

05) Оценка на собственные числа ограничения. Оценка на след.

1. С.ч. операторов A и B . По КФ, мин/макс для μ_i берется по подпр. внутри соотв. подпр. для λ . 2. Это след: взять матрицу A в ортонорм. базисе u_i . $v_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ $A_{i,i} = v_i^T A v_i = q(u_i)$. Оценка: почленные нер-ва из 1.

06) Метод главных компонент.

$a_0 = \frac{1}{s} \sum x_i: \langle u_1, \dots, u_k \rangle = L_0$, ортонорм, доп. до базиса, $\sum_j \|pr_{L_0^\perp}(x_j - a)\|^2 = \sum_j (\sum_{i=k+1}^n (x_{j,i} - a_i)^2)$, произв. $L_0: S =$

$\sum_{i=1}^s \|pr_{L_0}(x_i)\|^2 \rightarrow \max; X = (x_1, \dots, x_s)^T$. $S = \sum_{i=1}^k q(u_i) = Tr q(x)|_{L_0}$, $q(u) = u^T X^T X u$. Макс. по КФ на $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$

07) Сингулярные значения и SVD-разложение.

$X^* = X^T, \langle X^* e_i, e_j \rangle = \langle e_i, X e_j \rangle, \sigma_i = \sqrt{d_i} > 0$ с.ч. $A^* A$. SVD $A: U \rightarrow V \exists$ о/н u_i, v_j : матр $A = \Sigma(\sigma_{1..r}$ на диаг) $(X = L \Sigma R)$. e_i — о/н с.в. $\langle A e_i, A e_j \rangle = \langle A^* A e_i, e_j \rangle = \langle d_i e_i, e_j \rangle, f_i = \frac{A e_i}{\sqrt{d_i}}$ доп до базиса. $R = C^{-1} = C^T, C$ столбцы e_i .

08) Приближение матрицей указанного ранга и SVD-разложение. Возможность применения к сжатию изображений.

рг из Б6 \Leftrightarrow близ по $\|X\|_F = \sqrt{\text{Tr } X^T X}$. $X = L \Sigma R$. рг на $\langle v_1^\top \dots v_k^\top \rangle$. v_i базис $X^T X$ и строки R . рг a на $V^{(k)} = \sum a v_i v_i^\top$. $X^{(k)} = L \Sigma (\sum R v_i v_i^\top) = L \Sigma R^{(k)} = L \Sigma^{(k)} R$. Сж $L^{(k)} \Sigma^{(k)} R^{(k)}$. $2kn + k \rightarrow 2kn$ при $k < \frac{n}{2}$. Минор $k^2 + 2k(n - k) + 2k$.

09) Положительные матрицы. Теорема Перрона.

Док-во Перрона: положительность $(A|x| \geq |x| \Rightarrow A|x| < \frac{A^n}{(1+\varepsilon)^n} |x| \rightarrow 0$ противореч.), единственность (сонапр. коорд. $v \Leftarrow \sum_j A_{kj} |v_j| = |\sum_j A_{kj} v_j|$) и некрatность (Жорд. клетки; либо $\exists s, i: |x_1 - s x_2|_i = 0$, либо $A x_2 = x_2 + x_1$)

10) Единственность положительного собственного вектора. Применение к случайному блужданию.

Знаем предел $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v$, если у A макс по модулю с. ч. $\lambda = 1$ кратности 1. $A = P(G)$ нам не подходит, замена $P(G): P_\alpha(G) = (1 - \alpha)P(G) + \alpha \frac{1}{n} J$, $\alpha \in (0, 1)$, $\forall i, j$ $J_{ij} = 1$ — а это норм, Перрон гарантирует.

12) Сильно регулярные графы. Граф Петерсона и его спектр. Двудольность и спектр.

$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)E = \mu J$, $A_U^2 + (\mu - \lambda)A_U + (\mu - k)E = 0$ для $U = \langle (1, \dots, 1) \rangle^\perp$

След степени == количество циклов == сумма собственных чисел с учетом кратности. λ для (v, w) , $-\lambda$ для $(v, -w)$

13) Две оценки на размер максимального независимого множества.

Натянуть подпространство на множество, следствие из Куранта-Фишера, нулевая квадратичная форма

Характеристический вектор множества, разложить по ортонорм. базису регулярного(!) графа с $u_1 = (1, \dots, 1) \frac{1}{\sqrt{n}}$

14) K_{10} не покрывается тремя Петерсонами.

$\sum_{i=1}^3 A_i = B$. Все рег \Rightarrow общий с.в. $(1, \dots, 1)$ для P с.ч. 3, для полного с.ч. 9. Сузим. Для A_1 и A_2 подпр. пород. с.в. с с.ч. 1 \cap . Распишем для u из \cap . $Bu = -u$ (натянуто на с.в. с с.ч. -1). \Rightarrow с.в. для A_3 с с.ч. -3 . Такого с.ч. нет.

17) Тензорное произведение линейных отображений. Кронекерово произведение. Тензорное произведение операторов и его собственные числа. Категорное произведение графов.

Единств: определено на тензорах; \exists : отобразить $U_1 \times \dots \times U_k$ в $V_1 \otimes \dots \otimes V_K$ полилин. (компози полилин.) \Rightarrow (опр. тенз.) $\exists!$. Наше правило подходит. Матрица: расписать $(\sum_k A_{k,i} f_k) \otimes (\sum_l B_{l,j} f'_l)$. С.ч. $A \otimes B$: жорданов базис.

18) Канонические изоморфизмы для тензорного произведения.

3. $\text{Hom}(U, V) \cong V \otimes U^*: v \times f \rightarrow (u \rightarrow f(u)v)$. 4. $\text{Hom}(U \otimes V, W) \cong \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W))$: $L_1: L \rightarrow (u \rightarrow (v \rightarrow L(u \otimes v)))$, $L_2: L \rightarrow (u \otimes v \rightarrow (L(u))(v))$, они обратны. 5. $U^* \otimes V^* \rightarrow (U \otimes V)^*: f \otimes g \rightarrow (u \otimes v \rightarrow f(u)g(v))$ базис в базис

19) Тензоры. Примеры. Координаты тензора. Замена переменной — случай тензора валентности $(1, 0)$.

$(p, 0)$ — полилин. форма, $(1, 1)$ — лин. оп-р, $(2, 1)$ — структ. алгебры. Переход: $x_{\text{new}} = C x_{\text{old}}$. $e_i = \sum_{j=1}^n C_{ji} \hat{e}_j$, хотим $D: e^i = \sum D_{ji} \hat{e}^j$. $e^k(e_i) = \delta_{ki} \Rightarrow \delta_{ki} = \sum_j C_{ji} \sum_l D_{lk} \hat{e}^l(\hat{e}_j) = \sum_{j,l} C_{ji} D_{lk} \cdot \delta_{lj} = \sum_j C_{ji} D_{jk}$ $E_n = C^T D \Rightarrow D = (C^{-1})^T$

27) Лемма Гаусса. Содержание многочлена. Делимость в $Q(R)[x]$ и в $R[x]$.

Лемма: Пусть нет, возьмём $\min a_i, b_j \nmid p$, тогда $c_{i+j} \nmid p$. Следствие: поделим на $\text{cont } g, h$, убедимся что $\text{cont } f = 1$. Лемма про $Q(R)[x]$: d_1, d_2 — НОК знаменателей, $c = \frac{d_1}{d_2}$.

28) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.

$R[x]$ факториально и простые в нём: $f = p \in R, f: \text{cont}(f) = 1$ — непр. в $Q(R)[x]$. Док-во: 1) они и правда простые 2) в них раскладывается (посмотрим в $Q(R)$) 3) единственность \Rightarrow других нет

29) Редукционный признак неприводимости. Примеры. Признак Эйзенштейна.

$a_n \not\equiv p$, f - неприводим в $R/p[x] \Rightarrow$ неприводим над $Q(R)$. $\text{cont} = 1$ и неприводимость над $Q(R) \Rightarrow$ неприводимость над R .

$a_n \not\equiv p$, все $a_i : p \nmid i < n$, но $a_0 \not\equiv p^2$, то многочлен $f(x)$ неприводим. Пусть $b_0 \not\equiv p$.

30) Алгоритм Кронекера. Сведение для многочленов от нескольких переменных.

1) Перебираем наборы делителей $f(i)$, $0 \leq i \leq \frac{\deg f}{2}$, интерполируем, проверяем. 2) Различным разложениям $f(x_1, \dots, x_n)$ соответствуют различные разложения $f(x, \dots, x^{d^{n-1}})$ для d больших $\max_{i=1}^n \{\deg_{x_i} f\}$. Рассмотреть образ x^α .

31) Лемма Гензеля. Разложение на множители при помощи леммы Гензеля.

Доказательство леммы: Индукция по k . Строим для $k + 1$. Помним, что $\forall f : p^k f \equiv p^k \bar{f} \pmod{p^{k+1}}$.

$\bar{h} \equiv \hat{h} + p^k a(x) \Rightarrow \bar{h}\bar{g} \equiv \hat{g}\hat{h} + p^k(a(x)g + b(x)h)$. С другой стороны $f - \hat{g}\hat{h} = p^k c(x) \Rightarrow a, b$ берем из лп НОДа g и h

32) Степенные суммы. Тождество Ньютона.

$0 = (-1)^n n \sigma_n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_k s_{n-k}$, в многочлен подставим корни, просуммируем по всем корням, отдельно случаи $k < n$ - добавим нулевые переменные, $k > n$ - занулим не входящие в моном переменные

33) Целые алгебраические элементы. Замкнутость относительно операций.

a алгебраический $\Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{Z}[x] : f(a) = 0$. Замкнуто: $\prod (x - (a_i + b_j))$ симметрично по i , тогда коэффициенты выражаются через симметрические, симметрический по b_i - все коэффициенты целые.

37) Описание наименьшего подрасширения, содержащего данный элемент.

$K(\alpha) \cong K[\alpha] \cong K[x]/p(\alpha)$, рассмотрим $K[x] \rightarrow L$, переводящий $x \rightarrow \alpha$ и $K[x]/p(x) \rightarrow L$. Следствия про равенство степеней расширения над K и изоморфность расширений для корней неприводимого многочлена.

38) Построение при помощи циркуля и линейки. Пример неразрешимого построения.

x - построимо \Rightarrow оно алгебраическое и лежит в расширении L/\mathbb{Q} степени 2^n . Докажем индукцией по числу построений, рассмотрим уравнение пересечения с новым объектом степени 2. $\cos \frac{\pi}{9}$ - корень уравнения $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$.

39) Конечные поля. Число элементов. Основное уравнение. Эндоморфизм Фробениуса. Корни $x^{p^n} - x$ образуют подполе.

Хорошо смотреть на мультипл. группу. Теорема Ферма для групп. Биномиальный коэф. делится на p почти всегда.

40) Основная теорема про конечные поля.

Поле разложения $x^{p^n} - x \rightarrow$ подполе из p^n элементов. Взять образующий группы, найти мин. многочлен, найти его корень в другом поле (через делимость). И проверить на изоморфизм "образующий группы в корень" - техника.

49) Циклические коды. Эквивалентное описание. Коды БЧХ. Пример.

$q = p^s$, m, n такие, что $q^m - 1 : n$, $2 \leq d \leq n$, $l_0 \leq n$. α - образующая $\mathbb{F}_{q^m}^*$, $\beta = \alpha^{(q^m - 1)/n}$

50) Основная теорема про коды БЧХ.

Делится \Leftrightarrow обнуляется на корнях. Пусть плохо \mathbb{F}_q , тогда плохо в \mathbb{F}_{q^m} , определитель.