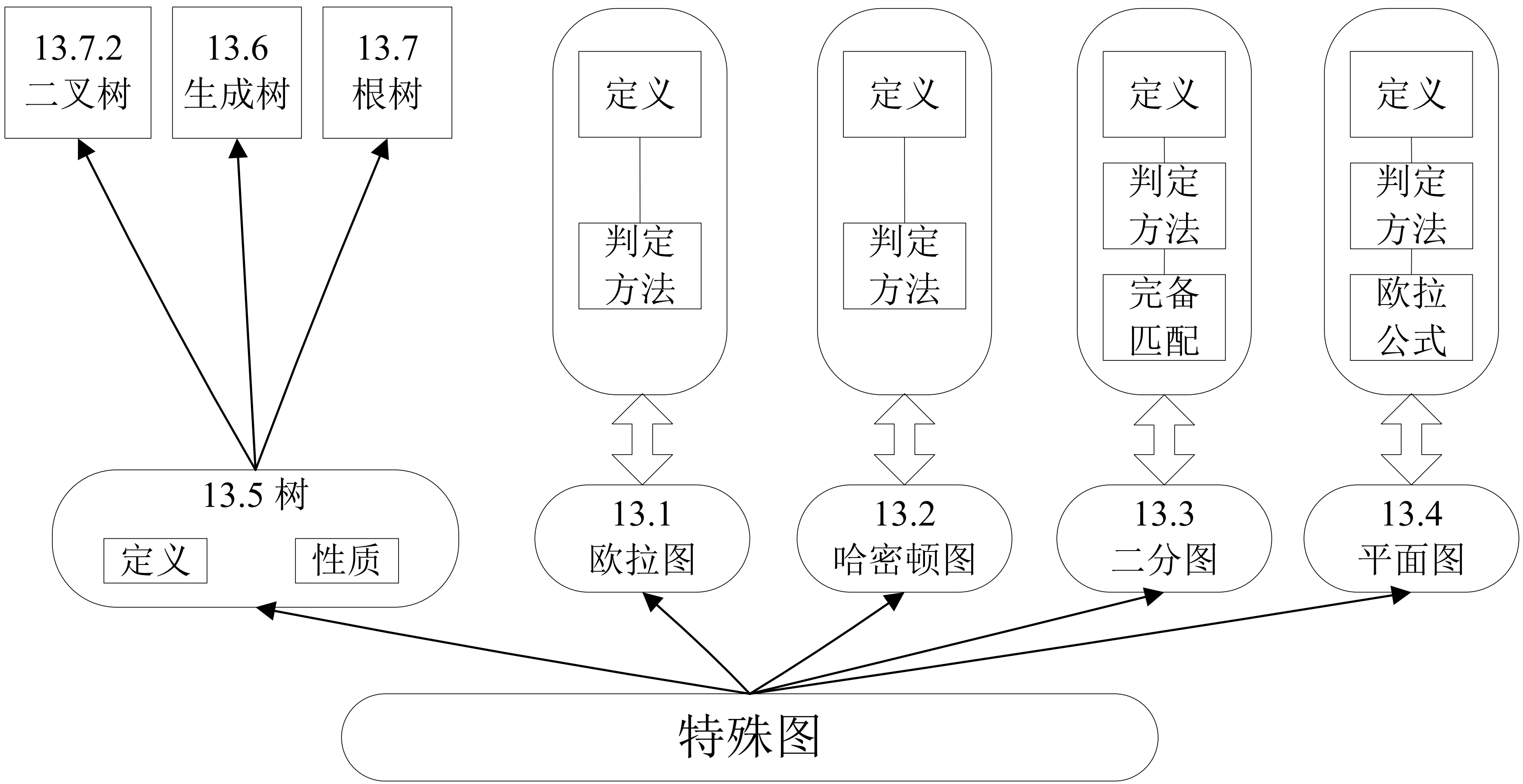
中国矿业大学(北京)
CHINA UNIVERSITY OF MINING AND TECHNOLOGY-BEIJING

第四篇 图论

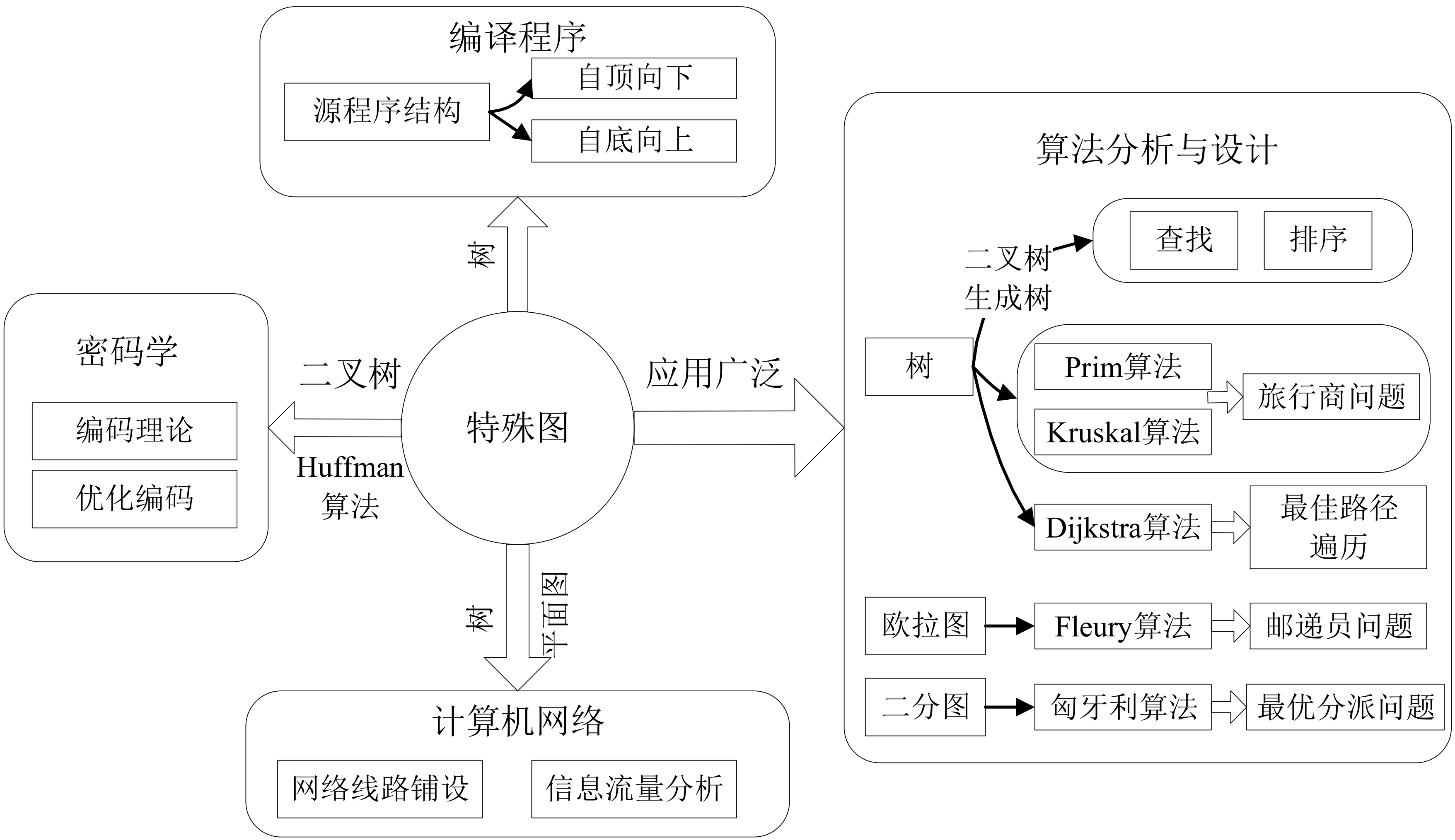
Graph Theory

第十三章 特殊图

本章各节间的关系概图


13.7.2
二叉树
13.6
生成树
13.7
根树
定义
判定方法
定义
判定方法
定义
判定方法
完备匹配
定义
判定方法
欧拉公式
13.5 树
定义
性质
13.1
欧拉图
13.2
哈密顿图
13.3
二分图
13.4
平面图
特殊图

特殊图在计算机科学技术相关领域的应用

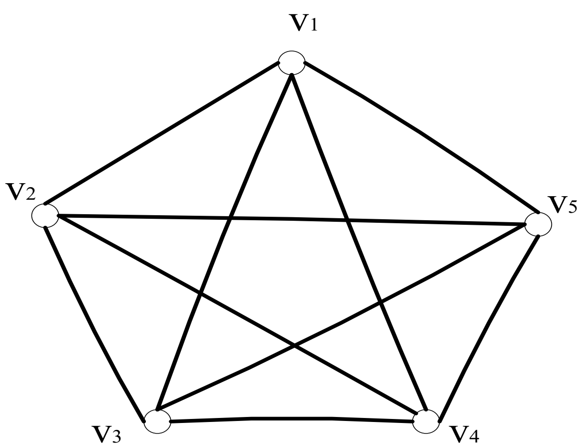


13.1 欧拉图

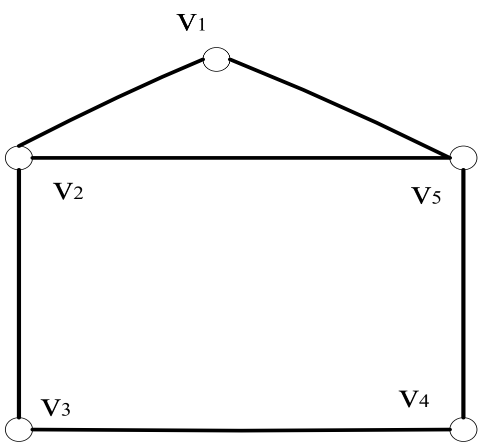
13.1.1 欧拉图的定义

定义13.1经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称为欧拉路；经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图。具有欧拉路而无欧拉回路的图称为半欧拉图。

欧拉图举例：



(a)



(b)

容易看出，（a）是欧拉图，而（b）不是欧拉图

13.1.2 欧拉图的判定

定理13.1（欧拉路的充要条件） 无向图G具有一条欧拉路，当且仅当G是连通的，且有零个或两个奇数度结点。

证：（1）必要性：设G具有欧拉路，即有点边序列 $v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2 \cdots e_i\, v_i\, e_{i+1} \cdots e_k\, v_k$，其中结点可能重复出现，但边不重复，因为欧拉路经过图G中每一个结点，故图G必连通。

① 对任意一个不是端点的结点，在一个欧拉路中每当 v_i 出现一次，必关联两条边，故虽然 v_i 可重复出现，但 $\deg(v_i)$ 必是偶数。

② 对于端点，若 $v_0 = v_k$，则 $d(v_i)$ 为偶数，即G中无奇数度结点。

若端点 v_0 与 v_k 不同，则 $d(v_0)$ 为奇数，$d(v_k)$ 为奇数，G中就有两个奇数度结点。

（2）充分性：若图G连通，有零个或两个奇数度结点，我们构造一条欧拉路如下。

① 若有两个奇数度结点，则从其中的一个结点开始构造一条迹，即从v_0出发关联e_1“进入” v_1，若deg(v_1)为偶数，则必由v_1再经过e_2进入v_2，如此进行下去，每次仅取一次。由于G是连通的，故必可到达另一奇数度结点停下，得到一条迹L1： $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots e_{i-1}\ v_i\ e_{i+1} \ldots e_k\ v_k$ G中没有奇数度结点，则从任一结点v_0出发，用上述的方法必可回到结点v_0，得到上述一条闭迹L1。

② 若L1通过了G的所有边并包含所有结点，则L1就是欧拉路。

③ 若G中去掉L1后得到子图G′，则G′中每一点的度数为偶数，因原图是连通的，故L1与G′至少有一个结点v_i重合，在G′中由v_i出发重复①的方法，得到闭迹L2。

④ 当L1与L2组合在一起，如果恰是G，则即得欧拉路，否则重复③可得到闭迹L3，以此类推直到得到一条经过图G中所有边的欧拉路。 证毕。

推论13.1（欧拉回路的充要条件） 无向图G具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，并且所有结点度数为偶数。

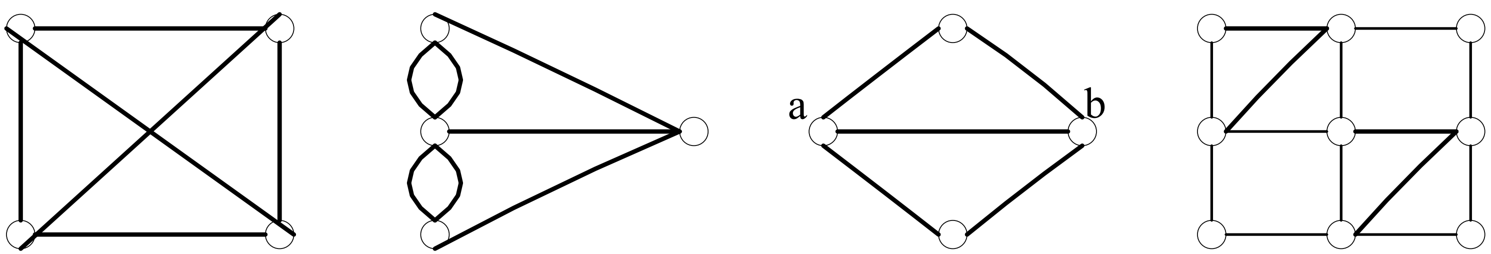
定义13.2 给定有向图G，通过每边一次且仅一次且经过图中每个顶点的一条单向路(回路)，称作**单向欧拉路（回路）**。

定理13.2 有向图G具有一条单向欧拉回路，当且仅当是连通的，且每个结点的入度等于出度。一个有向图G具有单向欧拉路，当且仅当是连通的，而且除两个结点外，每个结点的入度等于出度，但这两个结点中，一个结点的入度比出度大1。另一个结点的入度比出度小1。

民间一笔画：

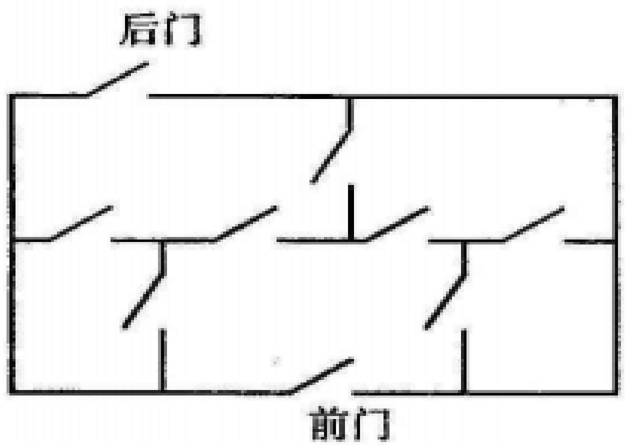
1）如果图中所有结点是偶数度结点，则可以任选一点作为始点一笔画完；

2）如果图中只有两个奇度结点，则可以选择其中一个奇度结点作为始点也可一笔画完。



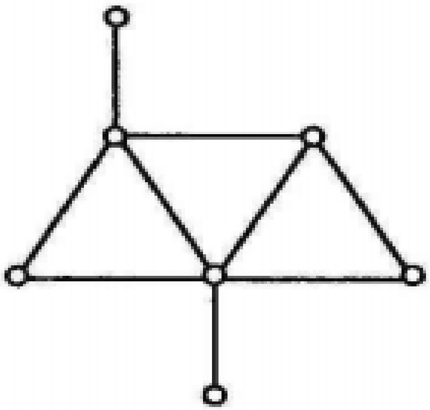
(1)　　(2)　　(3)　　(4)

例13.1 图是一幢房子的平面图形，前门进入一个客厅，由客厅通向4个房间。如果要求每扇门只能进出一次，现在你由前门进入，能否通过所有的门走遍所有的房间和客厅，然后从后门走出。



(a)

解：将4个房间和一个客厅及前门外和后门外作为结点，若两结点有边相连就表示该两结点所表示的位置有一扇门相通。由此得图（b）。由于图中有4个结点是奇度结点，故由定理13.1及其推论知本题无解。



(b)

小结：

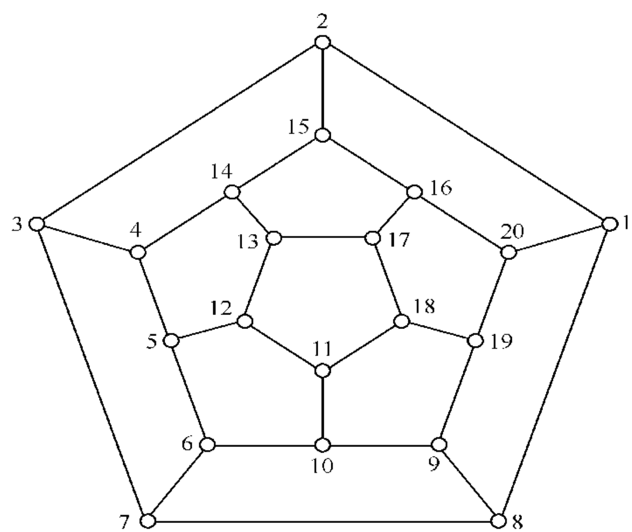
深刻理解欧拉图与半欧拉图的定义及判别定理，对于给定的图（无向或有向的），应用定理13.1和定理13.2准确判断出它是否为欧拉图。关于欧拉图的思维形式注记图如图所示。

- 欧拉图
  - 定义：存在欧拉回路
  - 判定:充要条件
    - 无向图：每个结点的度数均为偶数
    - 有向图：每个结点的入度等于出度

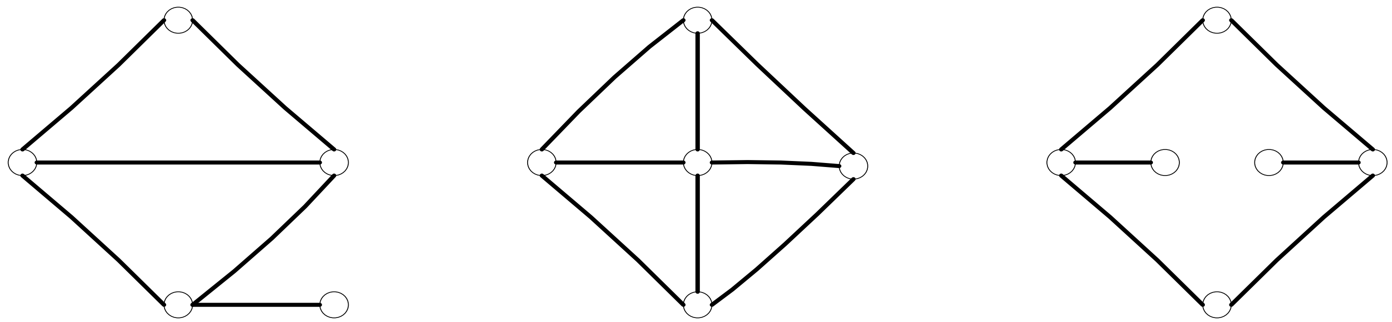
13.2 哈密顿图

13.2.1 哈密顿图的定义

与欧拉回路类似的是哈密顿回路问题。它是1859年哈密顿首先提出的一个关于12面体的数学游戏：能否在下图中找到一个回路，使它含有图中所有结点一次且仅一次？若把每个结点看成一座城市，连接两个结点的边看成交通线，那么这个问题就变成能否找到一条旅行路线，使得沿着该旅行路线经过每座城市恰好一次，再回到原来的出发地呢？为此，这个问题也被称为周游世界问题。



定义13.3 给定图G，若存在一条路经过图中的每一个结点恰好一次，这条路称作**哈密顿（Hamilton）路**。若存在一条回路，经过图中的每一个结点恰好一次，这个回路称作**哈密顿回路**。具有哈密顿回路的图称为**哈密顿图**。具有哈密顿路但不具有哈密顿回路的图称为**半哈密顿图**。


(a) (b) (c)

（a）中存在哈密顿路，不存在哈密顿回路，所以（a）是半哈密顿图，（b）中存在哈密顿回路，（b）是哈密顿图，（c）不是哈密顿图。

13.2.2 哈密顿图的判定

定理13.3（哈密顿回路的必要条件） 若图G=<V, E>具有哈密顿回路，则对于结点集V的每一个非空子集S均有W(G−S)≤|S|成立。其中W(G−S)是G−S中连通分支数。

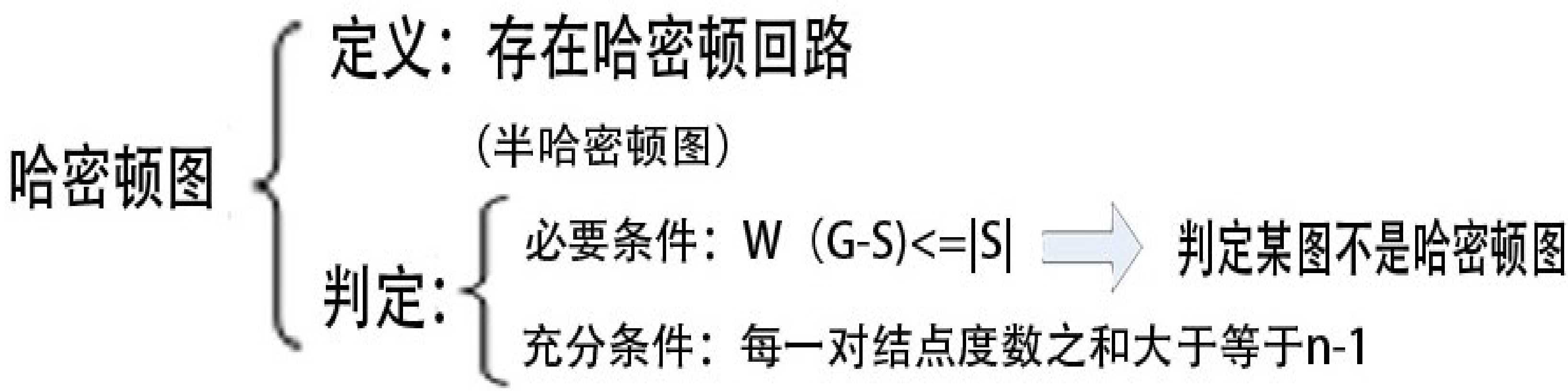
定理13. 4（奥尔定理，哈密顿路的充分条件） 设G是具有n个结点的简单无向图，如果G中每一对不相邻顶点的度数之和大于等于$n-1$，则在G中存在一条哈密顿路。

例13.2 某地有5个风景点。若每个景点均有两条道路与其他景点相通，问是否可经过每个景点恰好一次而游完这5处？

解：将景点作为结点，道路作为边，则得到一个有5个结点的无向图。由题意，对每个结点v_i，有 $\deg(v_i)=2(i\in N_5)$ 。则对任意两点 $v_i,v_j(i,j\in N_5)$ 均有 $\deg(v_i)+\deg(v_j)=2+2=4=5-1$ 可知此图一定有一条哈密顿路，本题有解。

小结：

（1）深刻理解哈密顿图及半哈密顿图的定义；（2）分清哈密顿图的必要条件和充分条件，会用哈密顿图的必要条件证明某些图不是哈密顿图。关于哈密顿图的思维形式注记图如图所示。



13.3 二分图

二分图及判定定理

定义13.4　无向图G=<V,E>中的结点集合V如果可以划分成两个不相交的子集X和Y，使得G中的每一条边的一个端点在X中而另一个端点在Y中，则称G为二部图或二分图，记为G=<X,E,Y>。

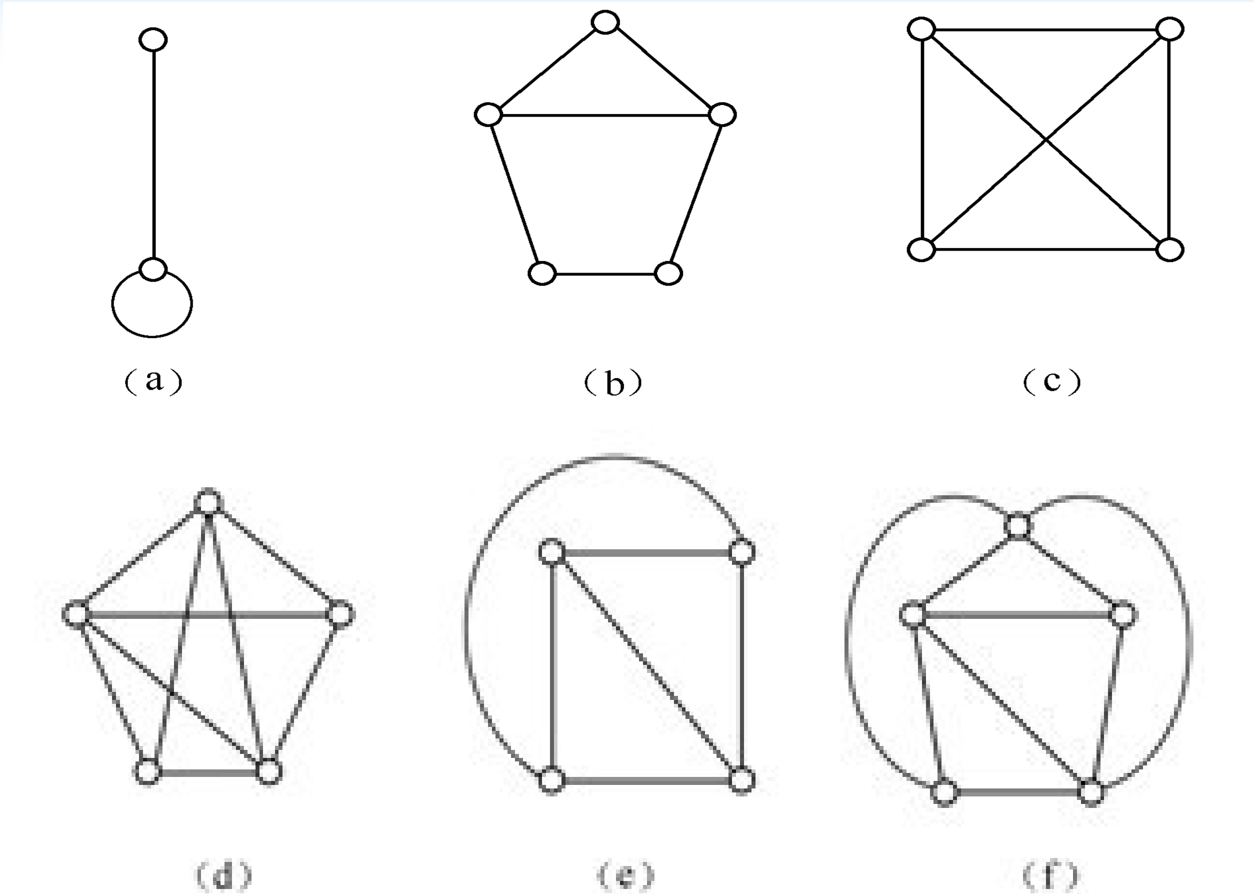
定义13.5 设G=<X, E, Y>是一个二分图，若G是一个简单图，并且X中的每个结点与Y中的每个结点均邻接，则称G为**完全二分图**。如果|X|=m，|Y|=n，在同构的意义下，这样的完全二分图只有一个，记为$K_{m,n}$。

定理13.6 设G是无向图，G是二分图当且仅当G中所有回路的长度均为偶数。

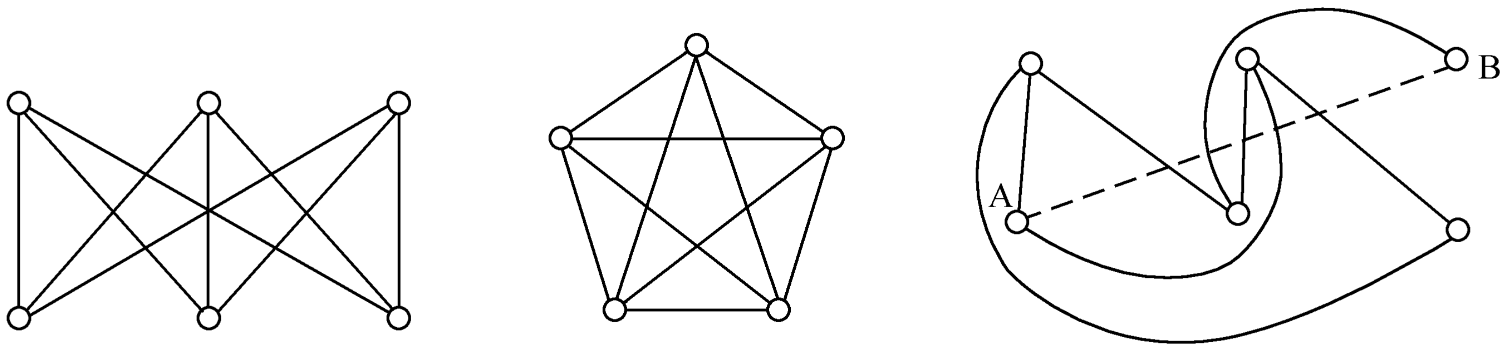
13.4 平面图

平面图的概念

定义13.7　如果能将无向图G画在平面上使得除顶点外无边相交，则称G是**可平面图**，简称**平面图**。画出的无边相交的图称为G的平面嵌入。无平面嵌入的图称为**非平面图**。



（*a*），（*b*）显然是平面图。同样地，图（*c*），（*d*）也是平面图。如果将图（*c*），（*d*）分别表示为图（*e*），（*f*），则很容易看出这个事实。



（a） （b） （c）

$K_{3,3}$无论怎样画，总有边相交，图（*c*）是其中一种情况。图（*b*）K_5和图（*a*）的情况相同。

主要结论：

(1) K_5, $K_{3,3}$都不是平面图

(2) 设$G' \subseteq G$，若G为平面图，则G'也是平面图

(3) 设$G' \subseteq G$，若G'为非平面图，则G也是非平面图，由此可知，$K_n(n \geq 6)$，$K_{3,n}(n \geq 4)$ 都是非平面图.

(4) 平行边与环不影响平面性.

欧拉公式

高中立体几何多面体：欧拉定理给出了简单多面体顶点数(v)、棱数(e)和面数(r)之间的关系，即：$v-e+r = 2$

定理13.10(欧拉定理) 设有一个连通平面图G,共有v个顶点、e条边、r块面，则有如下**欧拉公式**成立：

$$v-e+r = 2$$

平面图的判定(必要条件)

定理13.11 设G为有v个顶点、e条边的简单连通平面图，

若$v \geq 3$，则$e \leq 3v-6$

定理13.12 设G为有n个顶点、m条边的简单连通平面图，

若G中的每个面至少由k条边围成，则$m \leq \frac{k(n-2)}{k-2}$

平面图的判定(充要条件)

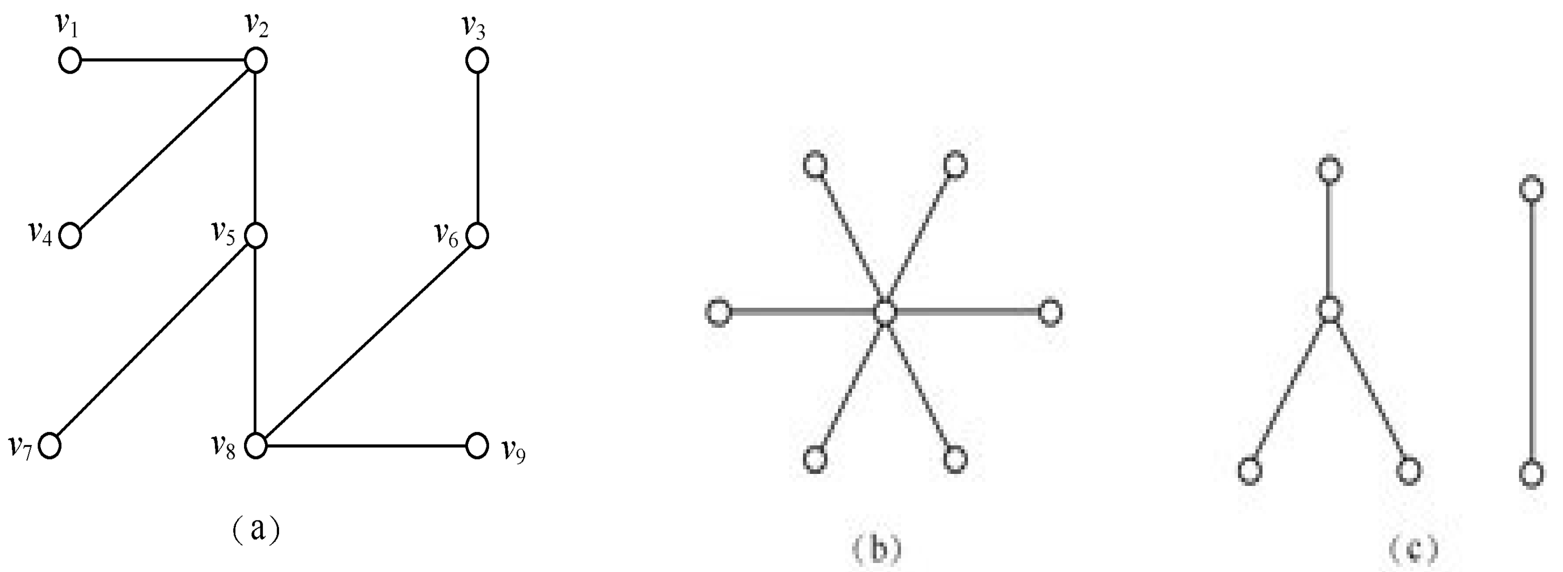
定义13.9 给定两个图G_1和G_2，如果它们是同构的或者通过反复插入或删除度数为2的顶点后使G_1和G_2同构，则称该图是在2度顶点内同构。

定理13.13(库拉托斯基Kuratowski定理) 一个平面图，当且仅当它不包含与$K_{3,3}$或K_5在2度顶点内同构的子图。

13.5 树

13.5.1 树的定义及其相关术语

定义13. 11　一个连通且无回路的无向图称为**无向树**，简称**树**。在树中度数为1的结点称为**树叶**，度数大于1的结点称为**分支点（内点）**。单一孤立结点称为**平凡树**。如果一个无回路的无向图的每一个连通分支是树，且连通分支数大于等于2，那么称为**森林**。



（a）、（b）为树，（c）为森林。

13.5.2 树的性质

定理13.14设G=<V,E>是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

- 证明思路
- (1)⇒(2). 关键一步是, 若路径不惟一必有回路.
- (2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一. 对n用归纳法证明$m=n-1$.

$n=1$正确. 设$n\le k$时对，证$n=k+1$时也对：取G中边e，因为G中无回路，故$G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2. $n_i\le k$，由归纳假设得$m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

- (3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge 2$）个连通分支因为都没有回路，所以都是小树. 根据前述结论，于是有$m_i=n_i-1$,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s\ (s\ge 2)$$

- 这与$m=n-1$矛盾.

- (4)⇒(5). 只需证明G 中每条边都是桥. 因为$\forall e\in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由习题“设G是n阶m条边的无向连通图，证明$m>=n-1$”,可知$G-e$不连通，故e为桥.
- (5)⇒(6). 由(5)易知G中无回路，而且G连通，所以G为树，由(1)⇒(2)知，$\forall u,v\in V$（$u\neq v$），

  u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈.
- (6)⇒(1). 只需证明G连通，这是显然的.

定理13.15 树和森林都是平面图

定理13.16 任何非平凡的无向树至少有两片叶子。

证 设 T 有 x 片树叶，由握手定理及定理13.14可知，

$$2(n-1)=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

性质的应用

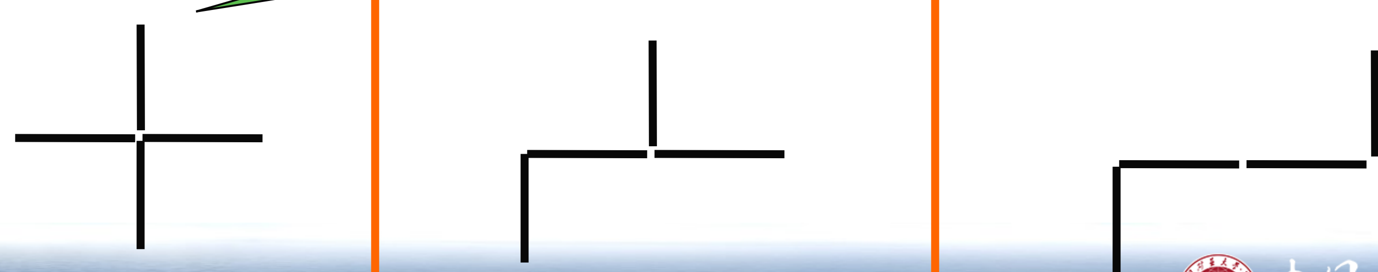
❖ 以上两个定理给出了无向树的主要性质，利用这些性质和握手定理，可以画出阶数n比较小的所有非同构的无向树。

例1 ：画出5阶所有非同构的无向树。

解：设T_i为5阶无向树, 则T_i的边数为4， T_i的度序列之和为8， $\triangle(T_i)\leqslant 4$, $\delta(T_i)\geqslant 1$，可能的度序列为：

(1) 1, 1, 1, 1, 4　　(2) 1, 1, 1, 2, 3　　(3) 1, 1, 2, 2, 2

称只有一个分支点且其度数为n-1的n阶无向树为星形图，称唯一的分支点为星心。



例2：无向树G有5片树叶，3个2度分支点，其余分支点均为3度，问G有多少个顶点？

解：由握手定理 $2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$

及定理13.14 $m = n-1$

设G有n个顶点,则有下列关系式

$$5*1+3*2+(n-5-3)*3=2*(n-1)$$

解得：n=11

举例

例3 **已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.**

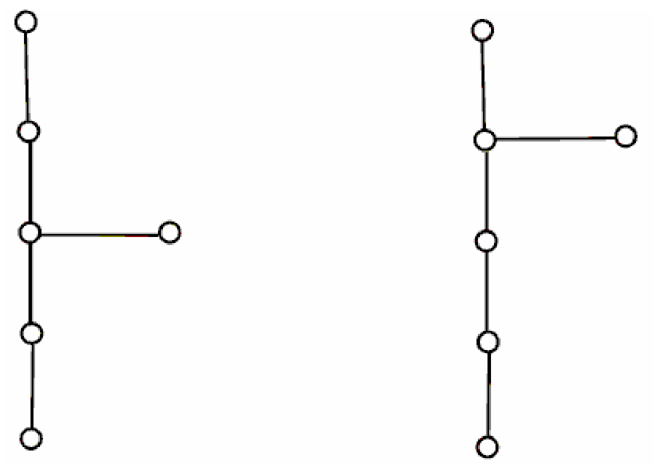
解 设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，

易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



T_1　　T_2

小结：

（1）深刻理解无向树的定义，熟练掌握无向树的主要性质，并能灵活应用它们。

（2）熟练地求解无向树，准确地画出阶数较小的所有非同构的无向树。关于树的术语和性质的思维形式注记图如图所示。

- 树
  - 树的定义
  - 相关术语
    - 树叶　分枝点
    - 平凡树　森林
  - 树的性质
    - 六个等价命题
    - 任何树至少有两片叶子

13.6 生成树

13.6.1 生成树的定义

定义13.12　给定一个无向图G，若G的一个生成子图T是一颗树，则称T为G的**生成树**或**支撑树**。

定义13.12 设G为无向图

(1) G的树——T 是G 的子图并且是树

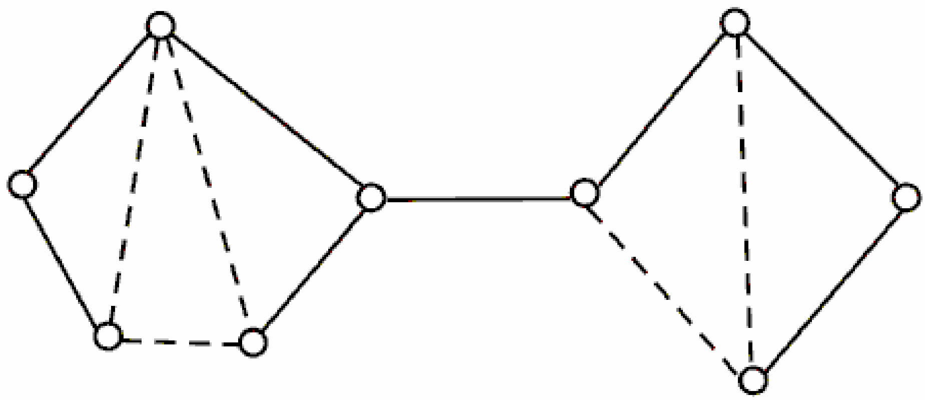
(2) G的生成树——T 是G 的生成子图并且是树

(3) 生成树T的树枝——T 中的边

(4) 生成树T的弦——不在T 中的边

(5) 生成树T的余树 $\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示



定理无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证　必要性显然.

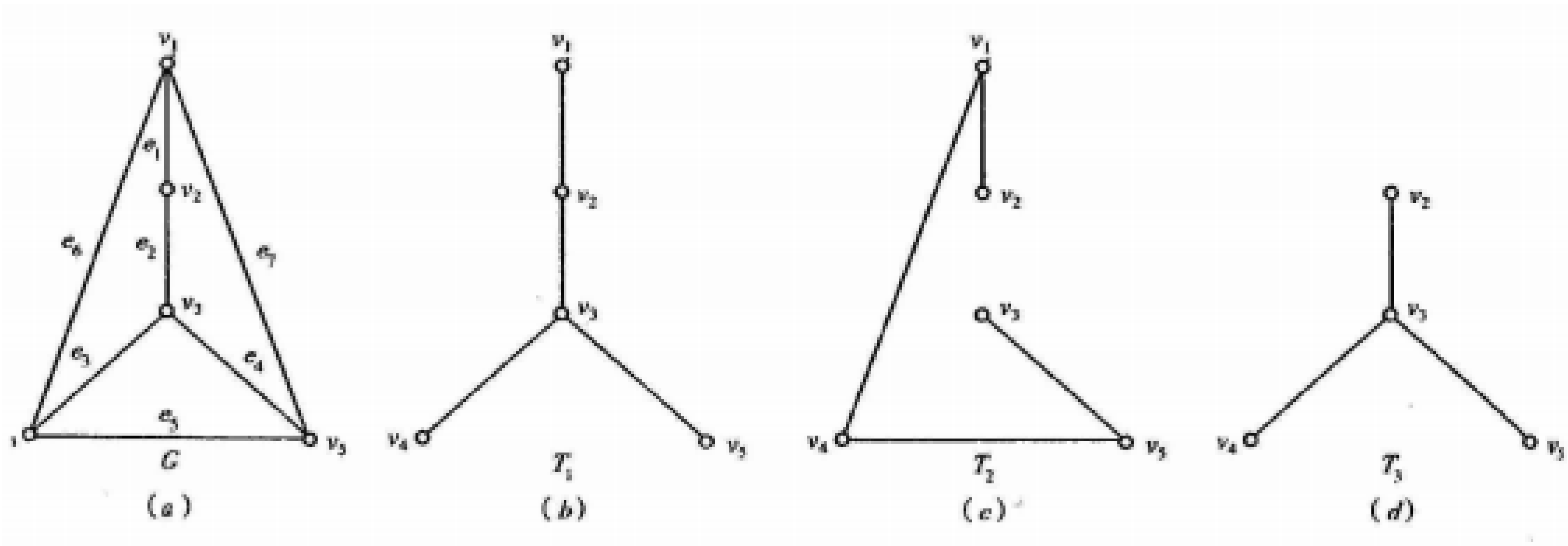
充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性）

推论1　G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.

推论2　$\overline{T}$ 的边数为$m-n+1$.

推论3 $\overline{T}$为G的生成树T的余树，C为G中任意一个圈，则C与$\overline{T}$ 一定有公共边.

证　否则，C中的边全在T中，这与T为树矛盾.



（b）、（c）所示的树、是（a）图的生成树，而（d）所示的树不是（a）图的生成树。一般的，图的生成树不唯一。

基本(fundamental)回路系统

定理 设T为G的生成树，e为T的任意一条弦，则$T\cup e$中含一个只有一条弦其余边均为T的树枝的圈. 不同的弦对应的圈也不同.

证 设$e=(u,v)$，在T中u到v有惟一路径Γ，则$\Gamma\cup e$为所求的圈.

定义 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$的弦. 设$C_r$为$T$添加弦$e'_r$产生的只含弦$e'_r$、其余边均为树枝的圈. 称$C_r$为$G$的对应树$T$的弦$e'_r$的**基本回路**或**基本圈**，$r=1, 2, \ldots, m-n+1$. 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$的**基本回路系统**，称$m-n+1$为$G$的**圈秩**，记作$\xi(G)$.

求基本回路的算法： 设弦$e=(u,v)$，先求T中u到v的路径Γ_{uv}，再并上弦e，即得对应e的基本回路.

基本割集的存在

定理 设T是连通图G的一棵生成树，e为T的树枝，则G中存在只含树枝e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.

证 由树的性质可知，e是T的桥，因而$T-e$有两个连通分支T_1和T_2，令

$S_e=\{e \mid e\in E(G)$且 e 的两个端点分别属于$V(T_1)$和$V(T_2)\}$，

由构造显然可知S_e为G的割集，$e\in S_e$且S_e中除e外都是弦，

所以S_e为所求. 显然不同的树枝对应的割集不同.

基本割集与基本割集系统

定义 设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$为$T$的树枝，$S_i$是$G$的只含树枝$e'_i$的割集，则称$S_i$为$G$的对应于生成树$T$由树枝$e'_i$生成的**基本割集**，$i$=1, 2, …, n−1. 并称$\{S_1,S_2, \ldots, S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的**基本割集系统**，称$n$−1为$G$的**割集秩**，记作$\eta(G)$.

求基本割集的算法

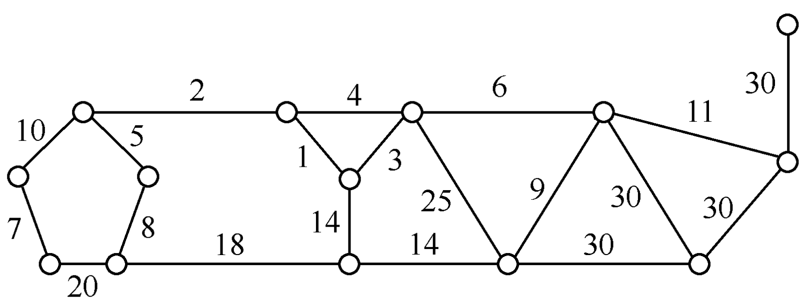
设e'为生成树T的树枝，$T-e'$为两棵小树T_1与T_2，令

$$S_{e'}=\{e \mid e\in E(G)\text{且}e\text{的两个端点分别属于}T_1\text{与}T_2\}$$

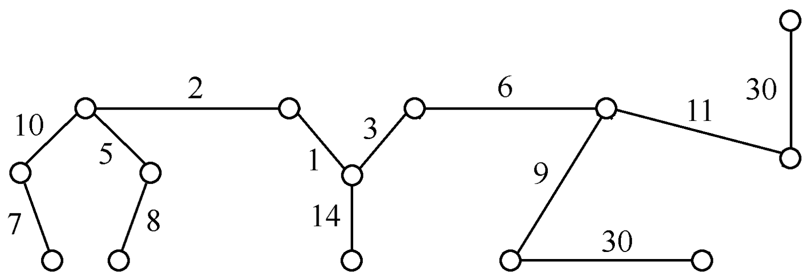
则 $S_{e'}$为e' 对应的基本割集.

13.6.2 最小生成树

定义13. 13 设G是具有n个结点的带权连通图。G的生成树T的**所有边的权之和为树的权**。在图G的所有生成树中，树权最小的那棵生成树称作**最小生成树**。



（a）



（b）

（a）、（b）给出了一个带权图及其最小生成树的例子。

算法13.1避圈法（Kruskal算法） 设图G有n个结点，按以下步骤可以求得图G的最小生成树。

1）按权值升序将图G的边排序，得到表L;

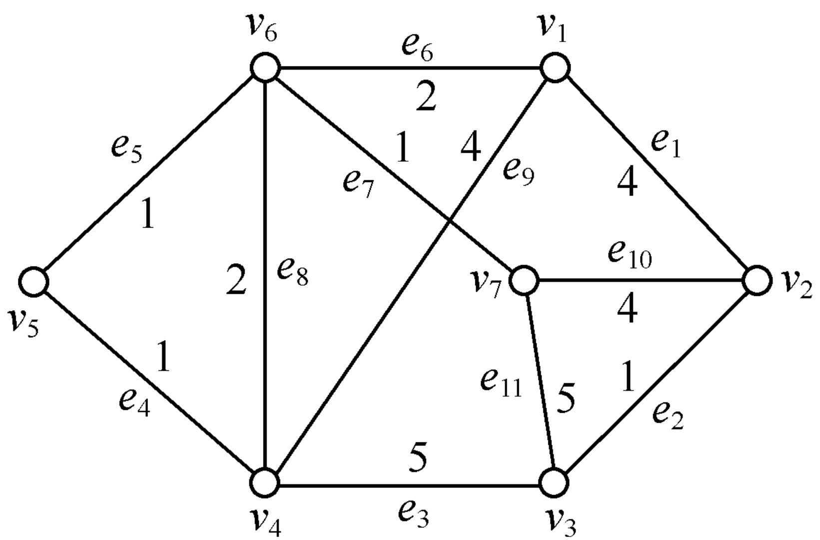
2）令 $S=\varnothing$ ；

3）在表L中依次选取下一条边e，如果$e\notin S$ ，且$S\cup\{e\}$构成的子图是无圈图，则令 $S=S\cup\{e\}$

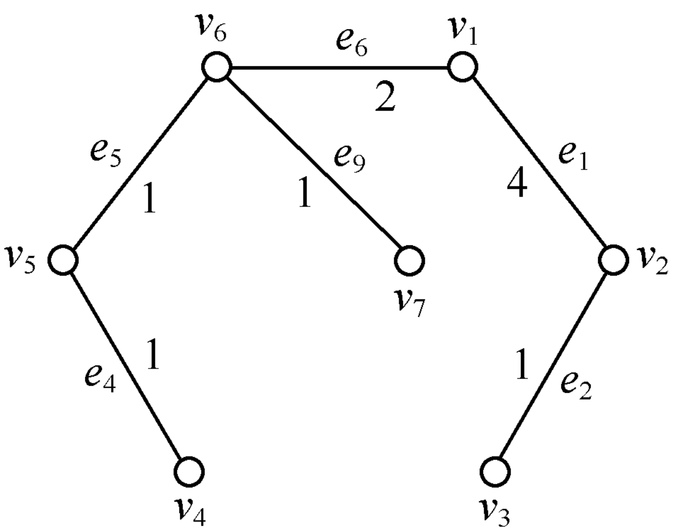
4）若|S|=n−1，则算法停止，输出集合S即为所求。否则，转3），继续遍历表L。

可以证明，算法13.1求得的是图G的最小生成树。

例13.7　应用算法13.1求图G的最小生成树，G如图（a）所示。



（a）



（b）

解:

（1）根据Kruskal算法，首先根据图G得到按权值的边排序表

L: e_5，e_9，e_2，e_4，e_6，e_8，e_7，e_1，e_{10}，e_3，e_{11}

（2）然后，令 $S=\varnothing$ 。

（3）接下来，依次将e_5，e_7，e_2，e_4，e_6，e_1放入S中;

边 e_8，e_9 ，被忽略，因为它们的加入会形成圈。

（4）此时S中有6条边，满足$|S|=n-1$，所以算法结束。

得到的最小生成树如图（b）所示，树权为10。

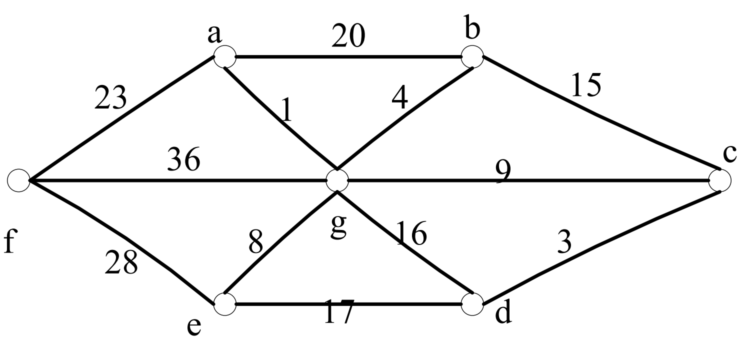
算法13.2（Prim算法）

1）选出结点v，令$V(T)=\{v\}$，$E(T)=\varnothing$；

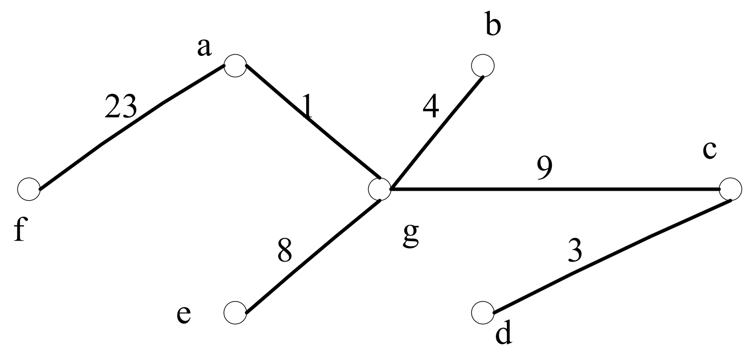
2）在所有 $u\notin V(T)$ 的结点中，若连接结点u和w的边$e=(u，w)$是最小权重边，其中 $w\in V(T)$ 则令 $V(T)=V(T)\cup\{u\}$，$E(T)=E(T)\cup\{(u，w)\}$；

3）若$|E(T)|=n-1$，算法停止，输出E(T)。否则，转2），继续向树中增加新结点。

例13.8 下左图所示的赋权图G表示七个城市a，b，c，d，e，f，g及架起城市间直接通讯线路的预测造价。试给出一个设计方案使得各城市间能够通讯并且总造价最小，并计算出最小造价。



G



T_G

解：该问题相当于求图的最小生成树问题，此图的最小生成树为图中的T_G，因此如图架线使各城市间能够通讯，并且总造价最小，最小造价为：

$$W(T_G)=1+3+4+8+9+23=48.$$

算法13.3（破圈法）

1）令E’=E;

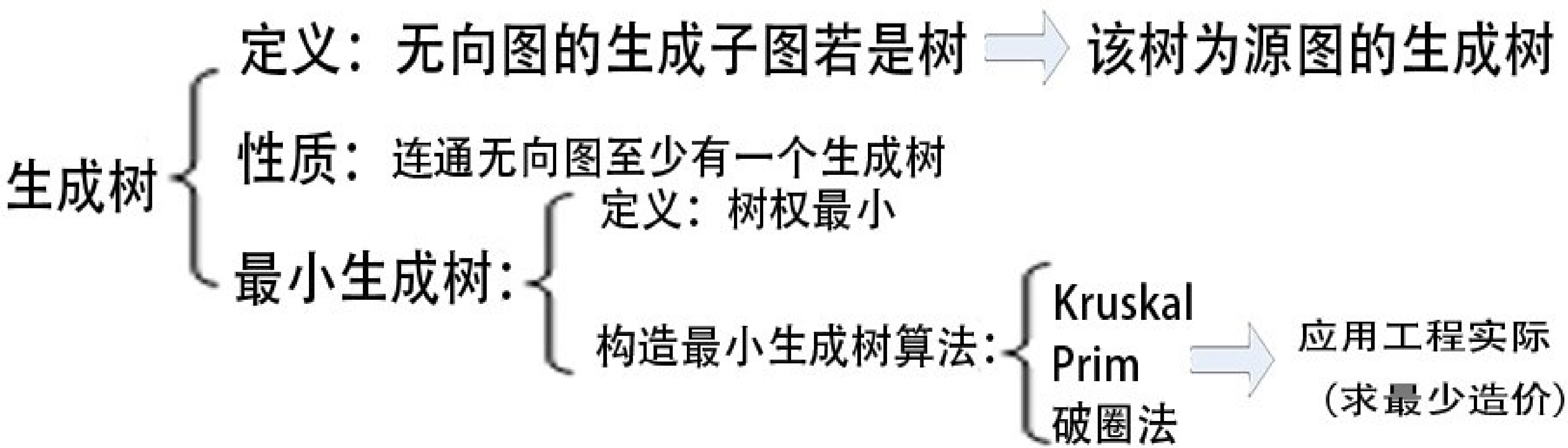
2）选取E’中的一条简单回路C，设C中权最大的边为e，令E’=E’-{e}；

3）重复步骤2），直到|E’|=|V|-1为止。

不停地选取图G中的一条简单回路，从回路中删去权值最大的一条边，直到图中无简单的回路为止。

小结：

（1）深刻理解基本回路、基本回路系统、基本割集、基本割集系统，并且对给定的生成树能熟练地求出它们。（2）熟练地应用Kruskal算法求最小生成树。关于生成树的思维形式注记图如图所示。



13.7 根树

- 根树
- 根树的周游
- 最优树, *Huffman*算法
- 最佳前缀码

13.7.1 根树的定义

定义 T是有向树（基图为无向树）

(1) T 为根树——T 中一个顶点入度为0，其余的入度均为1.

(2) 树根——入度为0的顶点

(3) 树叶——入度为1，出度为0的顶点

(4) 内点——入度为1，出度不为0的顶点

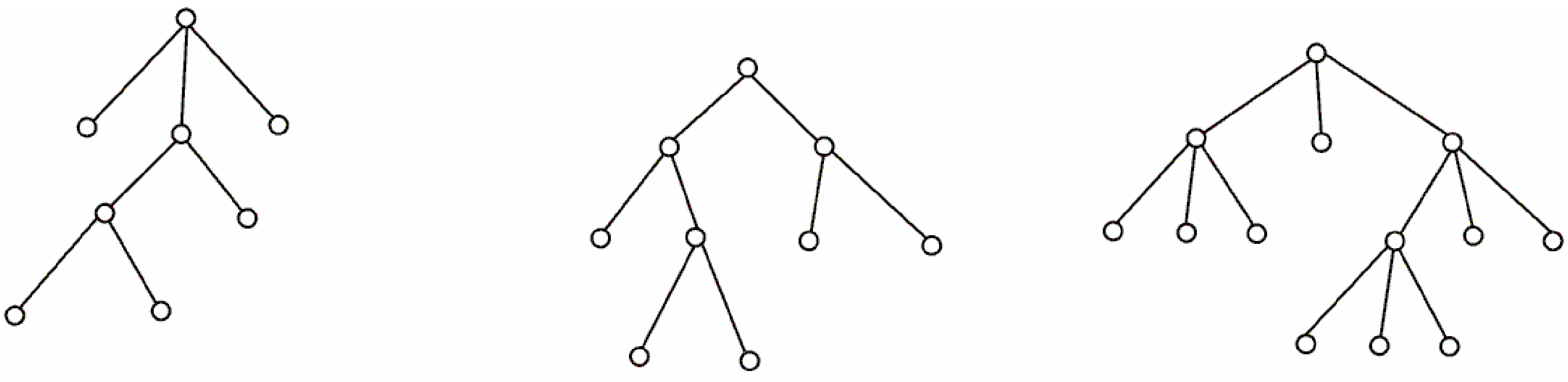
(5) 分支点——树根与内点的总称

(6) 顶点v的层数——从树根到v的通路长度

(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

(8) 平凡根树——平凡图

根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



家族树与根子树

定义 T 为非平凡根树

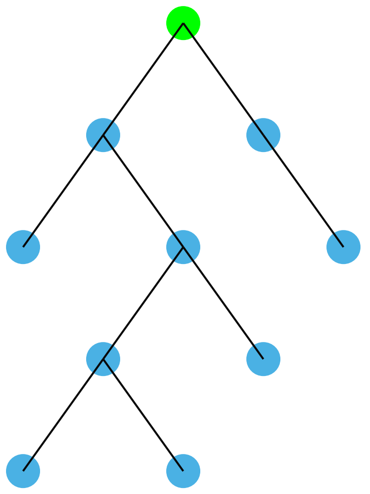
祖先: 从 u 可达 v, u 是 v 的祖先

后代: 从 u 可达 v, v 是 u 的后代

儿子: u 邻接到 v, v 是 u 的儿子

父亲: u 邻接到 v, u 是 v 的父亲

兄弟: u 与 v 有相同父亲, u 是 v 的兄弟



定义 设 v 为根树 T 中任意一顶点，称 v 及其后代的导出子图为以 v 为根的根子树.

13.7.2 二叉树

(1) T 为有序根树——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

① r 叉树——每个分支点至多有r 个儿子

② r 叉有序树——r 叉树是有序的

③ r 叉正则树——每个分支点恰有r 个儿子

④ r 叉正则有序树

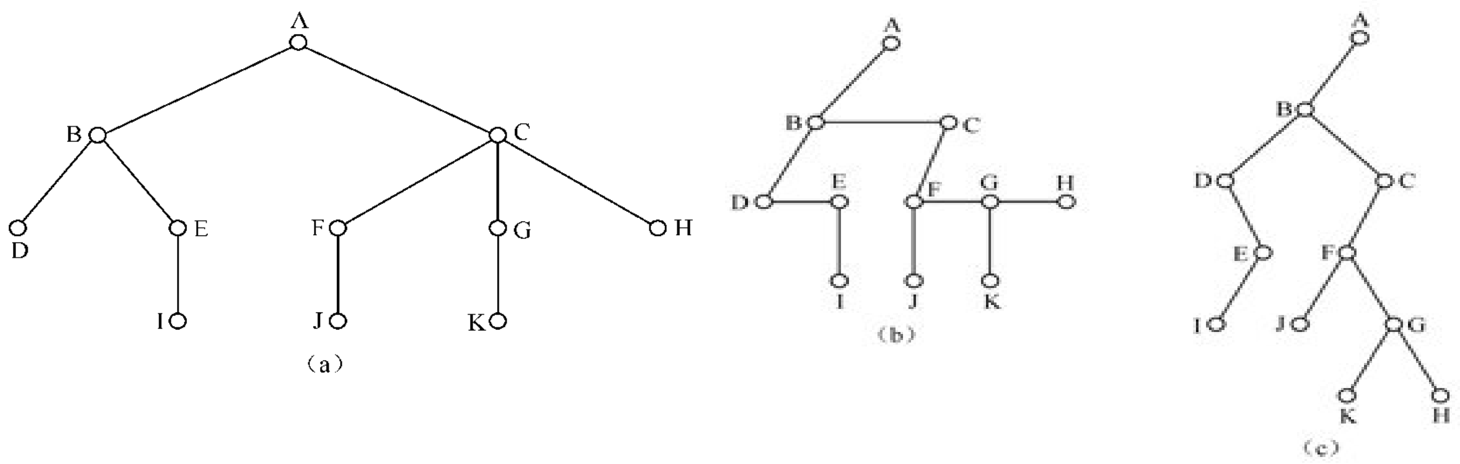
⑤ r 叉完全正则树——树叶层数相同的r叉正则树

⑥ r 叉完全正则有序树

我们特别关注r=2的特别情况。

- 完全二叉树(**Complete Binary Tree**)
- 若设二叉树的深度为h，除第 h 层外，其它各层 (1～h-1) 的结点数都达到最大个数，第 h 层所有的结点都连续集中在最左边，这就是完全二叉树。

- 任何一棵*m*叉树都可以改写为一棵对应的二叉树。方法如下：
- 首先，保留每个结点最左边的分支点，删去所有其他分支。同一层中，兄弟结点之间以从左到右的无向边连接。然后，将直接处于给定结点下面的结点，作为左儿子，与给定结点处于同一水平线上的右邻结点作为右儿子。



- 同样地，此方法可以推广到森林，将森林改写为二叉树。

定义 设2叉树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T **的权**，其中$l(v_i)$是v_i的层数. 在所有有t片树叶，带权$w_1, w_2, \ldots, w_t$的2叉树中，权最小的2叉树称为**最优2叉树**.

求最优树的算法—— *Huffman*算法

输入: 实数$w_1,w_2,\ldots,w_t$,

输出: 树叶权为$w_1,w_2,\ldots,w_t$的最优2叉树

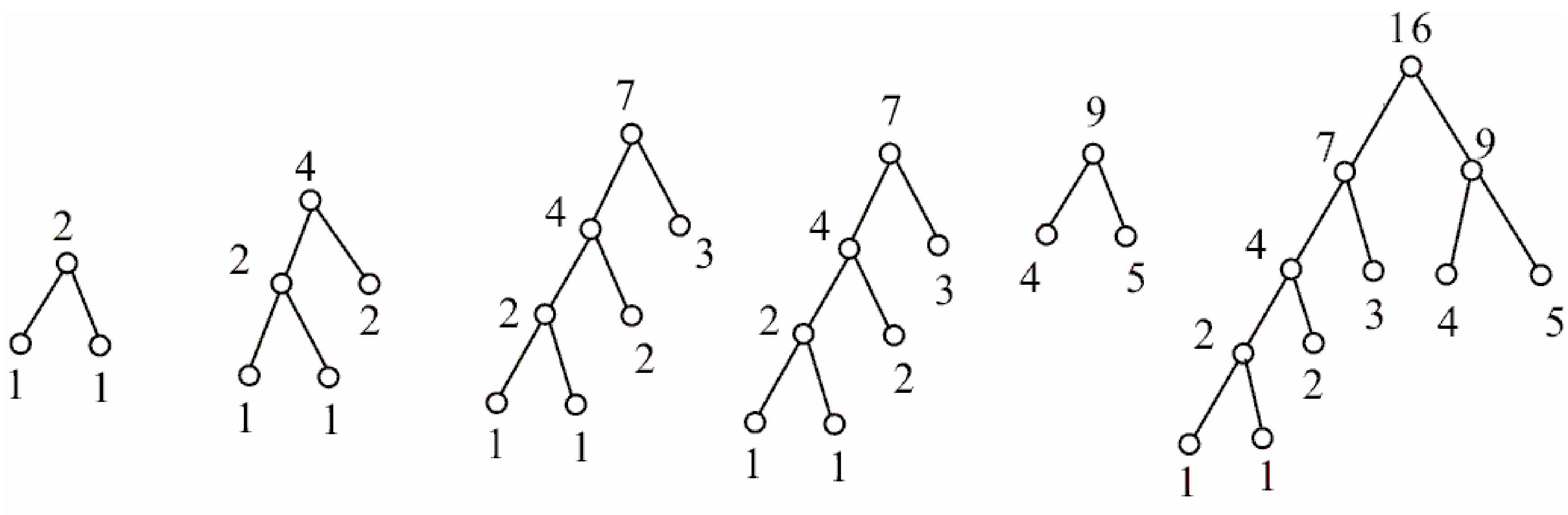
算法: 1. 选择最小的2个权w_1,w_2, 连接对应的树叶得到权为w_1+w_2的分支点；

2. 选择w_1+w_2 ,$w_3,w_4, \ldots,w_t$中最小的2个权, 连接对应顶点得到新的分支点和权；

3. 同上重复进行, 直到只剩1个权为止

例 求带权为1, 1, 2, 3, 4, 5的最优树.

解题过程由下图给出，$W(T)$=38



不等长编码

若{0,1,2,…,7}出现频率不一样,则出现频率高的用短码字

例: 频率递减: 0,1,2,3,4,5,6,7, 编码为

0,1,00,01,10,11,000,001.

若收到000111, 不能唯一解码:

651, 235, 075,…等.

原因: 码字互为前缀,如00是001的前缀

最佳前缀码

定义 设$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n$是长度为 n 的符号串

(1) **前缀**——$\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$

(2) **前缀码**——$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$中任何两个元素互不为前缀

(3) **二元前缀码**——$\beta_i\,(i=1, 2, \ldots, m)$ 中只出现两个符号，如0与1.

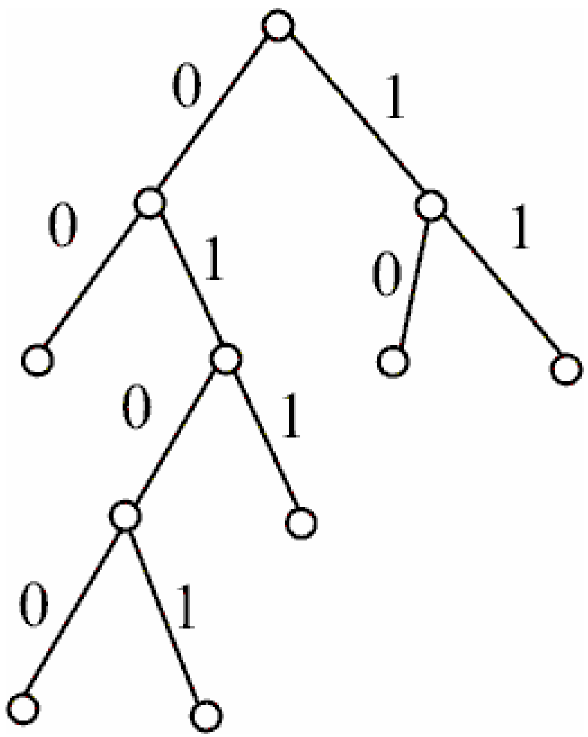
如何产生二元前缀码?

定理 任何一棵2叉树的树叶可对应一个二元前缀码.

推论 一棵正则2叉树产生惟一的前缀码（按左子树标0，右子树标1）

下图所示2叉树产生的前缀码为

{ 00, 10, 11, 011, 0100, 0101 }



用Huffman算法产生最佳前缀码

例 在通信中，八进制数字出现的频率如下：

0：25%　　1：20%

2：15%　　3：10%

4：10%　　5：10%

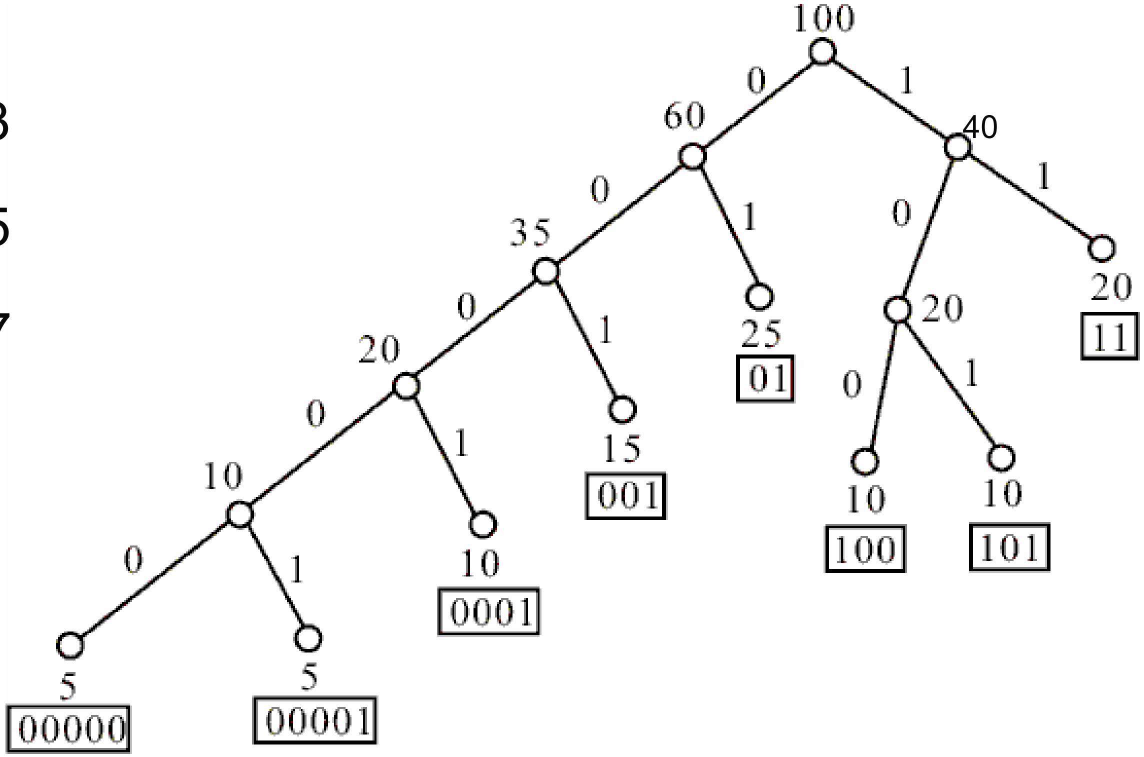
6：5%　　7：5%

求传输它们的最佳前缀码，并求传输10^n（$n\geq 2$）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为3）的码字传输需要多少个二进制数字？

解 用100个八进制数字中各数字出现的个数，即以100乘各频率为权，并将各权由小到大排列，得w_1=5, w_2=5, w_3=10, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=25. 用此权产生的最优树如图所示.

01-----0	11-----1
001-----2	100-----3
101-----4	0001-----5
00000-----6	00001-----7

$W(T)$=285，传$10^n(n\geq2)$个用二进制数字需2.85×10^n个， 用等长码需3×10^n个数字.



波兰符号法与逆波兰符号法

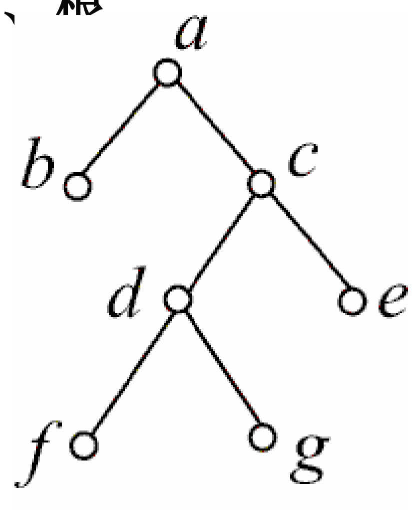
遍历或**周游根树** T——对 T 的每个顶点访问且仅访问一次.

对2叉有序正则树的周游方式：

① **中序遍历法**——次序为：左子树、根、右子树

② **前序遍历法**——次序为：根、左子树、右子树

③ **后序遍历法**——次序为：左子树、右子树、根



对图所示根树按中序、前序、后序遍历法访问结果分别为：

$b\ \underline{a}\ (f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e$,

$\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$,

$b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$

用2叉有序正则树存放算式

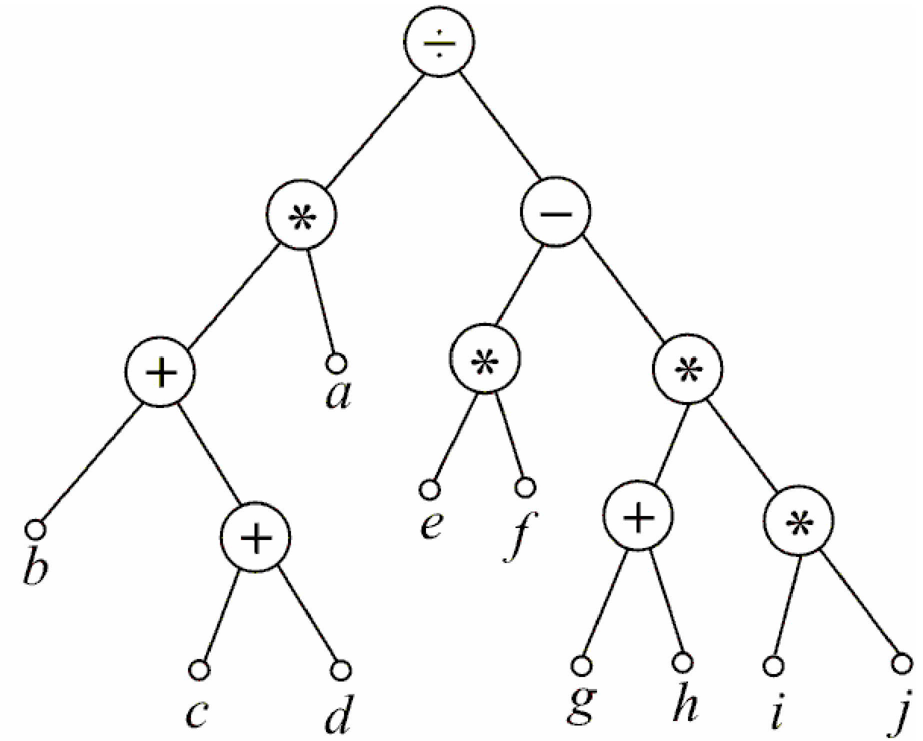
存放规则：

最高层次运算放在树根；

后依次将运算符放在子树的根上；

数放在树叶上；

规定：被除数、被减数放在左子树树叶上 。



算式 $((b+(c+d))*a)\div((e*f)-(g+h)*(i*j))$

存放在图所示2叉树上.

波兰符号法

波兰符号法

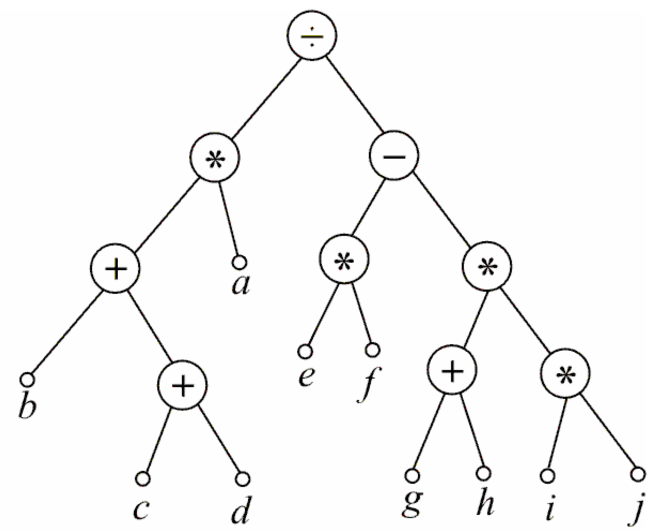
按前序遍历法访问存放算式的2叉有序正则树，其结果不加括号，规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算，运算结果正确. 称此算法为波兰符号法或前缀符号法. 对前图的访问结果为

$$\div * + b + c\, d\, a - * e\, f * + g\, h * i\, j$$

逆波兰符号法

按后序遍历法访问，规定每个运算符与前面紧邻两数运算，称为逆波兰符号法或后缀符号法. 对上图的访问结果为

$$b\, c\, d + + a * e\, f * g\, h + i\, j * * - \div$$



13.8 常见题型解析

1）树的性质。

2）解无向树与生成树、最小生成树。

3）基本回路与基本割集。

4）根树与二叉树。

5）综合应用。

1）树的性质

例13.15　试证明：如果无环图G的任意两顶点都被唯一的路相连，则G是树。

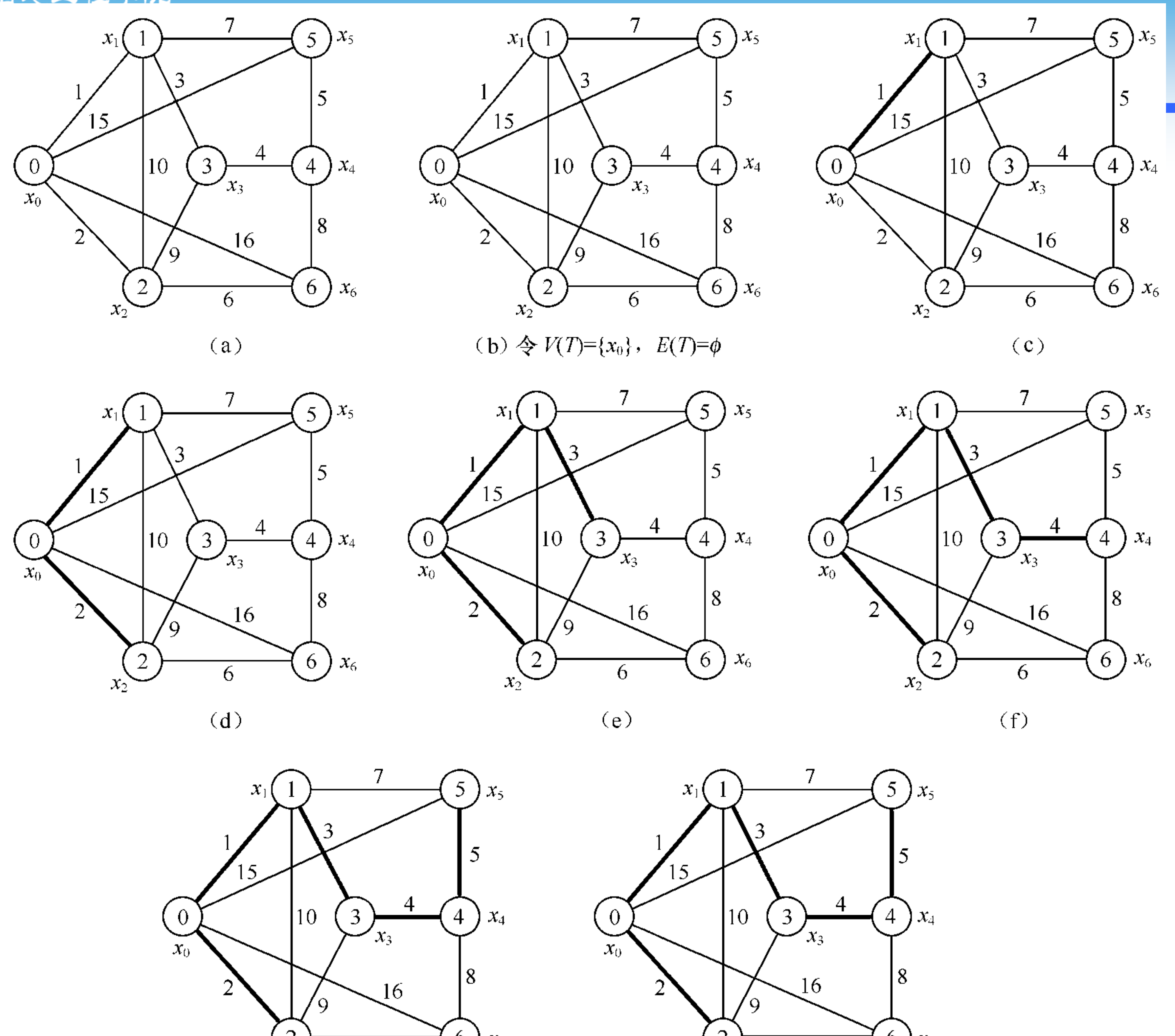
证：由于G中任意两顶点都被唯一的路相连，故G连通。又若G含有圈C，则C上的两点，在G中存在两条路相连，这与“唯一的路”的假定矛盾，故G中不含圈，由树的定义，G是树。

证毕。

2）解无向树与生成树、最小生成树

例13.16　考虑图（a）所示的加权图(G, w)。按Prim算法构造最小生成树T。

解：求解过程如图所示，其中图（b）所示的是算法的第1步；而图（c）到（h）所示的是算法第2步的6次迭代，每次迭代后得到一个新顶点x_k和一条新边e_k（图中粗边所示）。$w(T)=21$（即各顶点标号$t(x)$之和）。



（a） （b）令 $V(T)=\{x_0\}$， $E(T)=\phi$ （c）

（d） （e） （f）

（g） （h）

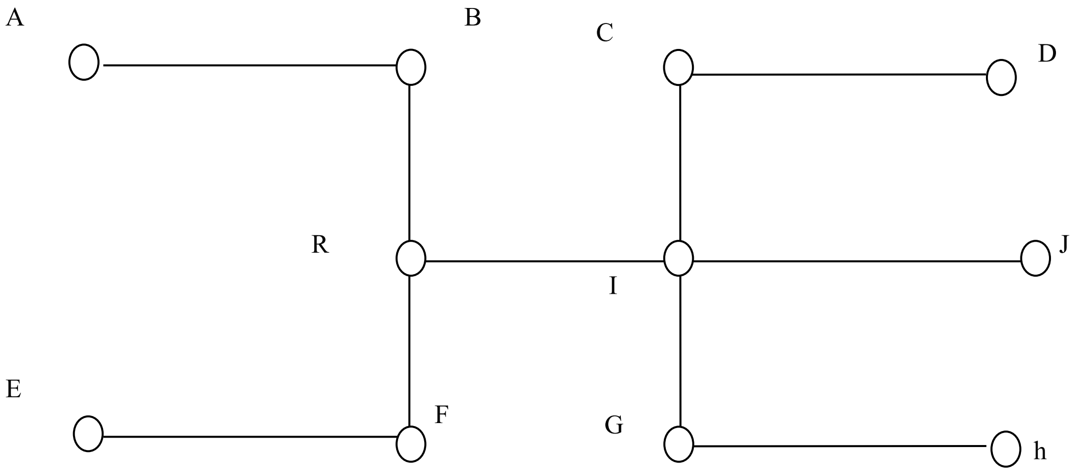
3）基本回路与基本割集

例13.17　设G=<V，E>是连通图，e∈E，证明：e是G的割边的充分必要条件是e在G的每一棵生成树中。

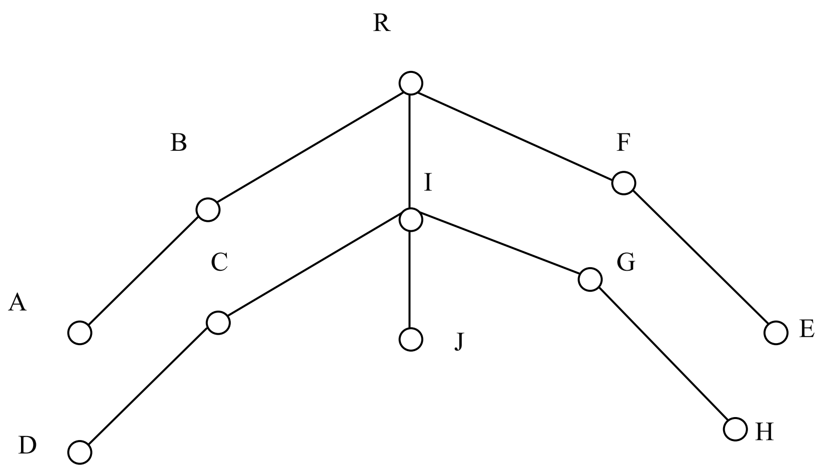
证：设e是G的割边，下证e在G的每棵生成树。
e是G的割边，则{e}是边割集，故{e}与生成树T至少有一条公共边，所以，e在T中。
设e在G的每棵生成树中，下证e是G的割边。
反证法。设e不是G的割边，则删除e，所得图G′是连通的，由定理13.6知G′中必有生成树T′。显然，T′也是G的生成树，但e不在T′中，与条件矛盾。
证毕。

4）根树与二叉树

例13.18 将下图表示成以R为根的自顶向下的有根树，然后再将有根树化为二叉树。

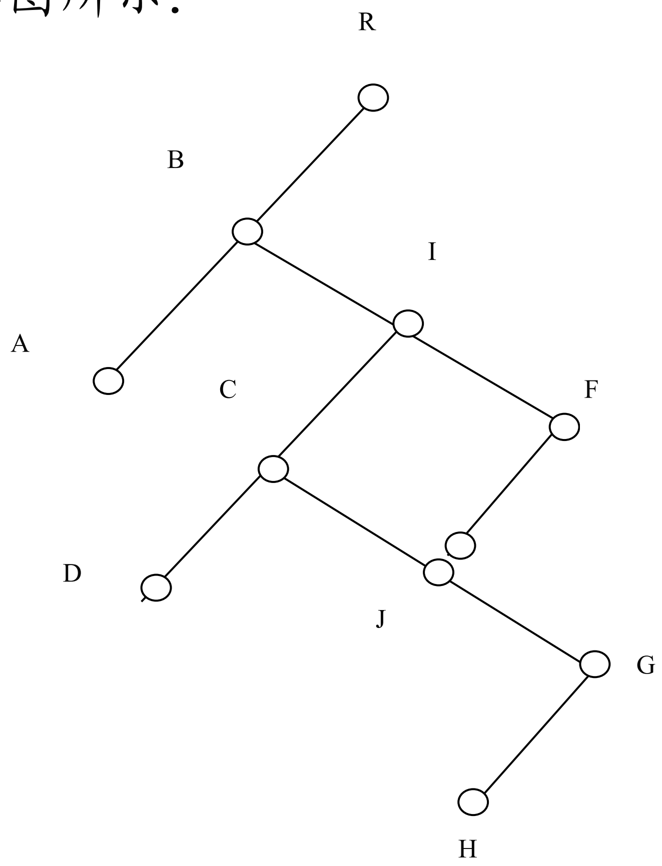


解：转化后的自顶向下的有根树如图所示：



（a）

相关的二叉树如图所示:



5)综合应用

例13.19　在通信中，当传输字符出现的频率不同时，怎样产生前缀码才能使传输同样多字符，而使用的二进制位最少。这样的前缀码称为最佳前缀码。最佳前缀码可以用下列方法产生：将各字符出现的频率乘100作为权，利用Huffman算法求最优2叉树，由此最优2叉树产生的前缀码，就得到了最佳前缀码。

设在通信中，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7出现的频率如下：

0：30%	4：10%
1：20%	5：5%
2：15%	6：5%
3：10%	7：5%

使用上述方法，求表示0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7的最佳前缀码。

解：各字符出现的频率乘100作为权，

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7的权为：

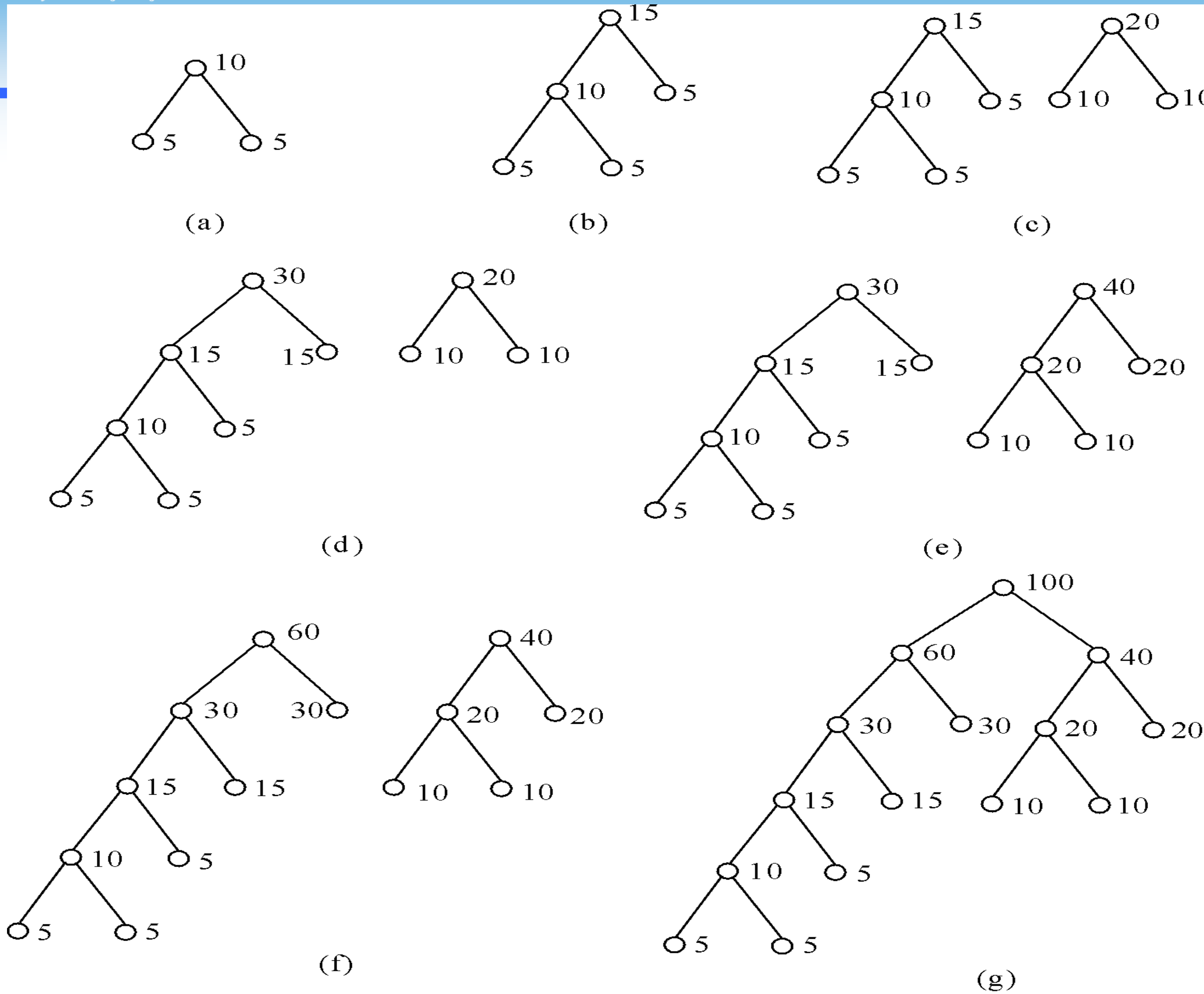
0：30，　　4：10，

1：20，　　5：5，

2：15，　　6：5，

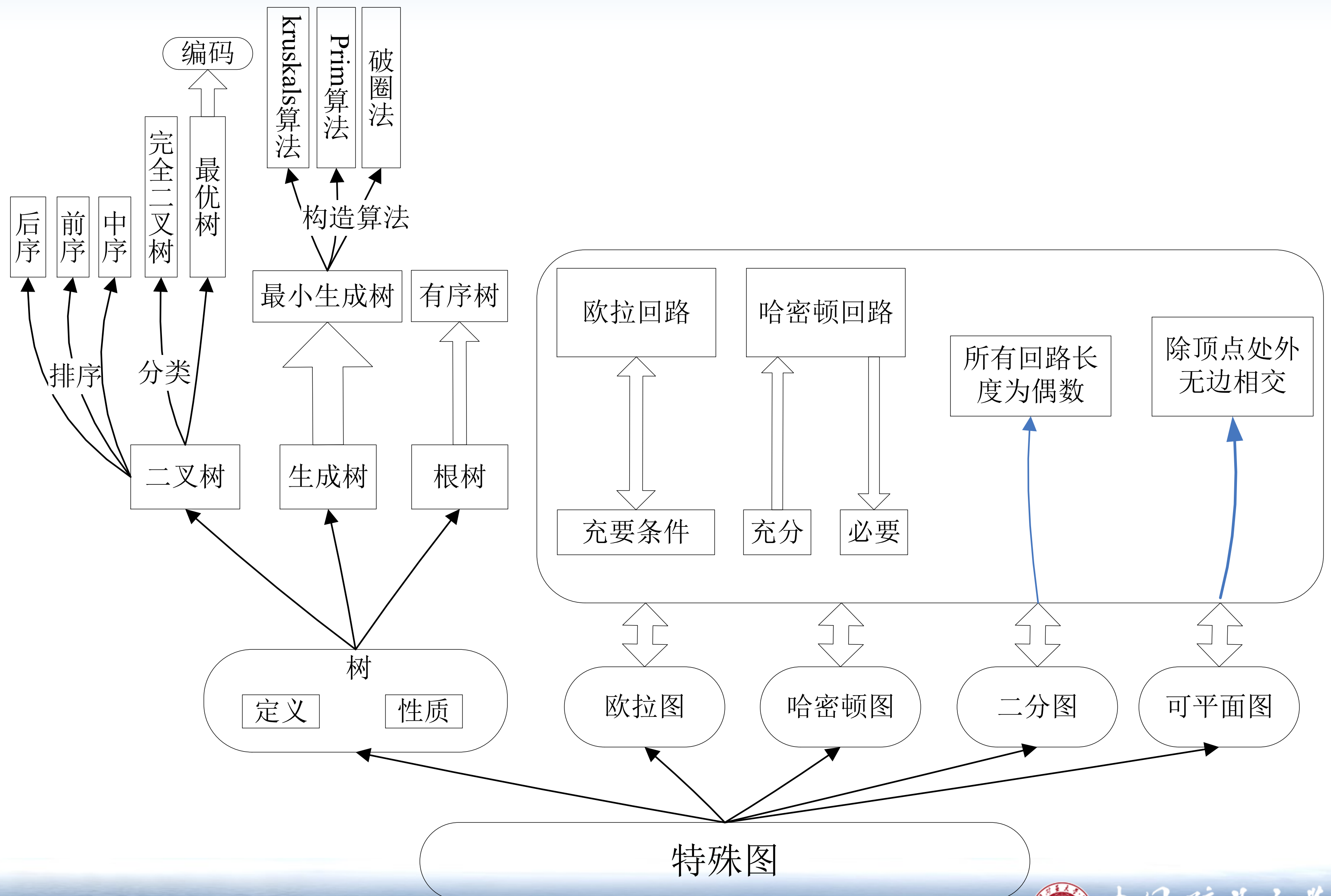
3：10，　　7：5，

下图给出了生成最优二叉树的过程。



表示0,1,2,3,4,5,6,7的最佳前缀码是{01,11,001,100,101,0001,00000,00001}。

本章小结


编码
kruskals算法
Prim算法
破圈法
完全二叉树
最优树
后序
前序
中序
构造算法
排序
分类
最小生成树
有序树
二叉树
生成树
根树
树
定义
性质
欧拉回路
哈密顿回路
充要条件
充分
必要
所有回路长度为偶数
除顶点处外无边相交
欧拉图
哈密顿图
二分图
可平面图
特殊图