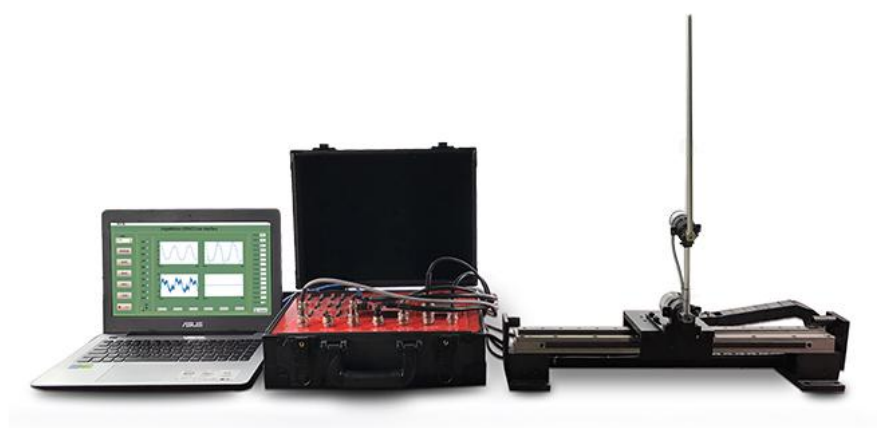


直线电机倒立摆

实验指导书



目 录

目 录 1

第一部分 控制理论基础实验.....	3
实验一 典型环节的时域响应.....	4
一. 实验目的.....	4
二. 实验要求.....	4
三. 实验设备.....	4
四. 实验原理、内容与步骤.....	4
1). 观察比例环节的阶跃响应曲线.....	5
2). 观察惯性环节的阶跃响应曲线.....	6
3). 观察积分环节的阶跃响应曲线.....	7
4). 观察比例积分环节的阶跃响应曲线.....	8
5). 观察比例微分环节的阶跃响应曲线.....	9
6). 观察 PID（比例积分微分）环节的响应曲线.....	10
实验二 典型系统的时域响应和稳定性分析.....	14
一. 实验目的.....	14
二. 实验要求.....	14
三. 实验设备.....	14
四. 实验原理、内容和步骤.....	14
实验三 线性系统的校正.....	19
一. 实验目的.....	19
二. 实验要求.....	19
三. 实验设备.....	19
四. 实验原理、内容及步骤.....	19
实验四 频率特性的测量.....	25
一. 实验目的.....	25
二. 实验要求.....	25
三. 实验设备.....	25
四. 实验原理、内容和步骤.....	25
第二部分 控制理论综合实验.....	34

第一章 实验平台介绍.....	35
1.1 直线电机倒立摆硬件系统结构.....	35
1.2 直线电机一级倒立摆组成框图.....	36
第二章 直线电机一级倒立摆建模及性能分析.....	37
2.1 直线电机一级倒立摆建模及性能分析.....	37
第三章 直线电机一级倒立摆 MATLAB 仿真实验.....	40
3.1 直线电机一级倒立摆的超前校正控制仿真实验.....	40
3.2 直线电机一级倒立摆的 PID 控制仿真实验.....	41
3.3 直线电机一级倒立摆的 LQR 控制仿真实验.....	44
第四章 直线电机一级倒立摆 MATLAB 实时控制实验.....	48
4.1 直线电机一级倒立摆的 PID 实时控制实验.....	48
4.2 直线电机一级倒立摆的 LQR 实时控制实验.....	51
4.3 实验操作步骤.....	54
第五章 直线电机二级倒立摆建模及性能分析.....	57
5.1 直线电机二级倒立摆建模及性能分析.....	57
第六章 直线电机二级倒立摆 MATLAB 实时控制实验.....	64
6.1 直线电机二级倒立摆的 LQR 实时控制实验.....	64
6.2 直线电机二级倒立摆的滑膜实时控制实验.....	67
6.3 实验操作步骤.....	67

第一部分 控制理论基础实验

实验一 典型环节的时域响应

一. 实验目的

1. 掌握各典型环节模拟电路的构成方法，掌握实验设备的使用方法。
2. 熟悉各种典型环节的理想阶跃响应曲线和实际阶跃响应曲线。
3. 了解参数变化对典型环节动态特性的影响。

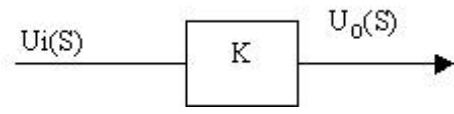
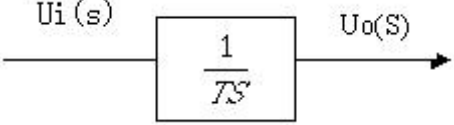
二. 实验要求

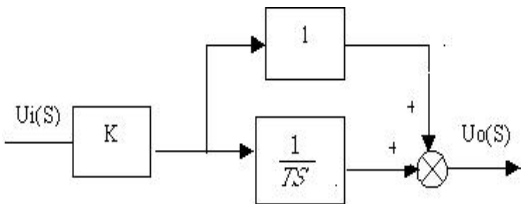
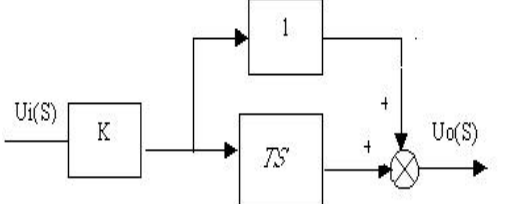
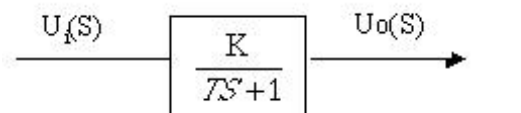
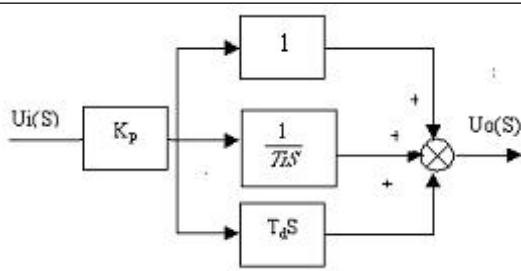
1. 掌握各典型环节模拟电路的构成方法、传递函数表达式及输出时域函数表达式。
2. 观察和分析各典型环节的阶跃响应曲线，了解各项电路参数对典型环节动态特性的影响。

三. 实验设备

1. 直线电机倒立摆系统一套
2. 数字示波器一台
3. 信号发生器一台
4. 短路帽若干

四. 实验原理、内容与步骤

环节名称	方块图	传递函数
比例 (P)		$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = k$
积分 (I)		$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{TS}$

比例积分 (PI)		$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = K \left(1 + \frac{1}{TS}\right)$
比例微分 (PD)		$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = K(1 + TS)$
惯性环节 (T)		$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{K}{1 + TS}$
比例积分微分 (PID)		$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = K_p + \frac{K_p}{T_i S} + K_p T_d S$

1). 观察比例环节的阶跃响应曲线

典型比例环节模拟电路如图 1-1-1 所示。该环节在 A1 单元中分别选取反馈电阻 R1=100K、200K 来改变比例参数。

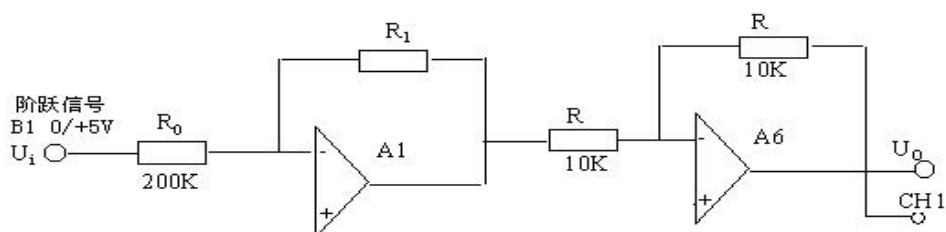


图 1-1-1 典型比例环节模拟电路

实验步骤：

(1) 将信号发生器中的阶跃输出 0/+5V 作为系统的信号输入 (U_i)

(2) 放置短路帽，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号	
1	A1	当反馈电阻 $R_1=100K$ 时	1S4 , 1S7
		当反馈电阻 $R_1=200K$ 时	1S4 , 1S8
2	A6		6S2 , 6S6

(b) 连线

1	信号输入 (U_i)	B1 (0/+5V) \rightarrow A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT) \rightarrow A6 (H1)

(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT (U_o)。

(4) 运行、观察、记录：

按下信号发生器阶跃信号按钮时 ($0 \rightarrow +5V$ 阶跃)，用示波器观测 A6 输出端 (U_o) 的实际响应曲线 $U_o(t)$ ，且将结果记下。改变比例参数 (改变运算模拟单元 A1 的反馈电阻 R_1)，重新观测并记录结果。其实际阶跃响应曲线见表 1-1-1。

2). 观察惯性环节的阶跃响应曲线

典型惯性环节模拟电路如图 1-1-2 所示。该环节在 A1 单元中分别选取反馈电容 $C=1\mu f$ 、 $2\mu f$ 来改变时间常数。

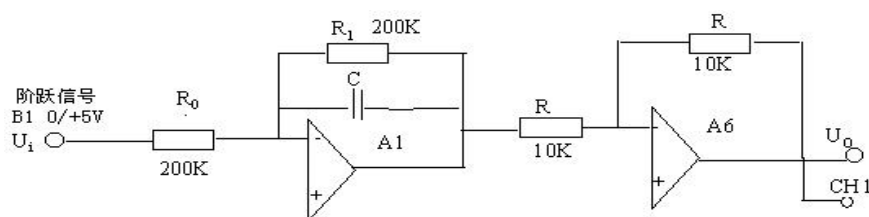


图 1-1-2 典型惯性环节模拟电路

(1) 将信号发生器 (B1) 中的阶跃输出 $0/+5V$ 作为系统的信号输入 (U_i)

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号	
1	A1	当反馈电容 $C=1\mu\text{f}$ 时 当反馈电容 $C=2\mu\text{f}$ 时	1S4, 1S8, 1S10 1S4, 1S8, 1S10, 1S11
2	A6		6S2, 6S6

(b) 连线

1	信号输入 (U_i)	B1 (0/+5V) \rightarrow A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT) \rightarrow A6 (H1)

(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT (U_o)。

(4) 运行、观察、记录：

按下信号发生器 (B1) 阶跃信号按钮时 (0 \rightarrow +5V 阶跃)，用示波器观测 A6 输出端 (U_o) 的实际响应曲线 $U_o(t)$ ，且将结果记下。改变时间常数 (改变运算模拟单元 A1 的反馈反馈电容 C)，重新观测并记录结果。其实际阶跃响应曲线见表 1-1-1。

3) . 观察积分环节的阶跃响应曲线

典型积分环节模拟电路如图 1-1-3 所示。该环节在 A1 单元中分别选取反馈电容 $C=1\mu\text{f}$ 、 $2\mu\text{f}$ 来改变时间常数。

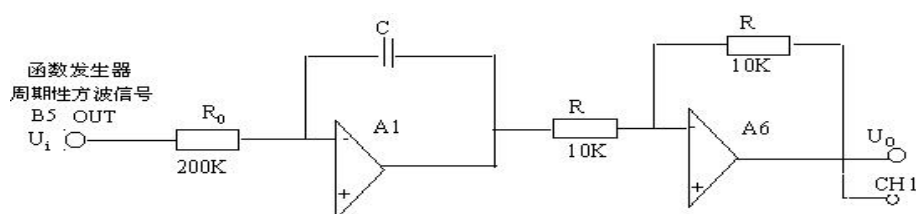


图 1-1-3 典型积分环节模拟电路

实验步骤：

(1) 为了避免积分饱和，将函数发生器 (B5) 所产生的周期性方波信号 (OUT)，代替信号发生器 (B1) 中的阶跃输出 0/+5V 作为系统的信号输入 (U_i)：

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号	
1	A1	当反馈电容 $C=1\mu\text{f}$ 时 当反馈电容 $C=2\mu\text{f}$ 时	1S4, 1S10 1S4, 1S10, 1S11
2	A6		6S2, 6S6

(b) 连线

1	信号输入 (U_i)	B5 (OUT) \rightarrow A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT) \rightarrow A6 (H1)

(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT (U_o)。

(4) 运行、观察、记录：

用示波器观测 A6 输出端 (U_o) 的实际响应曲线 $U_o(t)$ ，且将结果记下。改变时间常数 (改变运算模拟单元 A1 的反馈反馈电容 C)，重新观测并记录结果。其实际阶跃响应曲线见表 1-1-1。

4) . 观察比例积分环节的阶跃响应曲线

典型比例积分环节模拟电路如图 1-1-4 所示。该环节在 A5 单元中分别选取反馈电容 $C=1\mu\text{f}$ 、 $2\mu\text{f}$ 来改变时间常数。

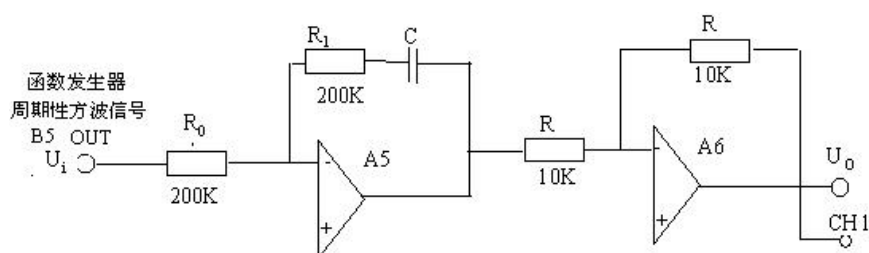


图 1-1-4 典型比例积分环节模拟电路

实验步骤：

(1) 为了避免积分饱和，将函数发生器所产生的周期性方波信号 (OUT)，代替信号发生器中的阶跃输出 0/+5V 作为系统的信号输入 (U_i)：

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号	
1	A5	当反馈电容 $C=1\mu\text{f}$ 时	5S4 , 5S8
		当反馈电容 $C=2\mu\text{f}$ 时	5S4 , 5S9
2	A6		6S2 , 6S6

(b) 连线

1	信号输入 (U_i)	B5 (OUT) \rightarrow A5 (H1)
2	运放级联	A5 (OUT) \rightarrow A6 (H1)

(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT (U_o)。

(4) 运行、观察、记录：

用示波器观测 A6 输出端 (U_o) 的实际响应曲线 $U_o(t)$ ，且将结果记下。改变时间常数 (改变运算模拟单元 A5 的反馈反馈电容 C)，重新观测并记录结果。其实际阶跃响应曲线见表 1-1-1。

5) . 观察比例微分环节的阶跃响应曲线

典型比例微分环节模拟电路如图 1-1-5 所示。该环节在 A2 单元中分别选取反馈电阻 $R_1=10\text{K}$ 、 20K 来改变比例参数。

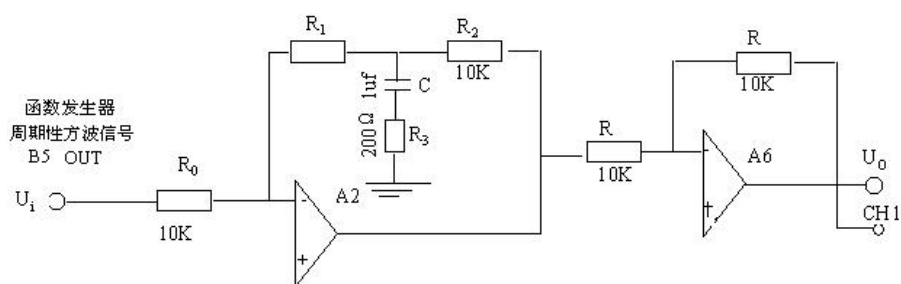


图 1-1-5 典型比例微分环节模拟电路

实验步骤：

(1) 为了避免积分饱和，将函数发生器 (B5) 所产生的周期性方波信号 (OUT)，代替信号发生器 (B1) 中的阶跃输出 $0/+5\text{V}$ 作为系统的信号输入 (U_i)：

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号	
1	A2	当反馈电阻 $R_1=10K$ 时	2S1 , 2S7 , 2S9
		当反馈电阻 $R_1=20K$ 时	2S1 , 2S8 , 2S9
2	A6		6S2 , 6S6

(b) 连线

1	信号输入 (U_i)	B5 (OUT) \rightarrow A2 (H1)
2	运放级联	A2 (OUT) \rightarrow A6 (H1)

(3) 示波器的联接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT (U_o)。

(4) 运行、观察、记录：

用示波器观测 A6 输出端 (U_o) 的实际响应曲线 $U_o(t)$, 且将结果记下。改变比例参数 (改变运算模拟单元 A1 的反馈电阻 R_1) , 重新观测并记录结果。其实际阶跃响应曲线见表 1-1-1。

6) . 观察 PID (比例积分微分) 环节的响应曲线

PID (比例积分微分) 环节模拟电路如图 1-1-6 所示。该环节在 A2 单元中分别选取反馈电阻 $R_1=10K$ 、 $20K$ 来改变比例参数。

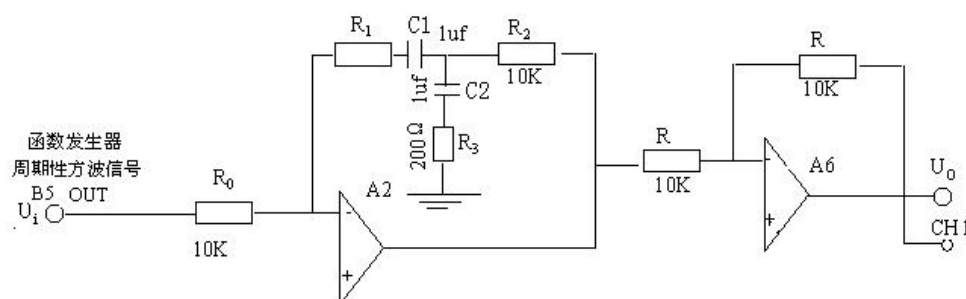


图 1-1-6 PID (比例积分微分) 环节模拟电路

实验步骤：

(1) 为了避免积分饱和，将函数发生器所产生的周期性方波信号 (OUT) , 代替信号发生器 (B1) 中的阶跃输出 $0/+5V$ 作为 PID 环节的信号输入 (U_i)：

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号	
1	A2	当反馈电阻 $R_1=10K$ 时	2S1 , 2S7
		当反馈电阻 $R_1=20K$ 时	2S1 , 2S8
2	A6		6S2 , 6S6

(b) 连线

1	信号输入 (U_i)	B5 (OUT) \rightarrow A2 (H1)
2	运放级联	A2 (OUT) \rightarrow A6 (H1)

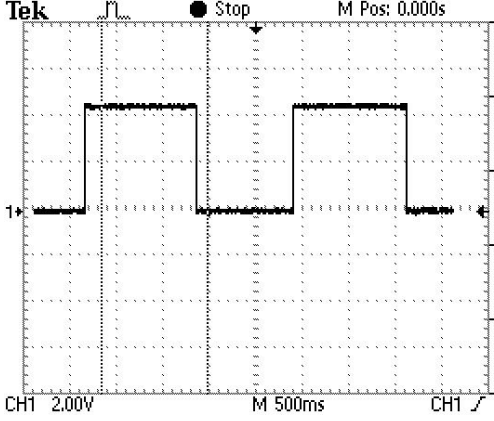
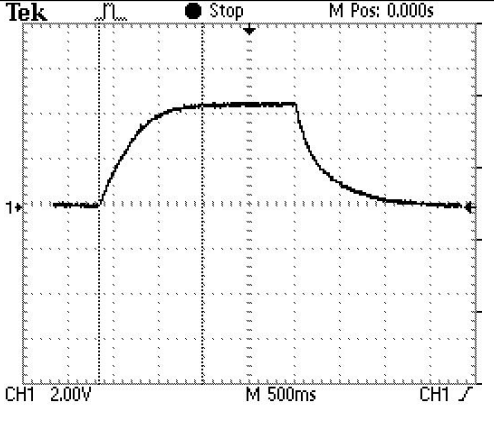
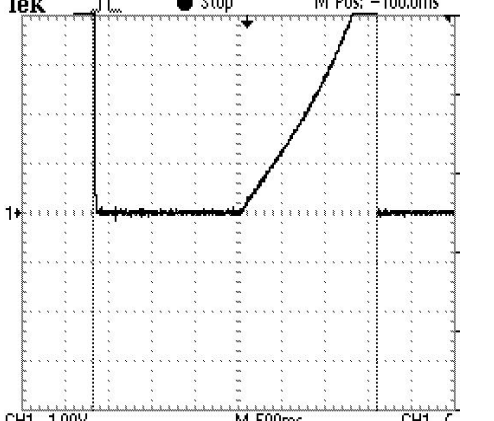
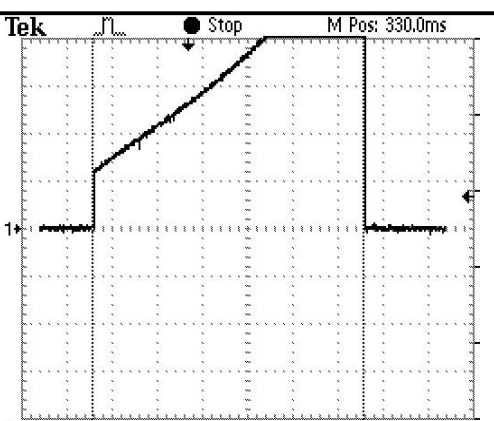
(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT (U_o)。

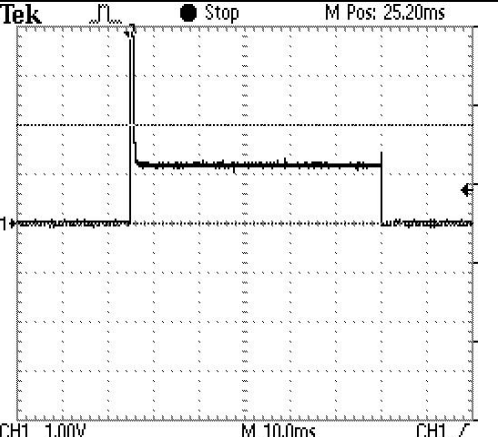

(4) 运行、观察、记录：

用示波器观测 A6 输出端 (U_o) 的实际响应曲线 $U_o(t)$, 且将结果记下。改变比例参数 (改变运算模拟单元 A2 的反馈电阻 R_1) , 重新观测并记录结果。其实际阶跃响应曲线见表 1-1-1。

表 1-1-1 典型环节的阶跃响应曲线

典型环节	传递函数 参数与模拟 电路参数 关系	单位 阶 跃 响 应	实际阶跃响应曲线
------	-----------------------------	------------------------	----------

一、 比例	$K = \frac{R}{R}$ $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = K$ $U_o(t) = K$	$R_o = 200K$	$R_i = 200K$	
二、 惯性	$K = \frac{R_1}{R_o}$ $T = R_i C$ $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{K}{1 + TS}$ $U_o(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$	$R_N = 200K$ $R_M = 200K$	$C = 2\mu F$	
三、 积分	$T = R_o C$ $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{TS}$ $U_M(t) = \frac{1}{T} t$	$R_M = 200K$	$C = 2\mu F$	
四、 比例 积分	$K = \frac{R_1}{R_o}$ $T = R_i C$ $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = K(1 + \frac{1}{TS})$ $U_o(t) = K(1 + \frac{1}{T} t)$	$R_i = 200K$ $R_o = 200K$	$C = 2\mu F$	

<p>五、 比例 微分</p>	$K = \frac{R_1 + R_2}{R_0}$ $T_1 = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) C$ $T_2 = R_3 C$ $\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = K \frac{(1 + T_1 s)}{(1 + T_2 s)}$ <p>若 $R_3 \ll (R_1 // R_2)$</p> <p>则：</p> $\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = K(1 + TS)$ $U_0(t) = KT\delta(t) + K$	$R_0 = 10K$ $R_2 = 10K$ $C = 1\mu F$ $R_3 = 200$	$R_1 = 20K$	
<p>六、 比例 微分 积分</p>	$K_p = \frac{R_1 + R_2}{R_0}$ $T_1 = (R_1 + R_2) C_1$ $T_D = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) C_2$ $\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = K_p + \frac{K_p}{T_1 s} + K_p T_D s$ $U_0(t) = K_p T_D \delta(t)$	$R_0 = 10K$ $R_2 = 1K$ $R_3 = 200$ $C_1 = C_2 = 1\mu F$	$R_1 = 10K$	

实验二 典型系统的时域响应和稳定性分析

一. 实验目的

1. 学习掌握瞬态性能指标的测试方法，了解参数结构变化对典型二阶系统的影响。了解并观察二阶系统过阻尼、临界阻尼、欠阻尼控制三种典型波形。
2. 观察并掌握三阶系统在阶跃信号作用下的动态性能，了解参数变化对系统动态性能及稳定性的影响。

二. 实验要求

1. 掌握典型二阶系统模拟电路的构成方法，I 型二阶闭环系统的传递函数标准式。
2. 研究二阶闭环系统的结构参数--无阻尼振荡频率 ω_n , 阻尼比 ξ 对过渡过程的影响。
3. 掌握欠阻尼二阶闭环系统在阶跃信号输入时的动态性能指标 M_p 、 t_p 、 t_s 的计算。
4. 观察和分析典型二阶闭环系统在欠阻尼，临界阻尼，过阻尼的瞬态响应曲线，欠阻尼二阶闭环系统中的结构参数--自然频率（无阻尼振荡频率） ω_n , 阻尼比 ξ 对瞬态响应的影响。

三. 实验设备

1. 直线电机倒立摆系统一套
2. 数字示波器一台
3. 信号发生器一台
4. 短路帽若干

四. 实验原理、内容和步骤

图 2-1-1 是典型二阶系统原理方块图。

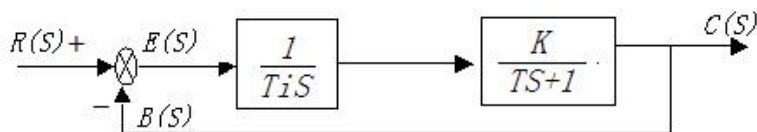


图 2-1-1 典型二阶系统原理方块图

I 型二阶系统的开环传递函数：
$$G(S) = \frac{K}{TiS(TS + 1)}$$

I 型二阶系统的闭环传递函数标准式：
$$\phi(s) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$

自然频率（无阻尼振荡频率）： $\omega_n = \sqrt{K/TiT}$ 阻尼比： $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{Ti/KT}$

有二阶闭环系统模拟电路如图 2-1-2 所示。它由积分环节（A2）和惯性环节（A3）构成。

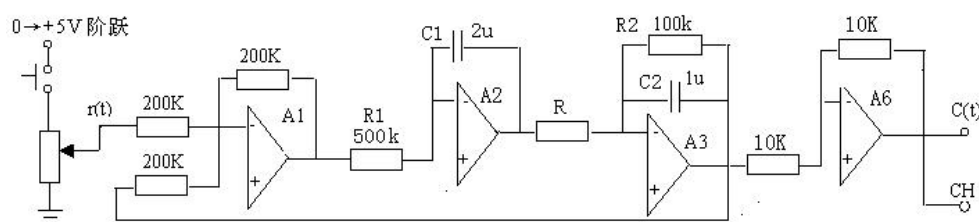


图 2-1-2 典型二阶闭环系统模拟电路

图 2-1-2 的二阶系统模拟电路的各环节参数及系统的传递函数：

积分环节（A2 单元）的积分时间常数 $Ti = R1 * C1 = 1S$

惯性环节（A3 单元）的惯性时间常数 $T = R2 * C2 = 0.1S$

该闭环系统在 A3 单元中改变输入电阻 R 来调整增益 K，R 分别设定为 10k、40k、100k。

$$G(S) = \frac{K}{TiS(TS + 1)} = \frac{K}{S(0.1S + 1)} \quad \text{其中 } K = \frac{R_2}{R} = \frac{100k}{R}$$

$$\phi(s) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2} = \frac{10K}{S^2 + 10S + 10K}$$

$$\omega_n = \sqrt{K/TiT} = \sqrt{10K} \quad \xi = \frac{1}{2}\sqrt{T/KT} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{K}}$$

当 $R=100k$ ， $K=1$ $\xi=1.58 > 1$ 为过阻尼响应，

当 $R=40k$ ， $K=2.5$ $\xi=1$ 为临界阻尼响应，

当 $R=10k$ ， $K=10$ $\xi=0.5$ $0 < \xi < 1$ 为欠阻尼响应。

欠阻尼二阶闭环系统在阶跃信号输入时的动态性能指标 M_p 、 t_p 、 t_s 的计算：
($K=10$ $\xi=0.5$)

$$\text{超调量} : M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 16.3\% \quad \text{峰值时间} :$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.36$$

$$\text{调节时间} : t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.8$$

(1) 用信号发生器的‘阶跃信号输出’和‘幅度控制电位器’构造输入信号 (U_i) :
(0/+5V 阶跃)。阶跃信号输出调整为 2V。

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号	
1	A1		1S4 , 1S8
2	A2		2S2 , 2S10 , 2S11
3	A3	当输入电阻 R=10K 当输入电阻 R=39K 当输入电阻 R=100K	3S1 , 3S8 , 3S10 3S2 , 3S8 , 3S10. 3S4 , 3S8 , 3S10
4	A6		6S2 , 6S6

(b) 连线

1	信号输入 r(t)	B1 (Y) → A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT → A2 (H1)
3	运放级联	A2 (OUT → A3 (H1)
4	负反馈	A3 (OUT → A1 (H2)
5	运放级联	A3 (OUT → A6 (H1)

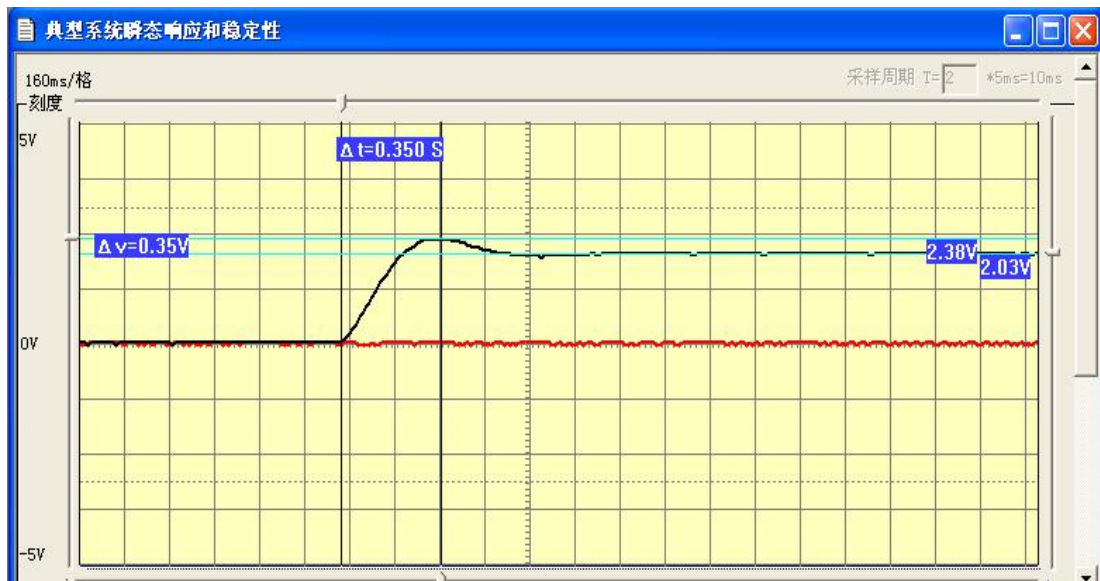
(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT (C(t))。

(4) 运行、观察、记录：

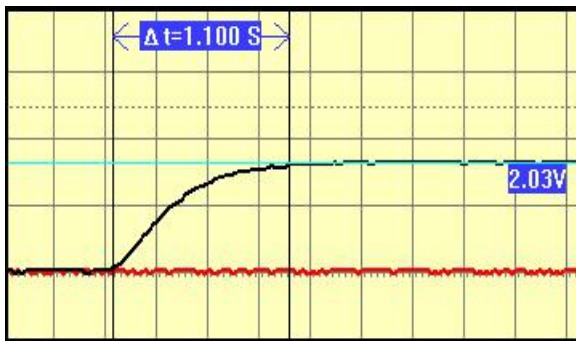
用示波器观察在三种情况下 A3 输出端 $C(t)$ 的系统阶跃响应，并记录超调量 MP ，峰值时间 t_p 和调节时间 t_s 。并将测量值和计算值（实验前必须按公式计算出）进行比较。参数取值及响应曲线，详见表 2-1-2。

表 2-1-2 二阶系统在三种情况（欠阻尼，临界阻尼，过阻尼）下的阶跃响应曲线(图 2-1-3)

参数 项目	R $K\Omega$	K $(1/S)$	Wn $(1/S)$	ξ	$C(t_p)$	$C(\infty)$	MP(%)	tp(S)	ts(S)
							测量值 计算值	测量值 计算值	测量值 计算值
$0 < \xi < 1$ 欠阻尼阶跃响应为衰减振荡	10	10	10	$\frac{1}{2}$	1.2	1	17.2 16.3	0.35 0.36	0.75 0.8
$\xi = 1$ 临界阻尼阶跃响应为单调指数曲线	40	2.5	5	1	—	1	—	—	1.1
$\xi > 1$ 过阻尼响应为单调指数曲线	100	1	$\sqrt{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	—	1	—	—	3.68



(a) $0 < \xi < 1$ 欠阻尼阶跃响应曲线



(b) $\xi = 1$ 临界阻尼阶跃响应曲线



(c) $\xi > 1$ 过阻尼阶跃响应曲线

图 2-1-3 二阶系统在三种情况下的阶跃响应曲线

实验三 线性系统的校正

一. 实验目的

1. 掌握系统校正的方法，重点了解串联校正。
2. 根据期望的时域性能指标推导出二阶系统的串联校正环节的传递函数。

二. 实验要求

1. 掌握典型三阶系统模拟电路的构成方法，I 型三阶系统的传递函数表达式。
2. 熟悉劳斯（ROUTH）判据使用方法。
3. 应用劳斯（ROUTH）判据，观察和分析 I 型三阶系统在阶跃信号输入时，系统的稳定、临界稳定及不稳定三种瞬态响应
4. 掌握系统校正的方法（串联超前校正），根据期望的时域性能指标设计校正装置。
5. 观察和分析未校正系统和校正后系统的响应曲线。

三. 实验设备

1. 直线电机倒立摆系统一套
2. 数字示波器一台
3. 信号发生器一台
4. 短路帽若干

四. 实验原理、内容及步骤

图 3-1-1 是未校正系统的原理方块图。

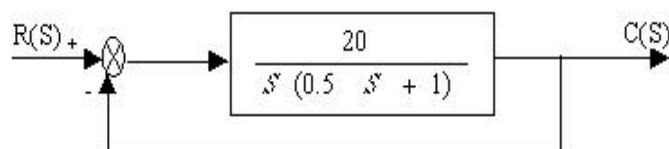


图 3-1-1 未校正系统的原理方块图

图 3-1-1 的二阶系统 (I 型) 开环传递函数 : $G(S) = \frac{K}{TiS(TS + 1)}$ (式 3-1-1)

二阶系统 (I 型) 闭环传递函数标准式 : $\phi(s) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$ (式 3-1-2)

图 3-1-1 的二阶系统 (I 型) 闭环传递函数 : $\phi(s) = \frac{40}{S^2 + 2S + 40}$ (式 3-1-3)

从 (式 3-1-3) 计算可得到图 3-1-1 二阶系统的自然频率和阻尼比为 :

自然频率 $\omega_n = \sqrt{K/TiT} = 6.32$ 阻尼比 : $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{Ti/KT} = 0.158$ (式 3-1-4)

从 (式 3-1-4) 计算可得到图 3-1-1 二阶系统的超调量和调节时间为 :

超调量 : $M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 60\%$ 调节时间 : $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4$ (式 3-1-5)

要求设计校正装置 , 使系统满足下述性能指标 : $\begin{cases} M_p \leq 25\% \\ t_s \leq 1s \end{cases}$ (式 3-1-6)

$M_p \leq 25\%$ 和 $t_s \leq 1s$ 代入 (式 3-1-5) , 可得到 $\omega_n \geq 10$, $\xi \geq 0.4$

设串联超前 (微分) 校正网络的传递函数为 : $G_c(S) = \frac{0.5S + 1}{0.05S + 1}$

加入校正网络后系统的原理方块图如图 3-1-2 所示 :

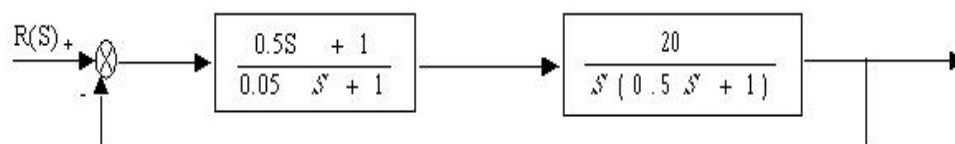


图 3-1-2 加入校正网络后系统的方块图

图 3-1-2 的系统闭环传递函数 : $\phi(s) = \frac{400}{S^2 + 20S + 400}$ (式 3-1-7)

从 (式 3-1-7) 计算可得到图 3-1-1 二阶系统的超调量和调节时间为 :

超调量 : $M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 16\%$ 调节时间 : $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.4$

计算结果满足设计要求。

1. 测量未校正系统的性能指标

未校正系统的模拟电路图见图 3-1-3。

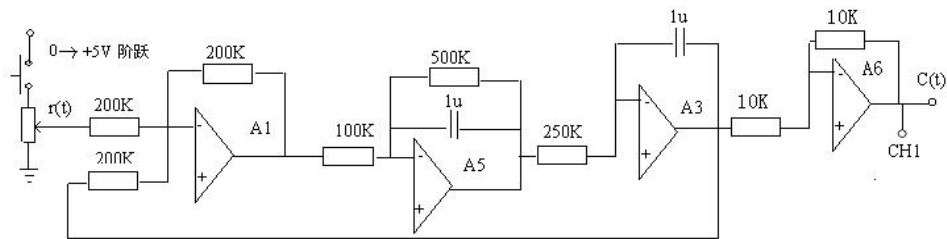


图 3-1-3 未校正系统的模拟电路图

(1) 用信号发生器的‘阶跃信号输出’和‘幅度控制电位器’构造输入信号 (U_i)：

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号
1	A1	1S4 , 1S8
2	A5	5S3 , 5S7 , 5S10
3	A3	3S5 , 3S10
4	A6	6S2, 6S6

(b) 连线

1	信号输入 $r(t)$	B1 (Y) \rightarrow A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT) \rightarrow A5 (H1)
3	运放级联	A5 (OUT) \rightarrow A3 (H1)
4	负反馈	A3 (OUT) \rightarrow A1 (H2)
5	运放级联	A3 (OUT) \rightarrow A6 (H1)

(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A6 单元信号输出端 OUT ($C(t)$)。

(4) 运行、观察、记录：

信号发生器阶跃信号按钮时（ $0 \rightarrow +5V$ 阶跃），用示波器观察 A6 单元信号输出端 C(t) 系统阶跃响应，测量并记录超调量 MP，峰值时间 t_p 和调节时间 t_s 。响应曲线波形详见表 3-1-1 中。

2. 测量校正系统的性能指标

校正后系统模拟电路见图 3-1-4。

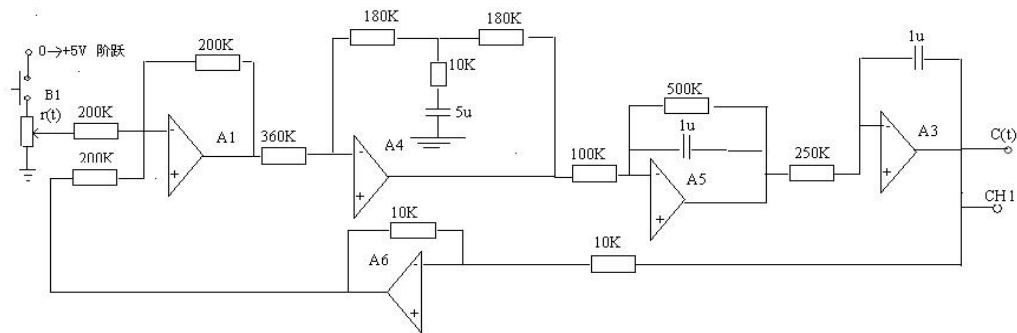


图 3-1-4 校正后系统模拟电路

(1) 用信号发生器 (B1) 的 ‘阶跃信号输出’ 和 ‘幅度控制电位器’ 构造输入信号 (U_i)：（ $0/+5V$ 阶跃）。阶跃信号输出调整为 2V。

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号
1	A1	1S4 , 1S8
2	A4	4S4 , 4S9
3	A5	5S3 , 5S7 , 5S10
4	A3	3S5 , 3S10
5	A6	6S2 , 6S6

(b) 连线

1	信号输入 $r(t)$	B1 (Y) \rightarrow A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT) \rightarrow A4

		(H1)
3	运放级联	A4 (OUT) → A5 (H1)
4	运放级联	A5 (OUT) → A3 (H1)
5	运放级联	A3 (OUT) → A6 (H1)
6	负反馈	A6 (OUT) → A1 (H2)

(3) 示波器的连接：示波器输入端 CH1 接到 A3 单元信号输出端 OUT (C(t))。

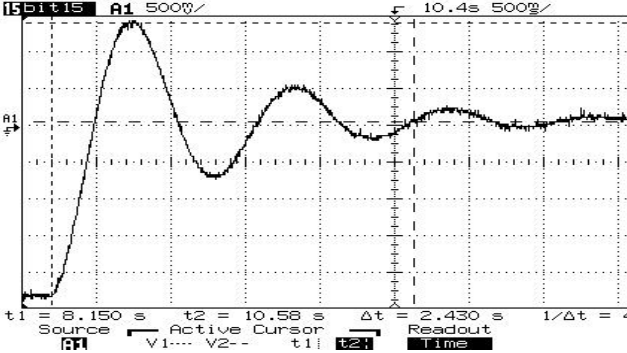
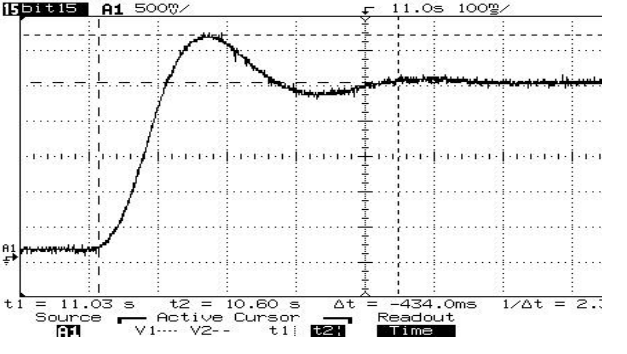
(4) 运行、观察、记录：

按下信号发生器 (B1) 阶跃信号按钮时，用示波器观察 A3 单元信号输出端 C(t)系统阶跃响应，测量并记录超调量 MP,峰值时间 tp 和调节时间 ts。响应曲线波形详见表 3-1-1 中。

3 . 具体参数及响应曲线

表 3-1-1 具体参数及响应曲线

项目	参数		Mp (%)		ts(S)		响 应 曲 线
	计算值	测量值	计算值	测量值	计算值	测量值	

未校正	0.6	4	
校正后	0.16	0.22	

五. 思考题

1. 在上述系统要求下，是否可以采用串联滞后校正装置？
2. 校正装置仍为超前校正装置，如果参数不能保证零极点相消，系统性能如何？
3. 关于实验结果的其它分析讨论

实验四 频率特性的测量

一. 实验目的

掌握频率特性的测试原理及方法。

二. 实验要求

1. 掌握对数幅频曲线和相频曲线（波德图）、幅相曲线（奈奎斯特图）的构造及绘制方法。
2. 研究二阶闭环系统的结构参数--自然频率或无阻尼振荡频率 ω_n , 阻尼比 ξ 对对数幅频曲线和相频曲线的影响，及渐近线的绘制。

三. 实验设备

1. 直线电机倒立摆系统一套
2. 数字示波器一台
3. 信号发生器一台
4. 短路帽若干

四. 实验原理、内容和步骤

一被测系统的方块图见图 4-1-1。

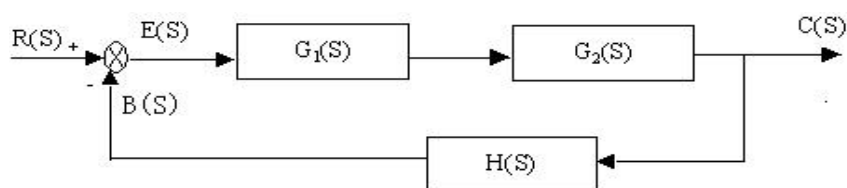


图 4-1-1 被测系统方块图

系统（环节）的频率特性 $G(j\omega)$ 是一个复变量，可以表示成以角频率 ω 为参数的幅值和相角：

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) \quad (\text{式 4-1-1})$$

图 4-1-1 所示被测系统的闭环传递函数：

$$\varphi(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G_1(S)G_2(S)}{1 + G_1(S)G_2(S)H(S)} \quad (\text{式 4-1-2})$$

如被测系统的反馈传递函数 $H(S)=1$ ，则 (式 4-1-2) 可简化为：

$$\varphi(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G_1(S)G_2(S)}{1 + G_1(S)G_2(S)} \quad (\text{式 4-1-3})$$

式 4-1-3 以角频率 ω 为参数的幅值和相角：

$$L(\omega) = 20\lg|\phi(j\omega)| \quad \varphi(\omega) = \angle\phi(j\omega)$$

由于 I 型系统含有一个积分环节，它在开环时响应曲线是发散的，因此欲获得其开环频率特性时，还是需构建闭环系统，测试其闭环频率特性，然后通过公式换算，获得其开环频率特性，算法如下：

图 4-1-1 所示被测系统的开环频率特性为：

$$G_1(S)G_2(S) = \frac{\varphi(S)}{1 - \varphi(S)} \quad (\text{式 4-1-4})$$

图 4-1-1 所示被测系统以角频率 ω 为参数表示成的开环频率特性为：

$$G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \frac{\varphi(j\omega)}{1 - \varphi(j\omega)} = \left| \frac{\varphi(j\omega)}{1 - \varphi(j\omega)} \right| \angle \frac{\varphi(j\omega)}{1 - \varphi(j\omega)} \quad (\text{式 4-1-5})$$

式 (4-1-5) 亦可以角频率 ω 为参数表示为对数幅频特性和相频特性：

$$20\lg|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| = 20\lg\left| \frac{\varphi(j\omega)}{1 - \varphi(j\omega)} \right| \quad \angle G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \angle \frac{\varphi(j\omega)}{1 - \varphi(j\omega)}$$

一阶系统的对数幅频曲线、相频曲线和幅相曲线

本实验信号发生器，产生的超低频正弦信号的频率从低到高变化 (0.5Hz~64Hz)，施加于被测系统的输入端 $[r(t)]$ ，然后分别测量被测系统的输出信号的对数幅值和相位，数据经相关运算后在虚拟示波器中显示。一阶被测系统的模

拟电路图见图 4-1-2。

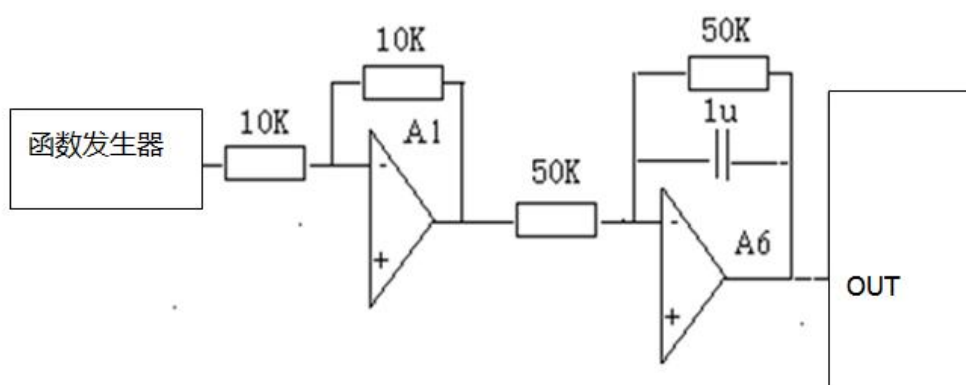


图 4-1-2 一阶被测系统的模拟电路图

(1) 函数发生器 (信号频率范围为 0.5Hz~64Hz) 作为被测系统的输入端 $[r(t)]$ 。

(2) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

(a) 放置短路帽

	模块号	跨接座号
1	A1	1S2 , 1S6
2	A6	6S4 , 6S7 , 6S9

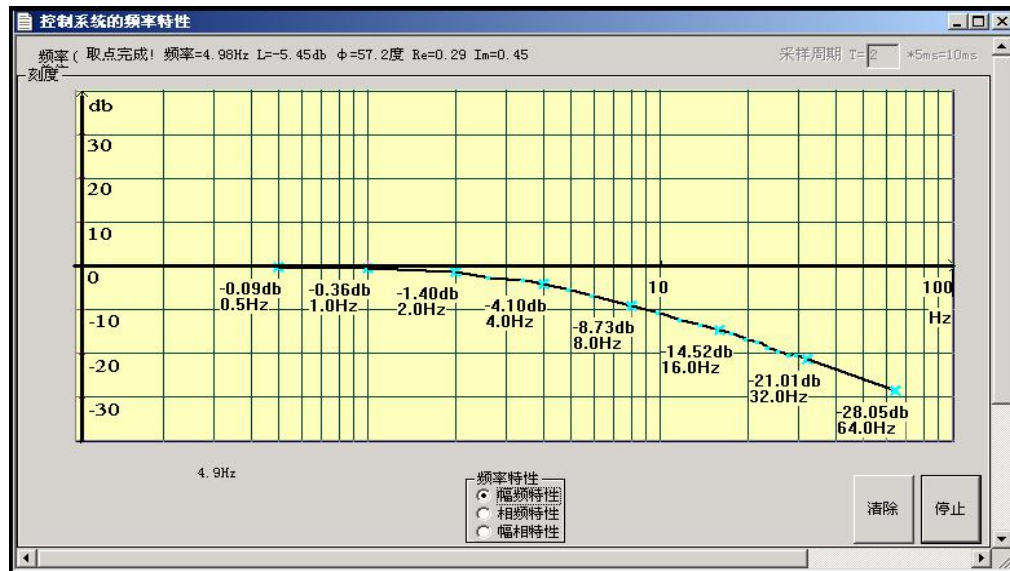
(b) 连线

1	信号输入	B2 (OUT2) → A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT) → A6 (H1)
3	信号连线	A6 (OUT) → A9 (CIN)
4	信号连线	A9 (COUT) → B4 (A2)
5	信号连线	A6 (OUT) → B8 (IN6)
6	中断请求线	B4 (Q2) → B9 (IRQ6)

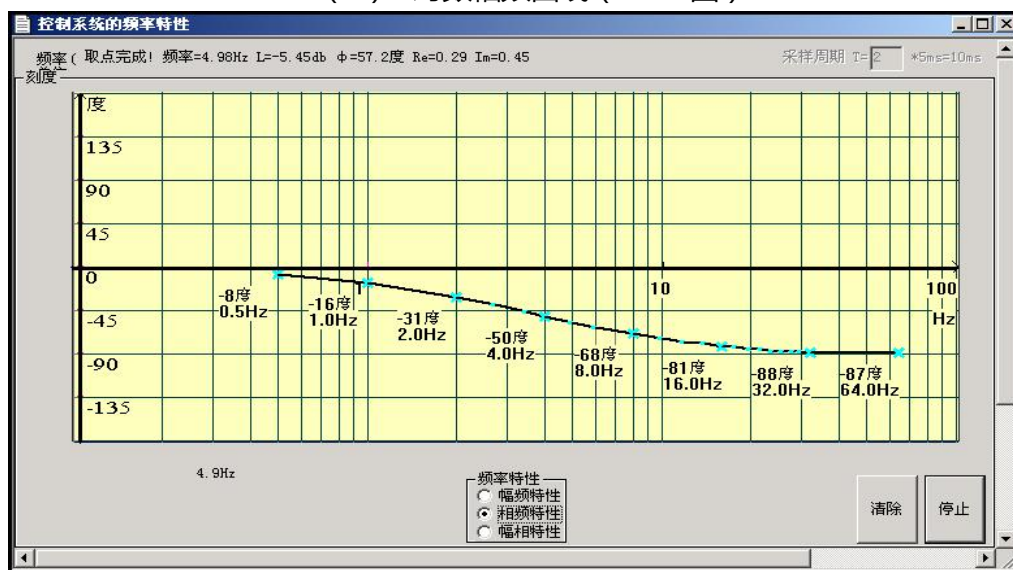
(3) 运行、观察、记录：

a. 用示波器观察系统各环节波形，避免系统进入非线性状态，具体用法参见第二章虚拟示波器部分。

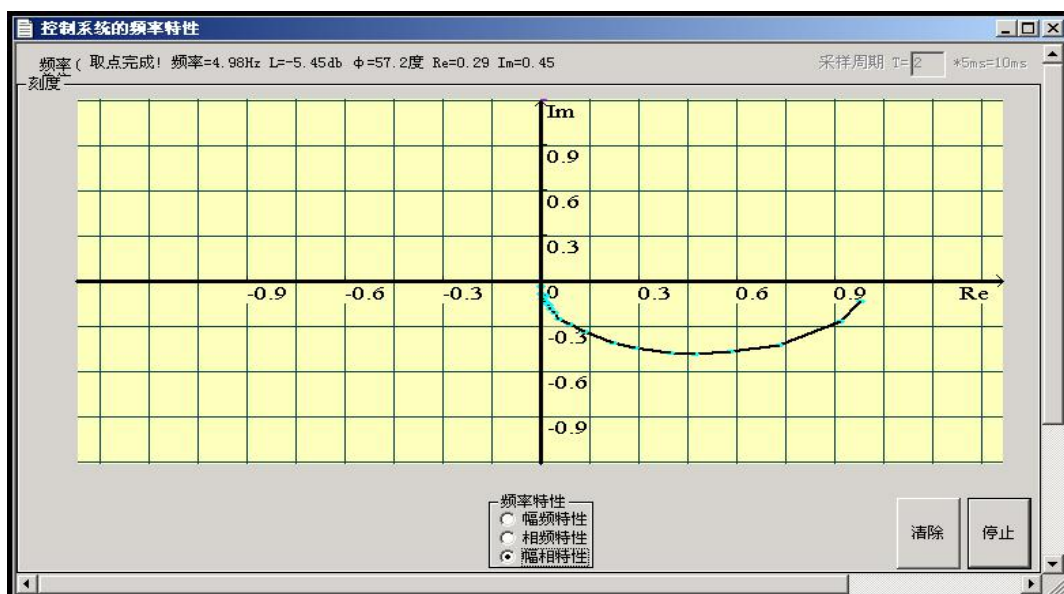
b. 被测系统的开环对数幅频曲线、相频曲线及幅相曲线见图 3-2-3，该曲线已增添了多个频率点。



(a) 对数幅频曲线 (Bode 图)



(b) 对数相频曲线 (Bode 图)



(c) 幅相曲线 (Nyquist 曲线)

图 4-1-3 被测系统的开环对数幅频曲线、相频曲线及幅相曲线

二阶系统的对数幅频曲线、相频曲线和幅相曲线

本实验将信号发生器，产生的超低频正弦信号的频率从低到高变化（0.5Hz~64Hz），施加于被测系统的输入端 $r(t)$ ，然后分别测量被测系统的输出信号的对数幅值和相位，数据经相关运算后在虚拟示波器中显示。二阶闭环系统模拟电路图见图 4-1-4 所示。它由积分环节（A5 单元）和惯性环节（A3 单元）构成。

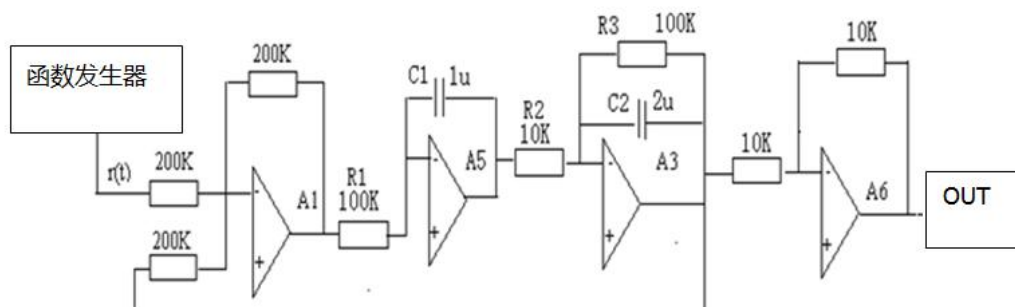


图 4-1-4 被测二阶闭环系统模拟电路图

图 4-1-4 二阶闭环系统模拟电路的各环节参数及系统的传递函数：

积分环节（A5 单元）的积分时间常数 $T_i = R_1 * C_1 = 0.1S$ ，

惯性环节（A3 单元）的惯性时间常数 $T = R_3 * C_2 = 0.2S$ 。 $K_1 = R_3 / R_2 = 10$

$$\text{二阶系统闭环传递函数标准式：} \phi(s) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$

系统中的开环传递函数： $G(S) = \frac{K1}{TiS(TS+1)} = \frac{10}{0.1S(0.2S+1)}$

则其自然频率或无阻尼振荡频率或交接频率： $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T} \frac{1}{Ti}} = 22.36$

$\varphi(\omega_n) = -90^\circ$ 阻尼比： $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Ti}{KT}} = 0.1118$

谐振频率： $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = 22.078$ 峰值：

$L(\omega_r) = 20 \log \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} = 13.065dB$

① 如更改图 4-1-4 二阶闭环系统模拟电路的各环节参数，使之 $Ti=1$ ， $T=0.3$ ， $K=1$

则其自然频率或无阻尼振荡频率或交接频率： $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T} \frac{1}{Ti}} = 1.8257$

$\varphi(\omega_n) = -90^\circ$ 阻尼比： $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Ti}{KT}} = 0.913$

由于 $\xi > 0.707$ ，因此不存在谐振峰值，两条渐近线交点为 ω_n ，其中一条渐近线斜率为-40dB/dec。

② 如更改图 4-1-4 二阶闭环系统模拟电路的各环节参数，使之 $Ti=0.043$ ， $T=0.1$ ， $K=10$

则其自然频率或无阻尼振荡频率或交接频率： $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T} \frac{1}{Ti}} = 48.22$

$\varphi(\omega_n) = -90^\circ$ 阻尼比： $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Ti}{KT}} = 0.103$

谐振频率： $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = 47.71$ 峰值： $L(\omega_r) = 20 \log \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} = 13.77dB$

(1) 将函数发生器输出 OUT2 (信号频率范围为 0.5Hz~32Hz) 作为被测系统的输入端[r(t)]。

(1) 放置短路帽、连线，构造模拟电路：

	模块号	跨接座号
--	-----	------

(a) 放置短路帽

1	A1	1S4 , 1S8
2	A5	5S3 , 5S10
3	A3	3S1 , 3S8 , 3S9 , 3S10
5	A6	6S2 , 6S6

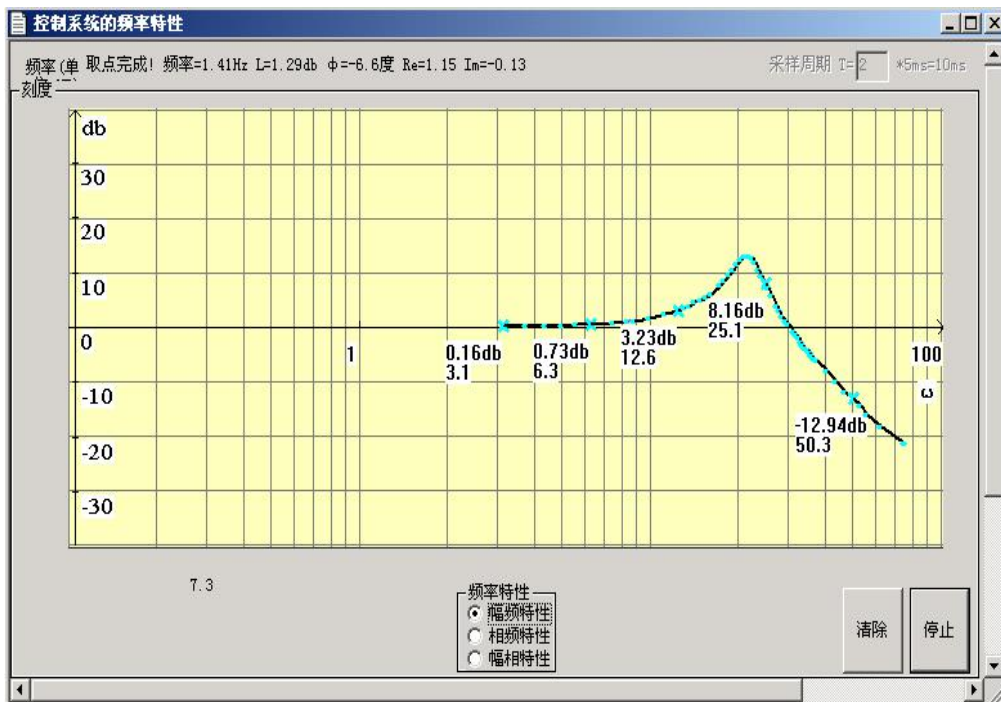
(b) 连线

1	信号输入 r(t)	B2 (OUT2) → A1 (H1)
2	运放级联	A1 (OUT) → A5 (H1)
3	运放级联	A5 (OUT) → A3 (H1)
4	运放级联	A3 (OUT) → A6 (H1)
6	负反馈	A3 (OUT) → A1 (H2)
7	信号连线	A6 (OUT) → A9 (CIN)
8	信号连线	A9 (COUT) → B4 (A2)
9	信号连线	A6 (OUT) → B8 (IN6)
10	'中断请求'线	B4 (Q2) → B9 (IRQ6)

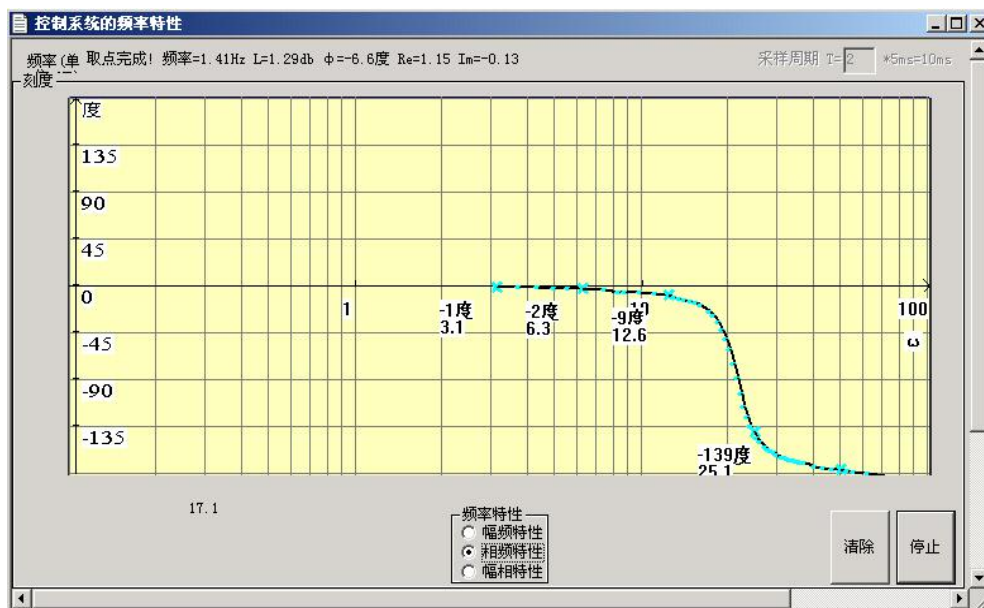
(2) 运行、观察、记录：

a . 用示波器观察系统各环节波形，避免系统进入非线性状态。具体用法参见第二章虚拟示波器部分。

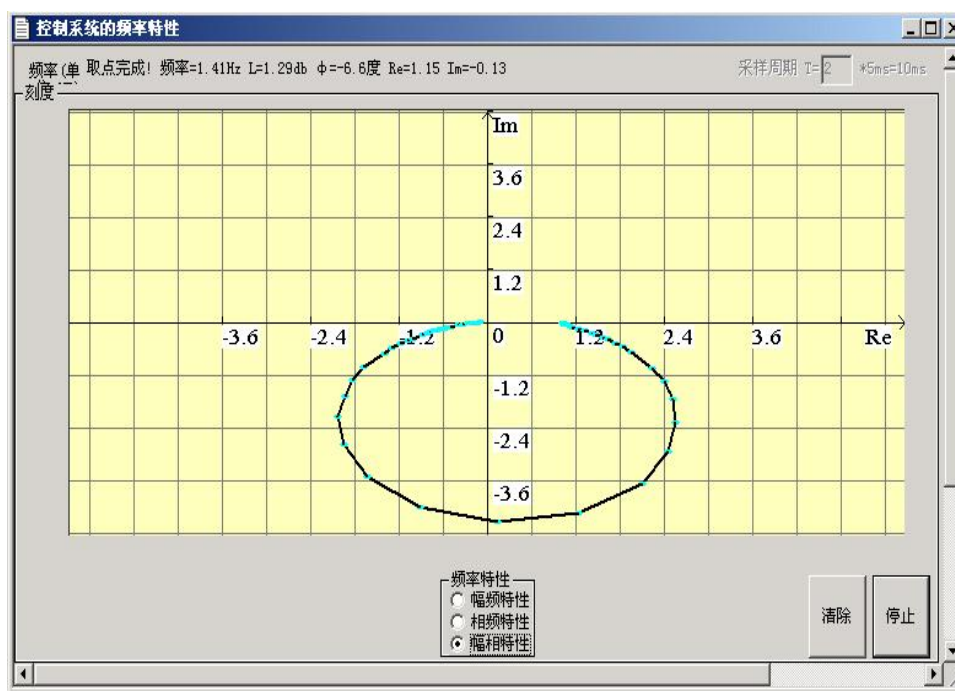
b . 被测二阶系统的闭环对数幅频、相频曲线和幅相曲线见图 4-1-5，该曲线已增添了多个频率点。



(a) 闭环对数幅频曲线



(b) 闭环对数相频曲线



(c) 闭环幅相曲线

图 4-1-5 被测二阶闭环系统的对数幅频曲线、相频曲线和幅相曲线

实验机在测试频率特性时，实验开始后实验机先自动产生 0.5Hz、1Hz、2Hz、4Hz、8Hz、16Hz、32Hz、64Hz 等多种频率信号，在示波器的界面上形成不同频率信号时的对数幅频、相频特性曲线（伯德图）和幅相曲线（奈奎斯特图）。然后提示用户用鼠标直接在幅频或相频特性曲线的界面上点击所需增加的频率点，实验机将会把鼠标点取的频率点的频率信号送入到被测对象的输入端，然后检测该频率的频率。检测完成后在界面上方显示该频率点的频率和相关数据，同时在曲线上打点。如果增添的频率点足够多，则频率特性曲线将成为一条近似光滑的曲线。频率点的选择范围为 0.1Hz~100Hz，用鼠标在界面上移动时，在曲线界面的左下角将会同步显示鼠标位置所选取的频率值。

五、思考题

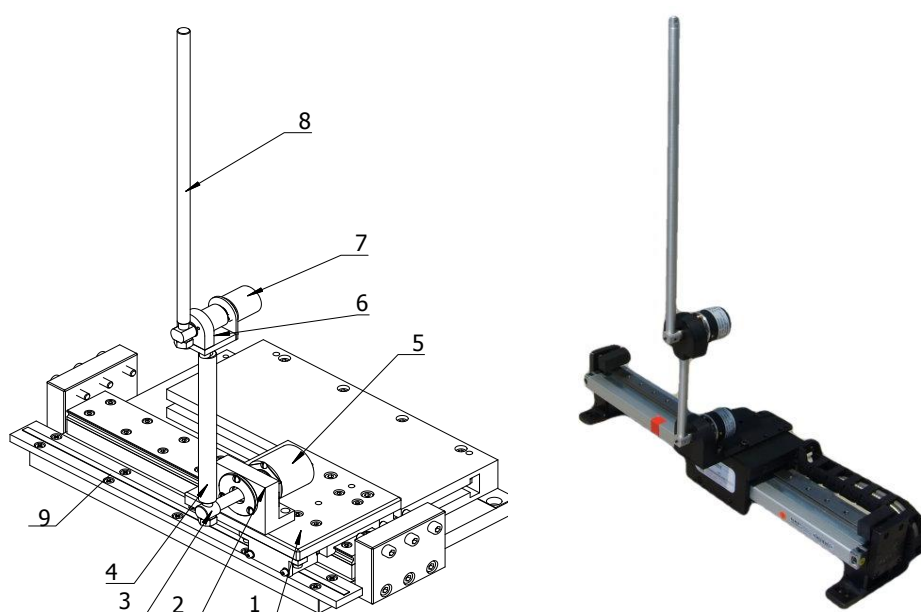
1. 在绘制波特图时，应当如何合理的选择测量频率点？
2. 关于实验结果的其它分析讨论

第二部分 控制理论综合实验

第一章 实验平台介绍

1.1 直线电机倒立摆硬件系统结构

直线倒立摆本体结构如下图所示，主要组件包括：直线电机平台（带直线光栅）、一级倒立摆组件（带角度编码器），DSP 运动控制卡、一级倒立摆 DSP 控制软件。图 2-1 为直线电机二级倒立摆的原理图和实物照片：



1. 直线运动工作台 2. 倒立摆的底座 3. 轴 4. 下摆杆 5. 角度编码器

6. 下摆杆和上摆杆的连接装置 7. 角度编码器 8. 上摆杆 9. 直线位移传感器

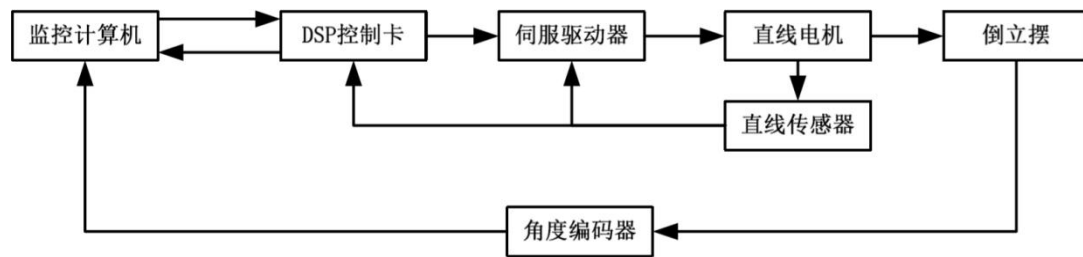
图 2.1 直线电机驱动倒立摆

注：一级倒立摆只要在二级倒立摆的基础上去掉上摆杆即可，因此不再单独给出其原理图和实物照片。

运动过程：小车由电机通过同步带驱动在滑杆上来回运动，保持摆杆平衡。

电机编码器和角编码器向运动卡反馈小车和摆杆位置（线位移和角位移）。

1.2 直线电机一级倒立摆组成框图



第二章 直线电机一级倒立摆建模及性能分析

2.1 直线电机一级倒立摆建模及性能分析

传统的线性控制方法离不开被控系统的线性模型，为了进行线性控制器的设计，首先需要对被控系统进行建模。

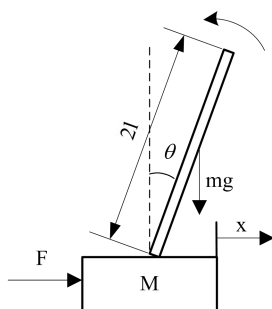


图1 单级倒立摆的物理模型

为此，不妨做以下假设：（1）摆杆和底座为刚体；（2）忽略空气阻力和摆杆与底座轴承的摩擦力；（3）图示箭头所示方向为矢量正方向。

图1中， m 为摆杆质量， M 为摆杆底座的质量， l 为摆杆转动轴心到摆杆质心的长度， I 为摆杆惯量， F 为加在摆杆底端上的力， x 为底座的位移， θ 为摆杆与垂直向上方向的夹角。

对摆杆水平方向进行受力分析可得：

$$N = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (1)$$

$$\text{即：} N = m \ddot{x} + ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2)$$

对底座水平方向进行受力分析可得：

$$M \ddot{x} = F - N - b \dot{x} \quad (3)$$

将2式代入3式得：

$$(M + m) \ddot{x} + b \dot{x} + ml \ddot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (4)$$

对摆杆垂直方向上的合力进行分析可得：

$$P - mg = -m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (5)$$

$$\text{即：} P - mg = ml \ddot{\theta} \sin \theta + ml \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (6)$$

对于摆杆，力矩平衡方程为：

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I \ddot{\theta} \quad (7)$$

注意：此方程中力矩的方向，由于 $\theta = \pi + \phi$, $\cos \phi = -\cos \theta$, $\sin \phi = -\sin \theta$ ，故等式前面有负号。

合并这两个方程，约去 P 和 N 可得：

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (8)$$

设 $\theta = \pi + \phi$, 假设 ϕ 与 1 (单位是弧度) 相差很小 , 即 $\phi \ll 1$, 则可以进行近似处理 :

$\cos \theta = -1, \sin \theta = -\phi, (\frac{d\theta}{dt})^2 = 0$ 。用 u 来代表被控对象的输入力 F , 线性化后可得 :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\phi} + b\dot{x} = u \\ (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \end{cases}$$

设系统的状态空间方程为 :

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX + Du$$

取状态变量 : $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$, 则状态向量为 $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$,

对方程组 9、10 求解代数方程 , 得到如下解 :

$$\dot{x} = \dot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} \phi + \frac{(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} u$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} \phi + \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} u$$

整理后的状态方程为 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} \end{bmatrix} u$$

将实际的参数代入上式 :

求得矩阵 a 和 b 的值如下 :

$$a = \quad ; \quad b =$$

实际系统的模型参数如下 :

M(kg)	0.68	小车质量
M(kg)	0.094	摆杆质量
b	0.08	小车摩擦系数
L(m)	0.15	摆杆转动轴心到杆质心的长度

第三章 直线电机一级倒立摆 MATLAB 仿真实验

3.1 直线电机一级倒立摆的超前校正控制仿真实验

【实验目的】

- 1、掌握系统校正的方法以及在控制系统中的作用，重点了解串联校正。
- 2、根据期望的时域性能指标推导出一级倒立摆的串联校正（超前校正）环节的传递函数

【实验设备】

PC 计算机 1 台

MatlabR2017.a 软件

【实验原理】

系统对正弦输入信号的响应，称为频率响应。在频率响应方法中，在一定范围内改变输入信号的频率，研究其产生的响应。

频率响应可以采用以下比较方便的方法进行分析。一种为伯德图或对数坐标图，伯德图采用两幅分离的图来表示，一幅表示幅值和频率的关系，一幅表示相角和频率的关系；一种是极坐标图，极坐标图表示的是当 ω 从 0 变化到无穷大时，向量 $G(j\omega)$ 的轨迹，极坐标图也常称为奈奎斯特图，奈奎斯特稳定判据根据系统的开环频率响应特性信息，研究闭环系统的稳定性和相对稳定性。

【实验步骤】

1、原系统的频率响应分析（绘制原系统的 Bode 图和乃奎斯特图）

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl}$$

其中输入为小车的加速度 $V(s)$ ，输出为摆杆的角度 $\Phi(s)$ 。

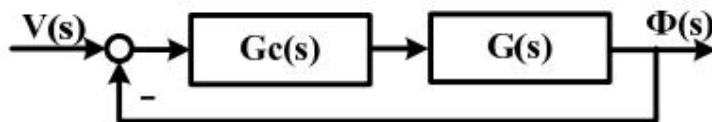
在 MATLAB 下绘制原系统的 Bode 图和乃奎斯特图。

提示 可利用 matlab 函数命令：bode、nyquist 函数。

根据 bode 图和乃奎斯特图，读出系统的相位裕量和幅值裕量。

2、超前校正控制设计（绘制校正后系统的 Bode 图和乃奎斯特图）

直线一级倒立摆的频域法设计结构图如下所示。



串联校正结构图

其中 $G(s)$ 为直线一级倒立摆的开环传递函数， $G_c(s)$ 为超前校正控制器。

设计控制器 $G_c(s)$ ，使得系统的静态误差位置系数为 10，相位裕量为 50° ，增益裕量等于或大于 10db。

绘制校正后系统的 Bode 图和乃奎斯特图，读出校正后系统的相位裕量和幅值裕量，判断是否满足要求的相位裕量和幅值裕量。

3.2 直线电机一级倒立摆的 PID 控制仿真实验

【实验目的】

理解并掌握 PID 控制的原理和方法，并应用于直线电机一级倒立摆的控制，PID 控制并不需要对系统进行精确的分析，因此采用实验的方法对系统进行控制器参数的设置。

【实验设备】

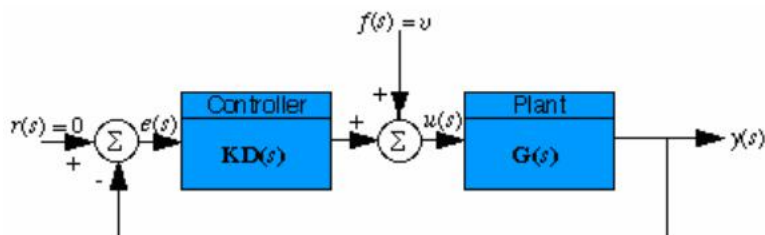
PC 计算机 1 台

MatlabR2017.a 软件

【实验原理】

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出的系统，控制器设计时一般需要有关被控对象的较精确模型。PID 控制器因其结构简单，容易调节，且不需要对系统建立精确的模型，在控制上应用较广。

首先，对于倒立摆系统输出量为摆杆的角度，它的平衡位置为垂直向上的情况。系统控制结构框图如下



图中 $KD(s)$ 是控制器传递函数， $G(s)$ 是被控对象传递函数。

摆杆角度和小车加速度的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl}$$

PID 控制器的传递函数为：

$$KD(s) = K_D s + K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s}$$

需仔细调节 PID 控制器的参数，以得到满意的控制效果。

【实验步骤】

利用 Simulink 搭建旋转电机一级倒立摆 PID 控制 MATLAB 仿真框图，给出系统控制曲线并分析实验结果

直线电机倒立摆跟踪正弦曲线的控制系统为单输入单输出系统，建立好倒立摆模型，把倒立摆的传递函数输入到“Transfer Fcn”模块，搭好 PID 算法模块，设置正弦信号源，就可进行仿真。

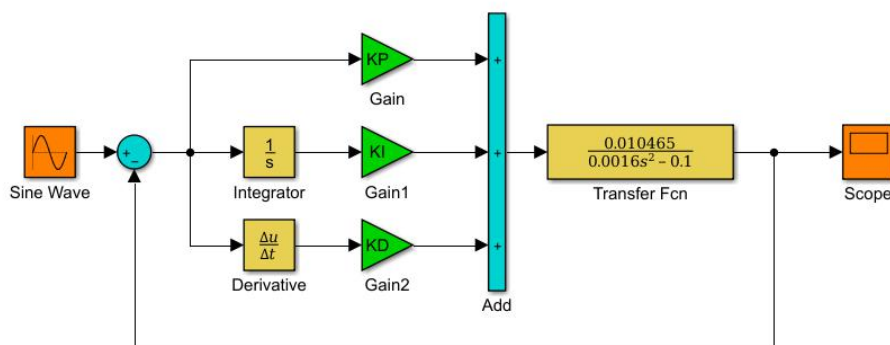
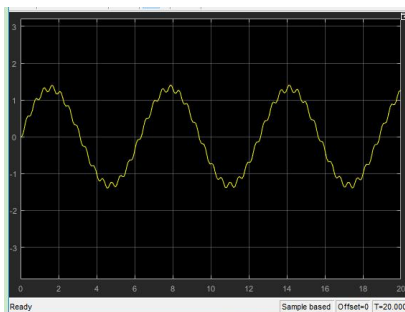


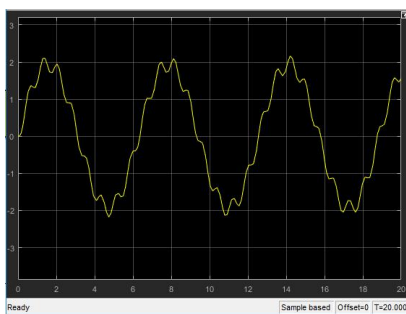
图 5.3 直线电机倒立摆 PID 控制仿真程序

1、P 控制器对直线电机一级倒立摆系统的影响。

选取 $K_p = 40, K_I = 0, K_D = 0$,给出系统控制曲线；



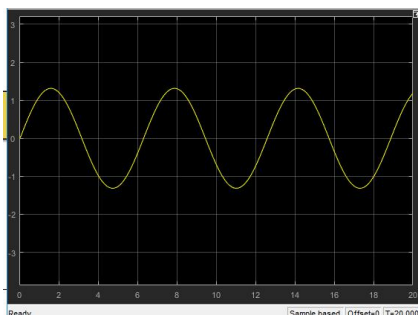
选取 $K_p = 20, K_I = 0, K_D = 0$,给出系统控制曲线；



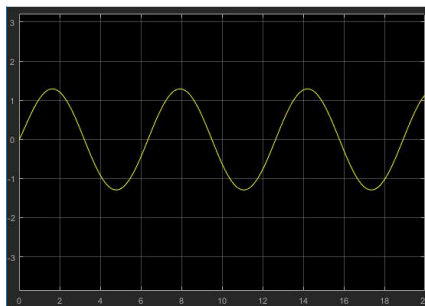
分析 K_p 的选择对系统性能的影响。

2、PD 控制器对直线电机一级倒立摆系统的影响（固定 P 参数，分析 D 参数对系统性能的影响）。

选取 $K_p = 40, K_i = 0, K_D = 4$, 给出系统控制曲线；



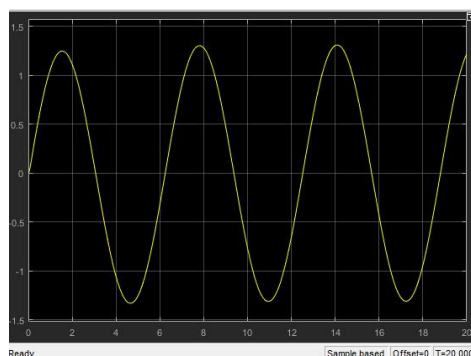
选取 $K_p = 40, K_i = 0, K_D = 10$, 给出系统控制曲线；



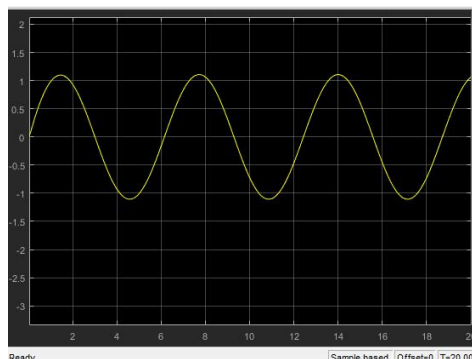
分析 K_D 的选择对系统性能的影响。

3、PID 控制器对直线电机一级倒立摆系统的影响（固定 P、D 参数，分析 I 参数对系统性能的影响）。

选取 $K_p = 40, K_i = 10, K_D = 4$, 给出系统控制曲线；



选取 $K_p = 40, K_I = 50, K_D = 4$, 给出系统控制曲线；



分析 K_I 的选择对系统性能的影响。

3.3 直线电机一级倒立摆的 LQR 控制仿真实验

【实验目的】

理解并掌握 LQR 控制的原理和方法，LQR 控制并不需要对系统进行精确的分析，因此采用实验的方法对系统进行控制器参数的设置。调节参数观察系统的变化,比较与串级 PID 控制的差别，比较各组参数的控制效果。

【实验设备】

PC 计算机 1 台

MatlabR2017.a 软件

【实验原理】

最优控制理论主要是依据庞德里亚金的极值原理，通过对性能指标的优化寻找可以使目标极小的控制器。其中线性二次型性能指标因为可以通过求解Riccati方程得到控制器参数，并且随着计算机技术的进步，求解过程变得越来越简便，因而在线性多变量系统的控制器设计中应用较广。利用线性二次型性能指标设计的控制器称作LQR控制器。

假设线性时不变系统的状态方程模型为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du\end{aligned}\tag{9}$$

可以引入最优控制的性能指标，即设计一个输入量 $u(t)$ ，使得

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (10)$$

为最小，其中 Q 和 R 分别为对状态变量和输入变量的加权矩阵。如果该系统受到外界干扰而偏离零状态，应施加怎样的控制 U ，才能使得系统回到零状态附近，并同时满足 J 达到最小，那么这时的 U 就称之为最优控制。由线性二次型最优控制理论可知，若想使 J 最小化，则控制信号应该为：

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) = -Kx(t) \quad (11)$$

式中 $P(t)$ 就是 Riccati 方程的解， K 是线性最优反馈增益矩阵。这时只需求解 Riccati 代数方程：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (12)$$

就可获得 P 值以及最优反馈增益矩阵 K 值。

$$K = R^{-1}B^T P = [k_1, k_2, k_3, k_4]^T. \quad (13)$$

倒立摆 LQR 控制器设计和 Simulink 仿真：

应用线性反馈控制器，控制系统结构如下图，图中 R 施加在小车上的阶跃输入，状态

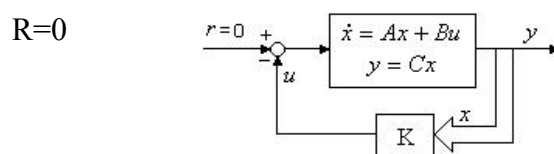


图 5.16 状态控件模型

变量 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$ 分别代表小车位移、小车速度、摆杆位置和摆杆角速度。设计控制器使得当给系统施加一个阶跃输入时，摆杆会摆动，然后仍然回到垂直位置，小车可以达到新的指定的位置。

系统的开环极点可以用 MATLAB 程序求出，在 MATLAB 里运行 $\text{eig}(A)$ ，其中 A 为上节所示状态方程系数矩阵，得到开环极点为，

$$PO = [0 \ -0.0830 \ -5.2780 \ 5.2727]$$

可以看出，有一个极点“5.2727”位于右半 S 平面，这说明开环系统不稳定，即倒立摆是典型的自不稳定系统，构建好控制系统才能实现直线电机倒立摆的平衡控制。

假设全状态反馈可以实现（四个状态量都可测），找出确定反馈控制规律的向量 K 。用 MATLAB 中的 lqr 函数，可以得到最优控制器对应的 K 。 lqr 函数允许选择两个参数 R 和 Q ，这两个参数用来平衡输入量的权重。从最优控制律可以看出，其最优性完全取决于加权矩阵 Q 和 R 的选择，然而这两个矩阵如何选择并没有解析办法，目前确定加权矩阵 Q 和 R 的普遍方法是仿真试凑法。一般来说， Q 和 R 都取为对角阵，如果希望输入信号小，则选择较大的

R 矩阵, 如果希望第 j 状态变量的值比较小, 则应该相应地将 Q 矩阵的第 j 列元素选择较大的值, 这时最优化功能会迫使改变量变小。

当 Q 不变而 R 减小时, 倒立摆系统的调整时间与超调量减小, 上升时间与稳态误差增大; 当 R 不变而 Q 变大时, 调整时间与超调量减小, 摆杆的角度变化也同时减小, 但上升时间与稳态误差却同时增大。

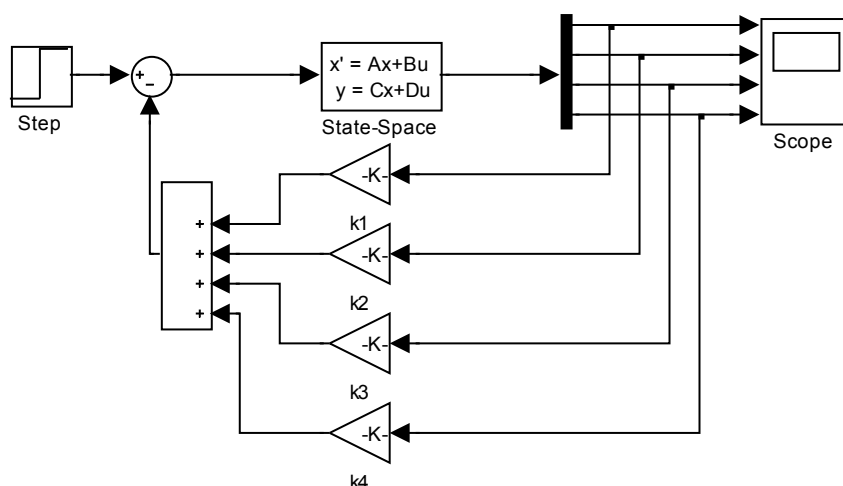
调用 MATLAB 的 `lqr` 命令函数求解上述最优问题, 包括解 Riccati 代数方程和最优反馈矩阵 K :

在 MATLAB 命令行里运行 $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$, 得到

-8.9443 -5.9559 23.5561 2.6227

在状态反馈下的闭环系统的状态方程为 $(A - BK, B, C - DK, D)$

在 Simulink 里构建好如下控制系统框图:



倒立摆 Simulink 仿真算法图

k_1, k_2, k_3, k_4 分别为 $K = [-8.9443 \quad -5.9559 \quad 23.5561 \quad 2.6227]$ 中的顺序对应的四个值。

(备注: 因光栅信号与模型的电机位移信号的方向相反, 故实时控制中 K 的值为:

$[8.9443 \quad 5.9559 \quad 23.5561 \quad 2.6227]$)

其阶跃响应曲线如下所示, 图中四条曲线由上到下分别表示电机位置、电机速度、角度、角速度的阶跃响应曲线:

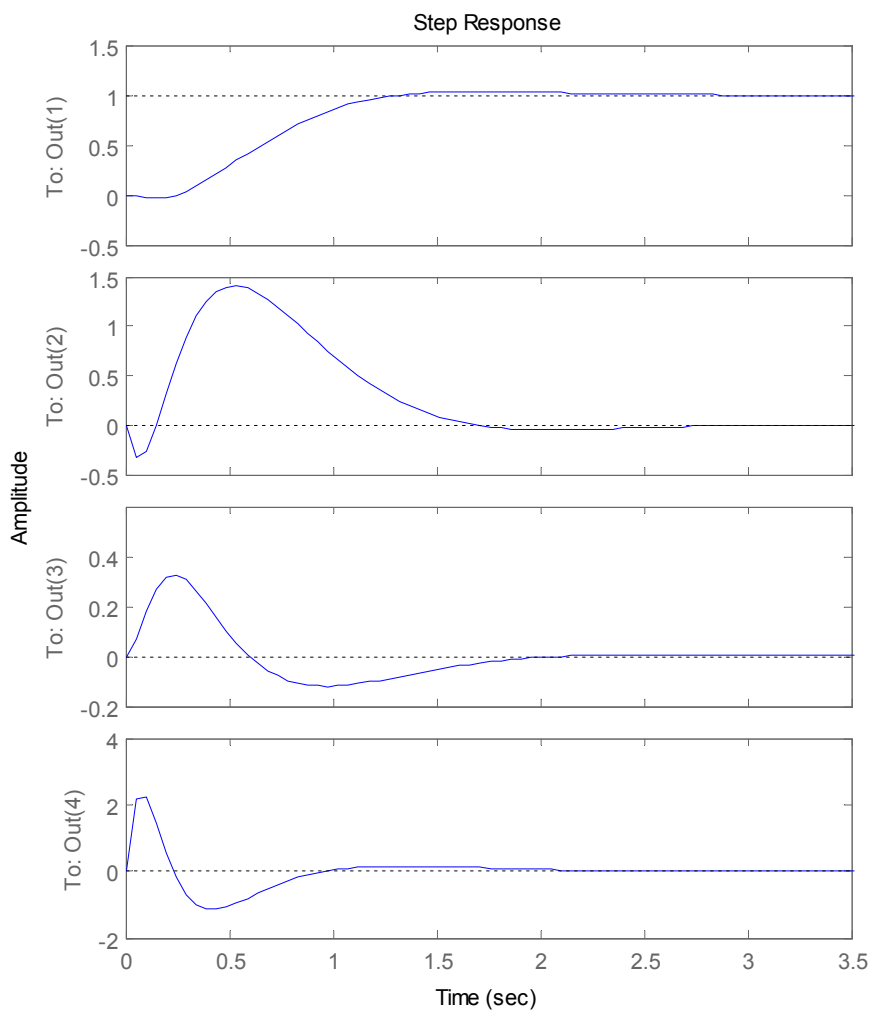


图 5.18 倒立摆阶跃响应 Simulink 仿真

从仿真图中可以看出，小车位置能跟踪输入信号，倒立摆受到阶跃扰动后能迅速稳定下来，过渡时间均小于 2s，设计的 LQR 控制器是可行的。

第四章 直线电机一级倒立摆 MATLAB 实时控制实验

4.1 直线电机一级倒立摆的 PID 实时控制实验

【实验目的】

直线电机驱动一级倒立摆常规 PID 控制实验

【实验内容】

它是从人的自然的观察和感觉而进行的倒立摆 PID 控制实验，其控制对象为直线电机，而反馈值为倒立摆的偏离角度值，控制中学生可以发现摆杆向一方偏离。

【实验要求】

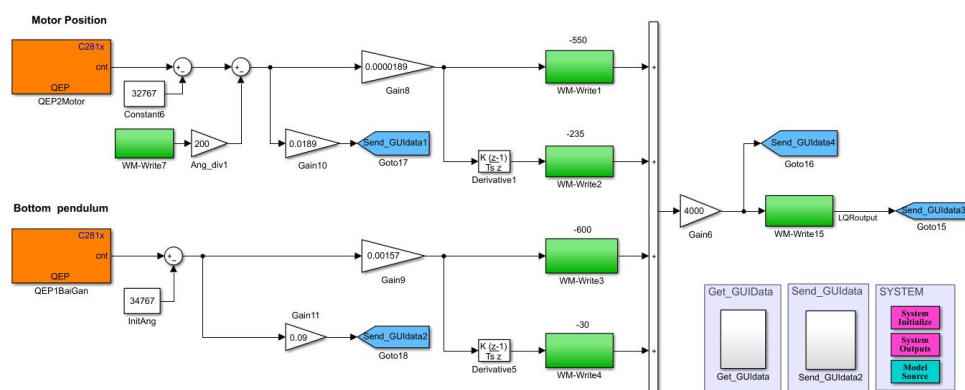
- 1.学习 PID 控制原理；
- 2.学习一级摆数学建模；
- 3.利用设计的 PID 控制器，观察和发现存在的问题。

【实验步骤】

- 1) 双击桌面 MATLAB R2017a 图标运行 MATLAB 程序。




- 2) 基于 PID 理论搭建一级摆算法模块（一级摆 PID 平衡控制算法 simulink 算法文件见硬盘内模型文件 LQR 内.slx 文件）。

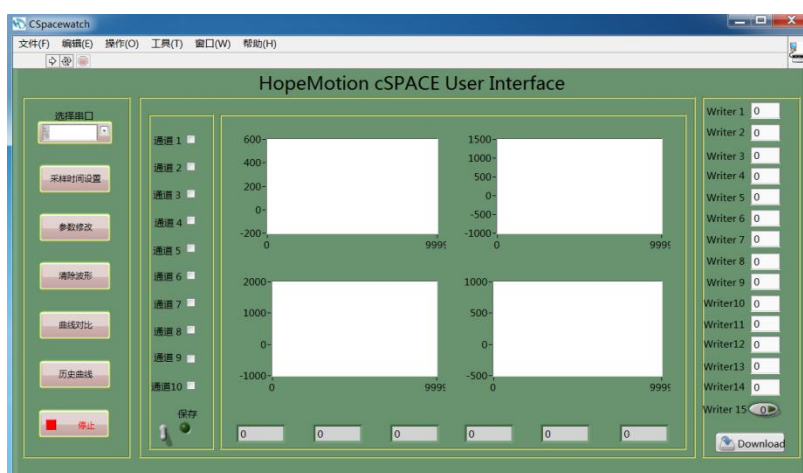
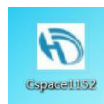


4-1 一级倒立摆 PID 控制算法框图

说明：MotorQEP 模块是 cspace 读取电机编码器的模块，EQEP2 是 cspace 读取摆杆编码器的模块，Get_GUIdata 模块接收 PC 端下发的数据。Send_GUIdata 模块向 PC 端上传要发的数据，Write 是 cspace 在线修改模块。

- 3) 编译算法文件，打开运行程序，点击“Build”  按钮，编译算法文件，生成目标代码，成功后 Matlab 状态为 ready。

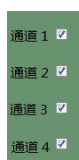
- 4) 程序编译完后，打开 cSPACE 控制界面。





4-2 监控界面图



运行程序后弹出界面，如图 4-2

将通道 1，通道 2，通道 3，通道 4，打钩



然后点击左侧“选择串口”， 通过电脑的“设备管理器”下的“端口”查看 CH340 所使用的端口，在该界面内选择。

- 5) 点击“运行”按钮 。将倒立摆的摆杆扶到竖直倒立位置（扶正的时候，同时观察界面第二个方框图，偏角参数的框图曲线从-180°转向 0°左右），输入“Write1”、“Write2”、“Write3”、

“Write4” LQR 控制算法的四个参数，在本程序中值分别为：-500，-235，-600，-30，先点击“write15” ，再点击“download”按钮 ，观测波形。如若没有波形，重启软件 Cspace。

启动实验箱开启按钮，这时小车做往返运动，倒立摆即能稳定运行，不稳定运行时，适当调节 LQR 控制参数。

6) 实验结束，再次点击实验箱开启按钮。

4.2 直线电机一级倒立摆的 LQR 实时控制实验

【实验目的】

直线电机驱动一级倒立摆 LQR 设计控制器实验。

【实验内容】

设计和调节 LQR 控制器，使平台和摆杆处于正确位置；调节参数观察系统的变化。比较与串级 PID 控制的差别。

【实验要求】

1. 学习一级摆的 LQR 控制器设计方法；
2. 利用 cSPACE 提供的模块搭建控制器；
3. 实时调节参数，比较各组参数的控制效果。

【实验报告】

描述 LQR 控制器设计方法，使小车稳定同时又能使杆处于倒立状态，实验报告需要描述实验过程，给出控制结果。本实验为现代控制理论实验。

LQR 控制器简介

最优控制理论主要是依据庞德里亚金的极值原理，通过对性能指标的优化寻找可以使目标极小的控制器。其中线性二次型性能指标因为可以通过求解 Riccati 方程得到控制器参数，并且随着计算机技术的进步，求解过程变得越来越简便，因而在线性多变量系统的控制器设计中应用较广。利用线性二次型性能指标设计的控制器称作 LQR 控制器。

假设线性时不变系统的状态方程模型为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du\end{aligned}\quad (1)$$

可以引入最优控制的性能指标，即设计一个输入量 $u(t)$ ，使得

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (2)$$

为最小，其中 Q 和 R 分别为对状态变量和输入变量的加权矩阵。如果该系统受到外界干扰而偏离零状态，应施加怎样的控制 U ，才能使得系统回到零状态附近，并同时满足 J 达到最小，那么这时的 U 就称之为最优控制。由线性二次型最优控制理论可知，若想使 J 最小化，则控制信号应该为：

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) = -Kx(t) \quad (3)$$

式中 $P(t)$ 就是 Riccati 方程的解， K 是线性最优反馈增益矩阵。这时只需求解 Riccati 代数方程：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4)$$

就可获得 P 值以及最优反馈增益矩阵 K 值。

$$K = R^{-1}B^T P = [k_1, k_2, k_3, k_4]^T \quad (5)$$

4.1节已经得到了直线电机倒立摆系统的比较精确的数学模型，下面针对本系统应用 LQR 法设计控制器，控制摆杆保持倒立平衡的同时，跟踪小车的位置。

倒立摆 LQR 控制器设计和 Simulink 仿真：

备注：LQR_simulation.m 为倒立摆 LQR 控制器设计和 simulink 仿真的 m 文件
LQR_simulation.mdl 为倒立摆 LQR 控制器设计和 simulink 仿真的 simulink 文件

应用线性反馈控制器，控制系统结构如下图，图中 R 施加在小车上的阶跃输入，状态

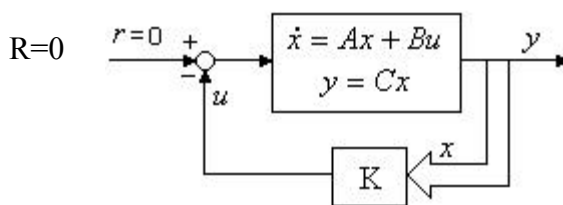


图 2.10 状态控件模型

变量 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$ 分别代表小车位移、小车速度、摆杆位置和摆杆角速度。设计控制器使得当给系统施加一个阶跃输入时，摆杆会摆动，然后仍然回到垂直位置，小车可以达到新的指定的位置。

系统的开环极点可以用 MATLAB 程序求出，在 MATLAB 里运行 $\text{eig}(A)$ ，其中 A 为上节所示状态方程系数矩阵，得到开环极点为，

$$PO = [0 \ -0.0830 \ -5.2780 \ 5.2727]$$

可以看出，有一个极点“5.2727”位于右半 S 平面，这说明开环系统不稳定，即倒立摆是典型的自不稳定系统，构建好控制系统才能实现直线电机倒立摆的平衡控制。

假设全状态反馈可以实现（四个状态量都可测），找出确定反馈控制规律的向量 K 。用 MATLAB 中的 LQR 函数，可以得到最优控制器对应的 K 。LQR 函数允许选择两个参数 R 和 Q ，这两个参数用来平衡输入量的权重。从最优控制律可以看出，其最优性完全取决于加权矩阵 Q 和 R 的选择，然而这两个矩阵如何选择并没有解析办法，目前确定加权矩阵 Q 和 R 的普遍方法是仿真试凑法。一般来说， Q 和 R 都取为对角阵，如果希望输入信号小，则选择较大的 R 矩阵，如果希望第 j 状态变量的值比较小，则应该相应地将 Q 矩阵的第 j 列元素选择较大的值，这时最优化功能会迫使改变量变小。

当 Q 不变而 R 减小时，倒立摆系统的调整时间与超调量减小，上升时间与稳态误差增大；当 R 不变而 Q 变大时，调整时间与超调量减小，摆杆的角度变化也同时减小，但上升时间与稳态误差却同时增大。

调用 MATLAB 的 LQR 命令函数求解上述最优问题，包括解 Riccati 代数方程和最优反馈矩阵 K ：

在 MATLAB 命令行里运行 $K = lqr(A, B, Q, R)$ ，得到

-8.9443 -5.9559 23.5561 2.6227

在状态反馈下的闭环系统的状态方程为 $(A - BK, B, C - DK, D)$

在 Simulink 里构建好如下控制系统框图：

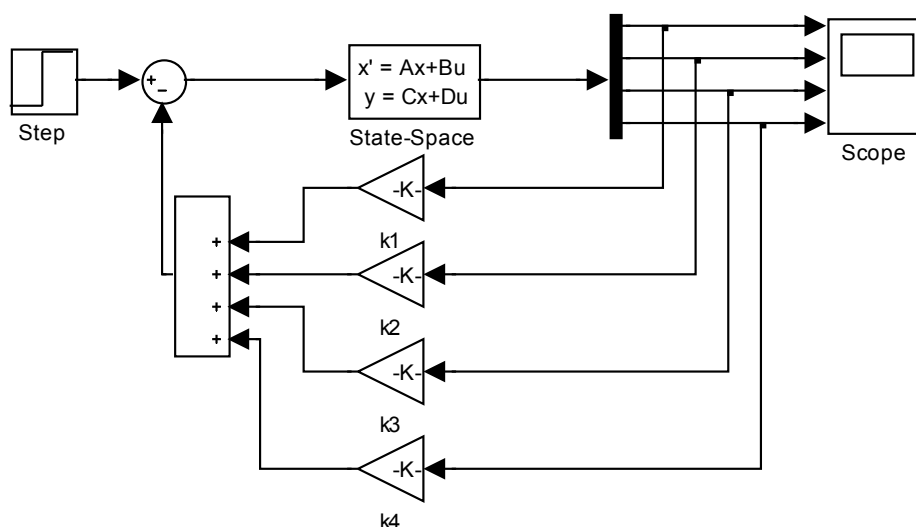


图 2.11 倒立摆 Simulink 仿真算法

k_1, k_2, k_3, k_4 分别为 $K = [-8.9443 \quad -5.9559 \quad 23.5561 \quad 2.6227]$ 中的顺序对应的四个值。

(备注：因光栅信号与模型的电机位移信号的方向相反，故实时控制中 K 的值为：

$[8.9443 \quad 5.9559 \quad 23.5561 \quad 2.6227]$

其阶跃响应曲线如下所示，图中四条曲线由上到下分别表示电机位置、电机速度、角度、角速度的阶跃响应曲线：

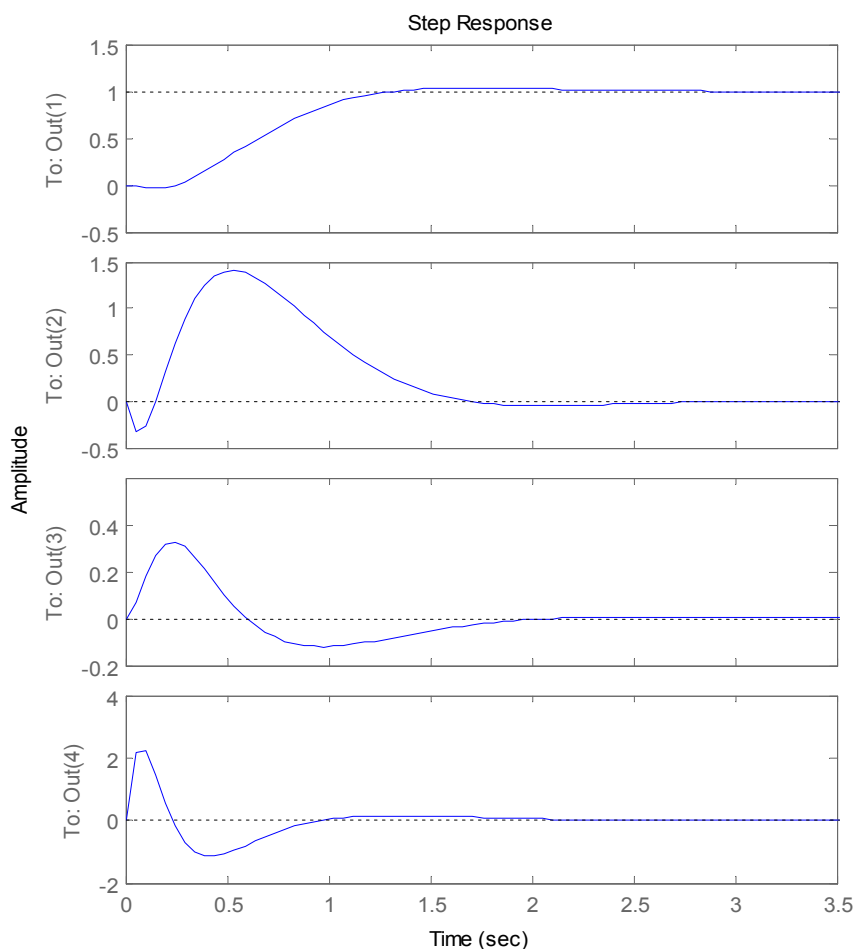


图 2.12 倒立摆阶跃响应 Simulink 仿真

从仿真图中可以看出，小车位置能跟踪输入信号，倒立摆受到阶跃扰动后能迅速稳定下来，过渡时间均小于 2s，设计的 LQR 控制器是可行的。

4.3 实验操作步骤

7) 双击桌面 MATLAB R2017a 图标运行 MATLAB 程序。



8) 基于 LQR 理论搭建一级摆算法模块（一级摆 LQR 平衡控制算法 simulink 算法文件见硬盘内模型文件 LQR 内.slx 文件）。

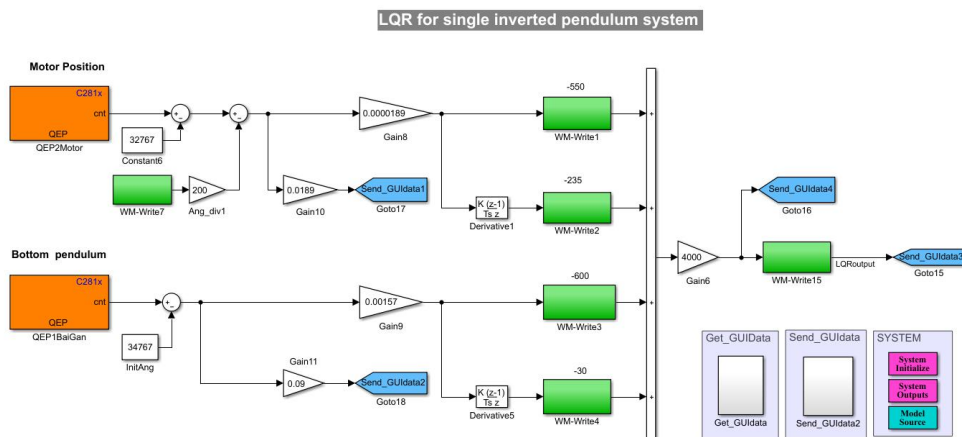

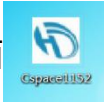


图 2.15 一级倒立摆 LQR 控制算法框图

说明：MotorQEP 模块是 cspace 读取电机编码器的模块，EQEP2 是 cspace 读取摆杆编码器的模块，Get_GUIdata 模块接收 PC 端下发的数据。Send_GUIdata 模块向 PC 端上传要发的数据，Write 是 cspace 在线修改模块。

- 9) 编译算法文件，打开运行程序，点击 “Build”  按钮，编译算法文件，生成目标代码，成功后 Matlab 状态为 ready。

- 10) 程序编译完后，打开 cSPACE 控制界面 。

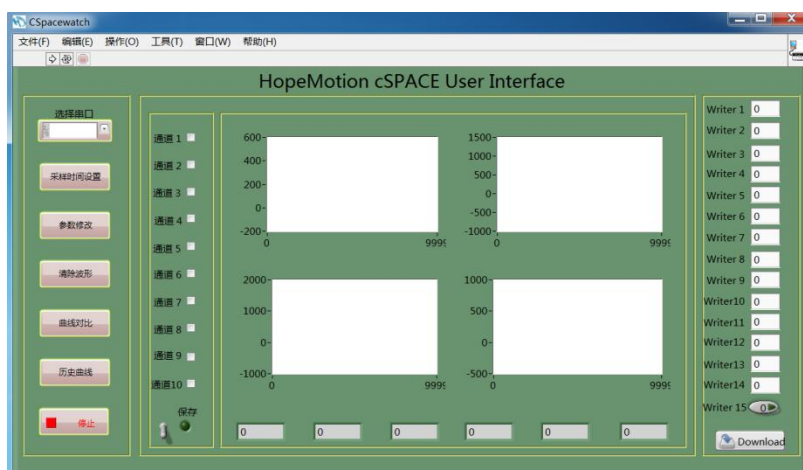
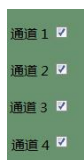





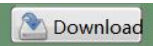
图 2.16 监控界面

运行程序后弹出界面，如图 2.16



将通道 1，通道 2，通道 3，通道 4，打钩。

然后点击左侧“选择串口”，通过电脑的“设备管理器”下的“端口”查看 CH340 所使用的端口，在该界面内选择。

- 11) 点击“运行”按钮。将倒立摆的摆杆扶到竖直倒立位置（扶正的时候，同时观察界面第二个方框图，偏角参数的框图曲线从 -180° 转向 0° 左右），输入“Write1”、“Write2”、“Write3”、“Write4” LQR 控制算法的四个参数，在本程序中值分别为： -150 ， -120 ， -250 ， -20 ，先点击“write15”，再点击“download”按钮，观测波形。启动实验箱开启按钮，这时小车做往返运动，倒立摆即能稳定运行，不稳定运行时，适当调节 LQR 控制参数。

- 12) 实验结束，再次点击实验箱开启按钮。

第五章 直线电机二级倒立摆建模及性能分析

5.1 直线电机二级倒立摆建模及性能分析

先做一些理想化的假设：忽略空气阻力，直线电机导轨摩擦力为零，摆杆铰接轴承摩擦力忽略不计，摆杆质量均匀分布，摆杆质心在其中点，连接块的质量集中于铰接点。

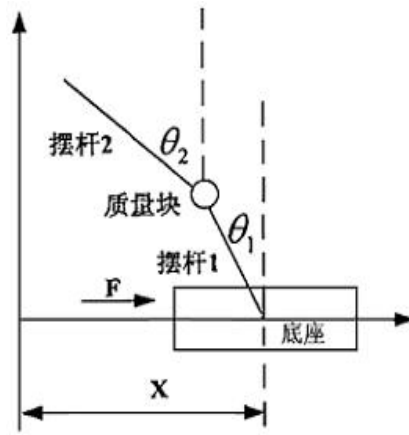


图 1.2 二级倒立摆的物理模型

各变量定义如表 1-2 所示：

表 1-2 二级倒立摆数学模型各变量定义表

变量	含义	说明	取值/单位
θ_1	摆杆 1 与竖直向上的夹角	逆时针方向为正	rad
θ_2	摆杆 2 与竖直向上的夹角	逆时针方向为正	rad
l_1	摆杆 1 质心到下转轴的距 离		0.18m
l_2	摆杆 2 质心到上转轴的距 离		0.34m
L	连接块质心到下转轴的距 离		0.16m
m_1	摆杆 1 的质量		0.048Kg
m_2	摆杆 2 的质量		0.091Kg
m_3	连接块的质量		0.067Kg
M	底座的质量		1.2Kg

x	底座位移	向右为正，导轨中点为零点	m
F	电机输出力	向右为正	N
g	重力加速度		9.8m/sec ²

采用拉格朗日方程建模。拉格朗日方程为：

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (1-11)$$

其中： L 为拉格朗日算子， q 为系统的广义坐标， T 为系统的动能， V 为系统的势能。

拉格朗日方程由广义坐标 q_i 和 L 表示为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (1-12)$$

其中： q_i 为系统的广义坐标， Q_i 是系统沿该广义坐标方向的广义力， D 是系统的耗散能。

对于二级摆系统，广义坐标为位移 x 和摆杆角度 θ_1 、 θ_2 ； Q_i 为作用在系统上的广义力，当 $q_i = x$ ， $Q_i = F$ ，当 $q_i = \theta_1$ 、 θ_2 时， $Q_i = 0$ 。 T 为底座和各级倒立摆的总动能， V 为底座和各级倒立摆的总势能， D 为底座和各级倒立摆的总耗散能，在这里，忽略了各种摩擦，故 D 等于零。故这里用于二级摆建模的拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (1-13)$$

首先计算系统的动能：

$$T = T_M + T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3}$$

其中： T_M 底座动能， T_{m_1} 摆杆1动能， T_{m_2} 摆杆2动能， T_{m_3} 连接块动能。

$$\text{而 } T_{m_1} = T'_{m_1} + T''_{m_1}, \text{ 其中, } \begin{cases} T'_{m_1} & \text{摆杆1质心平动动能} \\ T''_{m_1} & \text{摆杆1绕质心转动动能} \end{cases}$$

$$T_{m_2} = T'_{m_2} + T''_{m_2}, \text{ 其中, } \begin{cases} T'_{m_2} & \text{摆杆2质心平动动能} \\ T''_{m_2} & \text{摆杆2绕质心转动动能} \end{cases}$$

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$T'_{m_1} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d(x - l_1 \sin \theta_1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(l_1 \cos \theta_1)}{dt} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$T''_{m_1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

则

$$T_{m_1} = T'_{m_1} + T''_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{2}{3} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

同样可以求出

$$\begin{aligned} T'_{m_2} &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d(x - 2l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d(2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} - 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 (2l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \end{aligned}$$

$$T''_{m_2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{aligned} T_{m_2} &= T'_{m_2} + T''_{m_2} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x} - 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(4l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{4}{3} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 4l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{m_3} &= \frac{1}{2} m_3 \left(\left(\frac{d(x - 2l_1 \sin \theta_1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(2l_1 \cos \theta_1)}{dt} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 - 2m_3 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + 2m_3 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

因此，可以得到系统总动能为：

$$\begin{aligned} T &= T_M + T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{2}{3} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x} - 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left(4l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{4}{3} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 4l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right) + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 - 2m_3 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + 2m_3 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

$$V = V_{m_1} + V_{m_2} + V_{m_3} = m_1 g l_1 \cos \theta_1 + 2m_3 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

从而拉格朗日算子：

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 - m_1l_1\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \frac{2}{3}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x} - 2\dot{x}\left(2l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)\right) \quad \text{由于在广义坐}$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\left(4l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{4}{3}l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 4l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\right) + \frac{1}{2}m_3\dot{x}^2 - 2m_3l_1\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + 2m_3l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$- m_1gl_1\cos\theta_1 + 2m_3gl_1\cos\theta_1 + m_2g(2l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

标 θ_1, θ_2 上均无外力作用，有以下等式成立：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (1-14)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (1-15)$$

展开式 (1-14)、(1-15) 分别得到式 (1-16)、(1-17)：

$$6m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 4(m_1 + 3(m_2 + m_3))l_1\ddot{\theta}_1 - 3(-2m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (1-16)$$

$$+ (m_1 + 2(m_2 + m_3))(g\sin\theta_1 + \ddot{x}\cos\theta_1)) = 0$$

$$- 3g\sin\theta_2 - 6l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 4l_2\ddot{\theta}_2^2 + 6l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2 - \theta_1) - 3\ddot{x}\cos\theta_2 = 0 \quad (1-17)$$

在 MATLAB 中，将式 (1-16) (1-17) 对 $\ddot{\theta}_1$ 、 $\ddot{\theta}_2$ 求解代数方程，得到以下两式：

$$\ddot{\theta}_1 = (3(-2gm_1\sin\theta_1 - 4gm_2\sin\theta_1 - 4m_3g\sin\theta_1 + 3m_2g\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_2$$

$$+ 6m_2l_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + 4m_2l_2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 - 2m_1\ddot{x}\cos\theta_1 \quad (1-18)$$

$$- 4m_2\ddot{x}\cos\theta_1 - 4m_3\ddot{x}\cos\theta_1 + 3m_2\ddot{x}\cos(\theta_1 - \theta_2)\cos\theta_2))/$$

$$(2l_1(-4m_1 - 12m_2 - 12m_3 + 9m_2\cos^2(\theta_1 - \theta_2))) \quad (1-19)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -(-\frac{4}{9}m_2(m_1 + 3(m_2 + m_3))l_1^2l_2(-3g\sin\theta_2 - 6l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\ddot{x}\cos\theta_2$$

$$+ \frac{2}{3}m_2l_1^2l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)(6m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - 3(m_1 + 2(m_2 + m_3))(g\sin\theta_1 + \ddot{x}\cos\theta_1)))/$$

$$(-\frac{16}{9}m_2(m_1 + 3(m_2 + m_3))l_1^2l_2^2 + 4m_2^2l_1^2l_2^2\cos^2(\theta_1 - \theta_2))$$

表示成以下形式：

$$\ddot{\theta}_1 = f_1(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \quad (1-20)$$

$$\ddot{\theta}_2 = f_2(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \quad (1-21)$$

取平衡位置时各变量的初值为零

$$(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

将式 (1-19) 在平衡位置进行泰勒级数展开, 并且线性化, 令

$$\begin{aligned} K_{11} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{12} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{3(-2m_1 - 4m_2 - 4m_3)g}{2(-4m_1 - 3m_2 - 12m_3)l_1} \\ K_{13} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{9m_2g}{2(-4m_1 - 3m_2 - 12m_3)l_1} \\ K_{14} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{15} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{16} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_2} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{17} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{x}} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{3(-2m_1 - m_2 - 4m_3)g}{2(-4m_1 - 3m_2 - 12m_3)l_1} \end{aligned}$$

代入式 (1-17), 得到线性化之后的公式:

$$\ddot{\theta}_1 = K_{12}\theta_1 + K_{13}\theta_2 + K_{17}\ddot{x} \quad (1-22)$$

将式 (1-20) 在平衡位置进行泰勒级数展开, 并且线性化, 令

$$\begin{aligned} K_{21} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{22} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{2(m_1 + 2(m_2 + m_3))g}{4m_2l_2 - \frac{16}{9}(m_1 + 3(m_2 + m_3))l_2} \\ K_{23} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = -\frac{4(m_1 + 3(m_2 + m_3))g}{3(4m_2l_2 - \frac{16}{9}(m_1 + 3(m_2 + m_3))l_2)} \\ K_{24} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{25} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \end{aligned}$$

$$K_{26} = \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_2} \Big|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0$$

$$K_{27} = \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{x}} \Big|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{2(m_1 + 2(m_2 + m_3)) - \frac{4}{3}(m_1 + 3(m_2 + m_3))}{4m_2 l_2 - \frac{16}{9}(m_1 + 3(m_2 + m_3))l_2}$$

代入式 (1-18)，得到线性化之后的公式：

$$\ddot{\theta}_2 = K_{22}\theta_1 + K_{23}\theta_2 + K_{27}\ddot{x} \quad (1-23)$$

现在得到了两个线性微分方程，由于采用电机输出力作为控制输入，而该输出力与加速度成比例关系，因此还需加上一个方程：

$$u = \ddot{x} \quad (1-24)$$

取状态变量如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \theta_1 \\ x_3 &= \theta_2 \\ x_4 &= \ddot{x} \\ x_5 &= \dot{\theta}_1 \\ x_6 &= \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

由式 (1-21)、(1-22)、(1-23) 得到状态空间方程如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ K_{17} \\ K_{27} \end{bmatrix} u \quad (1-25)$$

倒立摆实际的物理参数为：

$M = 0.68$	小车质量
$m1 = 0.047$	下摆杆质量
$m2 = 0.094$	上摆杆质量
$m3 = 0.253$	连接块质量
$L1 = 0.1$	下摆杆质心到一端的长度
$L2 = 0.172$	上摆杆质心到一端的长度

代入实际值可得：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62.7357 & -12.6144 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -39.5393 & 38.8326 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5.1144 \\ -0.0721 \end{bmatrix} u$$

第六章 直线电机二级倒立摆 MATLAB 实时控制实验

6.1 直线电机二级倒立摆的 LQR 实时控制实验

【实验目的】

直线电机驱动二级倒立摆 LQR 控制实验

【实验内容】

它是从人的自然的观察和感觉而进行的倒立摆 LQR 控制实验，其控制对象为直线电机，而反馈值为倒立摆的偏离角度值，控制中学生可以发现摆杆向一方偏离。

【实验要求】

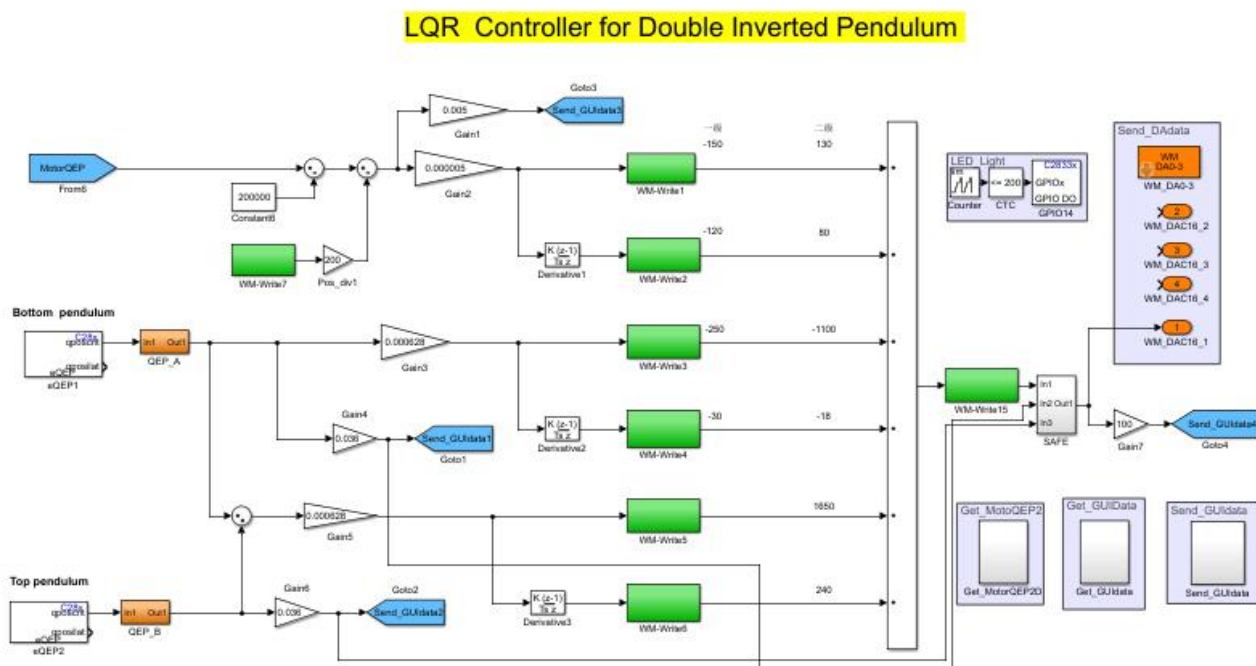
1. 学习 LQR 控制原理；
2. 学习二级摆数学建模；
3. 利用设计的 LQR 控制器，观察和发现存在的问题。

【实验步骤】

- 1, 双击桌面 MATLAB R2017a 图标运行 MATLAB 程序。




- 2, 基于 LQR 理论搭建二级摆算法模块 (二级摆 LQR 平衡控制算法 simulink 算法文件见硬盘内模型文件 LQR 内.slx 文件)。

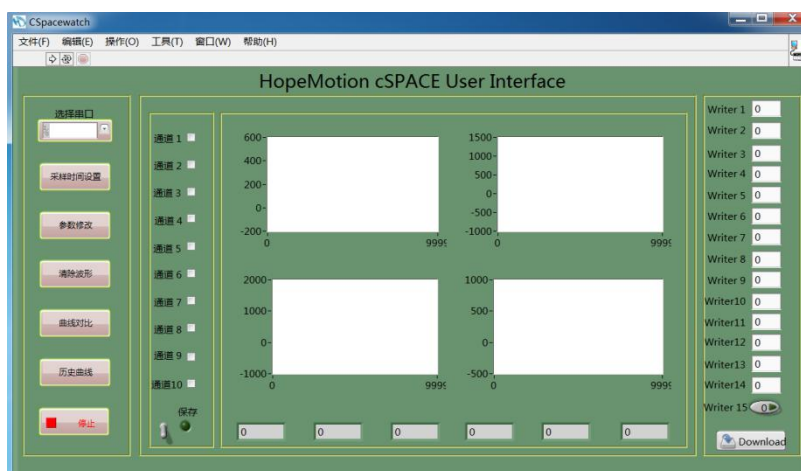
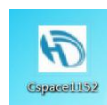


6-1 二级倒立摆 LQR 控制算法框图

说明：Motor Position 模块是 cspace 读取电机编码器的模块，eQEP2 是 cspace 读取摆杆编码器的模块，Get_GUIdata 模块接收 PC 端下发的数据。Send_GUIdata 模块向 PC 端上传要发的数据，Write 是 cspace 在线修改模块。

3，编译算法文件，打开运行程序，点击“Build”  按钮，编译算法文件，生成目标代码，成功后 Matlab 状态为 ready。

4，程序编译完后，打开 cSPACE 控制界面。



6-2 监控界面图



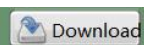
运行程序后弹出界面，如图 6-2



将通道 1，通道 2，通道 3，通道 4，打钩



通过电脑的“设备管理器”下的“端口”查看 CH340 所使用的端口，在该界面内选择。

5，点击“运行”按钮 。将倒立摆的摆杆扶到竖直倒立位置（扶正的时候，同时观察界面第二个方框图，偏角参数的框图曲线从-180°转向 0°左右），输入“Write1”、“Write2”、“Write3”、“Write4” LQR 控制算法的四个参数，在本程序中值分别为：-500，-235，-600，-30，先点击“write15” ，再点击“download”按钮 ，观测波形。如若没有波形，重启软件 Cspace。

启动实验箱开启按钮，这时小车做往返运动，倒立摆即能稳定运行，不稳定运行时，适当调节 LQR 控制参数。

6，实验结束，再次点击实验箱开启按钮。

6.2 直线电机二级倒立摆的滑膜实时控制实验

【实验目的】

直线电机驱动二级倒立摆滑膜控制器实验。

【实验内容】

设计和调节滑膜控制器，使平台和摆杆处于正确位置；调节参数观察系统的变化。比较与 LQR 控制的差别。

【实验要求】

1. 学习二级摆的滑膜控制器设计方法；
2. 利用 cSPACE 提供的模块搭建控制器；
3. 实时调节参数，比较各组参数的控制效果。

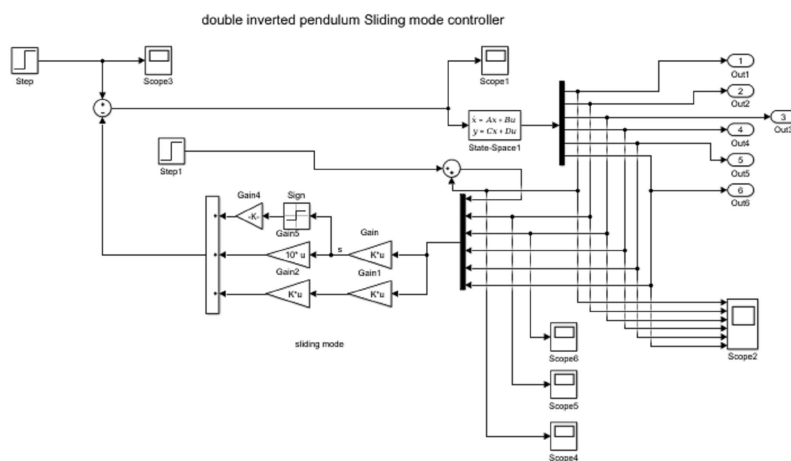
【实验报告】

描述滑膜控制器设计方法，使小车稳定同时又能使杆处于倒立状态，实验报告需要描述实验过程，给出控制结果。本实验为现代控制理论实验。

滑膜控制器简介

参照辽宁石油化工大学战江洋的论文“基于滑模控制的二级倒立摆控制”。

Matlab 仿真原理框图如下所示：



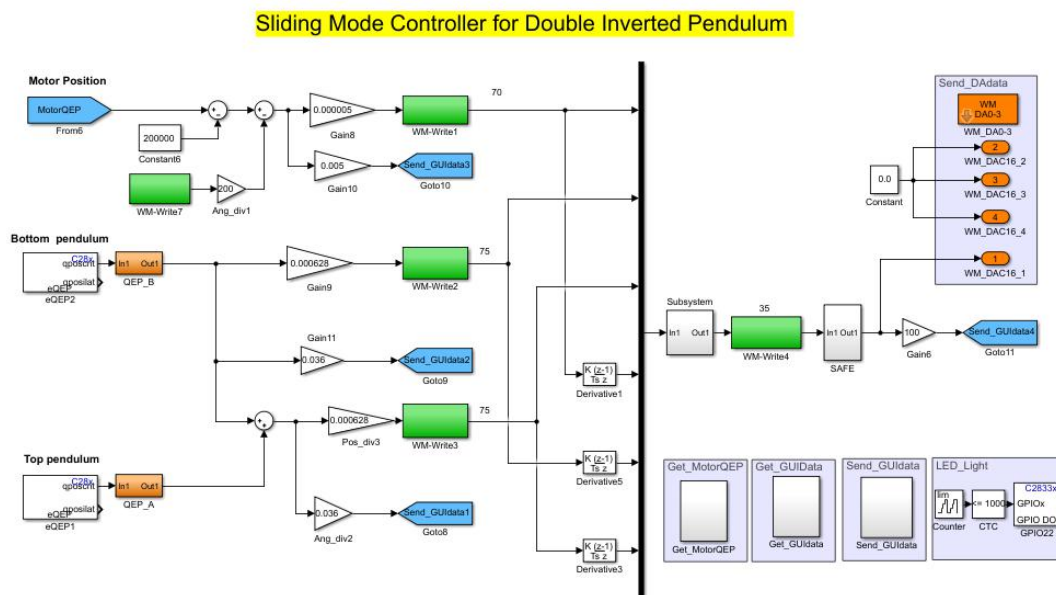
6-3 二级倒立摆滑模控制仿真原理框图

6.3 实验操作步骤

- 1，双击桌面 MATLAB R2017a 图标运行 MATLAB 程序。




2, 基于滑膜控制理论搭建二级摆算法模块 (滑膜控制算法 simulink 算法文件见硬盘内模型文件夹下)。



6-4 二级倒立摆滑模控制框图

说明：Motor Position 模块是 cspace 读取电机编码器的模块，eQEP2 是 cspace 读取摆杆编码器的模块，Get_GUIdata 模块接收 PC 端下发的数据。Send_GUIdata 模块向 PC 端上传要发的数据，Write 是 cspace 在线修改模块。

3, 编译算法文件，打开运行程序，点击 “Build”  按钮，编译算法文件，生成目标代码，成功后 Matlab 状态为 ready。

4, 程序编译完后，打开 cSPACE 控制界面 。

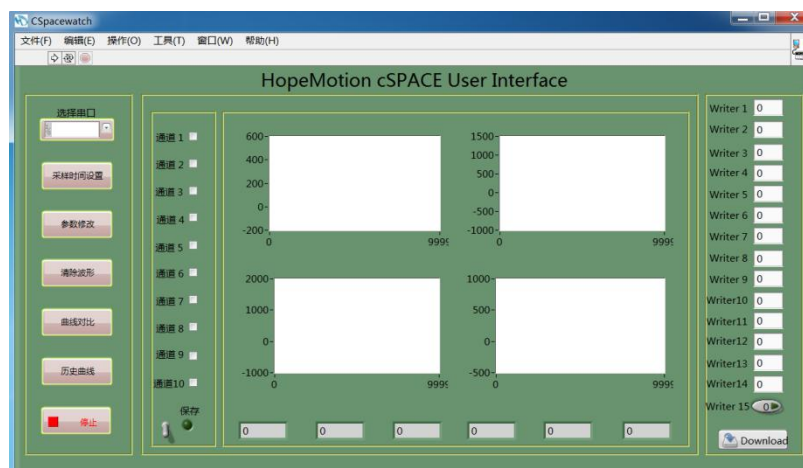
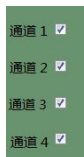



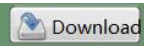


图 6-5 监控界面

运行程序后弹出界面，如图 2.16

将通道 1，通道 2，通道 3，通道 4，打钩 。然后点击左侧“选择串口”，
 通过电脑的“设备管理器”下的“端口”查看 CH340 所使用的端口，在该界面内选择。

5，点击“运行”按钮 。将倒立摆的摆杆扶到竖直倒立位置（扶正的时候，同时观察界面第二个方框图，偏角参数的框图曲线从 -180° 转向 0° 左右），输入“Write1”、

“Write2”、“Write3”、“Write4” LQR 控制算法的四个参数，在本程序中值分别为： -150 ， -120 ， -250 ， -20 ，先点击“write15” ，再点击“download”按钮 ，观测波形。启动实验箱开启按钮，这时小车做往返运动，倒立摆即能稳定运行，不稳定运行时，适当调节 LQR 控制参数。

6，实验结束，再次点击实验箱开启按钮。