第一章 运动学

1. 一石子从空中由静止下落，由于空气阻力，石子并非作自由落体运动。现测得石子加速度为 $a=A-Bv$，其中 A、B 为正恒量，v 是石子的速率。在 $t=0$ 时石子开始下落，选取石子下落方向为 y 轴正向，下落起点为坐标原点，试求石子下落时的速度和运动方程。

解：选取石子下落方向为y轴正向，下落起点为坐标原点。

由题意：$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A-Bv$ (1)

将(1)式分离变量改写为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{A-Bv}=\mathrm{d}t$ (2)

将式(2)两边积分并考虑初始条件，有

$\int_0^v \dfrac{\mathrm{d}v}{A-Bv}\mathrm{d}v=\int_0^t \mathrm{d}t$，得石子速度：$v=\dfrac{A}{B}(1-e^{-Bt})$

对速度积分并考虑初始条件有：$\int_0^y \mathrm{d}y=\int_0^t \dfrac{A}{B}(1-e^{-Bt})\mathrm{d}t$

得石子运动方程：$y=\dfrac{A}{B}t+\dfrac{A}{B^2}(e^{-Bt}-1)$

2. 一质点沿一直线运动，其加速度为 $a=-2x$，式中 x 的单位为 m，a 的单位为 $\mathrm{m/s^2}$。试求该质点的速度 v 与位置坐标 x 之间的关系。设当 $x=0$ 时，$v_0=4\mathrm{m/s}$。

解：依题意

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=-2x$$

$$\int_0^x -2xdx=\int_{v_0}^v vdv$$

积分得

$$-x^2=\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)$$

$$v=\sqrt{v_0^2-2x^2}=\sqrt{16-2x^2}$$

3. 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $\boldsymbol{s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2}$ 运动，$\boldsymbol{v_0}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是常量。(1)求 t 时刻质点的总加速度；(2)t 为何值时，总加速度在数值上等于 b？(3)当加速度达到 b 时，质点已沿圆周运行了多少圈？

解：(1) 质点作圆周运动的速率为：$v=\dfrac{ds}{dt}=v_0-bt$

其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_t=\frac{d^2s}{dt^2}=-b\text{，}\quad a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为：$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{\dfrac{a_t^2b^2+(v_0-bt)^4}{R}}$

其方向与切线之间的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}=\arctan\left[-\frac{(v_0-bt)^2}{Rb}\right]$$

(2) 要使$|a|=b$，由$\dfrac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}=b$可得：$t=\dfrac{v_0}{b}$

(3) 从$t=0$ 开始到$t=v_0/b$ 时，质点经过的路程为：$s=s_t-s_0=\dfrac{v_0^2}{2b}$

因此质点运行的圈数为：$n=\dfrac{s}{2\pi R}=\dfrac{v_0^2}{4\pi bR}$

4. 一质点沿半径为0.1m的圆周运动，其用角坐标表示的运动学方程为$\boldsymbol{\theta=2+4t^3}$，$\boldsymbol{\theta}$的单位为 rad，$t$ 的单位为 s。试求：(1)在$\boldsymbol{t=2s}$时，质点的切向加速度和法向加速度的大小；(2)当$\boldsymbol{\theta}$等于多少时，质点的加速度与半径的夹角成$\mathbf{45°}$？

解：(1)质点的角速度及角加速度为

$$w=\frac{d\theta}{dt}=12t^2$$

$$\beta=\frac{d^2\theta}{dt^2}=24t$$

法向与切向加速度大小为

$$a_n=Rw^2=144Rt^4$$

$$a_t=R\beta=24Rt$$

当$t=2s$时

$$a_n=230.4m/s^2$$

$$a_t=4.8m/s^2$$

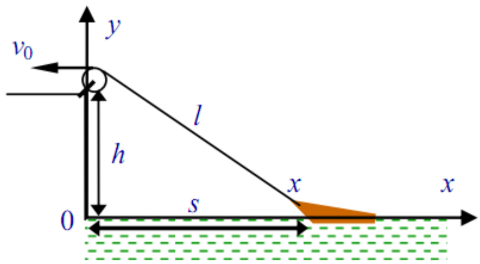
(2)设时刻t'时，a 和半径夹角为 45º,此时$a_n=a_t$，即

$$144Rt'^4=24Rt'$$

得 $t'^3 = \frac{1}{6}s$

$\theta(t') = 2 + 4t'^3 = 2.67rad$

5. 在离水面高度为 h 的岸边，有人用绳子绕过岸上的定滑轮拉船靠岸，船在离岸边 s 距离处。当人以速率 v_0 匀速收绳时，试求船的速率和加速度大小（假设绳子不可伸长）。



解：建立如图所示的坐标系。根据题意可得 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -v_0$，

由 $x = \sqrt{l^2 - h^2}$ 可得船速：

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}(-v_0) = -v_0\frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x}$$

因此当 $x = s$ 时，船的速率：$v = v_0\frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s}$

由船速可得船的加速度：

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{h^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}(-v_0^2) = -\frac{h^2 v_0^2}{x^3}$$

因此当 $x = s$ 时，船的加速度大小：$a = \frac{h^2 v_0^2}{s^3}$

6. 在质点运动中，已知 $\boldsymbol{x = ae^{kt}, \frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}, y\big|_{t=0} = b}$。求质点的加速度和它的轨迹方程。

解：(1) $\boldsymbol{v_x = \frac{dx}{dt} = ake^{kt}, a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = ak^2e^{kt}},$

$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = bk^2e^{-kt}},$

质点的加速度为：$\vec{a}=ak^2e^{kt}\hat{i}+bk^2e^{-kt}\hat{j},$

(2)$\because \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-bke^{-kt}$

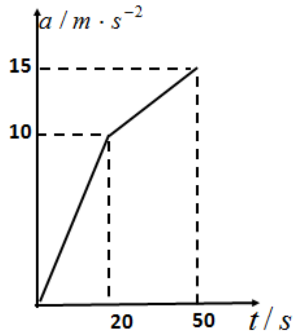
$\therefore \int_b^y \mathrm{d}y=\int_0^t -bke^{-kt}\mathrm{d}t$

$\therefore y-b=be^{-kt}\Big|_0^t=be^{-kt}-b$

$\therefore y=be^{-kt},$

由此可知，质点的轨迹方程为： $xy=ab,$

7. 火箭沿竖直方向由静止向上发射，加速度随时间的变化规律如图所示。试求火箭在 t = 50s 时燃料用完那一瞬间所能达到的高度及该时刻火箭的速度。



解：由图可知

第一阶段：$\mathrm{a}=\dfrac{1}{2}\mathrm{t}$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{dt}=\dfrac{1}{2}t$，$\mathrm{d}v=\dfrac{1}{2}tdt$

积分得 $\int_0^{\mathrm{v}} dv=\int_0^t \dfrac{1}{2}tdt$，$\mathrm{v}=\dfrac{1}{4}t^2$

当 $t=20s$ 时，$v=100m/s$。

由 $v=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{4}t^2$

积分有 $\int_0^x dx=\int_0^t \dfrac{1}{4}t^2dt$

得 $x=\dfrac{1}{12}t^3, t=20s, x=\dfrac{2000}{3}m$

第二阶段：

$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{1}{6}t+\dfrac{20}{3}$

$dv=(\dfrac{1}{6}t+\dfrac{20}{3})dt$

积分 $\int_{100}^{v}dv=\int_{20}^{t}(\dfrac{1}{6}t+\dfrac{20}{3})dt$

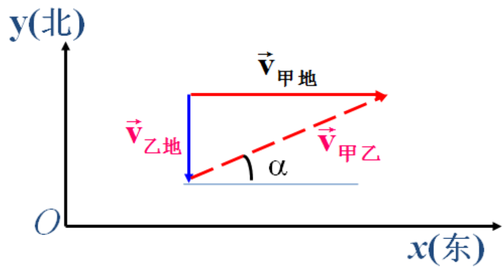
得 $v=\dfrac{1}{12}t^2+\dfrac{20}{3}t-\dfrac{200}{3}$

再积分 $\int_{\frac{2000}{3}}^{x}dx=\int_{20}^{t}(\dfrac{1}{12}t^2+\dfrac{20}{3}t-\dfrac{200}{3})dt$

得 $x=\dfrac{1}{36}t^3+\dfrac{10}{3}t^2-\dfrac{200}{3}t+\dfrac{4000}{9}$

当 $t=50s$ 时，$v=475m/s$，$h=8916.7m$。

8. 甲乙两船同时航行，甲以 10 m/s 的速度向东，乙以 5 m/s 的速度向南。问：从乙船的人看来，甲的速度是多大？方向如何？反之，从甲船的人看来，乙的速度又是多大？方向如何？



解：(1)建立如图所示坐标系，则可知，

$\vec{v}_{甲地}=10\hat{i},\vec{v}_{乙地}=-5\hat{j},$

$\therefore\vec{v}_{甲乙}=\vec{v}_{甲地}+\vec{v}_{地乙}=\vec{v}_{甲地}-\vec{v}_{乙地}=10\hat{i}+5\hat{j},$

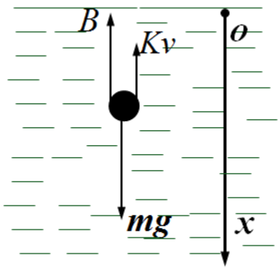
可知，甲相对于乙船的速度大小为：$\sqrt{10^2+5^2}=11.2m/s,$

甲相对于乙船的速度方向可由其与 x 轴正向的夹角□ 来确定：$\alpha=arctg0.5,$

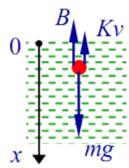
(2)同理可知，$\vec{v}_{乙甲}=-10\hat{i}-5\hat{j},$ 方向与 $\vec{v}_{甲乙}$ 相反。

第二章 牛顿运动定律

2. 有一小球在水中竖直沉降，已知小球的质量为 m，水对小球的浮力为 B，浮力小于重力。水对小球的阻力 R 正比于小球的速率，$\boldsymbol{R=-Kv}$，式中负号表示阻力，常数 $\boldsymbol{K>0}$。在初始时刻 $\boldsymbol{t_0=0}$ 将小球浸没在水中，小球初速度 $\boldsymbol{v_0=0}$。求 t 时刻小球在水中竖直沉降的速度和下沉的距离。



解：如图建立竖直向下 x 轴，原点位于小球初始位置。对小球作受力分析：重力 mg，竖直向下；浮力 B，竖直向上；粘性力 R，竖直向上。根据牛顿第二定律，



$mg-B-Kv=ma=m\dfrac{dv}{dt}$，即

$$\frac{dv}{dt}=\frac{mg-B-Kv}{m}$$

令 $v_T=\dfrac{mg-B}{K}$，于是 $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{K(v_T-v)}{m}$ 或 $\dfrac{dv}{v_T-v}=\dfrac{K}{m}dt$。

对上式两边积分，并代入初始条件，$t_0=0$ 时，小球初速 $v_0=0$，有

$$\int_0^v\frac{dv}{v_T-v}=\int_0^t\frac{K}{m}dt\Rightarrow\ln\frac{v_T-v}{v_T}=-\frac{K}{m}t$$

$$\Rightarrow v_T-v=v_Te^{-\frac{K}{m}t}$$

因此小球速度随时间变化的关系为

$$v=v_T(1-e^{-\frac{K}{m}t})=\frac{mg-B}{K}(1-e^{-\frac{K}{m}t})$$

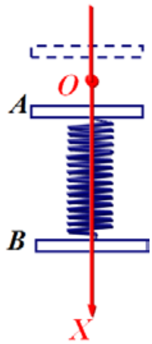
对上式两边积分，并代入初始条件当 $t_0=0$ 时，小球坐标 $x_0=0$，有

$$x=0+\int_0^v v\mathrm{d}t=\int_0^t v_T\left(1-e^{-\frac{K}{m}t}\right)\mathrm{d}t=v_Tt+\frac{m}{K}v_T\left(e^{-\frac{K}{m}t}-1\right)$$

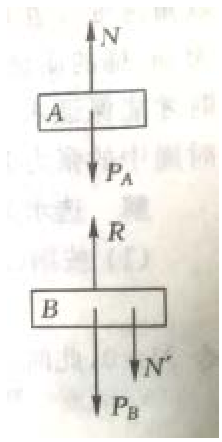
因此小球速度随时间变化的关系为

$$x=\frac{mg-B}{K}\left(\frac{m}{K}e^{-\frac{K}{m}t}-\frac{m}{K}+t\right)$$

1. 重物 A 和 B 分别重 $\boldsymbol{G_A = 200N}$ 和 $\boldsymbol{G_B = 400N}$，并以弹簧互相连接。重物 A 沿铅垂线做简谐运动。以 A 的平衡位置为坐标原点，取坐标轴正向向下，如图所示。A 的的运动学方程为 $\boldsymbol{x = h\cos\omega t}$，其中振幅 $\boldsymbol{h = 1.0\times10^{-2}m}$，圆频率 $\boldsymbol{\omega = 8\pi}$ rad/s。弹簧的质量不计。求：(1)弹簧对 A 的作用力 N 的最大值和最小值；(2)B 对支撑面的压力的最大值和最小值。



解：取 A、B 为研究对象，A、B 受力如图。



(1) 按图有

$$P_A - N = m_A a = m_A \frac{d^2x}{dt^2} = -m_A h w^2 \cos wt$$

$$N = P_A + m_A h w^2 \cos wt = m_A w^2 x + P_A$$

A 在最低位置时， $x = h$，这时 $a = -hw^2$，N 有最大值

$$N_{\max} = P_A + m_A w^2 h = P_A(1 + \frac{w^2 h}{g}) = 328.8N$$

A 在最高位置时， $x = -h$，这时 $a = hw^2$，N 有最小值

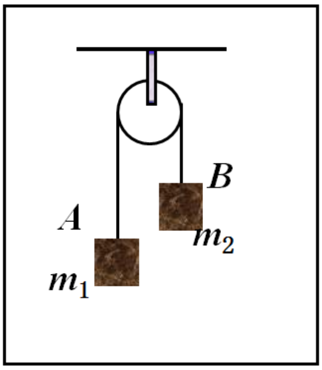
$$N_{\min} = P_A - m_A w^2 h = P_A(1 - \frac{w^2 h}{g}) = 71.2N$$

(2) B 对支承面压力的最大值和最小值分别为

$$R_{\max} = P_B + |N_{\max}| = 728.8N$$

$$R_{\min} = P_B + |N_{\min}| = 471.2N$$

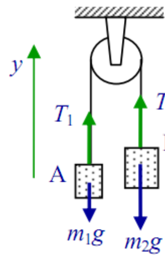
3. 电梯中有一质量可以忽略的滑轮，轮轴无摩擦，两侧用轻绳悬挂着质量分别为 $\boldsymbol{m_1}$ 和 $\boldsymbol{m_2}$ 的重物 A 和 B。(1)当电梯匀速上升时，求绳中张力和物体 A 相对于地面的加速度。(2)当电梯以加速度 $\boldsymbol{a_r}$ 上升时，求绳中张力和物体 A 相对于地面的加速度。



解：以 A 和 B 为研究对象，分别进行受力分析，建立 y 轴竖直向上，绳子和滑轮无质量，轮轴无摩擦，因此

$T_1 = T_2 = T$

根据牛顿第二定律，有



$T - m_1 g = m_1 a_1$， $T - m_2 g = m_2 a_2$

(1)电梯是惯性系，绳子不可伸长： $a_1 = -a_2$

与牛顿第二定律的方程联立，解得

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g，\quad a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

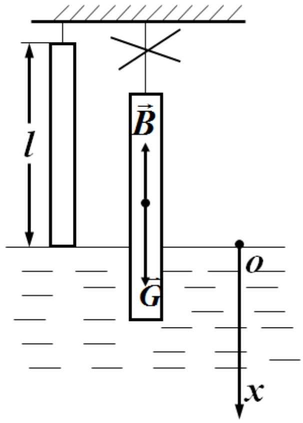
(2)地面是惯性系，由于绳子不可伸长，A、B 两质点相对于电梯的加速度 a_{1r} 和 a_{2r} 大小相等，方向相反： $a_{2r} = -a_{1r}$，

$a_1 = a_{1r} + a_r$，$a_2 = a_{2r} + a_r$

与牛顿第二定律的方程联立，解得

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(a_r + g)，\quad a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + \frac{2m_2 a_r}{m_1 + m_2}$$

4. 密度为 ρ 的细棒，长度 l，面积为 1，上端用细线悬着，下端紧贴着密度为 ρ' 的液体表面。现剪断悬线，求细棒恰好全部没入水中时的沉降速度。设液体没有粘性。



解：以棒为研究对象，在下沉的过程中，受力如图：
以液面为原点，竖直向下建立坐标系。
当棒的最下端与水面距离 x 时，浮力大小为（截面积为 1）： $B=\rho' xg$，
此时棒受到的合外力为： $F=mg-\rho' xg=g(\rho l-\rho' x),$

利用牛顿定律建立方程： $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g(\rho l-\rho' x),$

要求速度 v 与位置 x 的关系式，消去时间 t：

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=g(\rho l-\rho' x)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v,$$

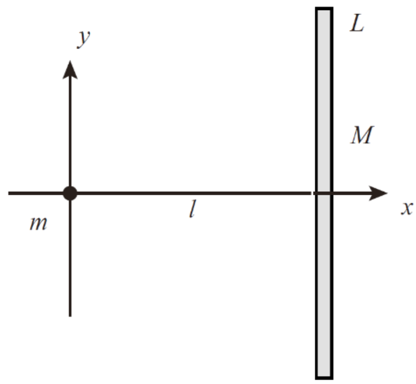
分离变量： $\rho lv\,\mathrm{d}v=g(\rho l-\rho' x)\mathrm{d}x,$

$$\int_0^v \rho lv\ \mathrm{d}v=\int_0^l (g\rho l-g\rho' x)\mathrm{d}x$$

$$\rho lv^2=2\rho gl^2-\rho' gl^2,$$

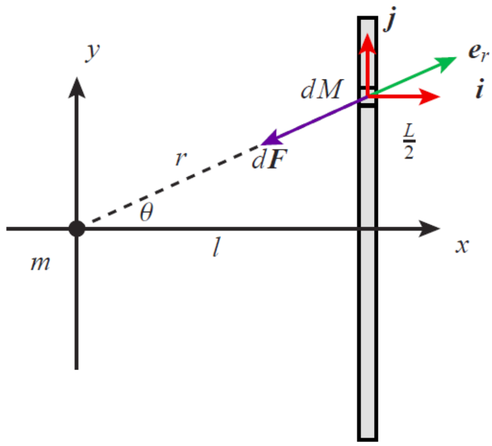
$$\therefore\quad v=\sqrt{\frac{2\rho gl-\rho' gl}{\rho}}.$$

5. 如图，一质点 m 旁边放一根长度为 L、质量为 M 的匀质杆，质点位于细杆的中垂线上，离杆的距离为 l。求：细杆间受到质点的万有引力。



解：如下图建立坐标，取细杆上长为 dy 的一段，质量为

$$dM = \eta dy = \frac{M}{L}dy$$



其受到质点的引力为

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{F} &= -G\frac{mdM}{r^2}\boldsymbol{e}_r \\ &= -G\frac{mM}{r^2L}dy\boldsymbol{e}_r \end{aligned}$$

x,*y* 方向的分量为

$$dF_x = -G\frac{mM}{r^2L}\cos\theta dy$$

$$dF_y = -G\frac{mM}{r^2L}\sin\theta dy$$

注意几何关系

$$y = \tan\theta, \quad dy = \frac{l}{\cos^2\theta}d\theta, \quad r = \frac{l}{\cos\theta}$$

于是 x 方向的合力为

$$\begin{aligned} F_x &= -G\frac{mM}{lL}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta \\ &= -G\frac{mM}{lL}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{aligned}$$

几何关系

$$-\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+l^2}}$$

代入角度，得到 x 方向的合力为

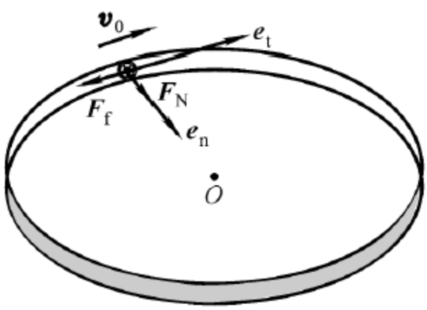
$$F_x = -G\frac{mM}{l\sqrt{\frac{L^2}{4}+l^2}}$$

负号代表方向向左。由对称性可知，y 方向合力的积分一定为零。

6. 光滑的水平桌面上放置一半径为R的固定圆环，物体紧贴环的内侧作圆周运动，其摩擦因数为μ，开始时物体的速率为v_0。

求：(1) t时刻物体的速率；

(2) 当物体速率从v_0 减少到$\frac{1}{2}v_0$时，物体所经历的时间及经过的路程。



解：(1) 设物体质量为m,取图中所示的自然坐标,按牛顿定律,有

$$F_N = ma_n = \frac{mv^2}{R}$$

$$F_{\mathrm{f}}=-ma_t=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

由分析中可知,摩擦力的大小$F_{\mathrm{f}}=\mu F_N$,由上述各式可得

$$\mu\frac{v^2}{R}=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

取初始条件$t=0$时$v=v_0$,并对上式进行积分,有

$$\int_0^t \mathrm{d}t=-\frac{R}{\mu}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$$

$$v=\frac{Rv_0}{R+v_0\mu t}$$

(2) 当物体的速率从v_0减少到$1/2v_0$时,由上式可得所需的时间为

$$t'=\frac{R}{\mu v_0}$$

物体在这段时间内所经过的路程

$$s=\int_0^{t'}v\mathrm{d}t=\int_0^{t'}\frac{Rv_0}{R+v_0\mu t}\mathrm{d}t$$

$$s=\frac{R}{\mu}\ln 2$$

第三章 能量

1. 某弹簧不遵守胡克定律，若施力 F，则相应伸长 x，力与伸长的关系为 $F=2x+3x^2$(SI)，求：

(1) 将弹簧从定长 x_1=1m 拉伸到定长 x_2=2 m 时外力所需作的功;

(2) 将弹簧横放在水平光滑桌面上,一端固定,另一端系一个质量为 0.2kg 的物体,然后将弹簧拉伸到一定长 x_2=2m，再将物体由静止释放，求当弹簧回到 x_1=1m 时，物体的速率。

(3) 该弹簧的弹性力是保守力吗？为什么？

解： (1)由功的定义，力 F 所作的功为

$$\mathrm{A}=\int_{x_1}^{x_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{x_1}^{x_2}F\mathrm{d}x=\int_1^2(2x+3x^2)\mathrm{d}x=10(J)$$

(2)弹性力的大小等于外力的大小，即

$$f=F(\mathrm{x})=2\mathrm{x}+3x^2,$$

对物体应用动能定理：

$$\mathrm{A}=\int_{x_2}^{x_1}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{x_2}^{x_1}(-f)\mathrm{d}x=\int_2^1-(2x+3x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv^2-0$$

解得物体的速率：

$$\mathrm{v}=\sqrt{2A/m}=10(m/s)$$

(3) 是保守力，因为该力只与位置有关（或$\oint\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\equiv 0$）

2． 一质量为 m 的陨石从距地球表面高为 h 处由静止开始落向地面，忽略空气阻力，问：

(1)陨石从开始到落地的下落过程中，万有引力所作的功是多少？

(2)陨石落地时的速率多大？（设地球质量为 M，半径为 R，引力常数为 G）

解： (1)取地心为原点 O，从 O 到陨石的方向为 r 的正方向，陨石从高度 h 处落到地面时，引力所作功为

$$A_{引力}=\int_{R+h}^{R}\left(-G\frac{mM}{r^2}\right)\mathrm{d}r=-GmM\int_{R+h}^{R}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$=GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{GmMh}{R(R+h)}$$

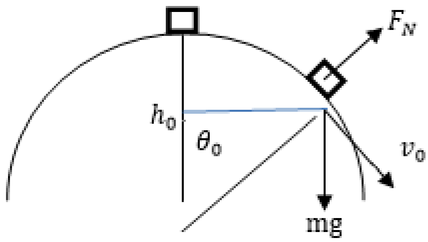
(2) 若取陨石为研究对象，根据动能定理，有

$$A_{引力}=\frac{1}{2}mv^2-0$$

故陨石落地时的速率为

$$v=\sqrt{2GM\frac{h}{R(R+h)}}$$

3. 由半径为 R 的光滑球面顶点处，物体 m 自静止开始滑落，求物体脱离球面时的临界角，即物体脱离球面处的半径与竖直方向的夹角。



解：取物体 m 和光滑球面为系统，物体下滑过程中，机械能守恒，取顶点处为势能零点，设物体脱离球面时距离顶点为 h_0，由图可知

$$h_0=R(1-cos\theta_0)$$

系统机械能守恒，而初始状态时总机械能为 0，故

$$\frac{1}{2}mv_0^2-mgh_0=0$$

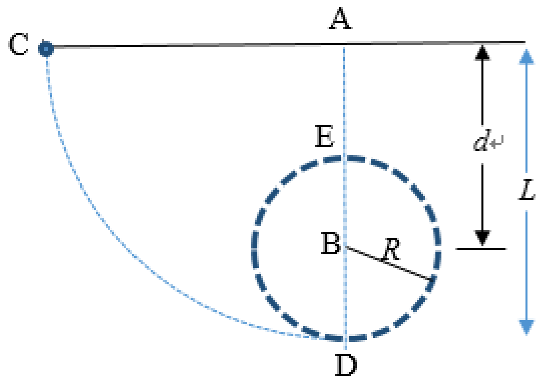
而物体脱离球面表面的临界条件为：支持力 F_N=0，即

$$\text{mgcos}\theta_0=m\frac{v_0^2}{R}$$

于是可解得

$$h_0=\frac{R}{3}，cos\theta_0=2/3$$

4. 有一个摆长为 L 的单摆，悬点在 A，在 A 的垂直下方置一个小钉 B，今使小球自 C 点释放，小球恰能绕 B 做圆周运动，问钉 B 与悬点 A 的距离 d 是多少？



解：不计阻力，小球自 C 至 D 点时的速度为

$$v_D = \sqrt{2gL}$$

小球恰能作圆周运动，则它在 E 点时的速度需恰好满足

$$\mathrm{mg} = \mathrm{m}\frac{v_E^2}{R}，故 v_E^2 = gR$$

由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}mv_E^2 + mg(2R)$$

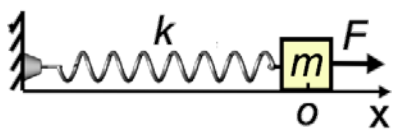
于是得到

$$\mathrm{R = 2L/5}$$

所以

$$\mathrm{d = L - R = 3L/5}$$

5. 如图所示，在墙壁上固定一个水平放置的轻弹簧，弹簧的另一端连一质量为 m 的物体，弹簧的劲度系数为 k，物体 m 与水平面间的摩擦系数为μ，开始时，弹簧没有伸长，现以恒力 F 将物体自平衡位置开始向右拉动，试求此系统所具有的最大势能。



解：此题须注意的是，势能最大的位置是弹簧拉升最长处，而不是合力为 0 处。弹簧拉升最长处，物体达到最远距离，这时物体的速度为 0，因而动能为 0。

以平衡位置为坐标原点 O，设物体达到最远处坐标为 x_{max}，合外力在过程中做功为

$$A = Fx_{max} - \mu mgx_{max}$$

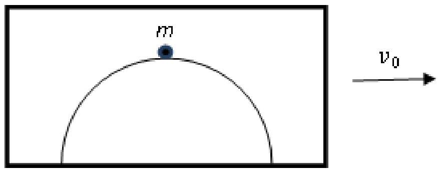
系统初始机械能为 0，终态仅有弹性势能，由功能原理

$$\mathrm{F}x_{max} - \mu mgx_{max} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

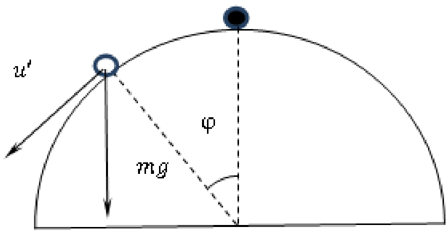
解得

$$x_{max} = \frac{2}{k}(F - \mu mg)，E_p = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{2}{k}(F - \mu mg)^2$$

6. 大质量车厢在水平地面上以 v_0 的速度匀速向右行驶，车厢内有一半径 R 的光滑半圆柱面，顶部有一质量为 m 的小球。开始时小球静止，如图所示，而后因微小扰动向左侧下滑离开圆柱面，试求地面系下看，过程中圆柱面支持力 N 对小球所作功。



解：车厢系中，小球向左滑离开圆柱面的方位角如图所示，应有



$$\mathrm{mg}\cos\varphi = \frac{mu'^2}{R},$$

$$\frac{1}{2}mu'^2 = mgR(1-\cos\varphi),$$

可解得：

$$\cos\varphi = \tfrac{2}{3}, \qquad u' = \sqrt{\tfrac{2}{3}gR}$$

地面系中，小球初速度$u_0 = v_0$，左滑离开圆柱面时的速度 $\boldsymbol{u}$ 的水平分量和竖直分量分别为：

$$u_x = v_0 - u'\cos\varphi, \quad u_y = u'\sin\varphi$$

由功能原理可以算得下滑过程中圆柱面支持力 N 对小球做功为

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}m\left(u_x{}^2 + u_y{}^2\right) - \left[mgR(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}mv_0{}^2\right]$$

可算得：$\mathrm{W} = -\frac{2}{3}mv_0\sqrt{\frac{2}{3}gR}$

第四章 动量

1. 假设一个质量为 0.5kg 的球被木棒击中，木棒对球的击打力满足抛物线规律，即为 t 的二次函数。已知 t =0.5ms 时，力 F(t)=0; t=2ms 时，F(t)=2200N 且 F'(t)=0。求木棒与球刚刚脱离接触的瞬间，球的速度是多大。

解：设 F(t)的曲线方程是

$$F(t)=at^2+bt+c$$

将条件代入可得

$$0.25a+0.5b+c = 0$$
$$4a+2b+c =2200$$
$$2at+b=4a+b=0$$

可解得

$$\mathrm{F(t)} = -\frac{8800}{9}t^2 + \frac{35200}{9}t - \frac{15400}{9}$$

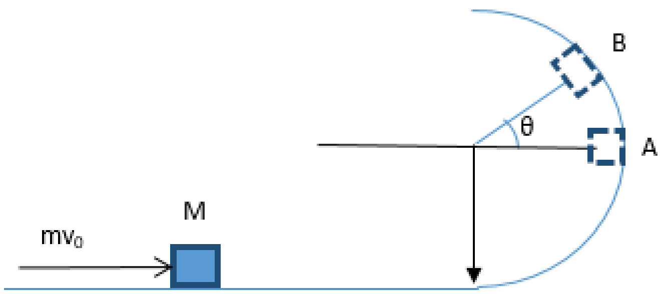
冲量

$$\mathrm{I} = \int_{0.5}^{3.5} F(t)dt = 4400N \cdot ms = 4.4N \cdot s$$

又$\mathrm{mv} - \mathrm{mv_0} = I$，其中$\mathrm{v_0} = 0$

可解得$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{m}} = 8.8\mathrm{m/s}$

2. 如图，质量 M=0.5kg 的物块，自半径 R=1.4m 的光滑圆弧轨道的 A 点由静止开始下滑，当它滑到光滑水平面 C 点时，有一个质量为 m=0.02kg 的子弹射入木块中，使它们一起沿轨道上升，上升到 B 点时脱离轨道，求子弹射入木块前的速度（g 取 10m/s^2, 已知$\theta = 30°$)）



解：设子弹射入前速度是 v_0,木块从 A 滑到 C 后速度是 v_1，子弹射入后共同速度是

v_2,由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = MgR，于是，\ v_1 = \sqrt{2gR}$$

由动量守恒定律

$$mv_0 - Mv_1 = (m+M)v_2$$

$$v_2 = \frac{mv_0 - M\sqrt{2gR}}{m+M}$$

由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}（M+m）v_2^2 = \frac{1}{2}（M+m）v_B^2 + (M+m)gR(1+sin\theta)$$

$$v_B^2 = v_2^2 - 2gR(1+sin\theta) = v_2^2 - 3gR$$

木块脱离时压力为零，即

$$(\mathrm{M}+\mathrm{m})\mathrm{g}\sin\theta = (M+m)\frac{v_B^2}{R}$$

$$解得\ v_B^2 = Rg\sin\theta = \frac{Rg}{2}$$

$$于是得到\quad v_2 = \sqrt{\frac{7}{2}gR}$$

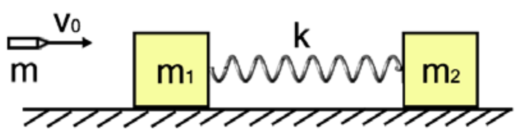
代入v_2，可解得

$$v_0 = \frac{M}{m}\sqrt{2gR} + \left(\frac{M}{m}+1\right)\sqrt{\frac{7}{2}gR} = 314.3\ \mathrm{m/s}$$

3. 如图所示，质量为 m_1 和 m_2 的两木块用劲度系数为 k 的弹簧相连，静止的放在光滑水平面上，今有一质量为 m 的子弹沿弹簧的轴线方向以速度 v_0 射入木块 m_1 后嵌在 m_1 内。试求：

(1) 弹簧的最大压缩长度。

(2) 木块 m_2 的最大速度和最小速度。



解：

(1) 设子弹 m 和木块 m_1 碰转后获得共同速度 v_{10}，根据水平方向动量守恒，有

$$\mathrm{m}v_0 = (m+m_1)v_{10}$$

故

$$v_{10}=\frac{mv_0}{m+m_1}$$

取 $m+m_1$，m_2 和弹簧 k 为系统，系统在运动过程中水平方向动量守恒，且等于质心的动量，设质心的速度为 v_c，则有

$$\mathrm{m}v_0=(m+m_1+m_2)v_c$$

$$v_c=mv_0/(m+m_1+m_2)$$

可见，系统质心在做惯性运动，选择质心参考系，碰撞后的瞬间，$m+m_1$ 和 m_2 在质心参考系中的速度分别是

$$v'_{10}=v_{10}-v_c=\frac{m_2}{m+m_1}\cdot\frac{mv_0}{m+m_1+m_2}$$

$$v'_{20}=0-v_c=-\frac{mv_0}{m+m_1+m_2}$$

此时弹簧尚未压缩，势能为零，因此系统机械能为

$$\mathrm{E}_1=\frac{1}{2}(m+m_1){v'_{10}}^2+\frac{1}{2}m_2{v'_{20}}^2$$

弹簧具有最大压缩长度 x_m 时，$m+m_1$ 和 m_2 在质心系中的速度为 0，系统机械能为

$$\mathrm{E}_2=\frac{1}{2}kx_m^2$$

由系统机械能守恒知上面两式相等，将v'_{10}和v'_{20}代入后可解得

$$x_m=mv_0\sqrt{\frac{m_2}{k(m+m_1)(m+m_1+m_2)}}$$

质心系中，当弹簧为原长，弹性势能为 0 时，木块 m_2 具有最大速度或最小速度，设此时 $m+m_1$ 的速度为v'_1，m_2 的速度为v'_2，取此为终态，由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}(m+m_1){v'_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v'_2}^2=\frac{1}{2}kx_m^2$$

质心系中，系统的总动量为 0，即

$$(\mathrm{m}+\mathrm{m}_1)v'_1+m_2v'_2=0$$

联立以上两式，并将x_m代入，可解得

$$v'_2=\pm\frac{mv_0}{m+m_1+m_2}$$

因此，在地面参照系中，m_2 的最大速度和最小速度为：

$$v_2=v'_2+v_c=\begin{cases}0,\\ \dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}\end{cases}$$

解法 2：子弹打入 m_1 的过程，动量守恒（注意此时机械能不守恒）：

$$\mathrm{m}v_0 = (m+m_1)v_1$$

此后，m+m_1 作为整体，与弹簧，m_2 构成的系统水平动量守恒，机械能守恒，当弹簧压缩至最短时，弹性势能最大，且，三者具有相同的速度，设该速度为v_2：

$$(m+m_1)v_1 = (m+m_1+m_2)v_2$$

$$\frac{1}{2}(m+m_1){v_1}^2 = \frac{1}{2}(m+m_1+m_2){v_2}^2 + \frac{1}{2}kx_m^2$$

解得

$$x_m = mv_0\sqrt{\frac{m_2}{k(m+m_1)(m+m_1+m_2)}}$$

(2) 当弹簧恢复原长时，弹簧弹力为 0，木块们水平方向不受力，加速度为 0，因而此时木块们的速度大小处于极值状态（即最大速度或者最小速度），用v'_1表示此时(m+m_1)速度，用v'_2表示此时 m_2 速度，则有

$$(m+m_1)v_1 = (m+m_1)v'_1 + m_2v'_2$$

$$\frac{1}{2}(m+m_1){v_1}^2 = \frac{1}{2}(m+m_1){v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2$$

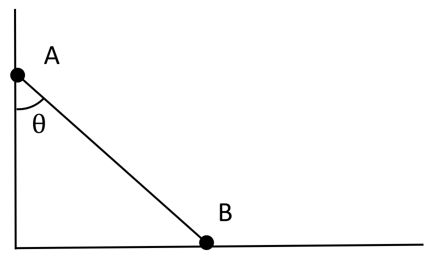
联立两式，得

$$v'_2[(m+m_1+m_2)v'_2 - 2mv_0] = 0$$

于是得到

$$v'_2 = \begin{cases} 0, & \text{最小速度} \\ \dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}, & \text{最大速度} \end{cases}$$

4. 系统如图所示，A 和 B 是两个质量均为 m 的小球，其间是一根长为l的轻杆，竖直线代表竖直光滑墙，水平线代表水平光滑地面，开始$\theta=0$，A、B 及杆静止，而后因微小扰动而下滑，试问θ达到何值时 A 球离墙？



解：在θ角时设 A 向下的速度为v_A, B 向右的速度为v_B，以 A、B 及杆为系统，由

于墙和地面光滑，没有摩擦力，而墙和地面对系统的正压力没有做功，因此系统的机械能守恒，即有

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2+\frac{1}{2}mv_B{}^2=mgl(1-\cos\theta)$$

由于杆长固定不变，A 和 B 沿杆方向的速度相同，故有

$$v_A\cos\theta=v_B\sin\theta$$

联立以上两式可解的

$$v_B=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}\cdot\cos\theta$$

所以系统的水平方向的动量为（令$u=\cos\theta$）：

$$p_x=0+mv_B=m\sqrt{2gl(1-u)}\cdot u$$

当小球 A 刚开始离开墙面时，墙面对 A 的正压力刚好达到极大值，则系统的水平方向动量的变化率也刚好变成零，即此时有$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}u}$=0

得$m\sqrt{2gl}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}\cdot u+m\sqrt{2gl(1-u)}=0$

解得此处为$u=\cos\theta=2/3$，即当夹角 $\theta=\arccos\frac{2}{3}$ 时 A 球离墙。

5．一个箭体质量为 M_0（不含燃料部分），载有燃料 m_0 的火箭在太空中由静止开始点火，燃烧后的炽热气体相对于火箭以 u 的速度向后喷出。求

(1) 燃料耗尽时火箭的速度是多少？

(2) 若火箭在均匀重力场 g 中垂直起飞，T 时间后燃料耗尽，则燃料耗尽瞬间火箭速度是多大？

解：(1)设某一中间时刻 t，火箭的质量为 M（含箭体和 t 时刻剩余燃料），速度为 v，由题意知在 dt 时间后，喷出的燃料质量为 dm，则火箭的剩余质量为 M–dm，速度为 v+dv，喷出的燃料为 dm，速度为 v-u，

则由动量守恒有：Mv= (M – dm)(v+dv) + dm(v-u)略去高阶小量 dm*dv，化简得

$$\mathrm{M}\mathrm{d}v-u\mathrm{d}m=0\text{，即 }\mathrm{M}\mathrm{d}v+u\mathrm{d}M=0\text{，（因为 }\mathrm{dm}=-\mathrm{dM}\text{）}$$

$$\mathrm{d}v=-u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

$$\text{两边积分，得}\int_0^v\mathrm{d}v=\int_{M_0+m_0}^{M_0}-u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

即，燃料耗尽时，火箭速度 $v=u\ln\frac{M_0+m_0}{M_0}$

(2)t 到 t+dt 过程中，由动量定理，有

$$-Mg\mathrm{d}t=(\mathrm{M}-\mathrm{dm})(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{dm}(v-u)-\mathrm{M}v$$

略去高阶量 $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$，得 $-Mg\mathrm{d}t = M\mathrm{d}v - u\mathrm{dm}$

同样的，因 $\mathrm{d}m = -\mathrm{d}M$

我们得到：

$$-Mg\mathrm{d}t = M\mathrm{d}v + u\mathrm{dM}$$

即

$$\mathrm{d}v = -g\mathrm{d}t - u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

积分

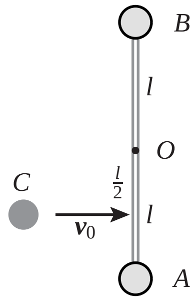
$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^T -g\mathrm{d}t - \int_{M_0+m_0}^{M_0} u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

得

$$v = -\mathrm{gT} + u\ln\frac{M_0 + m_0}{M_0}$$

第五章 角动量、刚体

1. 光滑水平面上，质量均分为m的两个小钢球A、B固定在一个长为$2l$的轻质硬杆的两端，中点O处固定可使其在水平面内转动。初始杆静止，一质量为m的泥球C以水平速度$\boldsymbol{v}_0$垂直于杆的方向与OA连线中点处发生碰撞，碰后与杆粘在一起。求碰后杆的转动角速度。



解：

选取O为参考点，碰撞前体系的总角动量$\boldsymbol{J}_0$即C对O的角动量，取逆时针方向为正

$$J_0 = \frac{l}{2} m v_0$$

碰撞后速度为$v_A = v_B = 2v_C = \omega l$

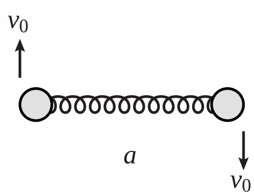
碰后体系的总角动量为

$$\begin{aligned} J &= lmv_A + lmv_B + \frac{l}{2} m v_C \\ &= 2ml^2\omega + \frac{l}{4} ml^2\omega \\ &= \frac{9}{4} ml^2\omega \end{aligned}$$

碰撞前后体系角动量守恒，$J_0 = J$，因此解得

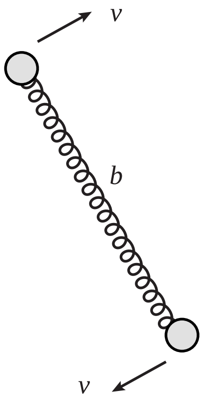
$$\omega = \frac{2}{9}\frac{v_0}{l}$$

2. 质量为m的两个小球由一劲度系数为k的轻弹簧连接，放置在水平光滑平面。初始时弹簧为原长a，两球的初速度等大反向且垂直于连线方向。随后，弹簧达到的最大长度为$b = 2a$。求：两球的初速度大小。



解： 体系对称，选取中点O为参考点。整个过程中在有心力的作用下，系统的角动量守恒。达到最大伸长量时，速度v垂直于弹簧，因此

$$b \times mv = a \times mv_0$$



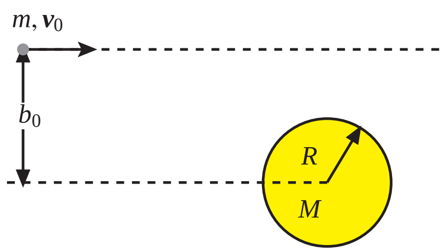
结合初末态能量守恒，有

$$2\times\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(b-a)^2=2\times\frac{1}{2}mv_0^2$$

并且注意$b=2a$，结合以上各式解得

$$v_0=\sqrt{\frac{2k}{3m}}a$$

3. 宇宙飞船从远处以初速度$\boldsymbol{v}_0$朝质量为M、半径为R的星球无动力飞行。星球中心到$\boldsymbol{v}_0$方向线的距离b称为瞄准距离（一定需要$b\geqslant R$，否则飞船一定会落到星球上）。当$b>R$时，飞船不会被星球俘获，则最小瞄准距离b_0应该是多少？



解：

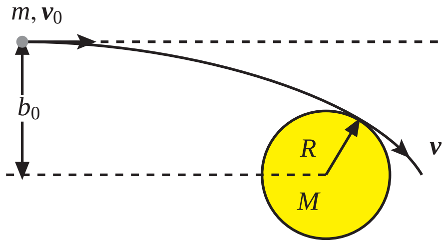
b_0对应的轨道应该恰好与星球表面相切，根据角动量和能量守恒

$$Rmv=b_0mv_0$$

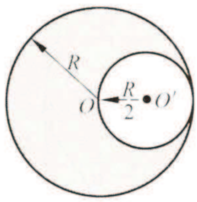
$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}mv_0^2$$

解得

$$b_0=\sqrt{1+2G\frac{M}{Rv_0^2}}R$$



4. 从一个半径为R的均匀薄板上挖去一个直径为R的圆板，所形成的圆洞中心O'在距原板中心O处$\frac{R}{2}$处，所剩薄板的质量为m。求此薄板对于通过原中心O而与板面垂直的轴的转动惯量。



解：

设原大盘质量为M，挖去的半径$\frac{R}{2}$的盘质量为m'，则剩余薄板质量$m = M - m'$。由几何关系容易得到

$$M = \frac{4}{3}m, \quad m' = \frac{1}{3}m$$

设想，剩余薄板由质量为M的原板和质量为$-m'$的小圆板组成，二者对各自对称轴的转动惯量为

$$I_M = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{2}{3}mR^2$$

$$I'_{m'} = \frac{1}{2}(-m') \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = -\frac{1}{24}mR^2$$

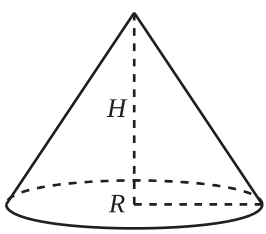
由平行轴定理，可得小盘对于O点的转动惯量

$$I_{m'} = I'_{m'} + (-m') \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = -\frac{1}{24}mR^2 - \frac{1}{12}mR^2 = -\frac{1}{8}mR^2$$

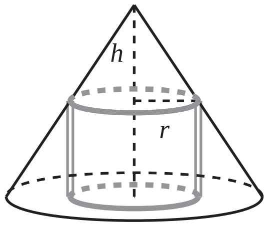
剩余薄板的转动惯量为

$$I_m = I_M + I_{m'} = \frac{13}{24}mR^2$$

5. 质量为m的实心匀质圆锥，高为H，底面圆半径为R。求圆锥绕自身对称轴的转动惯量。



解：



圆锥体积

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

密度为

$$\rho = \frac{3m}{\pi R^2 H}$$

圆锥内部半径r处，厚度为dr的一柱壳的体积为

$$dV = 2\pi r(H - h)dr$$

注意几何关系$\frac{h}{r} = \frac{H}{R}$

$$dV = 2\pi r H\left(1 - \frac{r}{R}\right)dr$$

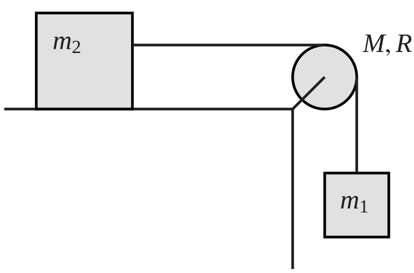
该段柱壳质量为

$$dm = \rho dV = \frac{6m}{R^2}\left(r - \frac{r^2}{R}\right)dr$$

转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \frac{6m}{R^2}\int_0^R \left(r^3 - \frac{r^4}{R}\right)dr \\ &= \frac{6m}{R^2}\left(\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{5}R^4\right) \\ &= \frac{3}{10}mR^2 \end{aligned}$$

6. 系统各参数如图所示，水平面光滑，绳子与滑轮无相对滑动，转轴无摩擦。求物块的运动加速度。

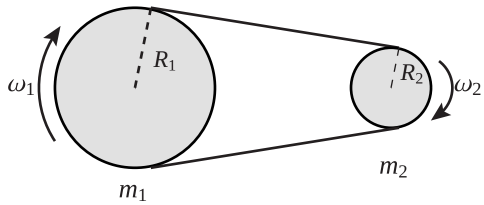


解：

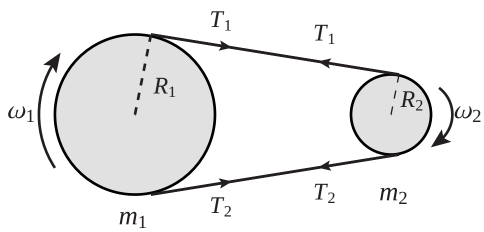
$$
\begin{cases}
m_1 g - T_1 = m_1 a \\
T_1 R - T_2 R = I\alpha, \quad I = \dfrac{1}{2}MR^2 \\
T_2 = m_2 a \\
a = \alpha R
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow a = \frac{2m_1}{2(m_1 + m_2) + M} g$$

7. 传送带结构中，两个均匀圆盘绕各自的轴转动，两转轴平行，且用粗糙皮带相连。圆盘半径分别为R_1, R_2，质量分别为m_1, m_2。初始时两圆盘各自的角速度如图所示，ω_1, ω_2同向。在皮带摩擦力的作用下，两圆盘最终与皮带达到无相对滑动。求两盘最终的角速度ω_1', ω_2'。



解：



末态两圆盘外沿的线速度大小相同，满足

$$\omega_1' R_1 = \omega_2' R_2$$

设皮带拉直的部分的拉力分别为T_1和T_2，两对摩擦力对两圆盘的力矩产生的冲量矩为

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int R_1(T_1 - T_2)dt = I_1(\omega_1' - \omega_1) \\
\displaystyle\int R_2(T_2 - T_1)dt = I_2(\omega_2' - \omega_2)
\end{cases}
$$

消去$\int (T_1 - T_2)dt$得到

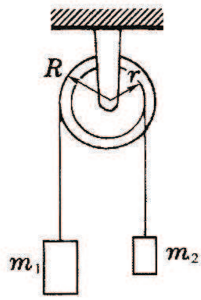
$$-\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1(\omega_1' - \omega_1)}{I_2(\omega_2' - \omega_2)}$$

可以解得

$$
\begin{cases}
\omega_1' = \dfrac{R_2(I_1\omega_1 R_2 - I_2\omega_2 R_1)}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} = \dfrac{m_1 R_1 \omega_1 - m_2 R_2 \omega_2}{R_1(m_1 + m_2)} \\
\omega_1' = \dfrac{R_1(I_2\omega_2 R_1 - I_1\omega_1 R_2)}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} = \dfrac{m_2 R_2 \omega_2 - m_1 R_1 \omega_1}{R_2(m_1 + m_2)}
\end{cases}
$$

上式的第二步用到了转动惯量的表达式。

8. 如图，在阶梯状的圆柱形滑轮上朝相反的方向绕上两根轻绳，绳端各挂物体m_1, m_2，滑轮的转动惯量为I，求物体的加速度和绳中的张力。



解：

取逆时针方向为正，动力学方程为

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ T_1 R - T_2 r = I\alpha \end{cases}$$

结合运动学关系

$$a_1 = \alpha R, \quad a_2 = \alpha r$$

由此解得

$$a_1 = \frac{(m_1 R - m_2 r)R}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} g, \quad a_2 = \frac{(m_1 R - m_2 r)r}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} g$$

$$\alpha = \frac{m_1 R - m_2 r}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} g$$

$$T_1 = \frac{I + m_2 r(R + r)}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_1 g, \quad T_2 = \frac{I + m_2 R(R + r)}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_2 g$$

9. 一均匀细杆长为l、质量为m，放置在摩擦系数为μ的水平桌面上。杆以初始角速度ω_0绕中心O且垂直于桌面的轴转动，求：

(1) 作用在杆上的摩擦力矩

(2) 经过多长时间杆才会停止转动？

解：(1) 杆的线密度为$\eta = \frac{m}{l}$，长为dr的一段质量为$dm = \eta dr$

以O为坐标原点，在杆上位置r处，长度为dr的一段，摩擦力矩为

$$dM = r \times \mu g dm = \frac{\mu m g}{l} r dr$$

总摩擦力矩为

$$\begin{aligned} M &= \int dM \\ &= 2 \times \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mu m g}{l} r dr \\ &= \frac{1}{4} \mu m g l \end{aligned}$$

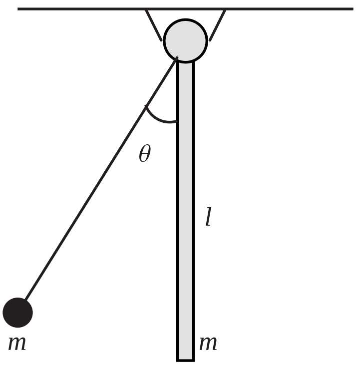
(2) 由角动量定理

$$\int -M dt = 0 - I\omega_0$$

$$-\frac{1}{4}\mu mgl\Delta t = -\frac{1}{12}ml^2\omega_0$$

$$\Delta t = \frac{\omega_0 l}{3\mu g}$$

10. 长为l质量为m的匀质细杆可绕通过其上端的水平固定轴O转动。另一质量为m的小球，用长为l的轻绳系于O轴上。初始时杆竖直静止，将小球水平拉开一角度，使其自由下摆，并与细杆下端发生完全弹性碰撞。杆的最大摆角为$\frac{\pi}{3}$，求小球初始拉开的角度θ。



解：

(1) 轻杆上摆过程中，机械能守恒

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}mgl\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

(2) 球杆弹性碰撞过程中，角动量、机械能守恒

$$lmv_0 = lmv + \frac{1}{3}ml^2\omega$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\times\omega^2$$

消去v解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gl}$$

(3) 摆球下摆过程中，机械能守恒

$$mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

解得

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

第六章 机械振动

1. 一物体作简谐振动，其速度最大值 v_m=0.03 m/s，其振幅 A=2cm。若 t=0 时，物体位于平衡位置且向 x 轴的负方向运动。求：

(1) 振动周期 T；

(2) 加速度的最大值 a_m；

(3) 振动方程的数值式。

解：(1) $v_m=\omega A$

$\therefore \omega=v_m/A=1.5\text{s}^{-1}$

$\therefore T=2\pi/\omega=4.19$ s

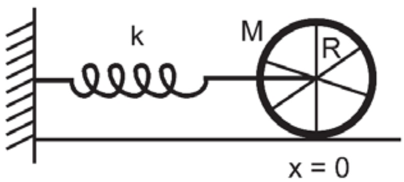
(2) $a_m=\omega^2 A=v_m\omega=4.5\times10^{-2}$ m/s^2

(3) $\phi=\frac{1}{2}\pi$， $x=0.02\cos(1.5t+\frac{1}{2}\pi)$ m

2. 如图所示，有一轮子质量为 M，与劲度系数为 k 的弹簧的一端连接，在竖直平面内沿水平方向运动（质心围绕着平衡点 x=0 处作简谐运动）。弹簧以及轮子辐条的质量可忽略，轮子与地面无相对滑动。求

(1)用 k,M,R,x 给出系统总能量的表达式（因为轮子辐条质量可忽略，轮子的转动惯量为 MR^2）;

(2)给出轮子围绕平衡点附近的简谐振动的角频率。



解：(1)总能量为弹簧势能加上轮子的动能

$$E_{tot}(x)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\frac{\dot{x}^2}{R^2}=\frac{1}{2}kx^2+M\dot{x}^2$$

(2)根据能量守恒，dE/dt= 0. 可以得到

$$2M\ddot{x}+kx=0$$

所以 有

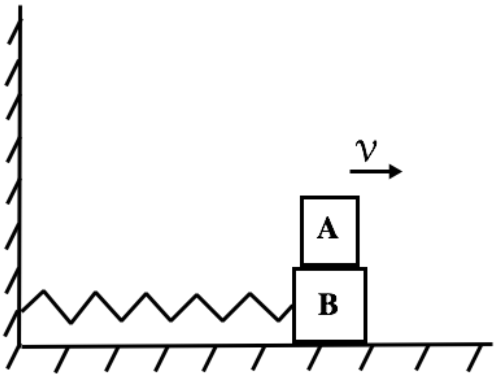
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}}$$

3. 如图示，质量为 m 的砝码 A 放置在质量为 M 的滑块 B 上，B 与弹簧相连，它们一起在光滑的水平面上作简谐运动，弹簧的劲度系数为 k，砝码与滑块在振动过程中不发生相对运动，已知 t=0 时刻，滑块恰经过平衡位置且速度为 v. 求

(1) 滑块的振动方程;

(2) 砝码与滑块之间的最大静摩擦系数μ_m最小值;

(3) 请给出任意时刻 t，系统的动能和势能.



解：（1）以平衡位置为原点，水平向右为x正方向建立坐标系。设滑块的振动方程为

$$x = A_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

则速度

$$v_x = -A_m \omega \sin(\omega t + \phi_0)$$

已知弹簧的劲度系数为k，即 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}}$，
又条件$t=0$时 $x=0, v_x=v$ 得到

$$\phi_0=-\frac{\pi}{2} \text{ 且 } A_m=v/\omega=v\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

又 代入得到振动方程为

$$x=A_m\cos(\omega t+\phi_0)=v\sqrt{\frac{m+M}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) 由简谐振动的加速度

$$a=-A_m\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)$$

可知 最大加速度$a_m=A_m\omega^2=v\sqrt{\frac{k}{m+M}}$，而A的加速度由静摩擦力提供，所以最大静摩擦力

$$f_m=ma_m=mv\sqrt{\frac{k}{m+M}}\le\mu_m mg$$

所以

$$\mu_m\ge\frac{v}{g}\sqrt{\frac{k}{m+M}}.$$

(3) 系统动能

$$E_k(t)=\frac{1}{2}(m+M)v_x^2=\frac{1}{2}(m+M)v^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

系统势能

$$E_p(t)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kv^2\frac{m+M}{k}\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}(m+M)v^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

（或者用$E_p(t)=E-E_k(t)=\frac{1}{2}(m+M)v^2-E_k(t)$获得。）

4. 已知两谐振动的运动方程：$x_1=3\cos\left(10t+\frac{\pi}{3}\right)$，$x_2=\sqrt{3}\cos\left(10t+\frac{5\pi}{6}\right)$。式中各物理量为国际单位制(SI). 求

(1) 合成振动的振幅和初位相;

(2) 如另有第三个谐振动$x_3 = 9\cos(10t + \varphi_3)$，则$\varphi_3$应为何值，才能使$x_1 + x_3$的合振动振幅最大？又$\varphi_3$应为何值，才能使$x_1 + x_2 + x_3$的合振动振幅最小？

解：（1）由振动合成公式（或者用旋转矢量方法），可以获得合成振动的振幅

$$A_{12} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} = 2\sqrt{3},$$

初始相位

$$\phi_{12} = \arctan\frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)} = \frac{\pi}{2}$$

（2）$x_1 + x_3$的合振动振幅

$$A_{13} = \sqrt{A_1^2 + A_3^2 + 2A_1A_3\cos(\phi_3 - \phi_1)} = 2\sqrt{3},$$

当$\cos(\phi_3 - \phi_1) = 1$, 即$\phi_3 = \phi_1 = \pi/3$时，$x_1 + x_3$的合振动振幅最大。
又$x_1 + x_2 + x_3$的合振动振幅

$$A_{123} = \sqrt{A_{12}^2 + A_3^2 + 2A_{12}A_3\cos(\phi_3 - \phi_{12})},$$

当$\cos(\phi_3 - \phi_{12}) = -1$, 即$\phi_3 = \pi + \phi_{12} = 3\pi/2$时，$x_1 + x_2 + x_3$的合振动振幅最小。

第七章 机械波

1. 已知一平面简谐波的表达式为 $y = 0.02\cos(4\pi t + 2\pi x)(SI)$.

(1) 求该波的波长λ，频率ν和波速u的值;

(2) 求$x_1 = 0.2\text{m}$ 处和$x_2 = 0.7\text{m}$ 处二点振动的相位差；

(3) 写出$t = 0.6$ s 时刻各波峰位置的坐标表达式，并求出此时离坐标原点最近的那个波峰的位置x_m；

(4) 求$t = 0.6$ s 时离坐标原点最近的那个波峰通过坐标原点的时刻 t。

解：(1)对比机械波公式 $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0]$，得到$A = 0.02\ m,\ \omega = 4\pi\ rad/s,\ \phi_0 = 0\ rad,\ u = -2\ m/s.$

波速大小为 2 m/s，方向朝 x 负方向传播。 所以 $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 2\ Hz,$

又根据$u = \nu\lambda$,得到

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 1\ m.$$

(2) $\Delta\phi = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda = \pi$

(3) $t = 0.6$ s 时，波峰的位置满足 $4\pi\cdot 0.6 + 2\pi x_k = 2k\pi\ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 即 $x_k = k - 1.2\ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 当 k=1 时 $|x_k|$最小，离原点最近，所以$x_m = -0.2$ m

(4) 波峰从原点传播到$x = -0.2\text{m}$所需要的时间为$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{0.2}{2} = 0.1\ s.$ 波沿着 x 负方向传播的，波峰先经过原点，所以 经过坐标原点的时刻 $t = 0.6 - 0.1 = 0.5\ s.$

2. 平面简谐波沿 x 轴正方向传播，振幅为 2cm，频率为 50Hz，波速为 200m/s。在 t=0 时，x=0 处的质点正在平衡位置向 y 轴正方向运动，求 x=4m 处媒质质点振动的表达式及该点在 t=2s 时的振动速度。

解：设 $x = 0$ 处质点振动的表达式为

$$y_0 = A\cos(\omega t + \phi)$$

已知 t=0 时，y_0=0，且 v_0>0,所以

$$\phi = -\frac{1}{2}\pi$$

$$\therefore\ y_0 = A\cos(2\pi\nu t + \phi) = 2\times10^{-2}\cos(100\pi t - \frac{1}{2}\pi)\quad \text{(SI)}$$

由波的传播概念，可得该平面简谐波的表达式为

$$y_0 = A\cos(2\pi\nu t + \phi - 2\pi\nu x/u) = 2\times10^{-2}\cos(100\pi t - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi x)\quad \text{(SI)}$$

x=4m 处的质点在 t 时刻的位移

$$y = 2\times10^{-2}\cos(100\pi t - \frac{1}{2}\pi)\quad \text{(SI)}$$

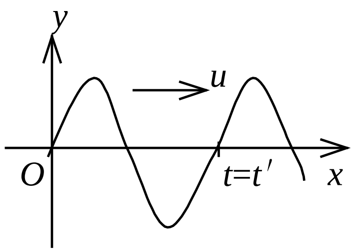
该质点在 t = 2 s 时的振动速度为

$$v = -2\times10^{-2}\times100\pi\sin(200\pi - \frac{1}{2}\pi) = 6.28\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3. 一平面简谐波沿 x 轴正向传播，其振幅为 A，频率为□ □，波速为 u。设 t = t′ 时刻的波形曲线如图所示。求：

(1) x = 0 处质点振动方程；

(2) 该波的表达式。



解：(1) 设 $x = 0$ 处质点的振动方程为：$y = A\cos(2\pi\nu t + \phi)$

由图可知，$t = t'$ 时，$y = A\cos(2\pi\nu t' + \phi) = 0$

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -2\pi\nu A\sin(2\pi\nu t' + \phi) < 0$$

所以：

$$2\pi\nu t' + \phi = \pi/2,\quad \phi = \frac{1}{2}\pi - 2\pi\nu t'$$

x = 0 处的振动方程为：

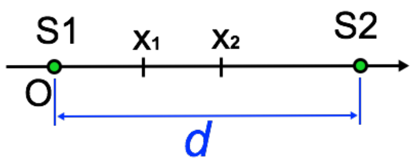
$$y = A\cos[2\pi\nu(t - t') + \frac{1}{2}\pi]$$

(2) 该波的表达式为

$$y = A\cos[2\pi\nu(t - t' - x/u) + \frac{1}{2}\pi]$$

4. 如图所示，两相干波源在 x 轴上的位置为 S1 和 S2，其间距离为 d = 30 m，S1 位于坐标原点 O。设波只沿 x 轴正负方向传播，单独传播时强度保持不变。$x_1 = 9\ \text{m}$ 和

$x_2 = 12$ m 处的两点是相邻的两个因干涉而静止的点。求两波的波长和两波源间最小相位差.



解：设 S1 和 S2 的振动相位分别为ϕ_1和 ϕ_2，在x_1点两波引起的振动相位差为

$$\left[\phi_2 - 2\pi\frac{d - x_1}{\lambda}\right] - \left[\phi_1 - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right] = (2k+1)\pi$$

即

$$(\phi_2 - \phi_1) - 2\pi\frac{d - 2x_1}{\lambda} = (2k+1)\pi \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

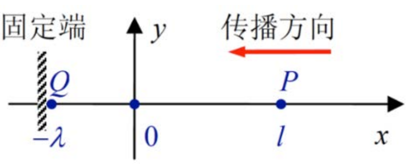
在x_2点两波引起的振动相位差为

$$(\phi_2 - \phi_1) - 2\pi\frac{d - 2x_2}{\lambda} = (2k+3)\pi \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

由(2)-(1)得：$4\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi \;\; \lambda = 2(x_2 - x_1) = 6\,m.$

代回(1)式得到: $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi\frac{d-2x_1}{\lambda} + (2k+1)\pi = (2k+5)\pi$, 当$k = -2, -3$ 时相位差最小：$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \pm\pi.$

5. 如图，一列平面简谐横波沿着 x 轴负方向传播，波长为λ，角频率为ω。P 点距离原点为l，已知 P 点的振幅为 A，$t_0 = 0$时 P 点的位移$A/2$, 速度方向指向平衡位置。



(1) 试求 P 点的振动方程，$y_P = ?$

(2) 写出此平面简谐波的波函数.

(3) 若此平面简谐波在距离原点一个波长处的 Q 点发生反射，$x_Q = -\lambda$, 且 Q 点为固定端，求反射波的波函数.

解：(1)设$y_P = A\cos(\omega t + \phi_P)$,

由 $y_P(t=0) = A/2 = A\cos(\phi_P)$ 得到 $\phi_P = \pm\pi/3$

又因为速度方向指向平衡位置，所以$\phi_P = \pi/3$,

振动方程为 $y_P = A\cos(\omega t + \pi/3)$.

(2) P 点振幅为 A，可知平面简谐波振幅为 A。

可设波函数为 $y = A\cos(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi_0)$.

当$x = l$ 时， $y_P = A\cos(\omega t + \frac{2\pi l}{\lambda} + \phi_0) = A\cos(\omega t + \pi/3)$,

有 $\phi_0 = \pi/3 - 2\pi l/\lambda$,

所以波函数为：$y = A\cos(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda})$.

(3) 设反射波波函数为 $y_R = A\cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi)$.

当 $x = -\lambda$ 时，入射波相位为 $\phi_Q = \omega t - 2\pi + \pi/3 - 2\pi l/\lambda$,

当 $x = -\lambda$ 时，反射波相位为$\varphi_Q = \omega t + 2\pi + \varphi$,

Q 为固定端，反射波有半波损失，$\varphi_Q = \phi_Q + (2k+1)\pi$.

即 $\omega t + 2\pi + \varphi = \omega t - 2\pi + \pi/3 - 2\pi l/\lambda + (2k+1)\pi$.

取$k = 2$ 得到 $\varphi = 4\pi/3 - 2\pi l/\lambda$.

因此，反射波波函数 $y_R = A\cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + 4\pi/3 - 2\pi l/\lambda)$.

6. 两辆汽车A, B分别以$40m/s, 20m/s$的速率在马路上相向而驶，此时汽车 A 按下喇叭。已知汽车 A 的喇叭发出的声音频率为$400Hz$，声音在空气中的传播速度为$340m/s$,求

(1) 站在汽车 A 车头正前方地面上的人听到的声音频率;

(2) 汽车 B 的司机听到的声音频率.

解：

(1) 波源运动，而观察者不动，代入公式

$$\nu = \frac{u}{u - v_S}\nu_0 = \frac{340}{340-40} \cdot 400 \approx 453.3\ Hz.$$

(2) 波源和观察者同时运动，代入公式

$$\nu = \frac{u + v_O}{u - v_S}\nu_0 = \frac{340+20}{340-40} \cdot 400 = 480\ Hz.$$

第十四章 相对论

1. 宇宙飞船相对于地面以速度 v 作匀速直线飞行，某一时该飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号，经过 Δt （飞船上的钟）时间后，被尾部的接收器收到，则飞船的固有长度是 $\underline{L = c\Delta t}$ 。

解：飞船的固有长度就是相对于飞船静止的观察者测得的飞船长度。
由题意知，飞船的固有长度为 $L = c\Delta t$

2. 1905 年爱因斯坦提出了狭义相对论，狭义相对论是以两条基本假设为前提的，这两条基本假设是(D)
A 同时的绝对性与同时的相对性
B 运动的时钟变慢与运动的尺子缩短
C 时间间隔的绝对性与空间距离的绝对性
D 相对性原理与光速不变原理

3. S 系中平面上一个静止的圆的面积为 12 cm^2，已知 S' 系在 $t = t' = 0$ 时与 S 系坐标轴重合，以-0.8c 的速度沿公共轴 $x - x'$ 运动。则在 S' 系测得该圆面积为 $\underline{7.2\mathrm{cm}^2}$ 。

解：在 S' 系中观测此圆时，与平行方向上的线度将收缩为

$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 而与垂直方向上的线度不变，仍为 2R，所以测得的面积为（椭圆面积）：$S = \pi ab = \pi\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot R = \pi R^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 7.2cm^2$

（式中 a、b 分别表示椭圆的长半轴和短半轴）

4. 一艘宇宙飞船的船身固有长度为 $L_0 = 90\mathrm{m}$，相对于地面以 $v_0 = 0.8c$ （c 为真空中光速）的速度在一观测站的上空飞过。
（1）观测站测得飞船的船身通过观测站的时间间隔是多少？
（2）宇航员测得船身通过观测站的时间间隔是多少？

解：（1）观测站测得飞船船身的长度为：

$$L = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2} = 54m$$ 则所求的时间为固有时间

$$\Delta t_1 = \frac{L}{v_0} = 2.25\times10^{-7}S$$

（2）宇航员测得船身通过观测站的时间间隔

$$.\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} = 3.75\times10^{-7}S$$

5. S 系中记录到两事件空间间隔 $\Delta x = 600m$，时间间隔 $\Delta t = 8\times10^{-7}s$，而 s' 系中记录 $\Delta t' = 0$，则 s' 系相对 s 系的速度为 0.4C 。

解：设相对速度为 v，在 S 系中记录到两事件的时空坐标分别为 (x_1, t_1)、(x_2, t_2)；S' 系中记录到两事件的时空坐标分别 $(x_1^{'}, t_1^{'})$ 为及 $(x_2^{'}, t_2^{'})$。　　由洛仑兹变换得：

$$t^{'} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$ 得：

$$\Delta t^{'} = t_2^{'} - t_1^{'} = \gamma\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

根据题意得：　$\Delta t^{'} = 0, \Delta x = 600m, \Delta t = 8\times10^{-1}S$

$$0 = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \Rightarrow v = \frac{c^2}{\Delta x}\Delta t = 1.2\times10^8 m/s = 0.4C$$

6. 一立方体，沿其一棱的方向以速度 v 运动。试证其体积和密度为 $V = V_0\sqrt{1-\beta^2}$

和$\rho=\gamma^2 m_0/V_0$。式中m_0、v_0为静止质量和体积，$\beta=v/c$ $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$。

证明：设立方体静止时的长、宽、高分别以x_0、y_0、z_0表示；当立方体沿其一棱方向以速度$\vec{v}$相对于观察者测得立方体的长、宽、高分别为：

$x=x_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}, y=y_0, z=z_0$ 相应的体积为：

$V=xyz=x_0y_0z_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=V_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=V_0\sqrt{1-\beta^2}$ 以 v 运动的立方体，其质量为 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 于是密度：

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{V_0\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma^2\frac{m_0}{V_0}$$

7. 设某微观粒子的总能量是它静止能量的 k 倍，则其运动速度的大小是 $v=\frac{C}{K}\sqrt{K^2-1}$。

解：根据相对论的动量与能量关系：

$$mc^2=km_0c^2 \qquad \therefore \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=km_0c^2$$

所以： $v=\frac{C}{K}\sqrt{K^2-1}$

8. 实验室中观察到宇宙射线一介子的寿命是它的固有寿命的 8 倍，则介子的动能是 $7m_0c^2$ 。

（已知该介子的静止质量为m_0）

解：由 $t=t^0/\sqrt{1-V^2/C^2}=8t_0$ 得 $1\big/\sqrt{1-V^2/C^2}=8$

相对论动能：

$$E_x = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}C^2 - m_0c^2 = 8m_0c^2 - m_0c^2 = 7m_0c^2$$

第八章 热力学

1. 1mol 单原子理想气体从 300K 加热到 350K，

(1)容积保持不变；

(2)压强保持不变；

问在这两个过程中各吸收了多少热量？增加了多少内能？对外做了多少功？

解：(1)

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{C_V} \Delta \boldsymbol{T} = \frac{3}{2}\boldsymbol{R}\Delta \boldsymbol{T} = \frac{3}{2}\times 8.31\times 50 = 623(\boldsymbol{J})$$

$$\boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} = 623(\boldsymbol{J})$$

(2)

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{C_V} \Delta \boldsymbol{T} = \frac{3}{2}\boldsymbol{R}\Delta \boldsymbol{T} = \frac{3}{2}\times 8.31\times 50 = 623(\boldsymbol{J})$$

$$\boldsymbol{A} = \int_{\boldsymbol{V}_1}^{\boldsymbol{V}_2} \boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{V} = \int_{\boldsymbol{T}_1}^{\boldsymbol{T}_2} \boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\Delta \boldsymbol{T} = \times 8.31\times 50 = 416(\boldsymbol{J})$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A} + \Delta \boldsymbol{E} = 1039(\boldsymbol{J})$$

2. 压强为 1.0×10^5Pa，体积为 $0.0082\mathrm{m}^3$ 的氮气，从初始温度 300K 加热到 400K，如加热时(1)体积不变(2)压强不变，问各需热量多少？哪一个过程所需热量大？为什么？

解：(1)

$$Q_V = \frac{M}{M_{mol}} C_V (T_2 - T_1) = \frac{p_1 V_1}{R T_1} C_V (T_2 - T_1) = p_1 V_1 \frac{C_V}{R}(\frac{T_2}{T_1} - 1)$$

$$= 1.0\times 10^5 \times 0.082 \times \frac{5}{2}(\frac{400}{300} - 1) = 683(J)$$

(2)

$$Q_p = \frac{M}{M_{mol}} C_p (T_2 - T_1) = \frac{p_1 V_1}{R T_1} C_p (T_2 - T_1) = p_1 V_1 \frac{C_p}{R}(\frac{T_2}{T_1} - 1)$$

$$= 1.0\times 10^5 \times 0.082 \times \frac{7}{2}(\frac{400}{300} - 1) = 956(J)$$

3. 有一定量的理想气体，其压强按 $p=\dfrac{C}{V^2}$ 的规律变化，C 是个常量。求气体从容积 V_1 增加到 V_2 所做的功，该理想气体的温度是升高还是降低？

解： 气体所做的功为

$$A=\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}\frac{C}{V^2}\mathrm{d}V=-C(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1})$$

上式用 $pV=\dfrac{C}{V}$ 代入得

$$A=-C(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1})=-(p_2V_2-p_1V_1)=-\frac{M}{M_{mol}}R(T_2-T_1)>0$$

即 $T_2<T_1$，可见理想气体温度是降低的。

4. 1mol 的氢，在压强为 1.0×10^5Pa，温度为 20℃时，其体积为 V_0。今使它经以下两种过程达到同一状态：

(1)先保持体积不变，加热使其温度升高到 80℃，然后令它作等温膨胀，体积变为原体积的 2 倍；

(2)先使它作等温膨胀至原体积的 2 倍，然后保持体积不变，加热使其温度升到 80℃。

试分别计算以上两种过程中吸收的热量，气体对外作的功和内能的增量；并在 $p-V$ 图上表示两过程。

解：(1)

$$\Delta E=C_V\Delta T=\frac{5}{2}R\Delta T=\frac{5}{2}\times8.31\times60=1246.5(J)$$

$$A=RT\ln\frac{V_2}{V_1}=8.31\times(273+80)\ln2=2033.3(J)$$

$$Q = A + \Delta E = 3279.8(J)$$

(2)

$$A = RT\ln\frac{V_2}{V_1} = 8.31\times(273+20)\ln 2 = 1687.7(J)$$

$$\Delta E = C_V\Delta T = \frac{5}{2}R\Delta T = \frac{5}{2}\times 8.31\times 60 = 1246.5(J)$$

$$Q = A + \Delta E = 2934.2(J)$$

5. 有单原子理想气体，若绝热压缩使其容积减半，问气体分子的平均速率变为原来的速率的几倍？若为双原子理想气体，又为几倍？

解： 由绝热方程 $V_1^{\gamma-1}T_1 = V_2^{\gamma-1}T_2$，得 $\frac{T_2}{T_1} = (\frac{V_2}{V_1})^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}$

由平均速率公式 $\overline{\upsilon} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$，得 $\frac{\overline{\upsilon}_2}{\overline{\upsilon}_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} == 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$

(1)单原子理想气体的绝热指数 $\gamma_{单} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{2}$

$$\frac{\overline{\upsilon}_2}{\overline{\upsilon}_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2^{\frac{\gamma-1}{2}} = 2^{\frac{\frac{5}{3}-1}{2}} = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$$

(2)双原子理想气体的绝热指数 $\gamma_{双} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{2}$

$$\frac{\overline{\upsilon}_2}{\overline{\upsilon}_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2^{\frac{\gamma-1}{2}} = 2^{\frac{\frac{7}{5}-1}{2}} = \sqrt[5]{2} \approx 1.15$$

6. 1 摩尔理想气体在 400K 与 300K 之间完成一个卡诺循环，在 400K 的等温线上，起始体积为 0.0010m^3，最后体积为 0.0050m^3，试计算气体在此循环中所作的功，以及从高温热源吸收的热量和传给低温热源的热量。

解：卡诺循环的效率

$$\eta = 1 - \frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1} = 1 - \frac{300}{400} = 25\%$$

从高温热源吸收的热量

$$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{RT} \ln \frac{\boldsymbol{V}_2}{\boldsymbol{V}_1} = 8.31 \times 400 \ln \frac{0.005}{0.001} = 5350(\boldsymbol{J})$$

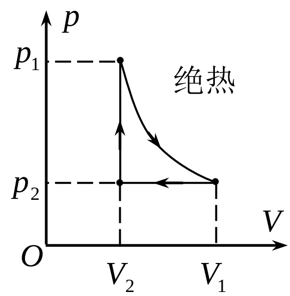
循环中所作的功

$$\boldsymbol{A} = \eta \boldsymbol{Q}_1 = 0.25 \times 5350 = 1338(\boldsymbol{J})$$

传给低温热源的热量

$$\boldsymbol{Q}_2 = (1-\eta)\boldsymbol{Q}_1 = (1-0.25) \times 5350 = 4013(\boldsymbol{J})$$

7. 一热机在 1000K 和 300K 的两热源之间工作。如果⑴高温热源提高到 1100K，⑵低温热源降到 200K，求理论上的热机效率各增加多少？为了提高热机效率哪一种方案更好？



解： 效率

$$\eta = 1 - \frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1} = 1 - \frac{300}{1000} = 70\%$$

(1) 效率

$$\eta' = 1 - \frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1} = 1 - \frac{300}{1100} = 72.7\%$$

效率增加

$$\Delta\eta' = \eta' - \eta = 72.7\% - 70\% = 2.7\%$$

(2) 效率

$$\eta'' = 1 - \frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1} = 1 - \frac{200}{1000} = 80\%$$

效率增加

$$\Delta\eta'' = \eta'' - \eta = 80\% - 70\% = 10\%$$

8. 以理想气体为工作热质的热机循环，如图所示。试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - 1}{\left(\frac{P_1}{P_2}\right) - 1}$$

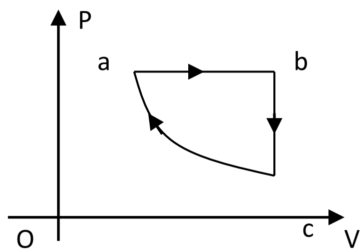
解：

$$\boldsymbol{Q}_1 = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{M}_{mol}} \boldsymbol{C}_V \Delta \boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{C}_V}{\boldsymbol{R}} (\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{V}_2)$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{M}_{mol}} \boldsymbol{C}_P \Delta \boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{C}_p}{\boldsymbol{R}} (\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{V}_2)$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_p(p_2V_1 - p_2V_2)}{C_V(p_1V_2 - p_2V_2)} = 1 - \gamma \frac{(\frac{V_1}{V_2} - 1)}{(\frac{p_1}{p_2} - 1)}$$

9. 有 5 摩尔单原子理想气体作如图所示正循环，ca 是等温过程，已知:P_a＝4.15×10^5Pa，V_a＝2.0×10^{-2} m^3，，V_b＝3.0×10^{-2}m^3。求：



(1)气体在 ab 过程中吸收的热量；

(2)气体在 bc 过程中内能的增量；

(3)该循环的效率是多少？

解：(1) $a \to b$，等压过程，吸热

$$T_a = \frac{P_aV_a}{nR} = \frac{4.15\times10^5 \times 2.0\times10^{-2}}{5\times8.31} = 200\text{K}$$

$$T_b = \frac{P_bV_b}{nR} = \frac{4.15\times10^5 \times 3.0\times10^{-2}}{5\times8.31} = 300\text{K}$$

$$Q_{ab} = nC_P(T_b - T_a) = 5\times\frac{5}{2}R\times(T_b - T_a) = 5\times\frac{5}{2}\times8.31(300-200) = 10375\ \text{J}$$

(2) $b \to c$，等容过程，$T_c = T_a$，

$$\Delta E_{bc} = Q_{bc} = nC_V(T_c - T_b) = -5 \times \frac{3}{2} R \times (T_b - T_a) = -6225\ \text{J}$$

(3) $c \to a$，等温过程，$V_b = V_c$，$T_c = T_a$

$$Q_{ca} = nRT_a \ln\frac{V_a}{V_c} = P_a V_a \ln\frac{2}{3} = -3365\text{J}$$

$$\eta = \frac{A_{净}}{Q_{吸}} = \frac{Q_{吸} - Q_{放}}{Q_{吸}} = \frac{Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca}}{Q_{ab}} = \frac{10375 - 6225 - 3365}{10375} = 7.566\%$$

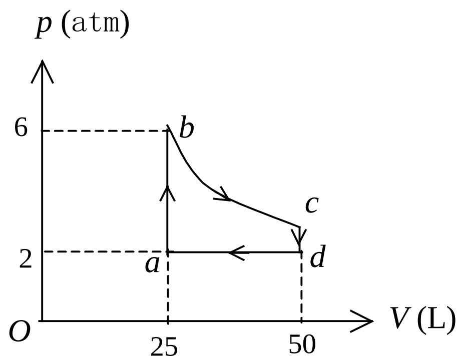
10. 气缸内贮有 36g 水蒸汽(视为刚性分子理想气体)，经 abcda 循环过程如图所示．其中 a－b、c－d 为等体过程，b－c 为等温过程，d－a 为等压过程．试求：

(1) d－a 过程中水蒸气作的功 W_{da}

(2) a－b 过程中水蒸气内能的增量ΔE_{ab}

(3) 循环过程水蒸汽作的净功 W

(4) 循环效率



解：水蒸汽的质量 M＝36×10^{-3} kg

水蒸汽的摩尔质量 M^{mol}＝18×10^{-3} kg，i=6

$$W_{da}=p_a(V_a-V_d)=-5.065\times10^3\text{J}$$

(2) $\Delta E_{ab}=(M/M^{mol})(i/2)R(T_b-T_a)=(i/2)V_a(p_b-p_a)=3.039\times10^4\text{J}$

(3) $T_b = \dfrac{p_b V_a}{(M/M_{mol})R} = 914$ K

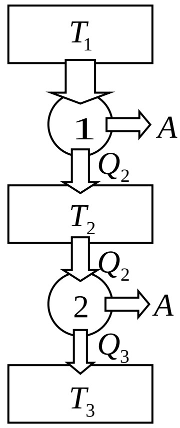
W_{bc}= $(M/M^{mol})RT_b\ln(V_c/V_b)$ =1.05×10^4J

净功 $W=W_{bc}+W_{da}=5.47\times10^3$J

(4) $Q1=Q_{ab}+Q_{bc}=\Delta E_{ab}+W_{bc}=4.09\times10^4$J

$\eta=W/Q_1=13\%$

11. 两部可逆机串联起来，如图所示。可逆机 1 工作于温度为 T_1 的热源 1 与温度为 T_2=400K 的热源 2 之间。可逆机 2 吸收可逆机 1 放给热源 2 的热量 Q_2，转而放热给 T_3=300K 的热源 3。在两部热机效率和作功相同的情况下，求 T1。



解：(1) $\eta_1 = 1-\dfrac{T_2}{T_1}$，$\eta_2 = 1-\dfrac{T_3}{T_2}$ $\qquad \eta_1=\eta_2 \qquad 1-\dfrac{T_2}{T_1}=1-\dfrac{T_3}{T_2}$

$$T_1 = \frac{T_2{}^2}{T_3} = \frac{400^2}{300} \approx 533(K)$$

(2) $Q_2\eta_2 = Q_1\eta_1 \qquad Q_2\eta_2 = \dfrac{Q_2}{1-\eta_1}\eta_1 \qquad \eta_1 = \dfrac{\eta_2}{1+\eta_2}$

$$1-\frac{T_2}{T_1} = \frac{1-\dfrac{T_3}{T_2}}{1+1-\dfrac{T_3}{T_2}} \qquad T_1 = \frac{T_2}{1-\dfrac{T_2-T_3}{2T_2-T_3}} = \frac{400}{1-\dfrac{400-300}{2\times400-300}} = 500(K)$$

12. 一热机每秒从高温热源（T_1=600K）吸取热量 $Q_1=3.34\times10^4$J，做功后向低温热源（T_2=300K）放出热量 $Q_2=2.09\times10^4$J，

(1)问它的效率是多少？它是不是可逆机？

(2)如果尽可能地提高热机的效率，问每秒从高温热源吸热 3.34×10^4J，则每秒最多能做多少功？

解：(1) $\eta = 1-\dfrac{Q_2}{Q_1} = 1-\dfrac{2.09\times10^4}{3.34\times10^4} = 37.4\%$

$$\eta_0 = 1 - \frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1} = 1 - \frac{300}{600} = 50\%$$

$\eta < \eta_0$，可见是不可逆热机

(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_1 \eta_0 = 3.34 \times 10^4 \times 50\% = 1.67 \times 10^4 (\boldsymbol{J})$

第九章 分子动理论

1. 有一水银气压计，当水银柱高度为 0.76m 时，管顶离水银柱液面为 0.12m。管的截面积为 $2.0\times10^{-4}m^2$。当有少量氦气混入水银管内顶部，水银柱高度下降为 0.60m。此时温度为 27℃，试计算有多少质量氦气在管顶？（氦气的摩尔质量为 0.004kg/mol，0.76m 水银柱压强为 1.013×10^5Pa）

解：

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{mol}\frac{\boldsymbol{pV}}{\boldsymbol{RT}}=\boldsymbol{M}_{mol}\frac{\boldsymbol{pSh}}{\boldsymbol{RT}}$$

$$=0.004\times\frac{(0.76-0.60)\dfrac{1.013\times10^5}{0.76}\times2\times10^{-4}\times(0.76+0.12-0.60)}{8.31\times(273+27)}$$

$$=1.92\times10^{-6}\,\boldsymbol{kg}$$

2. 一体积为 $1.0\times10^{-3}m^3$ 容器中，含有 4.0×10^{-5}kg 的氦气和　4.0×10^{-5}kg 的氢气，它们的温度为 30℃，试求容器中的混合气体的压强。

解： $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{\boldsymbol{M}_1}{\boldsymbol{M}_{1mol}}\dfrac{\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{V}}$， $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{\boldsymbol{M}_2}{\boldsymbol{M}_{2mol}}\dfrac{\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{V}}$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\left(\frac{\boldsymbol{M}_{H_e}}{\boldsymbol{M}_{H_emol}}+\frac{\boldsymbol{M}_{H_2}}{\boldsymbol{M}_{H_2mol}}\right)\frac{\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{V}}$$

$$=\left(\frac{4.0\times10^{-5}}{4.0\times10^{-3}}+\frac{4.0\times10^{-5}}{2.0\times10^{-3}}\right)\times\frac{8.31\times(272+30)}{1.0\times10^{-3}}$$

$$=7.55\times10^4\,\boldsymbol{Pa}$$

3. 计算在 300K 温度下，氢、氧和水银蒸气分子的方均根速率和平均平动动能。

解：方均根速率 $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}=\sqrt{\dfrac{3\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{M}_{mol}}}$

氢的方均根速率　$\sqrt{\overline{\upsilon^2}}=\sqrt{\dfrac{3\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{M}_{mol}}}=\sqrt{\dfrac{3\times8.31\times300}{2\times10^{-3}}}=1.93\times10^3(\boldsymbol{m}/\boldsymbol{s})$

氧的方均根速率 $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}=\sqrt{\dfrac{3\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{M}_{mol}}}=\sqrt{\dfrac{3\times 8.31\times 300}{32\times 10^{-3}}}=4.83\times 10^3(\boldsymbol{m/s})$

水银的方均根速率 $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}=\sqrt{\dfrac{3\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{M}_{mol}}}=\sqrt{\dfrac{3\times 8.31\times 300}{200\times 10^{-3}}}=1.93\times 10^2(\boldsymbol{m/s})$

平均平动动能 $\bar{\varepsilon}_k=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{kT}=\dfrac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 300=6.21\times 10^{-21}(\boldsymbol{J})$

4. (1)有一带有活塞的容器中盛有一定量的气体，如果压缩气体并对它加热，使它的温度从 27℃升到 177℃、体积减少一半，求气体压强变化多少？
(2)这时气体分子的平均平动动能变化了多少？分子的方均根速率变化了多少？

解：(1) $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{M}_{mol}}\dfrac{\boldsymbol{RT}_1}{\boldsymbol{V}_1}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{M}_{mol}}\dfrac{\boldsymbol{RT}_2}{\boldsymbol{V}_2}$

$$\frac{\boldsymbol{p}_2}{\boldsymbol{p}_1}=\frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1}\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_2}=\frac{273+177}{273+27}\times\frac{1}{0.5}=3$$

(2) $\bar{\varepsilon}_{1k}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{kT}_1$，$\bar{\varepsilon}_{2k}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{kT}_2$，$\dfrac{\bar{\varepsilon}_{2k}}{\bar{\varepsilon}_{1k}}=\dfrac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1}=\dfrac{273+177}{273+27}=1.5$

$$\sqrt{\overline{\upsilon_1^{\ 2}}}=\sqrt{\frac{3\boldsymbol{RT}_1}{\boldsymbol{M}_{mol}}},\quad \sqrt{\overline{\upsilon_2^{\ 2}}}=\sqrt{\frac{3\boldsymbol{RT}_2}{\boldsymbol{M}_{mol}}},\quad \frac{\sqrt{\overline{\upsilon_2^{\ 2}}}}{\sqrt{\overline{\upsilon_1^{\ 2}}}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1}}=\sqrt{1.5}\approx 1.22$$

5. 某些恒星的温度可达到约 1.0×10^8K，这是发生聚变反应（也称热核反应）所需的温度。通常在此温度下恒星可视为由质子组成。求(1)质子的平均动能是多少？(2)质子的方均根速率为多大？

解：质子的平均动能 $\bar{\varepsilon}_k=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{kT}=\dfrac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 1.0\times 10^8=2.07\times 10^{-15}(\boldsymbol{J})$

质子的方均根速率 $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}=\sqrt{\dfrac{3\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{M}_{mol}}}=\sqrt{\dfrac{3\times 8.31\times 1.0\times 10^8}{1.67\times 10^{-27}}}=1.957\times 10^6(\boldsymbol{m/s})$

6. 一容器被中间的隔板分成相等的两半，一半装有氦气，温度为 250K；另一半装

有氧气，温度为 310K。二者压强相等。求去掉隔板两种气体混合后的温度。

解：由气体内能公式氦气：$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{N}_1 \frac{3}{2}\boldsymbol{kT}_1$

氧气：$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{N}_2 \frac{5}{2}\boldsymbol{kT}_2$

混合气：$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{N}_1 \frac{3}{2}\boldsymbol{kT} + \boldsymbol{N}_2 \frac{5}{2}\boldsymbol{kT}$

混合前后内能总不变 $\boldsymbol{N}_1 \frac{3}{2}\boldsymbol{kT} + \boldsymbol{N}_2 \frac{5}{2}\boldsymbol{kT} = \boldsymbol{N}_1 \frac{3}{2}\boldsymbol{kT}_1 + \boldsymbol{N}_2 \frac{5}{2}\boldsymbol{kT}_2$

得 $$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{N}_1 \frac{3}{2}\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{N}_2 \frac{5}{2}\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{N}_1 \frac{3}{2} + \boldsymbol{N}_2 \frac{5}{2}} = \frac{\frac{\boldsymbol{N}_1}{\boldsymbol{N}_2}\frac{3}{2}\boldsymbol{T}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{T}_2}{\frac{\boldsymbol{N}_1}{\boldsymbol{N}_2}\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}$$

由理想气体状态方程 $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{kT}_1$，$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{kT}_2$

由于混合前压强相等得 $\frac{\boldsymbol{N}_1}{\boldsymbol{N}_2} = \frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2} = \frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1}$

所以 $$\boldsymbol{T} = \frac{\frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1}\frac{3}{2}\boldsymbol{T}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{T}_2}{\frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1}\frac{3}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{8\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2}{3\boldsymbol{T}_2 + 5\boldsymbol{T}_1} = \frac{8\times 250\times 310}{3\times 310 + 5\times 250} \approx 284(\mathbf{K})$$

7. 求氢气在 300K 时分子速率在 $v_p - 10$ m/s 到 $v_p + 10$ m/s 之间的分子数占总分子数百分比。

解：$\upsilon_p = \sqrt{\frac{2\boldsymbol{RT}}{\boldsymbol{M}_{mol}}}$ $\qquad \frac{\Delta \boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{f}(\upsilon)\Delta\upsilon = 4\pi\left(\frac{\boldsymbol{M}_{mol}}{2\pi\boldsymbol{RT}}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\boldsymbol{M}_{mol}\upsilon^2}{2\boldsymbol{RT}}}\upsilon^2\Delta\upsilon$

$$\frac{\Delta N_p}{N} = f(\upsilon_p)\Delta\upsilon$$
$$= 4\pi(\frac{M_{mol}}{2\pi RT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{M_{mol}\upsilon_p{}^2}{2RT}} \upsilon_p{}^2 \Delta\upsilon$$
$$= 4\pi(\frac{M_{mol}}{2\pi RT})^{\frac{3}{2}} e^{-1} \frac{2RT}{M_{mol}} \Delta\upsilon$$
$$= 4(\frac{M_{mol}}{2\pi RT})^{\frac{1}{2}} e^{-1} \Delta\upsilon$$
$$= 4(\frac{2\times 10^{-3}}{2\pi\times 8.31\times 300})^{\frac{1}{2}} \times e^{-1} \times 20$$
$$=$$

=1.05%

8. 导体中自由电子的运动类似于气体分子的运动。设导体中共有 N 个自由电子。电子气中电子的最大速率 v_F 叫做费米速率。电子的速率在 v 与 $v+dv$ 之间的概率为：

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \dfrac{4\pi V^2 A dV}{N}, & V_F > V > 0 \\ 0, & V > V_F \end{cases}$$

式中 A 为归一化常量。(1)由归一化条件求 A。(2)证明电子气中电子的平均动能 $\overline{\omega}$ $=\dfrac{3}{5}(\dfrac{1}{2}mv_F^2) = \dfrac{3}{5}E_F$，此处 E_F 叫做费米能。

解：(1)由 $\int_0^\infty f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = 1$

得 $\int_0^{\upsilon_F} \dfrac{4\pi\upsilon^2 A}{N}\mathrm{d}\upsilon = 1$ 　　即 $\dfrac{4\pi\upsilon_F{}^3 A}{3N} = 1$，$A = \dfrac{3N}{4\pi\upsilon_F{}^3}$

(2)

$$\overline{\omega}=\int_0^{\infty}\omega f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon=\int_0^{\upsilon_F}\frac{1}{2}m\upsilon^2\times\frac{4\pi\upsilon^2}{N}\times\frac{3N}{4\pi{\upsilon_F}^3}\mathrm{d}\upsilon$$

$$=\int_0^{\upsilon_F}\frac{3}{2}m\upsilon^4\times\frac{1}{{\upsilon_F}^3}\mathrm{d}\upsilon=\frac{3}{5}(\frac{1}{2}m{\upsilon_F}^2)=\frac{3}{5}E_F$$

9. 电工元件真空管中的真空度为 1.33×10^{-3}Pa，试求在 27℃时单位体积中的分子数及分子碰撞自由程（设分子的有效直径 3.0×10^{-10}m）。

解： $p=nkT$　　　　$n=\frac{p}{kT}=\frac{1.33\times10^{-3}}{1.38\times10^{-23}\times300}=3.22\times10^{17}$

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2n}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi(3.0\times10^{-10})^2\times3.22\times10^{17}}=7.8(m)$$

10. 设氮分子的有效直径为 10^{-10}m，(1)求氮气在标准状态下的平均碰撞次数；(2)如果温度不变，气压降到 1.33×10^{-4}Pa，则平均碰撞次数又为多少？

解： (1) $\overline{\upsilon}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{mol}}}$，　$n=\frac{p}{kT}$

$$\overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2n\overline{\upsilon}=\sqrt{2}\pi d^2\frac{p}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{mol}}}=4\pi d^2\sqrt{\frac{RT}{\pi M_{mol}}}\frac{p}{kT}$$

$$=4\pi(3.0\times10^{-10})^2\times\sqrt{\frac{8.31\times273}{\pi\times28\times10^{-3}}}\times\frac{1.013\times10^5}{1.38\times10^{-23}\times273}$$

$$=5.42\times10^8(\text{次}/s)$$

(2)

$$\overline{Z}=4\pi d^2\sqrt{\frac{RT}{\pi M_{mol}}}\frac{p}{kT}$$

$$=4\pi(3.0\times10^{-10})^2\times\sqrt{\frac{8.31\times273}{\pi\times28\times10^{-3}}}\times\frac{1.33\times10^{-4}}{1.38\times10^{-23}\times273}$$

$$=0.71(\text{次}/s)$$