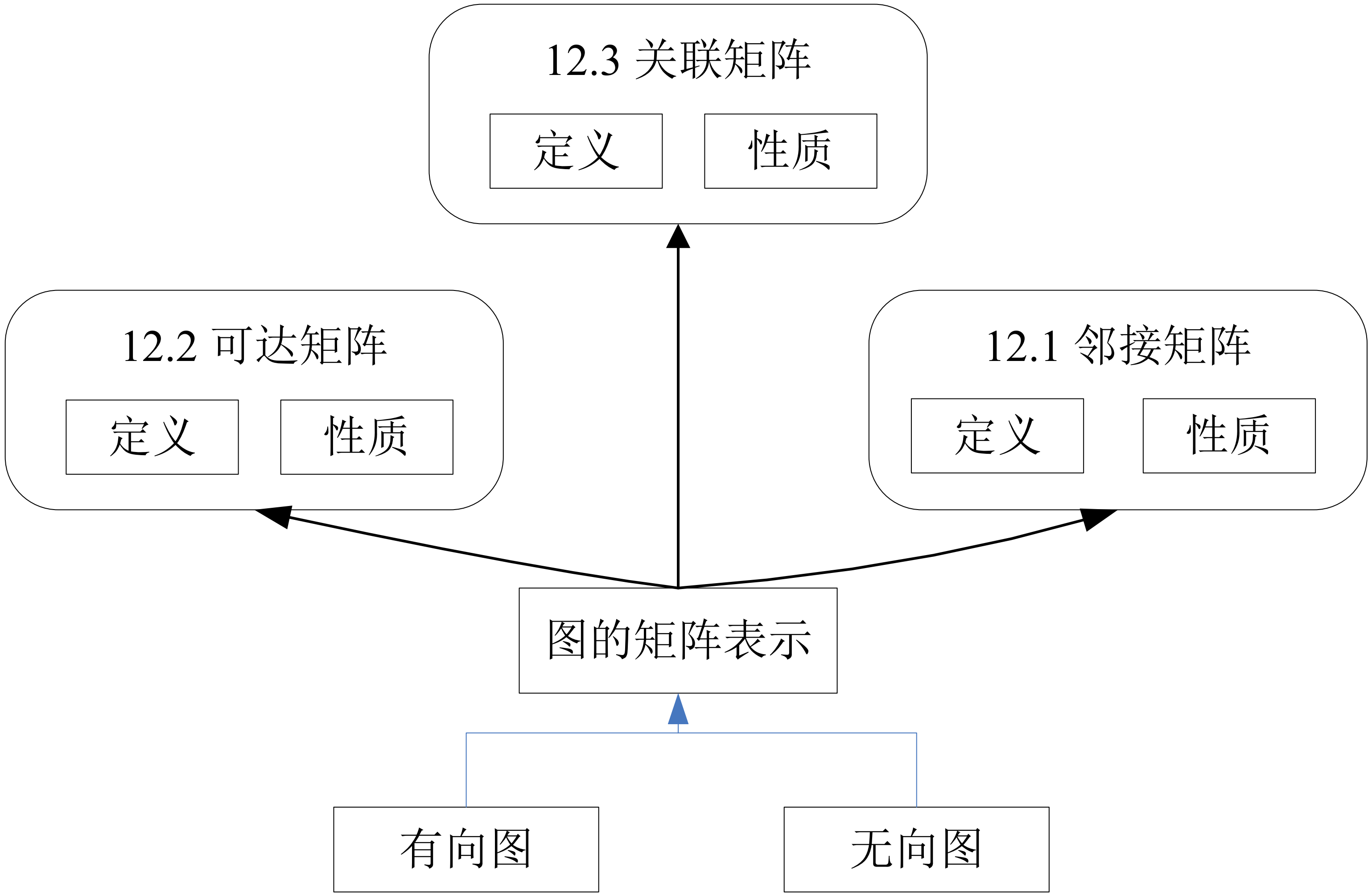
第四篇 图论

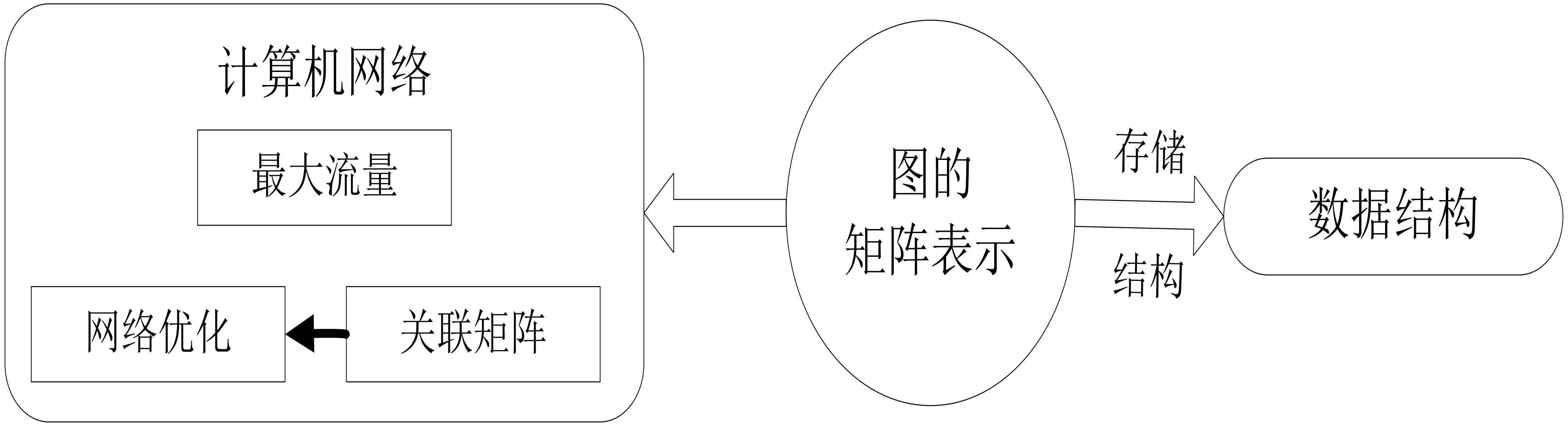
Graph Theory

第十二章 图的矩阵表示

本章各节间的关系概图



图的矩阵表示在计算机科学技术相关领域的应用

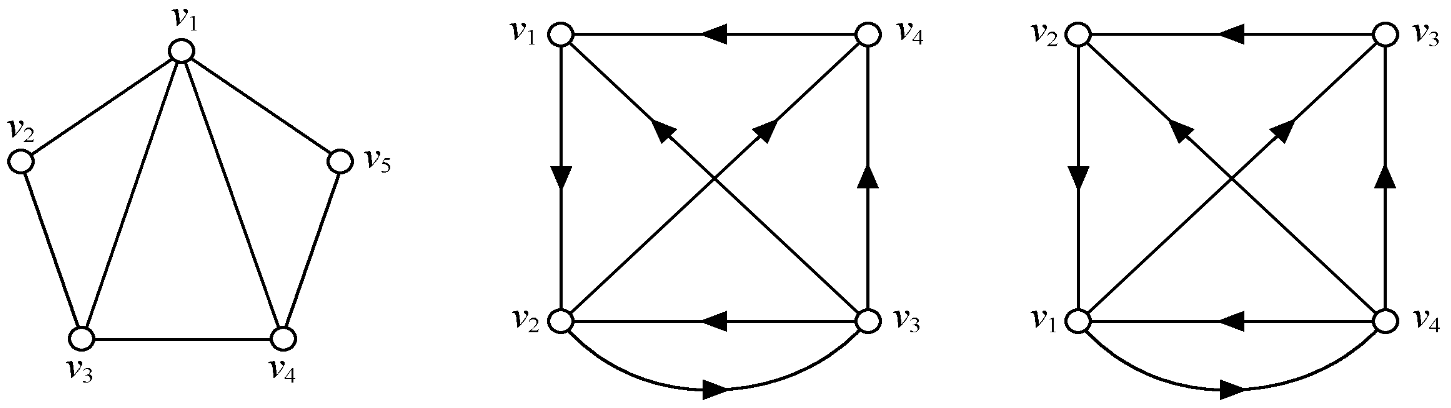


12.1 邻接矩阵

定义12.1 设G=<V，E>为简单图，它有n个结点V={ v_1，v_2，…，v_n }，则n阶方阵 $A(G)=(a_{ij})$ 称为G的**邻接矩阵**。

其中，
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{邻接}v_j\\ 0, & v_i\text{不邻接}v_j\text{或}i=j\end{cases}$$

邻接矩阵举例：



（a） G

（b） G_1

（c） G_2

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A(G_1)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A(G_2)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的性质：

设G=<V，E>是有向图，|V|=n，A是G的邻接矩阵。

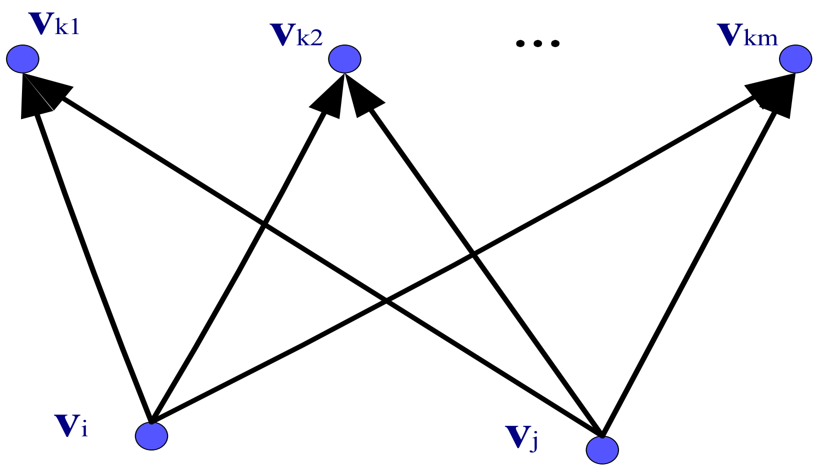
1）AA^T的元素的意义：

$B=[b_{ij}]=AA^T$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{j2} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & & a_{jk} & & a_{nk} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

若有 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{jk}=m(m\geq 0)$ 则表示存在m个k使得 a_{ik} 和 a_{jk} 均等于1。

如图：



b_{ij} 表示这样的结点个数：从 v_i 和 v_j 均有边引出（指向）到该结点。

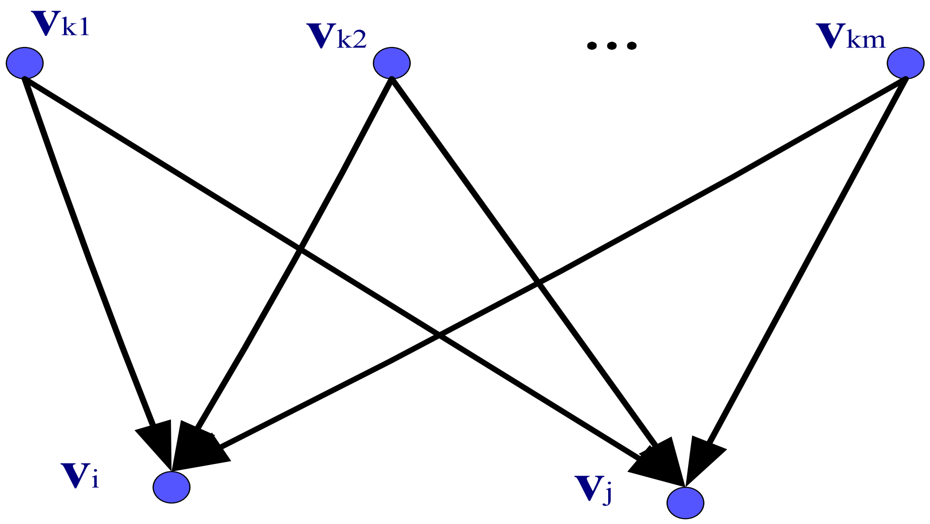
2） A^TA 的元素的意义：

$$B=[b_{ij}]= A^TA$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{j2} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & & a_{jk} & & a_{nk} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{jn} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

若有 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot a_{kj}=m\ (m\geq 0)$，则表示存在m个k使得 a_{ki} 和 a_{kj} 均等于1。

如图：



b_{ij} 表示这样的结点个数：以该结点为始点既有边引入（指向）到vi，又有边引入（指向）到vj。

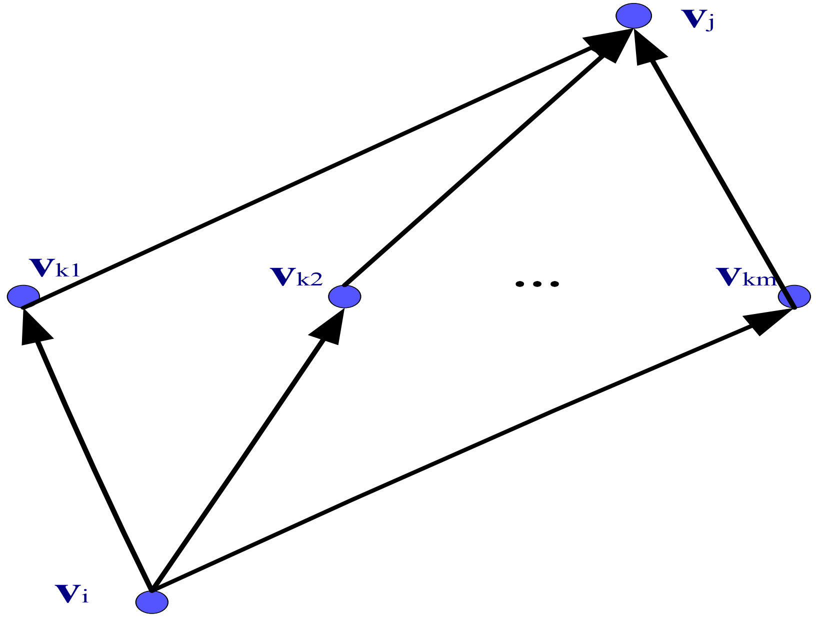
3） $A^{(n)}$ 的元素的意义：

$$B=[b_{ij}]= A^{(2)}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

若有 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}=m\ (m\geq 0)$ ，则表示存在m个k使得 a_{ik} 和 a_{kj} 均等于1。

如图：



b_{ij} 表示从vi到vj长度为2的路径的总数。

定理12.1 设A(G)为图G的邻接矩阵，则 $(A(G))^l$ 中的i行j列元素 $a_{ij}^{(l)}$ 等于G中连接结点 v_i 与 v_j 的长度为l的路的数目。

证：用归纳法证明。

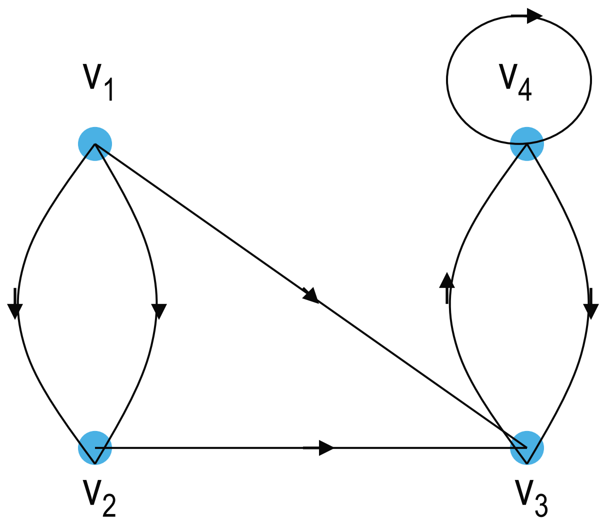
1）当l =2时，由上得知是显然成立。

2）设命题对l成立，由 $(A(G))^{l+1} = A(G)\cdot(A(G))^l$ 故 $a_{ij}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj}^{(l)}$

根据邻接矩阵的定义 a_{ik}表示连接 v_i 与 v_k 长度为1的路径的数目，而 $a_{kj}^{(l)}$ 是连接v_k 与 v_j 长度为l的路径的数目，上式的每一项表示由 v_i经过一条边到 v_k，再由v_k经过长度为l的路到 v_j 的，总长度为l+1的路的数目。对所有的k求和，即是所有从 到v_i 的v_j度为l+1的路的数目，故命题成立。

证毕

定义(推广)设有向图D=<V,E>, V={v_1, v_2, …, v_n}, E={e_1, e_2, …, e_m}, 令a_{ij}为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称为D的邻接矩阵，记作$A(D)$，或简记为A.



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

定理 设 A 为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为顶点集，则 A 的 l 次幂 $A^{(l)}$（$l\geq 1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设 $B_l=A+A^{(2)}+\ldots+A^{(l)}$（$l\geq 1$），则 B_l 中元素

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数.

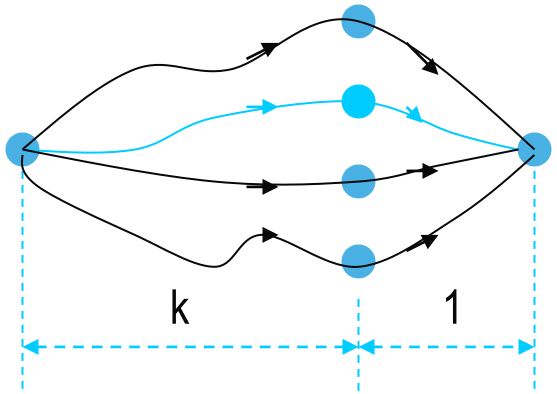
$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数

❖ 证明: (归纳法) (1)r=1: $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}$, 结论显然.

(2) 设$r \le k$时结论成立, 当$r=k+1$时,

$a_{it}^{(k)}a_{tj}^{(1)}$=从v_i到v_j最后经过v_t的长度为k+1的通路总数,

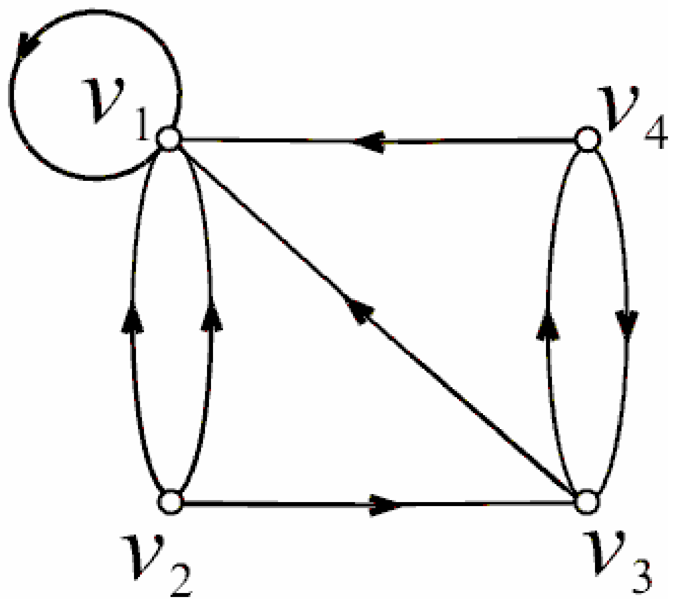
$$a^{(k+1)}_{ij}=\sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(k)} a_{tj}^{(1)}$$ =从v_i到v_j的长度为k+1的通路总数.



例 有向图D如图所示，求 A, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^{(4)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

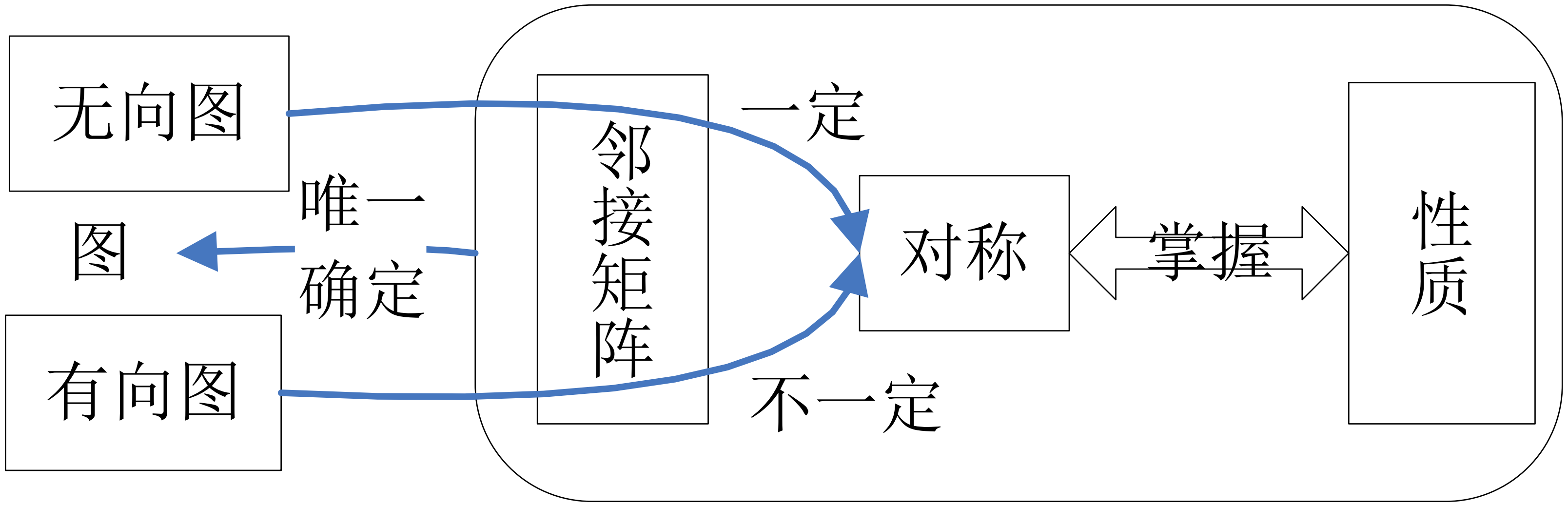
D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

小结：

掌握图的邻接矩阵的定义与性质；关于邻接矩阵的思维形式注记图如下图所示。



12.2 可达矩阵

定义12. 2设D=<V,E>为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

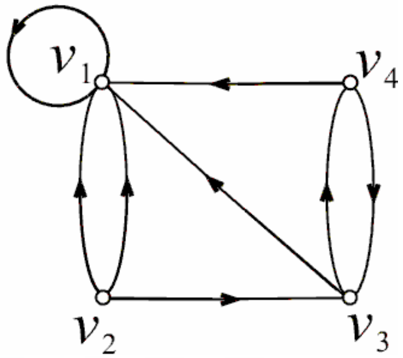
$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i\in V$，v_i可达v_i，所以$P(D)$主对角线上的元素全为1.

由定义不难看出，D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

由B_{n-1}的元素$b_{ij}^{(n-1)}$(i,j=1,2,...n且i<>j)是否为0可写出有向图D的可达矩阵，但P_{ii}总为1.下图所示有向图 D 的可达矩阵为



$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

结论： 如果把邻接矩阵看作是结点集V上关系R的关系矩阵，则可达矩阵P即为$E+M_t$。

求可达矩阵的方法：

求$C_n=E+A^1+\ldots+A^{n-1}$ → 将C_n中不为0的元素改为1，为0的不变

可达矩阵的概念可以推广到无向图中，只要将无向图的每条边看成是具有相反方向的两条边即可，无向图的邻接矩阵是对称矩阵，其可达矩阵称为连通矩阵。

无向图G是连通图当且仅当它的可达矩阵P的所有元素均为1.

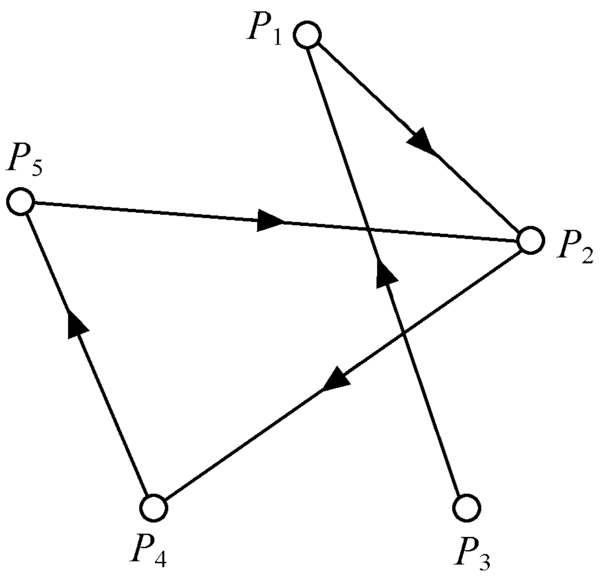
利用邻接矩阵A和可达矩阵P，可以判断图的连通性：

1）有向图G是强连通图，当且仅当它的可达矩阵P的所有元素均为1；

2）有向图G是单侧连通图，当且仅当$P \vee P^T$的所有元素均为1；

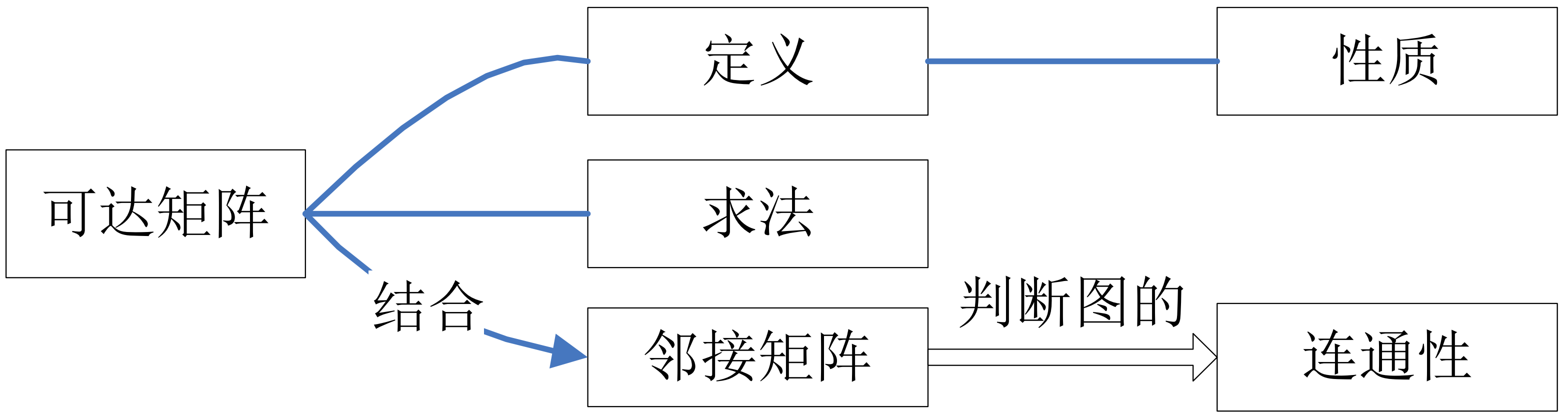
3）有向图G是弱连通图，当且仅当以$A \vee A^T$作为邻接矩阵求得的可达矩阵P′中所有元素均为1。

练习：求下图的可达矩阵



小结：

掌握图的可达矩阵的定义与性质，掌握求可达矩阵的方法步骤。关于图的可达矩阵的思维形式注记图如下图所示。



12.3 关联矩阵

定义12.3 无向图$G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

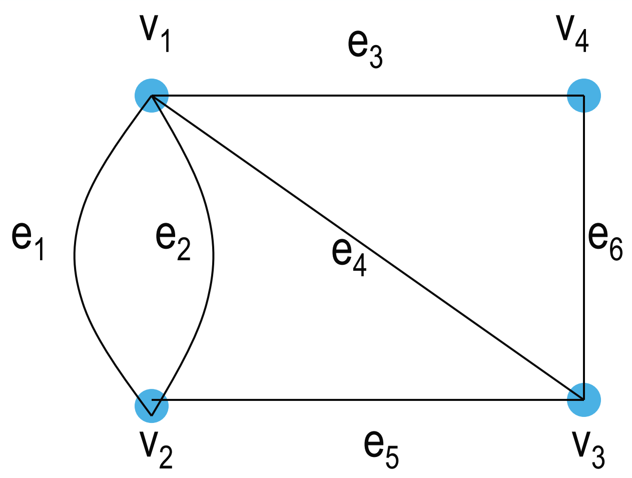
性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同



$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

定义12.4 设有向图$D=\langle V, E\rangle$中无环， $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

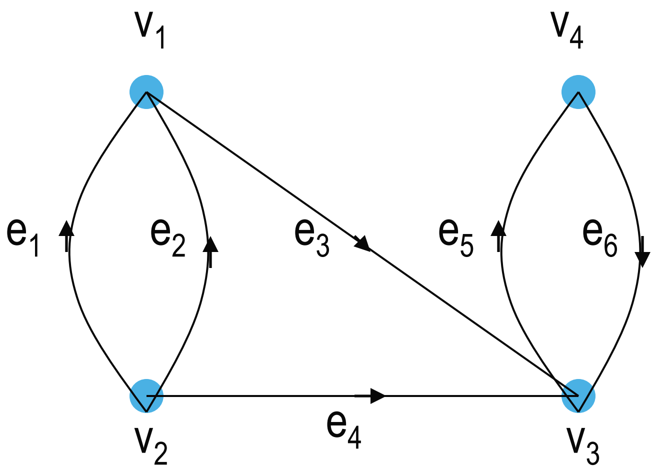
性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^+(v_i), \qquad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=-d^-(v_i), \qquad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

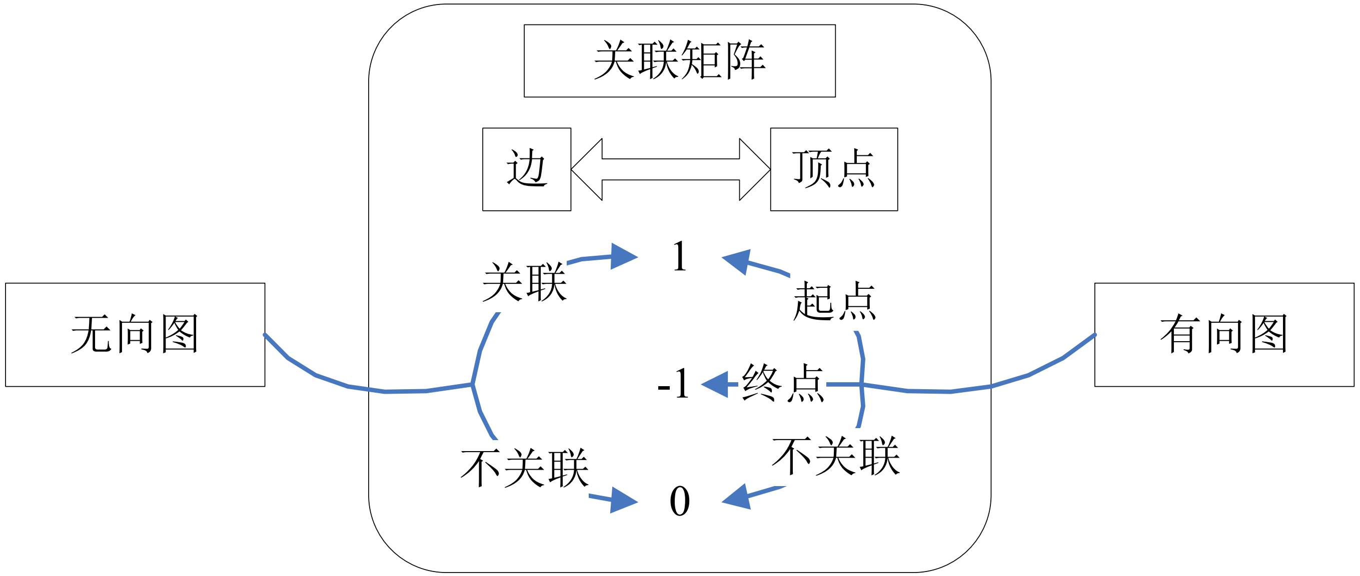
(4) 平行边对应的列相同



$$M(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

小结：

掌握关联矩阵的定义与性质。关于图的关联矩阵的思维形式注记图如下图所示。



12.4 常见题型解析

1）邻接矩阵和可达矩阵。

2）邻接矩阵和关联矩阵。

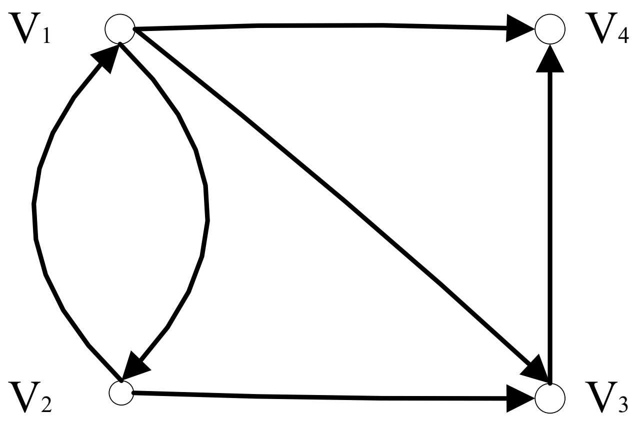
3）给出一种矩阵形式求另一种。

1）邻接矩阵和可达矩阵

例12.2 设有向图D=<V, E>如下图所示，请用计算回答下面的问题：

（1）D中v_1到v_4长度为3的初级路径有多少条？

（2）D是哪种类型的连通图？



解：（1）G的邻接矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

分别计算A^2、A^3得到：

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}0&1&1&2\\1&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由 A^3（1，4）=2 知，v_1到v_4共有2条长度为3的路径。计算过程：

$$A^3(1,4)=A^2(1,1)\times A(1,4)+A^2(1,2)\times A(2,4)+A^2(1,3)\times A(3,4)$$

$$+A^2(1,4)\times A(4,4)=1\times 1+0\times 0+1\times 1+1\times 0=2$$

$$A^2(1,1)=A(1,1)\times A(1,1)+A(1,2)\times A(2,1)+A(1,3)\times A(3,1)$$

$$+A(1,4)\times A(4,1)=0\times 0+1\times 1+1\times 0+1\times 0=1$$

$$A^2(1,3)=A(1,1)\times A(1,3)+A(1,2)\times A(2,3)+A(1,3)\times A(3,3)$$

$$+A(1,4)\times A(4,3)=0\times 1+1\times 1+1\times 0+1\times 0=1$$

即这两条长度为3的路径为（v_1，v_2，v_1，v_4）和（v_1，v_2，v_3，v_4）。其中（v_1，v_2，v_3，v_4）是一条初级路径，所以D中到长度为3的初级路径有1条。

（2）计算G的可达矩阵:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

显然G不是强连通的。G是单侧连通的，因为对于任意顶点偶对，至少一个结点到另一个结点是可达的

2）邻接矩阵和关联矩阵

例12.3 设M是无向图G的关联矩阵，而A是图G的邻接矩阵。

1）试证明：M的列和为2。

2）A的列和是多少?

证：（1）按M的定义，它的第j列是对应 e_j 和V(G)中结点的关联次数所成的向量，由于一条边只有两个端点，故M的列和为2。

（2）根据定义，A的第i列的列和恰为与 v_i 关联的边的数目。

证毕

3）给出一种矩阵形式求另一种

例12.4 设图G的邻接矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

求G的可达性矩阵。

解:

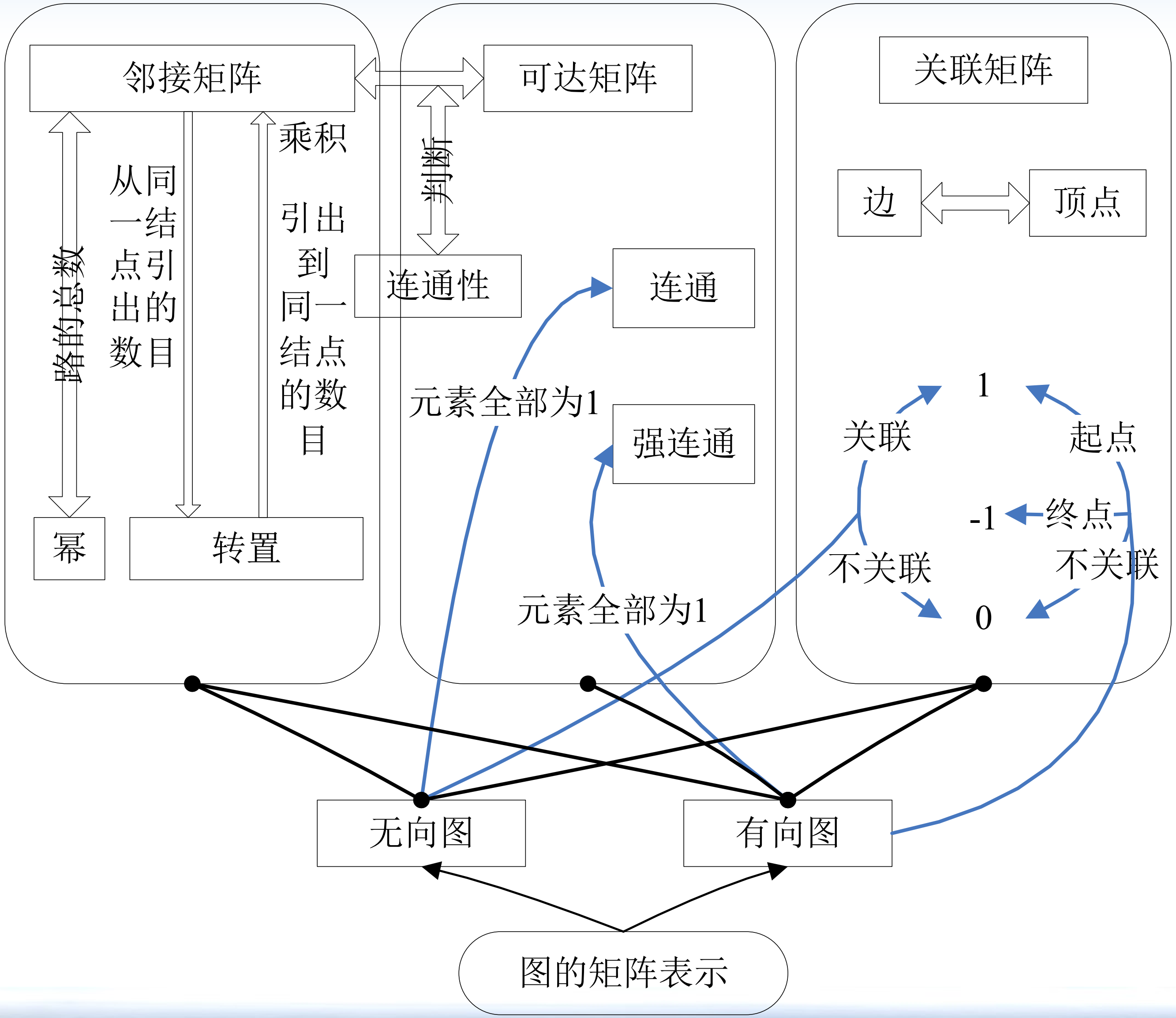
$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故:

$$C_4 = A^0 + A^1 + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可知图G中任意两个结点间均是可达的，此图是连通图。

本章小结


邻接矩阵
可达矩阵
关联矩阵
乘积
判断
从同一结点引出的数目
路的总数
引出到同一结点的数目
连通性
连通
强连通
边
顶点
幂
转置
元素全部为1
元素全部为1
1
关联
起点
-1
终点
不关联
不关联
0
无向图
有向图
图的矩阵表示