

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего образования  
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»  
КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## Расчетно-графическая работа

По дисциплине математика

ЕН.01.10.02.03.007

Вариант №7

Студент группы 2ПКС-115 Деменчук Г.М.

Работа принята с оценкой: . . . . .

Преподаватель: . . . . . /Белоглазов А.И.

Москва, 2017

## Задание 1

Исходные данные:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}; Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}; M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}; N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}; L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 \\ 8 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 & -3 \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 17 & 15 & 8 \\ 4 & 8 & 4 \\ 13 & 7 & -3 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

### Задача 1

Условие задания: вычислить выражение  $Z^2 D' + E$

$$\begin{aligned} Z^2 D' + E &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & -6 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 & 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & -6 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -13 & -8 \\ 9 & 12 & 3 \\ 21 & 23 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & -6 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 \cdot 2 - 13 \cdot 5 - 8 \cdot 6 & -9 \cdot 4 - 13 \cdot (-1) - 8 \cdot 5 & -9 \cdot 2 - 13 \cdot (-6) - 8 \cdot (-1) \\ 9 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 3 \cdot 6 & 9 \cdot 4 + 12 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 & 9 \cdot 2 + 12 \cdot (-6) + 3 \cdot (-1) \\ 21 \cdot 2 + 23 \cdot 5 + 7 \cdot 6 & 21 \cdot 4 + 23 \cdot (-1) + 7 \cdot 5 & 21 \cdot 2 + 23 \cdot (-6) + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -131 & -63 & 68 \\ 96 & 39 & -57 \\ 199 & 96 & -103 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -130 & -63 & 68 \\ 96 & 40 & -57 \\ 199 & 96 & -102 \end{pmatrix}$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} -130 & -63 & 68 \\ 96 & 40 & -57 \\ 199 & 96 & -102 \end{pmatrix}$

					Задание 1	Лист
						2
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

## Задача 2

Вычислить матричный многочлен  $F + 2MS - C$

$$\begin{aligned}
 F + 2MS - C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &+ 2 \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-8) + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 8 & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 7 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot (-8) + 4 \cdot 2 & 0 \cdot 6 + 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 8 & 0 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ -1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-8) + 6 \cdot 2 & -1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 8 & -1 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 9 & 35 & 10 \\ 21 & 21 & 16 \\ -24 & 40 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 70 & 20 \\ 42 & 42 & 32 \\ -48 & 80 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} 17 & 68 & 18 \\ 36 & 45 & 26 \\ -47 & 78 & 53 \end{pmatrix}$

					Задание 1	Лист
						3
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

### Задача 3

Найти минор  $M_{24}(R)$ , алгебраическое дополнение элемента  $A_{32}(B)$  и ранг заданной матрицы  $r(N) \cdot r(P)$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{24}(R) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= -12 + 1 + 2 - 3 + 4 - 2 = -10 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{32}(B) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(4 \cdot (-1) - (-5) \cdot (-4)) = -(-4 - 20) = 24$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-I]{-2I} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Так как } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow r(N) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3I]{-2I} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{Так как } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 18 = -18 \neq 0 \Rightarrow r(P) = 3$$

$$r(N) \cdot r(P) = 2 \cdot 3 = 6$$

Ответ:  $M_{24} = -10$ ;  $A_{32} = 24$ ;  $r(N) = 6$

## Задание 2

Исходные данные:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 14 & 23 & 20 & 17 \\ 12 & 20 & 20 & 16 \\ 12 & 27 & 24 & 18 \\ 10 & 32 & 18 & 19 \end{vmatrix}; \det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}; \det F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix};$$

$$\det H = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}; \det K = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \det L = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & 19 & 6 & 9 \\ 6 & 17 & 11 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \det P = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\det R = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix}; \det S = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\det U = \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$$

### Вопрос №1

Вычислить определитель  $N$ , раскрывая его по элементам строки 2 и столбца 3. Сравнить результаты.

$$\det N = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det N &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \\
&\quad \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (3 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4) \\
&\quad + (4 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)) \\
&\quad - (4 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 4) \\
&\quad + (4 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 1) \\
&= (12 + 3 - 4 - 2 + 9 - 8) + (16 + 3 - 2 - 1 - 8 + 12) \\
&\quad - (16 + 2 - 3 - 1 + 8 - 12) + (12 + 3 + 4 - 2 - 9 - 8) \\
&= 10 + 20 - 10 + 0 = 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det N &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \\
&\quad \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2(-1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \\
&\quad \cdot (-1) \cdot 2) \\
&\quad - (4 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)) \\
&\quad + (4 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1) \\
&\quad - 3(4 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 4 \\
&\quad \cdot 1 \cdot 1) \\
&= 2(-4 - 1 + 2 - 1 - 4 - 2) - (16 - 3 + 2 - 1 - 12 + 8) \\
&\quad + (16 - 2 + 3 - 1 + 12 - 8) - 3(-4 + 3 - 1 - 1 - 3 - 4) \\
&= 2 \cdot (-10) - 10 + 20 - 3 \cdot (-10) = -20 - 10 + 20 + 30 = 20
\end{aligned}$$

Ответ:  $\det N = 20$

					Задание 2	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		6

### Вопрос №3

Решить уравнение, содержащее определитель  $E$  с неизвестным  $2 - x^2$ , стоящим на месте элемента  $e_{13}$ , при этом  $E = 2x - 1$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 - x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 2x - 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 - x^2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \\ 1 & 27 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \\ &\cdot (2 - x^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 9 \cdot 64 + 3 \cdot 8 \cdot 16 + 4 \cdot 4 \cdot 27 - 4 \cdot 9 \cdot 8 - 4 \cdot 3 \cdot 64 - 2 \cdot 27 \cdot 16) \\ &- (1 \cdot 9 \cdot 64 + 1 \cdot 3 \cdot 16 + 1 \cdot 27 \cdot 4 - 4 \cdot 9 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 64 - 1 \cdot 27 \cdot 16) \\ &+ (2 - x^2)(1 \cdot 4 \cdot 64 + 1 \cdot 2 \cdot 16 + 1 \cdot 4 \cdot 8 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 64 - 1 \cdot 16 \\ &\cdot 8) - (1 \cdot 4 \cdot 27 + 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 \cdot 8 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 27 - 1 \cdot 9 \cdot 8) \\ &= (1152 + 384 + 432 - 288 - 768 - 864) \\ &- (576 + 48 + 108 - 36 - 192 - 432) \\ &+ (2 - x^2)(256 + 32 + 32 - 16 - 128 - 128) \\ &- (108 + 18 + 24 - 12 - 54 - 72) = 48 - 72 + (2 - x^2) \cdot 48 - 12 \\ &= -36 + 96 - 48x^2 = 60 - 48x^2 \end{aligned}$$

$$60 - 48x^2 = 2x - 1$$

$$48x^2 + 2x - 61 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{12} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 61 \cdot 48}}{2 \cdot 48} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 11712}}{96} = \frac{-2 \pm \sqrt{11716}}{96} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2929}}{96} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{2929}}{48} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{2929}}{48}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{2929}}{48}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{2929}}{48}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{2929}}{48}$$

					Задание 2	Лист
						7
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		



### Задание 3

Исходные данные:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Задача 1

Условие задания:

Для матрицы  $X$  найти матрицу  $X^{-1}$  и убедиться, что  $XX^{-1} = E$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$|H| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2III} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 14 \\ -1 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 13 - 1 \cdot 14 = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) = -15 + 2 = -13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(5 \cdot (-5) - 2 \cdot (-2)) = -(-25 + 4) = 21$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-5) - 4 \cdot 1) = -(-10 - 4) = 14$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 = -15 - 8 = -23$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -(3 - 4) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = -4 - 12 = -16$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5) = -(-6 - 20) = 26$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} -13 & 21 & -1 \\ 14 & -23 & 1 \\ -16 & 26 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -13 & 14 & -16 \\ 21 & -23 & 26 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{|H|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -13 & 14 & -16 \\ 21 & -23 & 26 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} HH^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 13 + 2 \cdot (-21) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-14) + 2 \cdot 23 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 16 + 2 \cdot (-26) + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 13 + 3 \cdot (-21) - 2 \cdot 1 & 5 \cdot (-14) + 3 \cdot 23 - 2 \cdot (-1) & 5 \cdot 16 + 3 \cdot (-26) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 13 + 1 \cdot (-21) - 5 \cdot 1 & 2 \cdot (-14) + 1 \cdot 23 - 5 \cdot (-1) & 2 \cdot 16 + 1 \cdot (-26) - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4II \\ \\ -2II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -15 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -8 & -15 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(8 \cdot 2 - 1 \cdot 15) = -(16 - 15) = -1 \end{aligned}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 6 - 2 \cdot 4) = -(6 - 8) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 6 - 1 \cdot 5) = -(24 - 5) = -19$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 24 - 2 = 22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = -(20 - 8) = -12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 16 - 3 = 13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 4 - 1 \cdot 1) = -(16 - 1) = -15$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 = 8$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -19 & 22 & -12 \\ 13 & -15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -2 & -19 & 13 \\ 2 & 22 & -15 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -19 & 13 \\ 2 & 22 & -15 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} MM^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 19 + 4 \cdot (-22) + 1 \cdot 12 & 4 \cdot (-13) + 4 \cdot 15 + 1 \cdot (-8) \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 19 + 3 \cdot (-22) + 4 \cdot 12 & 1 \cdot (-13) + 3 \cdot 15 + 4 \cdot (-8) \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 & 2 \cdot 19 + 5 \cdot (-22) + 6 \cdot 12 & 2 \cdot (-13) + 5 \cdot 15 + 6 \cdot (-8) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } H^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -14 & 16 \\ -21 & 23 & -26 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 19 & -13 \\ -2 & -22 & 15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

## Задача 2

Условие задания:

Найти матрицу  $X$  из матричного уравнения, выполнить проверку

$$H_1 X K_1 = H$$

Домножим слева и справа на обратные матрицы

$$H_1^{-1} H_1 X K_1 K_1^{-1} = H_1^{-1} H K_1^{-1}$$

$$E X E = H_1^{-1} H K_1^{-1}$$

$$X = H_1^{-1} H K_1^{-1}$$

Найдем обратные матрицы  $H_1^{-1}$  и  $K_1^{-1}$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|H_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{-I} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -2 + 1 = -1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = 2$$

					Задание 3	Лист
						11
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_1^{-1} = \frac{1}{|H_1|} C^{*T} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|K_1| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} - I = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - 5 \cdot (-3) = -14 + 15 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 2 + 2 = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 6 \cdot 1) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 6 \cdot 2 = -6 - 12 = -18$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) = -(5 + 2) = -7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 6 = 1 - 6 = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-2) - 5 \cdot 6) = -(-2 - 30) = 32$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$$

Присоединённая матрица:

$$C^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -18 \\ -7 & -5 & 32 \\ 3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$

$$K_1^{-1} = \frac{1}{|K_1|} C^{*T} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X = H_1^{-1} H K_1^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -4 & -21 \\ 6 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 346 & -617 & 250 \\ -90 & 162 & -65 \\ -245 & 438 & -177 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 346 & -617 & 250 \\ -90 & 162 & -65 \\ -245 & 438 & -177 \end{pmatrix}$$

## Задание 4

Исходные данные

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Требуется:

Решить систему линейных уравнений однозначной разрешимости методом Крамера, Гаусса и матричным. Выполнить проверку

1) Метод Крамера

По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}$$

Найдем необходимые определители

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 & 15 \\ 0 & 14 & -22 & 14 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 30 & -31 & 15 \\ 14 & -22 & 14 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ 14 & -22 & 14 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -14I \\ -9I \end{matrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -210 & 104 & 0 \\ -140 & 76 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -210 & 104 \\ -140 & 76 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 210 & 104 \\ 140 & 76 \end{vmatrix} \\ &= 210 \cdot 76 - 104 \cdot 140 = 15960 - 14560 = 1400 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 & 1 \\ -10 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +5I \\ -3I \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 44 & -17 & 9 \\ 0 & -24 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 44 & -17 & 9 \\ -24 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +9II \\ \\ +5II \end{matrix} = 2 \begin{vmatrix} -172 & 28 & 0 \\ -24 & 5 & -1 \\ -122 & 28 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} -172 & 28 \\ -122 & 28 \end{vmatrix} = -56 \begin{vmatrix} 172 & 1 \\ 122 & 1 \end{vmatrix} = -56(172 - 122) = -56 \cdot 50 \\ &= -2800 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -10 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 44 & -31 & 15 \\ 0 & 20 & -22 & 14 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & -5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 44 & -31 & 15 \\ 20 & -22 & 14 \\ 12 & -5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -II \\ -14I \\ -9I \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 24 & -9 & 1 \\ 20 & -22 & 14 \\ 12 & -5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -316 & 104 & 0 \\ -204 & 76 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -316 & 104 \\ -204 & 76 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 316 & 104 \\ 204 & 76 \end{vmatrix}$$

$$= 316 \cdot 76 - 104 \cdot 204 = 24016 - 21216 = 2800$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -10 & 4 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & 44 & 15 \\ 0 & 14 & 20 & 14 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 30 & 44 & 15 \\ 14 & 20 & 14 \\ 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -II \\ -14I \\ -9I \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 16 & 24 & 1 \\ 14 & 20 & 14 \\ 4 & 12 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -14I \\ -9I \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -210 & -316 & 0 \\ -140 & -204 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -210 & -316 \\ -140 & -204 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 210 & 316 \\ 140 & 204 \end{vmatrix}$$

$$= -(210 \cdot 204 - 140 \cdot 316) = -(42840 - 44240) = 1400$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & -10 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} +7III \\ +5III \\ +2III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 & 44 \\ 0 & 14 & -22 & 20 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 30 & -31 & 44 \\ 14 & -22 & 20 \\ 4 & -5 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} -15II \\ -3III \\ -2II \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 30 & -31 & 44 \\ 2 & -7 & -16 \\ 4 & -5 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 74 & 284 \\ 2 & -7 & -16 \\ 0 & 9 & 44 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 74 & 284 \\ 9 & 44 \end{vmatrix} = 2(74 \cdot 44 - 284 \cdot 9)$$

$$= 2(3256 - 2556) = 2 \cdot 700 = 1400$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2800}{1400} = -2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2800}{1400} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1400}{1400} = 1, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{1400}{1400} = 1$$

## 2) Метод Гаусса

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 9 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 4 & -10 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -2 & 4 & -10 \\ 7 & 9 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} +5I \\ +7I \\ +2I \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 30 & -31 & 15 & 44 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 30 & -31 & 15 & 44 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array} \right) \begin{matrix} -2III \\ -7II \\ -2II \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & 4 \\ 0 & 14 & -22 & 14 & 20 \\ 0 & 4 & -5 & 9 & 12 \end{array} \right) \begin{matrix} -7II \\ -2II \end{matrix}$$



$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & | & 4 \\ 0 & 0 & -113 & 105 & | & -8 \\ 0 & 0 & -31 & 35 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4IV} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & | & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -35 & | & -24 \\ 0 & 0 & -31 & 35 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3III} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & | & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -35 & | & -24 \\ 0 & 0 & 2 & -70 & | & -68 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5IV} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 315 & | & 316 \\ 0 & 0 & 2 & -70 & | & -68 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2III} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & 13 & -13 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 315 & | & 316 \\ 0 & 0 & 0 & 700 & | & 700 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \frac{700}{700} = 1$$

$$x_3 = 316 - 315x_4 = 316 - 315 = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + 13x_4 - 13x_3}{2} = \frac{4 + 13 - 13}{2} = 2$$

$$x_1 = -6 + 2x_4 - 4x_3 + 3x_2 = -6 + 2 - 4 + 6 = -2$$

### 3) Матричный метод

Запишем систему в виде  $AX = B$

$$\text{Здесь: } A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Домножим слева на матрицу обратную к  $A$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений

$$|A| = 1400$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 3I = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -10 & 14 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} \\
 &= -(-10 \cdot (-3) - 14 \cdot 7) = -(30 - 98) = 68
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 5II = - \begin{vmatrix} 0 & -22 & 14 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -22 & 14 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} \\
 &= -(-22 \cdot 9 - 14 \cdot (-5)) = -(-198 + 70) = 128
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} + 5III = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 14 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 14 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} \\
 &= 14 \cdot 9 - 14 \cdot 4 = 126 - 56 = 70
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{14} &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 5IV = - \begin{vmatrix} 0 & 14 & -22 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 14 & -22 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\
 &= -(14 \cdot (-5) - 4 \cdot (-22)) = -(-70 + 88) = -18
 \end{aligned}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} -2I = - \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -15 & 2 & 0 \\ -47 & 18 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -15 & 2 \\ -47 & 18 \end{vmatrix} \\ = -(-15 \cdot 18 - 2 \cdot (-47)) = -(-270 + 94) = 176$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} -2I = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -15 & 2 & 0 \\ -33 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15 & 2 \\ -33 & 18 \end{vmatrix} \\ = -15 \cdot 18 - 2 \cdot (-33) = -270 + 66 = -204$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} -2I = - \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -15 & -15 & 0 \\ -33 & -47 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -15 & -15 \\ -33 & -47 \end{vmatrix} \\ = -15 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 33 & 47 \end{vmatrix} = -15(47 - 33) = -15 \cdot 14 = -210$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} +7II = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & -31 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ = 30 \cdot (-5) - 4 \cdot (-31) = -150 + 124 = -26$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} -4I = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -37 & 10 & 0 \\ -47 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -37 & 10 \\ -47 & 18 \end{vmatrix} \\ = -37 \cdot 18 - 10 \cdot (-47) = -666 + 470 = -196$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} -4I = - \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -23 & 10 & 0 \\ -33 & 18 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -23 & 10 \\ -33 & 18 \end{vmatrix} \\ = -(-23 \cdot 18 - 10 \cdot (-33)) = -(-414 + 330) = 84$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} -4I = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -23 & -37 & 0 \\ -33 & -47 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & -37 \\ -33 & -47 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 23 & 37 \\ 33 & 47 \end{vmatrix} = 23 \cdot 47 - 37 \cdot 33 = 1081 - 1221 = -140$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} +9II = - \begin{vmatrix} 52 & 0 & -21 \\ 5 & -1 & -2 \\ -8 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 52 & -21 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} \\ = 52 \cdot 7 - (-21) \cdot (-8) = 364 - 168 = 196$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} -4I = - \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -37 & 10 & 0 \\ -15 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -37 & 10 \\ -15 & 2 \end{vmatrix} \\ = -(-37 \cdot 2 - 10 \cdot (-15)) = -(-74 + 150) = -76$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} -4I = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -23 & 10 & 0 \\ -15 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & 10 \\ -15 & 2 \end{vmatrix} \\ = -23 \cdot 2 - 10 \cdot (-15) = -46 + 150 = 104$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} -4I = - \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -23 & -37 & 0 \\ -15 & -15 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -23 & -37 \\ -15 & -15 \end{vmatrix} = \\ = -15 \begin{vmatrix} 23 & 37 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15(23 - 37) = -15 \cdot (-14) = 210$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 7 & 9 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} + 7III = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -31 \\ 0 & 14 & -22 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 30 & -31 \\ 14 & -22 \end{vmatrix} \\ = -(30 \cdot (-22) - 14 \cdot (-31)) = -(-660 + 434) = 226$$

Присоединённая матрица

$$C^* = \begin{pmatrix} 68 & 128 & 70 & -18 \\ 176 & -204 & -210 & -26 \\ -196 & 84 & -140 & 196 \\ -76 & 104 & 210 & 226 \end{pmatrix} \\ C^{*T} = \begin{pmatrix} 68 & 176 & -196 & -76 \\ 128 & -204 & 84 & 104 \\ 70 & -210 & -140 & 210 \\ -18 & -26 & 196 & 226 \end{pmatrix}$$

Получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^{*T} = \frac{1}{1400} \begin{pmatrix} 68 & 176 & -196 & -76 \\ 128 & -204 & 84 & 104 \\ 70 & -210 & -140 & 210 \\ -18 & -26 & 196 & 226 \end{pmatrix} \\ X = A^{-1}B = \frac{1}{1400} \begin{pmatrix} 68 & 176 & -196 & -76 \\ 128 & -204 & 84 & 104 \\ 70 & -210 & -140 & 210 \\ -18 & -26 & 196 & 226 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{1400} \begin{pmatrix} 68 \cdot 2 + 176 \cdot (-10) - 196 \cdot 6 - 76 \cdot 0 \\ 128 \cdot 2 - 204 \cdot (-10) + 84 \cdot 6 + 104 \cdot 0 \\ 70 \cdot 2 - 210 \cdot (-10) - 140 \cdot 6 + 210 \cdot 0 \\ -18 \cdot 2 - 26 \cdot (-10) + 196 \cdot 6 + 226 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{1400} \begin{pmatrix} 136 - 1760 - 1176 \\ 256 + 2040 + 504 \\ 140 + 2100 - 840 \\ -36 + 260 + 1176 \end{pmatrix} = \frac{1}{1400} \begin{pmatrix} -2800 \\ 2800 \\ 1400 \\ 1400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) Сделаем проверку

$$7 \cdot (-2) + 9 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -14 + 18 - 3 + 1 = 2 - \text{верно}$$

$$5 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = -10 - 2 - 2 + 4 = -10 - \text{верно}$$

$$-1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 6 - 4 + 2 = 6 - \text{верно}$$

$$2 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = -4 - 4 + 3 + 5 = 0 - \text{верно}$$

Ответ:  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 1$ ;  $x_4 = 1$

## Задание 5

Условие:

Дана система линейных однородных уравнений общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0 \end{cases}$$

Требуется:

Найти общее решение системы и одно произвольное частное решение, для которого выполнить проверку

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 9 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & -3 & 9 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -3I \\ -3I \\ -2I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -11II \\ -7II \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_5 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = 0$$

$$2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_3 = 2x_1 + 3x_4$$

$x_1, x_4$  – свободные

Общее решение системы

$$\{(C_1, 0, 2C_1 + 3C_2, C_2, 0), C_1, C_2 \in R\}$$

$$\text{Пусть } C_1 = 1, C_2 = 1$$

Получим частное решение

$(1, 0, 5, 1, 0)$

Сделаем проверку

$$6 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 6 - 15 + 9 = 0 - \text{верно}$$

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 6 - 15 + 9 = 0 - \text{верно}$$

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2 - 5 + 3 = 0 - \text{верно}$$

$$4 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 4 - 10 + 6 = 0 - \text{верно}$$

Ответ: Общее решение:  $\{(C_1, 0, 2C_1 + 3C_2, C_2, 0), C_1, C_2 \in R\}$

Частное решение:  $(1, 0, 5, 1, 0)$

					Задание 5	Лист
						20
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

## Задание 6

Условие:

Дана система линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5. \end{cases}$$

Требуется:

Найти общее решение системы, одно частное решение системы

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & | & 7 \\ 6 & 2 & 2 & -1 & 0 & | & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 11 & 3 & 3 & 1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II + I \cdot 6 \\ III - I \cdot 3 \\ IV + I \cdot 11 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & | & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & | & 40 \\ 0 & -8 & -8 & -10 & -12 & | & -16 \\ 0 & 36 & 36 & 45 & 54 & | & 72 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & | & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & | & 40 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & | & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & | & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ IV - III \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & | & 7 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & | & 40 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & | & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & | & 8 \\ 0 & 20 & 20 & 23 & 30 & | & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II \cdot (-5) + III \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 4 & 5 & | & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 6 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Так как  $r(A) = r(A|B) = 3 < 5 = n$  (ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и меньше количества неизвестных), то система совместна и неопределенна.

Количество главных переменных равно  $r(A) = 3$ , количество свободных переменных равно  $n - r(A) = 5 - 3 = 2$ .

Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 3-го порядка полученной матрицы  $A$ :  $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ . Его столбцы (1-й, 2-й и 4-й столбцы матрицы  $A$ ) соответствуют переменным  $x_1, x_2$  и  $x_4$  – главные переменные,  $x_3$  и  $x_5$  – свободные переменные.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что  $x_4 = 0$ :

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 7, \\ 4x_2 + 4x_3 + 6x_5 = 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Теперь запишем эту систему в другом виде (слева останутся только главные переменные):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3x_3 - 5x_5 + 7, \\ 4x_2 = -4x_3 - 6x_5 + 8, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим  $x_2$  и подставим это выражение в первое уравнение. Получим:

$$\begin{cases} -x_1 + 3 \cdot (-x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2) = -3x_3 - 5x_5 + 7, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 = 3x_3 + \frac{9}{2}x_5 - 6 - 3x_3 - 5x_5 + 7, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_5 - 1, \\ x_2 = -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом общее решение системы уравнений:

$$\left( \frac{1}{2}x_5 - 1; -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2; x_3; 0; x_5 \right)$$

Частное решение получим, например, при  $x_3 = 1, x_5 = 0$ :

$$(-1; 1; 1; 0; 0)$$

Проверка частного решения:

$$\begin{cases} 1 + 3 + 3 + 0 + 0 = 7, \\ -6 + 2 + 2 + 0 = -2, \\ 3 + 1 + 1 + 0 + 0 = 5, \\ -11 + 3 + 3 + 0 + 0 = -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 = 7, \\ -2 = -2, \\ 5 = 5, \\ -5 = -5. \end{cases}$$

Ответ: Общее решение:  $\left(\frac{1}{2}x_5 - 1; -x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2; x_3; 0; x_5\right)$

Частное решение:  $(-1; 1; 1; 0; 0)$ .



## Задание 7

Дано:

$A(-6; -4), B(3; -7), C(1; 2), D(-2, 6), E(-6; 2)$

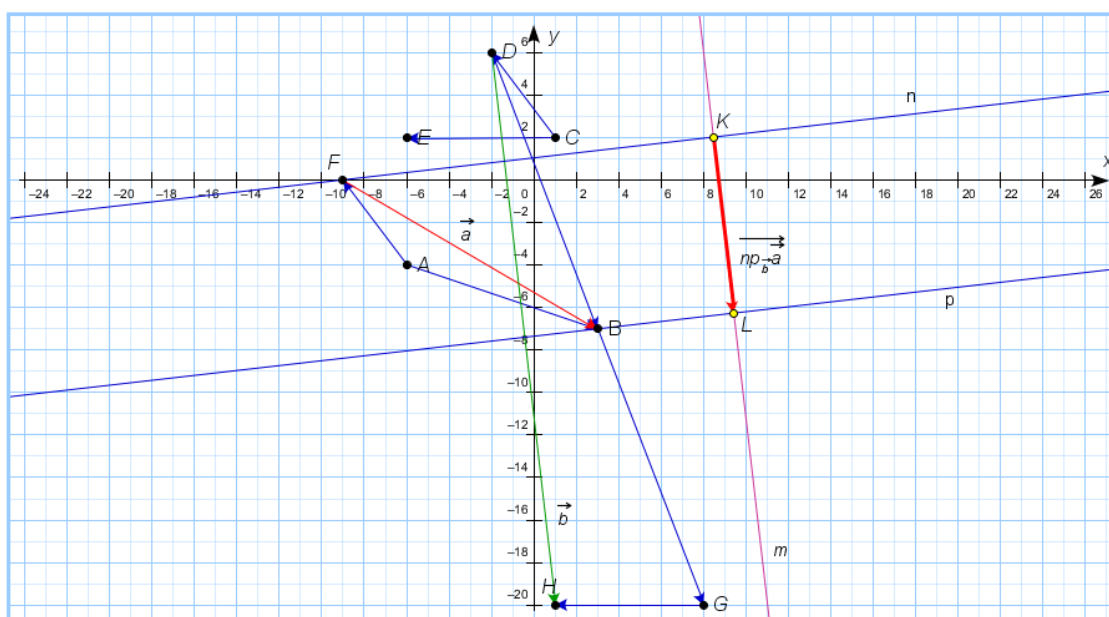
**1) Найти проекцию  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$  на направление вектора  $\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}$**

В координатной плоскости построить точки  $A(-6; -4), B(3; -7), C(1; 2), D(-2, 6), E(-6; 2)$ .

От точки  $A$  отложить  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$ , тогда  $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ . Обозначим  $\overrightarrow{FB} = \vec{a}$ . От точки  $B$  отложить  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DB}$ , тогда  $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DB}$ . От точки  $G$  отложить  $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CE}$ , тогда  $\overrightarrow{DH} = 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE}$ . Обозначим  $\overrightarrow{DH} = \vec{b}$ .

Построить прямую  $m \parallel \vec{b}$  (положение прямой  $m$  в системе координат произвольное), направление прямой  $m$  совпадает с направлением вектора  $\vec{b}$ .

Через точку  $F$  провести прямую  $n \perp m$ ,  $n$  пересекает  $m$  в точке  $K$ . Через точку  $B$  провести прямую  $p \perp m$ ,  $p$  пересекает  $m$  в точке  $L$ .



Проекция вектора  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$  на направление вектора  $\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}$  есть вектор  $\overrightarrow{KL}$ . Числовая проекция вектора  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$  на направление вектора  $\overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}$ :  $pr_{\vec{b}} \vec{a} \approx 8,33$ .

**Выполним аналитическую проверку:**

$\overrightarrow{AB}(9, -3), \overrightarrow{CD}(-3, 4), \vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}, \vec{a}(12, -7).$

$$\overrightarrow{CE}(-7,0), \overrightarrow{DB}(5,-13), 2\overrightarrow{DB}(10,-26), \vec{b} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{DB}, \vec{b}(3,-26).$$

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12 \cdot 3 - 7 \cdot (-26)}{\sqrt{3^2 + (-26)^2}} = \frac{36 + 182}{\sqrt{9 + 676}} = \frac{218}{\sqrt{685}} \approx \frac{218}{26,173} \approx 8,329$$

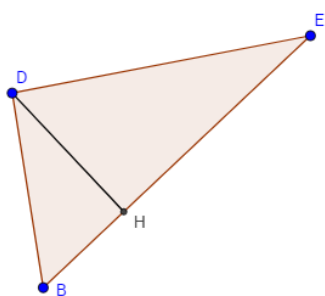
## 2) Найти угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD}(4,10), \overrightarrow{BE}(-9,9)$ . Пусть  $\alpha$  – угол между векторами  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{BE}$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} = \frac{4 \cdot (-9) + 10 \cdot 9}{\sqrt{4^2 + 10^2} \cdot \sqrt{(-9)^2 + 9^2}} = \frac{-36 + 90}{\sqrt{116} \cdot \sqrt{162}} = \frac{54}{2\sqrt{29} \cdot 9\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{58}} = \arccos \frac{3\sqrt{58}}{58}$$

## 3) Найти высоту в треугольнике $BDE$ , опущенную из вершины $D$



Пусть  $DH$  – искомая высота и  $H(x, y)$ . Тогда  $\overrightarrow{DH}(x+2, y-6), \overrightarrow{BE}(-9, 9)$ .  $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{BE}$ , следовательно,  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ , т.е.  $-9(x+2) + 9(y-6) = 0$ . С другой стороны точка  $H$  лежит на  $BE$ , поэтому  $\overrightarrow{BH} \parallel \overrightarrow{BE}$ ,  $\overrightarrow{BH}(x-3, y+7)$ . Получим:  $\frac{x-3}{-9} = \frac{y+7}{9}$ . Найдем координаты точки  $H$ , решив систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} -9(x+2) + 9(y-6) = 0, \\ \frac{x-3}{-9} = \frac{y+7}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x + 9y - 72 = 0, \\ 9x + 9y + 36 = 0. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнение:  $18y - 36 = 0$ ,  $y = 2$ . Тогда  $9x = -54$ ,  $x = -6$  и  $H(-6, 2)$ . Заметим, что точка  $H$  совпала с точкой  $E$ , то есть треугольник прямоугольный и высотой является отрезок  $DE$ .

					Задание 7	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		25

Вычислим длину высоты:  $|DE| = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ .

4) Найти длину  $l = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{DE}|$

$$\overrightarrow{AC}(7; 6), \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}$$

$$\overrightarrow{DE}(-4, -4), \quad |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$l = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{85} + 4\sqrt{2}$$

Ответ:  $np_{\vec{b}}\vec{a} \approx 8,33$ ;  $\alpha = \arccos \frac{3\sqrt{58}}{58}$ ;

$$|DE| = 4\sqrt{2}; \quad l = \sqrt{85} + 4\sqrt{2};$$

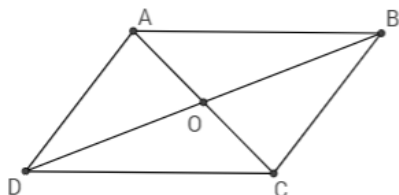
## Задание 8

Аналитическая геометрия на плоскости. Векторное произведение двух векторов

Дано:  $A(2; 3), B(-3; -5), C(-2; -1)$

1)  $ABCD$  – параллелограмм. Найти координаты точки  $D$ .

Решение:



1 способ.

$$\overrightarrow{BA}(5; 8), \overrightarrow{BC}(1; 4)$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \text{ (по правилу параллелограмма), } \overrightarrow{BD}(6; 12)$$

$$D(x; y), \overrightarrow{BD}(x + 3; y + 5). \text{ Тогда: } x + 3 = 6, x = 3; y + 5 = 12, y = 7.$$

2 способ.

$O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма,  $O$  – середина  $AC$ :

$$O\left(\frac{2+(-2)}{2}; \frac{3+(-1)}{2}\right), \text{ т.е. } O(0; 1).$$

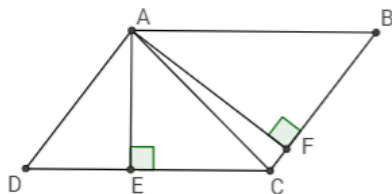
$D(x; y), O(0; 1)$  – середина  $BD$ .

$$\text{Тогда } \frac{-3+x}{2} = 0, x = 3; \frac{-5+y}{2} = 1, y = 7.$$

Ответ:  $D(3; 7)$

2) Найти площадь  $\Delta ABC$  и высоты  $AE, AF$  параллелограмма  $ABCD$

Решение:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|$$

Так как результатом векторного произведения  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , перейдем к пространственным координатам:

$$\overrightarrow{BA} (5; 8; 0), \overrightarrow{BC} (1; 4; 0)$$

$$[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = 12\vec{k}$$

$$[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = (0; 0; 12)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2} = 6$$

$$S_{ABCD} = [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = 12$$

$$|AB| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (-1-(-5))^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

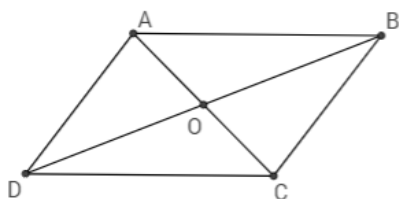
$$|AE| = \frac{S_{ABCD}}{|AB|} = \frac{12}{\sqrt{89}} = \frac{12\sqrt{89}}{89}$$

$$|AF| = \frac{S_{ABCD}}{|BC|} = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{Ответ: } S_{\Delta ABC} = 6, |AE| = \frac{12\sqrt{89}}{89}, |AF| = \frac{12\sqrt{17}}{17}$$

3) Найти внутренние углы параллелограмма и угол между диагоналями

Решение:



$$\angle ABC = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{BA}(5; 8), \overrightarrow{BC}(1; 4)$$

$$\cos \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{5 \cdot 1 + 8 \cdot 4}{\sqrt{5^2 + 8^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{37}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{17}} = \frac{37}{\sqrt{1513}}$$

$$\angle ABC = \arccos \frac{37}{\sqrt{1513}}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \arccos \frac{37}{\sqrt{1513}} = \arccos \left( -\frac{37}{\sqrt{1513}} \right)$$

$$\angle BCD = \arccos \left( -\frac{37}{\sqrt{1513}} \right)$$

$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})$  – угол между диагоналями параллелограмма

$$\overrightarrow{AC}(-4; -4), \overrightarrow{DB}(-6; -12)$$

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) &= \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DB}|} = \frac{-4 \cdot (-6) - 4 \cdot (-12)}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2}} = \frac{72}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{180}} \\ &= \frac{72}{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \arccos \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

## Задание 9

Аналитическая геометрия в пространстве. Смешанное произведение трех векторов

Дано:  $M(2; 5; -3), A(4; 2; -3), B(-5; 6; -4), C(-2; -3; 4)$

1) Найти  $V_{MABC}$

Решение:

$$\overrightarrow{MA}(2; -3; 0), \overrightarrow{MB}(-7; 1; -1), \overrightarrow{MC}(-4; -8; 7)$$

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-53) = -2 - 159 = -161$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})| = \frac{1}{6} \cdot |-161| = \frac{161}{6} = 26\frac{5}{6}$$

Ответ:  $V_{MABC} = 26\frac{5}{6}$

2) Найти высоту  $MO$  тетраэдра  $MABC$

Решение:

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MO$$

$$MO = \frac{3V_{MABC}}{S_{ABC}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|, \overrightarrow{AB}(-9; 4; -1), \overrightarrow{AC}(-6; -5; 7)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 4 & -1 \\ -6 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} \vec{k} \\ = 23\vec{i} + 69\vec{j} + 69\vec{k}$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (23; 69; 69)$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{23^2 + 69^2 + 69^2} = \sqrt{23^2 + (3 \cdot 23)^2 + (3 \cdot 23)^2} \\ = \sqrt{23^2(1 + 9 + 9)} = 23\sqrt{19}$$

$$MO = \frac{3V_{MABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{161}{6}}{\frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{19}} = \frac{161}{23\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{19}}$$

Ответ:  $MO = \frac{7}{\sqrt{19}}$

3) Найти поверхность тетраэдра  $MABC$

Решение:

$$S = S_{ABC} + S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$$

$$\overrightarrow{MA}(2; -3; 0), \overrightarrow{MB}(-7; 1; -1), \overrightarrow{MC}(-4; -8; 7)$$

$$S_{ABC} = \frac{23}{2} \sqrt{19} \text{ (Из предыдущей задачи)}$$

					Задание 9	Лист
						30
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} |[\vec{MA}, \vec{MB}]|$$

$$S_{MAC} = \frac{1}{2} |[\vec{MA}, \vec{MC}]|$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} |[\vec{MB}, \vec{MC}]|$$

$$[\vec{MA}, \vec{MB}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 2\vec{j} - 19\vec{k}$$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 2^2 + (-19)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 4 + 361} = \frac{1}{2} \sqrt{374}$$

$$[\vec{MA}, \vec{MC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -21\vec{i} - 14\vec{j} - 28\vec{k}$$

$$S_{MAC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-21)^2 + (-14)^2 + (-28)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{7^2 \cdot (9 + 4 + 16)} = \frac{7}{2} \sqrt{29}$$

$$[\vec{MB}, \vec{MC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 1 & -1 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -\vec{i} + 53\vec{j} + 60\vec{k}$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 53^2 + 60^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2809 + 3600} = \frac{1}{2} \sqrt{6410}$$

$$S = S_{ABC} + S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC} = \frac{23}{2} \sqrt{19} + \frac{1}{2} \sqrt{374} + \frac{7}{2} \sqrt{29} + \frac{1}{2} \sqrt{6410}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (23\sqrt{19} + \sqrt{374} + 7\sqrt{29} + \sqrt{6410})$$

Ответ:  $S = \frac{1}{2} \cdot (23\sqrt{19} + \sqrt{374} + 7\sqrt{29} + \sqrt{6410})$