Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Расчетно-графическая работа

По дисциплине математика

ЕН.01.10.02.03.007

Вариант №7

Студент группы 2ПКС-115 Деменчук Г.М.

Работа принята с оценкой: . . . .

Преподаватель: . . . . /Белоглазов А.И.

Москва, 2017

Задание 1

Исходные данные:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&5&7\\-1&2&-3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}2&4&6\\8&0&4\\-2&2&8\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}2&5&6\\4&-1&5\\2&-6&-1\end{pmatrix};\ Z=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix};$$

$$K=\begin{pmatrix}1&3&7&2&5\\-1&0&4&8&3\\3&6&10&-4&7\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&5&-1&4\\-1&3&4&6\end{pmatrix};\ N=\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\4&3&1&7&5\\0&3&-5&-3&3\\2&3&-2&2&4\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix};\ L=\begin{pmatrix}0&-1&3&0&2\\2&-4&1&5&3\\-4&5&7&-10&0\\-2&1&8&-5&3\end{pmatrix};\ R=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&0&3\\2&3&1&5\\1&1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}3&4&-5&1\\8&7&-2&-1\\2&-1&8&-3\end{pmatrix};\ T=\begin{pmatrix}2&4&2\\17&15&8\\4&8&4\\13&7&-3\end{pmatrix};\ S=\begin{pmatrix}7&6&-5\\1&-2&1\\-8&1&1\\2&8&3\end{pmatrix}$$

Задача 1

Условие задания: вычислить выражение $Z^2D'+E$

$$Z^2D'+E=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2&5&6\\4&-1&5\\2&-6&-1\end{pmatrix}'+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&2\\5&-1&-6\\6&5&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1-3\cdot4&1\cdot2+2\cdot0-3\cdot5&1\cdot(-3)+2\cdot2-3\cdot3\\1\cdot1+0\cdot1+2\cdot4&1\cdot2+0\cdot0+2\cdot5&1\cdot(-3)+0\cdot2+2\cdot3\\4\cdot1+5\cdot1+3\cdot4&4\cdot2+5\cdot0+3\cdot5&4\cdot(-3)+5\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&2\\5&-1&-6\\6&5&-1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-13&-8\\9&12&3\\21&23&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&2\\5&-1&-6\\6&5&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-9\cdot2-13\cdot5-8\cdot6&-9\cdot4-13\cdot(-1)-8\cdot5&-9\cdot2-13\cdot(-6)-8\cdot(-1)\\9\cdot2+12\cdot5+3\cdot6&9\cdot4+12\cdot(-1)+3\cdot5&9\cdot2+12\cdot(-6)+3\cdot(-1)\\21\cdot2+23\cdot5+7\cdot6&21\cdot4+23\cdot(-1)+7\cdot5&21\cdot2+23\cdot(-6)+7\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-131 & -63 & 68\\ 96 & 39 & -57\\ 199 & 96 & -103\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-130 & -63 & 68\\ 96 & 40 & -57\\ 199 & 96 & -102\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-130 & -63 & 68\\ 96 & 40 & -57\\ 199 & 96 & -102\end{pmatrix}$

Задача 2

Вычислить матричный многочлен $F + 2MS - C$

$F + 2MS - C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 2\left[\begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-8) + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 8 & A_{13} \\ 0 \cdot 7 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot (-8) + 4 \cdot 2 & 0 \cdot 6 + 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 8 & A_{23} \\ -1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-8) + 6 \cdot 2 & -1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 8 & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 8 & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ A_{21} & 0 \cdot 6 + 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 8 & 0 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ A_{31} & -1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 8 & -1 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$+ \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 & 35 & 10 \\ 21 & 21 & 16 \\ -24 & 40 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 70 & 20 \\ 42 & 42 & 32 \\ -48 & 80 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 & 35 & 10 \\ 21 & 21 & 16 \\ -24 & 40 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 70 & 20 \\ 42 & 42 & 32 \\ -48 & 80 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}$

Задача 3

Найти минор $M_{24}(R)$, алгебраическое дополнение элемента $A_{32}(B)$ и ранг заданной матрицы $r(N)\cdot r(P)$

$$R=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&0&3\\2&3&1&5\\1&1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$M_{24}(R)=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&1\\1&1&-2\end{vmatrix}$$
$$=2\cdot3\cdot(-2)+1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1-1\cdot3\cdot1-2\cdot1\cdot(-2)-2\cdot1\cdot1$$
$$=-12+1+2-3+4-2=-10$$

$$B=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}$$

$$A_{32}(B)=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4&-5\\-4&-1\end{vmatrix}=(-1)\big(4\cdot(-1)-(-5)\cdot(-4)\big)=-(-4-20)=24$$

$$N=\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\4&3&1&7&5\\0&3&-5&-3&3\\2&3&-2&2&4\end{pmatrix};\ \ P=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\4&3&1&7&5\\0&3&-5&-3&3\\2&3&-2&2&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\\\-I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\0&3&-5&-3&3\\0&3&-5&-3&3\\0&3&-5&-3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&3&5&1\\0&3&-5&-3&3\end{pmatrix}$$

Так как $\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=2\cdot3=6\neq0\Rightarrow r(N)=2$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&3&1&6\\3&1&2&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\-3I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&6\\0&-1&-5&-6\\0&-5&-7&-12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-5II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&6\\0&-1&-5&-6\\0&0&18&18\end{pmatrix}$$

Так как $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&0&18\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot18=-18\neq0\Rightarrow r(P)=3$

$r(N)\cdot r(P)=2\cdot3=6$

Ответ: $M_{24}=-10;\ A_{32}=24;\ r(N)=6$

Задание 2

Исходные данные:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};\ \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 14 & 23 & 20 & 17 \\ 12 & 20 & 20 & 16 \\ 12 & 27 & 24 & 18 \\ 10 & 32 & 18 & 19 \end{vmatrix};\ \det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix};\ \det F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix};$$

$$\det H = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix};\ \det K = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ \det L = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & 19 & 6 & 9 \\ 6 & 17 & 11 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ \det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};\ \det P = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\det R = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix};\ \det S = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\det U = \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$$

Вопрос №1

Вычислить определитель N, раскрывая его по элементам строки 2 и столбца 3. Сравнить результаты.

$$\det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}$$
$$\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (3 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4)$$
$$+ \big(4 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)\big)$$
$$- (4 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 4)$$
$$+ (4 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1)$$
$$= (12 + 3 - 4 - 2 + 9 - 8) + (16 + 3 - 2 - 1 - 8 + 12)$$
$$- (16 + 2 - 3 - 1 + 8 - 12) + (12 + 3 + 4 - 2 - 9 - 8)$$
$$= 10 + 20 - 10 + 0 = 20$$

$$\det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1$$
$$\cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-1)$$
$$\cdot (-1) \cdot 2)$$
$$- \big(4 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)\big)$$
$$+ (4 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1)$$
$$- 3(4 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 4$$
$$\cdot 1 \cdot 1)$$
$$= 2(-4 - 1 + 2 - 1 - 4 - 2) - (16 - 3 + 2 - 1 - 12 + 8)$$
$$+ (16 - 2 + 3 - 1 + 12 - 8) - 3(-4 + 3 - 1 - 1 - 3 - 4)$$
$$= 2 \cdot (-10) - 10 + 20 - 3 \cdot (-10) = -20 - 10 + 20 + 30 = 20$$

Ответ: $\det N = 20$

Вопрос №3

Решить уравнение, содержащее определитель E с неизвестным $2-x^2$, стоящим на месте элемента e_{13}, при этом $E=2x-1$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 2x-1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \\ 1 & 27 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}$$
$$\cdot (2-x^2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$
$$= (2\cdot 9\cdot 64 + 3\cdot 8\cdot 16 + 4\cdot 4\cdot 27 - 4\cdot 9\cdot 8 - 4\cdot 3\cdot 64 - 2\cdot 27\cdot 16)$$
$$- (1\cdot 9\cdot 64 + 1\cdot 3\cdot 16 + 1\cdot 27\cdot 4 - 4\cdot 9\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 64 - 1\cdot 27\cdot 16)$$
$$+ (2-x^2)(1\cdot 4\cdot 64 + 1\cdot 2\cdot 16 + 1\cdot 4\cdot 8 - 4\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 64 - 1\cdot 16$$
$$\cdot 8) - (1\cdot 4\cdot 27 + 1\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 3\cdot 8 - 3\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 27 - 1\cdot 9\cdot 8)$$
$$= (1152 + 384 + 432 - 288 - 768 - 864)$$
$$- (576 + 48 + 108 - 36 - 192 - 432)$$
$$+ (2-x^2)(256 + 32 + 32 - 16 - 128 - 128)$$
$$- (108 + 18 + 24 - 12 - 54 - 72) = 48 - 72 + (2-x^2)\cdot 48 - 12$$
$$= -36 + 96 - 48x^2 = 60 - 48x^2$$

$$60 - 48x^2 = 2x - 1$$

$$48x^2 + 2x - 61 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 61\cdot 48}}{2\cdot 48} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 11712}}{96} = \frac{-2 \pm \sqrt{11716}}{96} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2929}}{96}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2929}}{48}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{2929}}{48}, \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{2929}}{48}$$

Ответ: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{2929}}{48}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{2929}}{48}$

Задание 3

Исходные данные:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1

Условие задания:

Для матрицы X найти матрицу X^{-1} и убедиться, что $XX^{-1} = E$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$|H| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2III \\ -3III \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 14 \\ -1 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 14 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 13 - 1 \cdot 14 = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) = -15 + 2 = -13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\big(5 \cdot (-5) - 2 \cdot (-2)\big) = -(-25 + 4) = 21$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-5) - 4 \cdot 1) = -(-10 - 4) = 14$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 = -15 - 8 = -23$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -(3 - 4) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = -4 - 12 = -16$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5) = -(-6 - 20) = 26$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} -13 & 21 & -1 \\ 14 & -23 & 1 \\ -16 & 26 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -13 & 14 & -16 \\ 21 & -23 & 26 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{|H|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -13 & 14 & -16 \\ 21 & -23 & 26 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$HH^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 13 + 2\cdot(-21) + 4\cdot 1 & 3\cdot(-14) + 2\cdot 23 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 16 + 2\cdot(-26) + 4\cdot 1 \\ 5\cdot 13 + 3\cdot(-21) - 2\cdot 1 & 5\cdot(-14) + 3\cdot 23 - 2\cdot(-1) & 5\cdot 16 + 3\cdot(-26) - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 13 + 1\cdot(-21) - 5\cdot 1 & 2\cdot(-14) + 1\cdot 23 - 5\cdot(-1) & 2\cdot 16 + 1\cdot(-26) - 5\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4II \\ \\ -2II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -15 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -15 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(8\cdot 2 - 1\cdot 15) = -(16 - 15) = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 4\cdot 5 = 18 - 20 = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(1\cdot 6 - 2\cdot 4) = -(6 - 8) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(4\cdot 6 - 1\cdot 5) = -(24 - 5) = -19$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 6 - 1\cdot 2 = 24 - 2 = 22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(4\cdot 5 - 4\cdot 2) = -(20 - 8) = -12$$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 16 - 3 = 13$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 4 - 1 \cdot 1) = -(16 - 1) = -15$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 = 8$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -19 & 22 & -12 \\ 13 & -15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -2 & -19 & 13 \\ 2 & 22 & -15 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -19 & 13 \\ 2 & 22 & -15 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 19 + 4 \cdot (-22) + 1 \cdot 12 & 4 \cdot (-13) + 4 \cdot 15 + 1 \cdot (-8) \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 19 + 3 \cdot (-22) + 4 \cdot 12 & 1 \cdot (-13) + 3 \cdot 15 + 4 \cdot (-8) \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 & 2 \cdot 19 + 5 \cdot (-22) + 6 \cdot 12 & 2 \cdot (-13) + 5 \cdot 15 + 6 \cdot (-8) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ответ: $H^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$

Задача 2

Условие задания:

Найти матрицу X из матричного уравнения, выполнить проверку

$H_1 X K_1 = H$

Домножим слева и справа на обратные матрицы

$H_1^{-1} H_1 X K_1 K_1^{-1} = H_1^{-1} H K_1^{-1}$

$EXE = H_1^{-1} H K_1^{-1}$

$X = H_1^{-1} H K_1^{-1}$

Найдем обратные матрицы H_1^{-1} и K_1^{-1}

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{-I} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) =$$
$$-2 + 1 = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\big(0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)\big) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\big(1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)\big) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = 2$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_1^{-1} = \frac{1}{|H_1|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|K_1| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - 5 \cdot (-3) =$$

$$-14 + 15 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 2 + 2 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 6 \cdot 1) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 6 \cdot 2 = -6 - 12 = -18$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -\big(5 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)\big) = -(5 + 2) = -7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 6 = 1 - 6 = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-2) - 5 \cdot 6) = -(-2 - 30) = 32$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -18 \\ -7 & -5 & 32 \\ 3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$

$$K_1^{-1} = \frac{1}{|K_1|} C^{*T} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$

$$X = H_1^{-1} H K_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -5 & -4 & -21 \\ 6 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 346 & -617 & 250 \\ -90 & 162 & -65 \\ -245 & 438 & -177 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 346 & -617 & 250 \\ -90 & 162 & -65 \\ -245 & 438 & -177 \end{pmatrix}$

Задание 4

Исходные данные

$$\begin{cases} 7x_1+9x_2-3x_3+x_4=2 \\ 5x_1-x_2-2x_3+4x_4=-10 \\ -x_1+3x_2-4x_3+2x_4=6 \\ 2x_1-2x_2+3x_3+5x_4=0 \end{cases}$$

Требуется:
Решить систему линейных уравнений однозначной разрешимости методом Крамера, Гаусса и матричным. Выполнить проверку

1) Метод Крамера

   По формулам Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\qquad x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}$$

   Найдем необходимые определители

$$\Delta=\begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix}=\begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 & 15 \\ 0 & 14 & -22 & 14 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 30 & -31 & 15 \\ 14 & -22 & 14 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix}=-\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ 14 & -22 & 14 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -14I \\ -9I \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -210 & 104 & 0 \\ -140 & 76 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -210 & 104 \\ -140 & 76 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 210 & 104 \\ 140 & 76 \end{vmatrix}$$

$$=210\cdot 76-104\cdot 140=15960-14560=1400$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 & 1 \\ -10 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +5I \\ -3I \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 44 & -17 & 9 \\ 0 & -24 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 44 & -17 & 9 \\ -24 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} +9II \\ \\ +5II \end{matrix}=2\begin{vmatrix} -172 & 28 & 0 \\ -24 & 5 & -1 \\ -122 & 28 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} -172 & 28 \\ -122 & 28 \end{vmatrix}=-56\begin{vmatrix} 172 & 1 \\ 122 & 1 \end{vmatrix}=-56(172-122)=-56\cdot 50$$

$$=-2800$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -10 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 44 & -31 & 15 \\ 0 & 20 & -22 & 14 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & -5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 44 & -31 & 15 \\ 20 & -22 & 14 \\ 12 & -5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix} == -\begin{vmatrix} 24 & -9 & 1 \\ 20 & -22 & 14 \\ 12 & -5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -14I \\ -9I \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -316 & 104 & 0 \\ -204 & 76 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -316 & 104 \\ -204 & 76 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 316 & 104 \\ 204 & 76 \end{vmatrix}$$

$$= 316 \cdot 76 - 104 \cdot 204 = 24016 - 21216 = 2800$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -10 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & 44 & 15 \\ 0 & 14 & 20 & 14 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 30 & 44 & 15 \\ 14 & 20 & 14 \\ 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 16 & 24 & 1 \\ 14 & 20 & 14 \\ 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -14I \\ -9I \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -210 & -316 & 0 \\ -140 & -204 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -210 & -316 \\ -140 & -204 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 210 & 316 \\ 140 & 204 \end{vmatrix}$$

$$= -(210 \cdot 204 - 140 \cdot 316) = -(42840 - 44240) = 1400$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & -10 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 & 44 \\ 0 & 14 & -22 & 20 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 30 & -31 & 44 \\ 14 & -22 & 20 \\ 4 & -5 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3III \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 30 & -31 & 44 \\ 2 & -7 & -16 \\ 4 & -5 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -15II \\ \\ -2II \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 74 & 284 \\ 2 & -7 & -16 \\ 0 & 9 & 44 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 74 & 284 \\ 9 & 44 \end{vmatrix} = 2(74 \cdot 44 - 284 \cdot 9)$$

$$= 2(3256 - 2556) = 2 \cdot 700 = 1400$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2800}{1400} = -2, \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2800}{1400} = 2, \;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1400}{1400} = 1, \;\; x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{1400}{1400} = 1$$

2) Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 9 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 4 & -10 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -2 & 4 & -10 \\ 7 & 9 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +5I \\ +7I \\ +2I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 30 & -31 & 15 & 44 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 30 & -31 & 15 & 44 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2III \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -7II \\ -2II \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 0 & -113 & 105 & -8 \\ 0 & 0 & -31 & 35 & 4 \end{array}\right) -4IV \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -35 & -24 \\ 0 & 0 & -31 & 35 & 4 \end{array}\right) +3III \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -35 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & -70 & -68 \end{array}\right) -5IV \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 315 & 316 \\ 0 & 0 & 2 & -70 & -68 \end{array}\right) -2III \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 315 & 316 \\ 0 & 0 & 0 & 700 & 700 \end{array}\right)$$

$$x_4 = \frac{700}{700} = 1$$

$$x_3 = 316 - 315x_4 = 316 - 315 = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + 13x_4 - 13x_3}{2} = \frac{4 + 13 - 13}{2} = 2$$

$$x_1 = -6 + 2x_4 - 4x_3 + 3x_1 = -6 + 2 - 4 + 6 = -2$$

3) Матричный метод

Запишем систему в виде $AX = B$

Здесь: $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Домножим слева на матрицу обратную к A

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$|A| = 1400$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ +3I \\ -2I \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -10 & 14 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -(-10 \cdot (-3) - 14 \cdot 7) = -(30 - 98) = 68$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} +5II \\ \\ +2II \end{array} = -\begin{vmatrix} 0 & -22 & 14 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -22 & 14 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -\big(-22 \cdot 9 - 14 \cdot (-5)\big) = -(-198 + 70) = 128$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} +5II \\ \\ +2II \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 14 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 14 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 14 \cdot 9 - 14 \cdot 4 = 126 - 56 = 70$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} +5II \\ \\ +2II \end{array} = -\begin{vmatrix} 0 & 14 & -22 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 14 & -22 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -\big(14 \cdot (-5) - 4 \cdot (-22)\big) = -(-70 + 88) = -18$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}9&-3&1\\3&-4&2\\-2&3&5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\-5I\end{matrix}=-\begin{vmatrix}9&-3&1\\-15&2&0\\-47&18&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-15&2\\-47&18\end{vmatrix}$$

$$=-\big(-15\cdot18-2\cdot(-47)\big)=-(-270+94)=176$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}7&-3&1\\-1&-4&2\\2&3&5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\-5I\end{matrix}=\begin{vmatrix}7&-3&1\\-15&2&0\\-33&18&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-15&2\\-33&18\end{vmatrix}$$

$$=-15\cdot18-2\cdot(-33)=-270+66=-204$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}7&9&1\\-1&3&2\\2&-2&5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\-5I\end{matrix}=-\begin{vmatrix}7&9&1\\-15&-15&0\\-33&-47&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-15&-15\\-33&-47\end{vmatrix}$$

$$=-15\begin{vmatrix}1&1\\33&47\end{vmatrix}=-15(47-33)=-15\cdot14=-210$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}7&9&-3\\-1&3&-4\\2&-2&3\end{vmatrix}\begin{matrix}+7II\\\\+2II\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&30&-31\\-1&3&-4\\0&4&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}30&-31\\4&-5\end{vmatrix}$$

$$=30\cdot(-5)-4\cdot(-31)=-150+124=-26$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}9&-3&1\\-1&-2&4\\-2&3&5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-4I\\-5I\end{matrix}=\begin{vmatrix}9&-3&1\\-37&10&0\\-47&18&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-37&10\\-47&18\end{vmatrix}$$

$$=-37\cdot18-10\cdot(-47)=-666+470=-196$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&-3&1\\5&-2&4\\2&3&5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-4I\\-5I\end{matrix}=-\begin{vmatrix}7&-3&1\\-23&10&0\\-33&18&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-23&10\\-33&18\end{vmatrix}$$

$$=-\big(-23\cdot18-10\cdot(-33)\big)=-(-414+330)=84$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}7&9&1\\5&-1&4\\2&-2&5\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-4I\\-5I\end{matrix}=\begin{vmatrix}7&9&1\\-23&-37&0\\-33&-47&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-23&-37\\-33&-47\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}23&37\\33&47\end{vmatrix}=23\cdot47-37\cdot33=1081-1221=-140$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}7&9&-3\\5&-1&-2\\2&-2&3\end{vmatrix}\begin{matrix}+9II\\\\-2II\end{matrix}=-\begin{vmatrix}52&0&-21\\5&-1&-2\\-8&0&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}52&-21\\-8&7\end{vmatrix}$$

$$=52\cdot7-(-21)\cdot(-8)=364-168=196$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}9&-3&1\\-1&-2&4\\3&-4&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-4I\\-2I\end{matrix}=-\begin{vmatrix}9&-3&1\\-37&10&0\\-15&2&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-37&10\\-15&2\end{vmatrix}$$

$$=-\big(-37\cdot2-10\cdot(-15)\big)=-(-74+150)=-76$$

$$A_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}7&-3&1\\5&-2&4\\-1&-4&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-4I\\-2I\end{matrix}=\begin{vmatrix}7&-3&1\\-23&10&0\\-15&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-23&10\\-15&2\end{vmatrix}$$

$$=-23\cdot2-10\cdot(-15)=-46+150=104$$

$$A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}7&9&1\\5&-1&4\\-1&3&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-4I\\-2I\end{matrix}=-\begin{vmatrix}7&9&1\\-23&-37&0\\-15&-15&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-23&-37\\-15&-15\end{vmatrix}=$$

$$-15\begin{vmatrix}23&37\\1&1\end{vmatrix}=-15(23-37)=-15\cdot(-14)=210$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}7&9&-3\\5&-1&-2\\-1&3&-4\end{vmatrix}\begin{matrix}+7III\\+5III\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}0&30&-31\\0&14&-22\\-1&3&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}30&-31\\14&-22\end{vmatrix}$$
$$=-\big(30\cdot(-22)-14\cdot(-31)\big)=-(-660+434)=226$$

Присоединённая матрица

$$C^*=\begin{pmatrix}68&128&70&-18\\176&-204&-210&-26\\-196&84&-140&196\\-76&104&210&226\end{pmatrix}$$

$$C^{*T}=\begin{pmatrix}68&176&-196&-76\\128&-204&84&104\\70&-210&-140&210\\-18&-26&196&226\end{pmatrix}$$

Получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}C^{*T}=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}68&176&-196&-76\\128&-204&84&104\\70&-210&-140&210\\-18&-26&196&226\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}68&176&-196&-76\\128&-204&84&104\\70&-210&-140&210\\-18&-26&196&226\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-10\\6\\0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}68\cdot2+176\cdot(-10)-196\cdot6-76\cdot0\\128\cdot2-204\cdot(-10)+84\cdot6+104\cdot0\\70\cdot2-210\cdot(-10)-140\cdot6+210\cdot0\\-18\cdot2-26\cdot(-10)+196\cdot6+226\cdot0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}136-1760-1176\\256+2040+504\\140+2100-840\\-36+260+1176\end{pmatrix}=\frac{1}{1400}\begin{pmatrix}-2800\\2800\\1400\\1400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

4) Сделаем проверку

$7\cdot(-2)+9\cdot2-3\cdot1+1\cdot1=-14+18-3+1=2$ – верно

$5\cdot(-2)-1\cdot2-2\cdot1+4\cdot1=-10-2-2+4=-10$ – верно

$-1\cdot(-2)+3\cdot2-4\cdot1+2\cdot1=2+6-4+2=6$ – верно

$2\cdot(-2)-2\cdot2+3\cdot1+5\cdot1=-4-4+3+5=0$ – верно

Ответ: $x_1=-2;\ x_2=2;\ x_3=1;\ x_4=1$

Задание 5

Условие:
Дана система линейных однородных уравнений общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0 \end{cases}$$

Требуется:
Найти общее решение системы и одно произвольное частное решение, для которого выполнить проверку

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3I \\ -3I \\ -2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -11II \\ -7II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$x_5 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = 0$

$2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$

$x_3 = 2x_1 + 3x_4$

$x_1, x_4 -$ свободные

Общее решение системы

$\{(C_1, 0, 2C_1 + 3C_2, C_2, 0), C_1, C_2 \in R\}$

Пусть $C_1 = 1, C_2 = 1$

Получим частное решение

$(1, 0, 5, 1, 0)$

Сделаем проверку

$6 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 6 - 15 + 9 = 0 -$ верно

$6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 6 - 15 + 9 = 0 -$ верно

$2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2 - 5 + 3 = 0 -$ верно

$4 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 4 - 10 + 6 = 0 -$ верно

Ответ: Общее решение: $\{(C_1, 0, 2C_1 + 3C_2, C_2, 0), C_1, C_2 \in R\}$

Частное решение: $(1, 0, 5, 1, 0)$

Задание 6

Условие:
Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5. \end{cases}$$

Требуется:
Найти общее решение системы, одно частное решение системы

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 11 & 3 & 3 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \cdot 6 \\ III - I \cdot 3 \\ IV + I \cdot 11 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & -8 & -8 & -10 & -12 & -16 \\ 0 & 36 & 36 & 45 & 54 & 72 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV - III \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II \cdot (-5) + III \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Так как $r(A) = r(A|B) = 3 < 5 = n$ (ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и меньше количества неизвестных), то система совместна и неопределенна.

Количество главных переменных равно $r(A) = 3$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 5 - 3 = 2$.

Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 3-го порядка полученной матрицы A: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Его столбцы (1-й, 2-й и 4-й столбцы матрицы A) соответствуют переменным x_1, x_2и x_4 – главные переменные, x_3 и x_5 – свободные переменные.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_4 = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 7, \\ 4x_2 + 4x_3 + 6x_5 = 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Теперь запишем эту систему в другом виде (слева останутся только главные переменные):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3x_3 - 5x_5 + 7, \\ 4x_2 = -4x_3 - 6x_5 + 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 и подставим это выражение в первое уравнение. Получим:

$$\begin{cases} -x_1 + 3 \cdot (-x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2) = -3x_3 - 5x_5 + 7, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 = 3x_3 + \frac{9}{2}x_5 - 6 - 3x_3 - 5x_5 + 7, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_5 - 1, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом <u>общее решение</u> системы уравнений:

$\left(\frac{1}{2}x_5 - 1;\ -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2; x_3; 0; x_5\right)$

<u>Частное решение</u> получим, например, при $x_3 = 1, x_5 = 0$:

$$(-1; 1; 1; 0; 0)$$

Проверка частного решения:

$$\begin{cases} 1+3+3+0+0=7, \\ -6+2+2+0=-2, \\ 3+1+1+0+0=5, \\ -11+3+3+0+0=-5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7=7, \\ -2=-2, \\ 5=5, \\ -5=-5. \end{cases}$$

Ответ: Общее решение: $\left(\frac{1}{2}x_5-1;\ -x_3-\frac{3}{2}x_5+2; x_3; 0; x_5\right)$

Частное решение: $(-1; 1; 1; 0; 0)$.

Задание 7

Дано:

$A(-6;-4), B(3,-7), C(1;2), D(-2,6), E(-6;2)$

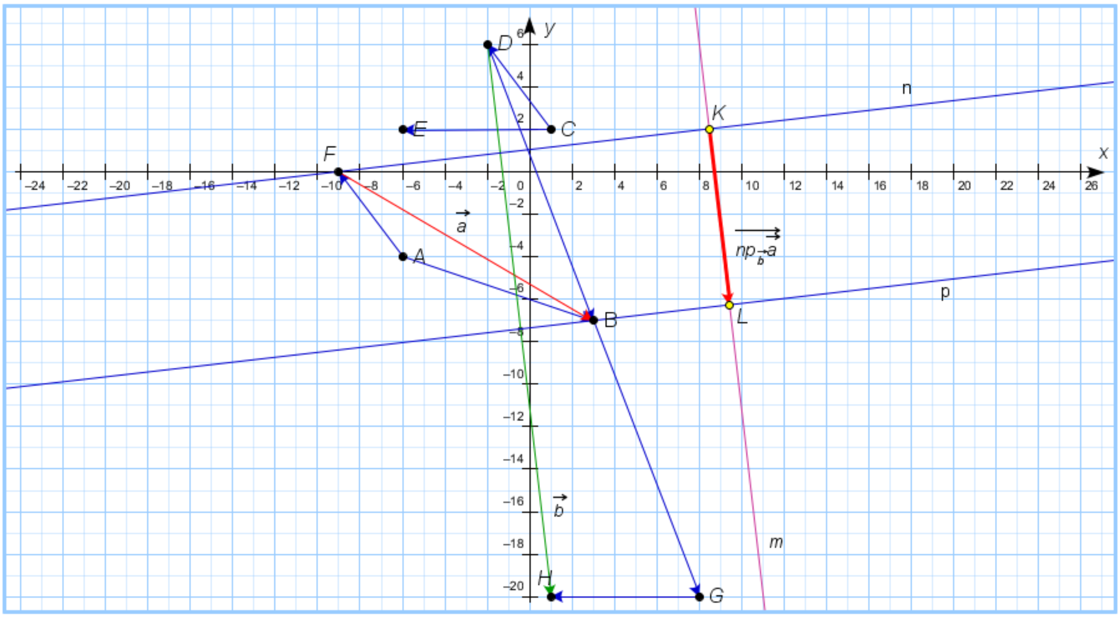
1) Найти проекцию $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ на направление вектора $\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{DB}$

В координатной плоскости построить точки $A(-6;-4), B(3,-7), C(1;2)$, $D(-2,6), E(-6;2)$.

От точки A отложить $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}$, тогда $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$. Обозначим $\overrightarrow{FB}=\vec{a}$. От точки B отложить $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{DB}$, тогда $\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DB}$. От точки G отложить $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{CE}$, тогда $\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CE}$. Обозначим $\overrightarrow{DH}=\vec{b}$.

Построить прямую $m \parallel \vec{b}$ (положение прямой m в системе координат произвольное), направление прямой m совпадает с направлением вектора $\vec{b}$.

Через точку F провести прямую $n \perp m$, n пересекает m в точке K. Через точку B провести прямую $p \perp m$, p пересекает m в точке L.



Проекция вектора $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ на направление вектора $\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{DB}$ есть вектор $\overrightarrow{KL}$. Числовая проекция вектора $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ на направление вектора $\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{DB}$: $np_{\vec{b}}\vec{a} \approx 8{,}33$.

Выполним аналитическую проверку:

$\overrightarrow{AB}(9,-3), \overrightarrow{CD}(-3{,}4), \vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}, \vec{a}(12,-7)$.

$\overrightarrow{CE}(-7{,}0), \overrightarrow{DB}(5,-13), 2\overrightarrow{DB}(10,-26), \vec{b} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}, \vec{b}(3,-26).$

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12\cdot 3 - 7\cdot(-26)}{\sqrt{3^2+(-26)^2}} = \frac{36+182}{\sqrt{9+676}} = \frac{218}{\sqrt{685}} \approx \frac{218}{26{,}173} \approx 8{,}329$$

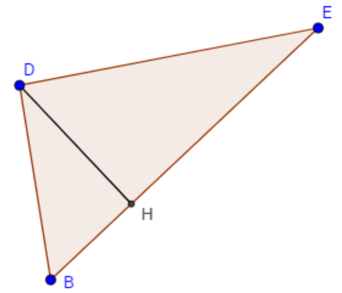
2) Найти угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD}(4{,}10), \overrightarrow{BE}(-9{,}9)$. Пусть α – угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BE}|} = \frac{4\cdot(-9)+10\cdot 9}{\sqrt{4^2+10^2}\cdot\sqrt{(-9)^2+9^2}} = \frac{-36+90}{\sqrt{116}\cdot\sqrt{162}} = \frac{54}{2\sqrt{29}\cdot 9\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}} = \arccos\frac{3\sqrt{58}}{58}$$

3) Найти высоту в треугольнике BDE, опущенную из вершины D



Пусть DH – искомая высота и $H(x,y)$. Тогда $\overrightarrow{DH}(x+2, y-6), \overrightarrow{BE}(-9{,}9)$. $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{BE}$, следовательно, $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$, т.е. $-9(x+2)+9(y-6)=0$. С другой стороны точка H лежит на BE, поэтому $\overrightarrow{BH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BH}(x-3, y+7)$. Получим: $\frac{x-3}{-9} = \frac{y+7}{9}$. Найдем координаты точки H, решив систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} -9(x+2)+9(y-6)=0, \\ \dfrac{x-3}{-9} = \dfrac{y+7}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x+9y-72=0, \\ 9x+9y+36=0. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнение: $18y-36=0$, $y=2$. Тогда $9x=-54$, $x=-6$ и $H(-6{,}2)$. Заметим, что точка H совпала с точкой E, то есть треугольник прямоугольный и высотой является отрезок DE.

Вычислим длину высоты: $|DE| = \sqrt{(-6+2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

4) Найти длину $\boldsymbol{l} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right| + \left|\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}\right|$

$$\overrightarrow{AC}(7;6), \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}$$

$$\overrightarrow{DE}(-4,-4), \qquad \left|\overrightarrow{DE}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$l = \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{DE}\right| = \sqrt{85} + 4\sqrt{2}$$

Ответ: $np_{\vec{b}}\vec{a} \approx 8{,}33$; $\alpha = \arccos\frac{3\sqrt{58}}{58}$;

$|DE| = 4\sqrt{2}$; $l = \sqrt{85} + 4\sqrt{2}$;

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Задание 7	Лист 26

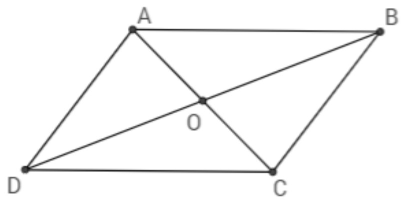
Задание 8

Аналитическая геометрия на плоскости. Векторное произведение двух векторов

Дано: $A(2;3), B(-3;-5), C(-2;-1)$

1) $ABCD$ – параллелограмм. Найти координаты точки D.

Решение:



1 способ.

$\overrightarrow{BA}\,(5;8), \overrightarrow{BC}(1;4)$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (по правилу параллелограмма), $\overrightarrow{BD}\,(6;12)$

$D(x;y)$, $\overrightarrow{BD}\,(x+3; y+5)$. Тогда: $x+3=6$, $x=3$; $y+5=12, y=7$.

2 способ.

O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, O – середина AC: $O\left(\frac{2+(-2)}{2}; \frac{3+(-1)}{2}\right)$, т.е. $O(0;1)$.

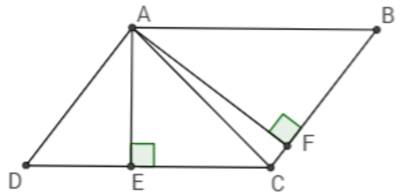
$D(x;y)$, $O(0;1)$ – середина BD.

Тогда $\frac{-3+x}{2} = 0, x = 3$; $\frac{-5+y}{2} = 1, y = 7$.

Ответ: $D(3;7)$

2) Найти площадь $\triangle ABC$ и высоты AE, AF параллелограмма $ABCD$

Решение:



$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|$

Так как результатом векторного произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перейдем к пространственным координатам:

$$\overrightarrow{BA}\,(5;8;0), \overrightarrow{BC}(1;4;0)$$

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} = 12\vec{k}$$

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = (0;0;12)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2} = 6$$

$$S_{ABCD} = \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = 12$$

$$|AB| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

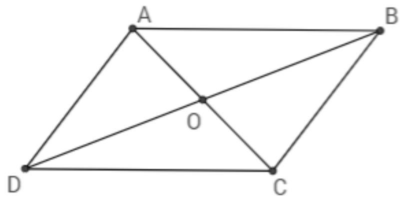
$$|AE| = \frac{S_{ABCD}}{|AB|} = \frac{12}{\sqrt{89}} = \frac{12\sqrt{89}}{89}$$

$$|AF| = \frac{S_{ABCD}}{|BC|} = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 6$, $|AE| = \frac{12\sqrt{89}}{89}$, $|AF| = \frac{12\sqrt{17}}{17}$

3) Найти внутренние углы параллелограмма и угол между диагоналями

Решение:



$\angle ABC = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{BA}\,(5; 8), \overrightarrow{BC}(1; 4)$

$$\cos\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{5\cdot 1 + 8\cdot 4}{\sqrt{5^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{37}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{17}} = \frac{37}{\sqrt{1513}}$$

$$\angle ABC = \arccos\frac{37}{\sqrt{1513}}$$

$$\angle BCD = 180° - \angle ABC = 180° - \arccos\frac{37}{\sqrt{1513}} = \arccos\left(-\frac{37}{\sqrt{1513}}\right)$$

$$\angle BCD = \arccos\left(-\frac{37}{\sqrt{1513}}\right)$$

$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})$ – угол между диагоналями параллелограмма

$\overrightarrow{AC}(-4; -4), \overrightarrow{DB}(-6; -12)$

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{DB}|} = \frac{-4\cdot(-6) - 4\cdot(-12)}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+(-12)^2}} = \frac{72}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{180}} = \frac{72}{4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Задание 9

Аналитическая геометрия в пространстве. Смешанное произведение трех векторов

Дано: $M(2;5;-3), A(4;2;-3), B(-5;6;-4), C(-2;-3;4)$

1) Найти V_{MABC}

Решение:

$\overrightarrow{MA}(2;-3;0), \overrightarrow{MB}(-7;1;-1), \overrightarrow{MC}(-4;-8;7)$

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-1) + 3\cdot(-53) = -2 - 159 = -161$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})\right| = \frac{1}{6}\cdot|-161| = \frac{161}{6} = 26\frac{5}{6}$$

Ответ: $V_{MABC} = 26\frac{5}{6}$

2) Найти высоту MO тетраэдра $MABC$

Решение:

$$V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot MO$$

$$MO = \frac{3V_{MABC}}{S_{ABC}}$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|, \overrightarrow{AB}(-9;4;-1), \overrightarrow{AC}(-6;-5;7)$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 4 & -1 \\ -6 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 23i + 69\vec{j} + 69\vec{k}$$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = (23;69;69)$$

$$\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right| = \sqrt{23^2+69^2+69^2} = \sqrt{23^2+(3\cdot 23)^2+(3\cdot 23)^2}$$

$$= \sqrt{23^2(1+9+9)} = 23\sqrt{19}$$

$$MO = \frac{3V_{MABC}}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot\frac{161}{6}}{\frac{1}{2}\cdot 23\sqrt{19}} = \frac{161}{23\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{19}}$$

Ответ: $MO = \frac{7}{\sqrt{19}}$

3) Найти поверхность тетраэдра $MABC$

Решение:

$S = S_{ABC} + S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$

$\overrightarrow{MA}(2;-3;0), \overrightarrow{MB}(-7;1;-1), \overrightarrow{MC}(-4;-8;7)$

$S_{ABC} = \frac{23}{2}\sqrt{19}$ (Из предыдущей задачи)

$$S_{MAB} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right]\right|$$

$$S_{MAC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right]\right|$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right]\right|$$

$$\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 3i + 2\vec{j} - 19\vec{k}$$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 2^2 + (-19)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4 + 361} = \frac{1}{2}\sqrt{374}$$

$$\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -8 & 7 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -21i - 14\vec{j} - 28\vec{k}$$

$$S_{MAC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-21)^2 + (-14)^2 + (-28)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 \cdot (9 + 4 + 16)} = \frac{7}{2}\sqrt{29}$$

$$\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 1 & -1 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 7 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -i + 53\vec{j} + 60\vec{k}$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 53^2 + 60^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2809 + 3600} = \frac{1}{2}\sqrt{6410}$$

$$S = S_{ABC} + S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC} = \frac{23}{2}\sqrt{19} + \frac{1}{2}\sqrt{374} + \frac{7}{2}\sqrt{29} + \frac{1}{2}\sqrt{6410}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(23\sqrt{19} + \sqrt{374} + 7\sqrt{29} + \sqrt{6410}\right)$$

Ответ: $S = \frac{1}{2} \cdot \left(23\sqrt{19} + \sqrt{374} + 7\sqrt{29} + \sqrt{6410}\right)$