05) Оценка на собственные числа ограничения. Оценка на след.
1. С.ч. операторов $A$ и $B$. По КФ, мин/макс для $\mu_i$ берется по подпр. внутри соотв. подпр. для $\lambda$. 2. Это след: взять матрицу $A$ в ортонорм. базисе $u_i$. $v_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ $A_{i,i} = v_i^T A v_i = q(u_i)$. Оценка: почленные нер-ва из 1.

06) Метод главных компонент.
$a_0 = \frac{1}{s}\sum x_i$: $\langle u_1, \ldots, u_k\rangle = L_0$, ортонорм, доп. до базиса, $\sum\limits_j ||pr_{L_0^\perp}(x_j - a)||^2 = \sum\limits_j(\sum\limits_{i=k+1}^{n}(x_{j,i} - a_i)^2)$, произв. $L_0$: S $= \sum\limits_{i=1}^{s}||pr_{L_0}(x_i)||^2 \to max$; $X = (x_1, \ldots, x_s)^T$. $S = \sum\limits_{i=1}^{k} q(u_i) = Tr\, q(x)|_{L_0}$, $q(u) = u^T X^T X u$. Макс. по КФ на $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$

07) Сингулярные значения и SVD-разложение.
$X^* = X^\top, \langle X^* e_i, e_j\rangle = \langle e_i, X e_j\rangle, \sigma_i = \sqrt{d_i} > 0$ с.ч. $A^*A$. SVD $A : U \to V$ $\exists$ о/н $u_i, v_j$: матр $A = \Sigma(\sigma_{1..r}$ на диаг) $(X = L\Sigma R)$. $e_i$ – о/н с.в. $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle A^*Ae_i, e_j\rangle = \langle d_i e_i, e_j\rangle, f_i = \frac{Ae_i}{\sqrt{d_i}}$ доп до базиса. $R = C^{-1} = C^\top, C$ столбцы $e_i$.

08) Приближение матрицей указанного ранга и SVD-разложение. Возможность применения к сжатию изображения.
pr из Б6 $\Leftrightarrow$ ближ по $||X||_F = \sqrt{\mathrm{Tr}\, X^\top X}$. $X = L\Sigma R$. pr на $\left\langle v_1^\top .. v_k^\top\right\rangle$. $v_i$ базис $X^\top X$ и строки $R$. pr $a$ на $V^{(k)} = \sum a v_i v_i^\top$. $X^{(k)} = L\Sigma(\sum R v_i v_i^\top) = L\Sigma R^{(k)} = L\Sigma^{(k)} R$. Сж $L^{(k)}\Sigma^{(k)}R^{(k)}$. $2kn + k \to 2kn$ при $k < \frac{n}{2}$. Минор $k^2 + 2k(n-k) + 2k$.

09) Положительные матрицы. Теорема Перрона.
Док-во Перрона: положительность ($A|x| \geq |x| \Rightarrow A|x| < \frac{A^n}{(1+\varepsilon)^n} A|x| \to 0$ противореч.), единственность (сонапр. коорд. $v \Leftarrow \sum\limits_j A_{kj}|v_j| = |\sum\limits_j A_{kj} v_j|$) и некратность (Жорд. клетки; либо $\exists c, i : |x_1 - cx_2|_i = 0$, либо $Ax_2 = x_2 + x_1$)

10) Единственность положительного собственного вектора. Применение к случайному блужданию.
Знаем предел $\lim\limits_{k\to\infty} A^k v$, если у $A$ макс по модулю с. ч. $\lambda = 1$ кратности 1. $A = P(G)$ нам не походит, замена $P(G)$: $P_\alpha(G) = (1-\alpha)P(G) + \alpha\frac{1}{n}J$, $\alpha \in (0, 1)$, $\forall i, j$ $J_{ij} = 1$ – а это норм, Перрон гарантирует.

12) Сильно регулярные графы. Граф Петерсона и его спектр. Двудольность и спектр.
$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)E = \mu J$, $A^2_{|U} + (\mu - \lambda)A_{|U} + (\mu - k)E = 0$ для $U =< (1, \cdots, 1) >^\perp$
След степени == количество циклов == сумма собственных чисел с учетом кратности. $\lambda$ для $(v,\, w)$, $-\lambda$ для $(v,\, -w)$

13) Две оценки на размер максимального независимого множества.
Натянуть подпространство на множество, следствие из Куранта-Фишера, нулевая квадратичная форма
Характеристический вектор множества, разложить по ортонорм. базису регулярного(!) графа с $u_1 = (1, \cdots, 1)\frac{1}{\sqrt{n}}$

14) $K_{10}$ не покрывается тремя Петерсонами.
$\sum\limits_{i=1}^{3} A_i = B$. Все рег $\Rightarrow$ общий с.в. $(1, \ldots, 1)$ для $P$ с.ч. 3, для полного с.ч. 9. Сузим. Для $A_1$ и $A_2$ подпр. порожд. с.в. с с.ч. 1 $\cap$. Распишем для $u$ из $\cap$. $Bu = -u$ (натянуто на с.в. с с.ч. $-1$). $\Rightarrow$ с.в. для $A_3$ с с.ч. $-3$. Такого с.ч. нет.

17) Тензорное произведение линейных отображений. Кронекерово произведение. Тензорное произведение операторов и его собственные числа. Категорное произведение графов.
Единств: определено на тензорятах; $\exists$ : отобразить $U_1 \times \cdots \times U_k$ в $V_1 \otimes \cdots \otimes V_K$ полилин. (композ полилин.) $\Rightarrow$ (опр. тенз.) $\exists!$. Наше правило подходит. Матрица: расписать $(\sum\limits_k A_{k,i} f_k) \otimes (\sum\limits_l B_{l,j} f'_l)$. С.ч. $A \otimes B$: жорданов базис.

18) Канонические изоморфизмы для тензорного произведения.
3. $\mathrm{Hom}(U, V) \cong V \otimes U^*$: $v \times f \to (u \to f(u)v)$. 4. $\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$: $L_1 :\ L \to (u \to (v \to L(u \otimes v)))$, $L_2 :\ L \to (u \otimes v \to (L(u))(v))$, они обратны. 5. $U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$: $f \otimes g \to (u \otimes v \to f(u)g(v))$ базис в базис

19) Тензоры. Примеры. Координаты тензора. Замена переменной – случай тензора валентности (1,0).
$(p, 0)$ — полилин. форма, $(1, 1)$ — лин. оп-р, $(2, 1)$ — структ. алгебры. Переход: $x_{new} = Cx_{old}$. $e_i = \sum_{j=1}^n C_{ji}\hat{e}_j$, хотим $D : e^i = \sum D_{ji}\hat{e}^j$. $e^k(e_i) = \delta_{ki} \Rightarrow \delta_{ki} = \sum_j C_{ji}\sum_l D_{lk}\hat{e}^l(\hat{e}_j) = \sum_{j,l} C_{ji}D_{lk}\cdot\delta_{lj} = \sum_j C_{ji}D_{jk}$ $E_n = C^T D \Rightarrow D = (C^{-1})^T$

20) Замена переменной – общий случай.
$T = \sum\limits_{\substack{i'_1,\ldots,i'_q \in \overline{1,n} \\ j'_1,\ldots,j'_p \in \overline{1,n}}} T^{i'_1,\ldots,i'_q}_{j'_1,\ldots,j'_p} e^{j'_1,\ldots,j'_p}_{i'_1,\ldots,i'_q}$. $e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} C_{ji}\hat{e}_j$ и $e^i = \sum D_{ji}\hat{e}^j$. Раскрыть скобки, поменять суммирование. Должно получиться $\hat{T}^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} = \sum\limits_{\substack{i'_1,\ldots,i'_q \in \overline{1,n} \\ j'_1,\ldots,j'_p \in \overline{1,n}}} \prod\limits_{t\in\overline{1,p}} D_{j_t,j'_t} \prod\limits_{s\in\overline{1,q}} C_{i_s,i'_s}\ T^{i'_1,\ldots,i'_q}_{j'_1,\ldots,j'_p}$.

21) Тензорная алгебра. Свёртка и след.

Для $(1,1)$ $T=\sum_{i,j} T^i_j e^j \otimes e_i$. Тогда $Conv(T)=\sum_{i,j} T^i_j e^j(e_i)=\sum_i T^i_i$.. $V^*\otimes V \cong \mathrm{Hom}(V,V) \Rightarrow$ это след.

27) Лемма Гаусса. Содержание многочлена. Делимость в $Q(R)[x]$ и в $R[x]$.
Лемма: Пусть нет, возьмём $\min a_i, b_j \not\vdots\, p$, тогда $c_{i+j} \not\vdots\, p$. Следствие: поделим на $\operatorname{cont} g, h$, убедимся что $\operatorname{cont} f = 1$. Лемма про $Q(R)[x]$: $d_1, d_2$ — НОК знаменателей, $c=\frac{d_1}{d_2}$.

28) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.
$R[x]$ факториально и простые в нём: $f=p\in R$, $f:\operatorname{cont}(f)=1$ — непр. в $Q(R)[x]$. Док-во: 1) они и правда простые 2) в них раскладывается (посмотрим в $Q(R)$) 3) единственность $\Rightarrow$ других нет

29) Редукционный признак неприводимости. Примеры. Признак Эйзенштейна.
$a_n \not\vdots\, p$, f - неприводим в $R/p[x] \Rightarrow$ неприводим над $Q(R)$. $cont=1$ и неприводимость над $Q(R) \Rightarrow$ неприводимость над $R$.
$a_n \not\vdots\, p$, все $a_i \,\vdots\, p$ $i<n$, но $a_0 \not\vdots\, p^2$, то многочлен $f(x)$ неприводим. Пусть $b_0 \not\vdots\, p$.

30) Алгоритм Кронекера. Сведение для многочленов от нескольких переменных.
1) Перебираем наборы делителей $f(i), 0\le i\le \frac{deg f}{2}$, интерполируем, проверяем. 2) Различным разложениям $f(x_1,\dots,x_n)$ соответствуют различные разложения $f(x,\dots,x^{d^{n-1}})$ для $d$ больших $\max_{i=1}^n\{\deg_{x_i} f\}$. Рассмотреть образ $x^\alpha$.

31) Лемма Гензеля. Разложение на множители при помощи леммы Гензеля.
Доказательство леммы: Индукция по k. Строим для k + 1. Помним, что $\forall f:\ p^k f \equiv p^k\overline{f} \pmod{p^{k+1}}$.
$\overline{h}\equiv \hat{h}+p^k a(x) \Rightarrow \overline{h}\overline{g} \equiv \hat{g}\hat{h}+p^k(a(x)g+b(x)h)$. С другой стороны $f-\hat{g}\hat{h}=p^kc(x) \Rightarrow a,\ b$ берем из лп НОДа $g$ и $h$

32) Степенные суммы. Тождество Ньютона.
$0=(-1)^n n\sigma_n+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sigma_k s_{n-k}$, в многочлен подставим корни, просуммируем по всем корням, отдельно случаи $k<n$ - добавим нулевые переменные, $k>n$ - занулим не входящие в моном переменные

33) Целые алгебраические элементы. Замкнутость относительно операций.
а алгебраический $==\ \exists f\in\mathbb{Z}[x]: f(a)=0$. Замкнуто: $\prod(x-(a_i+b_j))$ симметрично по $_i$, тогда коэффициенты выражаются через симметрические, симметрический по $b_i$ - все коэффициенты целые.

37) Описание наименьшего подрасширения, содержащего данный элемент.
$K(\alpha)\cong K[\alpha]\cong K[x]/p(\alpha)$, рассмотрим $K[x]\to L$, переводящий $x\to\alpha$ и $K[x]/p(x)\to L$. Следствия про равенство степеней расширения над $K$ и изоморфность расширений для корней неприводимого многочлена.

38) Построение при помощи циркуля и линейки. Пример неразрешимого построения.
$x$ – построимо $\Rightarrow$ оно алгебраическое и лежит в расширении $L/\mathbb{Q}$ степени $2^n$. Докажем индукцией по числу построений, рассмотрим уравнение пересечения с новым объектом степени 2. $\cos\frac{\pi}{9}$ – корень уравнения $4x^3-3x=\frac{1}{2}$.

39) Конечные поля. Число элементов. Основное уравнение. Эндоморфизм Фробениуса. Корни $x^{p^n}-x$ образуют подполе.
Хорошо смотреть на мультипл. группу. Теорема Ферма для групп. Биномиальный коэф. делится на $p$ почти всегда.

40) Основная теорема про конечные поля.
Поле разложения $x^{p^n}-x\to$ подполе из $p^n$ элементов. Взять образующий группы, найти мин. многочлен, найти его корень в другом поле (через делимость). И проверить на изоморфизм “образующий группы в корень” – техника.

49) Циклические коды. Эквивалентное описание. Коды БЧХ. Пример.
$q=p^s$, $m,n$ такие, что $q^m-1\vdots n$, $2\le d\le n$, $l_0\le n$. $\alpha$ – образующая $\mathbb{F}_{q^m}{}^*$, $\beta=\alpha^{(q^m-1)/n}$

50) Основная теорема про коды БЧХ.
Делится $\Leftrightarrow$ обнуляется на корнях. Пусть плохо $\mathbb{F}_q$, тогда плохо в $\mathbb{F}_{q^m}$, определитель.