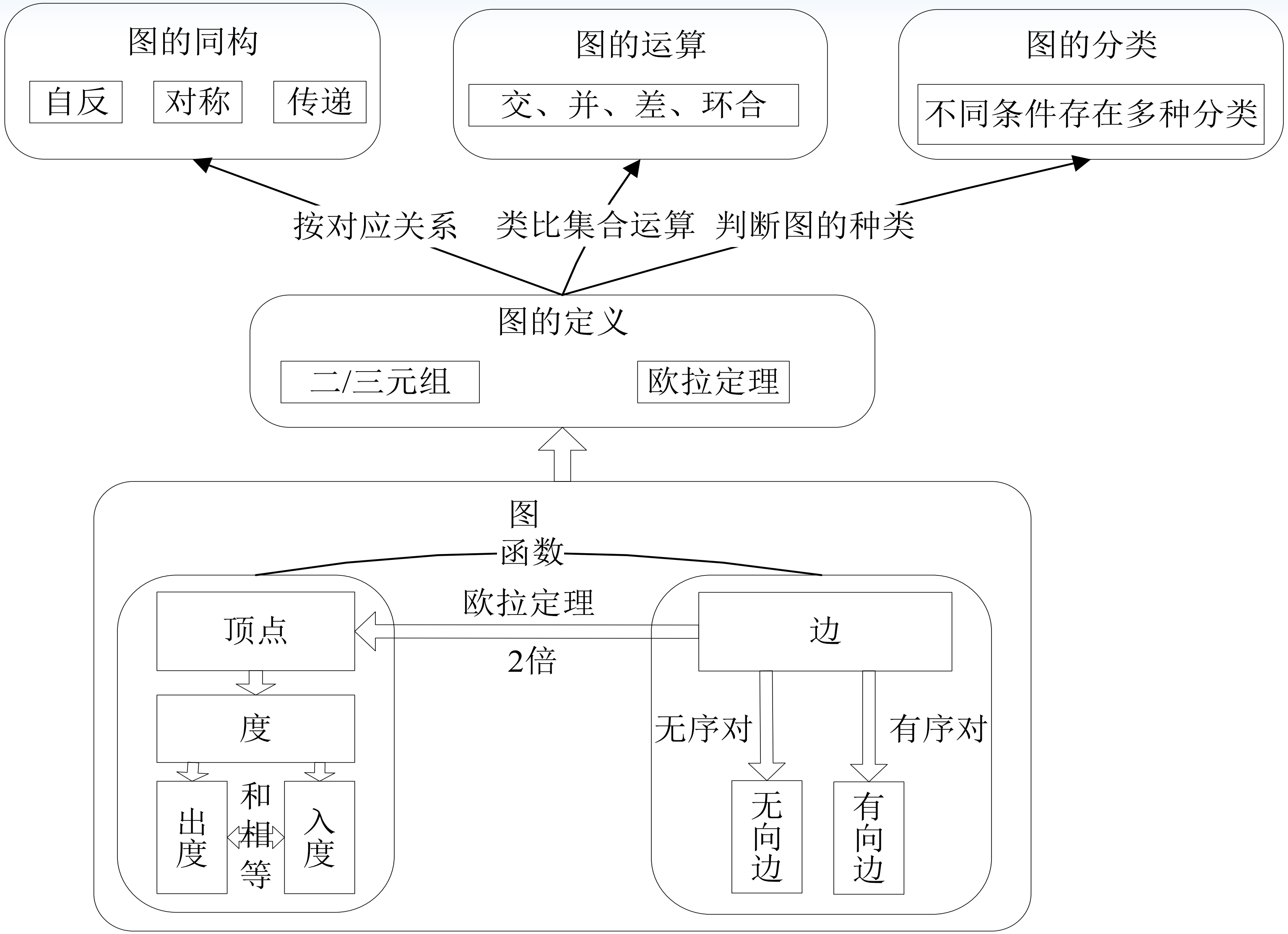
第四篇 图论

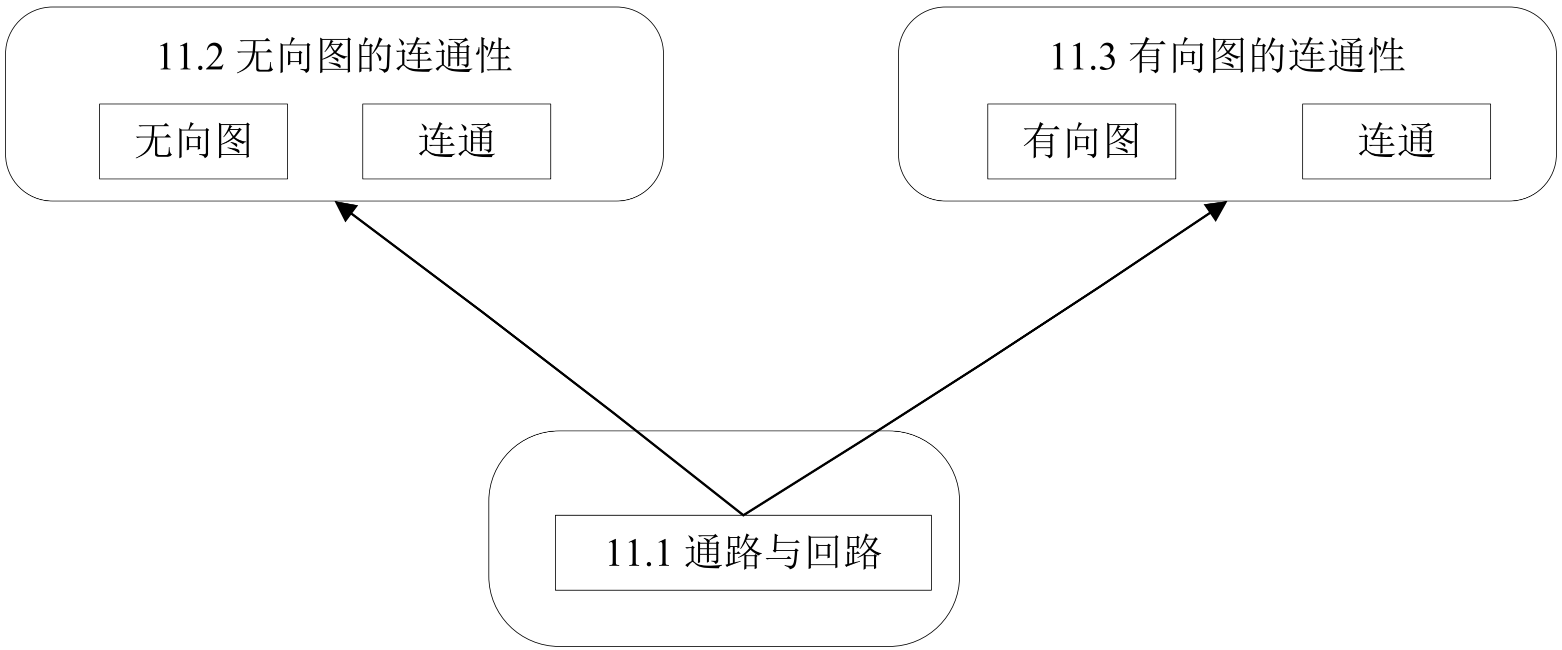
Graph Theory

上一章小结

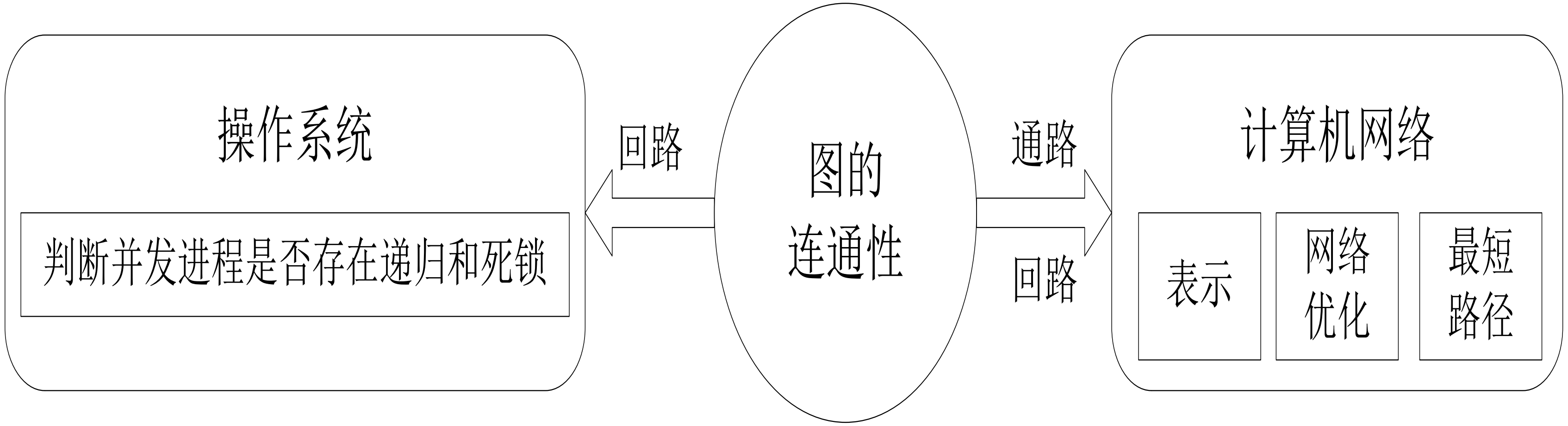

图的同构
自反
对称
传递
图的运算
交、并、差、环合
图的分类
不同条件存在多种分类
按对应关系
类比集合运算
判断图的种类
图的定义
二/三元组
欧拉定理
图
函数
欧拉定理
2倍
顶点
度
出度
和相等
入度
边
无序对
有序对
无向边
有向边

第十一章 图的连通性

本章各节间的关系概图



图的连通性在计算机科学技术相关领域的应用



11.1 通路与回路

定义11.1 给定图G=<V, E>，设 v_0， v_1， …， $v_n \in V$，e_1， e_2，…， $e_n \in E$，其中 e_i 是关联结点 v_{i-1}，v_i 的边，交替序列 $v_0\ e_1\ v_1\ e_2 \ldots e_n\ v_n$ 称为联结 v_0 到 v_n 的路径（或通路），称 v_0 为该路径的始点，v_n 为该路径的终点。

回路： 始点和终点相同的路径。

初级（element）路径： 若一条路径中经过的所有结点 v_0，v_1，…， v_n 均不相同，则称该路径为初级路径，亦称作轨。

简单(simple)路径： 若一条路中经过的所有边 e_1，e_2，…， e_n 均不相同，则称该路径为简单路径或迹。

初级回路： 一条回路，除始点与终点相同外其余结点均不相同，则称该路径为初级回路或者圈。

简单回路： 一条回路经过的所有边均不相同，则称该回路为简单回路或闭迹。

长度： 路径P中所含的边数称为路径P的长度。

长度为奇数的圈称为奇圈，长度为偶数的圈称为偶圈。

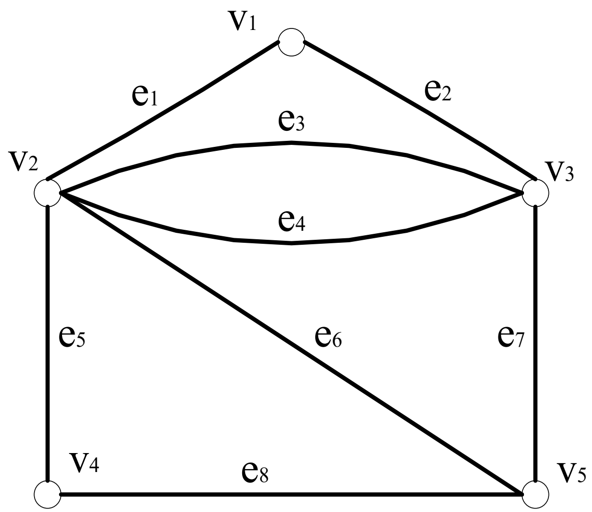
注意：初级路径必定是简单路径，初级回路必定是简单回路，反之不一定成立。

表示法

- ① 定义表示法
- ② 只用边表示法
- ③ 只用顶点表示法（在简单图中）
- ④ 混合表示法（顶点表示法基础上标示平行边）

环（长为1的圈）的长度为1，两条平行边构成的圈长度为2，无向简单图中，圈长≥3，有向简单图中圈的长度≥2.

例11.1 在下图中分别找出一条初级路径、简单路径、初级回路和简单回路。



解：路径：$v_1e_2v_3e_3v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$

初级路径：$v_4e_8v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3$

简单路径：$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_4e_4v_2$

初级回路：$v_2e_1v_1e_2v_3e_7v_5e_6v_2$

简单回路：$v_2e_5v_4e_8v_5e_7v_3e_3v_2$

定理11.1 在一个具有n个结点的图中，如果从结点v_j到结点v_k存在一条路径，则从结点v_j到结点v_k存在一条不多于$n-1$条边的路径。

证：如果从结点v_j到结点v_k存在一条路径，则该路径上的结点序列是$[v_j \cdots v_i \cdots v_k]$。如果在这路径上有$m$条边，则序列中必有$m+1$个结点。若$m>n-1$，则必有结点，它在序列中不止一次出现，即必有序列$[v_j \cdots v_s \cdots v_s \cdots v_k]$，在路径中去掉从$v_s$到$v_s$的这些边，仍然得到一条从结点$v_j$到结点$v_k$的路径，但此路径比原来的路径的边数要少。如此重复进行下去，必得到一条从结点v_j到结点v_k多于n-1条边的路径。

证毕。

推论11.1 在具有n个结点的圈中，若从结点v_j到结点v_k存在一条路径，则存在一条从结点v_j到结点v_k不多于n条边的路径。

长度相同的圈都是同构的，因此在同构意义下给定长度的圈只有一个。

在标定图中，圈表示成顶点和边的标记序列。只要有两个标记序列不同，就认为这两个圈不同，称这两个圈在定义意义下不同。

例11.2 无向完全图K_3的顶点依次标定为a，b，c。在定义意义下K_3中有多少个不同的圈？

解：在同构意义下，K_3中只有一个长为3的圈。

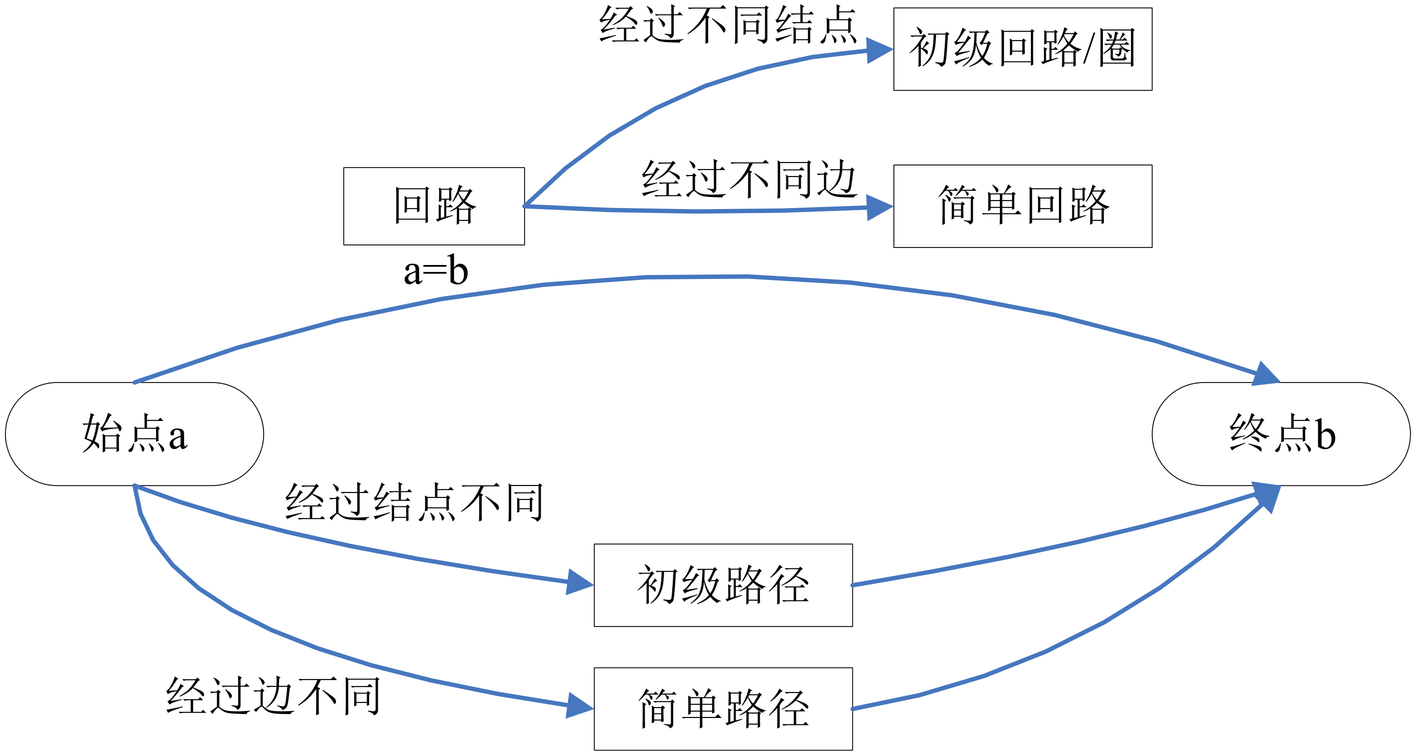
但在定义意义下，不同起点（终点）的圈是不同的，顶点间排列顺序不同的圈也看成是不同的，因而K_3中有6个不同的长为3的圈：$abca$，$acba$，$bacb$，$bcab$，$cabc$，$cbac$。

如果只考虑起点（终点）的差异，而不考虑顺时针逆时针的差异，应该有3种不同的圈，当然它们的长度都是3。

- 图$G=<V, E>$， $\forall u, v\in V$，从u 到v 的最短路径长度称为结点 u到v 的距离，记为d(u, v)。若从u到 v不存在路径，则规定$d(u, v)=\infty$ 。
- 距离满足以下性质：
- 1）$d(u, u)= 0$；
- 2）$d(u,v)\geq 0$；
- 3）$d(u,w)+ d(w ,v) \geq d(u,v)$（三角不等式）
- 注意：为了区别无向图中距离表示$d(v_i, v_j)$，有向图中距离表示$d<v_i, v_j>$

小结：

理解通路和回路的初级概念。关于通路与回路初级概念的思维形式注记图如下图所示。



11.2 无向图的连通性

定义11.2 在无向图$G=\langle V, E\rangle$中，$\forall u,v\in V$，若 u与 v之间存在通路，则称u, v是连通的。结点u和v之间连通，用$[u, v]$表示（或$u\sim v$ 表示）。

规定：$\forall v\in V$，$[v, v]$.

若图$G=\langle V, E\rangle$的任意两个结点皆是连通的，则G称为**连通图**。否则称成G为**非连通图或分离图**。

无向图中顶点间的连通关系是V上的等价关系，具有自反性、对称性和传递性。

- 短程线与距离
  - *u*与*v*之间的**短程线**：*u*~*v*，*u*与*v*之间长度最短的通路
  - *u*与*v*之间的**距离**：$d(u,v)$——短程线的长度
  - $d(u,v)$的性质：
    - $d(u,v)\geq 0$, $u\nsim v$时$d(u,v)=\infty$
    - $d(u,v)=d(v,u)$
    - $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

连通分支：

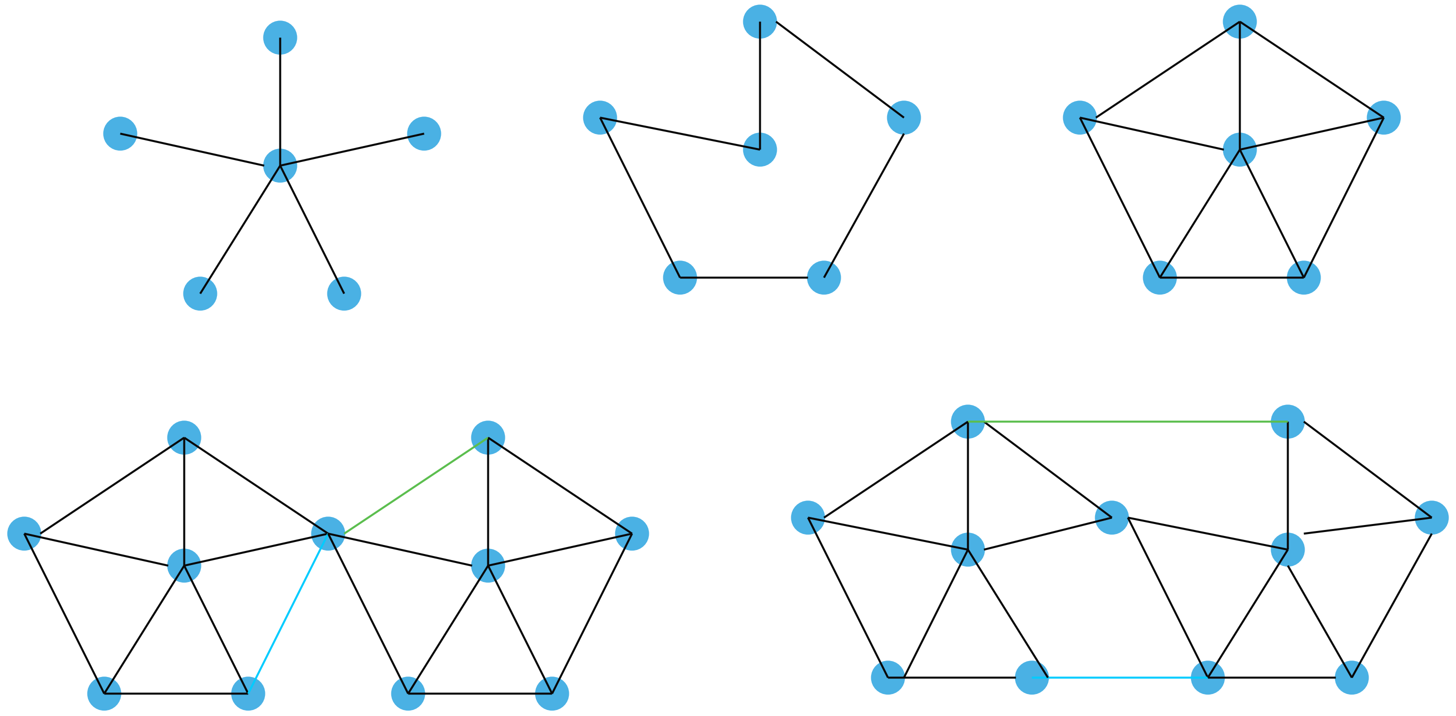
根据图G中的一个结点v定义图G的子图 $[V]_G$ 如下：

$$[V]_G = \langle V(v), E(v) \rangle$$

其中V(v)={x | [v, x]为真}；E(v)包含所有连接V(v)中结点的边。V(v)是V关于顶点之间的连通关系的一个等价类，称 $[V]_G$ 为G的一个连通分支。图G中包含的连通分支数记为W(G)。

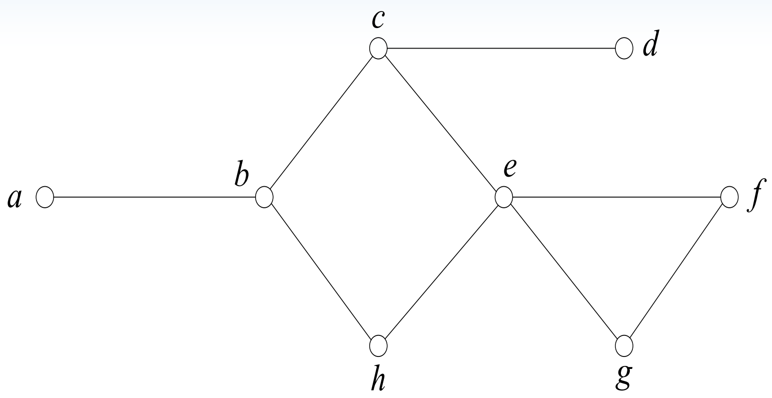
设无向图G=<V, E>为连通的，若对于图G中的两个结点x, y的任何通路，皆通过结点a，则称结点a为结点x, y的关节点。

❖ 问题: 如何定量比较无向图连通性的强与弱?

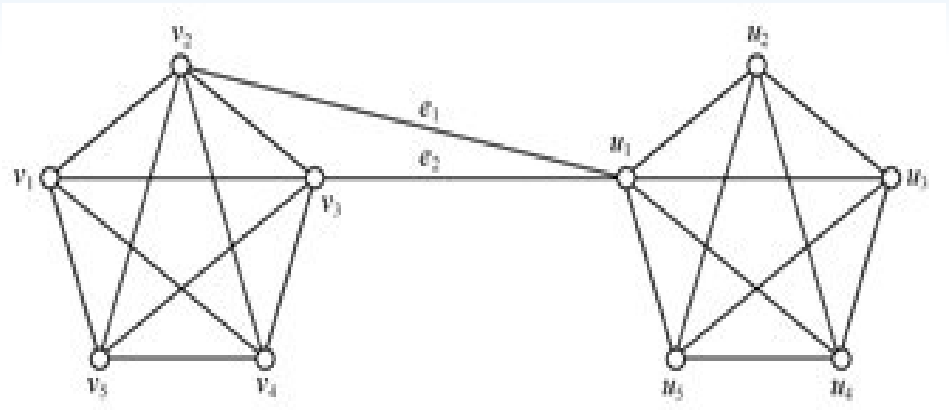


定义11.3 设无向图G=<V, E>为连通的，若有结点集$V_1 \subseteq V$，使得图G删除了V_1所有结点后，所得的子图是不连通的，而删除了V_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合V_1为图G的**点割集**。若某一结点就构成点割集，则称该结点为**割点**。

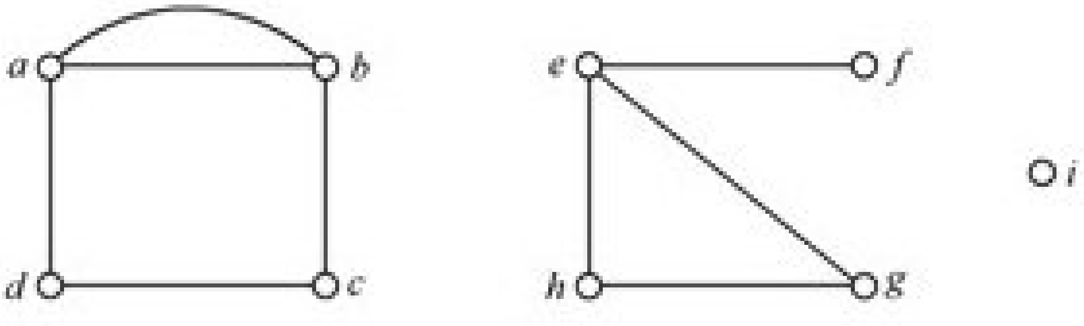
设无向图G=<V, E>为连通的，若有边集$E_1 \subseteq E$，使得图G删除了E_1所有边后，所得的子图是不连通的，而删除了E_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合E_1为图G的**边割集**。若某一边构成边割集，则称该边为**割边（或桥）**。G的割边也就是G中的一条边e使得$W(G-e) > W(G)$。



（a）



（b）

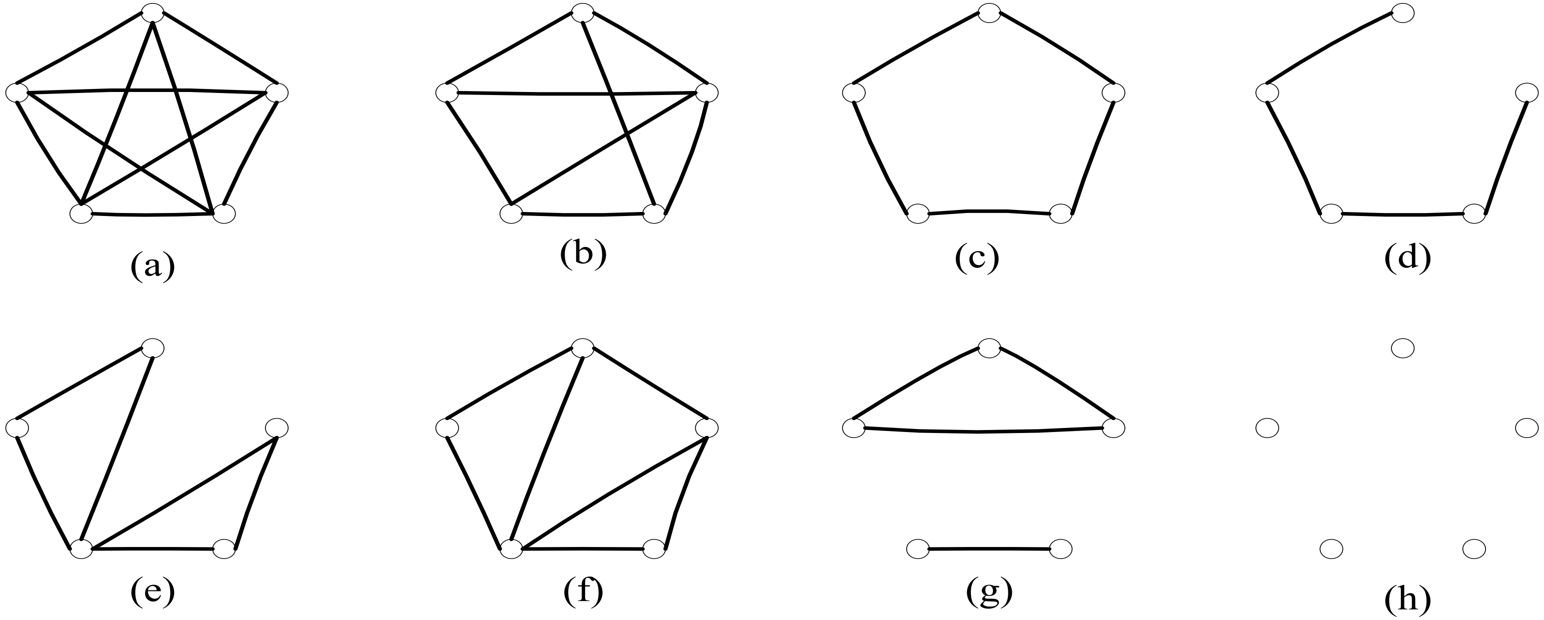


（c）

根据上述定义可知，图（a）的割点分别为b， c， e，点割集分别为{b}，{c}， {e}。图（b）$\{e_1, e_2\}$为边割集。

- 定义11.4 若G为无向连通图且不是完全图，定义$\kappa(G)=\min\{|V'|\mid V'$是G的点割集$\}$为G的点连通度（或连通度）。
- $\kappa(G)$是使G不连通需要删去的最少的结点数。
- 规定：
  - $\kappa(K_n) = n-1$;
  - G非连通: $\kappa(G)=0$;
- 若$\kappa(G) \geq k$，则称G是k-连通图，k为非负整数。
- 与点连通度相似，我们定义非平凡图G的边连通度为：$\lambda(G)=\min\{\{|E'|\mid E'$是G的边割集$\}$。
- $\lambda(G)$是使G不连通需要删去的最少的边数。
- 规定： G非连通, $\lambda(G)=0$
- 若$\lambda(G) \geq r$,则称G是r边-连通图。

例11.3 求下图中所示各图的点连通度和边连通度，并指出它们各是几连通图及几边连通图，最后将它们按点连通度及边连通度程度排列。



解：设第i个图点连通度κ_i，边连通度为λ_i，i=1, 2，……，8。容易看出，

$\kappa_1=\lambda_1=4$；$\kappa_2=\lambda_2=3$；$\kappa_3=\lambda_3=2$；$\kappa_4=\lambda_4=1$；$\kappa_5=1$；$\lambda_5=2$；$\kappa_6=\lambda_6=2$；$\kappa_7=\lambda_7=0$ $\kappa_8=\lambda_8=0$

(a) 是k-连通图，k边-连通图，k=1, 2, 3, 4。

(b) 是k-连通图，k边-连通图，k=1, 2, 3。

(c) 是k-连通图，k边-连通图，k=1, 2。

(d) 是1-连通图，1边-连通图。

(e) 是1-连通图，k边-连通图，k=1, 2。

(f) 是k-连通图，k边-连通图，k=1, 2。

(g) 是0-连通图，0边-连通图。

(h) 是0-连通图，0边-连通图。

点连通图程度：（a）>（b）>（c）=（f）>（d）=（e）>（g）=（h）

边连通图程度：（a）>（b）>（c）=（e）=（f）>（d）>（g）=（h）

定理11.2 对于任何无向图$G=\langle V, E\rangle$，有$\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$

证:（1）若G不连通，则$\kappa(G)=\lambda(G)=0$，故上式成立。

（2）若G连通，

① 证明$\lambda(G)\le\delta(G)$

若G是平凡图，则$\lambda(G)=0\le\delta(G)$，若G是非平凡图，则因每一结点的所有关联边构成的集合必包含一个边割集，故$\lambda(G)\le\delta(G)$

② 再证$\kappa(G)\le\lambda(G)$

设E'是边割集,|E'|=λ,从V(E')中找出点割集V',使得|V'|≤λ(G), 所以$\kappa(G)\le|V'|\le\lambda(G)$。

设$\lambda(G)=1$，即G有一割边，显然此时$\kappa(G)=1$，上式成立。

设$\lambda(G)\ge2$，则必可删去某$\lambda(G)$条边，使G不连通，而删除$\lambda(G)-1$条边，它仍然连通，而且有一条桥$e=(u, v)$。对$\lambda(G)-1$条边中每一条边都选取一个不同于u，v的端点，将这些端点删去必至少删去$\lambda(G)-1$条边。若这样产生的图是不连通的，则$\kappa(G)\le\lambda(G)-1\le\lambda(G)$，若这样产生的图是连通的，则$e=(u, v)$仍然是桥，此时再删去$u$或$v$，就必产生一个不连通图，故$\kappa(G)\le\lambda(G)$。

根据①和②得: $\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$。证毕。

定理11.3（割点的充要条件） 一个连通无向图G=<V, E>的某一点v是图G的割点，当且仅当它是某对结点u，w的关节点。

证：先证明必要性，再证明充分性。

（1）必要性：若结点v是G的割点，则删去它后，必然有两个以上的连通分支。u和w分别在不同的连通分支上取，显然v是结点u，w的关节点。

（2）充分性：若v是结点u，w的关节点，则u到w的每一条路都通过v，删除v后u到w已不连通，故v是图G的割点。

证毕。

例11.4： 试证明$2n$所电话分局，如果每个分局至少可以和另外n个分局直接通话，那这$2n$所电话分局中任何两个之间可互相通话。(有些可能要通过另外的电话所中介)。

证： 本题即证明：$2n$个顶点，每个顶点的度数大于等于n的简单图是连通的。设G不连通，则G中至少包含两个连通分支，依题意必有一个分支顶点数小于等于n，即使这个分支是完全图，其每个顶点v的度数$\deg(v)$小于等于$n-1$，和$\deg(v)$大于等于n矛盾，所以图G只有一个连通分支，G是连通的。

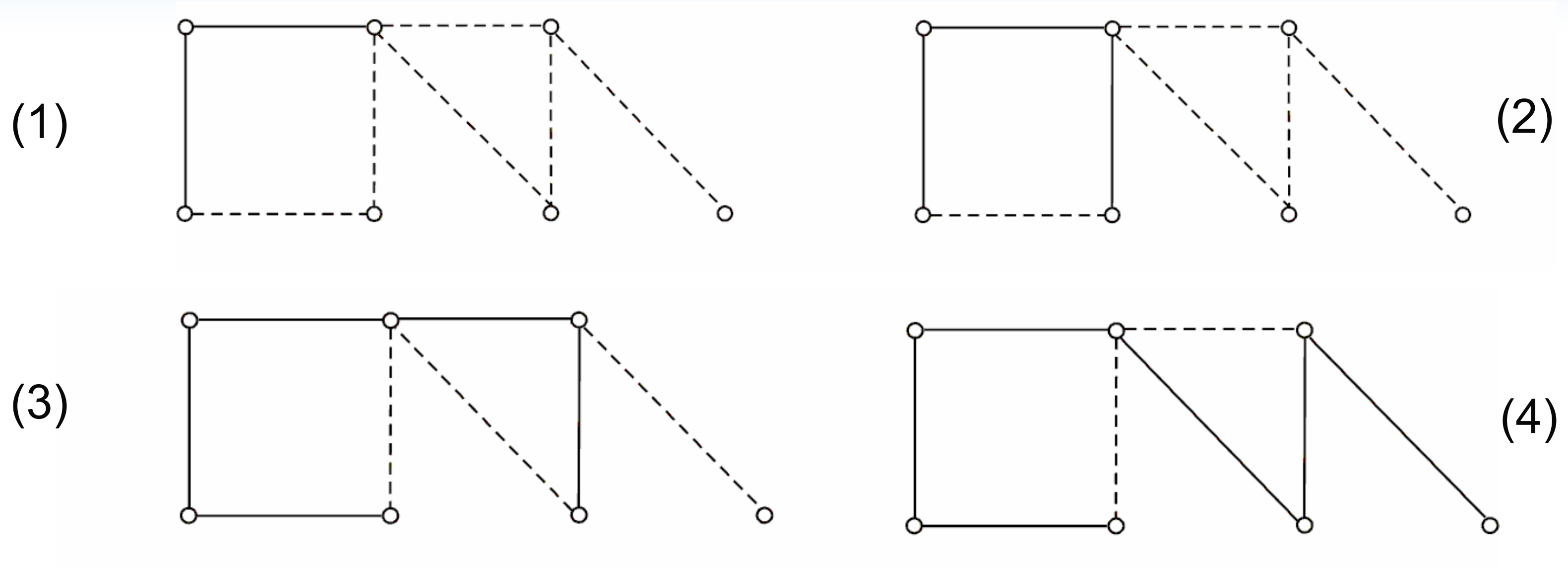
证毕。

极大路径(扩大路径法)

无向图中设G=<V,E>为 n 阶无向图，E≠∅. 设 Γ_l 为G中一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止. 设最后得到的路径为Γ_{l+k}（长度为 l 的路径扩大成了长度为 $l+k$ 的路径），称Γ_{l+k}为“极大路径”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”.

有向图中类似讨论，只需注意，在每步扩大中保证有向边方向的一致性.

实例



- 由某条路径扩大出的极大路径不惟一，极大路径不一定是图中最长的路径
- 上图中，(1)中实线边所示的长为2的初始路径Γ，(2),(3),(4)中实线边所示的都是它扩展成的极大路径.
- 还能找到另外的极大路径吗？

扩大路径法的应用

例 **设 G 为 n（$n\geq 3$）阶无向简单图，$\delta(G)\geq 2$，证明 G 中存在长度 $\geq \delta(G)+1$ 的圈.**

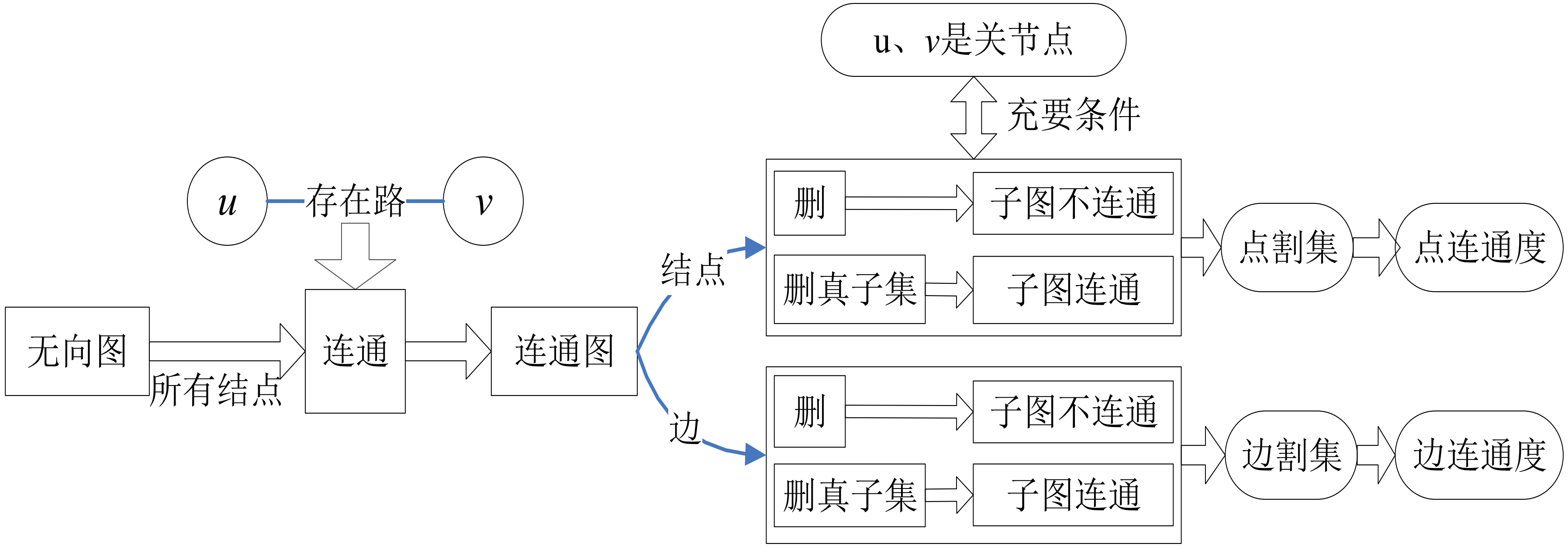
证 设 $\Gamma = v_0v_1\ldots v_l$ 是由初始初级路径 Γ_0 用扩大路径法得到的极大路径，则 $l \geq \delta(G)$.

因为 v_0 不与 Γ 外顶点相邻，又 $d(v_0) \geq \delta(G)$，因而在 Γ 上除 v_1 外，至少还存在 $\delta(G)-1$ 个顶点与 v_0 相邻. 设 v_x 是离 v_0 最远的顶点，于是 $v_0v_1\ldots v_xv_0$ 为 G 中长度 $\geq \delta(G)+1$ 的圈.

小结：

（1）理解无向图的连通性、连通分支等概念；理解距离的概念和性质。

（2）深刻理解无向图的点连通度、边连通度等概念及其之间的关系，并能熟练地求出给定的较为简单的图的点连通度与边连通度。关于无向图的连通性的思维形式注记图如下：



11.3 有向图的连通性

定义11.5 设$G=\langle V, E\rangle$是有向图，v_i，$v_j \in V$，如果从v_i到v_j存在一条有向路径，则称v_i到v_j可达，记为$v_i \to v_j$。

规定：$\forall v \in V$，$v \to v$.

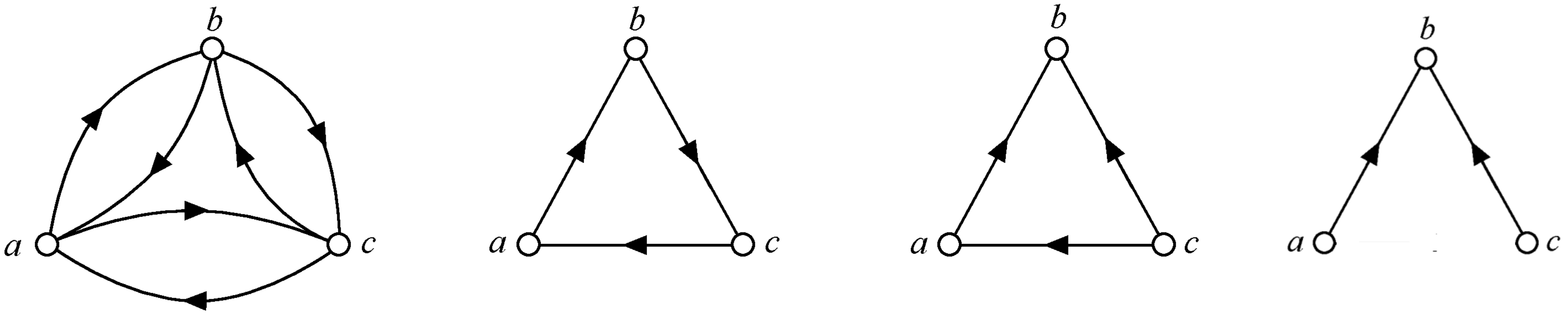
单侧连通： 在有向图$G=\langle V, E\rangle$中，若对于任意结点偶对，至少有一个结点到另一个结点是可达的。

强连通： 在有向图$G=\langle V, E\rangle$中，若对于任意结点偶对都是相互可达的。

弱连通： 在有向图$G=\langle V, E\rangle$中，如果在图G中略去边的方向，将它看成无向图G（基图）是连通的。

易知，强连通$\Rightarrow$单侧连通$\Rightarrow$弱连通

例图：



（a） （b） （c） (d)

上图给出了含3个结点的强连通图(a，b)、单侧连通图(c)、弱连通图(d)。

定义11.6 在简单有向图G中

具有强连通性质的极大子图G′称为G的**强分图(或强连通分量)**；

具有单侧连通性质的极大子图G″称为G的**单侧分图(或单侧连通分量)**；

具有弱连通性质的极大子图G‴称为G的**弱分图(或弱连通分量)**。

定理11.4 一个有向图是强连通的，当且仅当G中存在经过每个顶点至少一次的回路。

证：先证充分性，再证必要性。

（1）充分性：如果图中有一条回路，它至少包含每个结点一次，则G中任意两个结点都是互相可达的，故G是强连通的。

（2）必要性：若有向图G是强连通的，则任意两个结点都是可达的，故必可作一回路经过图中的所有结点。若不然则必有一回路不包含某一结点v，而且，v与回路上的各结点不是互相可达，与强连通的条件矛盾。

证毕。

定理11.5 在有向图G = <V, E>中，它的每一个结点位于且仅位于一个强分图内。

证：（1）设$v \in V$，令S是G中所有与v相互可达的结点的集合，当然S也包括v，而S与顶点在S中的边集构成的G′是G中的一个强分图，因此G中的每一个结点必位于一个强分图中。

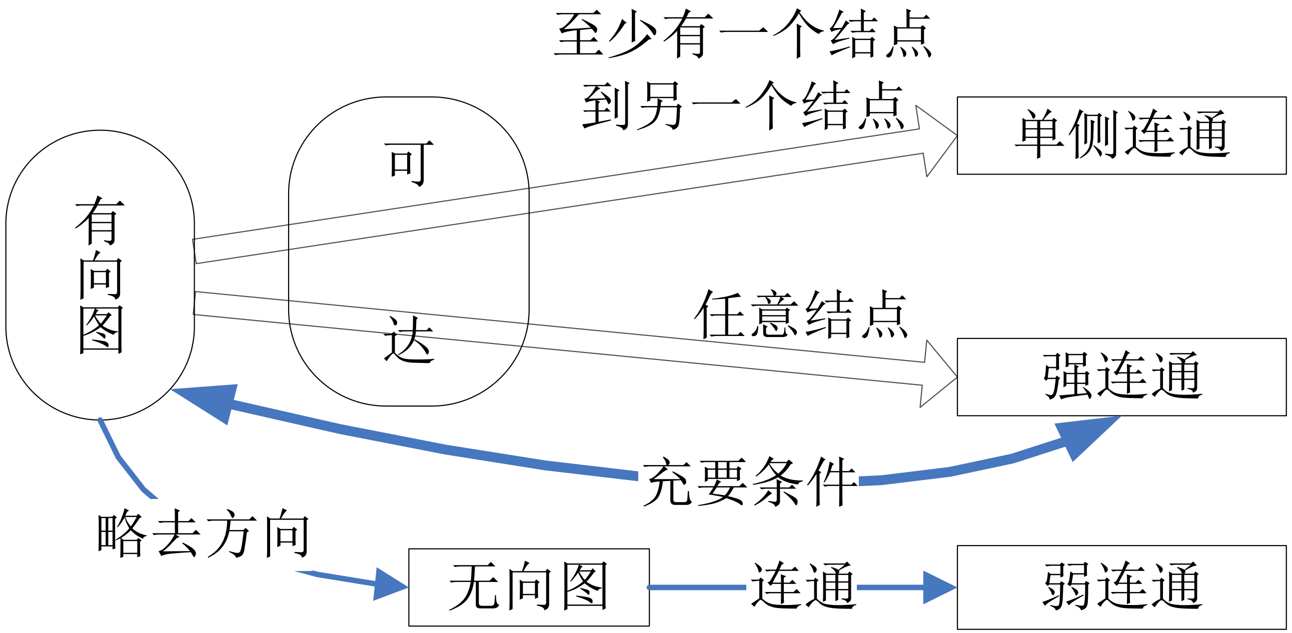
（2）设v位于两个不同的强分图G_1和G_2中，因为G_1中的每一个结点与v可达，而v与G_2中的每一个结点也相互可达，G_1中的每一个结点与G_2中的每一个结点通过v都相互可达，这与题设G_1为强分图矛盾，故G的每一个结点只能位于一个强分图中。

推论11.2 有向图G是单侧连通图当且仅当G中存在经过每个顶点至少一次的通路。

推论11.3 简单有向图中的每个结点和每条边恰好位于一个弱分图中。

小结：

理解有向图的连通性、单侧连通、强连通和弱连通及它们的性质。关于有向图的连通性的思维形式注记图如下图所示。



11.4 常见题型解析

1）无向图的连通性及其应用。

2）有向图的连通性及其应用。

3）割集与连通度的求证。

4）扩大路径法。

1）无向图的连通性及其应用

例11.5 设G是一个简单无向图，G含有n个结点m条边，若 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

1) 证明G是连通图。

2) 构造一个具有n个结点而不连通的简单无向图，使得其边数恰为 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 条。

解:

（1）方法一：用反证法。假若简单无向图G不是连通图，那么G必可分成K（≥2）个连通分支G_1，G_2，…，G_k，每个连通分支（1≤i≤k）都是一个简单无向图，因此它们分别为（n_1，m_1），（n_2，m_2），…（n_k，m_k）图显然有 n= $n_1+n_2+\ldots n_k$，m= $m_1+m_2+\ldots m_k$，且n_i≤n−1（1≤i≤k）于是有：

$$m=m_1+m_2+\ldots m_k$$

$$\le \frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}+\cdots+\frac{n_k(n_k-1)}{2}$$

$$\le \frac{(n-1)(n_1-1)}{2}+\frac{(n-1)(n_2-1)}{2}+\cdots+\frac{(n-1)(n_k-1)}{2}$$

$$=(n\text{-}1)\cdot\frac{1}{2}\cdot((n_1\text{-}1)+(n_2\text{-}1)+\ldots+(n_k\text{-}1))=\frac{1}{2}(n\text{-}1)((n_1+n_2+\ldots+n_k)\text{-}k)=\frac{1}{2}(n\text{-}1)(n\text{-}k)$$

$$\le\frac{1}{2}(n\text{-}1)(n\text{-}2)\qquad(k\ge 2)$$

这与已知 $M>\frac{1}{2}(n\text{-}1)((n\text{-}2)$ 矛盾。

因此假设错误，G是连通图。

（2）方法二：用归纳法。

当n=3时，有m>=2，又因为G是简单图，所以G必是连通的。

假设当n=k时，命题成立。

当n=k+1时，从图G中删去任意一个非孤立结点v，得到简单图G-v。

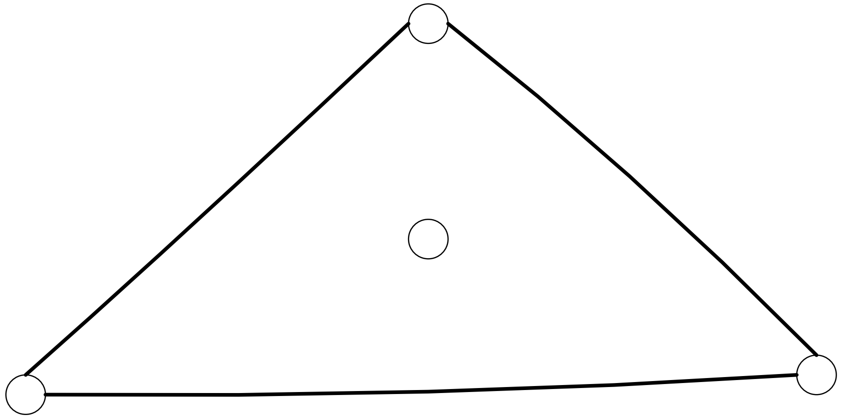
若deg（v）=k，因为G是简单图，则v与G中另外k个结点都邻接，所以G必是连通图。否则有0<deg(v)<=k-1。设G-v中的边数为m'，则有

2m'>=2[m-(k-1)]>k(k-1)-2(k-1)=(k-1)(k-2)

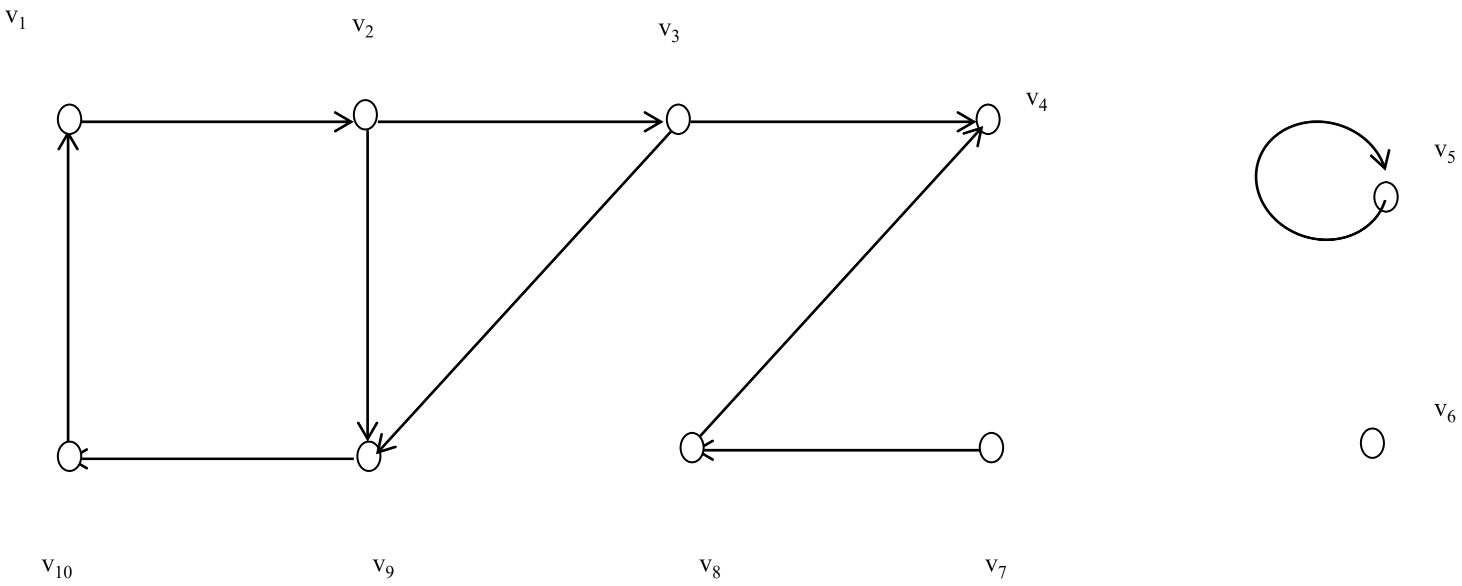
根据归纳假设，G的子图G'是连通的，现将v放回以恢复图G，显然G也是连通的。

综上所述，若简单图G的边数 $m \rangle \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则G必是连通的。

（2）一个具有4个结点，3条边不连通的简单无向图如下图所示。



例11.7 求下列图中的所有强分图，单侧分图，弱分图。



解：（1）有六个强分图，它们是：

G_1=({ v_1， v_2， v_3， v_9， v_{10} }，

{(v_1， v_2)，(v_2， v_9)，(v_9， v_{10})，(v_{10}， v_1)，(v_2， v_3)，(v_3， v_9)})

G_2=({ v_4 }，φ)，G3=({ v_8 }，φ)，G4=({ v_7 }，Φ)，

G_5=({ v_5 }，{(v_5， v_5)})，G6=({ v_6 }，Φ)。

（2）有四个单侧分图，它们是：

G_1=({ v_1， v_2， v_3， v_4， v_9， v_{10} }，

{(v_1， v_2)，(v_2， v_9)，(v_9， v_{10})，(v_{10}， v_1)，(v_2， v_3)，(v_3， v_9)，(v_3， v_4)，

G_2=({ v_4， v_7， v_8 }，{(v_7， v_8)，(v_8， v_4)})，

G_3=({ v_5 }，{ v_5， v_5 })，G4=({ v_6 }，Φ)

（3）有三个弱分图，它们是:

G_1=({ v_1， v_2， v_3， v_4， v_7， v_8， v_9， v_{10} }，

{(v_1， v_2)，(v_2， v_9)，(v_9， v_{10})，(v_{10}， v_1)，

(v_2， v_3)，(v_3， v_9)，(v_3， v_4)})，(v_7， v_8)，(v_8， v_4)})

G_2=({ v_5 }，{(v_5， v_5)})，G3=({ v_6， Φ })

3）割集与连通度的求证

例11.8　证明：e是无向图G中的割边，当且仅当它不包含在G中的任何一条简单回路中。

证：（充分性）设图G中的边e=（u，v）不包含在任一条简单回路中，则从结点u和v之间除了e外无任何其他初级路径。否则，若u与v之间存在另外一条初级路径，那么加上边e将构成一条简单回路，与题设矛盾。因此，从图G中删除边e后，结点u与v将不连通，故e是一条割边。

（必要性）设e是G的割边，假设e包含在某一条简单回路中，删除e后将不影响图G的连通性，这显然与e是割边矛盾。所以e不包含在任何简单回路中。

证毕。

4）扩大路径法

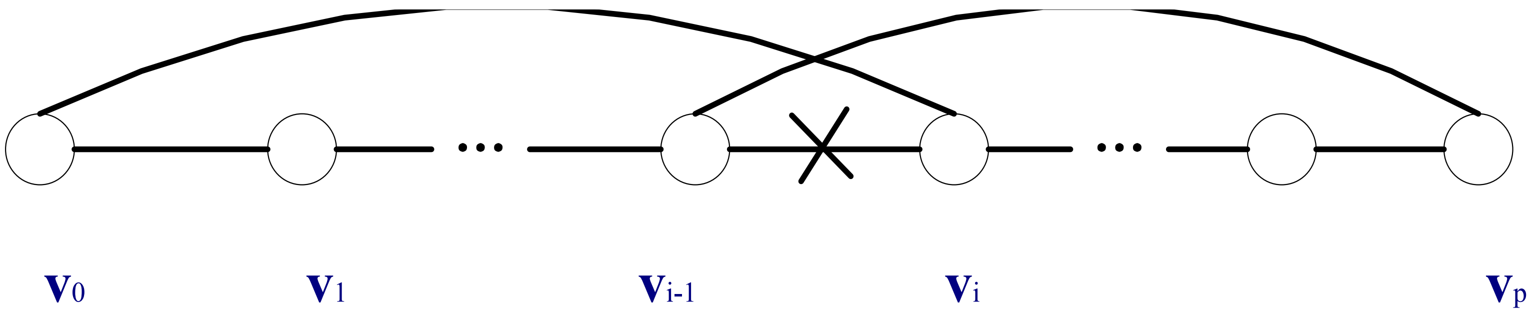
例11.9　设连通简单无向图G的结点数为n，G中结点的最小度数为k。证明：若n>2k，则G中必存在一条长度为2k的初级路径。

证：假设P=（v_0，v_1,…，v_p）是G中的一条最长的极大初级路径，且P的长度小于2k。

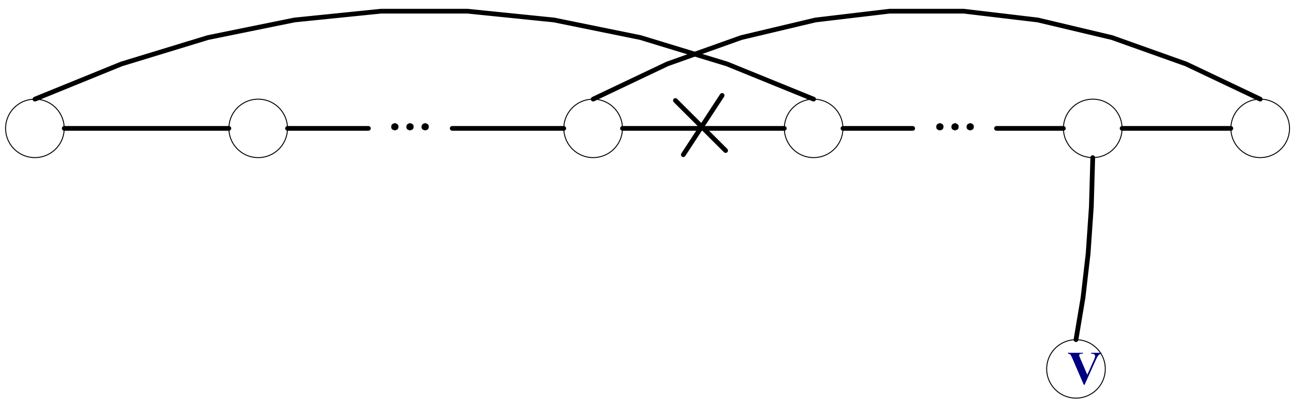
由于P是一条极大的初级路径，顶点 v_0 和 v_p 邻接的顶点都在P中，否则将可以扩展P得到一条更长的初级路径。

又因为G中结点的最小度数为k，所以有 deg（v_p）≥k 且 deg（v_0）≥k 。

由此可知，存在 $0 \le i \le p-1$，使得v_0与v_i邻接，且 v_{i-1} 与 v_p 邻接，如下图所示。



从而得到长度为P+1的初级回路C=$v_0\ v_1 \cdots\cdots v_{i-1}\ v_p\ v_{p-1} \cdots\cdots v_i\ v_0$ ）。因为G是连通图，且结点数大于2k，所以存在不在回路C中的结点v至少与C中的某一个结点v_j邻接。将C中与v_j关联的一条边断开，并把（v，v_j）连入，从而得到一条长度为p+1的初级路径，如下图所示。这与P是一条最长的极大初级路径矛盾。



所以G中有长为2k的初级路径。证毕。

本章小结

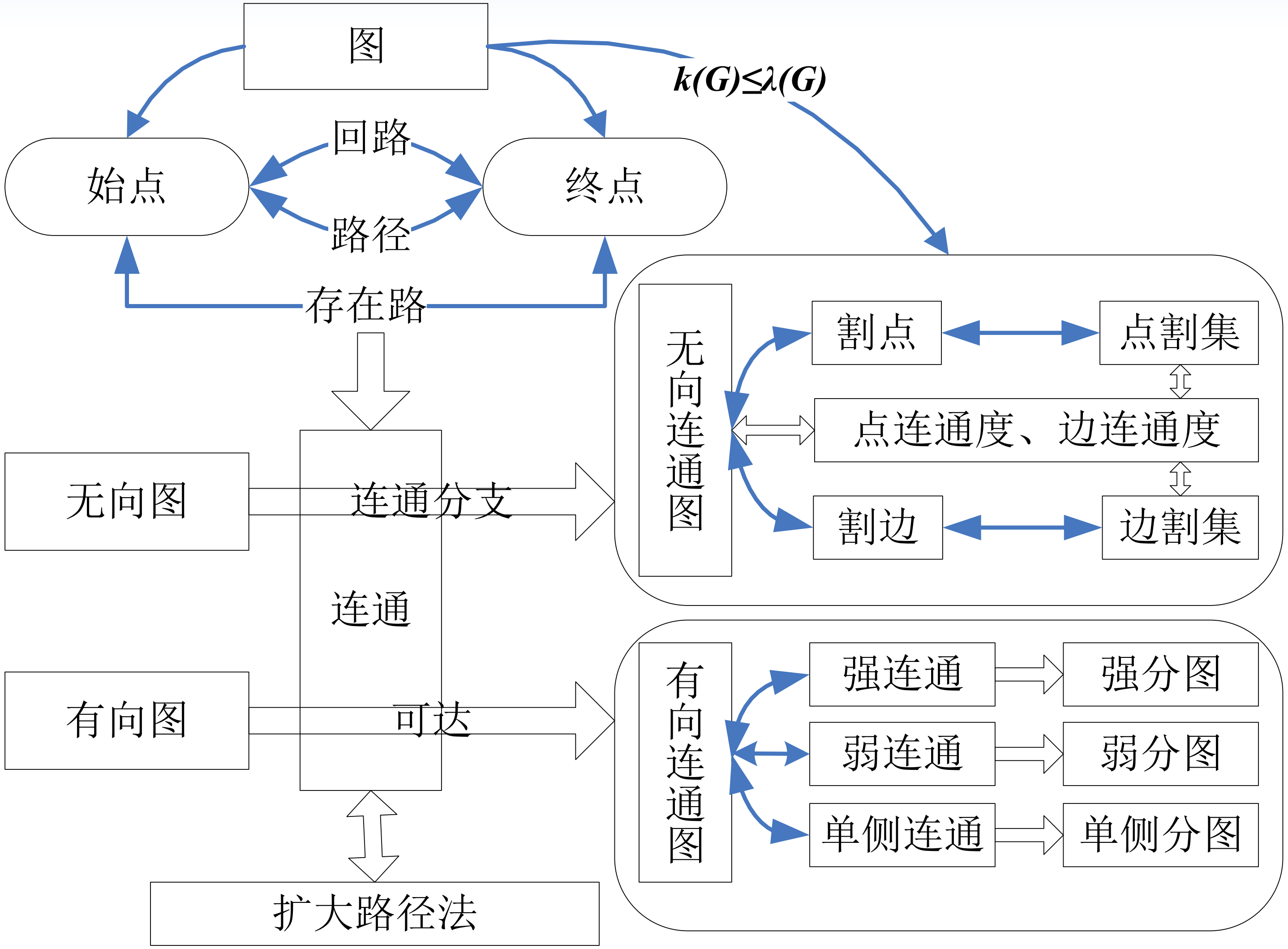


图
k(G)≤λ(G)
始点
回路
路径
终点
存在路
无向图
连通分支
连通
有向图
可达
扩大路径法
无向连通图
割点
点割集
点连通度、边连通度
割边
边割集
有向连通图
强连通
强分图
弱连通
弱分图
单侧连通
单侧分图