四川師範大學
SICHUAN NORMAL UNIVERSITY

第5章　数组和广义表

DATA STRUCTURE

计算机科学学院　廖雪花

本章内容简介

数组和广义表

- 5.1 数组的定义
- 5.2 数组的顺序表示和实现
- 5.3 矩阵的压缩存储
- 5.4 广义表的定义
- 5.5 广义表的存储结构

5.3 矩阵的压缩存储

廖雪花　LiaoXuehua

四川师范大学
SICHUAN NORMAL UNIVERSITY

矩阵的压缩存储

- 问题提出：
  - 在科学与工程计算问题中，矩阵是一种常用的数学对象，在高级语言编制程序时，简单而又自然的方法，就是将一个矩阵描述为一个二维数组。
  - 矩阵在这种存储表示之下，可以对其元素进行随机存取，各种矩阵运算也非常简单，并且存储的密度为1。

- 两类矩阵的压缩存储
  - 特殊矩阵
  - 稀疏矩阵

5.3.1 特殊矩阵的压缩存储

特殊矩阵

- 元素值的排列具有一定规律的矩阵。
- 常见的这类矩阵有：
  - 对称矩阵
  - 下（上）三角矩阵
  - 对角线矩阵
  - ……

5.3.1 特殊矩阵的压缩存储

- 压缩存储方案：
  - 对于这些特殊矩阵，应该充分利用元素值的分布规律，将其进行压缩存储。
  - 选择压缩存储的方法应遵循两条原则：
    - 一是尽可能地压缩数据量；
    - 二是压缩后仍然可以比较容易地进行各项基本操作。

5.3.1 特殊矩阵的压缩存储

- 一、对称矩阵
  - 定义
    - 若一个n阶方阵A中元素满足下列条件：

      $a_{ij} = a_{ji}$ （其中 $1 \le i, j \le n$）

      则称A为对称矩阵。
  - 压缩存储方案
    - 只存下三角
    - 只存上三角

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对称矩阵的压缩存储

（1）只存放下三角部分（行优先）

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$1+2+3+ \ldots\ldots +n = \underline{n(n+1)/2}$$

	a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	…	a_{i1}	…	a_{ii}	…	a_{n1}	…	$a_{n,n}$
$k=$	1	2	3	4	…	$i(i-1)/2+1$		$i(i-1)/2+i$		$n(n-1)/2+1$		$n(n+1)/2$

对称矩阵的压缩存储（下三角、行优先）

a_{ij}前面i-1行元素的个数： 1 + 2 + 3 + …… + (i-1) = i (i-1) / 2

a_{ij}第i行j列前面元素的个数： j-1

a_{ij}与k的对应关系：

$$k=\begin{cases} \dfrac{i(i-1)}{2}+j & i \geq j \\ \dfrac{j(j-1)}{2}+i & i < j \end{cases}$$

对称矩阵的压缩存储（下三角、行优先）

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
k=\begin{cases} \dfrac{i(i-1)}{2}+j & i \geq j \\[2ex] \dfrac{j(j-1)}{2}+i & i < j \end{cases}
$$

	a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	…	a_{i1}	…	a_{ii}	…	a_{n1}	…	$a_{n,n}$
$k=$	1	2	3	4	…	i(i-1)/2+1		i(i-1)/2+i		n(n-1)/2+1		n(n+1)/2

对称矩阵的压缩存储（下三角、列优先）

- 问题：
  - 若按列优先存储下三角的元素，a_{ij}<--->sa_k ？
- 答：

$$k=\begin{cases}\dfrac{(j-1)(2n-j+2)}{2}+(i-j+1) & i\ge j\\[2ex] \dfrac{(i-1)(2n-i+2)}{2}+(j-i+1) & i<j\end{cases}$$

对称矩阵的压缩存储

（2）只存放上三角部分（行优先）

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\
 & & & \cdots & \cdots \\
 & & & & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots + 1 = \underline{n(n+1)/2}$$

	a_{11}	…	a_{1n}	a_{22}	…	a_{2n}	…	a_{ii}	…	a_{in}	…	$a_{n,n}$
k=	1	…	n	n+1	…	2n-1						n(n+1)/2

对称矩阵的压缩存储（上三角、行优先）

a_{ij}前面i-1行元素的个数： n + (n-1) + (n-2) + …… + (n-i+2) = (i-1) (2n-i+2)/ 2

a_{ij}第i行j列前面元素的个数： j-i

a_{ij}与k的对应关系：

$$k=\begin{cases}\dfrac{(i-1)(2n-i+2)}{2}+j-i+1 & i\le j\\[2ex] \dfrac{(j-1)(2n-j+2)}{2}+i-j+1 & i>j\end{cases}$$

对称矩阵的压缩存储（上三角、行优先）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$k=\begin{cases} \dfrac{(i-1)(2n-i+2)}{2}+j-i+1 & i \le j \\[2ex] \dfrac{(j-1)(2n-j+2)}{2}+i-j+1 & i > j \end{cases}$$

	a_{11}	…	a_{1n}	a_{22}	…	a_{2n}	…	a_{ii}	…	a_{in}	…	$a_{n,n}$
k=	1	…	n	n+1	…	2n-1						n(n+1)/2

对称矩阵的压缩存储（上三角、列优先）

- 问题：
  - 若按列优先存储上三角的元素， a_{ij} <--->sa_k ？
- 答：

$$k=\begin{cases} \dfrac{j(j-1)}{2}+i & i \le j \\ \dfrac{i(i-1)}{2}+j & i>j \end{cases}$$

二、三角矩阵

◆ 定义

所谓n阶上（或下）三角矩阵是指矩阵的下（或上）三角（不含对角线）中的数据元素均为常数c或0的n阶矩阵。

$$
\left|\begin{array}{ccccc}
a_{11} & & & & \\
a_{21} & a_{22} & & c & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn}
\end{array}\right|
$$

下三角

$$
\left|\begin{array}{ccccc}
\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\
 & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \mathbf{C} & \mathbf{a}_{ii} & \cdots & \mathbf{a}_{in} \\
 & & & \cdots & \cdots \\
 & & & & \mathbf{a}_{nn}
\end{array}\right|
$$

上三角

1、下三角矩阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & c \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$k=\begin{cases} \dfrac{i(i-1)}{2}+j & i \ge j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

注：数组元素*sa*[0]中存放的是常数*c*或*0*

压缩存储方案

C	a_{11}	a_{21}	a_{22}	…	a_{i1}	…	a_{ii}	…	a_{n1}	…	$a_{n,n}$
k= 0	1	2	3	…	i(i-1)/2+1		i(i-1)/2+i		n(n-1)/2+1		n(n+1)/2

2、上三角矩阵

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & C & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\
 & & & \cdots & \cdots \\
 & & & & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
k=\begin{cases}
\dfrac{(i-1)(2n-i+2)}{2}+j-i+1 & i \le j \\
0 & i > j
\end{cases}
$$

注：数组元素sa[0]中存放的是常数c或0

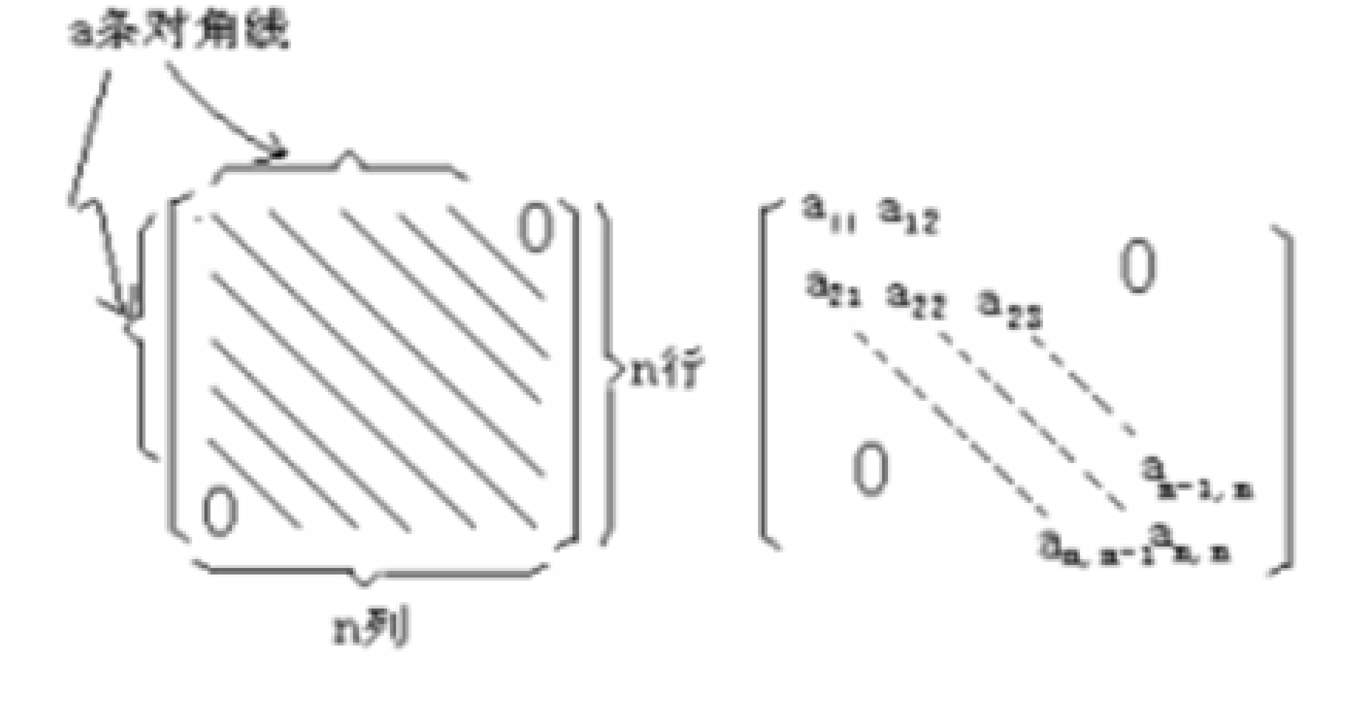
压缩存储方案

k=	c	a_{11}	…	a_{1n}	a_{22}	a_{23}	…	a_{ii}	…	a_{in}	…	$a_{n,n}$
	0	1	…	n	n+1							n(n+1)/2

三、对角矩阵

◆ 定义

若n阶矩阵A的所有非0元集中在以主对角线为中心的带状区域内，称A为n阶对角矩阵。



（a）对角矩阵示意 （b）三对角对角矩阵

三、三对角矩阵

■ 压缩方案

◆ 方案1：按行主序依次将矩阵非0元存入一维数组sa[0..3n-2]中。

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mathbf{0} & \\
 & a_{32} & a_{33} & & \\
 & & & & a_{n-1,n} \\
 & \mathbf{0} & & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

$$
k=\begin{cases}
3(i-1)-1+j-i+2 \\
=2i+j-2 & \begin{array}{l} i=1 \quad j=1,2 \text{ 或} \\ i=n \quad j=n-1,n \text{ 或} \\ 1<i<n \quad j=i-1,i,i+1 \end{array} \\
0 & \text{其它}
\end{cases}
$$

注：数组元素*sa*[0]中存放的是常数*c*或*0*

k=	c	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{ii-1}	a_{ii}	a_{ii+1}	…	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$
	0	1	2	3	4	5						3n-3	3n-2

三、三对角矩阵

■ 压缩方案

- ◆ 方案2：按列主序存储非0元素
- ◆ 方案3：按对角线存储非0元素

三、三对角矩阵

- 练习：
  - 设有三对角矩阵$(a_{ij})n\times n$，将其三条对角线上的元素a_{ij}逐行地存在于数组b[3n - 2]中，使得a_{ij}=b[k]，求：
    - （1）用i,j表示k的下标变换公式；
    - （2）用k表示i,j的下标变换公式。
  - 注：
    - 题目来源：山东科技大学2004年招收硕士学位研究生入学考试数据结构试卷

本节要点

- 矩阵的压缩存储：
  - ✓ 特殊矩阵的压缩存储
  - ✓ 稀疏矩阵的压缩存储
  - ✓ 掌握特殊矩阵的压缩存储方式及下标变换公式

- 特殊矩阵的压缩存储：
  - ✓ 对称矩阵
  - ✓ 三角矩阵
  - ✓ 对角矩阵

四川師範大學
SICHUAN NORMAL UNIVERSITY

感谢聆听