

Задание 1.

Найти приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента $\xi = 1,4$ с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, если функция задана в равностоящих узлах

$$y_i = f(x_i); \quad x_i = x_0 + i \cdot h; \quad h = \text{const}; \quad i = 0 \dots 6;$$

$$y'_\xi = f'(\xi); \quad y'_\xi - ? \cdot 6; \quad y''_\xi = f''(\xi); \quad y''_\xi - ? .$$

Оценить погрешность полученного значения.

Провести проверку вычислений в среде MS Excel и программе на C++.

Сделать вывод о точности решения.

i	0	1	2	3	4	5	6
x	1	1,15	1,3	1,45	1,6	1,75	1,9
y	0,3679	0,3064	0,2399	0,1771	0,1237	0,0819	0,0514

Решение. Используя конечные разности шестого порядка найдем приближенные значения первой и второй производных этой функции в точке $\xi = x = 1,4$, с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона. При подстановке табличного значения аргумента x_i по-хорошему мы должны получить соответствующее табличное значение y_i . Последнее утверждение является следствием того, что используем интерполяционные многочлены (которые должны проходить через заданные в таблице узловые точки). Именно это утверждение и является критерием проверки правильности вычислений.

По семи узлам ($i = 0 \dots 6$) табличной функции рассчитываем таблицу разностей.

i	x_i	y_i	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
0	1	0,3679	-0,0615	-0,005	0,0087	-0,003	-0,0005	0,0015
1	1,15	0,3064	-0,0665	0,0037	0,0057	-0,0035	0,001	
2	1,3	0,2399	-0,0628	0,0094	0,0022	-0,0025		
3	1,45	0,1771	-0,0534	0,0116	-0,0003			
4	1,6	0,1237	-0,0418	0,0113				
5	1,75	0,0819	-0,0305					
6	1,9	0,0514						

Определяем с помощью полученной таблицы 1 интерполяционный полином Ньютона и соответствующие формулы для численного дифференцирования первой и второй производной.

$$f(x) \approx P_B = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \dots + \frac{\Delta^6 y_0}{6!h^6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

$$y(x) = \left(y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \dots \right)$$

$$\text{где } q = \frac{x - x_0}{h} \text{ и } h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \dots)$$

Производя перемножение биномов, получим:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \\ + \frac{q^5 - 10q^4 + 35q^3 - 50q^2 + 24q}{120}\Delta^5 y_0 + \frac{q^6 - 15q^5 + 85q^4 - 225q^3 + 274q^2 - 120q}{720}\Delta^6 y_0 \dots$$

$$\text{Так как } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq}$$

$$\text{находим первую производную } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq}$$

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q^1 + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3 - 18q^2 + 22q^1 - 6}{24}\Delta^4 y_0 \right] + \\ + \frac{1}{h} \left[\frac{5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q^1 + 24}{120}\Delta^5 y_0 + \frac{6q^5 - 75q^4 + 340q^3 - 675q^2 + 548q - 120}{720}\Delta^6 y_0 + \dots \right]$$

Аналогично, находим вторую производную

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h^2} \frac{d(y')}{dq}$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{6q^1 - 6}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{12q^2 - 36q^1 + 22}{24}\Delta^4 y_0 + \frac{20q^3 - 120q^2 + 210q - 100}{120}\Delta^5 y_0 \right] + \\ + \frac{1}{h^2} \frac{30q^4 - 300q^3 + 1020q^2 - 1350q + 548}{720}\Delta^6 y_0 + \dots$$

Если $x = x_0$ и $q = 0$, тогда

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n y_0 \right) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} \Delta^j y_0,$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \cdots \right).$$

Если $x = x_i$ и $q = 0$, тогда

$$y'(x_i) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_i - \frac{1}{2} \Delta^2 y_i + \frac{1}{3} \Delta^3 y_i - \frac{1}{4} \Delta^4 y_i + \frac{1}{5} \Delta^5 y_i \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n y_i \right) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} \Delta^j y_i$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i + \frac{11}{12} \Delta^4 y_i - \frac{5}{6} \Delta^5 y_i + \cdots \right)$$

Приведенные формулы позволяют вычислить приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента $\xi = 1,4$ и для табличных значений $x = x_i$ с помощью соответствующего интерполяционного полинома Ньютона, когда функция задана таблично в равностоящих узлах.

Приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента $\xi = 1,4$ вычислены в среде MS Excel:

$$y'(\xi) = -0,41165$$

$$y''(\xi) = 0,36460$$

Проведем проверку вычислений в среде MS Excel, для чего вычислим значения функции $f(x_i)$ во всех табличных значениях $x = x_i$ и сверим эти значения с табличными:

x	y	$f(x_i)$
1	0,3679	0,36790
1,15	0,3064	0,30640
1,3	0,2399	0,23990
1,45	0,1771	0,17710
1,6	0,1237	0,12370
1,75	0,0819	0,08190
1,9	0,0514	0,05140

Оценим погрешность интерполирования полиномом $P_n(x)$. Вроде для табличных значений аргумента $x = x_i$ погрешность равна нулю, поэтому речь идет об оценке $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ при значениях $x \neq x_i$. Пусть функция $f(x)$, значения которой занесены в таблицу, имеет непрерывную $(n+1)$ производную на отрезке $[x_0; x_n]$.

Тогда вот эта погрешность, которую я никак не вычислю, определяется формулой:

$$|R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \text{ где } \omega_{n+1}(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n), \xi - \text{точка из } [x_0; x_n].$$

Так как точка ξ - неизвестна, то эта формула позволяет только оценить погрешность $|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$, где $M_{n+1} = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Найти приближенное значение первой и второй производной функции при заданном значении аргумента $\xi = 1,4$ с помощью соответствующего интерполяционного полинома Лагранжа, если функция задана в равностоящих узлах

$$y_i = f(x_i); \quad x_i = x_0 + i \cdot h; \quad h = \text{const}; \quad i = 0 \dots 6;$$

$$y'_\xi = f'(\xi); \quad y'_\xi - ? \quad 6; \quad y''_\xi = f''(\xi); \quad y''_\xi - ?.$$

Оценить погрешность полученного значения.

Для формирования вывода о точности решения воспользуемся MathCad т.к. я не совсем уверен в формулах MS Excel.

i	0	1	2	3	4	5	6
x	1	1,15	1,3	1,45	1,6	1,75	1,9
y	0,3679	0,3064	0,2399	0,1771	0,1237	0,0819	0,0514

Решение.

Интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, для семи табличных точек – узлов интерполяции, ищется в виде:

$$L_n(x) = p_0(x) \cdot y_0 + p_1(x) \cdot y_1 + p_2(x) \cdot y_2 + \dots + p_6(x) \cdot y_6, \text{ где}$$

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)},$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)},$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)},$$

- - -

$$p_6(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)}.$$

Каждый такой множитель $p_i(x)$ выдает значение $p_i(x_i)=1$ и выдает значение $p_i(x_k)=0$ при $i \neq k$, где $i, k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Подставив табличные значения узлов интерполяции, и проведя сведение коэффициентов уравнения, приведем его к виду:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

MathCad – листинг с проведенными расчетами:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.15 \\ 1.3 \\ 1.45 \\ 1.6 \\ 1.75 \\ 1.9 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0.3679 \\ 0.3064 \\ 0.2399 \\ 0.1771 \\ 0.1237 \\ 0.0819 \\ 0.0514 \end{pmatrix}$$

$$p0(X) := \frac{(X-x_1)(X-x_2) \cdot (X-x_3) \cdot (X-x_4)(X-x_5) \cdot (X-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \cdot (x_0-x_3) \cdot (x_0-x_4)(x_0-x_5) \cdot (x_0-x_6)}$$

$$p1(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_2) \cdot (X-x_3) \cdot (X-x_4)(X-x_5) \cdot (X-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3) \cdot (x_1-x_4)(x_1-x_5) \cdot (x_1-x_6)}$$

$$p2(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1) \cdot (X-x_3) \cdot (X-x_4)(X-x_5) \cdot (X-x_6)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3) \cdot (x_2-x_4)(x_2-x_5) \cdot (x_2-x_6)}$$

$$p3(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1) \cdot (X-x_2) \cdot (X-x_4)(X-x_5) \cdot (X-x_6)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2) \cdot (x_3-x_4)(x_3-x_5) \cdot (x_3-x_6)}$$

$$p4(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1) \cdot (X-x_2) \cdot (X-x_3)(X-x_5) \cdot (X-x_6)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1) \cdot (x_4-x_2) \cdot (x_4-x_3)(x_4-x_5) \cdot (x_4-x_6)}$$

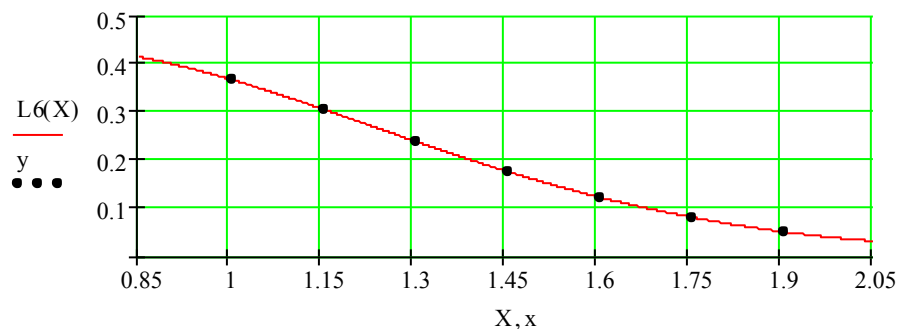
$$p5(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1) \cdot (X-x_2) \cdot (X-x_3)(X-x_4) \cdot (X-x_6)}{(x_5-x_0)(x_5-x_1) \cdot (x_5-x_2) \cdot (x_5-x_3)(x_5-x_4) \cdot (x_5-x_6)}$$

$$p6(X) := \frac{(X-x_0)(X-x_1) \cdot (X-x_2) \cdot (X-x_3)(X-x_4) \cdot (X-x_5)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1) \cdot (x_6-x_2) \cdot (x_6-x_3)(x_6-x_4) \cdot (x_6-x_5)}$$

$$L_6(X) := p_0(X) \cdot y_0 + p_1(X) \cdot y_1 + p_2(X) \cdot y_2 + p_3(X) \cdot y_3 + p_4(X) \cdot y_4 + p_5(X) \cdot y_5 + p_6(X) \cdot y_6$$

i := 0.. 6

$x_i =$	$L_6(x_i) =$	$y_i =$
1	0.3679	0.3679
1.15	0.3064	0.3064
1.3	0.2399	0.2399
1.45	0.1771	0.1771
1.6	0.1237	0.1237
1.75	0.0819	0.0819
1.9	0.0514	0.0514



$$a := L_6(X) \text{ coeffs}, X \rightarrow \begin{pmatrix} .773030772748056707 \\ -2.4703182441700962 \\ 6.7783333333333350 \\ -8.592889803383631 \\ 5.2606310013717436 \\ -1.5637860082304528 \\ .18289894833104710 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 0.773 \\ -2.4703 \\ 6.7783 \\ -8.5929 \\ 5.2606 \\ -1.5638 \\ 0.1829 \end{pmatrix}$$

На графике видим, что полученная функция проходит через узловые точки из таблицы. Это означает, что функция интерполирования задана верно и я ошибался насчет формул Excel, все действительно неплохо.

Мы получили интерполяционный полином Лагранжа:

$$L_6(x) = 0,773 - 2,4703x + 6,7783x^2 - 8,5929x^3 + 5,2606x^4 - 1,5638x^5 + 0,1829x^6.$$

Продифференцировав его и подставив в полученные производные функции аргумент $\xi = 1,4$, найдем значения производной и второй производной в требуемой точке:

$$L_6(1,4) \approx 0.1969117824$$

$$f_1(X) := \frac{d}{dX} L_6(X)$$

$$f_2(X) := \frac{d^2}{dX^2} L_6(X)$$

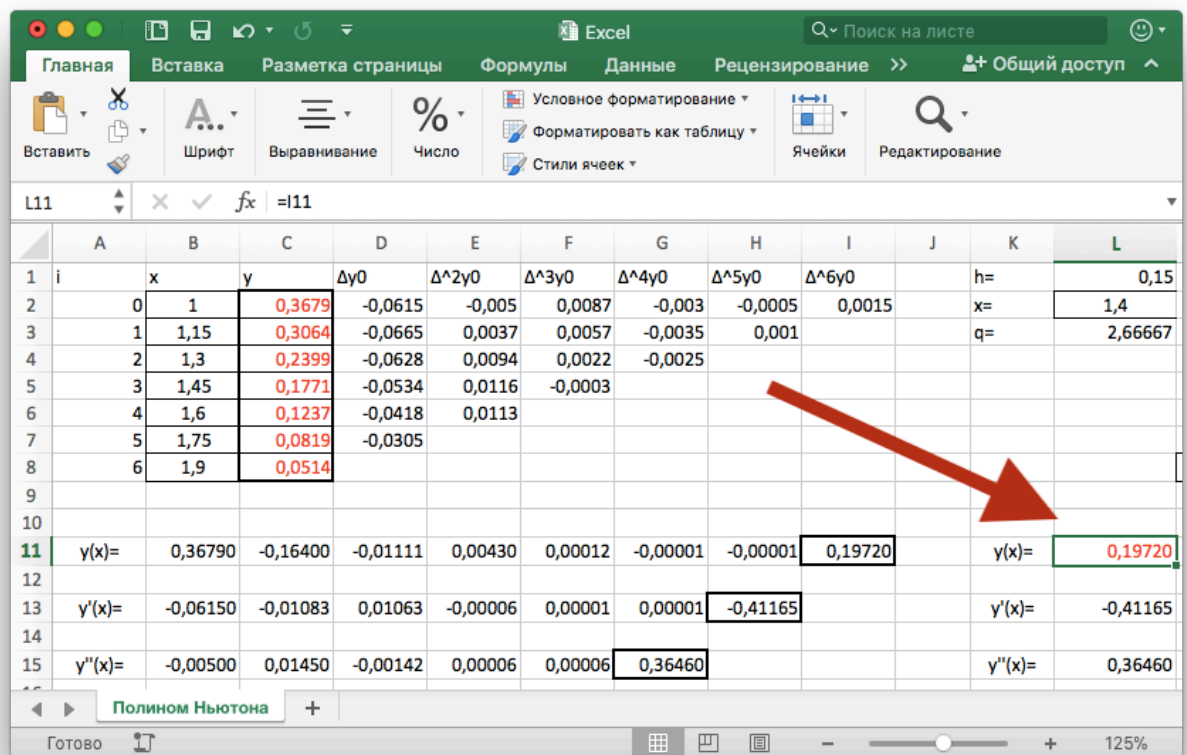
$$f_1(1.4) = -0.4116$$

$$f_2(1.4) = 0.3646$$

$$y'(x) = -0,4116$$

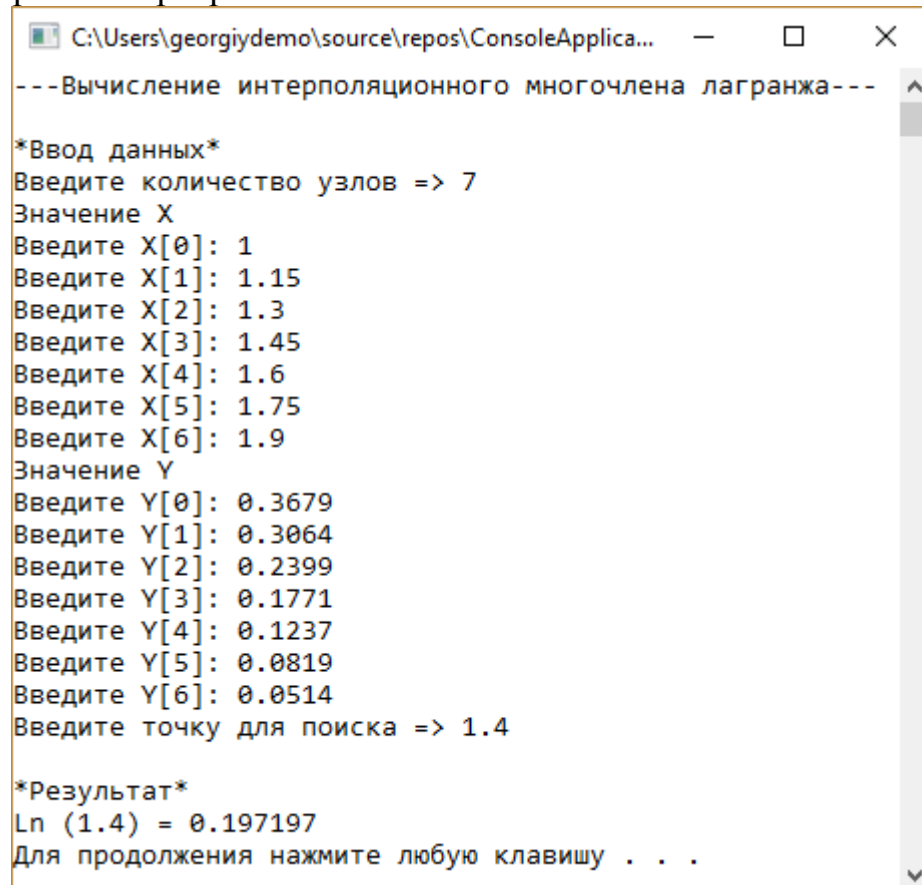
$$y''(x) = 0,3646$$

Результат Excel:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$		h=	0,15
2	0	1	0,3679	-0,0615	-0,005	0,0087	-0,003	-0,0005	0,0015		x=	1,4
3	1	1,15	0,3064	-0,0665	0,0037	0,0057	-0,0035	0,001			q=	2,66667
4	2	1,3	0,2399	-0,0628	0,0094	0,0022	-0,0025					
5	3	1,45	0,1771	-0,0534	0,0116	-0,0003						
6	4	1,6	0,1237	-0,0418	0,0113							
7	5	1,75	0,0819	-0,0305								
8	6	1,9	0,0514									
11	y(x)=	0,36790	-0,16400	-0,01111	0,00430	0,00012	-0,00001	-0,00001	0,19720		y(x)=	0,19720
12	y'(x)=	-0,06150	-0,01083	0,01063	-0,00006	0,00001	0,00001	-0,41165			y'(x)=	-0,41165
14	y''(x)=	-0,00500	0,01450	-0,00142	0,00006	0,00006	0,36460				y''(x)=	0,36460

Результат работы программы:



```
C:\Users\georgiydemo\source\repos\ConsoleApplica...  —  □  X
---Вычисление интерполяционного многочлена лагранжа---
*Ввод данных*
Введите количество узлов => 7
Значение X
Введите X[0]: 1
Введите X[1]: 1.15
Введите X[2]: 1.3
Введите X[3]: 1.45
Введите X[4]: 1.6
Введите X[5]: 1.75
Введите X[6]: 1.9
Значение Y
Введите Y[0]: 0.3679
Введите Y[1]: 0.3064
Введите Y[2]: 0.2399
Введите Y[3]: 0.1771
Введите Y[4]: 0.1237
Введите Y[5]: 0.0819
Введите Y[6]: 0.0514
Введите точку для поиска => 1.4

*Результат*
Ln (1.4) = 0.197197
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Как видим, полученные значения производных интерполяционных многочленов в заданной точке совпадают по всем знакам точности кроме последнего, с которой заданы табличные значения функции:

Полином Ньютона

$$y'(\xi) = -0,41165$$

$$y''(\xi) = 0,36460$$

Полином Лагранжа

$$y'(x) = -0,4116$$

$$y''(x) = 0,3646$$

Также погрешность результатов работы программы на C++ и Excel относительно наших вычислений незначительна, что подтверждает верность вычислений:

- MathCad: $L_6(1,4) \approx 0.1969117824$
- Microsoft Excel: $L_6(1,4) \approx 0,19720$
- Программа на C++: $L_6(1,4) \approx 0.197197$

Листинг программы:

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>;
using namespace std;

double *X, *Y;
int n = 0;

double decider(double *X, double *Y, double t) {
    double result, n1, n2;
    result = 0;
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        n1 = 1; n2 = 1;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (i == j) {
                n1 = n1 * 1; n2 = n2 * 1;
            }
            else {
                n1 = n1 * (t - X[i]);
                n2 = n2 * (X[j] - X[i]);
            }
        }
        result = result + Y[j] * n1 / n2;
    }
    return result;
}

int main() {
    setlocale(LC_ALL, "RUS");
    cout << "----Вычисление интерполяционного многочлена лагранжа---\n\n";
    cout << "*Ввод данных*\n";
    cout << "Введите количество узлов => "; cin >> n;
    X = new double[n];
    Y = new double[n];

    cout << "Значение X\n";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "Введите X[" << i << "]: ";
        cin >> X[i];
    }

    cout << "Значение Y\n";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "Введите Y[" << i << "]: ";
        cin >> Y[i];
    }

    cout << "Введите точку для поиска => ";
    double t = 0;
    cin >> t;

    cout << "\n*Результат*\n";
    cout << "Ln (" << t << ") = " << decider(X, Y, t) << "\n";
    system("pause");
}
```

Задание 2. Численное интегрирование

- 1) Найти приближенное значение интеграла а) по формулам прямоугольников, трапеции с точностью, $\varepsilon=10^{-3}$.
- 2) Найти приближенное значение интеграла б) по формулам Симпсона с точностью, $\varepsilon=10^{-3}$.
- 3) Сравнить полученные результаты.

Интегралы для вычисления ($N=4$):

$$\text{а) } I = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,07 \cdot 4 + 0,5 \cdot x)}{0,4 + \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$\text{б) } I = \int_{1,2}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

- 1) Найдем приближенное значение интеграла $I = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,07 \cdot 4 + 0,5 \cdot x)}{0,4 + \sqrt{x^2 + 4}} dx$ по

формулам прямоугольников, трапеции с точностью, $\varepsilon=10^{-3}$.

Для начала определим количество шагов разбиения и шаг разбиения интервала интегрирования.

$$f(x) = \frac{\cos(0,07 \cdot 4 + 0,5 \cdot x)}{0,4 + \sqrt{x^2 + 4}}, \quad a = 0,4; \quad b = 1,2.$$

Согласно формулы погрешности приближенного вычисления определенного интеграла по методу прямоугольников $\Delta = |R(f)| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$,

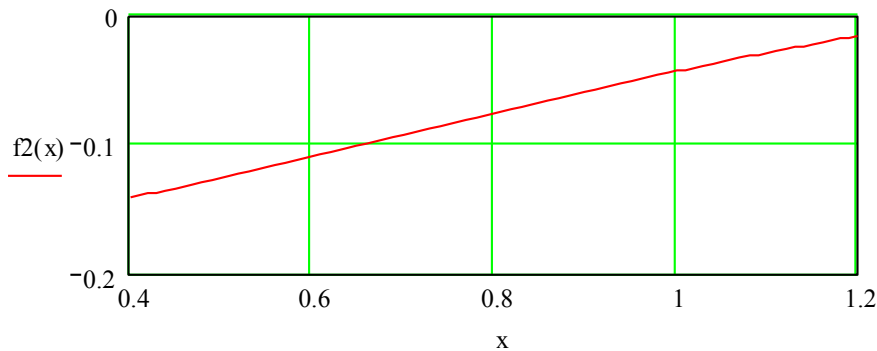
где $M_2 = \max|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Еще раз воспользуемся помощью MathCad:

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$a := 0.4 \quad b := 1.2$$

$$x := a, a + 0.01.. b$$



$$|f2(a)| = 0.141$$

$$M_2 = 0.141; \quad \Delta = \varepsilon = 0.001$$

$$n^2 \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24 \cdot \Delta} = \frac{0.141 \cdot (1.2 - 0.4)^3}{24 \cdot 0.001}.$$

При решении данного неравенства получаем, что $|n| \leq 1.734$.

Таким образом, для достижения необходимой точности методом прямоугольников для данного интеграла достаточно положить количество точек разбиения $n = 2$, ну мы тогда и возьмем $n = 4$.

Определим тогда шаг разбиения:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.2 - 0.4}{4} = 0.2$$

Зададим значения абсциссы точек разбиения отрезка $[a, b]$ на n равных частей $x_0 = a = 0.4$, $x_1 = a + h = 0.6$, $x_2 = a + 2h = 0.8$, $x_3 = a + 3h = 1$

$x_4 = b = 1,2$; и определяем значения подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{\cos(0,07 \cdot 4 + 0,5 \cdot x)}{0,4 + \sqrt{x^2 + 4}} \text{ для каждого } x_i \ (i = 0,1,2,3,4):$$

$$y_i = f(x_i) = \frac{\cos(0,28 + 0,5 \cdot (x_i))}{0,4 + \sqrt{(x_i)^2 + 4}}.$$

i	0	1	2	3	4
x_i	0,400	0,6	0,8	1	1,2
y_i	0,36358	0,33619	0,30445	0,2696	0,23319

Все найденные значения подставляем в формулу левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0,2(0,36358 + 0,33619 + 0,30445 + 0,26969) = 0,24748 \approx 0,247.$$

Теперь все найденные значения подставляем в формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \sum_{i=1}^n f(x_i) = 0,2(0,33619 + 0,30445 + 0,26969 + 0,23319) = 0,2214 \approx 0,221.$$

Вычислим интеграл методом трапеций. Поскольку формула для вычисления погрешности отличается, $\Delta = |R(f)| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$, то найдем какое n нам подходит:

$$M_2 = 0,141; \Delta = \varepsilon = 0,001$$

$$n^2 \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12 \cdot \Delta} = \frac{0,141 \cdot (1,2 - 0,4)}{12 \cdot 0,001}.$$

При решении данного неравенства получаем, что $|n| \leq 2,453$.

Таким образом, для достижения необходимой точности методом трапеций для данного интеграла достаточно положить количество точек разбиения $n = 3$. Тогда давайте возьмем $n = 8$.

Некоторые узловые значения будут те же, что и для метода прямоугольников:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0,400	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
y_i	0,364	0,351	0,336	0,321	0,304	0,287	0,27	0,252	0,233

Все найденные значения подставляем в формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{\text{трап}} = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + \sum_{i=1}^7 y_i \right) = 0,24189 \approx 0,242.$$

Вычислим интеграл б) $I = \int_{1,2}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$ методом Симпсона (парабол):

Для начала определим количество шагов разбиения и шаг разбиения интервала интегрирования.

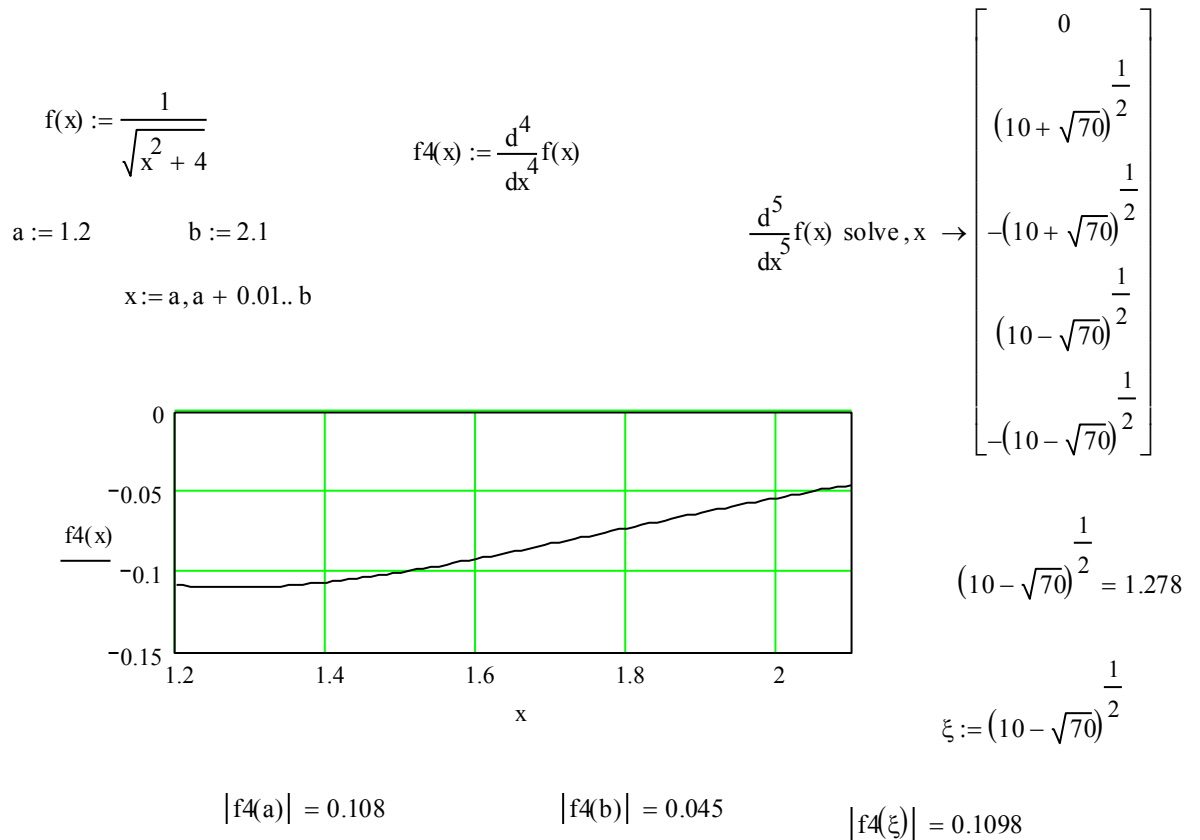
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad a = 1,2; \quad b = 2,1.$$

Согласно формулы погрешности приближенного вычисления определенного

интеграла по методу Симпсона $|R(f)| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}$, где

$M_4 = \max |f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

В последний раз обратимся к MathCad:



$$M_4 = 0.1098; \quad \Delta = \varepsilon = 0.001$$

$$\Delta \leq \frac{M_4 \cdot (b-a)^5}{2880 \cdot n^4}.$$

При решении данного неравенства получаем, что $|n| \leq 0.3874$.

Таким образом, для достижения необходимой точности методом Симпсона для данного интеграла достаточно положить любое количество точек разбиения. Возьмем $n = 4$.

Определим теперь шаг разбиения:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.1-1.2}{4} = 0.225$$

Зададим значения абсциссы точек разбиения отрезка $[a, b]$ на n равных частей $x_0 = a = 1.2$, $x_1 = a + h = 1.425$, $x_2 = a + 2h = 1.65$, $x_3 = a + 3h = 1.875$,

$x_4 = b = 2,1$; и определяем значения подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ для каждого x_i ($i = 0,1,2,3,4$):

$$y_i = f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{(x_i)^2 + 4}}.$$

i	0	1	2	3	4
x_i	1,2	1,425	1,65	1,875	2,1
y_i	0,42875	0,40721	0,38569	0,36477	0,34483

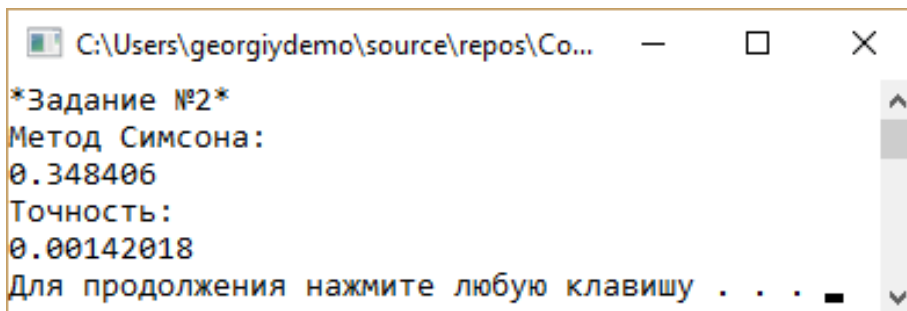
Все найденные значения подставляем в формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right)$$

Как следствие, получаем ответ:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{0,225}{3} (0,42875 + 4*(0,40721 + 0,36477) + 2*0,38569 + 0,34483) = 0,34747 \approx 0,347.$$

Проверим вычисления на программе C++:



```

C:\Users\georgiydemo\source\repos\Co...
*Задание №2*
Метод Симсона:
0.348406
Точность:
0.00142018
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
  
```

Значения отличаются незначительно, следовательно, вычисления верны.

Листинг программы:

```
#include "stdafx.h"
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

const int N = 4;
double SimpsonFunction(double x);
double MainSimpson(double a, double b, int n);

int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "RUS");
    double y;
    double raz1, y1;
    cout << "*Задание №2*\nМетод Симсона:\n";
    y = MainSimpson(1.2, 2.1, 220);
    cout << y << "\n";
    y1 = MainSimpson(1.2, 2.1, 219);
    raz1 = abs(y - y1);
    cout << "Точность:\n" << raz1 << "\n";
    system("pause");
    return 0;
}

double SimpsonFunction(double x)
{
    return (1 / (sqrt(x * x + N)));
}

double MainSimpson(double a, double b, int n)
{
    double h, s, x, f;
    int i = 1;
    h = (b - a) / n;
    x = a;
    f = SimpsonFunction(x);
    s = f;
    while (i <= n) {
        x = x + h;
        f = SimpsonFunction(x);
        s = s + 4 * f;
        i = i + 2;
        x = x + h;
        f = SimpsonFunction(x);
        s = s + 2 * f;
    }
    x = b;
    f = SimpsonFunction(x);
    s = (s + f) * (h / 3);
    return s;
}
```