第九周理论力学作业

车晗昕

1 题 3.10

3.10 一均质圆盘，半径为 a，放在粗糙水平桌上，绕通过其中心的竖直轴转动，开始时的角速度为 ω_0. 已知圆盘与桌面的摩擦因数为 μ，问经过多少时间后盘将静止？

求出系统所受摩擦力矩：

$$M=\frac{\mu mg}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2dr=\frac{2}{3}\mu mga;$$

系统的初始角动量为：

$$J=\frac{1}{2}ma^2\omega_0;$$

可以求得时间：

$$t=\frac{J}{M}=\frac{3a\omega_0}{4\mu g};$$

2 题 3.12

3.12 矩形均质薄片 $ABCD$，边长为 a 与 b，重为 mg，绕竖直轴 AB 以初角速 ω_0 转动. 此时薄片的每一部分均受到空气的阻力，其方向垂直于薄片的平面，其量值与面积及速度平方成正比，比例系数为 k. 问经过多少时间后，薄片的角速减为初角速的一半？

易得摩擦力矩：

$$M=k\int_0^b dy\int_0^a x(\omega x)^2dx=\frac{ka^4b\omega^2}{4};$$

求出角动量表达式：

$$J=\frac{1}{3}ma^2\omega;$$

可以列出方程：

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{1}{3}ma^2\frac{d\omega}{dt}=-M;$$

分离变量，并积分：

$$\int_0^t dt=\frac{4}{3ka^2b}\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}d(\frac{1}{\omega});$$

解得：

$$t=\frac{4m}{3ka^2b\omega_0};$$

3 题 3.13

3.13 一段半径 R 为已知的均质圆弧，绕通过弧线中心并与弧面垂直的轴线摆动．求其作微振动时的周期．

设弧所对应的圆心角为 2θ, 容易求得质心坐标:

$$y_c=\frac{\int_0^\theta(Rcos\theta-R)Rd\theta}{\int_0^\theta Rd\theta}=-R+R\cdot\frac{sin\theta}{\theta};$$

计算对于原点的转动惯量：

$$I=2\int_0^\theta(2R^2-2R^2cos\theta)\rho Rd\theta=4\rho R^3(\theta-sin\theta)=2mR^2(1-\frac{sin\theta}{\theta});$$

列出运动方程：

$$-mglsin\theta=I\ddot{\theta};$$

$$-mgsin\theta R(1-\frac{sin\theta}{\theta})=2mR^2(1-\frac{sin\theta}{\theta})\ddot{\theta};$$

由于是微振动，$sin\theta=\theta$:

$$g\theta+2R\ddot{\theta}=0;$$

解得：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}};$$

4 题 3.18

3.18 一圆盘以匀速度 v_0 沿一直线无滑动地滚动. 杆 AB 以铰链固结于盘的边缘上的 B 点,其 A 端则沿上述直线滑动. 求 A 点的速度与盘的转角 φ 的关系,设杆长为 l,盘的半径为 r.

此时盘与地面的接触点为顺心。根据几何关系可知，此时点 B 的顺时速度与竖直方向的夹角为 $\varphi/2$。所以过点 B 作地面的垂线交地面于原点，建立直角坐标系。

容易求出 A，B 两点的坐标:

$$B(0, r - rcos\varphi), A(-\sqrt{l^2 - (r - rcos\varphi)^2}, 0)$$

写出 A，B 两点的几何关系：

$$y_B^2 + (x_B - x_A)^2 = l^2;$$

对两边求微商：

$$2y_B\dot{y}_B + 2(x_B - x_A)(\dot{x}_B - \dot{x}_A) = 0;$$

得到：

$$\dot{x}_A = \frac{y_B\dot{y}_B}{x_B - x_A} + \dot{x}_B;$$

下面计算各个分量大小：

$$v_B = v_0 \cdot \frac{BD}{r} = v_0\sqrt{2 - 2cos\varphi};$$

$$\dot{x}_B = v_0\sqrt{2 - 2cos\varphi}sin\frac{\varphi}{2};$$

$$\dot{y}_B = v_0\sqrt{2 - 2cos\varphi}cos\frac{\varphi}{2};$$

将所有关系代入上式可得：

$$\dot{x}_A = 2v_0 sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{rsin\varphi}{\sqrt{l^2 - 4r^2sin^4\frac{\varphi}{2}}} + 1\right];$$