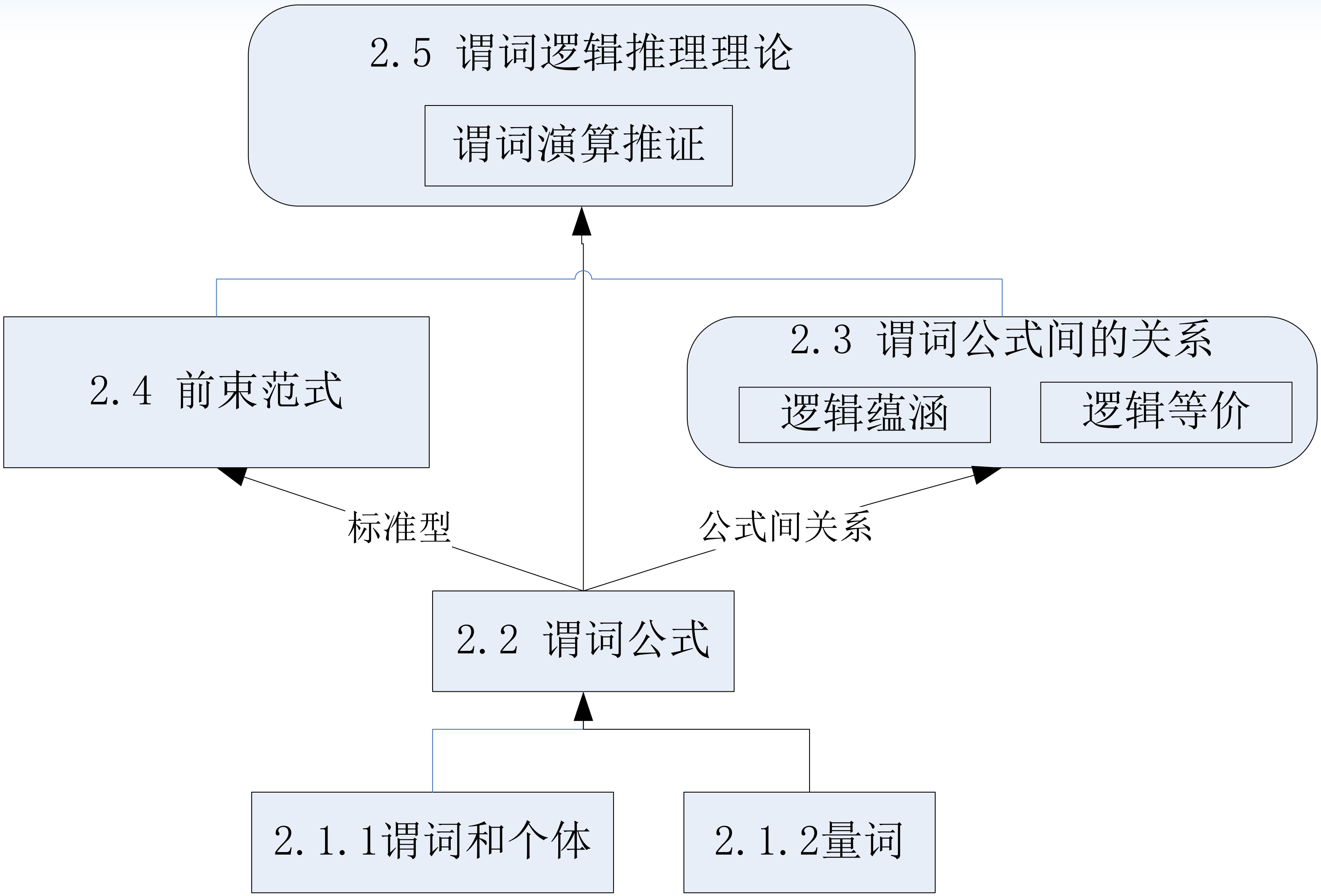
Discrete Mathematics

第二章 谓词逻辑

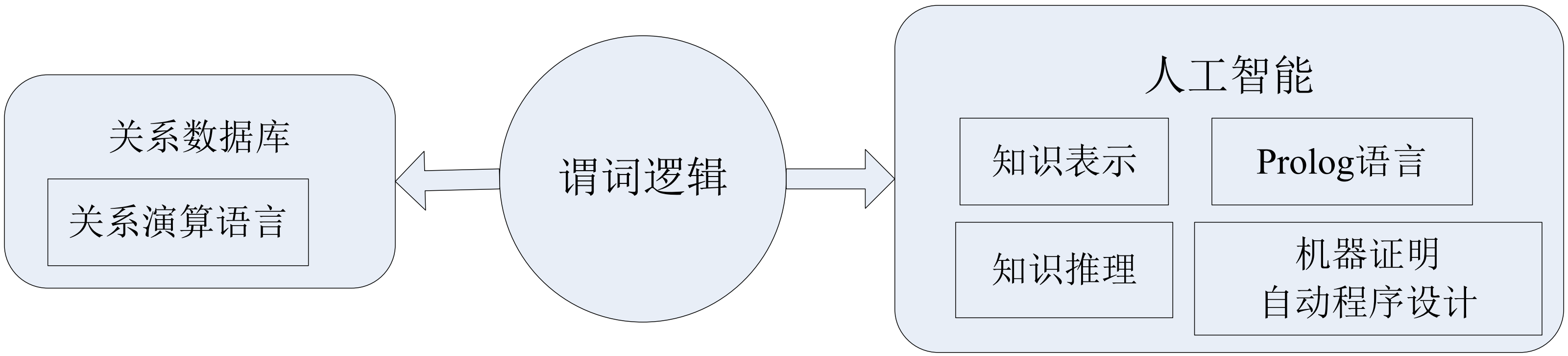
第二章 谓词逻辑

- 命题逻辑研究的基本单位是原子命题，不再对原子命题进行分解，也不再对原子命题的内部结构作进一步的分析。这是命题逻辑的一个特点，也是它的一个缺点。其缺点表现为以下两方面：
  - 1）它不能揭示某些有效的论证；
    - 例如：所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。这是简单而有名的苏格拉底三段论。直观地，我们认为这是一个有效的论证，但它却无法用命题逻辑予以推证。
  - 2）无法将具有某种共同属性的命题显示出来。
    - 例如：设P表示命题：张扬是教师；Q表示命题：李明是教师
    - 显然，仅仅从命题符号P和Q看不出张扬和李明都是教师这一特性。
- 一阶谓词逻辑，又称为一阶谓词演算、狭义谓词逻辑、初等逻辑、量词理论等，一般简称为谓词逻辑。

谓词逻辑部分知识逻辑概图



谓词逻辑在计算机科学技术相关领域的应用概图



2.1 谓词的基本概念

谓词：刻画论域中个体性质或个体之间相互关系的模式。

2.1.1 谓词和个体

- 定义2.1 个体是一切可以独立存在的、具体的或抽象的客体。
  - 例如，小王，小李，北京，3等。
  - 个体可根据其是具体的还是抽象的，分为两种：
    - 1）个体常元：将表示具体或特定客体的个体称作个体常元，一般用小写英文字母a，b，c，…，a_1，b_1，c_1，…等表示。
    - 2）个体变元：将表示抽象或泛指的个体称为个体变元，常用x，y，z，…，x_1，y_1，z_1，…等表示。
- 定义2.2 个体变元的取值范围称为个体域(或称论域)。
  - 个体域可以是有穷集合，也可以是无穷集合。
- 定义2.3 宇宙间的所有个体聚集在一起所构成的个体域，称为全总个体域。
    - 在没有特别指明情况下，都使用全总个体域。

2.1.1 谓词和个体

- 定义2.4 刻画论域中个体性质或个体之间相互关系的模式称为谓词。
- 谓词也可根据其是具体的还是抽象的，分为两种：
  - 1）谓词常元：表示具体性质或关系的谓词。
  - 2）谓词变元：表示抽象的、泛指的性质或关系的谓词。
- 无论是谓词常元或变元都用大写英文字母F，G，H，…表示，可根据上下文区分。
- 单纯的谓词或单纯的个体都无法构成一个完整的逻辑含义，只有将它们结合起来时才能构成一个完整、独立的逻辑断言。

2.1.1 谓词和个体

- 定义2.5 一个原子命题用一个谓词和n个有次序的个体常元$a_1, a_2, \ldots, a_n$表示成$P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$的形式，称为该原子命题的谓词形式。
  - 说明：若n=0，则P称为零元谓词，即P本身就是一个命题；若n=1，则称P是一元谓词；若n=2，则称P是二元谓词，以此类推。一元谓词用来描述某一个体具有的性质，而n元谓词则用以描述n个个体之间的关系。
- 定义2.6 若表达式$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$中，P是某个n元谓词，$x_1, x_2, \ldots, x_n$是个体变元，则$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$称为简单命题函数。
- 定义2.7由一个或多个简单命题函数以及联结词组合而成的表达式称为复合命题函数。
- 简单命题函数和复合命题函数统称为命题函数。
- 通常，命题函数不是命题，只有当其中的个体变元都用具体的个体取代后才成为命题。

2.1.1 谓词和个体

例2.1 在一阶逻辑中试将下列命题符号化：

1）2是质数；

2）平方为-1的数不是实数；

3）6能被2整除。

4）武汉位于北京和广州之间。

解 1）用a表示2，F(x)表示“x是质数”，则命题“2是质数”符号化为F(a)。

2）用a表示平方为-1的数，F(x)表示“x是实数”，则命题“平方为-1的数不是实数”符号化为$\neg$F(a)。

3）用a, b分别表示6, 2，F(x, y)表示“x能被整除y”，则命题“6能被2整除”符号化为F(a, b)。

4）用a, b，c分别表示武汉、北京、广州，F(x, y, z)表示“x位于y和z之间”，则命题“武汉位于北京和广州之间”符号化为F(a, b, c)。

❖ 注意：谓词中个体的顺序是十分重要的，不能随意变更。

2.1.2 量词

- 表示个体常元或变元之间数量关系的词为量词。
  - 1）全称量词∀: 表示所有的、每一个（∀是All/Any中第一个字母A旋转180°）。
    - ∀x：对个体域中所有的x。
    - 日常生活和数学中所用的“一切的”、“所有的”、“每一个”、“任意的”、“凡”、“都”等词可统称为全称量词。
    - 如：∀xF(x)表示个体域中所有的x具有性质F；∀x∀yG(x,y)表示个体域中所有的x和y有关系G。

2.1.2 量词

- 2）存在量词∃: 表示存在、有一个（∃是Exist中第一个字母E旋转180^o）。
  - ∃x：个体域中有一个x。
  - 日常生活和数学中所用的“存在”、“有一个”、“有的”、“至少有一个”等词统称为存在量词。
  - 如：∃xF(x)表示个体域中有一个x具有性质F；∃x∃yG(x,y)表示个体域中存在x和y有关系G；∀x∃yG(x,y)表示对个体域中每一个x都存在一个y使得x和y有关系G；∃x∀yG(x,y)表示个体域中存在一个x使得对每一个y,x和y有关系G。

2.1.2 量词

- 说明：全称量词是对某类个体的全部进行肯定的判断，存在量词是对某类个体的部分有所肯定的判断。
  - 设个体域为D，G(x)是某个具体的谓词，则∀xG(x)表示“对D中的任何一个个体，都有G(x)这个性质”，显然，这是一个可以确定真值的命题。当D为有穷集时：
    - ∀xG(x)的真值为1，当且仅当对于每一个x∈D，G(x)都成立；
    - ∀xG(x)的真值为0，当且仅当存在某一个x∈D，使得G(x)不成立。
  - ∃xG(x)表示“至少存在D中的一个个体，有G(x)这个性质”，显然，这是一个可以确定真值的命题。当D为有穷集时：
    - ∃xG(x)的真值为0，当且仅当对于每一个x∈D，G(x)都不成立；
    - ∃xG(x)的真值为1，当且仅当至少存在某一个x∈D，使得G(x)都成立。

2.1.2 量词

例2.2 在个体域分别为D_1：人类集合和D_2：全总个体域条件时，在一阶逻辑中将下面两个命题符号化。

1) 凡人都呼吸。

2) 有的人喜欢唱歌。

解：当个体域是D_1：人类集合时，

令$F(x)$: x呼吸；

$G(x)$: x喜欢唱歌。

1) 在D_1中除了人外，再无别的东西，因而“凡人都呼吸”应符号化为：$\forall xF(x)$

2) 在D_1中的有些个体(人) 喜欢唱歌，因而“有的人喜欢唱歌”符号化为：$\exists xG(x)$

2.1.2 量词

当个体域是D_2：全总个体域条件时，

分析: D_2中除了有人外，还有万物，因而在1)，2)符号化时，必须考虑将人分离出来。

令M(x): x是人；

F(x): x呼吸；

G(x): x喜欢唱歌。

在D_2中，1)，2)可以分别重述如下:

1)对于宇宙间一切事物而言，如果事物是人，则他要呼吸。

2)在宇宙间存在着喜欢唱歌的人。

于是1)，2)的符号化形式分别为

1）$\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

2）$\exists x(M(x) \wedge G(x))$

2.1.2 量词

- 注意：特性谓词的使用
- 由例2.2可知，命题1)，2)在不同的个体域D_1和D_2中符号化的形式不一样。主要区别在于，在使用全总个体域时，要将人与其他事物区分开来，为此引进了谓词M(x)，像这样的谓词称为特性谓词。
- 在命题符号化时一定要正确使用特性谓词。
- 一般，在全总个体域中，
  - 对全称量词，特性谓词常作蕴涵的前件（如：$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$）；
  - 对存在量词，特性谓词常作合取项（如：$\exists x(M(x)\wedge G(x))$）。

2.1.2 量词

例2.3 试将下列命题符号化：

1）那件事谁都能做。

2）有些学生提前完成了任务。

3）并不是每一个学生都迟到过。

4）没有不呼吸的人。

解：1）分析：命题“那件事谁都能做”等价于“一切人都能做那件事”。

令$F(x)$：x是人；

$G(x)$：x能做那件事。

则原命题符号化为：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$。

2）令$F(x)$：x是学生；

$G(x)$：x提前完成了任务。

则原命题符号化为：$\exists x(F(x)\wedge G(x))$。

2.1.2 量词

3）令F(x)：x是学生

G(x)：x迟到过”

则原命题符号化为$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$。

该命题也等价于“有一些学生没迟到过”，符号化为：$\exists x(F(x)\land\neg G(x))$。

4）令F(x)：x是人；

G(x)：x呼吸。

则原命题符号化为$\neg\exists x(F(x)\land\neg G(x))$

该命题也等价于“所有的人都呼吸”，符号化为：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$。

2.1.2 量词

例2.4 试将下列命题符号化：

1) 兔子比乌龟跑得快。

2)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

分析（1）本题没有指明个体域，因而采用全总个体域。

（2）出现二元谓词，因而引入两个体变元x与y。

解：令F(x): x是兔子；

G(y): y是乌龟；

H(x,y): x比y跑得快。

这两个命题分别符号化为：

1) $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$ 或者 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

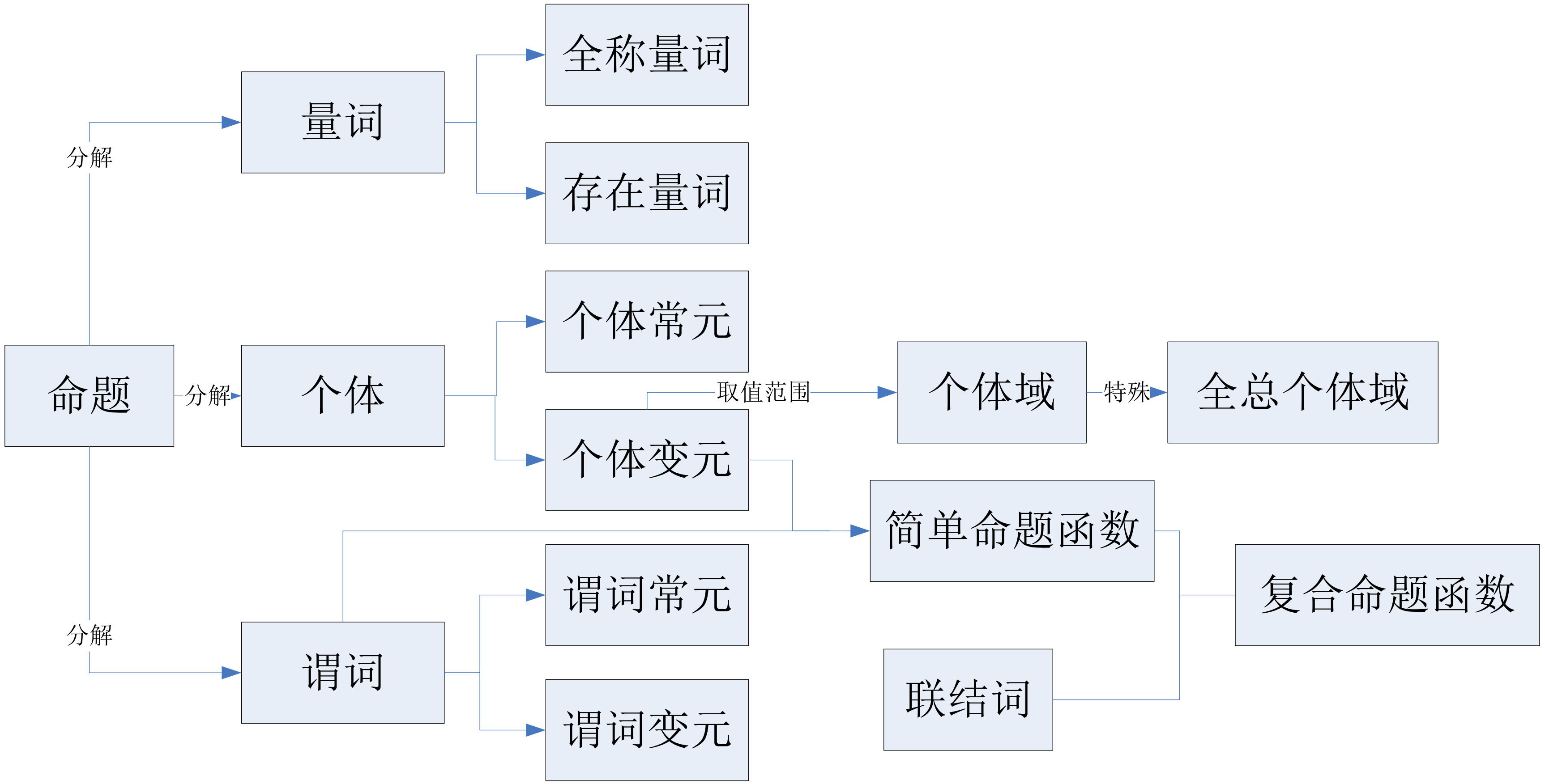
2) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

小结

- 谓词逻辑中进行命题符号化，首先也要确定简单命题及它们之间的联结词，然后对简单命题在谓词逻辑中用谓词、量词和个体进行符号化，在这里要注意：
  - 1）根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词；
  - 2）根据个体域和是否有量词，确定是否需要特性谓词；
  - 3）分析命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为一元和n元谓词；
  - 4）注意谓词及量词的先后顺序；
  - 5）命题的符号化形式不是唯一的。

小结

- 本小节的思维形式注记图



2.2 谓词公式与解释

谓词公式：谓词演算的合式公式。

2.2.1 谓词公式的定义

- 定义2.8 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$称为谓词演算的原子谓词公式，其中，P是谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是个体变元、个体常元或任意的n元函数。
- 定义2.9 谓词演算的合式公式，又称为谓词公式，由如下递归定义构成：
  - 1）原子谓词公式是谓词公式；
  - 2）若A是谓词公式，则$(\neg A)$也是谓词公式；
  - 3）若A和B都是谓词公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$都是谓词公式；
  - 4）若A是谓词公式，x是任何个体变元，则$\forall xA$和$\exists xA$都是谓词公式；
  - 5）只有经过有限次地应用规则1），2），3），4）所得到的公式是谓词公式。

2.2.1 谓词公式的定义

- 根据运算的优先级，有些括号可以适当的去掉
- 如
  - $F(x)$
  - $F(x) \vee \neg G(x, y)$
  - $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$
  - $\exists x \forall y(F(x) \rightarrow G(y) \wedge L(x, y))$

都是谓词公式。

2.2.2 自由与约束

- 定义2.10 对于谓词公式∀xA或∃xA来说，x称为量词∀x或量词∃x的指导变元或作用变元。A称为相应量词的辖域。在∀x和∃x的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，所有约束出现的变元称为约束变元。A中不是约束出现的其他变元均称为是自由出现的，所有自由出现的变元为自由变元。

例2.5 说明下列各式中量词的辖域与变元约束的情况：

1）$\forall xF(y)$

2）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

3）$\forall x(F(x)\rightarrow \exists yG(x, y))$

4）$\forall x\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))\wedge \exists xF(x, y)$

5）$\forall x(F(x)\wedge \exists xG(x, z)\rightarrow \exists yH(x, y))\vee G(x, y)$

6）$\forall x(F(x)\leftrightarrow G(x))\wedge \exists xH(x)\wedge R(x)$

2.2.2 自由与约束

解：1） $\forall xF(y)$

$\forall x$的辖域是$F(y)$，其中y为自由出现。

2）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\forall x$的辖域是$F(x)\rightarrow G(x)$, x为约束出现。

3）$\forall x(F(x)\rightarrow \exists yG(x, y))$

$\forall x$的辖域是$F(x)\rightarrow \exists yG(x, y)$, $\exists y$的辖域是$G(x, y)$，其中x, y都为约束出现。

4）$\forall x\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))\wedge \exists xF(x, y)$

$\forall x$的辖域是$\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))$，$\forall y$的辖域是$F(x, y)\wedge G(y, z)$，$\exists x$的辖域是$F(x, y)$，其中在$\forall x\forall y(F(x, y)\wedge G(y, z))$中，x，y都为约束出现，z为自由出现，在$\exists xF(x, y)$中，x为约束出现，y为自由出现。

2.2.2 自由与约束

5）$\forall x(F(x)\wedge\exists xG(x, z)\rightarrow\exists yH(x, y))\vee G(x, y)$

$\forall x$的辖域是$F(x)\wedge\exists xG(x, z)\rightarrow\exists yH(x, y))$，其中x的3次出现都为约束出现，但第2次出现是受量词$\exists x$的约束，而第1次、第3次出现是受量词$\forall x$的约束，z为自由出现，$\exists x$的辖域是$G(x, z)$。$\exists y$的辖域是$H(x, y)$，其中y为约束出现，$G(x, y)$中的x, y都为自由出现。

6）$\forall x(F(x)\leftrightarrow G(x))\wedge\exists xH(x)\wedge R(x)$

$\forall x$的辖域是$F(x)\leftrightarrow G(x)$，x为约束出现，$\exists x$的辖域是$H(x)$, x也为约束出现，$R(x)$中x的出现为自由出现。

2.2.2 自由与约束

- 定义2.11 若公式A中不含自由出现的个体变元，则称A为封闭的公式，简称闭式。
  - 例如，$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$ 为闭式，而$\exists x(F(x) \wedge G(x,y))$ 不是闭式。

2.2.2 自由与约束

- 将谓词公式中的约束变元更改名称符号，这一过程称为约束变元换名。
- 约束变元的换名规则：
  - 1）换名时，更改的变元名称的范围是量词中的指导变元，以及该量词辖域中所出现的所有该变元，公式的其余部分不变；
  - 2）换名时一定不能更改为该量词辖域中的其他变元名称。
- 为了使一个变元在同一个公式中只以一种身份出现，除了进行约束变元换名外，也可以进行自由变元代入。
- 自由变元的代入规则：
  - 1）将给定公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；
  - 2）新变元不允许在原公式中以任何形式出现。

2.2.2 自由与约束

例2.7 谓词公式$\forall x(F(x, y) \vee G(x, z))$，若对约束变元x换名，则可变为$\forall v(F(v, y) \vee G(v, z))$，但下列换名都是错误的：

1）$\forall v(F(v, y) \vee G(x, z))$

2）$\forall x(F(v, y) \vee G(v, z))$

3）$\forall v(F(x, y) \vee G(x, z))$

4）$\forall y(F(x, y) \vee G(y, z))$

5）$\forall z(F(z, y) \vee G(z, z))$

2.2.2 自由与约束

- 当个体域中元素的个数是有限时，对量词辖域中的约束变元的所有可能的取代是可枚举的，即：
  - 若设个体域为$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$则
    - 1）$\forall xF(x) \Leftrightarrow F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \ldots \wedge F(a_n)$
    - 2）$\exists xF(x) \Leftrightarrow F(a_1) \vee F(a_2) \vee \ldots \vee F(a_n)$
- 这也被称为有限域量词消去规则。

2.2.3 谓词公式的解释

- 定义2.12 谓词逻辑中公式A的每一个解释（赋值）I由以下几部分构成：
  - 1）非空个体域D；
  - 2）D中的某些特定元素；
  - 3）D中的某些特定的函数；
  - 4）D中某些特定的谓词。
- 用一个解释I解释一个谓词公式A包括：将I的个体域D作为A的个体域，A中的个体常元用I中的特定元素代替，A中的函数用I中的特定函数代替，谓词用I上的特定谓词代替。把这样得到的公式记作A’。称A’为A在I下的解释，或A在I下被解释成A’。

2.2.3 谓词公式的解释

例2.8 给定解释I如下：

1）个体域为实数集合R；

2）R中的特定元素a=0；

3）R上的特定函数$f(x, y)=x+y$, $g(x, y)=xy$；

4）R上的特定谓词$F(x, y)$： $x=y$。

在解释I下，求下列各式的真值：

1）$\exists xF(f(x, a), g(x, a))$

2）$\forall x\forall y(F(f(x, y), g(x, y))\rightarrow F(x, y))$

3）$\forall xF(g(x, y), a)$

2.2.3 谓词公式的解释

解：在解释I下，公式分别解释为：

1） $\exists xF(f(x, a), g(x, a))$ 解释为：

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真值为1;

2）$\forall x\forall y(F(f(x, y), g(x, y))\rightarrow F(x, y))))$ 解释为：

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\rightarrow x=y)$ 真值为0;

3） $\forall xF(g(x, y), a)$ 解释为：

$\forall x(x\cdot y=0)$ 真值不确定。

定理2.1 封闭的公式在任何解释下都成为命题。（证略）

2.2.4 谓词公式的类型

- 定义2.13 若谓词公式A在任何解释下均为真, 则称A为逻辑有效的或永真式; 若A在任何解释下均为假, 则称A为不可满足的或永假式; 若至少有一个解释使A为真, 则称A为可满足的。
  - 逻辑有效的公式为可满足的，但反之不真。
  - 在命题逻辑中，可以用真值表等方法判断任意给定命题公式的类型。
  - 判断谓词公式类型的问题是不可判定的，既不存在一个算法能够在有限步内判断任意给定的公式的类型。
- 对一些满足特殊条件的公式我们有一些简便的判定方法。
- 定义2.14 设A_0是含命题变元 $P_1,P_2, \ldots, P_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i $(1 \le i \le n)$ 处处代替A_0中的P_i，所得公式A称为A_0的代换实例。
  - 例， $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$等都是$P \to Q$的代换实例。

2.2.4 谓词公式的类型

- 定理2.2 重言式的代换实例都是逻辑有效的，永假式的代换实例都是不可满足的。

例2.9 判断下列公式中，哪些是逻辑有效的，哪些是不可满足的？

1）$\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

2）$\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

3）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

- 分析——两种思路

（1）公式的解释；　（2）定理2.2。

解：

1）永真式 $P\rightarrow(Q\rightarrow P)$ 的代换实例，故为逻辑有效的。

2）矛盾式 $\neg(P\rightarrow Q)\wedge Q$ 的代换实例，故为不可满足的。

3）解释I1: 个体域N, $F(x)$:$x>5$, $G(x)$: $x>4$,　公式为真

解释I2: 个体域N, $F(x)$:$x<5$, $G(x)$:$x<4$,　公式为假

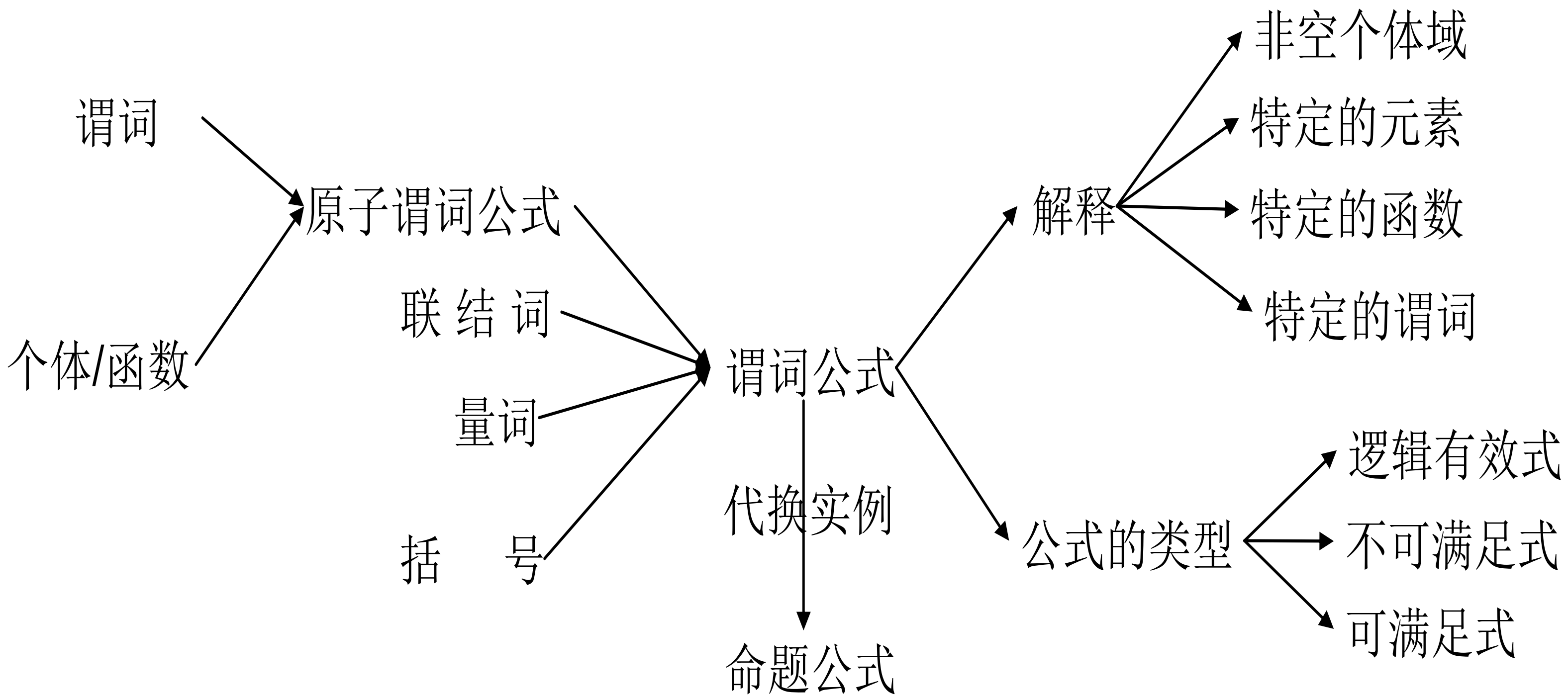
结论: 为非永真式的可满足式。

小结

- 把形如$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$称为谓词演算的原子谓词公式，其中，P是谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是个体或函数。
- 谓词演算的合式公式，又称为谓词公式，由递归定义构成。
- 判定谓词公式中指导变元及其辖域，从而确定变元的约束的情况。
  - 可应用换名规则将谓词公式中的约束变元更改名称符号；
  - 也可以应用代入规则进行自由变元代入。
- 在证明一个谓词公式既不是逻辑有效的也不是不可满足时，可以为公式分别找一个成真的解释和一个成假的解释；当证明一个谓词公式是逻辑有效或不可满足的公式时，可以使用相应的命题公式进行代换。若命题公式为永真式，则原谓词公式也是逻辑有效的；若命题公式为矛盾式，则原谓词公式也是不可满足的。

小结

- 本小节的思维形式注记图



2.3 谓词公式间的关系

谓词公式间的关系：逻辑等价与逻辑蕴涵。

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 定义2.15 设A、B是谓词公式，E是它们共同的个体域。若在个体域E中的任何解释下，A、B在都具有相同的真值，则称谓词公式A和B在E上逻辑等价。
- 定义2.16 设A、B是谓词公式，如果在任一个体域上A和B都逻辑等价，则称A和B是逻辑等价，记作A⇔B。
- 等价置换（置换规则）

设Φ(A)是含合式公式A的合式公式，Φ(B)是用合式公式B取代Φ(A)中所有的A之后的合式公式，若A⇔ B，则Φ(A) ⇔ Φ(B).

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 根据所给出的谓词公式的逻辑等价定义，就可以讨论谓词演算的一些基本逻辑等价式。
- 1）命题公式的推广
  - 由于命题逻辑中的重言式的代换实例都是一阶逻辑中的永真式，因而命题公式的基本逻辑等价式的代换实例都是一阶逻辑的逻辑等价式。
    - 例如：$\neg\neg\forall xF(x)\Leftrightarrow\forall xF(x)$

      $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)\Leftrightarrow\neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 2）量词否定逻辑等价式
- 定理2.3 （1） $\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))$

（2） $\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow\forall x(\neg P(x))$

证：（1）若个体域E是有限的，设个体域为$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，则有

$\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))$

$\Leftrightarrow\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\ldots\vee\neg P(a_n)$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))$

若个体域E是无限的，设$\neg\forall xP(x)$的真值为1，则$\forall xP(x)$的真值为0，即存在着某个个体$a_0\in E$使$P(a_0)$的真值为0，因此$\neg P(a_0)$的真值为1，从而$\exists x(\neg P(x))$的真值为1。

因此当$\neg\forall xP(x)$的真值为1时，$\exists x(\neg P(x))$的真值也为1。

同理可证当$\neg\forall xP(x)$的真值为0时，$\exists x(\neg P(x))$的真值也为0。

故无论个体域E是有限的或是无限的都有

$\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x))$

（2）的证明与（1)相似，不再详述。

证毕。

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 3）量词辖域的扩张与收缩
- 定理2.4 （1）$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$

  （2）$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$

  （3）$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

  （4）$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

其中，公式B中不出现约束变元x。

- 根据对量词及其辖域的理解，很容易证明此定理。该定理还可以扩充到谓词的变元与量词的指导变元不同的情形，如：
  - $\forall x(P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee Q(y)$
  - $\forall x(\forall yP(x,y)\wedge Q(z))\Leftrightarrow\forall x\forall yP(x, y)\wedge Q(z)$
- 推论2.1 （1）$\forall xA(x)\rightarrow B\Leftrightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B)$

  （2）$\exists xA(x)\rightarrow B\Leftrightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B)$

  （3）$B\rightarrow\forall xA(x)\Leftrightarrow\forall x(B\rightarrow A(x))$

  （4）$B\rightarrow\exists xA(x)\Leftrightarrow\exists x(B\rightarrow A(x))$

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

- 4）量词分配逻辑等价式
- 定理2.5 （1）$\forall xA(x)\land\forall xB(x)\Leftrightarrow\forall x(A(x)\land B(x))$

  （2）$\exists xA(x)\lor\exists xB(x)\Leftrightarrow\exists x(A(x)\lor B(x))$

证：（1）设E为任一个体域，若$\forall xA(x)\land\forall xB(x)$的真值为1，则$\forall xA(x)$的真值为1且$\forall xB(x)$的真值为1，即E中的任一个体$a_0$都使得$A(a_0)$和$B(a_0)$的真值为1，故$A(a_0)\land B(a_0)$的真值为1。

由于a_0是任一个体，从而$\forall x(A(x)\land B(x))$的真值为1。

同理可证当$\forall xA(x)\land\forall xB(x)$的真值为0时，$\forall x(A(x)\land B(x))$的真值也为0。故

$$\forall xA(x)\land\forall xB(x)\Leftrightarrow\forall x(A(x)\land B(x))$$

（2）由（1）可知 $\forall x(\neg A(x)\land\neg B(x))\Leftrightarrow\forall x(\neg A(x))\land\forall x(\neg B(x))$

又因为$\neg\exists x(A(x)\lor B(x))\Leftrightarrow\forall x(\neg A(x)\land\neg B(x))$

及 $\forall x(\neg A(x))\land\forall x(\neg B(x))$

$\Leftrightarrow\neg\exists xA(x)\land\neg\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg(\exists xA(x)\lor\exists xB(x))$

因此 $\neg\exists x(A(x)\lor B(x))\Leftrightarrow\neg(\exists xA(x)\lor\exists xB(x))$

故 $\exists xA(x)\lor\exists xB(x)\Leftrightarrow\exists x(A(x)\lor B(x))$

证毕。

2.3.1 谓词公式间的逻辑等价

❖ 5）具有两个量词的谓词公式间的逻辑等价关系

具有两个量词的二元谓词公式有以下的逻辑等价关系：

$$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$$

$$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$$

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

- 定义2.17 设A、B是谓词公式，E是它们共同的个体域。若A →B在E上是逻辑有效的，则称在E上A逻辑蕴涵B。
- 定义2.18 设A、B是谓词公式，若如果在任一个体域上A → B是永真式，则称A逻辑蕴涵B，记作A ⇒ B。
- 由命题逻辑中的基本逻辑蕴涵式的代换实例可以得到谓词逻辑的基本逻辑蕴涵式，
- 每组谓词公式的逻辑等价式，都可得到两组谓词演算逻辑蕴涵式。

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

- 1）量词与联结词的逻辑蕴涵式
- 定理2.6（1）$\forall xA(x)\lor\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\lor B(x))$

（2）$\exists x(A(x)\land B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\land\exists xB(x)$

证：（1）设E为任一个体域，若$\forall xA(x)\lor\forall xB(x)$的真值1，即E中的任意个体$a_0$都能使$A(a_0)$的值为1或者使$B(a_0)$的真值为1，因此$A(a_0)\lor B(a_0)$的真值为1，由于$a_0$是任一个体，故$\forall x(A(x)\lor B(x))$在个体域E上为1，即

$$\forall xA(x)\lor\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\lor B(x))$$

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

（2）由（1）可知 $\forall x(\neg A(x)) \vee \forall x(\neg B(x)) \Rightarrow \forall x(\neg A(x) \vee \neg B(x))$

又因为 $\forall x(\neg A(x)) \vee \forall x(\neg B(x))$

$\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$

$\forall x(\neg A(x) \vee \neg B(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg(A(x) \wedge B(x))$

$\Leftrightarrow \neg \exists x(A(x) \wedge B(x))$

因此 $\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \Rightarrow \neg \exists x(A(x) \wedge B(x))$

故 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

证毕。

2.3.2 谓词公式间的逻辑蕴涵

- 2）具有两个量词的谓词公式间的逻辑蕴涵关系：

$\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$

$\forall y \forall x A(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,y)$

$\exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$

$\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$

$\forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

$\forall y \exists x A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

小结

- 命题逻辑中的基本逻辑等价公式和逻辑蕴涵公式都可推广到谓词逻辑中使用（通过代换实例）。
- 一些谓词逻辑特有的基本逻辑等价公式和逻辑蕴涵公式，主要是一些与量词相关的公式，需要特别记忆。
- 本小节的思维形式注记图：

谓词公式关系

⇔(↔ 永真)

2个

⇒(→ 永真)

与量词相关的4组逻辑等价式

命题公式代换实例

与量词相关的2组逻辑蕴涵式

2.4 前束范式

前束范式是谓词公式的标准型，存在但不唯一。

2.4.1 前束范式的定义

❖ 定义2.19 一个公式，如果量词均在公式的开头且它们的辖域都延伸到整个公式的末尾，则该公式称为前束范式。

❖ 前束范式的一般形式为$Q_1x_1Q_2x_2…Q_nx_nA$。其中，A是一个没有量词的谓词公式，$Q_i(1\le i\le n)$或为∀或为∃，x_i是个体变元。

❖ 没有量词的谓词公式称为平凡的前束范式。

例2.10 判断以下各式是否前束范式：

1）$\neg\forall x\exists yA(x, y)$

2）$\forall x\exists y\forall z(A(x)\rightarrow B(y, z))$

3）$A(x, y)$

4）$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

解：2），3）都是前束范式；但1）， 4）不是前束范式。

2.4.1 前束范式的定义

- 定理2.7 对于任一谓词公式，都存在着与它逻辑等价的前束范式。
- 谓词公式转换为与之逻辑等价的前束范式的步骤一般如下：
  - 第一步：消去冗余量词，且通过换名或代入规则使不同的个体变元不同名。
  - 第二步：利用逻辑等价公式

    $$(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$$

    将公式中的联结词$\leftrightarrow$去掉。
  - 第三步：利用逻辑等价式

    $\neg\neg A\Leftrightarrow A$

    $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow A\wedge\neg B$；$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

    $\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)$；$\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow\forall x\neg P(x)$

    进行否定深入，将$\neg$号深入到命题变元和原子谓词公式的前面。
  - 第四步：利用量词辖域的扩张与收缩逻辑等价式和量词分配逻辑等价式将所有的量词移到公式的最前面。

2.4.1 前束范式的定义

例2.11 求下面公式的前束范式

1） $\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

2） $\neg\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$

解：1）解法1

$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\forall xP(x)\rightarrow\exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\rightarrow\exists yQ(y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))$

解法2

$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))$

2） $\neg\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xP(x)\wedge\exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)\wedge\exists yQ(y)$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg P(x)\wedge Q(y))$

2.4.1 前束范式的定义

例2.12 将公式$\forall x\forall y(\exists z(P(x, z)\wedge P(y, z))\rightarrow\exists vQ(x, y, v))$化成前束范式。

解 $\forall x\forall y(\exists z(P(x, z)\wedge P(y, z))\rightarrow\exists vQ(x, y, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z((P(x, z)\wedge P(y, z))\rightarrow\exists vQ(x, y, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z\exists v((P(x, z)\wedge P(y, z))\rightarrow Q(x, y, v)\quad)$

例2.13 将公式$\forall x((\forall yP(x)\vee\forall zQ(y, z))\rightarrow\neg\forall yR(x, y))$化成前束范式。

解：$\forall x((\forall yP(x)\vee\forall zQ(y, z))\rightarrow\neg\forall yR(x, y))$

$\Leftrightarrow\forall x((P(x)\vee\forall zQ(y, z))\rightarrow\neg\forall yR(x, y))$

$\Leftrightarrow\forall x((P(x)\vee\forall zQ(y, z))\rightarrow\neg\forall vR(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x(\forall z\,(P(x)\vee Q(y, z))\rightarrow\neg\forall vR(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\,(\forall z\,(P(x)\vee Q(y, z))\rightarrow\exists v\neg R(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists z\,((P(x)\vee Q(y, z))\rightarrow\exists v\neg R(x, v))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists z\exists v((P(x)\vee Q(y, z))\rightarrow\neg R(x, v))$

2.4.1 前束范式的定义

- 当个体变元较多时，首先辨识清楚哪些是自由变元，哪些是约束变元，同时确认量词的辖域以区分不同的个体变元。
- 一个公式的前束范式的各指导变元应是各不相同的，原公式中自由出现的个体变元在前束范式中还应是自由出现的。
- 若发现前束范式中有相同的指导变元，或原来自由出现的个体变元变成约束出现的了，说明换名规则或代入规则用的有错误或用的次数不够，应仔细进行检查，以便纠正。

2.4.2 前束合取范式和前束析取范式

❖ 定义2.20 一个前束范式如果具有如下形式：

$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n((A_{11}\vee A_{12}\vee\ldots\vee A_{1k_1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\ldots\vee A_{2k_2})\wedge\ldots(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\ldots\vee A_{mkm}))$

其中$Q_i(1\le i\le n)$或为$\forall$或为$\exists$，x_i是个体变元，$A_{ij}(1\le j\le km)$是原子谓词公式或其否定，则该前束范式称为前束合取范式。

❖ 例2.14 $\forall x\exists z\exists v((\neg P(x)\vee\neg R(x, v))\wedge(\neg Q(y, z)\vee\neg R(x, v)))$是一个前束合取范式。

❖ 定理2.8 每一个谓词公式都有与之逻辑等价的前束合取范式。

2.4.2 前束合取范式和前束析取范式

- 定义2.21 一个前束范式如果具有如下形式：
  $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n((A_{11}\wedge A_{12}\wedge\ldots\wedge A_{1k_1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\ldots\wedge A_{2k_2})\vee\ldots(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\ldots\wedge A_{mkm}))$，其中$Q_i(1\le i\le n)$或为$\forall$或为$\exists$，$x_i$是个体变元，$A_{ij}(1\le j\le km)$是原子谓词公式或其否定，则该前束范式称为前束析取范式。

- 例2.15 $\exists x\exists v\exists z((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee(P(v)\wedge Q(y,z)))$是一个前束析取范式。

- 定理2.9 每一个谓词公式都有与之逻辑等价的前束析取范式。

小结

- 每个谓词公式都可存在与之逻辑等价的前束范式、前束合取范式和前束析取范式，但并不是唯一的。
- 求公式前束范式的思维形式注记图：

公式 $\xrightarrow[\text{代入}]{\text{换名}}$ 不同变元不同名 $\xrightarrow{\text{等价律}}$ 消↔ $\xrightarrow[\text{量词否定逻辑等价式}]{\text{双重否定律 德摩根律}}$ 否定深入 $\xrightarrow[\text{量词分配逻辑等价式}]{\text{量词辖域的扩张与收缩}}$ 前束范式

2.5 谓词逻辑推理理论

谓词演算推证的基本思路是将量词消去，然后用类似命题演算推证法证明。

2.5.1 谓词演算推证

- 谓词演算推证也是由三个要素组成：推理根据、推理规则和证明方法。
- 推理根据：
  - 一方面命题演算推证中命题定律和推理定律的代换实例可以作为谓词演算推证的推理依据；
  - 一方面谓词演算的基本逻辑等价式：
    - 量词否定逻辑等价式
    - 量词辖域的收缩与扩张逻辑等价式
    - 量词分配逻辑等价式
    - 具有两个量词的逻辑等价式
    - 量词与联结词的逻辑蕴涵式
    - 具有两个量词的逻辑蕴涵式

2.5.1 谓词演算推证

- 证明方法：
  - 直接证法
  - 间接证明方法
    - 反证法
    - 附加前提证法。

2.5.1 谓词演算推证

- 推理规则：
  - P规则
  - T规则
  - CP规则
  - 消去和添加量词的规则

2.5.1 谓词演算推证

❖ 1）US规则（全称指定规则）

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

这里P是谓词，而c是个体域中某个任意的个体。

- 例如，设个体域为全体偶数的集合，P(x)表示“x是整数”，则∀xP(x)表示“所有的偶数都是整数”，那么根据全称指定规则有P(6)，即“6是整数”。
- 全称指定规则在使用时要求x是P(x)中自由出现的个体变元。该规则使用时还可以有以下形式：

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(y)}$$

- 注意：这里y是任意的不在P(x)中约束出现的个体变元。

2.5.1 谓词演算推证

- 2）UG规则（全称推广规则）

$$\frac{P(x)}{\therefore \forall y P(y)}$$

- 设E是指定的个体域，若对于E中的任意个体a，都有P(a)成立，才能应用该全称推广规则。
- 例如，设个体域是全体人类，P(x)表示“x是要死的”。显然，对于任意一个人a，P(a)都成立，即任何人都是要死的。则应用全称推广规则有∀xP(x)成立。
- 注意：全称推广规则在使用时要求y不在P(x)中约束出现。

2.5.1 谓词演算推证

❖ 3）ES规则（存在指定规则）

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 这里c是指定个体域中的某一个个体。但需注意的是，应用存在指定规则时，指定的个体c不是任意的。
- 例如，设个体域是全体整数，P(x)表示“x是偶数”，Q(x)表示“x是奇数”，显然，P(2)和Q(3)都为真，P(2)∧Q(3)也为真。这里∃xP(x)和∃xQ(x)都为真，但P(2)∧Q(2)为假。
- 注意：存在指定规则在使用时要求：
  - （1）c是使P(c)为真的指定个体域中的某一个个体。
  - （2）c不曾在P(x)中出现过。在具体的推证过程中还要求c不在以前步骤中出现过。
  - （3）P(x)中除x外还有其他自由出现的个体变元时，不能用此规则。

2.5.1 谓词演算推证

❖ （4）EG规则（存在推广规则）

$$\frac{P(c)}{\therefore \exists x P(x)}$$

- 这里c是指定个体域中的某一个个体，该规则的成立是显然的。
- 设个体域是全体人类，P(x)表示“x是天才”，P(爱因斯坦)表示“爱因斯坦是天才”是成立的，故∃xP(x)成立。
- 注意：存在推广规则在使用时要求取代c的x不在P(c)中出现。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.16 设前提为$\forall x \exists y F(x, y)$，下面的推证是否正确？

(1) $\forall x \exists y F(x, y)$ P

(2) $\exists y F(y, y)$ T (1) US

解：推证不正确。

取解释I：个体域为R，在I下前提被解释为$\forall x \exists y (x>y)$，为真；

而$\exists y F(y, y)$被解释为$\exists y (y>y)$，为假。

所以推理不正确。

错误的原因是第(2)步违反了US规则成立的条件。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.17 设前提为$\forall x\exists yF(x, y)$，下面的推证是否正确？

(1) $\forall x\exists yF(x, y)$　　P

(2) $\exists yF(t, y)$　　T (1) US

(3) $F(t, c)$　　T (2) ES

(4)$\forall xF(x,c)$　　T (3) UG

(5)$\exists y\forall x\, F(x,y)$　　T (4) EG

解 推证不正确。

取与例2.16相同的解释，则$\forall x\exists yF(x,y)$为真；

而$\exists y\forall x\, F(x,y)$意为“存在着最小实数”，是假命题，

所以推理不正确。

之所以出现这样的错误，是第(3)步违反了ES规则成立的条件。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.18 试证明$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))\Rightarrow\forall x(P(x)\rightarrow R(x))$

证：(1)$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ P

(2)$P(y)\rightarrow Q(y)$ T (1) US

(3)$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$ P

(4)$Q(y)\rightarrow R(y)$ T (3) US

(5)$P(y)\rightarrow R(y)$ T (2)(4) I

(6)$\forall x(P(x)\rightarrow R(x))$ T (5) UG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.19 试证明$\forall x(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))\wedge\exists x(C(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge R(x))$

证：(1) $\exists x(C(x)\wedge Q(x))$	P
(2) $C(a)\wedge Q(a)$	T (1) ES
(3) $\forall x(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$	P
(4)$C(a)\rightarrow W(a)\wedge R(a)$	T (3) US
(5)$C(a)$	T (2) I
(6)$W(a)\wedge R(a)$	T (4)(5) I
(7)$Q(a)$	T (2) I
(8)$R(a)$	T (6) I
(9)$Q(a)\wedge R(a)$	T (7)(8) I
(10)$\exists x(Q(x)\wedge R(x))$	T (9) EG

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

- 注意：
  - 在推证过程中，如既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用规则ES，再使用规则US。
  - 在例2.19的推理过程中(2)(3)与(4)两条就不能颠倒，若先用US规则得到$C(a)\rightarrow W(a)\wedge R(a)$，则再用ES规则时，不一定得到$C(a)\wedge Q(a)$，一般应为$C(b)\wedge Q(b)$，故无法推证下去。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.20 证明苏格拉底三段论："所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。"

证：设H(x)：x是一个人，D(x)：x是要死的，a：苏格拉底。

则本论证形式化为：$\forall x(H(x)\rightarrow D(x))\wedge H(a)\Rightarrow D(a)$;

(1) $\forall x(H(x)\rightarrow D(x))$	P
(2) $H(a)\rightarrow D(a)$	T (1) US
(3) $H(a)$	P
(4) $D(a)$	T (2)(3) I

证毕。

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.21 试证明下列推论的有效性。

有些病人喜欢一切医生，但是没有一个病人喜欢骗子，因此医生都不是骗子。

证：设P(x)：x是病人，D(x)：x是医生，Q(x)：x是骗子，L(x,y)：x喜欢y。

则本论证形式化为：$\exists x(P(x)\land\forall y(D(y)\to L(x, y))) \land \neg\exists x(P(x) \land \exists y(Q(y) \land L(x, y))) \Rightarrow \forall y(D(y)\to\neg Q(y))$

(1) $\exists x(P(x)\land\forall y(D(y)\to L(x, y)))$	P
(2) $P(a)\land\forall y(D(y)\to L(a, y))$	T (1) ES
(3) $\neg\exists x(P(x) \land \exists y(Q(y) \land L(x, y)))$	P
(4) $\forall x(\neg P(x) \lor \neg\exists y(Q(y) \land L(x, y)))$	T (3) E
(5) $\forall x(\neg P(x) \lor \forall y (\neg Q(y) \lor \neg L(x, y)))$	T (4) E
(6) $\neg P(a) \lor \forall y (\neg Q(y) \lor \neg L(a, y)))$	T (5) US
(7) $P(a)$	T (2) I
(8) $\forall y (\neg Q(y) \lor \neg L(a, y))$	T (6)(7) I
(9) $\neg Q(y) \lor \neg L(a, y)$	T (8) US
(10) $L(a, y) \to \neg Q(y)$	T (9) E
(11) $\forall y(D(y)\to L(a, y))$	T (2) I
(12) $D(y)\to L(a, y)$	T (8) US
(13) $D(y)\to\neg Q(y)$	T (7)(9) I
(14) $\forall y(D(y)\to\neg Q(y))$	T (10) UG

证毕。

- 没有一个病人喜欢(某个)骗子
- $\neg \exists x(P(x) \wedge \exists y (Q(y) \wedge L(x,y)))$
- $\Leftrightarrow \forall x \neg(P(x) \wedge \exists y (Q(y) \wedge L(x,y)))$
- $\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \neg \exists y (Q(y) \wedge L(x,y)))$
- $\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \forall y \neg (Q(y) \wedge L(x,y)))$
- $\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee \neg L(x,y)))$
- $\Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow \forall y (\neg Q(y) \vee \neg L(x,y)))$
- $\Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$
- $\Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow \forall y(L(x, y) \rightarrow \neg Q(y)))$
- 所有的病人都不喜欢任何一个骗子

2.5.2 谓词演算推证举例

例2.22 我国目前有三类银行在从事各种外币以及人民币的金融业务：一批国家以及地方资金控股的国有银行，若干家民营资本控股的私有银行以及外国资本控股的外资银行。外资银行专做资金大的大客户的业务，国有银行和私有银行兼做大客户和小客户的业务。已知b银行不是国有银行，但它兼做大客户和小客户的业务。证明它是一家私有银行。

证：设 G(x)：x是国有银行，S(x)：x是私有银行，W(x)：x是外资银行，D(x)：x做大客户业务，X(x)：x做小客户业务。

则本论证形式化为：$\forall x(G(x)\vee S(x)\vee W(x)) \wedge \forall x(W(x)\rightarrow D(x) \wedge\neg X(x)) \wedge \forall x((G(x)\vee S(x))\rightarrow(D(x)\vee X(x))) \wedge\neg G(b) \wedge D(b) \wedge X(b) \Rightarrow S(b)$

2.5.2 谓词演算推证举例

则本论证形式化为：$\forall x(G(x)\vee S(x)\vee W(x)) \wedge \forall x(W(x)\rightarrow D(x) \wedge \neg X(x)) \wedge \forall x(G(x)\vee S(x)\rightarrow D(x)\vee X(x)) \wedge \neg G(b) \wedge D(b) \wedge X(b) \Rightarrow S(b)$

用反证法证明

(1)$\neg S(b)$	P（结论的否定）
(2)$\forall x(G(x)\vee S(x)\vee W(x))$	P
(3)$G(b)\vee S(b)\vee W(b)$	T (2) US
(4)$G(b)\vee W(b)$	T (1)(3) I
(5)$\neg G(b)$	P
(6)$W(b)$	T (4)(5) I
(7)$\forall x(W(x)\rightarrow D(x) \wedge \neg X(x))$	P
(8)$W(b)\rightarrow D(b) \wedge \neg X(b)$	T (7) US
(9)$D(b) \wedge \neg X(b)$	T (6)(8) I
(10)$\neg X(b)$	T (9) I
(11)$X(b)$	P
(12)$X(b) \wedge \neg X(b)$	T (10)(11) I

由于$X(b) \wedge \neg X(b) \Leftrightarrow 0$，所以推理正确。

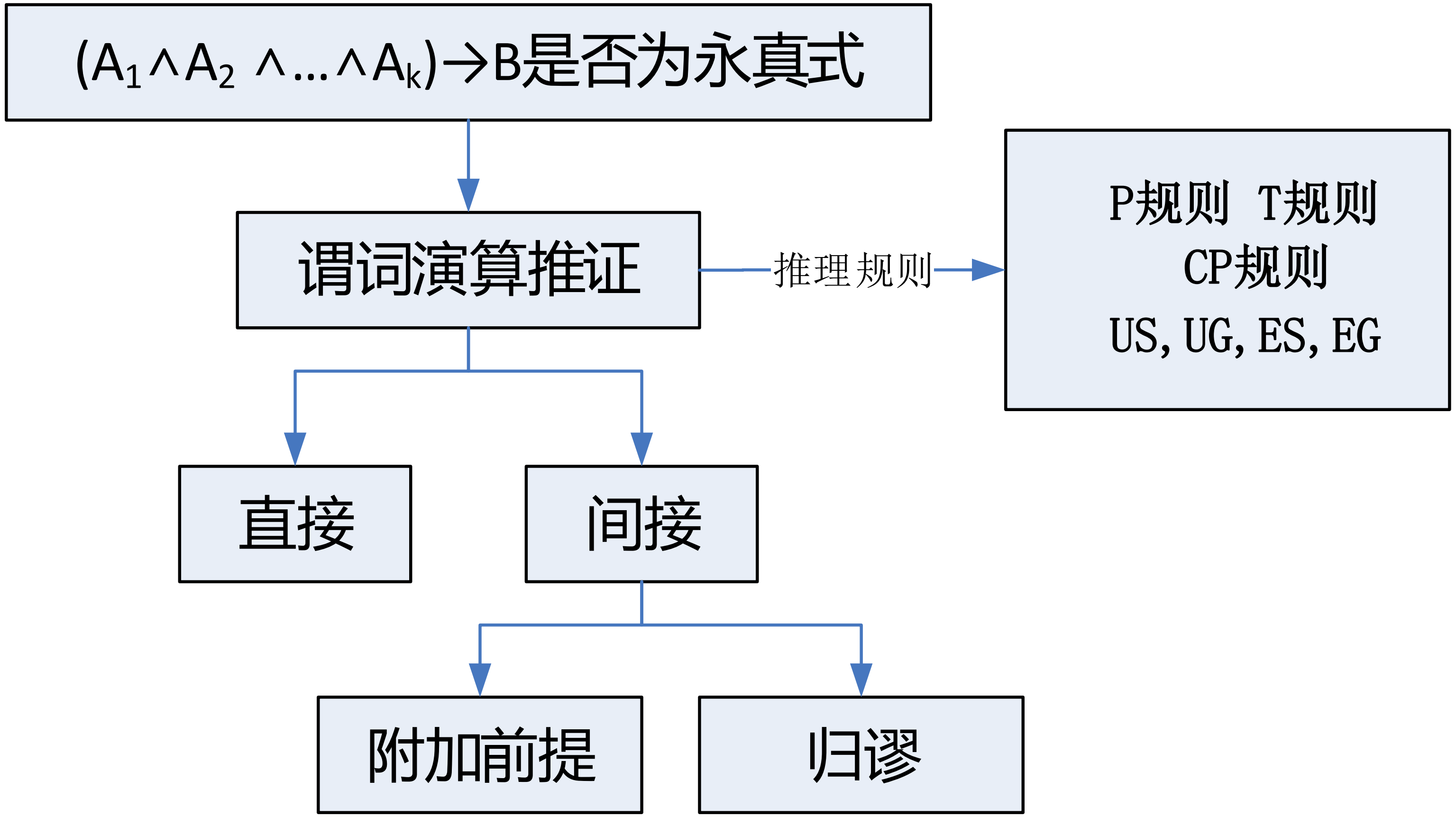
证毕。

小结

- 谓词演算推证中利用US,ES规则可将谓词演算的推证转化为命题演算的推证，再通过UG,EG转化回来。
- 关于四条规则使用的特别提示：
  - （1）当既要使用规则US又要使用规则ES消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用规则ES，再使用规则US。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则UG或规则EG引入量词，得到所要的结论。
  - （2）如一个变量是用规则ES消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG，而不能使用规则UG；如使用规则US消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG和规则UG。
  - （3）如有两个含有存在量词的公式，当用规则ES消去量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。
  - （4）在用规则US和规则ES消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端（一般化为前束范式）。

小结

❖ 本小节内容思维形式注记图



2.6 常见题型解析

❖ 1)一阶逻辑中命题符号化

- （1）在命题符号化的过程中，要先看是否指明了个体域，若没有事先指明个体域，则个体域是全总个体域。这时要对每个个体变元的变化范围，用特性谓词加以限制；
- （2）选择适当的量词——全称量词或存在量词，而且，对于全称量词一般特性谓词须作蕴涵式前件；对于存在量词一般特性谓词应作合取项；
- （3）不同个体域内，命题符号化形式可能不同也可能相同，真值可能不同也可能相同；
- （4）由于语言习惯，汉语中常将一些词省略，在翻译时必须补充上，否则语义不通；
- （5）在选择谓词时应注意所述命题是刻画客体的性质，还是反映客体与客体的关系，前者用一元谓词，后者用多元谓词。

2.6 常见题型解析

❖ 2）给定解释，解释给定的公式，并求出公式真值

- 1）首先要区分公式是闭式还是非闭式，如果是闭式则一定是命题，有确定的真假值，如果是非闭式则有可能是命题．也有可能不是命题，要视具体情况具体分析；
- （2）公式的真值与个体域有关，在不同的个体域下其真值可能不同；
- （3）在求真值时，应首先将公式进行解释，如果是有限个体域，则可以具体表示出来，然后再求真值。

2.6 常见题型解析

❖ 3）判定公式的类型

- (1)找到相对应的命题公式，将所判公式作为其代换实例。如果命题公式是重言式(矛盾式)，则所判公式亦为逻辑有效式（不可满足式）；
- (2)用推证方法进行判断；
- (3)如果估计该公式既不是逻辑有效的也不是不可满足的，则分别给出两种解释I_1、I_2，使其真值不同。

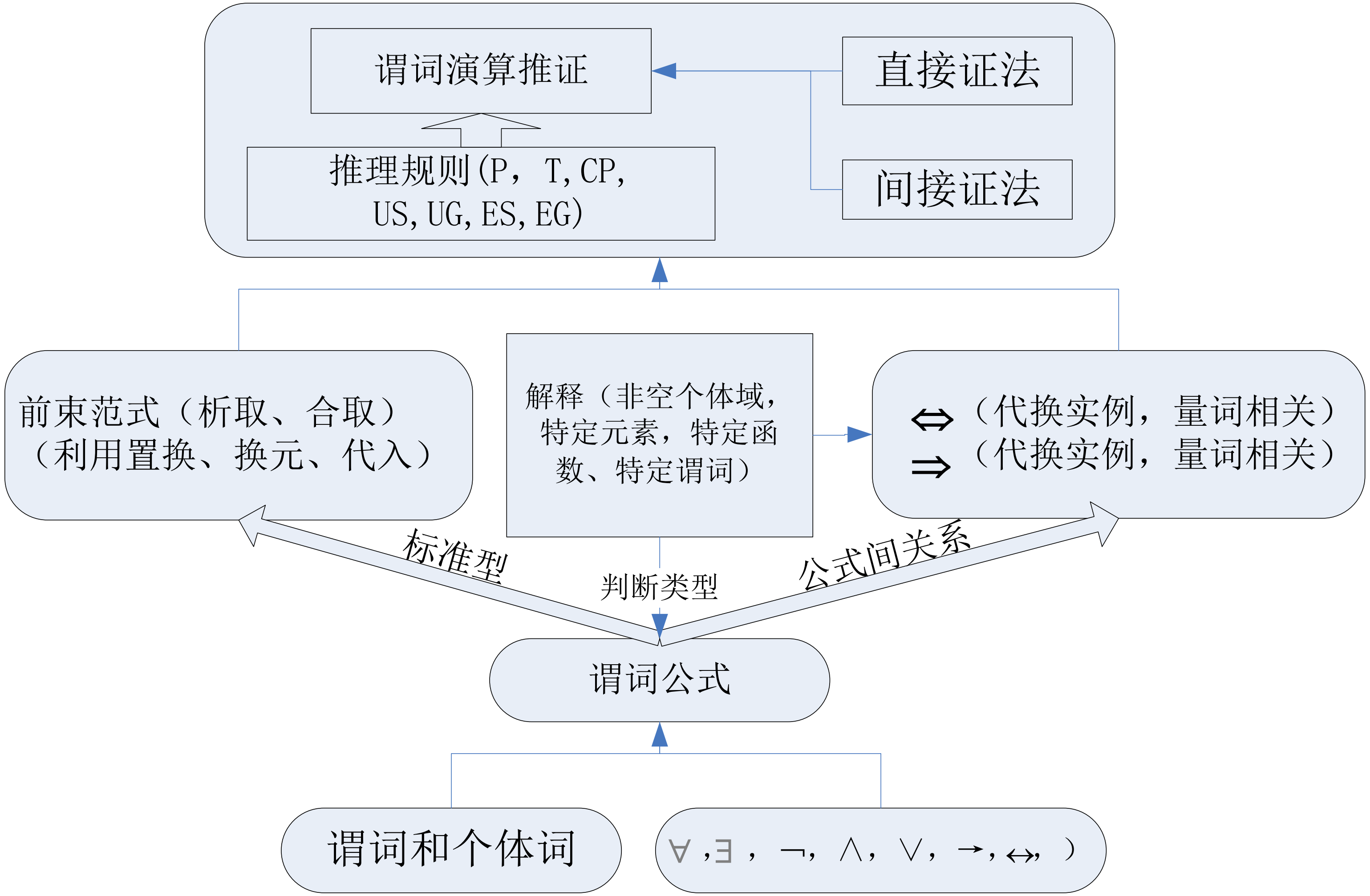
2.6 常见题型解析

- 4）证明公式间的逻辑等价关系
  - 利用基本的逻辑等价式，通过逻辑等价演算进行证明。
  - 要熟记命题逻辑的基本逻辑等价式和谓词逻辑中有关量词的若干逻辑等价式。
- 5）在有限个体域内消去公式中的量词
  - 针对有限元素的个体域，利用消去量词逻辑等价式将公式中的量词消去一般方法有：
    - （1）直接消去量词；
    - （2）先缩小量词辖域再消去量词。

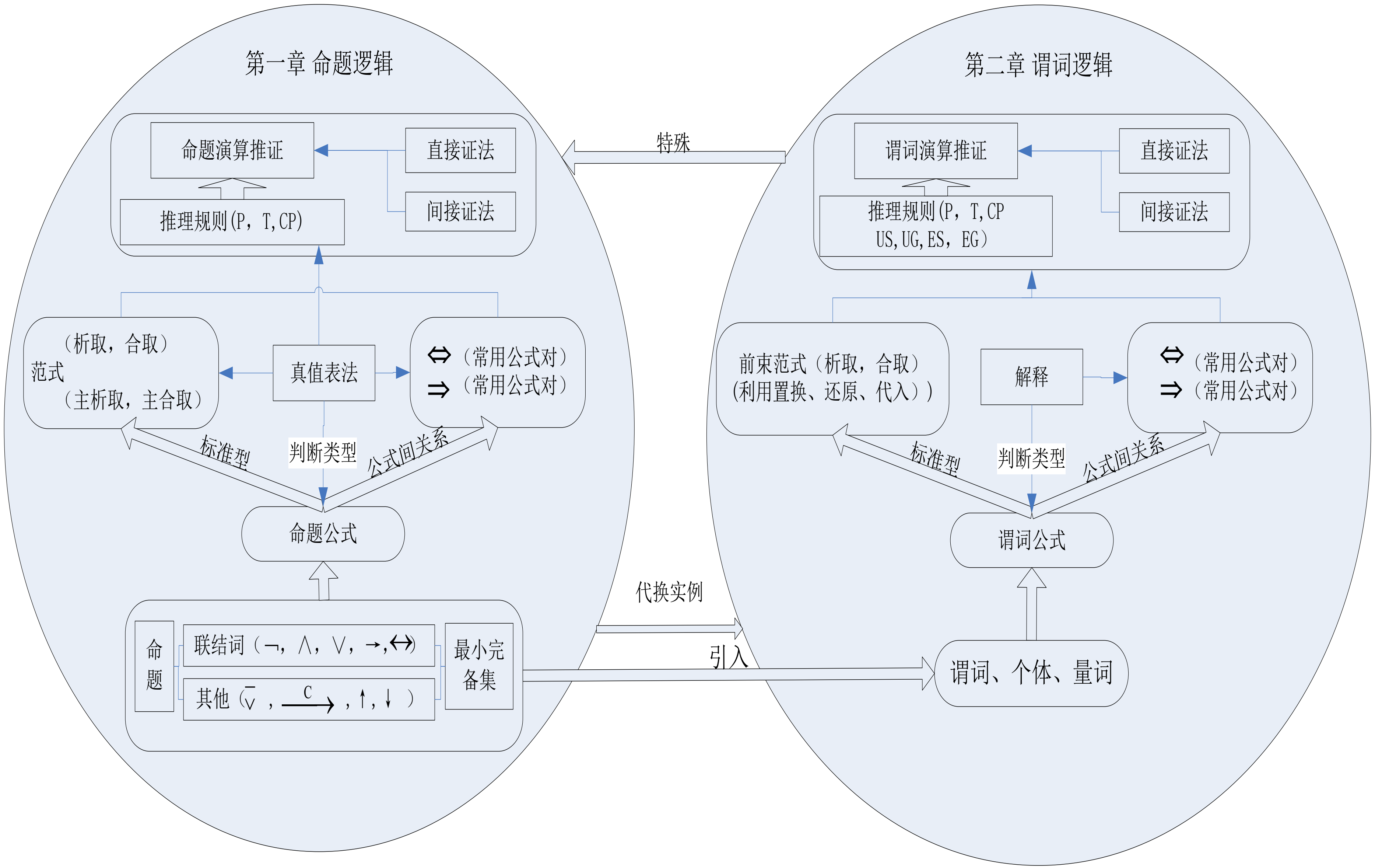
2.6 常见题型解析

- 6）求给定公式的前束范式
  - (1)如果存在相重的约束变元或自由变元，必须进行换名或代入．使每个变元仅存一种状态；
  - (2)正确使用谓词公式的各种逻辑等价关系。
- 7）谓词演算推证
  - 在谓词演算推证过程中，必须注意遵守所使用的各项推理规则的限制条件。
  - 当既需要消去存在量词又需要消去全称量词的时候，一般应先消去存在量词，后消去全称量词。
  - 当结论是蕴涵式时，可考虑使用附加前提证明法。
  - 当前提较少并且都为蕴涵式或析取式时，会感到无处下手，这时往往用归谬法，将结论的否定作为附加前提引入，以增加可用的前提。

本章知识逻辑结构图


谓词演算推证
直接证法
间接证法
推理规则(P，T,CP,
US,UG,ES,EG)
前束范式（析取、合取）
（利用置换、换元、代入）
解释（非空个体域，
特定元素，特定函
数、特定谓词）
⇔（代换实例，量词相关）
⇒（代换实例，量词相关）
标准型
判断类型
公式间关系
谓词公式
谓词和个体词
∀,∃，¬，∧，∨，→，↔，）

本篇知识逻辑结构图


第一章 命题逻辑
命题演算推证
直接证法
间接证法
推理规则(P，T,CP)
（析取，合取）
范式
（主析取，主合取）
真值表法
⇔（常用公式对）
⇒（常用公式对）
标准型
判断类型
公式间关系
命题公式
命题
联结词（¬，∧，∨，→,↔）
其他（⊽，→c，↑，↓）
最小完备集
特殊
代换实例
引入
第二章 谓词逻辑
谓词演算推证
直接证法
间接证法
推理规则(P，T,CP
US,UG,ES，EG）
前束范式（析取，合取）
(利用置换、还原、代入）)
解释
⇔（常用公式对）
⇒（常用公式对）
标准型
判断类型
公式间关系
谓词公式
谓词、个体、量词