第十二章 常微分方程

12.1 基本知识点要求

1．了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2．掌握变量可分离的方程及一阶线性方程的解法.

3．会解齐次方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程.

4．会用降阶法解下列方程： $y^{(n)}=f(x)$， $y''=f(x,y')$ 和 $y''=f(y,y')$.

5．理解线性微分方程解的性质及解的结构定理.

6．掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

7．会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.

8．会解欧拉方程.

9．会用微分方程解决一些简单的应用问题.

12.2 基本题型及解题思路分析

题型 1　求解可分离变量方程　$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

解题思路

(1)分离变量　$f(x)dx=\dfrac{1}{g(y)}dy$

(2)两端积分　$\int f(x)dx=\int\dfrac{1}{g(y)}dy$，求出原函数，即得通解。(见例 1)

注:形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 的微分方程，通过变量替换 $u=ax+by+c$ 可化为可分离变量的方程 $\dfrac{du}{dx}=a+bf(u)$ 求解. (见例 2)

例 1 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解为____________。(2006－研)

【分析】该方程为可分离变量型，先分离变量，然后两端积分即可。

解: 分离变量 $\dfrac{dy}{y}=(\dfrac{1}{x}-1)dx$，两端积分得 $\ln|y|=\ln|x|-x+C_1$ ，即 $|y|=e^{C_1}|x|e^{-x}$，

去绝对值符号，得原方程的通解为 $y=Cxe^{-x}$，其中 C 为任意常数。

例 2 求微分方程 $y'=\sqrt{4x+2y-1}$ 的通解。

解：这是 $y' = f(ax+by+c)$型方程 。设 $u = 4x+2y-1$，则 $\frac{du}{dx} = 4+2\frac{dy}{dx}$，代入原方程，得可分离变量方程 $\frac{1}{2}\frac{du}{dx} = \sqrt{u}+2$，解得 $\sqrt{u}-2\ln(\sqrt{u}+2) = x+c$，变量还原，得原方程通解 $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x+C$。

题型 2. 求解齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$

求解齐次方程关键是通过一个变量替换将其化为可分离变量的微分方程。

1. 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ **解题思路**

(1) 令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$，求导得 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$；

(2) 代入原方程得 $u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$， 即 $\frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$，这是可分离变量的方程；

(3) 利用题型 1 的方法求解，设求得的上述方程的通解为 $g(x,u,C) = 0$（C 为任意常数)，将变量还原，得原方程通解 $g(x,\frac{y}{x},C) = 0$.(见例 3，例 4，例 12 解法 2, 例 13 解法 4)

2.形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ (c_1, c_2至少有一个不为0) 的方程解题思路

(1)当 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，先求出线性方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0 \end{cases}$ 的解 (α,β)（此时线性方程组有唯一解)，令 $X = x-\alpha$，$Y = y-\beta$，则原方程化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)$$，然后求解。(见例 5)

(2)当 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$，即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$ 时，利用变量替换 $u = a_1x+b_1y$，原方程化为可分离变量的方程。(见例 6)

例 3 $y' = \frac{x-y}{x+y}$

【分析】该方程为齐次方程，通过变量替换将其化为可分离变量方程求解。

解：方程变形为 $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$，是齐次方程。设 $u = \frac{y}{x}$，$y = ux$，$y' = u + x\frac{du}{dx}$，代入方

程得$u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1-u}{1+u}$，$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1-2u-u^2}{(1+u)x}$，分离变量得$\dfrac{(u+1)du}{u^2+2u-1}=-\dfrac{dx}{x}$，两端积分得$\ln(u^2+2u-1)=\ln x^{-2}+\ln C$，即有$u^2+2u-1=Cx^{-2}$，将$u=\dfrac{y}{x}$代入整理，得微分方程通解$y^2+2xy-x^2=C$。

【评注】将齐次方程通过变量替换化为可分离变量的方程，求出通解后一定要将变量还原。

例 4 求微分方程$(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$的通解。(1997一考研题)

【分析】应先将方程变形，判定方程的类型，再求解。

解法 1：原方程变形为$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy}=-\dfrac{3+2\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\frac{y}{x}}$，为齐次方程。

令 $u=\dfrac{y}{x}$，代入上式且分离变量得$\dfrac{1-2u}{1+u-u^2}du=-\dfrac{3}{x}dx$，积分得$\ln\left|1+u-u^2\right|=-3\ln|x|+C_1$，即$1+u-u^2=Cx^{-3}$，将$u=\dfrac{y}{x}$代入得微分方程通解$x^2+xy-y^2=\dfrac{C}{x}$。

解法 2：用凑全微分的方法求解。由于

$$(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=3x^2dx+[yd(x^2)+x^2dy)]-[xd(y^2)+y^2dx)]$$
$$=d(x^3)+d(x^2y)-d(xy^2)=d(x^3+x^2y-xy^2)$$

故通解为$x^3+x^2y-xy^2=C$。

解法 3：见题型 5 例 13.

例 5 求解微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x+2y-5}{2x-y+4}$。

解： 这是$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$型方程。解方程组$\begin{cases}-x+2y-5=0\\2x-y+4=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$。设$X=x+1$，$Y=y-2$，代入原方程得$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{2Y-X}{2X-Y}=\dfrac{2\frac{Y}{X}-1}{2-\frac{Y}{X}}$，为齐次方程。再设$u=\dfrac{Y}{X},Y=Xu,\ \dfrac{dY}{dX}=u+X\dfrac{du}{dX}$，代入方程得$X\dfrac{du}{dX}+u=\dfrac{2u-1}{2-u}$，即$X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{u^2-1}{2-u}$，是可分离变量方程，解得$\dfrac{u-1}{(u+1)^2}=CX^2$，将$X=x+1$，$u=\dfrac{y-2}{x+1}$代入，得原微分方程

通解 $y-x-3=C(x+y-1)^3$ 。

例 6 求解微分方程 $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$ 。

解：这是 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 型方程。由于方程组 $\begin{cases}x+y+1=0\\2x+2y-1=0\end{cases}$ 的系数行列式等于 0，作变量替换 $u=x+y$，则 $du=dx+dy$，原方程化为可分离变量的方程 $(2-u)dx+(2u-1)du=0$，分离变量、积分，并变量还原得原方程的通解 $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$ 。

题型 3. 求解一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

解题思路：

1 常数变易法

(1)先解一阶齐次线性方程（属于可分离变量类型）

对 $y'+P(x)y=0$ ，变量分离，求得通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ (C 为任意常数)。

(2)（常数变易）将齐次线性方程通解中的 C 变易成 $C(x)$（待定）。假设非齐次线性方程的通解为 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$，代入非齐次线性方程得 $C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$，即 $C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$，两端分别积分得 $C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$，将此表达式代回 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$，即得一阶非齐次线性方程的通解 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$。

2.公式法

如果方程可变形为一阶线性微分方程的标准形式 $y'+P(x)y=Q(x)$，可直接利用通解公式 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$ 求解。(见例 7-例 10)

例 7 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为____________。(2005一考研题)

【分析】直接套用 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式，再由初始条件确定任意常数即可。

解：原方程变形为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$,是一阶线性微分方程.由通解公式得通解

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]=\frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln xdx+C]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+C\frac{1}{x^2},$$

由 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$，得 C=0，故所求解为 $y=\dfrac{1}{3}x\ln x-\dfrac{1}{9}x.$。

【评注】在用通解公式求解时，应注意先化为标准形式。另外本题也可如下求解：原方程可化为 $x^2y'+2xy=x^2\ln x$，即 $[x^2y]'=x^2\ln x$，两边积分得

$x^2y=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C$,再代入初始条件，即可得所求解为 $y=\dfrac{1}{3}x\ln x-\dfrac{1}{9}x.$

例 8 求解微分方程 $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.

【分析】此方程不是函数 y 关于自变量 x 的一阶线性方程，但是若将 x 看作函数，y 看作自变量，原方程可化为一阶线性方程求解。

解：原方程可化为 $\dfrac{dx}{dy}-x\cos y=\sin 2y$，这是关于函数 x，自变量 y 的一阶非齐次线性方程，由通解公式可得方程通解为 $x=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$.

例 9 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，满足 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv$。求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程并求其通解. (2004－考研题)

【分析】先求 y'。利用已知关系 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv$，可得到关于 y 的一阶微分方程。

解：对 $y=e^{-2x}f(x,x)$，两端求导得 $y'=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f_u'(x,x)+e^{-2x}f_v'(x,x)$

$=-2y+x^2e^{-2x}$，因此所求的微分方程为 $y'+2y=x^2e^{-2x}$，这是一阶线性微分方程。

由通解公式得通解 $y=e^{-\int 2dx}(\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+C)=(\dfrac{1}{3}x^3+C)e^{-2x}$ (C 为任意常数).

【评注】： 本题综合了复合函数求偏导数与微分方程，但是求偏导数与解微分方程都是基本题型.

例 10 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数且满足 $f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f'(t)\mathrm{d}t+x^2$，求 $f(x)$ 的表达式。

【分析】对含变上限积分的函数方程，一般先对 x 求导，得到未知函数满足的微分方程,再求解。

解：原方程可变形为 $f(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt+x^2$，可得 $f(0)=0$。

方程两边对 x 求导，得 $f'(x)=2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+2x\Rightarrow f'(x)=2xf(x)+2x$，此为一阶线

性微分方程，由通解公式得通解 $f(x)=\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{x^2}-1$，将

$f(0)=0$ 代入上式得 $C=1$，故 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}-1$。

【评注】利用变限积分的可导性是解函数方程的方法之一。

题型 4 求解伯努利方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ $(n\neq 0, 1$，这里 n 可以为负数$)$

解题思路：通过变量替换将方程化为一阶线性微分方程求解

(1)原方程两端同除 y^n，得 $y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x)$；

(2)为了化为线性方程，需将 y^{1-n} 看成整体，故令 $z=y^{1-n}$（注意：此时 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$），原方程可化为 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$，这是关于 z 的一阶线性方程；

(3) 求解上述线性方程，得其通解，并将变换式 $z=y^{1-n}$ 代回，即得原方程通解。

(见例 11，例 12 解法 1)

例 11 求解微分方程 $xy'+y=x^3y^6$.

【分析】此方程是伯努利方程，通过变量替换将其化为一阶线性方程求解。

解： 原方程变形为 $y'+\dfrac{1}{x}y=x^2y^6$，为伯努利方程。令 $z=y^{-5}$，则 $\dfrac{dz}{dx}=-5y^{-6}\dfrac{dy}{dx}$，代入原方程得 $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{5}{x}z=-5x^2$，为一阶线性方程，其中 $P(x)=-\dfrac{5}{x}$，$\mathrm{Q}(x)=-5x^2$，由通解公式得方程通解 $z=\dfrac{5}{2}x^3+Cx^5$，将 $z=y^{-5}$ 代入，整理得原微分方程通解

$x^3y^5\left(\dfrac{5}{2}+Cx^2\right)=1$。

例 12 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解。(1993ー考研题)

【分析】此方程既是齐次方程，也是伯努利方程，可以选用不同求解方法。

解法 1： 所给方程为伯努利方程。两边除以 x^2 得 $y'+x^{-1}y=x^{-2}y^2$

令 $z=y^{-1}$，则上述方程化为一阶线性方程 $z'-\dfrac{1}{x}z=-\dfrac{1}{x^2}$，由通解公式求得通解为

$z=Cx+\dfrac{1}{2x}$，即 $\dfrac{1}{y}=Cx+\dfrac{1}{2x}$，代入 $y\big|_{x=1}=1$，得 $C=\dfrac{1}{2}$，故所求特解为 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$。

解法 2： 所给方程可写成 $y'+\dfrac{y}{x}=(\dfrac{y}{x})^2$ 为齐次方程。求解过程省略。

题型 5 求解全微分方程

1.对于微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$，若存在二元可微函数 $u=u(x,y)$，使得 $du=M(x,y)dx+N(x,y)dy$，则称方程为全微分方程。全微分方程的通解为 $u(x,y)=C$。

2. 全微分方程的判别　$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 为全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$。

3. 常用求解方法：曲线积分法(见例 13 解法 1)；凑微分法(见例 13 解法 2)；偏积分法(见例 13 解法 3)

例 13. 验证方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 为全微分方程，并求其通解。

解：$M(x,y)=3x^2+2xy-y^2$，$N(x,y)=x^2-2xy$，因为 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x-2y=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故所给方程为全微分方程。

解法 1：曲线积分法。$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy$。其中 (x_0,y_0) 是定义区域内任意选定的一点。式中积分表示沿起点为 (x_0,y_0)，终点为 (x,y) 的任意路径的曲线积分。

由于 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，该曲线积分与路径无关，故一般选择较为简单的路径（如折线）进行计算。

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy$，其中积分路径为由 $(0,0)$ 沿直线到 $(x,0)$，再沿直线由 $(x,0)$ 到 (x,y)。于是 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy$

$=\int_0^x(3x^2+2x\cdot 0-0^2)dx+\int_0^y(x^2-2xy)dy=x^3+x^2y-xy^2$，所求通解为 $x^3+x^2y-xy^2=C$。

解法 2：凑微分法。原方程可化为 $3x^2dx+(2xydx+x^2dy)-(y^2dx+2xydy)=0$

即　$d(x^3+x^2y-xy^2)=0$,故所求通解为 $x^3+x^2y-xy^2=C$。

解法 3：偏积分法。视 y 为常量，对 x 积分 $\int f(x,y)dx$，称为对 x 的偏积分。

设 $du(x,y)=(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+2xy-y^2$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy$，由 $\int\dfrac{\partial u}{\partial x}dx=\int(3x^2+2xy-y^2)dx$ 得 $u(x,y)=x^3+x^2y-xy^2+C(y)$，

上式两边对 y 求偏导，并与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy$ 比较得，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy+C'(y)=x^2-2xy$，

$C'(y)=0$，所以$C(y)=C$，故所求通解为$x^3+x^2y-xy^2=C$。

解法 4：本方程也是齐次方程，求解过程见题型 2 例 4。

【评注 1】曲线积分法求解全微分方程，实质是对二元函数$u(x,y)$的全微分求积。

【评注 2】凑微分法要求熟悉微分公式，并能正确分组，其运算一般较简单。

【评注 3】偏积分方法是利用全微分的性质来求解。

【评注 4】若$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$不是全微分方程，假设存在函数$\mu(x,y)$，使得方程$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$为全微分方程，则称$\mu(x,y)$为方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$的积分因子。有些方程本不是全微分方程，但可通过“凑微分”的方法寻找积分因子，再按全微分方程求通解。(见例 14)

例 14 求微分方程$(x-y^2)dx+2xydy=0$的通解

解：$M(x,y)=x-y^2$，$N(x,y)=2xy$，因为$\dfrac{\partial M}{\partial y}=-2y\neq 2y=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故所给方程不是全微分方程。将方程改写为$xdx+(-y^2dx+2xydy)=0$，由于$d\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{-y^2dx+2xydy}{x^2}$，分子与上式左边第二项相同，因此令$\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2}$，乘方程两边得$\dfrac{1}{x}dx+\dfrac{-y^2dx+2xydy}{x^2}=0$，故$d(\ln x+\dfrac{y^2}{x})=0$，所求通解为$\ln x+\dfrac{y^2}{x}=C$。

【评注 1】寻求积分因子无常规可循，但熟悉常用的全微分公式，细心观察，在“凑微分”过程中是有效的。下面是几个常用的全微分公式：

（1）$xdx+ydy=d\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$；（2）$xdx-ydy=d\left(\dfrac{x^2-y^2}{2}\right)$；（3）$ydx+xdy=d\left(xy\right)$；

（4）$\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\dfrac{y}{x}\right)$；（5）$\dfrac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\dfrac{x}{y}\right)$

【评注 2】对一阶微分方程求通解解的说明：

（1） 一阶微分方程的类型较多，不同类型的方程，有不同的解法，要提高识别方程类型的能力，关键是要多练、多想、多总结。对相应题目要先判别方程类型(必要时先化简整理)，再按方程类型确定解题方法。

（2） 同一个方程可能属于多种不同类型，有多种解法，注意选择相对简便的解法。

（3） 分离变量法是最基本的解法。通过对齐次方程、伯努利方程等的求解训练，要掌握变量替换的思想；通过一阶非齐次线性微分方程的求解应掌握常数变易法的思想。

题型 6 求解可降阶的高阶微分方程

1. 形如 $y^{(n)}=f(x)$（直接积分型）

解题思路：用直接积分法，n 次积分可得通解。(见例 15)

2. 形如 $y''=f(x,y')$（不显含 y 型）

解题思路：这是不显含未知函数 y 的可降阶的微分方程。令 $y'=p(x)$（以 x 为自变量），则方程化为关于 x和$p(x)$ 的一阶微分方程 $\dfrac{dp}{dx}=f(x,p)$。(见例 16)

3. 形如 $y''=f(y,y')$（不显含 x 型）

解题思路：这是不显自变量 x 的可降阶的微分方程。令 $y'=p(y)$（以 y 为自变量），利用复合函数的求导法则，把 y'' 化为对 y 的导数，即 $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，

则方程化为关于 y和$p(y)$ 的一阶方程 $\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1}{p}f(y,p)$。(见例 17)

例 15 微分方程 $y'''=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=0$ $y'\big|_{x=1}=1$ $y''\big|_{x=1}=2$ 的特解是__________.

【分析】该方程为 $y^{(n)}=f(x)$ 型，采用直接积分法。3 阶微分方程需积分 3 次。

解：$y''=\int\dfrac{\ln x}{x^2}dx+C_1=\int\ln x d(-\dfrac{1}{x})+C_1=-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+C_1$，由 $y''\big|_{x=1}=2$，得 $C_1=3$，故 $y''=-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+3$,再积分得 $y'=3x-\ln x-\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C_2$，由 $y'\big|_{x=1}=1$，得 $C_2=-2$，故 $y'=3x-\ln x-\dfrac{1}{2}\ln^2 x-2$,再积分得 $y=\dfrac{3}{2}x^2-2x-\dfrac{x}{2}\ln^2 x+C_3$，由 $y\big|_{x=1}=0$，得 $C_3=\dfrac{1}{2}$，故所求特解为 $y=\dfrac{3}{2}x^2-2x-\dfrac{x}{2}\ln^2 x+\dfrac{1}{2}$。

【评注】 在求解可降阶微分方程时，每次积分后，代入相应的初始条件，确定积分中的任意常数。这样做要比求出通解后再利用初始条件确定通解中的任意常数方便些。

例 16 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为__________。(2000一研)

解：这是不显含未知函数 y 的可降阶的微分方程。令 $y'=p(x)$（以 x 为自变量），则方程化为一阶线性微分方程 $xp'+3p=0$，求其通解为 $y'=p=\dfrac{C_0}{x^3}$，再积分，得所求通解为 $y=\dfrac{C_2}{x^2}+C_1$。

例 17 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1\ y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是__________。(2002－研)

解法 1： 这是不显自变量 x 的可降阶的微分方程。令 $y'=p(y)$（以 y 为自变量），利用复合函数的求导法，把 y'' 化为对 y 的导数，即 $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，代入方程得 $yp\frac{dp}{dy}+p^2=0$，原方程化为以 p 为函数，以 y 为自变量的一阶方程，即 $y\frac{dp}{dy}+p=0$（或 $p=0$，但其不满足 $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$），是可分离变量的微分方程。分离变量得 $\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}$，积分得 $\ln|p|+\ln|y|=C'$，即 $p=\frac{C_1}{y}$。由 $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，得 $C_1=\frac{1}{2}$。于是 $y'=p=\frac{1}{2y}$，分离变量得 $2ydy=dx$，积分得 $y^2=x+C_2$，又 $y\big|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，故所求特解为 $y=\sqrt{x+1}$。

解法 2： 不难看出方程可写成 $(yy')'=0$ 积分得 $yy'=C_1$。以下与解法 1 相同。

【评注】综合例 16，例 17 可知，对不显含 y 型，不显含 x 型这两类可降阶的微分方程，首先应该能够识别，然后通过变量替换，化为一阶方程，求出通解后，再求一个一阶微分方程。但不同的是，所作的两个变量替换中，前者仍是以 x 为自变量，而后者以 y 为自变量，要注意区别，避免出错。

题型 7 线性微分方程解的性质与结构

在此只限于讨论一阶线性方程与二阶线性方程,其结论可以推广到更高阶的线性方程.一阶线性方程的一般形式为:

$$y'+P(x)y=f(x) \tag{7-1}$$

二阶线性方程的一般形式为

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{7-2}$$

其中 $P(x)$，$Q(x)$，$f(x)$ 均为连续函数。当右端项 $f(x)\equiv 0$ 时，分别称为一阶线性齐次方程与二阶线性齐次方程，否则称为非齐次方程。

1. 解的性质

(1) 若 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为齐次方程

$$y'+P(x)y=0 \tag{7-3}$$

或 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ (7-4)

的两个特解，则其线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍为(7-3) 或(7-4)的解

(2) 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为非齐次方程(7-2)（或(7-1)）的两个特解，则其差 $y_1(x)-y_2(x)$ 为相应齐次方程(7-4)（或(7-3)）的特解

(3) 设 $y^*(x)$ 为非齐次方程(7-2)（或(7-1)）的一个特解，$y(x)$ 为齐次方程的一个特解，则其和 $y^*(x)+y(x)$ 为非齐次方程(7-2)（或(7-1)）的解

(4) (叠加原理)设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是方程 $y'+P(x)y=f_1(x)$ 与 $y'+P(x)y=f_2(x)$ 或 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 与 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的两个特解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 也是方程 $y'+P(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 或 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解。(见题型 9 例 30)

2. 通解的结构

(1) 设 $y_0(x)$ 是齐次方程(7-3)的非零特解，则齐次方程(7-3)的通解是 $y=Cy_0(x)$，又 $y^*(x)$ 是非齐次方程(7-1)的一个特解，则 $y=Cy_0(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程(7-1)的通解，其中 C 是任意常数

(2) 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次方程(7-4)的两个线性无关的特解，则齐次方程(7-4)的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (见例 18，例 19)，又 $y^*(x)$ 是非齐次方程(7-2) 的一个特解，则非齐次方程(7-2)的通解为 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$，其中 C_1,C_2 是任意常数。(见例 20-21)

(3) 线性方程(7-1)或(7-2)的通解即所有解。

注：若在区间 I 上 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 成比例，即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 或 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ 为常数，则称函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 在区间 I 上线性相关，等价于存在不全为 0 的常数 k_1,k_2，使得当 $x\in I$ 时有恒等式 $k_1y_1+k_2y_2\equiv 0$ 成立，否则称为线性无关(见例 18-20)。更一般地，设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,,y_n(x)$ 为定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在不全为 0 的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得当 $x\in I$ 时有恒等式 $k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n\equiv 0$ 成立，则称这 n

个函数在区间 I 上线性相关，否则称为线性无关，

例 18 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 为二阶变系数齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个特解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (C_1, C_2 是任意常数)是该方程的通解的充要条件为__________.

(A) $y_1(x)y_2{}'(x)-y_1{}'(x)y_2(x)=0$　　　　(B) $y_1(x)y_2{}'(x)-y_1{}'(x)y_2(x)\neq 0$

(C) $y_1(x)y_2{}'(x)+y_1{}'(x)y_2(x)=0$　　　　(D) $y_1(x)y_2{}'(x)+y_1{}'(x)y_2(x)\neq 0$

解： $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程的通解 $\Leftrightarrow$ $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$ 常数 $\Leftrightarrow$ $[\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}]'\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_1{}'(x)y_2(x)-y_1(x)y_2{}'(x)}{y_2^2(x)}\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $y_1(x)y_2{}'(x)-y_1{}'(x)y_2(x)\neq 0$，故选 (B)。

例 19 已知 $y(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是方程 $xy''+2y'+xy=0$ 的一个解，求其通解。

【分析】此题已知齐次方程的一个解 $y(x)$，求其通解，关键是求出一个与已知解 $y(x)$ 线性无关的解 $y_1(x)$，函数 $y_1(x)$ 要满足齐次方程，且 $\dfrac{y_1(x)}{y(x)}=u(x)\neq$ 常数，最后可以转化为求一个关于 $u(x)$ 的微分方程。

解：设 $y_1(x)=u(x)y(x)=u(x)\dfrac{\sin x}{x}$ 是所给方程的解，$u(x)$是待定函数。易求得 $y_1{}'=u'y+uy, y_1{}''=u''y+2u'y'+uy''$，将 $y_1, y_1{}', y_1{}''$ 的表达式代入原方程得 $xyu''+2(xy'+y)u'+(xy''+2y'+xy)u=0$，由于 $y(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是原方程的解，故应有 $xy''+2y'+xy=0$，另外，经过计算可得 $xy'+y=\cos x$，故上式可变为 $u''\sin x+2u'\cos x=0$，这是不含 u 的可降阶的微分方程，求得其通解为 $u(x)=C\cot x+C_1$，可取 $u(x)=\cot x$，则 $y_1(x)=\dfrac{\cos x}{x}$，故所求通解为 $y=C_1\dfrac{\sin x}{x}+C_2\dfrac{\cos x}{x}$。

例 20 设函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 线性无关，而且都是非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是__________.(1989一研)

$(A)\ C_1y_1+C_2y_2+y_3$ $(B)\ C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

$(C)\ C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$ $(D)\ C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

【分析】由通解的结构定理知非齐次线性方程的通解应该是相应的齐次线性方程的通解加上一个非齐次线性方程的特解。需验证四个选项是否满足上述条件。

解： $C_1y_1+C_2y_2$ 不是相应齐次方程的通解。故 (A) 不对；(B) 可写成 $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$，$y_1-y_3$ 与 y_2-y_3 是相应齐次方程的解，因而 (B) 是相应齐次方程的通解而不是非齐次方程的通解；(C) 写成 $C_1(y_1+y_3)+C_2(y_2+y_3)-y_3$，$y_1+y_3$ 与 y_2+y_3 并非相应齐次方程的解，显然也不对。对选项 (D)，表达式可改写为 $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$，其中 y_3 是非齐次方程的一个特解，同时由解的性质知 y_1-y_3，y_2-y_3 是对应的齐次方程的两个解。下面考虑它们的线性相关性，不妨设 $k_1(y_1-y_3)+k_2(y_2-y_3)=0$，即 $k_1y_1+k_2y_2-(k_1+k_2)y_3=0$，由 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 线性无关知 $k_1=k_2=0$，故 y_1-y_3 与 y_2-y_3 是齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的解，由通解的结构定理知此选项就是非齐次方程的通解，故应选 (D)

例 21 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^x-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解，该方程的通解为________（2013-研）

解: 由线性微分方程解的性质知 $y_1-y_3=e^{3x}$，$y_2-y_3=e^x$ 是对应的齐次方程的两个解, 且 $\dfrac{y_1-y_3}{y_2-y_3}\neq$ 常数, 故线性无关, 从而原方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$.

【评注】此题与例 20 类似, 只不过是由选择题变形为填空题, 由于非齐次方程有多个特解, 故此题的答案不唯一.

题型 8 求解常系数齐次线性微分方程

1. 求解二阶常系数齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征根法步骤：

（1）写出特征方程 $r^2+pr+q=0$

（2）求出该方程的特征根 $r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

（3）依据表 12-1，根据特征根的不同情形，写出通解。(见例 22-24)

表 12-1

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1，r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
$r_1 \neq r_2$（实根）	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2$（实根）	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
$r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$（$\beta \neq 0$）	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2. 求解 n 阶常系数齐次线性方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$ 的特征根法步骤：

（1）写出特征方程 $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$

（2）求出特征根 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$

（3）依据表 12-2 写出通解中与特征根对应项，再写出通解。

表 12-2

特征方程的根	通解中的对应于 r 的项及项数
单实根 r	一项：Ce^{rx}
k 重实根 r	k 项：$(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots C_kx^{k-1})e^{rx}$
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$	两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$	$2k$ 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_1+D_2x+D_3x^2+\cdots D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

注：求解变系数微分方程十分困难，有时可通过适当的变量替换转化为求解常系数微分方程。(见例 25)

例 22　微分方程 $y''-3y'-4y=0$ 的通解为__________.

解：特征方程为 $r^2-3r-4=0$，解得特征根为 $r_1=-1,r_2=4$，通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$。

例 23 微分方程 $4y''+4y'+y=0$ 的通解为__________.

解：特征方程为 $4r^2+4r+1=0$，解得特征根为 $r_1=r_2=-\dfrac{1}{2}$，通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{2}x}$。

例 24　微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为__________.

解：特征方程为 $r^2+2r+3=0$，解得特征根为 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i$，通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$。

例 25 用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=2$ 的特解。(2005-研)

【分析】 这是二阶线性变系数方程。一般情形下求解是困难的。有些方程在给出了自变量替换后就可化为常系数的情形，并可求得通解。本题先将 y',y'' 转化为 $\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2}$，再用二阶常系数线性微分方程的方法求解即可。

解：$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$，$y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=[\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\frac{1}{\sin t})$

代入原方程得 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$，解此微分方程得 $y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$，将初始条件 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=2$ 代入有 $C_1=2,C_2=1$。 故满足条件的特解为 $y=2x+\sqrt{1-x^2}.$

【评注】 本题的关键是将 y',y'' 转化为 $\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2}$，而这主要是考查复合函数求一、二阶导数.

题型 9. 求解常系数非齐次线性微分方程

求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解步骤：

（1）用特征根法求出对应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 Y；

（2）用待定系数法求出方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解 y^*.具体程序为

①根据方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 右端的自由项 $f(x)$ 的形式设出待定特解 y^*,见表 12-3

②求出 $y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$,将 y^*, $y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$ 的表达式代入方程 $y''+py'+qy=f(x)$,得到一个恒等式

③比较等式两端,可得到一个确定待定常数的方程或方程组,由此解出待定常数

④写出方程的特解 y^*

（3）写出方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解为 $y=Y+y^*$。

表 12-3

$f(x)$ 的形式	确定待定特解的条件及特解 y^* 的形式	说明
$P_m(x)e^{\lambda x}$ （$P_m(x)$ 为 m 次多项式）	λ 不是特征根， $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$ （见例 26)	$Q_m(x)=\sum_{i=0}^{m}b_i x^i$ 是 m 次多项式， b_i 为待定系数
	λ 是单特征根， $y^*=xe^{\lambda x}Q_m(x)$ （见例 27)	
	λ 是二重特征根，$y^*=x^2e^{\lambda x}Q_m(x)$ （见例 28)	
$e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+$ $P_n(x)\sin\omega x]$ （$P_l(x)$ 是 l 次多项式 $P_n(x)$ 是 n 次多项式）	$\lambda+i\omega$ 不是特征根， (见例 29) $y^*=e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin$	$m=\max\{l,n\}$ $R_m^{(1)}(x)$和$R_m^{(2)}(x)$ 均为 m 次多项式
	$\lambda+i\omega$ 是特征根， (见例 28) $y^*=xe^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin$	

注：若 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}+e^{kx}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，此非齐次项可拆成上述两种情形之和，利用上面结论及线性微分方程解的叠加原理求解(见例 30)

例 26 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为________。(2007一研)

解：特征方程 $r^2-4r+3=0$ 的两个根 $r_1=1,r_2=3$，由非齐次项 $2e^{2x}=P_m(x)e^{\lambda x}$ 知 $m=0,\lambda=2$ 且不是特征根，故非齐次方程有特解形式为 $y*=Ae^{2x}$，代入方程得 $A=-2$，故所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

例 27 微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为_________。（1999一研)

解：特征方程为 $r^2-4=0$，解得特征根为 $r_1=2,r_2=-2$，由非齐次项 $e^{2x}=P_m(x)e^{\lambda x}$ 知 $m=0,\lambda=2=r_1$ 为单特征根，故非齐次方程有特解形式为 $y*=x\cdot ae^{2x}$，代入方程得 $a=\dfrac{1}{4}$，故所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{x}{4}e^{2x}$。

例 28 求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解。(2010一研)

解：相应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1,r_2=2$，相应齐次方程的通解为

$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$；由非齐次项$2xe^x=P_m(x)e^{\lambda x}$知$m=1$，$\lambda=1=r_1$是单特征根，故设原方程有特解形式为$y*=x(ax+b)e^x$，代入原方程解得$a=-1,b=-2$，故原方程的通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$，其中$C_1,C_2$为两个任意常数。

例 29 求微分方程$y''-2y'+\alpha y=e^x\sin 2x$的通解,其中$\alpha$为参数.

解：需要对α的不同取值进行讨论。特征方程$r^2-2r+\alpha=0$，特征根$r_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\alpha}$，方程右端项$e^x\sin 2x=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，其中$\lambda=1,\omega=2,l=0,n=0,\ \lambda+i\omega$=$1+2i$，原方程的特解形式取决于$\lambda+i\omega$=$1+2i$是否是特征根，即要讨论$\alpha=5$还是$\alpha\neq 5$。

(1) 当$\alpha=5$时，特征根$r_{1,2}=1\pm 2i$，$\lambda+i\omega$=$1+2i$是单特征根，故可设特解$y^*=xe^x[a\cos 2x+b\sin 2x]$，其中$a,b$为待定系数，则

$$(y^*)'=(x+1)e^x[a\cos 2x+b\sin 2x]+xe^x(-2a\sin 2x+2b\cos 2x)$$

$$(y^*)''=(x+2)e^x[a\cos 2x+b\sin 2x]+(2x+2)e^x(-2a\sin 2x+2b\cos 2x)$$
$$+xe^x(-4a\cos 2x-4b\sin 2x)$$

将$y^*,y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$代入原方程，得$-4ae^x\sin 2x+4be^x\cos 2x=e^x\sin 2x$，比较等式两端的系数，得$-4a=1,4b=0$，求得$a=-\dfrac{1}{4},b=0$，所求特解为$y^*=-\dfrac{1}{4}xe^x\cos 2x$，又对应的齐次方程的通解为$Y=e^x(C_1\cos 2x++C_2\sin 2x)$，故原方程通解为$y=e^x(C_1\cos 2x++C_2\sin 2x)-\dfrac{1}{4}xe^x\cos 2x$

(2)当$\alpha\neq 5$时，$\lambda+i\omega$=$1+2i$不是特征根，故可设特解$y^*=e^x[a\cos 2x+b\sin 2x]$，其中$a,b$为待定系数，可以求得$a=0,b=\dfrac{1}{\alpha-5}$，此时特解为$y^*=\dfrac{1}{\alpha-5}e^x\sin 2x$，又对应的齐次方程的通解取决于特征根，此时需对$\alpha$进一步讨论。

当$\alpha=1$时，特征方程有两个相等特征根$r_1=r_2=1$，对应齐次方程通解为$Y=e^x(C_1++C_2x)$，故原方程通解为$y=e^x(C_1+C_2x)+\dfrac{1}{\alpha-5}e^x\sin 2x$；

当$\alpha<1$时，特征方程有两个不相等的实特征根$r_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\alpha}$，对应齐次方程通解为

$Y=C_1e^{1+\sqrt{1-\alpha}x}+C_2e^{1-\sqrt{1-\alpha}x}$，故原方程的通解为

$$y=C_1e^{1+\sqrt{1-\alpha}x}+C_2e^{1-\sqrt{1-\alpha}x}+\frac{1}{\alpha-5}e^x\sin 2x;$$

当$\alpha>1$且$\alpha\neq 5$时，特征方程有一对共轭复根$r_{1,2}=1\pm\sqrt{\alpha-1}i$，对应齐次方程通解为

$Y=e^x(C_1\cos\sqrt{\alpha-1}x+C_2\sin\sqrt{\alpha-1}x)$，故原方程通解为

$$y=e^x(C_1\cos\sqrt{\alpha-1}x+C_2\sin\sqrt{\alpha-1}x)+\frac{1}{\alpha-5}e^x\sin 2x。$$

例 30 微分方程$y''+y=x^2+1+\sin x$的特解形式可设为__________。（2004—研)

(A) $y*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

(B) $y*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

(C) $y*=ax^2+bx+c+A\sin x$

(D) $y*=ax^2+bx+c+A\cos x$

【分析】本题考查解的叠加原理。

解：相应的二阶线性齐次方程的特征方程是$r^2+1=0$，特征根为$r_{1,2}=\pm i$。由线性方程解的叠加原理，考察方程 $y''+y=x^2+1$ (1) $y''+y=\sin x$ (2)。方程(1)有特解$y*=ax^2+bx+c$，方程(2)的非齐次项$f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x=\sin x$ ($\alpha=0,\beta=1,\alpha\pm i\beta$，是特征根)，它有特解$y*=x(A\sin x+B\cos x)$，因此原方程有特解$y*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$,应选$(A)$。

例 31 设$f(x)$具有二阶连续导数$f(0)=0,f'(0)=1$，且$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$为一全微分方程,求$f(x)$及全微分方程的通解。（1994—研)

【分析】本题需要根据已知条件建立$f(x)$所满足的微分方程，然后根据初始条件解出$f(x)$，进而确定出此全微分方程，然后求解。

解：由全微分方程的条件有$\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y)-f(x)y]dx=\frac{\partial}{\partial x}[f'(x)+x^2y]dy$，即$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$，亦即$f''(x)+f(x)=x^2$，因而$f(x)$是初值问题

$\begin{cases} y''+y=x^2 \\ y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1 \end{cases}$ 的解，求解此初值问题得 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$，故原方程

化为 $[xy^2+2y-(2\cos x+\sin x)y]dx+(x^2y+2x-2\sin x+\cos x)dy=0$，先用凑微分法求左端微分式的原函数

$(\frac{1}{2}y^2dx^2+\frac{1}{2}x^2dy^2)+2(ydx+xdy)-yd(2\sin x-\cos x)-(2\sin x-\cos x)dy=0$

即 $d[\frac{1}{2}x^2y^2+2xy+y(\cos x-2\sin x)]=0$

其通解为 $\frac{1}{2}x^2y^2+2xy+y(\cos x-2\sin x)=C$。

题型 10.求解微分方程的反问题

微分方程的反问题，即，已知微分方程的解或解的性质，求出该解所满足的微分方程或确定微分方程中的未知参数。解题思路：

1.用消去任意常数法求微分方程

若已知微分方程的通解，通过求一阶导数(通解中含一个任意常数)，求一阶和二阶导数(通解中含两个任意常数)，消去任意常数便可得到微分方程(见例 32 解法 1，例 35 解法 2)

2.求常系数线性微分方程的方法

以二阶方程为例，其解题程序为

(1)由齐次方程的通解形式推知特征根，进而写出特征方程，利用表 12-1 求出齐次微分方程；(见例 32 解法 2，例 33，例 35)

(2)若求非齐次方程，则还需将非齐次方程的特解代入确定非齐次项。(见例 35 解法 1)

例 32 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为__________。(2001一研，2009-北京赛)

【分析】本题考查线性齐次常系数微分方程解的结构，及其线性无关的解与其特征值的关系，是一道简单的综合题。

解法 1： 不管所求微分方程是什么类型（只要是二阶），由通解 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$

求得 $y'=e^x[(C_1-C_2)\sin x+(C_1+C_2)\cos x)]$， $y''=e^x(-2C_2\sin x+2C_1\cos x)$，从这

三个式子消去 C_1,C_2，得 $y''-2y'+2y=0$。

解法 2： 由通解的形式，可知特征方程的两个根是 $r_{1,2}=1\pm i$，从而知特征方程为

$(r-r_1)(r-r_2)=r^2-2r+2=0$，故所求微分方程为 $y''-2y'+2y=0$。

例 33 在下列微分方程中以 $y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是__________。(2008一研)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$ (B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

$(C)\ y'''-y''-4y'+4y=0$　　$(D)\ y'''-y''+4y'-4y=0$

【分析】本题与例 24 类似，不同之处在于所求的方程是三阶微分方程。

解：从通解的结构知，三阶线性常系数齐次方程相应的三个特征根是： 1，$\pm 2i$，对应的特征方程是 $(r-1)(r+2i)(r-2i)=r^3-r^2+4r-4=0$，因此所求微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$。应选 (D)。

例 34 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为__________。(2009一研)

【分析】本题需先由通解，求出微分方程，再求微分方程满足初始条件的特解。

解：由通解表达式知二阶常系数线性齐次微分方程的特征根 $r_1=r_2=1$，于是特征方程为 $(r-1)(r-1)=r^2-2r+1=0$，故该齐次方程为 $y''-2y'+y=0$，从而非齐次方程为 $y''-2y'+y=x$。易知该非齐次方程有特解 $y*=ax+b$，代入非齐次方程得 $-2a+ax+b=x$，故 $a=1,b=2$。由此，该非齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，由初始条件求得 $C_1=0,C_2=-1$，因此所求的解为 $y=-xe^x+x+2$。

例 35 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程。(1997一研,2009一全国竞赛初赛题)

解法 1：由线性微分方程解的结构定理知 $y_1-y_3=e^{-x}$，$y_3-y_2=e^{2x}-2e^{-x}$ 是相应齐次方程的解，且 $2(y_1-y_3)+y_3-y_2=e^{2x}$，故 e^{2x}，e^{-x} 是相应齐次方程的两个线性无关的解，xe^x 是非齐次方程的一个特解，故微分方程的特征根为-1 和 2，所以特征方程为 $(r+1)(r-2)=0$，$r^2-r-2=0$，故此方程为 $y''-y'-2y=f(x)$，将 xe^x 代入上式得 $f(x)=e^x-2xe^x$，因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$

解法 2：同解法一 e^{2x}，e^{-x} 是相应齐次方程的两个线性无关的解，xe^x 是非齐次方程的一个特解，故 $y=xe^x+C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 是所求的齐次方程的通解，从而有，$y'=e^x+xe^x+2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}, y''=2e^x+xe^x+4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$，消去 $C_1\ C_2$,得所求方程

为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$。

题型 11.求解欧拉方程

形如 $x^n \dfrac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1} \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} x \dfrac{dy}{dx} + p_n y = f(x)$ 的微分方程称为欧拉方程，求其通解思路：作变量替换 $x = e^t$，记算子 $D = \dfrac{d}{dt}$，则 $x^k \dfrac{d^k y}{dx^k} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y$，代入方程，就可以将原方程化为以 t 为自变量的常系数线性方程，然后求常系数线性微分方程的通解，最后以 $t = \ln x$ 代回，得欧拉方程的通解。(见例 36)

例 36　欧拉方程 $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 4x \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为__________。（2004一研)

【分析】欧拉方程是一类特殊方程其求解方法要掌握。

解：作自变量替换 $x = e^t (t = \ln x)$,由于 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2} (\dfrac{d^2 y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt})$，则欧拉方程变为 $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$,化为二阶常系数线性微分方程。相应的特征方程 $r^2 + 3r + 2 = 0$,特征根 $r_1 = -1, r_2 = -2$,通解为 $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$，故所求原方程的通解为 $y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$，其中 C_1, C_2 为两个任意常数。

题型 12. 通过解微分方程求幂级数的和函数

解微分方程求幂级数的和函数的解题思路：

(1)设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $y(x)$，即 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,收敛区间为 I；

(2)对上式两端求一阶导数或二阶导数,可以得到以 $y(x)$ 为未知函数的一阶或二阶微分方程,同时确定微分方程满足的初值条件;

(3)解微分方程的通解；

(4)利用微分方程的初值条件：$y(0)=y_0$ 或 $y(0)=y_0, y'(0)=y_1$ 确定通解中的任意常数，得到幂级数的和函数

例 37.设级数　$\dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots (-\infty < x < \infty)$

的和函数为$S(x)$，求(1) $S(x)$所满足的一阶微分方程；　　(2) $S(x)$的表达式。(2004-研)

解：$S(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$，易知$S(0)=0$，

$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=x[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots]=x[\frac{x^2}{2}+S(x)]$，从而$S(x)$是

初值问题$y'=xy+\frac{x^3}{2}$，$y(0)=0$的解，方程$y'=xy+\frac{x^3}{2}$是一阶线性微分方程，求其通

解为$S(x)=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}}$，由初始条件$y(0)=0$求得$C=1$，因此和函数

$S(x)=-\frac{x^2}{2}-1+e^{\frac{x^2}{2}}$

例 38.（1）验证函数$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}\cdots(-\infty<x<\infty)$满足微分方程

$y''+y'+y=e^x$；（2）利用（1）的结果求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数。(2002-研)

解：（1）首先验证该幂级数的收敛区间是$(-\infty<x<\infty)$。这是缺项幂级数，令$t=x^3$，则

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(3n)!}$。由　$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(3(n+1))!}}{\frac{1}{(3n)!}}=0$，知$t\in(-\infty,\infty)$，从而$x\in(-\infty,\infty)$时原级数收敛。

其次，在收敛区间内对幂级数可以逐项求导任意次，在此逐项求导两次

$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$，$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$，$x\in(-\infty,\infty)$。于是

$$y''+y'+y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!}]$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\ (-\infty<x<\infty)。$$

（2）因为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数$y(x)$满足微分方程$y''+y'+y=e^x$，又知

$y(0)=1, y'(0)=0$，故为求 $y(x)$ 只需求解二阶线性常系数微分方程的初值问题：

$\begin{cases} y''+y'+y=e^x \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$，该方程对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，相应的齐次方程的通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.设非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^x$，代入方程得 $y^*{}''+y^*{}'+y^*=3Ae^x=e^x$，有 $A=\frac{1}{3}$，从而非齐次方程的通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{3}e^x$，令 $x=0$，由初始条件得 $y(0)=C_1+\frac{1}{3}=1$，$y'(0)=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}=0$，求得 $C_1=\frac{2}{3}, C_2=0$，因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x, (-\infty<x<\infty)$。

【评注】该题实质是给出了一个幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 求和的一种方法：逐项求导后不能直接求得和函数的导数，但是逐项求导后导出和函数 $S(x)$ 所满足的微分方程，并易确定初值，然后通过求解微分方程的初值问题就可求得和函数。

题型 13. 微分方程的应用

微分方程应用题的解题思路

1. 依据问题的意义，建立微分方程
2. 求解微分方程。按微分方程的类型求解，必要时，可对所得到的解答作出几何解释或经济解释。

   下面按建立微分方程的不同方法分别讨论。

1.按导数的几何应用列方程

例 39 设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ 求 $f(x)$ 的一般表达式。(1996-研)

解：曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$，令 $X=0$ 得 y 轴上的截距 $Y=f(x)-xf'(x)$。由题意 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(x)-xf'(x)$。变形得

$\int_0^x f(t)dt = xf(x) - x^2 f'(x)$ 两边求导得 $xf''(x) + f'(x) = 0$ 。在 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(x) - xf'(x)$ 中，令 $x = 0$ 得 $0 = 0$ 自然成立,故不必再附加条件。即 $f(x)$ 是微分方程 $xf''(x) + f'(x) = 0$ 的通解。此方程是可降阶的微分方程，易求得

$f(x) = C_1 \ln x + C_2$

例 40 设 $y = y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$，求该曲线方程，并求函数 $y = y(x)$ 的极值。(1998-研)

解：由题设及曲率公式，有 $\frac{-y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，因曲线 $y = y(x)$ 向上凸，$y''< 0$，化简上式得 $\frac{y''}{1+y'^2} = -1$。由题设 $y(0) = 1$，$y'(0) = 1$，求解曲线方程即求解初值问题

$\begin{cases} \frac{y''}{1+y'^2} = -1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$，此方程是不显含 y 可降阶的方程，易求得

$y = \ln\left|\cos(\frac{\pi}{4} - x)\right| + 1 + \frac{1}{2}\ln 2$ 。当 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$，即当 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ 时

$\cos(\frac{\pi}{4} - x) > 0$；当 $x \to -\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 时 $\cos(\frac{\pi}{4} - x) \to 0, \ln\left|\cos(\frac{\pi}{4} - x)\right| \to$ -∞。故所求连续曲线方程为 $y = \ln\left|\cos(\frac{\pi}{4} - x)\right| + 1 + \frac{1}{2}\ln 2$（$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$）。显然当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时，y 有极大值 $1 + \frac{1}{2}\ln 2$，显然，y 在 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ 没有极小值。

2.按定积分几何应用列方程

例 41 设函数 $y(x)(x \ge 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$，过曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1。区间 $[0, x]$ 上，以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积记为 S_2，并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1。求此曲线 $y = y(x)$ 的方程。(1999-研)

【分析】此问题的反问题即根据已知曲线方程 $y=y(x)$,求 S_1 和 S_2 是一个简单的问题。但根据方程 $2S_1-S_2\equiv 1$ 求 $y=y(x)$ 就是一道考察综合能力的试题，要能正确写出点 $P(x,y)$ 的切线方程及 S_1 和 S_2 的表达式；将问题转化为求解微分方程。其中要能够确定初始条件。

解：曲线上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，它在 x 轴上的截距为 $x-\dfrac{y}{y'}$，从而 $2S_1=y\cdot\left|x-(x-\dfrac{y}{y'})\right|=\dfrac{y^2}{y'}$，而 $S_2=\int_0^x y(t)dt$，由 $2S_1-S_2\equiv 1$，则有 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)dt=1$ 恒等式两边求导，消去积分得二阶微分方程 $y'^2-yy''=0$，而以 $x=0,y=1$ 代入 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)dt=1$，又可得 $y'(0)=1$，于是建立了初值问题：$\begin{cases}y'^2-yy''=0\\ y(0)=1,y'(0)=1\end{cases}$

下面求通解：

解法 1　$y'^2-yy''=0$ 是不显含 x 的可降阶方程。设 $y'=P(y)$，则 $y''=P\dfrac{dP}{dy}$ 方程化为 $P(P-y\dfrac{dP}{dy})=0$，即 $P-y\dfrac{dP}{dy}=0$ 或 $y=0$，解得 $P=C_1y(P=0$ 对应 $C_1=0)$。将 $\dfrac{dy}{y}=C_1dx$，再积分解得 $y=C_2e^{C_1x}$。

解法 2 两边乘以 $\dfrac{1}{y'^2}$ 便得 $(\dfrac{y}{y'})'=0$，$\dfrac{y}{y'}=\dfrac{1}{C_1}$，$y'=C_1y$，由此又得 $y=C_2e^{C_1x}$，再由初始条件确定出 $C_1=1,C_2=1$，所求函数为 $y(x)=e^x$。

【评注】本题综合考查了曲线的切线、曲边梯形的面积、变上限函数求导数、二阶可降阶微分方程的解法等知识点。

例 42 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$ $M(r,\theta)$ 为 L 上任一点 $M_0(2,0)$ 为 L 上一定点。若极径 OM_0,OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0,M 两点间弧长值的一半求曲线 L 的方程。(1997-研)

解：由已知条件得 $\dfrac{1}{2}\int_0^\theta r^2d\theta=\dfrac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$，两边对 θ 求导，得 $r^2=\sqrt{r^2+r'^2}$ (隐式微分方程)，解出 r'，得 $r'=\pm r\sqrt{r^2-1}$，分离变量得 $\dfrac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm d\theta$。由于

$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = -\int \frac{d(\frac{1}{r})}{\sqrt{1-(\frac{1}{r})^2}} = \arccos\frac{1}{r}$，对 $\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = \pm d\theta$ 两边积分，得 $\arccos\frac{1}{r} = \pm\theta + C$。代入初始条件 $r(0)=2$，得 $C = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$，$\arccos\frac{1}{r} = \pm\theta + \frac{\pi}{3}$，即 L 的极坐标方程为 $\frac{1}{r} = \cos(\pm\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\cos\theta \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$，从而 L 的直角坐标方程为 $x \mp \sqrt{3}y = 2$。

3. 由变换率满足的规律列方程

例 43 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的。设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k>0$,求 $x(t)$。(1997-研)

解：已掌握新技术人数 $x(t)$ 的变化率为 $\frac{dx}{dt}$，由题意可建立初值问题 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx(N-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

把方程分离变量得 $\frac{dx}{x(N-x)} = kdt$，$\frac{1}{N}(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x})dx = kdt$，积分可得 $\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C_1$，$x = \frac{CNe^{kNt}}{1+ce^{kNt}}$，由初始条件确定 $C = \frac{x_0}{N-x_0}$，故所求函数为 $x(t) = \frac{Nx_0e^{kNt}}{N-x_0+x_0e^{kNt}}$。

4.按牛顿第二定律列方程

例 44 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下。现有一质量为 9000 kg 的飞机着陆时的水平速度为 700 km/h。经测试，减速伞打开后飞机所受阻力与飞机的速度成正比(比例系数 $k = 6.0\times10^6$)。问从着陆点算起，飞机滑行的最大距离是多少？注：kg 表示千克表示 km/h 千米/小时。(2004-研)

解：从飞机接触跑道开始时（$t=0$），设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $x'(t) = v(t)$，按题设，飞机的质量 $m = 9000\,kg$ 着陆时的水平速度 $v(0) = x'(0) = v_0 = 700km/h$，$t$ 时刻

所受的阻力为$-kv(t)$,于是按牛顿第二定律得$m\frac{dv}{dt}=-kv$，初始条件$v(0)=v_0$。

方法 1：求出初值问题的解$v=v(t)$，然后再求$\int_0^{+\infty}v(t)dt$。容易求得一阶线性齐次方程的初值问题$\begin{cases}\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v\\ v(0)=v_0\end{cases}$的解为$v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05km$$

方法 2：求出$x=x(v)$，再求$x\big|_{v=0}$。由于$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{v}{\frac{dx}{dv}}$，于是微分方程可改写成

$m\frac{v}{\frac{dx}{dv}}=-kv$ 即 $\frac{dx}{dv}=-\frac{m}{k}$。相应的初值$x\big|_{v=v_0}=0$。易求得初值问题的解为

$x=-\frac{m}{k}(v-v_0)$。令$v=0$得飞机滑行的最长距离为$x=\frac{mv_0}{k}=1.05km$

方法 3. 先求$x=x(t)$，然后再求$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$。注意到$v=\frac{dx}{dt},\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$，原方程改写成

$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}=0$。其特征方程为$\lambda^2+\frac{k}{m}\lambda=0$，特征根$\lambda_1=0,\lambda_2=-\frac{k}{m}$。于是通解为

$x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$，由初始条件$x\big|_{t=0}=0,x'(t)\big|_{t=0}=v_0$得$C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$。于是

$x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\frac{mv_0}{k}=1.05km$，即飞机滑行的最长距离。

5. 用微元法列方程

例 45 某湖泊的水量为V,每年排入湖泊内含污染物A的污水量为$V/6$,流入湖泊内不含A的水量为$V/6$，流出湖泊的水量为$V/3$。已知 1999 年底湖中A的含量为$5m_0$，超过国家规定指标。为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含A污水的浓度不超过m_0/V。问至多需经过需经过多少年，湖泊中污染物A的含量降至m_0以内？（注：设湖水中A的浓度是均匀的）(2000-研，2009-北京赛)

解：设 2000 年初为$t=0$，第t年湖泊中污染物A的总量为m浓度为m/V。在时间段$[t,t+\Delta t]$内流进湖中A的量近似为$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\cdot\Delta t=\frac{m_0}{6}\Delta t$，流出湖的水中$A$的量近似为

$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}\cdot\Delta t=\frac{m}{3}\Delta t$，因而在此时间内湖中污染物 A 的增量 Δm 近似值为 $dm=(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})dt \quad (dt=\Delta t)$，这是一阶线性方程，标准形式为 $\frac{dm}{dt}+\frac{m}{3}=\frac{m_0}{6}$，通解为 $m=\frac{m_0}{2}-Ce^{-\frac{t}{3}}$，代入初始条件 $m\big|_{t=0}=5m_0$，得 $C=-\frac{9}{2}m_0$，于是 $m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$。令 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$，即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖中污染物 A 的含量就会降至 m_0 以内。

【评注】微分方程在物理、几何等科学领域有着广泛的应用。用微分方程理论解决实际问题的难点是建立微分方程，无通用法则，只能根据问题所给的信息，利用与问题有关并且必须遵循的定理，原理或者通过微元法导出微分方程。若求特解，还要根据某一特定时刻或特定位置的信息，写出定解条件。建立微分方程时要选择合适的坐标系。它不仅关系到所得微分方程的简与繁，甚至还关系到数学上能否处理。注意微分方程中与单位有关的各项应采用同样的物理单位。

12.3 历年考研和竞赛真题

一．填空题

1.微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为.__________。

2.微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解为__________。（1991－研)

3.微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为__________。（1992－研)

4.已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,\frac{1}{2})$,且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$,则 $f(x)=$__________。（1993－研)

5. 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为__________。（1994－研)

6.微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 通解是__________。

7.微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为__________。（1995－研)

8.微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为__________。（1996－研)

9.微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为__________。（1996－研)

10.过点 $(\frac{1}{2},0)$ 满足关系式 $y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=0$ 的曲线方程为__________。（2001－研)

11.微分方程$(y+x^3)dx$-$2xdy=0$满足$y\big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$的特解为__________。(2004一研)

12.设$y_1(x)$， $y_2(x)$， $y_3(x)$微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个不同的解，

且$\dfrac{y_1(x)-y_2(x)}{y_2(x)-y_3(x)}$不恒等于常数，则微分方程的通解为________.(2011—北京赛)

13. 微分方程$y'+y=e^{-x}\cos x$满足条件$y(0)=0$的解为________.(2011—研)

14. 若函数$f(x)$满足方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f'(x)+f(x)=2e^x$，则

$f(x)=$______.(2012-研)

二．选择题

1.已知函数$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\dfrac{y}{1+x^2}\Delta x+\alpha$，且当$\Delta x\to 0$时，$\alpha$是$\Delta x$的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则$y(1)$等于__________。(1998一研)

(A) 2π　(B) π　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

2．设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解,若$f(x_0)>0$,且$f'(x_0)=0$,则函数

$f(x)$在点x_0__________。(1988一研)

(A) 取得极大值　(B) 取得极小值　(C) 某个邻域内单调增加　(D) 某个邻域内单调减少

3.微分方程$y''-y=e^x+1$的一个特解应具有形式（式中a,b为常数）__________。(1989一研)

(A) ae^x+b　(B) axe^x+b　(C) ae^x+bx　(D) axe^x+bx

4.若连续函数$f(x)$满足关系式$f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，则$f(x)$等于__________。(1991一研)

(A) $e^x\ln 2$ (B) $e^{2x}\ln 2$ (C) $e^x+\ln 2$ (D) $e^{2x}+\ln 2$

5.设曲线积分$\int_L[f(x)-e^x]\sin y\,dx-f(x)\cos y\,dy$与路径无关其中$f(x)$具有一阶连续导数

且$f(0)=0$则$f(x)$等于__________。(1993一研)

(A) $\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$ (B) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ (C) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1$ (D) $1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

6.设$y=f(x)$是方程$y''-y'-e^{\sin x}=0$的解,且$f'(x_0)=0$,则$f(x)$在__________。(1994一研)

(A) x_0 的某邻域内单调增加　　　　　　(B) x_0 的某邻域内单调减少

(C) x_0 处取得极小值　　　　　　　　　(D) x_0 处取得极大值

7.设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0=0)$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限__________。（2002一研)

(A)不存在　　(B) 等于 1　　(C)等于 2　　(D)等于 3

8. 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的解，则 $\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的表达式为__________。（2003一研)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$

9.函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是__________。(2006一研，2007-北京赛)

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$　(B) $y''-y'-2y=3e^x$

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$　(D) $y''+y'-2y=3e^x$

10.具有特解 $y_1=e^{-x}$　$y_2=2xe^{-x}$　$y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是__________。(2000一研)

(A) $y'''-y''-y'+y=0$　　　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

三．解答题

1.求初值问题 $\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0 & (x>0)\\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解。(1999一研)

2. $y'=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

3. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=1$，满足等式 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$，

(1) 求导数 $f'(x)$；(2) 证明：当 $x\ge 0$ 时，成立不等式 $e^{-x}\le f(x)\le 1$。(2000一研)

4.利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$ 化简，并求出原方程的通解.

(1998－研)

5.求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解。(1991－研)

6. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$，试确定常数 α,β,γ ，并求该方程的通解。(1993－研，2007－北京赛)

7.求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$ (1994－研)

8. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

（1）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

（2）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解. (2003－研)

9.设 $y=y(x)$ 是第一象限内连接点 A(0,1),B(1,0)的一段连续曲线，M(x,y)为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影 O 为坐标原点. 若梯形 OCMA 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，求 f(x)的表达式. (2003－研)

10.有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面（如图），容器的底面圆的半径为 2 m。根据设计要求，当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大（假设注入液体前容器内无液体）。(2003－研)

(1) 根据 t 时刻液面的面积写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式；

（2）求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程。(注：m 表示长度单位米 min 表示时间单位分.)

11.在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M\left(1,0\right)$，其上任意点 $P\left(x,y\right)\left(x\neq 0\right)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 a>0）. （2006－研）

(Ⅰ) 求 L 的方程；

(Ⅱ) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

12.设非负函数 $y=y(x)(x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$ ，当曲线 $y=y(x)$ 过原

点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积。

13. 设 $y=y(x)$ 是区间 $(\pi,-\pi)$ 内过点 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$。求 $y(x)$ 的表达式。

14. 曲线 $y=f(x)$ 满足 $f(0)=1$ 对于任意的 t 曲线是严格递增在 x 轴上 $t>0$ 该曲线与直线 $x=0,x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$. 如果 $f(x)$ 二阶可导，且 $\frac{S(t)}{V(t)}=2$ 求曲线 $y=f(x)$.

15. 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系。设仪器在重力作用下，从还平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用。设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$。试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=f(v)$。(1998－研)

12.4 历年考研和竞赛真题答案

一．填空题

1. $y=\frac{x}{\sqrt{\ln x+1}}$；　　2. $y=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x}e^{x}$；　　3. $y=(x+c)\cos x$

4. $f(x)=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$　5. $(x-4)y^4=Cx$　6. $y=-xe^{-x}+Cx$

7. $y=-2x+c_1\cos x+c_2\sin x$；　　8. $y=e^{x}(c_1\cos x+c_2\sin x+1)$

9. $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$；　　10. $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$

11. $y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$；

12 $C_1[y_1(x)-y_2(x)]+C_2[y_2(x)-y_3(x)]+y_1(x)$

或 $C_1[y_1(x)-y_2(x)]+C_2[y_2(x)-y_3(x)]+y_2(x)$

或 $C_1[y_1(x)-y_2(x)]+C_2[y_2(x)-y_3(x)]+y_3(x)$

13. $e^{-x}\sin x$；14. e^x

二．选择题

1. (D) 2. (A) 3. (B) 4. (B) 5. (B) 6. (C) 7. (C) 8. (A) 9. (D)

10. (B) 解：由已知的三个特解，可知特征方程的三个根为 $r_1=r_2=-1, r_3=1$，从而特征方程为 $(r+1)^2(r-1)=0$，即 $r^3+r^2-r-1=0$，由此微分方程为 $y'''+y''-y'-y=0$，应选 (B)。

三．解答题

1.解：所给方程是齐次方程（因 dx, dy 的系数 $(y+\sqrt{x^2+y^2})$ 与 $-x$ 都是一次齐次函数）。令 $u=\dfrac{y}{x}$ 则 $y=ux$ $dy=xdu+udx$ 代入原方程得 $x(u+\sqrt{1+u^2})dx-x(xdu+udx)=0$，化简得 $\sqrt{1+u^2}dx-xdu=0$，分离变量得 $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=0$，积分得 $\ln x-\ln(u+\sqrt{1+u^2})=C_1$，即 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$,再代入初始条件 $y\big|_{x=1}=0$ 得 $C=1$，故所求初值问题的解为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$。

2.解：方程变形为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$ 设 $u=\dfrac{y}{x}$，$y=ux$，$y'=u+x\dfrac{du}{dx}$,代入方程分离变量得

$-\dfrac{(1+u^2)du}{u^3}=\dfrac{dx}{x}$,两端积分得 $\dfrac{1}{2}u^{-2}-\ln|u|=\ln|x|+C_1$,将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入整理得微分方程的通解为 $x^2=y^2(\ln y^2+C)$.

3.(1)解：在原方程中令 $x=0$ 得 $f'(0)+f(0)=0$ 由 $f(0)=1$ 知 $f'(0)=-1$。对等式变形后两边求导得 $(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$,令 $u=f'(x)$ 则上式变为 $u'+\dfrac{x+2}{x+1}u=0$,解此一阶线性方程得 $f'(x)=u=C\dfrac{e^{-x}}{x+1}$,由 $f'(0)=-1$ 得 $C=-1$。于是 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

(2) 方法一：用单调性.由 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}<0\ (x\ge 0)$ 知 $f(x)$ 单调递减 $f(x)\le f(0)=1$；

设 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$，则 $\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{xe^{-x}}{x+1}\ge 0\ (x\ge 0)$，$\varphi(x)$ 单调增，因而 $\varphi(x)\ge\varphi(0)=0\ (x\ge 0)$，即 $f(x)\ge e^{-x}\ (x\ge 0)$。综上所述当 $x\ge 0$ 时 $e^{-x}\le f(x)\le 1$。

方法二：用积分比较定理。易知 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt$，故 $f(x)=1-\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt$，由于 $0\le\dfrac{e^{-t}}{t+1}\le e^{-t}\ (t\ge 0)$ 有 $0\le\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt\le\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}\ (x\ge 0)$，从而当 $x\ge 0$ 时 $e^{-x}\le f(x)\le 1$。

4.解：$y=\dfrac{u}{\cos x}=u\sec x$，求出 y',y''，代入方程得 $u''+4u=e^x$。解此二阶线性非齐次方程得 $u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{5}e^x$，故通解为 $y=C_1\dfrac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\dfrac{e^x}{5\cos x}$.

5.解：原方程对应的齐次方程的通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x$

设非齐次方程 $y''+y=x$ 的特解为 $y_1=Ax+B$，代入方程得 $A=1,B=0$，所以 $y_1=x$；设非齐次方程 $y''+y=\cos x$ 的特解为 $y_2=Ex\cos x+Dx\sin x$，代入方程得 $E=0,D=\dfrac{1}{2}$ 所以 $y_2=\dfrac{1}{2}x\sin x$。故原方程的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x+\dfrac{1}{2}x\sin x$

6.解法一：由题设知原方程的特征根为 1 和 2，所以特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$，即 $r^2-3r+2=0$，于是 $\alpha=-3,\beta=2$；为确定 γ，只需将 $y_1=xe^x$ 代人方程得 $(x+2)e^x-3(x+1)e^x+2xe^x=\gamma e^x$，解得 $\gamma=1$，从而原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

解法二：将 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 代入原方程得

$(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^x+(1+\alpha+\beta)xe^x=\gamma e^x$，比较同类项的系数有

$4+2\alpha+\beta=0, 3+2\alpha+\beta=\gamma, 1+\alpha+\beta=0$，解方程组得 $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$，即原

方程为 $y''-3y'+2y=-e^{x}$，它对应的特征方程的根为 $r_1=1$，$r_2=2$，故齐次方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$，由题设特解知原方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+[e^{2x}+(1+x)e^{x}]$,即 $y=C_3e^{x}+C_4e^{2x}+xe^{x}$

7.解：讨论 a 的取值当 $a\neq 1$ 时通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{a^2-1}\sin x$ 当 $a=1$ 时通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}\sin x$

8. 解： (1) 由反函数的求导公式知 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 于是有

$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$.代入原微分方程得 $y''-y=\sin x.$

(2) 方程 $y''-y=\sin x.$ 所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为 $Y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$. 设方程 $y''-y=\sin x.$ 的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，代入方程求得 $A=0,B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是 $y=Y+y^*=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$ 由 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 得 $C_1=1,C_2=-1$. 故所求初值问题的解为 $y=e^{x}-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$

9.【分析】梯形 OCMA 的面积可直接用梯形面积公式计算得到曲边三角形 CBM 的面积可用定积分计算再由题设可得一含有变限积分的等式两边求导后可转化为一阶线性微分方程然后用通解公式计算即可.

解：根据题意有 $\frac{x}{2}[1+f(x)]+\int_x^1 f(t)dt=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$. 两边关于 x 求导得

$\frac{1}{2}[1+f(x)]+\frac{1}{2}xf'(x)-f(x)=\frac{1}{2}x^2$. 当 $x\neq 0$ 时得 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{x^2-1}{x}$. 此为一阶线性非齐次微分方程，其通解为 $f(x)=x^2+1+Cx$，由于 $f(1)=0$,故有 2+C=0 从而 C=-2. 所以 $f(x)=x^2+1-2x=(x-1)^2$.

10. 【分析】液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大，因此 t 时刻液面面积应为：$\pi 2^2+\pi t$ 。而液面为圆，其面积可直接计算出来，由此可导出 t 与 $\varphi(y)$ 之间

的关系式；又液体的体积可根据旋转体的体积公式用定积分计算，已知t时刻的液体体积为$3t$，它们之间也可建立积分关系式，求导后转化为微分方程求解即可.

解： (1) 设在t时刻液面的高度为y，则由题设知此时液面的面积为

$\pi\varphi^2(y)=4\pi+\pi t$，从而 $t=\varphi^2(y)-4$.

(2) 液面的高度为y时液体的体积为$\pi\int_0^y\varphi^2(u)du=3t=3\varphi^2(y)-12$.

上式两边对y求导得$\pi\varphi^2(y)=6\varphi(y)\varphi'(y)$ 即 $\pi\varphi(y)=6\varphi'(y)$. 解此微分方程得

$\varphi(y)=Ce^{\frac{\pi}{6}y}$，其中C为任意常数。由$\varphi(0)=2$知C=2,故所求曲线方程为 $x=2e^{\frac{\pi}{6}y}$.

【评注】 作为应用题，本题比较好地综合考查了定积分在几何上的应用与微分方程的求解。

11. **【分析】**（Ⅰ)利用导数的几何意义建立微分方程并求解；（Ⅱ)利用定积分计算平面图形的面积确定参数.

解：（Ⅰ) 设曲线L的方程为$y=f(x)$，则由题设可得 $y'-\frac{y}{x}=ax$，这是一阶线性微分方程，代入通解公式得$f(x)=ax^2+Cx$，又$f(1)=0$，所以$C=-a$. 故曲线L的方程为 $y=ax^2-ax\ (x\neq 0)$.

（Ⅱ)成平面图形面积$D=\int_0^2\left[ax-\left(ax^2-ax\right)\right]\mathrm{d}x=a\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$，故$a=2$.

【评注】本题涉及了导数和定积分的几何意义，一阶线性微分方程的求解属基本题型.

12.解：微分方程$xy''-y'+2=0$通解为$y=C_1+2x+C_2x^2$，其中C_1,C_2为任意常数。

又因为$y=y(x)$通过原点时其与直线$x=1$及$y=0$围成平面区域的面积为2，于是可得$C_1=0$， $2=\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1(2x+C_2x^2)dx=(x^2+\frac{C_2}{3}x^3)\Big|_0^1=1+\frac{C_2}{3}$，从而$C_2=3$。

于是所求非负函数$y=2x+3x^2(x\geq 0)$，又由$y=2x+3x^2$，可得在第一象限，曲线$y=f(x)$表示为$x=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$，于是$D$围绕$y$轴旋转所得旋转体的体积为

$V=5\pi-V_1$，其中 $V_1=\int_0^{5\pi}\pi x^2dx=\int_0^{5\pi}\pi\cdot\frac{1}{9}\cdot(\sqrt{1+3y}-1)dx=\frac{39}{18}\pi$，

$V=5\pi-\frac{39}{18}\pi=\frac{51}{18}\pi=\frac{17}{6}\pi$

13. 解： $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2},-\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x,0\leq x<\pi\end{cases}$。

14. 解：旋转体体积 $V(t)=\pi\int_0^t y^2dx$，旋转体的侧面积 $S(t)=\int_0^t 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$。由 $2\pi\int_0^t y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_0^t y^2dx$，两边求导得 $y\sqrt{1+y'^2}=y^2$，$y^2(1+y'^2)=y^4$，从而 $2y'y''=2yy'$ 得 $y''=y$. 所以特征方程为 $\lambda^2-1=0$ 特征根为 $\lambda=\pm1$. 则通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 由 $1+y'^2=y^2$ 得 $4C_1C_2=1$. 所以 $y=C_1e^x+\frac{1}{4C_1}e^{-x}$ 由$f(0)=1, C_1=\frac{1}{2}$. 故该曲线方程为 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$。

15. $y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}$。提示：可取沉放点为原点$O$，$Oy$轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv$，将$\frac{d^2y}{dt^2}=v\frac{dv}{dy}$，代入消去$t$，得$v, y$之间的微分方程$mv\frac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv$。