

## 4.2 直线电机一级倒立摆的 LQR 实时控制实验

### 【实验目的】

直线电机驱动一级倒立摆 LQR 设计控制器实验。

### 【实验内容】

设计和调节 LQR 控制器，使平台和摆杆处于正确位置；调节参数观察系统的变化。比较与串级 PID 控制的差别。

### 【实验要求】

1. 学习一级摆的 LQR 控制器设计方法；
2. 利用 cSPACE 提供的模块搭建控制器；
3. 实时调节参数，比较各组参数的控制效果。

### 【实验报告】

描述 LQR 控制器设计方法，使小车稳定同时又能使杆处于倒立状态，实验报告需要描述实验过程，给出控制结果。本实验为现代控制理论实验。

### LQR 控制器简介

最优控制理论主要是依据庞德里亚金的极值原理，通过对性能指标的优化寻找可以使目标极小的控制器。其中线性二次型性能指标因为可以通过求解 Riccati 方程得到控制器参数，并且随着计算机技术的进步，求解过程变得越来越简便，因而在线性多变量系统的控制器设计中应用较广。利用线性二次型性能指标设计的控制器称作 LQR 控制器。

假设线性时不变系统的状态方程模型为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du\end{aligned}\quad (1)$$

可以引入最优控制的性能指标，即设计一个输入量  $u(t)$ ，使得

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (2)$$

为最小，其中  $Q$  和  $R$  分别为对状态变量和输入变量的加权矩阵。如果该系统受到外界干扰而偏离零状态，应施加怎样的控制  $U$ ，才能使得系统回到零状态附近，并同时满足  $J$  达到最小，那么这时的  $U$  就称之为最优控制。由线性二次型最优控制理论可知，若想使  $J$  最小化，则控制信号应该为：

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) = -Kx(t) \quad (3)$$

式中  $P(t)$  就是 Riccati 方程的解， $K$  是线性最优反馈增益矩阵。这时只需求解 Riccati 代数方程：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4)$$

就可获得  $P$  值以及最优反馈增益矩阵  $K$  值。

$$K = R^{-1}B^T P = [k_1, k_2, k_3, k_4]^T. \quad (5)$$

4.1节已经得到了直线电机倒立摆系统的比较精确的数学模型，下面针对本系统应用 LQR 法设计控制器，控制摆杆保持倒立平衡的同时，跟踪小车的位置。

### 倒立摆 LQR 控制器设计和 Simulink 仿真：

备注：LQR\_simulation.m 为倒立摆 LQR 控制器设计和 simulink 仿真的 m 文件  
LQR\_simulation.mdl 为倒立摆 LQR 控制器设计和 simulink 仿真的 simulink 文件

应用线性反馈控制器，控制系统结构如下图，图中  $R$  施加在小车上的阶跃输入，状态

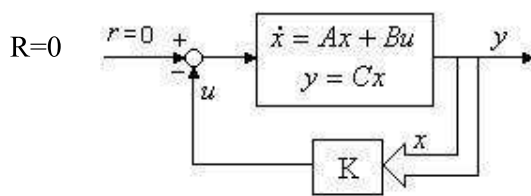


图 2.10 状态控件模型

变量  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$  分别代表小车位移、小车速度、摆杆位置和摆杆角速度。设计控制器使得当给系统施加一个阶跃输入时，摆杆会摆动，然后仍然回到垂直位置，小车可以达到新的指定的位置。

系统的开环极点可以用 MATLAB 程序求出，在 MATLAB 里运行  $\text{eig}(A)$ ，其中  $A$  为上节所示状态方程系数矩阵，得到开环极点为，

$$PO = [0 \ -0.0830 \ -5.2780 \ 5.2727]$$

可以看出，有一个极点“5.2727”位于右半  $S$  平面，这说明开环系统不稳定，即倒立摆是典型的自不稳定系统，构建好控制系统才能实现直线电机倒立摆的平衡控制。

假设全状态反馈可以实现（四个状态量都可测），找出确定反馈控制规律的向量  $K$ 。用 MATLAB 中的 LQR 函数，可以得到最优控制器对应的  $K$ 。LQR 函数允许选择两个参数  $R$  和  $Q$ ，这两个参数用来平衡输入量的权重。从最优控制律可以看出，其最优性完全取决于加权矩阵  $Q$  和  $R$  的选择，然而这两个矩阵如何选择并没有解析办法，目前确定加权矩阵  $Q$  和  $R$  的普遍方法是仿真试凑法。一般来说， $Q$  和  $R$  都取为对角阵，如果希望输入信号小，则选择较大的  $R$  矩阵，如果希望第  $j$  状态变量的值比较小，则应该相应地将  $Q$  矩阵的第  $j$  列元素选择较大的值，这时最优化功能会迫使改变量变小。

当  $Q$  不变而  $R$  减小时，倒立摆系统的调整时间与超调量减小，上升时间与稳态误差增大；当  $R$  不变而  $Q$  变大时，调整时间与超调量减小，摆杆的角度变化也同时减小，但上升时间与稳态误差却同时增大。

调用 MATLAB 的 LQR 命令函数求解上述最优问题，包括解 Riccati 代数方程和最优反馈矩阵  $K$ ：

在 MATLAB 命令行里运行  $K = lqr(A, B, Q, R)$ ，得到

-8.9443 -5.9559 23.5561 2.6227

在状态反馈下的闭环系统的状态方程为  $(A - BK, B, C - DK, D)$

在 Simulink 里构建好如下控制系统框图：

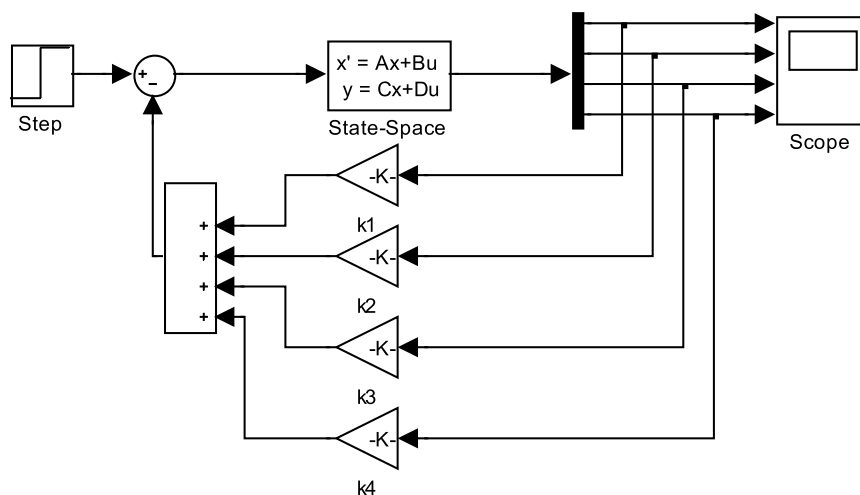


图 2.11 倒立摆 Simulink 仿真算法

$k_1, k_2, k_3, k_4$  分别为  $K = [-8.9443 \quad -5.9559 \quad 23.5561 \quad 2.6227]$  中的顺序对应的四个值。

**(备注：因光栅信号与模型的电机位移信号的方向相反，故实时控制中  $K$  的值为：**

**$[8.9443 \quad 5.9559 \quad 23.5561 \quad 2.6227]$**

其阶跃响应曲线如下所示，图中四条曲线由上到下分别表示电机位置、电机速度、角度、角速度的阶跃响应曲线：

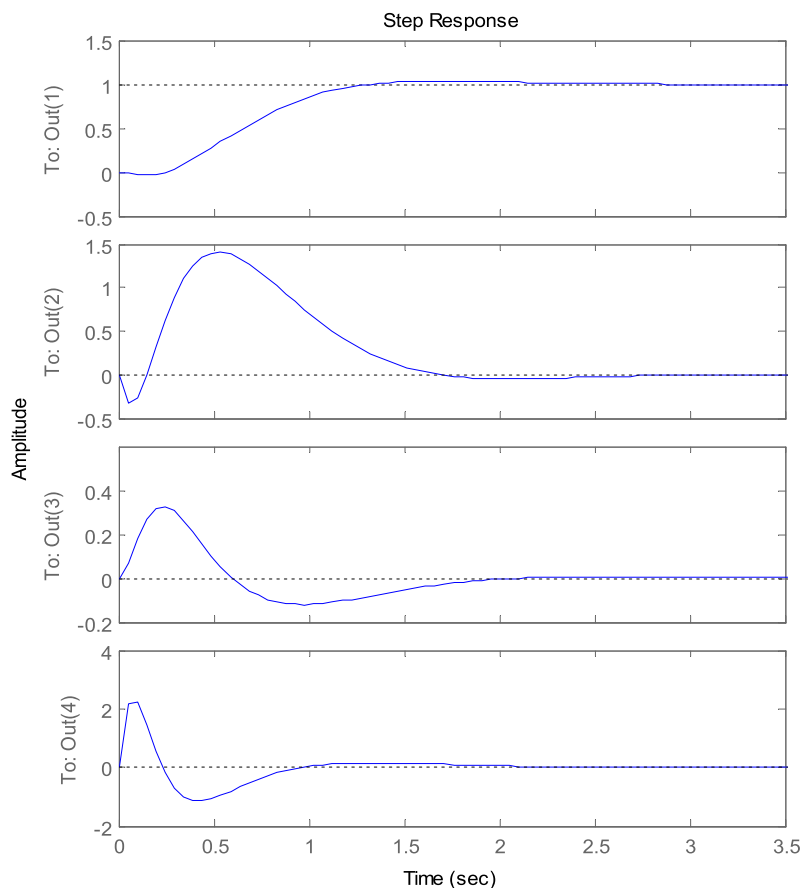


图 2.12 倒立摆阶跃响应 Simulink 仿真

从仿真图中可以看出，小车位置能跟踪输入信号，倒立摆受到阶跃扰动后能迅速稳定下来，过渡时间均小于 2s，设计的 LQR 控制器是可行的。

### 4.3 实验操作步骤

7) 双击桌面 MATLAB R2017a 图标运行 MATLAB 程序。



8) 基于 LQR 理论搭建一级摆算法模块（一级摆 LQR 平衡控制算法 simulink 算法文件见硬盘内模型文件 LQR 内.slx 文件）。

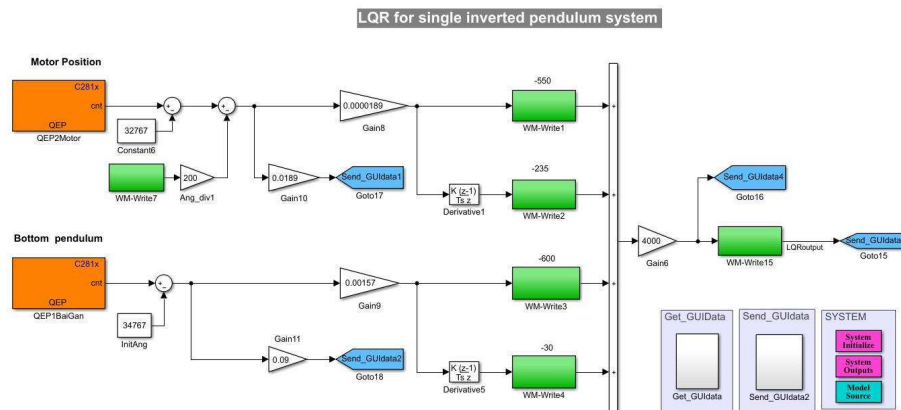




图 2.15 一级倒立摆 LQR 控制算法框图

说明：MotorQEP 模块是 cspace 读取电机编码器的模块，EQEP2 是 cspace 读取摆杆编码器的模块，Get\_GUIdata 模块接收 PC 端下发的数据。Send\_GUIdata 模块向 PC 端上传要发的数据，Write 是 cspace 在线修改模块。

- 9) 编译算法文件，打开运行程序，点击“Build”  按钮，编译算法文件，生成目标代码，成功后 Matlab 状态为 ready。

- 10) 程序编译完后，打开 cSPACE 控制界面 。

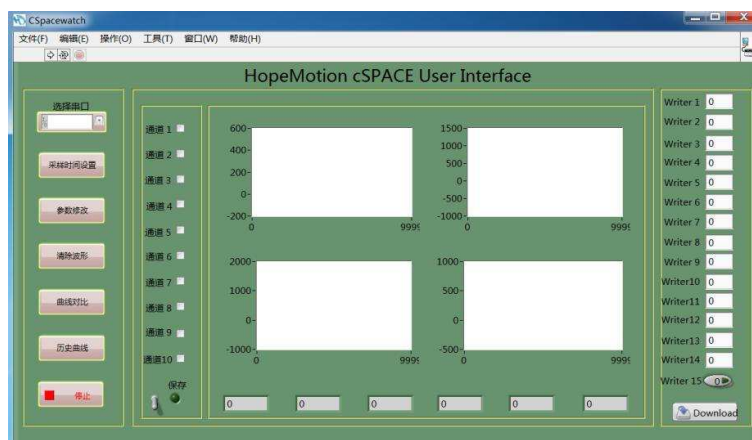
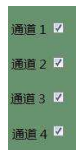



图 2.16 监控界面

运行程序后弹出界面，如图 2.16





将通道 1，通道 2，通道 3，通道 4，打钩。

然后点击左侧“选择串口”，通过电脑的“设备管理器”下的“端口”查看 CH340 所使用的端口，在该界面内选择。

11) 点击“运行”按钮。将倒立摆的摆杆扶到竖直倒立位置（扶正的时候，同时观察界面第二个方

框图，偏角参数的框图曲线从 $-180^{\circ}$ 转向 $0^{\circ}$ 左右），输入“Write1”、“Write2”、“Write3”、

“Write4” LQR 控制算法的四个参数，在本程序中值分别为： $-150$ ， $-120$ ， $-250$ ， $-20$ ，先点

击“write15”，再点击“download”按钮，观测波形。启动实验箱开启按钮，这时小车做往返运动，倒立摆即能稳定运行，不稳定运行时，适当调节 LQR 控制参数。

12) 实验结束，再次点击实验箱开启按钮。