Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Расчетно-графическая работа

По дисциплине математика

ЕН.01.10.02.03.007

Вариант №7

Студент группы 2ПКС-115 Деменчук Г.М.

Работа принята с оценкой: . . . .

Преподаватель: . . . . /Белоглазов А.И.

Москва, 2017

Задание 1

Исходные данные:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&5&7\\-1&2&-3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}2&4&6\\8&0&4\\-2&2&8\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}2&5&6\\4&-1&5\\2&-6&-1\end{pmatrix};\ Z=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix};$$

$$K=\begin{pmatrix}1&3&7&2&5\\-1&0&4&8&3\\3&6&10&-4&7\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&5&-1&4\\-1&3&4&6\end{pmatrix};\ N=\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\4&3&1&7&5\\0&3&-5&-3&3\\2&3&-2&2&4\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix};\ L=\begin{pmatrix}0&-1&3&0&2\\2&-4&1&5&3\\-4&5&7&-10&0\\-2&1&8&-5&3\end{pmatrix};\ R=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&0&3\\2&3&1&5\\1&1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}3&4&-5&1\\8&7&-2&-1\\2&-1&8&-3\end{pmatrix};\ T=\begin{pmatrix}2&4&2\\17&15&8\\4&8&4\\13&7&-3\end{pmatrix};\ S=\begin{pmatrix}7&6&-5\\1&-2&1\\-8&1&1\\2&8&3\end{pmatrix}$$

Задача 1

Условие задания: вычислить выражение $Z^2D'+E$

$$Z^2D'+E=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2&5&6\\4&-1&5\\2&-6&-1\end{pmatrix}'+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&2\\5&-1&-6\\6&5&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1-3\cdot4&1\cdot2+2\cdot0-3\cdot5&1\cdot(-3)+2\cdot2-3\cdot3\\1\cdot1+0\cdot1+2\cdot4&1\cdot2+0\cdot0+2\cdot5&1\cdot(-3)+0\cdot2+2\cdot3\\4\cdot1+5\cdot1+3\cdot4&4\cdot2+5\cdot0+3\cdot5&4\cdot(-3)+5\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&2\\5&-1&-6\\6&5&-1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-13&-8\\9&12&3\\21&23&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&2\\5&-1&-6\\6&5&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-9\cdot2-13\cdot5-8\cdot6&-9\cdot4-13\cdot(-1)-8\cdot5&-9\cdot2-13\cdot(-6)-8\cdot(-1)\\9\cdot2+12\cdot5+3\cdot6&9\cdot4+12\cdot(-1)+3\cdot5&9\cdot2+12\cdot(-6)+3\cdot(-1)\\21\cdot2+23\cdot5+7\cdot6&21\cdot4+23\cdot(-1)+7\cdot5&21\cdot2+23\cdot(-6)+7\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-131 & -63 & 68\\ 96 & 39 & -57\\ 199 & 96 & -103\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-130 & -63 & 68\\ 96 & 40 & -57\\ 199 & 96 & -102\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-130 & -63 & 68\\ 96 & 40 & -57\\ 199 & 96 & -102\end{pmatrix}$

Задача 2

Вычислить матричный многочлен $F + 2MS - C$

$$F + 2MS - C$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 2\left[\begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-8) + 4\cdot 2 & 1\cdot 6 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 4\cdot 8 & A_{13} \\ 0\cdot 7 + 5\cdot 1 - 1\cdot(-8) + 4\cdot 2 & 0\cdot 6 + 5\cdot(-2) - 1\cdot 1 + 4\cdot 8 & A_{23} \\ -1\cdot 7 + 3\cdot 1 + 4\cdot(-8) + 6\cdot 2 & -1\cdot 6 + 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 + 6\cdot 8 & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 1\cdot 6 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 4\cdot 8 & 1\cdot(-5) + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 4\cdot 3 \\ A_{21} & 0\cdot 6 + 5\cdot(-2) - 1\cdot 1 + 4\cdot 8 & 0\cdot(-5) + 5\cdot 1 - 1\cdot 1 + 4\cdot 3 \\ A_{31} & -1\cdot 6 + 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 + 6\cdot 8 & -1\cdot(-5) + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 6\cdot 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$+ \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 & 35 & 10 \\ 21 & 21 & 16 \\ -24 & 40 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 70 & 20 \\ 42 & 42 & 32 \\ -48 & 80 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 & 35 & 10 \\ 21 & 21 & 16 \\ -24 & 40 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 70 & 20 \\ 42 & 42 & 32 \\ -48 & 80 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}$

Задача 3

Найти минор $M_{24}(R)$, алгебраическое дополнение элемента $A_{32}(B)$ и ранг заданной матрицы $r(N)\cdot r(P)$

$$R=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&0&3\\2&3&1&5\\1&1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$M_{24}(R)=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&1\\1&1&-2\end{vmatrix}$$
$$=2\cdot3\cdot(-2)+1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1-1\cdot3\cdot1-2\cdot1\cdot(-2)-2\cdot1\cdot1$$
$$=-12+1+2-3+4-2=-10$$

$$B=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}$$

$$A_{32}(B)=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4&-5\\-4&-1\end{vmatrix}=(-1)\big(4\cdot(-1)-(-5)\cdot(-4)\big)=-(-4-20)=24$$

$$N=\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\4&3&1&7&5\\0&3&-5&-3&3\\2&3&-2&2&4\end{pmatrix};\ \ P=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\4&3&1&7&5\\0&3&-5&-3&3\\2&3&-2&2&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\\\-I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\0&3&-5&-3&3\\0&3&-5&-3&3\\0&3&-5&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\0&3&-5&-3&3\end{pmatrix}$$

Так как $\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=2\cdot3=6\neq0\Rightarrow r(N)=2$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\-3I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&6\\0&-1&-5&-6\\0&-5&-7&-12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-5II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&6\\0&-1&-5&-6\\0&0&18&18\end{pmatrix}$$

Так как $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&0&18\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot18=-18\neq0\Rightarrow r(P)=3$

$r(N)\cdot r(P)=2\cdot3=6$

Ответ: $M_{24}=-10;\ A_{32}=24;\ r(N)=6$

Задание 2

Исходные данные:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};\ \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 14 & 23 & 20 & 17 \\ 12 & 20 & 20 & 16 \\ 12 & 27 & 24 & 18 \\ 10 & 32 & 18 & 19 \end{vmatrix};\ \det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix};\ \det F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix};$$

$$\det H = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix};\ \det K = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ \det L = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & 19 & 6 & 9 \\ 6 & 17 & 11 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ \det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};\ \det P = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\det R = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix};\ \det S = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\det U = \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$$

Вопрос №1

Вычислить определитель N, раскрывая его по элементам строки 2 и столбца 3. Сравнить результаты.

$$\det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \\
&\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (3 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4) \\
&+ \big(4 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)\big) \\
&- (4 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 4) \\
&+ (4 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1) \\
&= (12 + 3 - 4 - 2 + 9 - 8) + (16 + 3 - 2 - 1 - 8 + 12) \\
&- (16 + 2 - 3 - 1 + 8 - 12) + (12 + 3 + 4 - 2 - 9 - 8) \\
&= 10 + 20 - 10 + 0 = 20
\end{aligned}$$

$$\det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \\
&\cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2(-1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \\
&\cdot (-1) \cdot 2) \\
&- \big(4 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)\big) \\
&+ (4 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1) \\
&- 3(4 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 4 \\
&\cdot 1 \cdot 1) \\
&= 2(-4 - 1 + 2 - 1 - 4 - 2) - (16 - 3 + 2 - 1 - 12 + 8) \\
&+ (16 - 2 + 3 - 1 + 12 - 8) - 3(-4 + 3 - 1 - 1 - 3 - 4) \\
&= 2 \cdot (-10) - 10 + 20 - 3 \cdot (-10) = -20 - 10 + 20 + 30 = 20
\end{aligned}$$

Ответ: $\det N = 20$

Вопрос №2

Вычислить определитель A, используя элементарные преобразования строк или столбцов.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3I \\ -3I \\ -2I \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -II \\ -II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -3III \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 1 = 2$$

Ответ: $\det A = 2$

Вопрос №3

Решить уравнение, содержащее определитель E с неизвестным $2-x^2$, стоящим на месте элемента e_{13}, при этом $E=2x-1$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 2x-1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \\ 1 & 27 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}$$
$$\cdot (2-x^2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$
$$= (2\cdot 9\cdot 64 + 3\cdot 8\cdot 16 + 4\cdot 4\cdot 27 - 4\cdot 9\cdot 8 - 4\cdot 3\cdot 64 - 2\cdot 27\cdot 16)$$
$$- (1\cdot 9\cdot 64 + 1\cdot 3\cdot 16 + 1\cdot 27\cdot 4 - 4\cdot 9\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 64 - 1\cdot 27\cdot 16)$$
$$+ (2-x^2)(1\cdot 4\cdot 64 + 1\cdot 2\cdot 16 + 1\cdot 4\cdot 8 - 4\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 64 - 1\cdot 16$$
$$\cdot 8) - (1\cdot 4\cdot 27 + 1\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 3\cdot 8 - 3\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 27 - 1\cdot 9\cdot 8)$$
$$= (1152 + 384 + 432 - 288 - 768 - 864)$$
$$- (576 + 48 + 108 - 36 - 192 - 432)$$
$$+ (2-x^2)(256 + 32 + 32 - 16 - 128 - 128)$$
$$- (108 + 18 + 24 - 12 - 54 - 72) = 48 - 72 + (2-x^2)\cdot 48 - 12$$
$$= -36 + 96 - 48x^2 = 60 - 48x^2$$

$$60 - 48x^2 = 2x - 1$$

$$48x^2 + 2x - 61 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 61\cdot 48}}{2\cdot 48} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 11712}}{96} = \frac{-2 \pm \sqrt{11716}}{96} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2929}}{96}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2929}}{48}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{2929}}{48}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{2929}}{48}$$

Ответ: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{2929}}{48}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{2929}}{48}$

Задание 3

Исходные данные:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \; M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \; H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1

Условие задания:

Для матрицы X найти матрицу X^{-1} и убедиться, что $XX^{-1} = E$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$|H| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2III \\ -3III \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 14 \\ -1 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 14 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 13 - 1 \cdot 14 = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) = -15 + 2 = -13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\big(5 \cdot (-5) - 2 \cdot (-2)\big) = -(-25 + 4) = 21$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-5) - 4 \cdot 1) = -(-10 - 4) = 14$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 = -15 - 8 = -23$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -(3 - 4) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = -4 - 12 = -16$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5) = -(-6 - 20) = 26$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} -13 & 21 & -1 \\ 14 & -23 & 1 \\ -16 & 26 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -13 & 14 & -16 \\ 21 & -23 & 26 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{|H|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -13 & 14 & -16 \\ 21 & -23 & 26 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$HH^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 13 + 2\cdot(-21) + 4\cdot 1 & 3\cdot(-14) + 2\cdot 23 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 16 + 2\cdot(-26) + 4\cdot 1 \\ 5\cdot 13 + 3\cdot(-21) - 2\cdot 1 & 5\cdot(-14) + 3\cdot 23 - 2\cdot(-1) & 5\cdot 16 + 3\cdot(-26) - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 13 + 1\cdot(-21) - 5\cdot 1 & 2\cdot(-14) + 1\cdot 23 - 5\cdot(-1) & 2\cdot 16 + 1\cdot(-26) - 5\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4II \\ \\ -2II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -15 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -15 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(8\cdot 2 - 1\cdot 15) = -(16 - 15) = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 4\cdot 5 = 18 - 20 = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(1\cdot 6 - 2\cdot 4) = -(6 - 8) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(4\cdot 6 - 1\cdot 5) = -(24 - 5) = -19$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 6 - 1\cdot 2 = 24 - 2 = 22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(4\cdot 5 - 4\cdot 2) = -(20 - 8) = -12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4 - 1\cdot 3 = 16 - 3 = 13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4\cdot 4 - 1\cdot 1) = -(16 - 1) = -15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot 3 - 4\cdot 1 = 12 - 4 = 8$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -19 & 22 & -12 \\ 13 & -15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -2 & -19 & 13 \\ 2 & 22 & -15 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}C^{*T} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -19 & 13 \\ 2 & 22 & -15 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 4\cdot(-2) + 1\cdot 1 & 4\cdot 19 + 4\cdot(-22) + 1\cdot 12 & 4\cdot(-13) + 4\cdot 15 + 1\cdot(-8) \\ 1\cdot 2 + 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 & 1\cdot 19 + 3\cdot(-22) + 4\cdot 12 & 1\cdot(-13) + 3\cdot 15 + 4\cdot(-8) \\ 2\cdot 2 + 5\cdot(-2) + 6\cdot 1 & 2\cdot 19 + 5\cdot(-22) + 6\cdot 12 & 2\cdot(-13) + 5\cdot 15 + 6\cdot(-8) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ответ: $H^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$

Задача 2

Условие задания:

Найти матрицу X из матричного уравнения, выполнить проверку

$H_1XK_1 = H$

Домножим слева и справа на обратные матрицы

$H_1^{-1}H_1XK_1K_1^{-1} = H_1^{-1}HK_1^{-1}$

$EXE = H_1^{-1}HK_1^{-1}$

$X = H_1^{-1}HK_1^{-1}$

Найдем обратные матрицы H_1^{-1} и K_1^{-1}

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{-I} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) =$$

$$-2 + 1 = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\big(0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)\big) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\big(1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)\big) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = 2$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_1^{-1} = \frac{1}{|H_1|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|K_1| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - 5 \cdot (-3) =$$

$$-14 + 15 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 2 + 2 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 6 \cdot 1) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 6 \cdot 2 = -6 - 12 = -18$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -\big(5 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)\big) = -(5 + 2) = -7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 6 = 1 - 6 = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-2) - 5 \cdot 6) = -(-2 - 30) = 32$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -18 \\ -7 & -5 & 32 \\ 3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$

$$K_1^{-1} = \frac{1}{|K_1|} C^{*T} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$

$$X = H_1^{-1} H K_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -5 & -4 & -21 \\ 6 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 346 & -617 & 250 \\ -90 & 162 & -65 \\ -245 & 438 & -177 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 346 & -617 & 250 \\ -90 & 162 & -65 \\ -245 & 438 & -177 \end{pmatrix}$

Задание 4

Исходные данные

$$\begin{cases} 7x_1+9x_2-3x_3+x_4=2 \\ 5x_1-x_2-2x_3+4x_4=-10 \\ -x_1+3x_2-4x_3+2x_4=6 \\ 2x_1-2x_2+3x_3+5x_4=0 \end{cases}$$

Требуется:
Решить систему линейных уравнений однозначной разрешимости методом Крамера, Гаусса и матричным. Выполнить проверку

1) Метод Крамера

   По формулам Крамера

   $$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\qquad x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}$$

   Найдем необходимые определители

$$\Delta=\begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix}=\begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 & 15 \\ 0 & 14 & -22 & 14 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 30 & -31 & 15 \\ 14 & -22 & 14 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix}=-\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ 14 & -22 & 14 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -14I \\ -9I \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -210 & 104 & 0 \\ -140 & 76 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -210 & 104 \\ -140 & 76 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 210 & 104 \\ 140 & 76 \end{vmatrix}$$

$$=210\cdot 76-104\cdot 140=15960-14560=1400$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 & 1 \\ -10 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +5I \\ -3I \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 44 & -17 & 9 \\ 0 & -24 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 44 & -17 & 9 \\ -24 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} +9II \\ \\ +5II \end{matrix}=2\begin{vmatrix} -172 & 28 & 0 \\ -24 & 5 & -1 \\ -122 & 28 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} -172 & 28 \\ -122 & 28 \end{vmatrix}=-56\begin{vmatrix} 172 & 1 \\ 122 & 1 \end{vmatrix}=-56(172-122)=-56\cdot 50$$

$$=-2800$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -10 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 44 & -31 & 15 \\ 0 & 20 & -22 & 14 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & -5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 44 & -31 & 15 \\ 20 & -22 & 14 \\ 12 & -5 & 9 \end{vmatrix} -II \quad == -\begin{vmatrix} 24 & -9 & 1 \\ 20 & -22 & 14 \\ 12 & -5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -14I \\ -9I \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -316 & 104 & 0 \\ -204 & 76 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -316 & 104 \\ -204 & 76 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 316 & 104 \\ 204 & 76 \end{vmatrix}$$

$$= 316 \cdot 76 - 104 \cdot 204 = 24016 - 21216 = 2800$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -10 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & 44 & 15 \\ 0 & 14 & 20 & 14 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 30 & 44 & 15 \\ 14 & 20 & 14 \\ 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} -II$$

$$= -\begin{vmatrix} 16 & 24 & 1 \\ 14 & 20 & 14 \\ 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -14I \\ -9I \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -210 & -316 & 0 \\ -140 & -204 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -210 & -316 \\ -140 & -204 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 210 & 316 \\ 140 & 204 \end{vmatrix}$$

$$= -(210 \cdot 204 - 140 \cdot 316) = -(42840 - 44240) = 1400$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & -10 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 & 44 \\ 0 & 14 & -22 & 20 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 30 & -31 & 44 \\ 14 & -22 & 20 \\ 4 & -5 & 12 \end{vmatrix} -3III = -\begin{vmatrix} 30 & -31 & 44 \\ 2 & -7 & -16 \\ 4 & -5 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -15II \\ \\ -2II \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 74 & 284 \\ 2 & -7 & -16 \\ 0 & 9 & 44 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 74 & 284 \\ 9 & 44 \end{vmatrix} = 2(74 \cdot 44 - 284 \cdot 9)$$

$$= 2(3256 - 2556) = 2 \cdot 700 = 1400$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2800}{1400} = -2, \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2800}{1400} = 2, \;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1400}{1400} = 1, \;\; x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{1400}{1400} = 1$$

2) Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 9 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 4 & -10 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -2 & 4 & -10 \\ 7 & 9 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +5I \\ +7I \\ +2I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 30 & -31 & 15 & 44 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 30 & -31 & 15 & 44 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2III \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -7II \\ -2II \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -4 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4\\ 0 & 0 & -113 & 105 & -8\\ 0 & 0 & -31 & 35 & 4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -4IV\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -4 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4\\ 0 & 0 & 11 & -35 & -24\\ 0 & 0 & -31 & 35 & 4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ +3III\end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -4 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4\\ 0 & 0 & 11 & -35 & -24\\ 0 & 0 & 2 & -70 & -68\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -5IV\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -4 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 315 & 316\\ 0 & 0 & 2 & -70 & -68\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ -2III\end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 3 & -4 & 2 & 6\\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 315 & 316\\ 0 & 0 & 0 & 700 & 700\end{array}\right)$$

$$x_4 = \frac{700}{700} = 1$$

$$x_3 = 316 - 315x_4 = 316 - 315 = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + 13x_4 - 13x_3}{2} = \frac{4 + 13 - 13}{2} = 2$$

$$x_1 = -6 + 2x_4 - 4x_3 + 3x_1 = -6 + 2 - 4 + 6 = -2$$

3) Матричный метод

Запишем систему в виде $AX = B$

Здесь: $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 & 1\\ 5 & -1 & -2 & 4\\ -1 & 3 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2\\ -10\\ 6\\ 0\end{pmatrix}$

Домножим слева на матрицу обратную к A

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$EX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$|A| = 1400$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & -2 & 4\\ 3 & -4 & 2\\ -2 & 3 & 5\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ +3I\\ -2I\end{array} = \begin{vmatrix}-1 & -2 & 4\\ 0 & -10 & 14\\ 0 & 7 & -3\end{vmatrix}$$

$$= -(-10\cdot(-3) - 14\cdot 7) = -(30 - 98) = 68$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & -2 & 4\\ -1 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}\begin{array}{l}+5II\\ \\ +2II\end{array} = -\begin{vmatrix}0 & -22 & 14\\ -1 & -4 & 2\\ 0 & -5 & 9\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-22 & 14\\ -5 & 9\end{vmatrix}$$

$$= -\big(-22\cdot 9 - 14\cdot(-5)\big) = -(-198 + 70) = 128$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & -1 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 5\end{vmatrix}\begin{array}{l}+5II\\ \\ +2II\end{array} = \begin{vmatrix}0 & 14 & 14\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}14 & 14\\ 4 & 9\end{vmatrix}$$

$$= 14\cdot 9 - 14\cdot 4 = 126 - 56 = 70$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix}5 & -1 & -2\\ -1 & 3 & -4\\ 2 & -2 & 3\end{vmatrix}\begin{array}{l}+5II\\ \\ +2II\end{array} = -\begin{vmatrix}0 & 14 & -22\\ -1 & 3 & -4\\ 0 & 4 & -5\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}14 & -22\\ 4 & -5\end{vmatrix}$$

$$= -\big(14\cdot(-5) - 4\cdot(-22)\big) = -(-70 + 88) = -18$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2I \\ -5I \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -15 & 2 & 0 \\ -47 & 18 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -15 & 2 \\ -47 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= -\big(-15 \cdot 18 - 2 \cdot (-47)\big) = -(-270 + 94) = 176$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2I \\ -5I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -15 & 2 & 0 \\ -33 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & 2 \\ -33 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= -15 \cdot 18 - 2 \cdot (-33) = -270 + 66 = -204$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2I \\ -5I \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -15 & -15 & 0 \\ -33 & -47 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -15 & -15 \\ -33 & -47 \end{vmatrix}$$

$$= -15\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 33 & 47 \end{vmatrix} = -15(47 - 33) = -15 \cdot 14 = -210$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} +7II \\ \\ +2II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & -31 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 30 \cdot (-5) - 4 \cdot (-31) = -150 + 124 = -26$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -4I \\ -5I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -37 & 10 & 0 \\ -47 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -37 & 10 \\ -47 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= -37 \cdot 18 - 10 \cdot (-47) = -666 + 470 = -196$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -4I \\ -5I \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -23 & 10 & 0 \\ -33 & 18 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -23 & 10 \\ -33 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= -\big(-23 \cdot 18 - 10 \cdot (-33)\big) = -(-414 + 330) = 84$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -4I \\ -5I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -23 & -37 & 0 \\ -33 & -47 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & -37 \\ -33 & -47 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 37 \\ 33 & 47 \end{vmatrix} = 23 \cdot 47 - 37 \cdot 33 = 1081 - 1221 = -140$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} +9II \\ \\ -2II \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 52 & 0 & -21 \\ 5 & -1 & -2 \\ -8 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 52 & -21 \\ -8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 52 \cdot 7 - (-21) \cdot (-8) = 364 - 168 = 196$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -4I \\ -2I \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -37 & 10 & 0 \\ -15 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -37 & 10 \\ -15 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\big(-37 \cdot 2 - 10 \cdot (-15)\big) = -(-74 + 150) = -76$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -4I \\ -2I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -23 & 10 & 0 \\ -15 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & 10 \\ -15 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -23 \cdot 2 - 10 \cdot (-15) = -46 + 150 = 104$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -4I \\ -2I \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -23 & -37 & 0 \\ -15 & -15 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -23 & -37 \\ -15 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$-15\begin{vmatrix} 23 & 37 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15(23 - 37) = -15 \cdot (-14) = 210$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}7 & 9 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -1 & 3 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix}+7III\\ +5III\\ \ \end{matrix}=\begin{vmatrix}0 & 30 & -31\\ 0 & 14 & -22\\ -1 & 3 & -4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}30 & -31\\ 14 & -22\end{vmatrix}$$
$$=-\big(30\cdot(-22)-14\cdot(-31)\big)=-(-660+434)=226$$

Присоединённая матрица

$$C^*=\begin{pmatrix}68 & 128 & 70 & -18\\ 176 & -204 & -210 & -26\\ -196 & 84 & -140 & 196\\ -76 & 104 & 210 & 226\end{pmatrix}$$

$$C^{*T}=\begin{pmatrix}68 & 176 & -196 & -76\\ 128 & -204 & 84 & 104\\ 70 & -210 & -140 & 210\\ -18 & -26 & 196 & 226\end{pmatrix}$$

Получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}C^{*T}=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}68 & 176 & -196 & -76\\ 128 & -204 & 84 & 104\\ 70 & -210 & -140 & 210\\ -18 & -26 & 196 & 226\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}68 & 176 & -196 & -76\\ 128 & -204 & 84 & 104\\ 70 & -210 & -140 & 210\\ -18 & -26 & 196 & 226\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -10\\ 6\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}68\cdot 2+176\cdot(-10)-196\cdot 6-76\cdot 0\\ 128\cdot 2-204\cdot(-10)+84\cdot 6+104\cdot 0\\ 70\cdot 2-210\cdot(-10)-140\cdot 6+210\cdot 0\\ -18\cdot 2-26\cdot(-10)+196\cdot 6+226\cdot 0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}136-1760-1176\\ 256+2040+504\\ 140+2100-840\\ -36+260+1176\end{pmatrix}=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}-2800\\ 2800\\ 1400\\ 1400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

4) Сделаем проверку

$7\cdot(-2)+9\cdot 2-3\cdot 1+1\cdot 1=-14+18-3+1=2$ – верно

$5\cdot(-2)-1\cdot 2-2\cdot 1+4\cdot 1=-10-2-2+4=-10$ – верно

$-1\cdot(-2)+3\cdot 2-4\cdot 1+2\cdot 1=2+6-4+2=6$ – верно

$2\cdot(-2)-2\cdot 2+3\cdot 1+5\cdot 1=-4-4+3+5=0$ – верно

Ответ: $x_1=-2;\ x_2=2;\ x_3=1;\ x_4=1$

Задание 5

Условие:

Дана система линейных однородных уравнений общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0 \end{cases}$$

Требуется:

Найти общее решение системы и одно произвольное частное решение, для которого выполнить проверку

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3I \\ -3I \\ -2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -11II \\ -7II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$x_5 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = 0$

$2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$

$x_3 = 2x_1 + 3x_4$

$x_1, x_4 -$ свободные

Общее решение системы

$\{(C_1, 0, 2C_1 + 3C_2, C_2, 0), C_1, C_2 \in R\}$

Пусть $C_1 = 1, C_2 = 1$

					Задание 5	Лист
						20
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Получим частное решение

$(1, 0, 5, 1, 0)$

Сделаем проверку

$6 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 6 - 15 + 9 = 0 -$ верно

$6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 6 - 15 + 9 = 0 -$ верно

$2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2 - 5 + 3 = 0 -$ верно

$4 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 4 - 10 + 6 = 0 -$ верно

Ответ: Общее решение: $\{(C_1, 0, 2C_1 + 3C_2, C_2, 0), C_1, C_2 \in R\}$

Частное решение: $(1, 0, 5, 1, 0)$

Задание 6

Условие:
Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5. \end{cases}$$

Требуется:
Найти общее решение системы, одно частное решение системы

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 11 & 3 & 3 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \cdot 6 \\ III - I \cdot 3 \\ IV + I \cdot 11 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & -8 & -8 & -10 & -12 & -16 \\ 0 & 36 & 36 & 45 & 54 & 72 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV - III \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II \cdot (-5) + III \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Так как $r(A) = r(A|B) = 3 < 5 = n$ (ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и меньше количества неизвестных), то система <u>совместна и неопределенна</u>.

Количество главных переменных равно $r(A) = 3$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 5 - 3 = 2$.

Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 3-го порядка полученной матрицы A: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Его столбцы (1-й, 2-й и 4-й столбцы матрицы A) соответствуют переменным x_1, x_2и x_4 – главные переменные, x_3 и x_5 – свободные переменные.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_4 = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 7, \\ 4x_2 + 4x_3 + 6x_5 = 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Теперь запишем эту систему в другом виде (слева останутся только главные переменные):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3x_3 - 5x_5 + 7, \\ 4x_2 = -4x_3 - 6x_5 + 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 и подставим это выражение в первое уравнение. Получим:

$$\begin{cases} -x_1 + 3 \cdot (-x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2) = -3x_3 - 5x_5 + 7, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 = 3x_3 + \frac{9}{2}x_5 - 6 - 3x_3 - 5x_5 + 7, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_5 - 1, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом общее решение системы уравнений:

$\left(\frac{1}{2}x_5 - 1;\ -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2; x_3; 0; x_5\right)$

Частное решение получим, например, при $x_3 = 1, x_5 = 0$:

$$(-1; 1; 1; 0; 0)$$

Проверка частного решения:

$$\begin{cases} 1+3+3+0+0=7, \\ -6+2+2+0=-2, \\ 3+1+1+0+0=5, \\ -11+3+3+0+0=-5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7=7, \\ -2=-2, \\ 5=5, \\ -5=-5. \end{cases}$$

Ответ: Общее решение: $\left(\frac{1}{2}x_5-1;\ -x_3-\frac{3}{2}x_5+2; x_3; 0; x_5\right)$

Частное решение: $(-1; 1; 1; 0; 0)$.

Задание 7

Дано:

$\mathrm{A}(-6;-4), \mathrm{B}(3,-7), \mathrm{C}(1;2), \mathrm{D}(-2{,}6), \mathrm{E}(-6;2)$

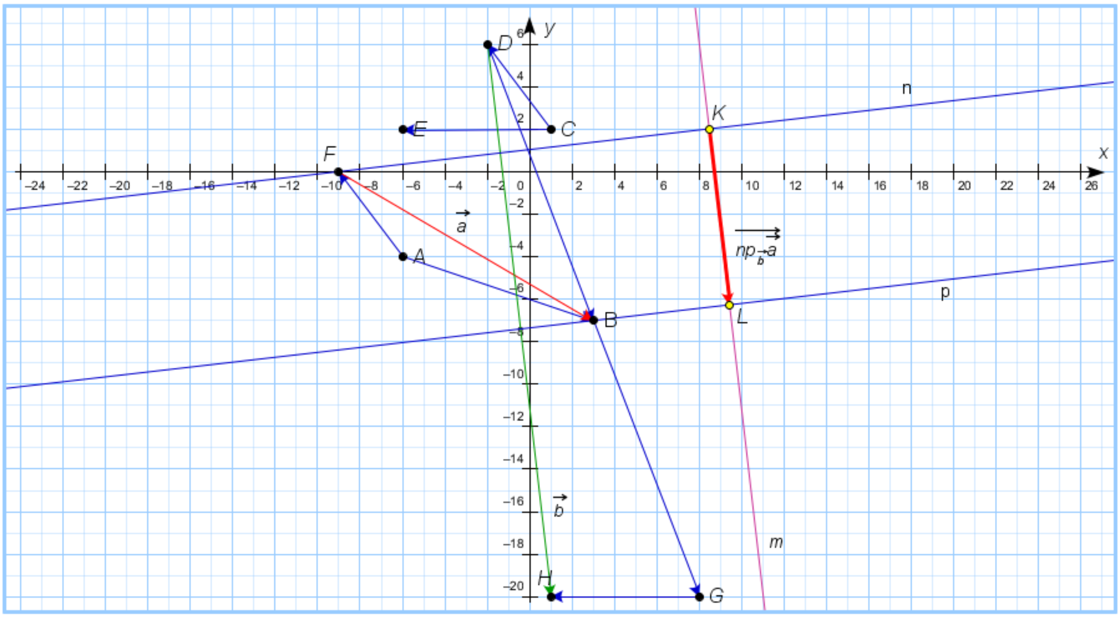
1) Найти проекцию $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ на направление вектора $\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}$

В координатной плоскости построить точки $A(-6;-4), B(3,-7), C(1;2), D(-2{,}6), E(-6;2)$.

От точки A отложить $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$, тогда $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$. Обозначим $\overrightarrow{FB} = \vec{a}$. От точки B отложить $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DB}$, тогда $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DB}$. От точки G отложить $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CE}$, тогда $\overrightarrow{DH} = 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE}$. Обозначим $\overrightarrow{DH} = \vec{b}$.

Построить прямую $m \parallel \vec{b}$ (положение прямой m в системе координат произвольное), направление прямой m совпадает с направлением вектора $\vec{b}$.

Через точку F провести прямую $n \perp m$, n пересекает m в точке K. Через точку B провести прямую $p \perp m$, p пересекает m в точке L.



Проекция вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ на направление вектора $\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}$ есть вектор $\overrightarrow{KL}$. Числовая проекция вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ на направление вектора $\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}$: $np_{\vec{b}}\vec{a} \approx 8{,}33$.

Выполним аналитическую проверку:

$\overrightarrow{AB}(9,-3), \overrightarrow{CD}(-3{,}4), \vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}, \vec{a}(12,-7)$.

$\overrightarrow{CE}(-7{,}0), \overrightarrow{DB}(5,-13), 2\overrightarrow{DB}(10,-26), \vec{b} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}, \vec{b}(3,-26).$

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12\cdot 3 - 7\cdot(-26)}{\sqrt{3^2+(-26)^2}} = \frac{36+182}{\sqrt{9+676}} = \frac{218}{\sqrt{685}} \approx \frac{218}{26{,}173} \approx 8{,}329$$

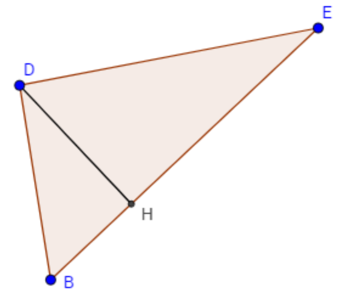
2) Найти угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD}(4{,}10), \overrightarrow{BE}(-9{,}9)$. Пусть α – угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BE}|} = \frac{4\cdot(-9)+10\cdot 9}{\sqrt{4^2+10^2}\cdot\sqrt{(-9)^2+9^2}} = \frac{-36+90}{\sqrt{116}\cdot\sqrt{162}} = \frac{54}{2\sqrt{29}\cdot 9\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}} = \arccos\frac{3\sqrt{58}}{58}$$

3) Найти высоту в треугольнике BDE, опущенную из вершины D



Пусть DH – искомая высота и $H(x,y)$. Тогда $\overrightarrow{DH}(x+2, y-6), \overrightarrow{BE}(-9{,}9)$. $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{BE}$, следовательно, $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$, т.е. $-9(x+2)+9(y-6)=0$. С другой стороны точка H лежит на BE, поэтому $\overrightarrow{BH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BH}(x-3, y+7)$. Получим: $\frac{x-3}{-9} = \frac{y+7}{9}$. Найдем координаты точки H, решив систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} -9(x+2)+9(y-6)=0, \\ \dfrac{x-3}{-9} = \dfrac{y+7}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x+9y-72=0, \\ 9x+9y+36=0. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнение: $18y-36=0$, $y=2$. Тогда $9x=-54$, $x=-6$ и $H(-6{,}2)$. Заметим, что точка H совпала с точкой E, то есть треугольник прямоугольный и высотой является отрезок DE.

Вычислим длину высоты: $|DE| = \sqrt{(-6+2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

4) Найти длину $\boldsymbol{l} = |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}|$

$$\overrightarrow{AC}(7;6), \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2+6^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}$$

$$\overrightarrow{DE}(-4,-4), \qquad |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$l = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{85} + 4\sqrt{2}$$

Ответ: $np_{\vec{b}}\vec{a} \approx 8{,}33$; $\alpha = \arccos\frac{3\sqrt{58}}{58}$;

$|DE| = 4\sqrt{2}$; $l = \sqrt{85} + 4\sqrt{2}$;

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Задание 7

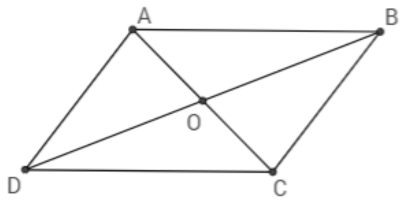
Задание 8

Аналитическая геометрия на плоскости. Векторное произведение двух векторов

Дано: $A(2; 3), B(-3; -5), C(-2; -1)$

1) $ABCD$ – параллелограмм. Найти координаты точки D.

Решение:



1 способ.

$\overrightarrow{BA}\,(5; 8), \overrightarrow{BC}(1; 4)$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (по правилу параллелограмма), $\overrightarrow{BD}\,(6; 12)$

$D(x; y)$, $\overrightarrow{BD}\,(x+3; y+5)$. Тогда: $x + 3 = 6$, $x = 3$; $y + 5 = 12, y = 7$.

2 способ.

O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, O – середина AC: $O\left(\frac{2+(-2)}{2}; \frac{3+(-1)}{2}\right)$, т.е. $O(0; 1)$.

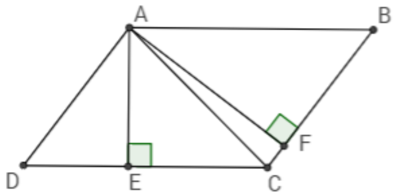
$D(x; y)$, $O(0; 1)$ – середина BD.

Тогда $\frac{-3+x}{2} = 0, x = 3$; $\frac{-5+y}{2} = 1, y = 7$.

Ответ: $D(3; 7)$

2) Найти площадь $\triangle ABC$ и высоты AE, AF параллелограмма $ABCD$

Решение:



$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|$

Так как результатом векторного произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перейдем к пространственным координатам:

$$\overrightarrow{BA}\,(5; 8; 0), \overrightarrow{BC}(1; 4; 0)$$

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} = 12\vec{k}$$

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = (0; 0; 12)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2} = 6$$

$$S_{ABCD} = \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = 12$$

$$|AB| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

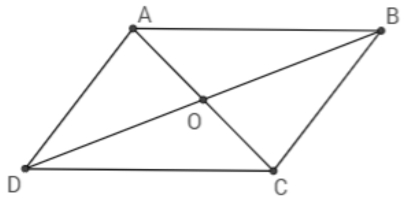
$$|AE| = \frac{S_{ABCD}}{|AB|} = \frac{12}{\sqrt{89}} = \frac{12\sqrt{89}}{89}$$

$$|AF| = \frac{S_{ABCD}}{|BC|} = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 6$, $|AE| = \frac{12\sqrt{89}}{89}$, $|AF| = \frac{12\sqrt{17}}{17}$

3) Найти внутренние углы параллелограмма и угол между диагоналями

Решение:



$\angle ABC = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{BA}\,(5;8), \overrightarrow{BC}(1;4)$

$$\cos\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{5\cdot1+8\cdot4}{\sqrt{5^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{37}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{17}} = \frac{37}{\sqrt{1513}}$$

$$\angle ABC = \arccos\frac{37}{\sqrt{1513}}$$

$$\angle BCD = 180° - \angle ABC = 180° - \arccos\frac{37}{\sqrt{1513}} = \arccos\left(-\frac{37}{\sqrt{1513}}\right)$$

$$\angle BCD = \arccos\left(-\frac{37}{\sqrt{1513}}\right)$$

$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})$ – угол между диагоналями параллелограмма

$\overrightarrow{AC}(-4;-4), \overrightarrow{DB}(-6;-12)$

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{DB}|} = \frac{-4\cdot(-6)-4\cdot(-12)}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+(-12)^2}} = \frac{72}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{180}}$$
$$= \frac{72}{4\sqrt{2}\cdot6\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Задание 9

Аналитическая геометрия в пространстве. Смешанное произведение трех векторов

Дано: $M(2;5;-3), A(4;2;-3), B(-5;6;-4), C(-2;-3;4)$

1) Найти V_{MABC}

Решение:

$\overrightarrow{MA}(2;-3;0), \overrightarrow{MB}(-7;1;-1), \overrightarrow{MC}(-4;-8;7)$

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-1) + 3\cdot(-53) = -2 - 159 = -161$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)\right| = \frac{1}{6}\cdot|-161| = \frac{161}{6} = 26\frac{5}{6}$$

Ответ: $V_{MABC} = 26\frac{5}{6}$

2) Найти высоту MO тетраэдра $MABC$

Решение:

$$V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot MO$$

$$MO = \frac{3V_{MABC}}{S_{ABC}}$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|, \overrightarrow{AB}(-9;4;-1), \overrightarrow{AC}(-6;-5;7)$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 4 & -1 \\ -6 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 23i + 69\vec{j} + 69\vec{k}$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (23;69;69)$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{23^2+69^2+69^2} = \sqrt{23^2+(3\cdot23)^2+(3\cdot23)^2}$$

$$= \sqrt{23^2(1+9+9)} = 23\sqrt{19}$$

$$MO = \frac{3V_{MABC}}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot\frac{161}{6}}{\frac{1}{2}\cdot23\sqrt{19}} = \frac{161}{23\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{19}}$$

Ответ: $MO = \frac{7}{\sqrt{19}}$

3) Найти поверхность тетраэдра $MABC$

Решение:

$S = S_{ABC} + S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$

$\overrightarrow{MA}(2;-3;0), \overrightarrow{MB}(-7;1;-1), \overrightarrow{MC}(-4;-8;7)$

$S_{ABC} = \frac{23}{2}\sqrt{19}$ (Из предыдущей задачи)

$$S_{MAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right]\right|$$

$$S_{MAC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right]\right|$$

$$S_{MBC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right]\right|$$

$$\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 0\\ -7 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -7 & -1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ -7 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\imath+2\vec{\jmath}-19\vec{k}$$

$$S_{MAB}=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+2^2+(-19)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9+4+361}=\frac{1}{2}\sqrt{374}$$

$$\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 0\\ -4 & -8 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -8 & 7\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -4 & 7\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & -8\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-21\imath-14\vec{\jmath}-28\vec{k}$$

$$S_{MAC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-21)^2+(-14)^2+(-28)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{7^2\cdot(9+4+16)}=\frac{7}{2}\sqrt{29}$$

$$\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -7 & 1 & -1\\ -4 & -8 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -8 & 7\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}-7 & -1\\ -4 & 7\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}-7 & 1\\ -4 & -8\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-\imath+53\vec{\jmath}+60\vec{k}$$

$$S_{MBC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+53^2+60^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+2809+3600}=\frac{1}{2}\sqrt{6410}$$

$$S=S_{ABC}+S_{MAB}+S_{MAC}+S_{MBC}=\frac{23}{2}\sqrt{19}+\frac{1}{2}\sqrt{374}+\frac{7}{2}\sqrt{29}+\frac{1}{2}\sqrt{6410}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(23\sqrt{19}+\sqrt{374}+7\sqrt{29}+\sqrt{6410}\right)$$

Ответ: $S=\frac{1}{2}\cdot\left(23\sqrt{19}+\sqrt{374}+7\sqrt{29}+\sqrt{6410}\right)$

Задание 10

Аналитическая геометрия на плоскости: уравнение прямой линии на плоскости

Дано: $\Delta \boldsymbol{ABC},\ \boldsymbol{A}(\mathbf{2};\mathbf{3}), \boldsymbol{B}(-\mathbf{3};-\mathbf{5}), \boldsymbol{C}(-\mathbf{2};-\mathbf{1})$

1) Написать уравнения сторон треугольников

Решение

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$AB:\ \frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-3}{-5-3}$$

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y-3}{-8}$$

Приведем к общему виду: $-8(x-2)=-5(y-3)$,

$$-8x+16+5y-15=0$$

Ответ: $AB:\ -8x+5y+1=0$

$$BC:\ \frac{x+3}{-2+3}=\frac{y+5}{-1+5}$$

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+5}{4}$$

Приведем к общему виду: $4(x+3)=y+5$,

$$4x+12-y-5=0$$

Ответ: BC: $4x-y+7=0$

$$AC:\ \frac{x-2}{-2-2}=\frac{y-3}{-1-3}$$

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{-4}$$

Приведем к общему виду: $-4(x-2)=-4(y-3)$,

$$-4x+8+4y-12=0$$

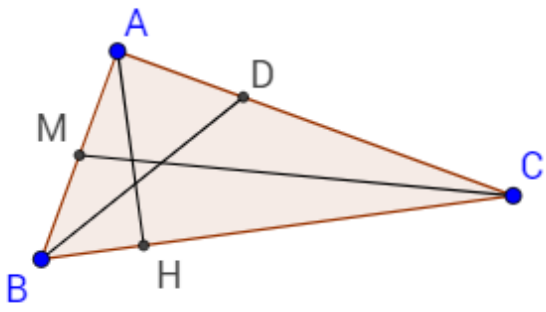
$$-4x+4y-4=0$$

Ответ: $AC:\ -x+y-1=0$

2) Написать: а) уравнение высоты AH,

б) уравнение биссектрисы BD,

в) уравнение медианы CM.



Решение

а) AH – высота, $AH \perp BC$ (1)

$BC: 4x - y + 7 = 0$

$\vec{n}$ – вектор нормали прямой BC, $\vec{n}(4; -1)$

$\vec{n} \perp BC$ (2)

Из (1) и (2) следует, что $\vec{n} || AH$

Тогда $\vec{n}$ – направляющий вектор прямой AH

Воспользуемся каноническим уравнением прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

$A(2; 3), \vec{n}(-4; 4)$

AH: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{-1}$

Приведем к общему виду: $-(x-2) = 4(y-3)$,

$$-x + 2 = 4y - 12$$

Ответ: $AH: -x - 4y + 14 = 0$

б) BD – биссектриса.

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам (Свойство биссектрисы в треугольнике): $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$

$|AB| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$

$$|BC| = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, поэтому $\overrightarrow{AD} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}} \cdot \overrightarrow{DC}$

Найдем координаты точки D, делящей отрезок в данном отношении по формулам: $x_D = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_D = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

$$x_D = \frac{2 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}} \cdot (-2)}{1 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}}} = \frac{2\sqrt{17} - 2\sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}}$$

$$y_D = \frac{3 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}} \cdot (-1)}{1 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}}} = \frac{3\sqrt{17} - \sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}}$$

Таким образом $D\left(\frac{2\sqrt{17}-2\sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}}; \frac{3\sqrt{17}-\sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}}\right)$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$BD: \frac{x+3}{\frac{2\sqrt{17}-2\sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}} + 3} = \frac{y+5}{\frac{3\sqrt{17}-\sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}} + 5}$$

$$\frac{x+3}{\frac{2\sqrt{17}-2\sqrt{89}+3\sqrt{17}+3\sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}}} = \frac{y+5}{\frac{3\sqrt{17}-\sqrt{89}+5\sqrt{17}+5\sqrt{89}}{\sqrt{17}+\sqrt{89}}}$$

$$\frac{(\sqrt{17}+\sqrt{89})(x+3)}{5\sqrt{17}+\sqrt{89}} = \frac{(\sqrt{17}+\sqrt{89})(y+5)}{8\sqrt{17}+4\sqrt{89}}$$

$$\frac{x+3}{5\sqrt{17}+\sqrt{89}} = \frac{y+5}{8\sqrt{17}+4\sqrt{89}}$$

Приведем к общему виду: $(8\sqrt{17}+4\sqrt{89})(x+3) = (5\sqrt{17}+\sqrt{89})(y+5)$

$$(8\sqrt{17}+4\sqrt{89})x + 24\sqrt{17} + 12\sqrt{89} - (5\sqrt{17}+\sqrt{89})y - 25\sqrt{17} - 5\sqrt{89} = 0$$

Ответ: BD: $(8\sqrt{17}+4\sqrt{89})x - (5\sqrt{17}+\sqrt{89})y + 7\sqrt{89} - \sqrt{17} = 0$

в) CM – медиана, M – середина AB.

$M: x_M = \frac{2-3}{2} = \frac{-1}{2}, y_M = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$M\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$CM: \frac{x+2}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{y+1}{-1+1}$

$\frac{x+2}{\frac{3}{2}} = \frac{y+1}{0}$

Приведем к общему виду: $\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

Ответ: $CM: y + 1 = 0$

3) BN – высота, AK – биссектриса.

Найти: $\angle\alpha$ – угол между BN и AK.

Решение

1. BN – высота, $BN \perp AC$ (1)

$AC: -x + y - 1 = 0$

$\vec{a}$ – вектор нормали прямой AC, $\vec{a}(-1; 1)$

$\vec{a} \perp BC$ (2)

Из (1) и (2) следует, что $\vec{a} || BN$

Тогда $\vec{a}(-1; 1)$ – направляющий вектор прямой BN

2. AK – биссектриса.

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам (Свойство биссектрисы в треугольнике): $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$

$$|AK| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$$

$$|AC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{32}}$, $\overrightarrow{BK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KC}$, поэтому $\overrightarrow{BK} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{32}} \cdot \overrightarrow{KC}$

Найдем координаты точки K, делящей отрезок в данном отношении: $x_D = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y_D = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

$$x_K = \frac{-3 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{32}} \cdot (-2)}{1 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{32}}} = \frac{-3\sqrt{32} - 2\sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}}$$

$$y_K = \frac{-5 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}} \cdot (-1)}{1 + \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{17}}} = \frac{-5\sqrt{32} - \sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}}$$

Таким образом $K\left(\frac{-3\sqrt{32} - 2\sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}}; \frac{-5\sqrt{32} - \sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}}\right)$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$AN\colon \frac{x-2}{\frac{-3\sqrt{32} - 2\sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}} - 2} = \frac{y-3}{\frac{-5\sqrt{32} - \sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}} - 3}$$

$$\frac{x-2}{\frac{-3\sqrt{32} - 2\sqrt{89} - 2\sqrt{32} - 2\sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}}} = \frac{y-3}{\frac{-5\sqrt{32} - \sqrt{89} - 3\sqrt{32} - 3\sqrt{89}}{\sqrt{32} + \sqrt{89}}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{32} + \sqrt{89}\right)(x-2)}{-5\sqrt{32} - 4\sqrt{89}} = \frac{\left(\sqrt{32} + \sqrt{89}\right)(y-3)}{-8\sqrt{32} - 4\sqrt{89}}$$

$$\frac{x-2}{-5\sqrt{32} - 4\sqrt{89}} = \frac{y-3}{-8\sqrt{32} - 4\sqrt{89}}$$

Приведем к общему виду:

$$\left(-8\sqrt{32} - 4\sqrt{89}\right)(x-2) = \left(-5\sqrt{32} - 4\sqrt{89}\right)(y-3)$$

$$\left(-8\sqrt{32}-4\sqrt{89}\right)x+16\sqrt{32}+8\sqrt{89}+\left(5\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right)y-15\sqrt{32}-12\sqrt{89} = 0$$

$AN\colon -\left(8\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right)x+\left(5\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right)y+\sqrt{32}-4\sqrt{89}=0$

$\vec{b}\left(-\left(5\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right);\ -\left(8\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right)\right)$ – направляющий вектор прямой AN

3. Найдем угол между прямыми с помощью угла между их направляющими векторами $\vec{a}(-1;1)$ и $\vec{b}\left(-\left(5\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right);\ -\left(8\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right)\right)$:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\left|-1\cdot\left(-5\sqrt{32}-4\sqrt{89}\right)+\left(-8\sqrt{32}-4\sqrt{89}\right)\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\left(5\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right)\right)^2+\left(-\left(8\sqrt{32}+4\sqrt{89}\right)\right)^2}}=$$

$$\frac{\left|5\sqrt{32}+4\sqrt{89}-8\sqrt{32}-4\sqrt{89}\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{25\cdot32+40\sqrt{32\cdot89}+16\cdot89+64\cdot32+64\sqrt{32\cdot89}+16\cdot89}}=$$

$$\frac{\left|-3\sqrt{32}\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{800+1424+2048+1424+104\cdot\sqrt{32\cdot89}}}=\frac{3\cdot4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5696+104\cdot\sqrt{32\cdot89}}}=\frac{12}{2\sqrt{1424+26\cdot4\sqrt{2\cdot89}}}=$$

$$\frac{6}{2\sqrt{356+26\sqrt{178}}}=\frac{3}{\sqrt{356+26\sqrt{178}}}$$

Ответ: $\alpha=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{356+26\sqrt{178}}}$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Задание 10	Лист 38