4 вариант

Задание 1.

Найти приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, если функция задана в равностоящих узлах

$y_i = f(x_i)$; $x_i = x_0 + i\cdot h$; h = const; i = 0…6;

$y'_\xi = f'(\xi)$; y'_ξ - ? 6; $y''_\xi = f''(\xi)$; y''_ξ - ? .

Оценить погрешность полученного значения.

Провести проверку вычислений в среде MS Excel и программе на C++.
Сделать вывод о точности решения.

i	0	1	2	3	4	5	6
x	1	1,15	1,3	1,45	1,6	1,75	1,9
y	0,3679	0,3064	0,2399	0,1771	0,1237	0,0819	0,0514

Решение. Используя конечные разности шестого порядка найдем приближенные значения первой и второй производных этой функции в точке $\xi = x$ = 1,4, с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона. При подстановке табличного значения аргумента x_i по-хорошему мы должны получить соответствующее табличное значение y_i. Последнее утверждение является следствием того, что используем интерполяционные многочлены (которые должны проходить через заданные в таблице узловые точки). Именно это утверждение и является критерием проверки правильности вычислений.

По семи узлам (i = 0...6) табличной функции рассчитываем таблицу разностей.

i	x_i	y_i	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
0	1	0,3679	-0,0615	-0,005	0,0087	-0,003	-0,0005	0,0015
1	1,15	0,3064	-0,0665	0,0037	0,0057	-0,0035	0,001	
2	1,3	0,2399	-0,0628	0,0094	0,0022	-0,0025		
3	1,45	0,1771	-0,0534	0,0116	-0,0003			
4	1,6	0,1237	-0,0418	0,0113				
5	1,75	0,0819	-0,0305					
6	1,9	0,0514						

Определяем с помощью полученной таблицы 1 интерполяционный полином Ньютона и соответствующие формулы для численного дифференцирования первой и второй производной.

$$f(x) \approx P_B = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \ldots + \frac{\Delta^6 y_0}{6!h6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

$$y(x) = \left(y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots \right)$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ и $h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \ldots)$

Производя перемножение биномов, получим:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + .\frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 +$$

$$+ \frac{q^5 - 10q^4 + 35q^3 - 50q^2 + 24q}{120}\Delta^5 y_0 + \frac{q^6 - 15q^5 + 85q^4 - 225q^3 + 274q^2 - 120q}{720}\Delta^6 y_0 \ldots$$

Так как $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dq} \cdot \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dy}{dq}$

находим первую производную $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dq} \cdot \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{dy}{dq}$

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + .\frac{3q^2 - 6q^1 + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3 - 18q^2 + 22q^1 - 6}{24}\Delta^4 y_0 \right] +$$

$$+ \frac{1}{h}\left[\frac{5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q^1 + 24}{120}\Delta^5 y_0 + \frac{6q^5 - 75q^4 + 340q^3 - 675q^2 + 548q - 120}{720}\Delta^6 y_0 + \ldots \right]$$

Аналогично, находим вторую производную

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h^2}\frac{d(y')}{dq}$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{2}{2}\Delta^2 y_0 + .\frac{6q^1 - 6}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{12q^2 - 36q^1 + 22}{24}\Delta^4 y_0 + \frac{20q^3 - 120q^2 + 210q - 100}{120}\Delta^5 y_0 \right] +$$

$$+ \frac{1}{h^2}\frac{30q^4 - 300q^3 + 1020q^2 - 1350q + 548}{720}\Delta^6 y_0 + \ldots$$

Если $x = x_0$ и $q = 0$, тогда

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\frac{1}{5}\Delta^5 y_0\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y_0\right)=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\Delta^j y_0,$$

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\cdots\right).$$

Если $x=x_i$ и $q=0$, тогда

$$y'(x_i)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_i-\frac{1}{2}\Delta^2 y_i+\frac{1}{3}\Delta^3 y_i-\frac{1}{4}\Delta^4 y_i+\frac{1}{5}\Delta^5 y_{i1}\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y_i\right)=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\Delta^j y_i$$

$$y''(x_i)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_i-\Delta^3 y_i+\frac{11}{12}\Delta^4 y_i-\frac{5}{6}\Delta^5 y_i+\cdots\right)$$

Приведенные формулы позволяют вычислить приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 и для табличных значений $x=x_i$ с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, когда функция задана таблично в равностоящих узлах.

Приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 вычислены в среде MS Excel:

$y'(\xi)$= -0,41165

$y''(\xi)$= 0,36460

Проведем проверку вычислений в среде MS Excel, для чего вычислим значения функции $f(x_i)$ во всех табличных значениях $x=x_i$ и сверим эти значения с табличными:

x	y	$f(x_i)$
1	0,3679	0,36790
1,15	0,3064	0,30640
1,3	0,2399	0,23990
1,45	0,1771	0,17710
1,6	0,1237	0,12370
1,75	0,0819	0,08190
1,9	0,0514	0,05140

Оценим погрешность интерполирования полиномом $P_n(x)$. Вроде для табличных значений аргумента $x=x_i$ погрешность равна нулю, поэтому речь идет об оценке $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ при значениях $x\neq x_i$. Пусть функция $f(x)$, значения которой занесены в таблицу, имеет непрерывную $(n+1)$ производную на отрезке $[x_0;x_n]$.

Тогда вот эта погрешность, которую я никак не вычислю, определяется формулой:

$|R_n(x)| = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$, где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$, ξ - точка из $[x_0; x_n]$.

Так как точка ξ - неизвестна, то эта формула позволяет только оценить погрешность $|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$, где $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[\alpha,\beta]}\left|f^{n+1}(x)\right|$.

Найти приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента ξ = 1,4 с помощью соответствующего интерполяционного полинома Лагранжа, если функция задана в равностоящих узлах

$y_i = f(x_i)$; $x_i = x_0 + i \cdot h$; h = const; i = 0…6;

$y'_\xi = f'(\xi)$; y'_ξ - ? 6; $y''_\xi = f''(\xi)$; y''_ξ - ? .

Оценить погрешность полученного значения.

Для формирования вывода о точности решения воспользуемся MathCad т.к. я не совсем уверен в формулах MS Excel.

i	0	1	2	3	4	5	6
x	1	1,15	1,3	1,45	1,6	1,75	1,9
y	0,3679	0,3064	0,2399	0,1771	0,1237	0,0819	0,0514

Решение.

Интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, для семи табличных точек – узлов интерполяции, ищется в виде:

$L_n(x) = p_0(x)\cdot y_0 + p_1(x)\cdot y_1 + p_2(x)\cdot y_2 + \ldots + p_6(x)\cdot y_6$, где

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)},$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)},$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)},$$

– – –

$$p_6(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)}.$$

Каждый такой множитель $p_i(x)$ выдает значение $p_i(x_i)=1$ и выдает значение $p_i(x_k)=0$ при $i \neq k$, где $i,k=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Подставив табличные значения узлов интерполяции, и проведя сведение коэффициентов уравнения, приведем его к виду:

$$L_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

MathCad – листинг с проведенными расчетами:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.15 \\ 1.3 \\ 1.45 \\ 1.6 \\ 1.75 \\ 1.9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0.3679 \\ 0.3064 \\ 0.2399 \\ 0.1771 \\ 0.1237 \\ 0.0819 \\ 0.0514 \end{pmatrix}$$

$$p0(X) := \frac{(X-x_1)(X-x_2)\cdot(X-x_3)\cdot(X-x_4)(X-x_5)\cdot(X-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)(x_0-x_5)\cdot(x_0-x_6)}$$

$$p1(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_2)\cdot(X-x_3)\cdot(X-x_4)(X-x_5)\cdot(X-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)(x_1-x_5)\cdot(x_1-x_6)}$$

$$p2(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1)\cdot(X-x_3)\cdot(X-x_4)(X-x_5)\cdot(X-x_6)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)(x_2-x_5)\cdot(x_2-x_6)}$$

$$p3(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1)\cdot(X-x_2)\cdot(X-x_4)(X-x_5)\cdot(X-x_6)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)(x_3-x_5)\cdot(x_3-x_6)}$$

$$p4(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1)\cdot(X-x_2)\cdot(X-x_3)(X-x_5)\cdot(X-x_6)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)(x_4-x_5)\cdot(x_4-x_6)}$$

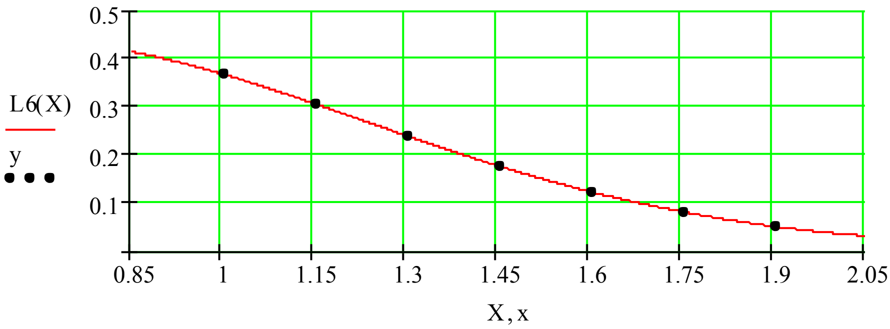
$$p5(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1)\cdot(X-x_2)\cdot(X-x_3)(X-x_4)\cdot(X-x_6)}{(x_5-x_0)(x_5-x_1)\cdot(x_5-x_2)\cdot(x_5-x_3)(x_5-x_4)\cdot(x_5-x_6)}$$

$$p6(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1)\cdot(X-x_2)\cdot(X-x_3)(X-x_4)\cdot(X-x_5)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)\cdot(x_6-x_2)\cdot(x_6-x_3)(x_6-x_4)\cdot(x_6-x_5)}$$

$$L6(X) := p0(X) \cdot y_0 + p1(X) \cdot y_1 + p2(X) \cdot y_2 + p3(X) \cdot y_3 + p4(X) \cdot y_4 + p5(X) \cdot y_5 + p6(X) \cdot y_6$$

$i := 0..6$

$x_i =$	$L6(x_i) =$	$y_i =$
1	0.3679	0.3679
1.15	0.3064	0.3064
1.3	0.2399	0.2399
1.45	0.1771	0.1771
1.6	0.1237	0.1237
1.75	0.0819	0.0819
1.9	0.0514	0.0514



$$a := L6(X)\ \text{coeffs}, X \rightarrow \begin{pmatrix} .77303077274805670 \\ -2.4703182441700962 \\ 6.7783333333333350 \\ -8.592889803383631 \\ 5.2606310013717436 \\ -1.5637860082304528 \\ .18289894833104710 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 0.773 \\ -2.4703 \\ 6.7783 \\ -8.5929 \\ 5.2606 \\ -1.5638 \\ 0.1829 \end{pmatrix}$$

На графике видим, что полученная функция проходит через узловые точки из таблицы. Это означает, что функция интерполирования задана верно и я ошибался насчет формул Excel, все действительно неплохо.

Мы получили интерполяционный полином Лагранжа:

$$L6(x) = 0{,}773 - 2{,}4703x + 6{,}7783x^2 - 8{,}5929x^3 + 5{,}2606x^4 - 1{,}5638x^5 + 0{,}1829x^6.$$

Продифференцировав его и подставив в полученные производные функции аргумент ξ = 1,4, найдем значения производной и второй производной в требуемой точке:

$L6(1,4) \approx 0.1969117824$

$$f1(X) := \frac{d}{dX} L6(X)$$

$$f2(X) := \frac{d^2}{dX^2} L6(X)$$

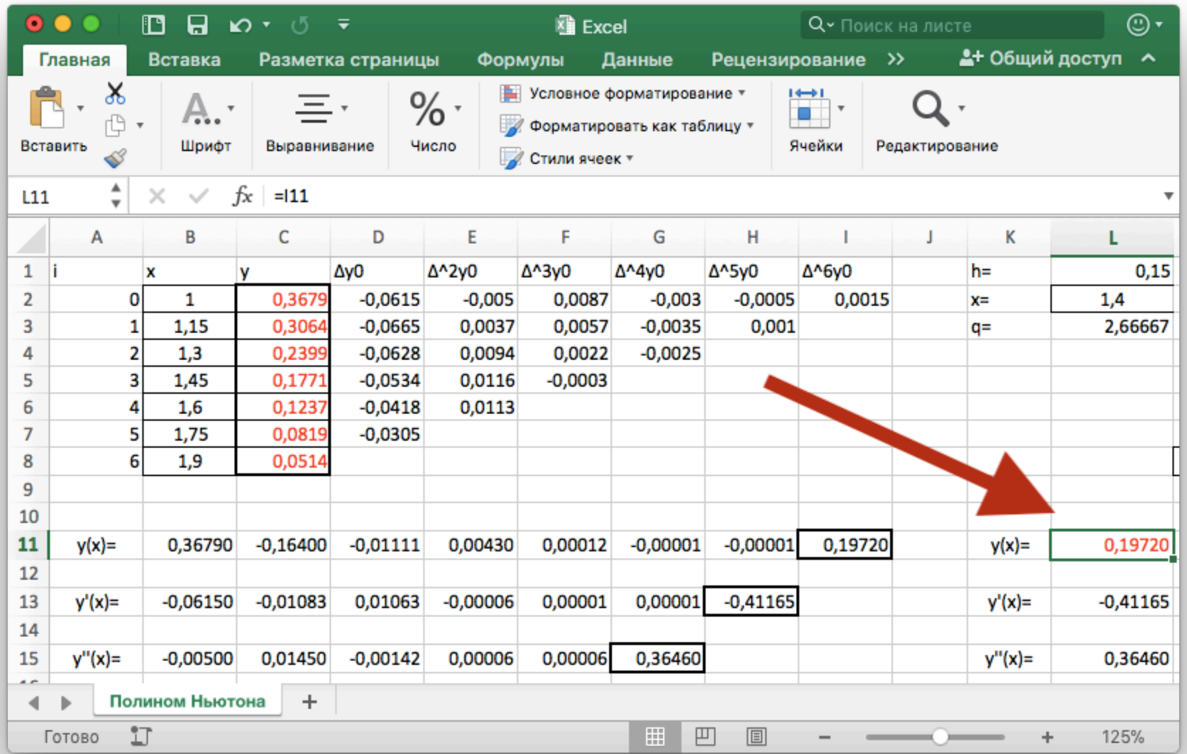
$$f1(1.4) = -0.4116$$

$$f2(1.4) = 0.3646$$

$y'(x)=$ -0,4116

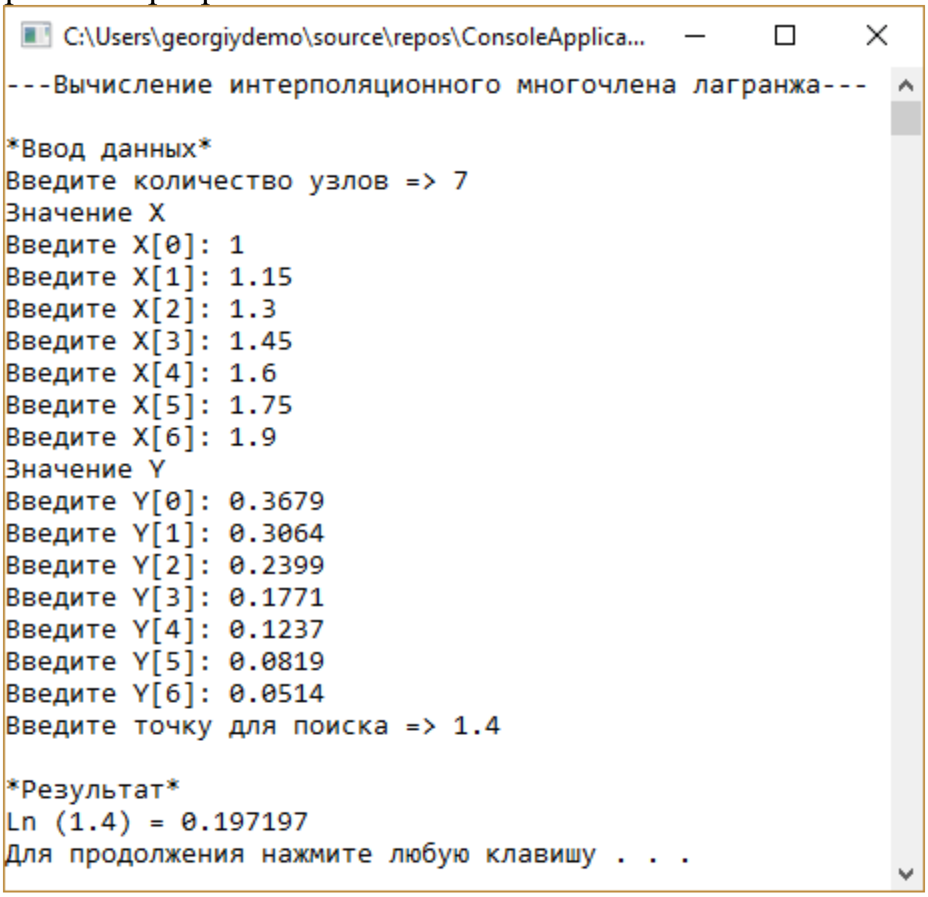
$y''(x)=$ 0,3646

Результат Excel:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	x	y	Δy0	Δ^2y0	Δ^3y0	Δ^4y0	Δ^5y0	Δ^6y0		h=	0,15
2	0	1	0,3679	-0,0615	-0,005	0,0087	-0,003	-0,0005	0,0015		x=	1,4
3	1	1,15	0,3064	-0,0665	0,0037	0,0057	-0,0035	0,001			q=	2,66667
4	2	1,3	0,2399	-0,0628	0,0094	0,0022	-0,0025					
5	3	1,45	0,1771	-0,0534	0,0116	-0,0003						
6	4	1,6	0,1237	-0,0418	0,0113							
7	5	1,75	0,0819	-0,0305								
8	6	1,9	0,0514									
9												
10												
11	y(x)=	0,36790	-0,16400	-0,01111	0,00430	0,00012	-0,00001	-0,00001	0,19720		y(x)=	0,19720
12												
13	y'(x)=	-0,06150	-0,01083	0,01063	-0,00006	0,00001	0,00001	-0,41165			y'(x)=	-0,41165
14												
15	y''(x)=	-0,00500	0,01450	-0,00142	0,00006	0,00006	0,36460				y''(x)=	0,36460

Результат работы программы:



Как видим, полученные значения производных интерполяционных многочленов в заданной точке совпадают по всем знакам точности кроме последнего, с которой заданы табличные значения функции:

Полином Ньютона

$y'(\xi)=$ -0,41165

$y''(\xi)=$ 0,36460

Полином Лагранжа

$y'(x)=$ -0,4116

$y''(x)=$ 0,3646

Также погрешность результатов работы программы на C++ и Excel относительно наших вычислений незначительна, что подтверждает верность вычислений:

- MathCad: $L6(1{,}4) \approx 0.1969117824$
- Microsoft Excel: $L6(1{,}4) \approx 0{,}19720$
- Программа на C++: $L6(1{,}4) \approx 0.197197$

Листинг программы:

```cpp
#include "stdafx.h"
#include <iostream>;
using namespace std;

double *X, *Y;
int n = 0;

double decider(double *X, double * Y, double t) {
   double result, n1, n2;
   result = 0;
   for (int j = 0; j<n; j++) {
      n1 = 1; n2 = 1;
      for (int i = 0; i<n; i++) {
         if (i == j) {
            n1 = n1 * 1; n2 = n2 * 1;
         }
         else {
            n1 = n1 * (t - X[i]);
            n2 = n2 * (X[j] - X[i]);
         }
      }
      result = result + Y[j] * n1 / n2;
   }
   return result;
}

int main() {
   setlocale(LC_ALL, "RUS");
   cout << "---Вычисление интерполяционного многочлена лагранжа---\n\n";
   cout << "*Ввод данных*\n";
   cout << "Введите количество узлов => "; cin >> n;
   X = new double[n];
   Y = new double[n];

   cout << "Значение X\n";
   for (int i = 0; i<n; i++) {
      cout << "Введите X[" << i << "]: ";
      cin >> X[i];
   }

   cout << "Значение Y\n";
   for (int i = 0; i < n; i++) {
      cout << "Введите Y[" << i << "]: ";
      cin >> Y[i];
   }

   cout << "Введите точку для поиска => ";
   double t = 0;
   cin >> t;

   cout << "\n*Результат*\n";
   cout << "Ln (" << t << ") = " << decider(X, Y, t) << "\n";
   system("pause");
}
```

Задание 2. Численное интегрирование

1) Найти приближенное значение интеграла а) по формулам прямоугольников, трапеции с точностью, $\varepsilon=10^{-3}$.
2) Найти приближенное значение интеграла б) по формулам Симпсона с точностью, $\varepsilon=10^{-3}$.
3) Сравнить полученные результаты.

   Интегралы для вычисления (N=4):

   а) $I=\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{cos(0,07\cdot 4+0,5\cdot x)}{0,4+\sqrt{x^2+4}}dx$

   б) $I=\int\limits_{1,2}^{2,1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

1) Найдем приближенное значение интеграла $I=\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{cos(0,07\cdot 4+0,5\cdot x)}{0,4+\sqrt{x^2+4}}dx$ по формулам прямоугольников, трапеции с точностью, $\varepsilon=10^{-3}$.

Для начала определим количество шагов разбиения и шаг разбиения интервала интегрирования.

$$f(x)=\frac{cos(0,07\cdot 4+0,5\cdot x)}{0,4+\sqrt{x^2+4}},\ a=0,4;\ \ b=1,2.$$

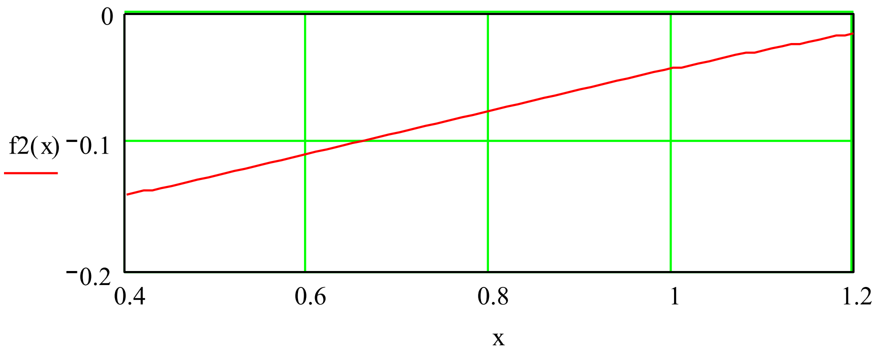
Согласно формулы погрешности приближенного вычисления определенного интеграла по методу прямоугольников $\Delta=|R(f)|\le\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$, где $M_2=\max|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Еще раз воспользуемся помощью MathCad:

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$a := 0.4 \qquad b := 1.2$

$x := a, a + 0.01 .. b$



$$|f2(a)| = 0.141$$

$$M_2 = 0{,}141; \quad \Delta = \varepsilon = 0{,}001$$

$$n^2 \le \frac{M_2(b-a)^3}{24 \cdot \Delta} = \frac{0{,}141 \cdot (1{,}2 - 0{,}4)}{24 \cdot 0{,}001}.$$

При решении данного неравенства получаем, что $|n| \le 1{,}734$.

Таким образом, для достижения необходимой точности методом прямоугольников для данного интеграла достаточно положить количество точек разбиения $n = 2$, ну мы тогда и возьмем $n = 4$.

Определим тогда шаг разбиения:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1{,}2 - 0{,}4}{4} = 0{,}2$$

Зададим значения абсциссы точек разбиения отрезка $[a,b]$ на n равных частей $x_0 = a = 0{,}4$, $x_1 = a + h = 0{,}6$, $x_2 = a + 2h = 0{,}8$, $x_3 = a + 3h = 1$

$x_4 = b = 1{,}2;$ и определяем значения подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{cos(0{,}07 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot x)}{0{,}4 + \sqrt{x^2 + 4}}$ для каждого x_i $(i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4)$:

$$y_i = f(x_i) = \frac{cos(0{,}28 + 0{,}5 \cdot (x_i)}{0{,}4 + \sqrt{(x_i)^2 + 4}}.$$

i	0	1	2	3	4
x_i	0,400	0,6	0,8	1	1,2
y_i	0,36358	0,33619	0,30445	0,2696	0,23319

Все найденные значения подставляем в формулу левых прямоугольников:

$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$=0,2(0,36358+0,33619+0,30445+0,26969)=

=0,24748$\approx$ 0,247.

Теперь все найденные значения подставляем в формулу правых прямоугольников:

$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$=0,2(0,33619+0,30445+0,26969+0,23319)=0,2214$\approx$ 0,221.

Вычислим интеграл методом трапеций. Поскольку формула для вычисления погрешности отличается, $\Delta = |R(f)| \le \dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$, то найдем какое n нам подходит:

$$M_2 = 0{,}141; \;\; \Delta = \varepsilon = 0{,}001$$

$$n^2 \le \frac{M_2(b-a)^3}{12 \cdot \Delta} = \frac{0{,}141 \cdot (1{,}2 - 0{,}4)}{12 \cdot 0{,}001}.$$

При решении данного неравенства получаем, что $|n| \le 2{,}453$.

Таким образом, для достижения необходимой точности методом трапеций для данного интеграла достаточно положить количество точек разбиения $n = 3$. Тогда давайте возьмем $n = 8$.

Некоторые узловые значения будут те же, что и для метода прямоугольников:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0,400	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
y_i	0,364	0,351	0,336	0,321	0,304	0,287	0,27	0,252	0,233

Все найденные значения подставляем в формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{\grave{O}\eth\grave{a}\ddot{\imath}} = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + \sum_{i=1}^{7} y_i \right) = 0{,}24189 \approx 0{,}242.$$

Вычислим интеграл б) $I = \int\limits_{1,2}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ методом Симпсона (парабол):

Для начала определим количество шагов разбиения и шаг разбиения интервала интегрирования.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}, \ a = 1{,}2; \ \ b = 2{,}1.$$

Согласно формулы погрешности приближенного вычисления определенного интеграла по методу Симпсона $|R(f)| \le \frac{M_4 (b-a)^5}{2880 n^4}$, , где $M_4 = \max \left| f^{(4)}(x) \right|$ на отрезке $[a, b]$.

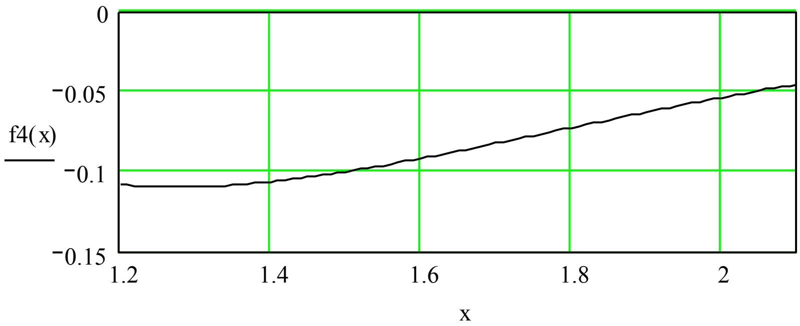
В последний раз обратимся к MathCad:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \qquad f4(x) := \frac{d^4}{dx^4} f(x)$$

$$a := 1.2 \qquad b := 2.1$$

$$x := a, a + 0.01 .. b$$

$$\frac{d^5}{dx^5} f(x) \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \left(10+\sqrt{70}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\left(10+\sqrt{70}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(10-\sqrt{70}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\left(10-\sqrt{70}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$



$$\left(10-\sqrt{70}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.278$$

$$\xi := \left(10-\sqrt{70}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|f4(a)| = 0.108 \qquad |f4(b)| = 0.045 \qquad |f4(\xi)| = 0.1098$$

$$M_4 = 0{,}1098; \;\; \Delta = \varepsilon = 0{,}001$$

$$\Delta \le \frac{M_4 \cdot (b-a)^5}{2880 \cdot n^4}.$$

При решении данного неравенства получаем, что $|n| \le 0{,}3874$.

Таким образом, для достижения необходимой точности методом Симпсона для данного интеграла достаточно положить любое количество точек разбиения. Возьмем $n = 4$.

Определим теперь шаг разбиения:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2{,}1-1{,}2}{4} = 0{,}225$$

Зададим значения абсциссы точек разбиения отрезка $[a,b]$ на n равных частей $x_0 = a = 1{,}2$, $x_1 = a + h = 1{,}425$, $x_2 = a + 2h = 1{,}65$, $x_3 = a + 3h = 1{,}875$,

$x_4 = b = 2{,}1;$ и определяем значения подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ для каждого x_i $(i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4)$:

$$y_i = f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{(x_i)^2 + 4}}.$$

i	0	1	2	3	4
x_i	1,2	1,425	1,65	1,875	2,1
y_i	0,42875	0,40721	0,38569	0,36477	0,34483

Все найденные значения подставляем в формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\right)$$

Как следствие, получаем ответ:

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{0{,}225}{3}$ (0,42875+4*(0,40721+0,36477)+2*0,38569+0,34483)=

=0,34747≈ 0,347.

Проверим вычисления на программе С++:

```
C:\Users\georgiydemo\source\repos\Co...
*Задание №2*
Метод Симсона:
0.348406
Точность:
0.00142018
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Значения отличаются незначительно, следовательно, вычисления верны.

Листинг программы:

```cpp
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

const int N = 4;
double SimpsonFunction(double x);
double MainSimpson(double a, double b, int n);

int main()
{
	setlocale(LC_ALL, "RUS");
	double y;
	double raz1, y1;
	cout << "*Задание №2*\nМетод Симсона:\n";
	y = MainSimpson(1.2, 2.1, 220);
	cout << y << "\n";
	y1 = MainSimpson(1.2, 2.1, 219);
	raz1 = abs(y - y1);
	cout << "Точность:\n" << raz1 << "\n";
	system("pause");
	return 0;
}

double SimpsonFunction(double x)
{
	return (1 / (sqrt(x * x + N)));
}

double MainSimpson(double a, double b, int n)
{
	double h, s, x, f;
	int i = 1;
	h = (b - a) / n;
	x = a;
	f = SimpsonFunction(x);
	s = f;
	while (i <= n) {
		x = x + h;
		f = SimpsonFunction(x);
		s = s + 4 * f;
		i = i + 2;
		x = x + h;
		f = SimpsonFunction(x);
		s = s + 2 * f;
	}
	x = b;
	f = SimpsonFunction(x);
	s = (s + f) * (h / 3);
	return s;
}
```