Laboratorio 24

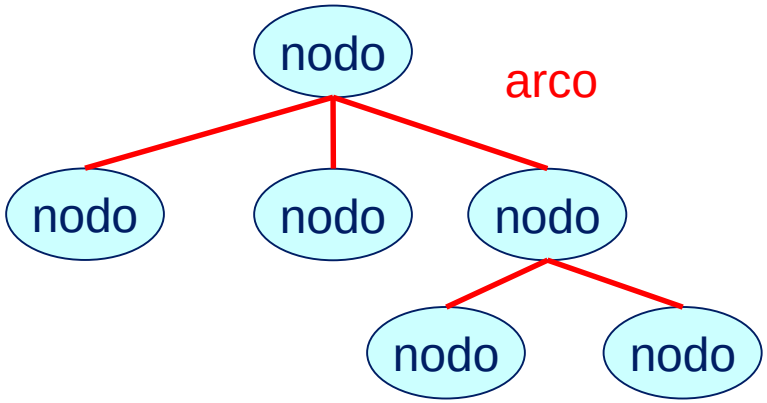
DISI – aa 2021/22

Pierluigi Roberti
Carmelo ferrante

Alberi binari di ricerca

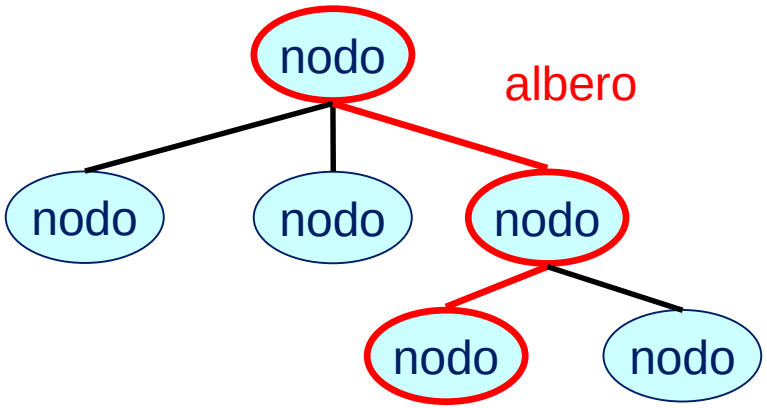
Albero

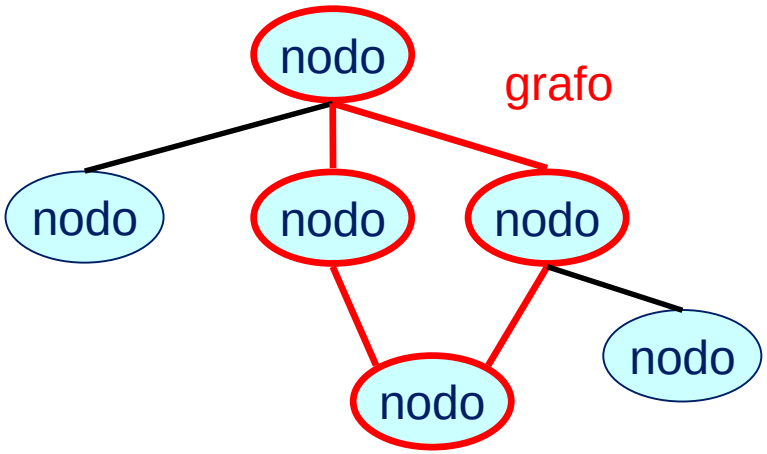
- **Definizione**: Un albero è un insieme non vuoto di *vertici* ed *archi* che soddisfa alcune proprietà:
  - Un *vertice* (o *nodo*) è un oggetto semplice che può essere dotato di un nome, e di una informazione associata (denominata spesso *chiave* o *key*).
  - Un *arco* è una connessione tra due nodi.



Cammino in un albero

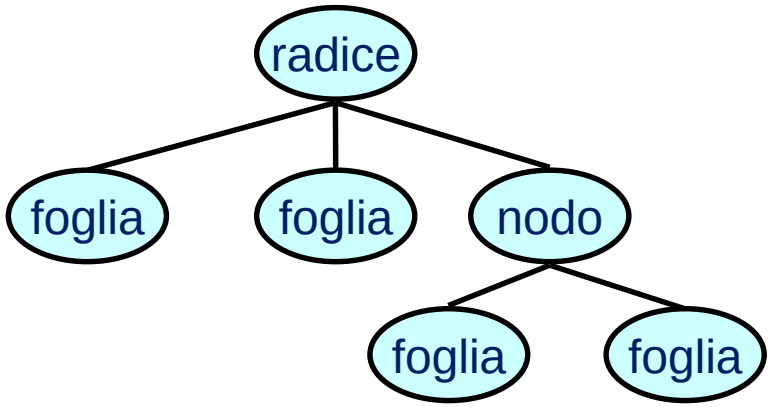
- **Definizione**: un *cammino* nell'albero è una sequenza di vertici distinti, in cui i vertici successivi sono connessi da un arco dell'albero.
- La proprietà che definisce un albero è quella per cui esiste *esattamente* un cammino che connette ogni coppia di nodi.
  - Se tra una coppia di nodi esiste più di un cammino, parliamo di grafi (trattati nella prossima lezione).
- Un insieme di alberi disgiunto si chiama *foresta*.





Alberi: definizioni

- Un albero *con radice* è un albero in cui un particolare nodo viene identificato come la *radice* o *root* dell'albero (sono le strutture classicamente utilizzate in informatica).
- In un albero con radice, ogni nodo è la radice di un *sottoalbero* formato dal nodo medesimo e da tutti i nodi ad esso sottostanti.
- Esiste un solo cammino tra la radice e ognuno degli altri nodi dell'albero.

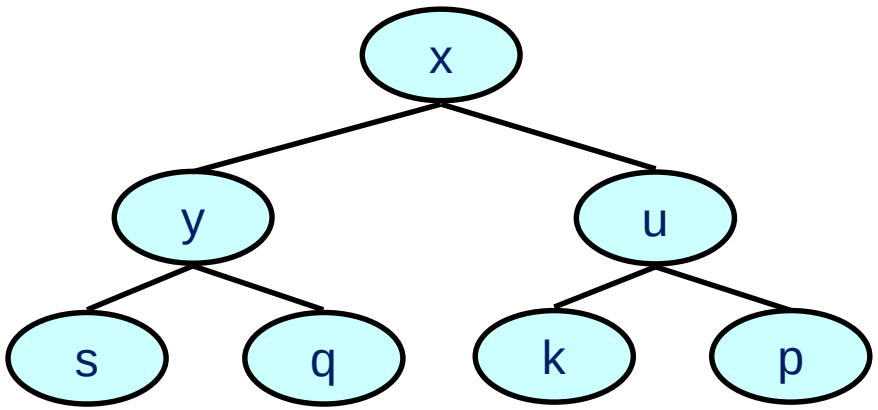


Alberi: definizioni

- Un albero è *ordinato* se è un albero con radice e se è specificato l'ordine dei figli di ciascun nodo.
- Se ogni nodo *deve* avere un numero specifico *N* di figli, parliamo di albero *N-ario*.
  - Un caso particolare è l'albero binario, dove N = 2.
- La distinzione tra alberi ordinati ed alberi N-ari riguarda il numero di figli di ciascun nodo:
  - In un albero ordinato i nodi possono avere un numero arbitrario di figli.
  - In un albero N-ario il numero di figli è al massimo N.

Alberi binari

- Un albero binario è un albero ordinato formato da due tipi di nodi:
  - Nodi terminali foglie.
  - Nodi interni con due figli. Dato che i due figli sono ordinati parleremo di:
    - *Figlio di sinistra*
    - *Figlio di destra*

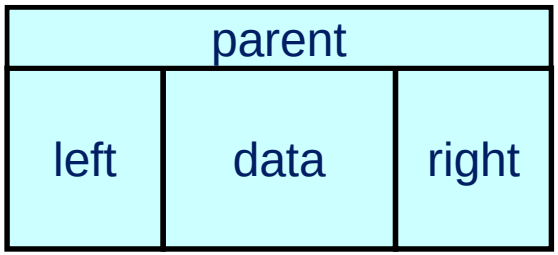


- y figlio sinistro di x
- u figlio destro di x
- k figlio sinistro di u
- p figlio destro di u

Rappresentazione di alberi binari

```
struct Node {
  int data;
  Node * parent;
  Node * left;
  Node * right;
  Node(int d) {
     data = d;
     parent = NULL;
     left = right = NULL;
  }
} Node;
```

Node

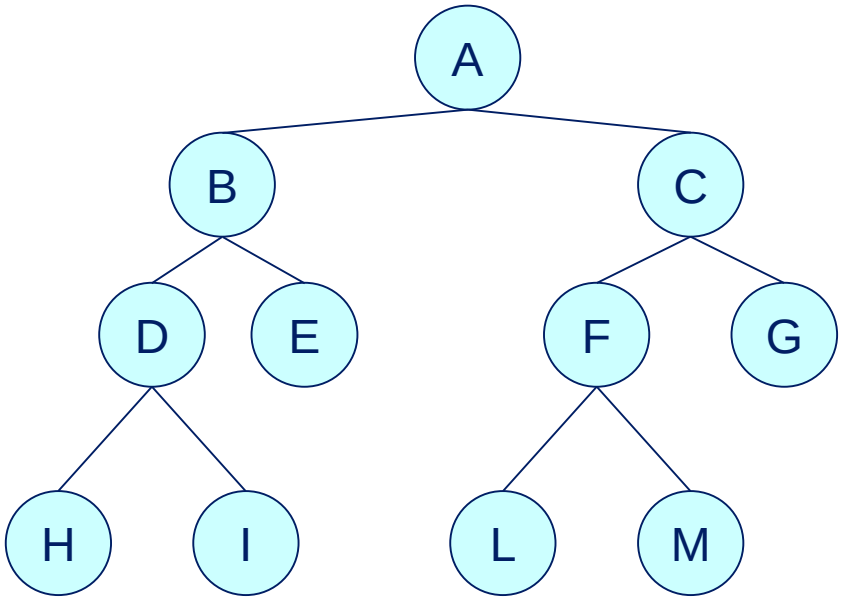


Puntatore a parent
sarà utile per realizzare
alcuni algoritmi in modo efficiente

Algoritmi di attraversamento di alberi

- Abbiamo diversi *modi* per attraversare un albero:
  - Pre-ordine (*preorder)*: visitiamo prima il nodo e poi i sottoalberi di sinistra e di destra.
  - In-ordine (*inorder)*: visitiamo prima il sottoalbero di sinistra, poi il nodo, ed infine il sottoalbero di destra.
  - Post-ordine (*postorder)*: visitiamo prima i sottoalberi di sinistra e di destra, poi il nodo.

Algortimi di attraversamento di alberi



- Preorder:
  A B D H I E C F L M G
- Inorder:
  H D I B E A L F M C G
- Postorder:
  H I D E B L M F G C A

Algoritmi ricorsivi di attraversamento di alberi binari

- Visit è una funzione che stampa il contenuto del nodo

```
void preorder(Node * h, void visit(Node *)) {
   if (h == NULL) return;
   visit(h);
   preorder(h->left, visit);
   preorder(h->right, visit);
}
```

Algoritmi ricorsivi di attraversamento di alberi binari

```
void inorder(Node * h, void visit(Node *)) {
   if (h == NULL) return;
   inorder(h->left, visit);
   visit(h);
   inorder(h->right, visit);
}
```

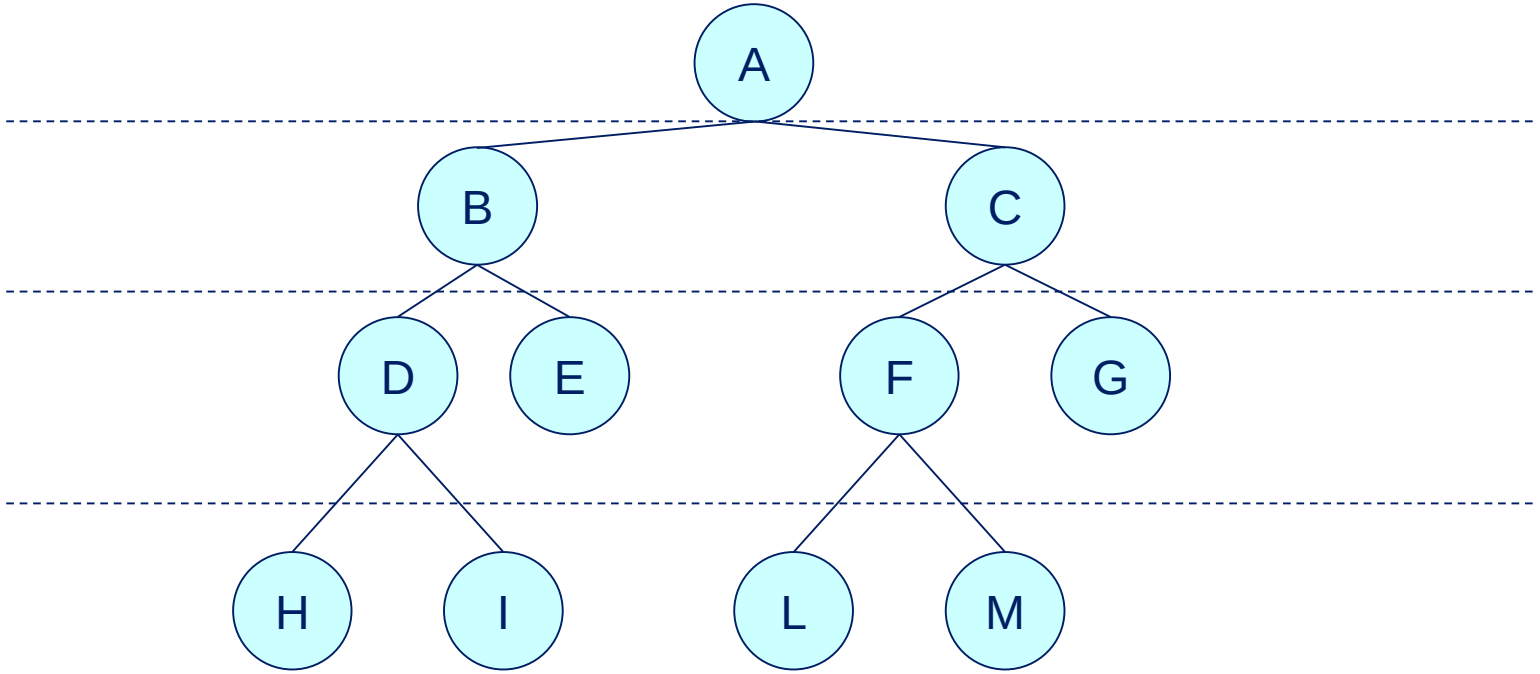
Algoritmi ricorsivi di attraversamento di alberi binari

```
void postorder(Node * h, void visit(Node *)) {
   if (h == NULL) return;
   postorder(h->left, visit);
   postorder(h->right, visit);
   visit(h);
}
```

Ulteriori tecniche di attraversamento di un albero

- Un modo alternativo per visitare un albero consiste nel visitare i nodi secondo l'ordine in cui essi appaiono sulla carta scandendo gli elementi dalla cima al fondo e da sinistra verso destra.
- Questo metodo prende il nome di ***level-order***, in quanto i nodi di ciascun livello sono visitati uno dopo l'altro.
- La caratteristica di questo algoritmo consiste nel fatto che *non* corrisponde ad una implementazione legata alla struttura ricorsiva dell'albero.

Attraversamento *level-order*



Attraversamento *level-order*

A B C D E F G H I L M

Esercizio 1
creazione albero di strutture

- Creare una struttura denominata Tdato con
  - Campi: **int eta; char nome[LMAX];**
  - Costruttori: default e specifico
  - Metodo:stampa => [nome-eta]
- Creare una struttura per un nodo denominata Tnodo con
  - Campi: **Tdata dato; Tnodo* dx; Tnodo* sx;**
  - Costruttori: default e specifico
  - Metodo:stampa => richiamare stampa Tdata
- Creare i seguenti alias:

```
typedef Tdato Dato;
typedef Tnodo Nodo;
typedef Tnodo* Tree;
```

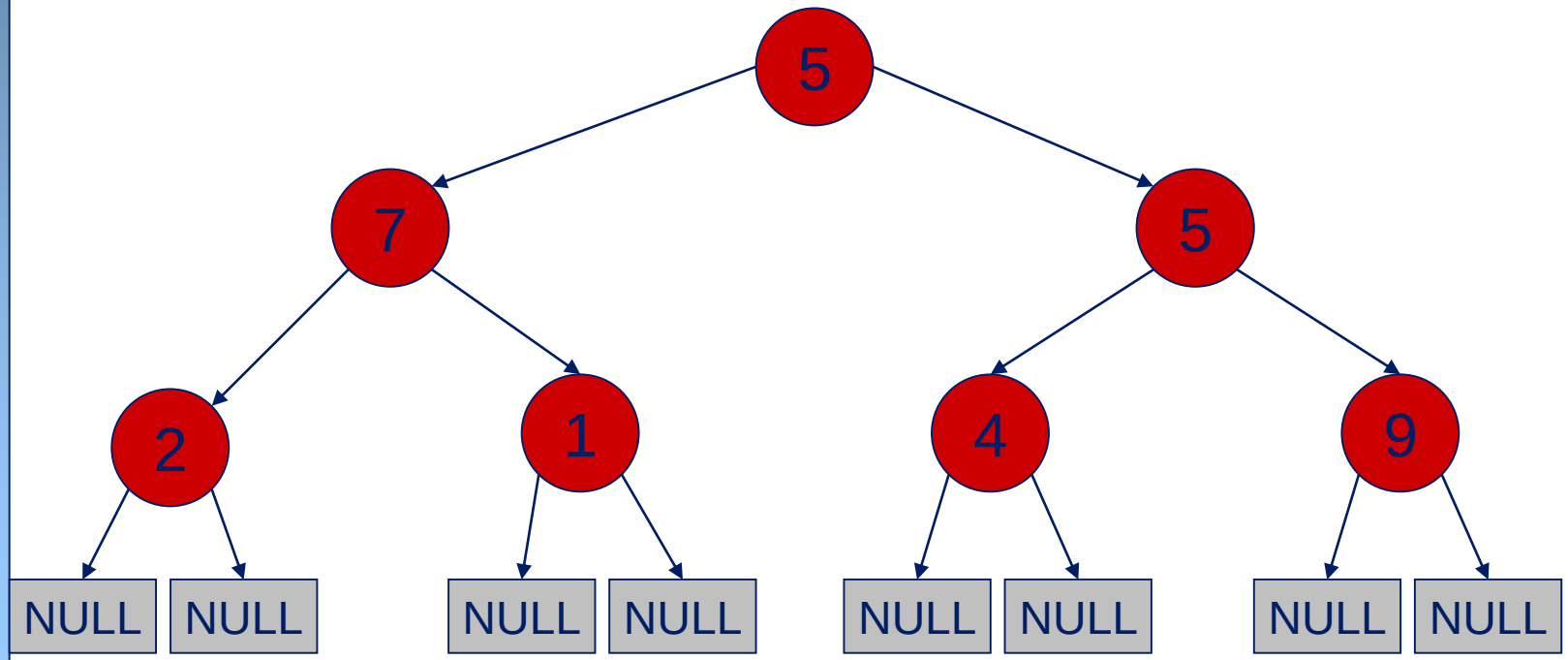
- Nel main creare una variabile t1 di tipo puntatore a Tnodo (Tree) ed inizializzarla opportunamente

```
Tree t1;
```

Esercizio 1
creazione albero di strutture

- Implementare le seguenti funzioni:
  Tree costruisci(Dato d, Tree sx, Tree dx) ;
  void inordine(Tree radice) ;

- Per creare il seguente albero e stamparne il contenuto



Esercizio 1
creazione albero di strutture

```
Tree costruisci(Dato d, Tree sx, Tree dx){
        Tree radice;
        radice = new Nodo();
        radice->dato = d;
        radice->sx = sx;
        radice->dx = dx;
        return radice;
        // return new Nodo(d, sx, dx);
}
void inordine(Tree radice){
    if (!(radice==NULL)) {
            inordine(radice->sx);
            radice->stampa();
            inordine(radice->dx);
    }
}
```

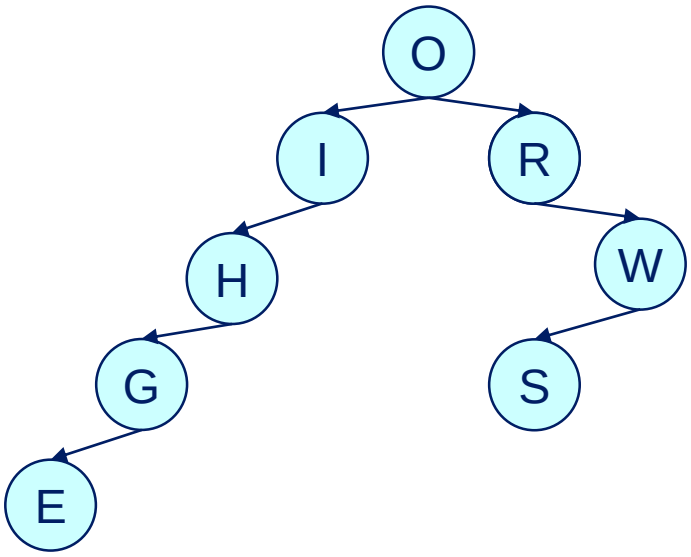
Esercizio 1
creazione albero di strutture

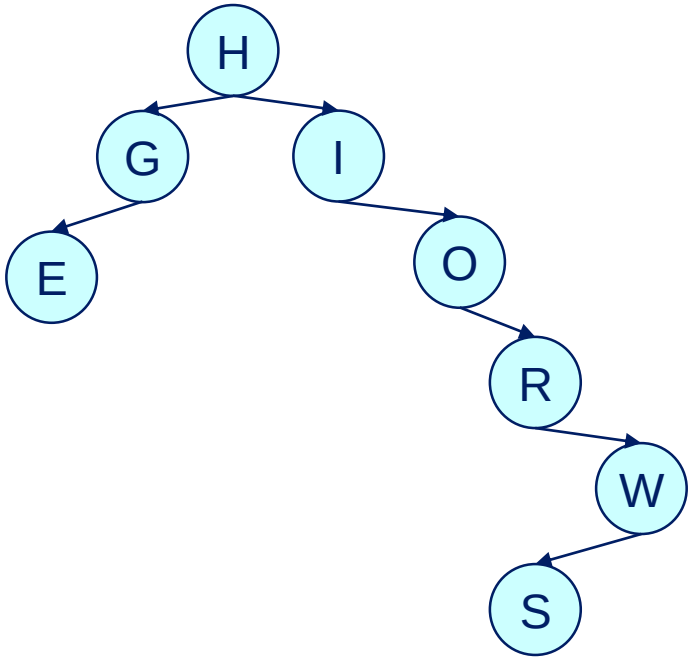
```
void stampa_nodo(Tree n ){
    n->stampa();
}
void inordine_gen(Tree radice, void f(Tree) ){
    if (!(radice==NULL)) {
        inordine(radice->sx);
        f(radice);
        inordine(radice->dx);
    }
}

// esempio invocazione
Tree root=NULL;
// … popolare albero…
inordine_gen(root, stampa_nodo);
```

Sintassi nel caso in cui parametro di una funzione è una funzione

Alberi binari di ricerca

- **Definizione**: Un *albero binario di ricerca* (*binary search tree (BST)*) è un albero binario dove la *chiave* (dato) memorizzata in ciascun nodo è:
  - maggiore o uguale alla chiave di tutti i nodi del sottoalbero sinistro di quel nodo;
  - minore o uguale alle chiavi di tutti i nodi del sottoalbero destro di quel nodo.





Alberi binari di ricerca

- Su un albero binario di ricerca di solito si definiscono alcune operazioni base:
  - *Inserimento* di un nuovo dato nell'albero.
  - *Cancellazione* di un dato dal BST.
  - *Ricerca* di un dato nel BST.
  - *Ordinamento* dei dati del BST.
  - *Ricerca del minimo/massimo* in un BST.
  - *Ricerca del successore/predecessore* in un BST.
  - *Unione* di due BST.

Minimo e Massimo in un BST

- L'elemento in un BST la cui chiave sia minima (massima) può essere determinato seguendo il nodo *left* (*right,* rispettivamente).

```
Node * Tree_Min(Node * t) {
   // we assume t != NULL
   while(t->left != NULL)
      t = t->left;
   return t;
 }
```

```
Node * Tree_Max(Node * t) {
   // we assume t != NULL
   while(t->right != NULL)
      t = t->right;
   return t;
 }
```

Ricerca in un BST

- L'operazione più comune su un BST è la ricerca di una chiave memorizzata nell'albero.
  - La procedura analizza la radice tracciando un percorso nell'albero.
  - Per ogni nodo X dell'albero incontrato, confronta la chiave del nodo X con la chiave cercata.
    - Se le due chiavi sono uguali, abbiamo terminato.
    - Se la chiave è minore della chiave di X, continuo la ricerca sul nodo sinistro.
    - Se la chiave è maggiore della chiave di X, continuo la ricerca sul nodo destro.
    - La complessità asintotica di questo algoritmo è O(h) dove h è l'altezza del BST.

Ricerca in un BST

```
Node * Tree_Search(Node * x, int k) {
  if ((x == NULL) || (x->data == k)) return x;
  if (k < x->data)
     return Tree_Search(x->left, k);
  else
     return Tree_Search(x->right, k);
}
```

Ricerca in un BST

```
Node * Tree_Search(Node * x, int k) {
  while ((x != NULL) && (x->data != k)) {
     if (k < x->data)
         x = x->left;
     else
         x = x->right;
  }
  return x;
}
```

Esercizio 2
creazione albero ordinato di strutture

- Implementare le seguenti funzioni:

  Tree ins_ord (Tree radice, Dato x)

  bool ricerca (Tree radice, Dato x)

  bool ricercaBin (Tree radice, Dato x)

Maggiore
a destra
Minore o uguale
a sinistra

- Per creare il un albero ordinato a partire da questa sequenza

5 7 3 2 1 4 9

- Stamparne il contenuto (funzione inordine)
- Ricercare con i 2 approcci (ricerca e ricercaBin) il valore **9** all'interno dell'albero

Esercizio 2
creazione albero ordinato di strutture

- Utile definire metodi per il confronto in struttura Tdato

bool eq (Tdato x)
// eq: equal – controlla se un Tdato è uguale a x

bool gt (Tdato x)
// gt: greater than – controlla se un Tdato e più grande di x

bool lt (Tdato x)
// lt: lesser than – controlla se un Tdato e più piccolo di x

Esercizio 2
creazione albero ordinato di strutture

Tree ins_ord (Tree n, Dato x)

// Ricorsione

// Inserire Dato x in albero partendo da Nodo n

Se Nodo n NULL

Creare nuovo Nodo con Dato x

Restituire indirizzo nuovo Nodo

Se x maggiore di dato di n

Inserire Dato x in sotto-albero di destra

Aggiornare Nodo n corrente

Restituire inidirizzo Nodo n

Altrimenti

Inserire Dato x in sotto-albero di sinistra

Aggiornare Nodo n corrente

Restituire indirizzo Nodo n

Esercizio 2
creazione albero ordinato di strutture

bool ricerca(Tree n, Dato x)

// Ricorsione

// Ricerca Dato x in albero partendo da Nodo n

Se Nodo n NULL

Restituire FALSE

Se x uguale a dato di n

Restituire TRUE

dato_in_sx = Ricerca Dato x in sotto-albero di sinistra

dato_in_dx = Ricerca Dato x in sotto-albero di destra

Se dato presente in uno dei due sotto-alberi

Restituire TRUE

Altrimenti

Restituire FALSE

Esercizio 2
creazione albero ordinato di strutture

bool ricercaBin(Tree n, Dato x)

// Ricorsione

// Ricerca Dato x in albero partendo da Nodo n

Se Nodo n NULL

Restituire FALSE

Se x uguale a dato di n

Restituire TRUE

Se x maggiore di dato di n

Ricercare Dato x in sotto-albero di destra

Restituire risultato della ricerca

Altrimenti

Ricercare Dato x in sotto-albero di sinistra

Restituire risultato della ricerca

Algoritmi di utilità su alberi

- Spesso capita di dover calcolare i valori di alcuni parametri strutturali di un albero, partendo dal nodo radice.
  - Calcolare il numero di nodi dell'albero.
  - Calcolare l'altezza di un albero.
  - Cammino in un albero.
  - Stampare un albero.
  - Disegnare un albero.

Calcolo numero nodi di un albero

- Il problema del calcolo del numero di nodi di un albero è molto semplice:

```
int contaNodi( Node * h ) {
   if (h == NULL) return 0;
   return count(h->left) + count(h->right) + 1;
}
```

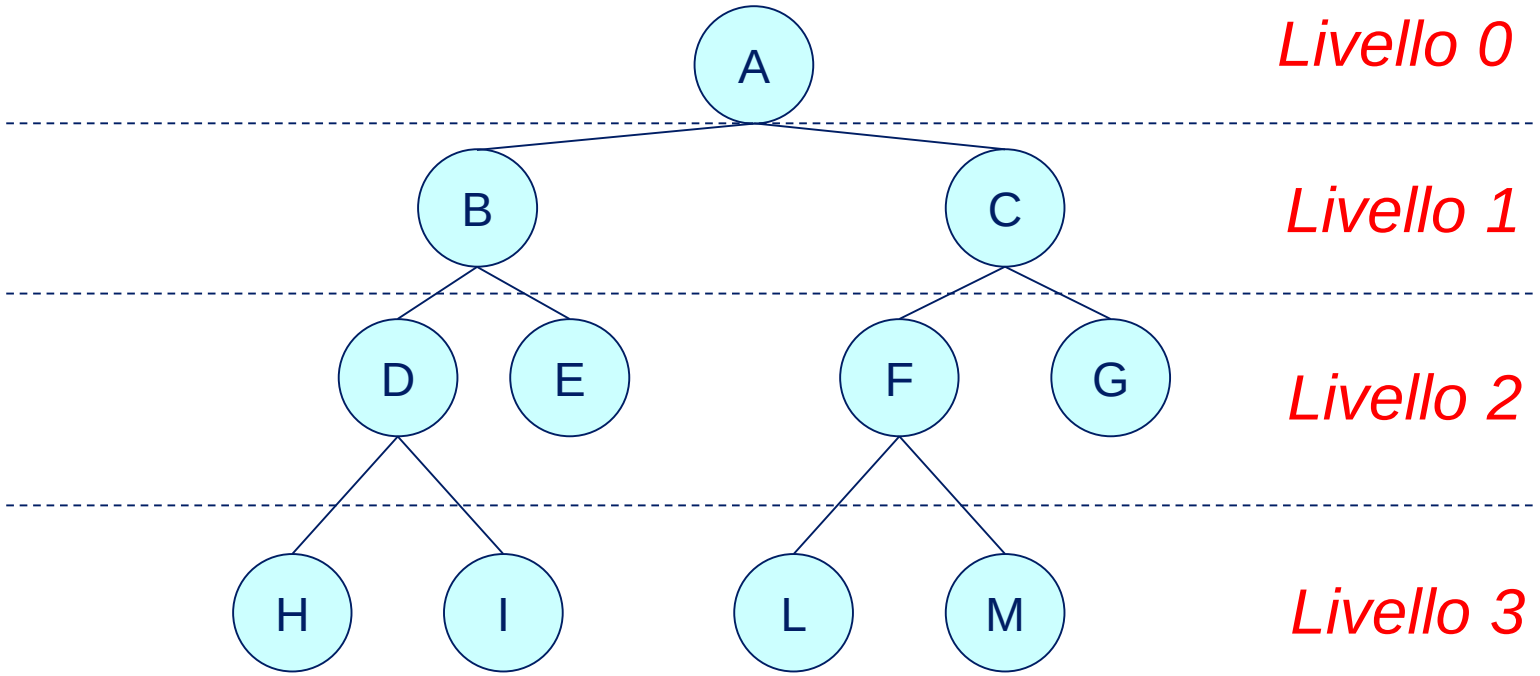
- Questo semplice algoritmo non dipende dall'ordine delle chiamate ricorsive.
  - Scambiando left con right il risultato non cambia.

Calcolo dell'altezza di un albero

- **Definizione**: Il *livello* di un albero è definito ricorsivamente sulla struttura dell'albero nel modo seguente:
  - la radice ha livello 0;
  - ogni altro nodo ha un livello pari al livello del padre più 1.
- **Definizione**: L'altezza di un albero è pari al massimo tra i livelli di tutti i suoi nodi.

```
int height (Node * h) {
  if (h == NULL) { return -1; }
  int u = height(h->left); // ordine non importante
  int v = height(h->right);
  if (u > v) return u+1;
  return v + 1;
}
```

Calcolo dell'altezza di un albero



Altezza dell'albero = 3

Calcolo dell'altezza di un albero

- **Definizione**: Il *livello* di un albero è definito ricorsivamente sulla struttura dell'albero nel modo seguente:
  - la radice ha livello 0;
  - ogni altro nodo ha un livello pari al livello del padre più 1.
- **Definizione**: L'altezza di un albero è pari al massimo tra i livelli di tutti i suoi nodi.

```
int height (Node * h) {
  if (h == NULL) return -1;
  int r = MAX(height(h->left), height(h->right));
  return r+1;
}
```

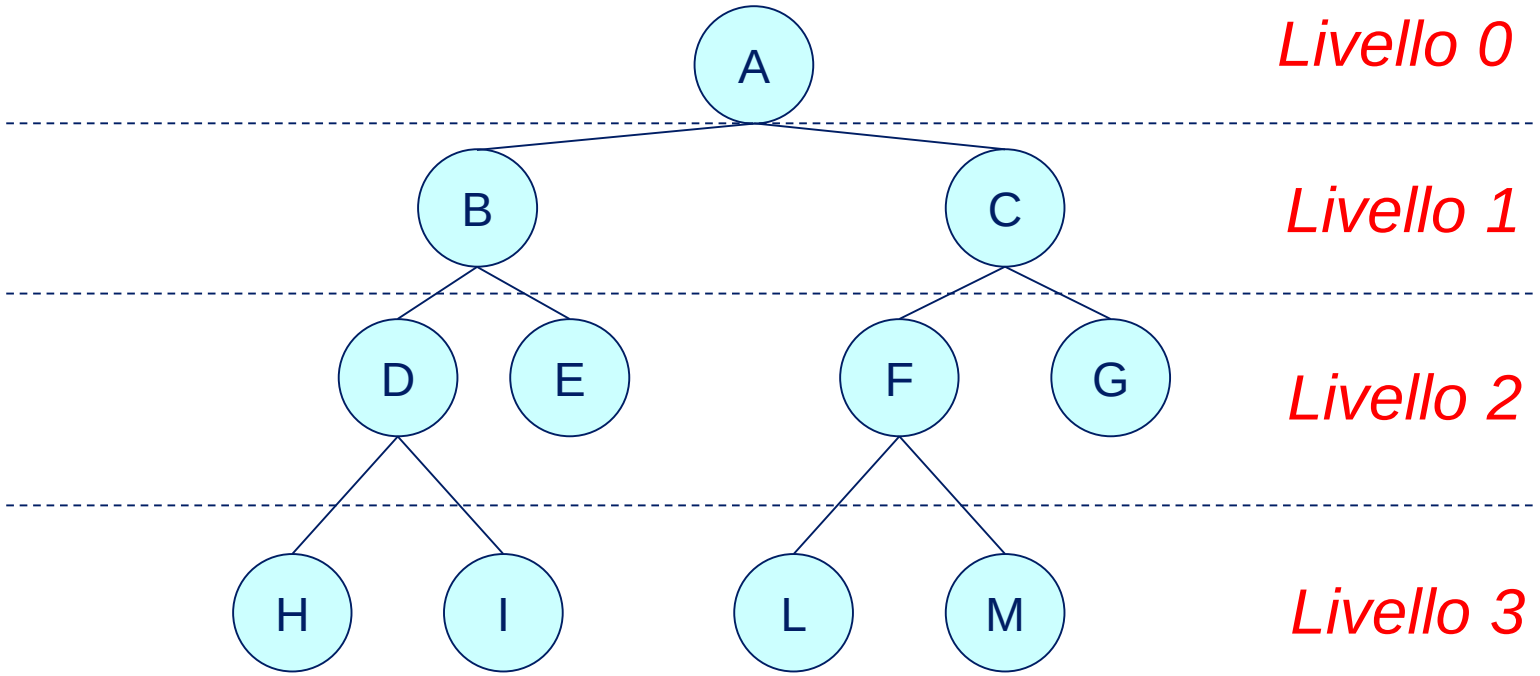
```
int MAX(int a, int b) {
 if (a > b) return a;
 return b;
}
```

Lunghezza del cammino di un albero

- **Definizione**: La *lunghezza del cammino* di un albero è la somma dei livelli di tutti i nodi dell'albero.
- Scrivere un programma che sfruttando la definizione di cui sopra calcoli la lunghezza del cammino di un albero:
  - La lunghezza del cammino di un nodo nullo è 0.
  - La lunghezza di un cammino di un nodo di livello *h* è pari a *h* addizionata alla lunghezza del cammino del sottoalbero di sinistra (*ll*) e alla lunghezza del cammino del sottoalbero di destra (*lr*).

$$lp(n,h) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = NULL \\ h + lp(n.left, h+1) + lp(n.right, h+1) & \text{se } n \text{ != } NULL \end{cases}$$

Lunghezza del cammino di un albero



Cammino = *1 +1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3*

= 2 + 8 + 12 = 22

Lunghezza del cammino di un albero

```
int path_length(Node * n) {
   return path_length_recur(n, 0);
}

int path_length_recur(Node * n, int h) {
  if (n == NULL) { return 0;}
  int ll =  path_length_recur(n->left, h+1);
  int lr = path_length_recur(n->right, h+1);
  return h + ll + lr;
}
```

Esercizio 3
analisi albero ordinato di strutture

- Implementare le seguenti funzioni:

  void preordine(Tree radice)

  void postordine(Tree radice)

  int altezza(Tree radice)

  int contaNodi(Tree radice)

  int contaFoglie(Tree radice)

  int lungCammino(Tree radice, int h)

- Invocare correttamente dal main tali funzioni stampando l'eventuale dato ritornato in modo appropriato

Esercizio 3
analisi albero ordinato di strutture

int altezza(Tree n)

// Ricorsione

// Calcola altezza di albero binario partendo da Nodo n

Se Nodo n NULL

Restituire -1

alt_sx = calcolare altezza sotto-albero sinistra

alt_dx = calcolare altezza sotto-albero destra

Restituire **1 + massimo** tra alt_dx e alt_sx

Esercizio 3
analisi albero ordinato di strutture

int contaNodi(Tree n)

// Ricorsione

// Calcolare numero nodi in albero binario partendo da Nodo n

Se Nodo n NULL

Restituire 0

n_sx = calcolare numero nodi in sotto-albero sinistra

n_dx = calcolare numero nodi in sotto-albero destra

Restituire **1 +** n_dx + n_sx

Esercizio 3
analisi albero ordinato di strutture

int contaFoglie(Tree n)

// Ricorsione

// Foglia → nessun nodo figlio → campi sx e dx NULL

// Calcolare numero foglie in albero binario partendo da Nodo n

Se Nodo n NULL

Restituire 0

Se Nodo n non ha figli

Restituire 1

f_sx = calcolare numero foglie in sotto-albero sinistra

f_dx = calcolare numero foglie in sotto-albero destra

Restituire f_dx + f_sx

Esercizio 3
analisi albero ordinato di strutture

int lungCammino(Tree n, int lvl)

// Ricorsione

// Calcolare lunghezza cammino partendo da Nodo n con livello lvl

Se Nodo n NULL

Restituire 0

c_sx = calcolare cammino sotto-albero sinistra (livello +1)

c_dx = calcolare cammino sotto-albero destra (livello +1)

Restituire lvl + c_dx + c_sx

$$C(n, h) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = NULL \\ h + C(sx, h+1) + C(dx, h+1) & \text{se } n \neq NULL \end{cases}$$

Esempi aggiuntivi - funzioni su alberi

Ricerca in albero
Conteggio delle iterazioni

```
bool ricerca (Tree radice, Dato x){
    if( radice == NULL )
        return false;
    if( radice->d.eq(x) )
        return true;
    return ( ricerca(radice->sx, x) || ricerca(radice->dx, x) );
}
```

```
bool ricerca_per_valutazione (Tree radice, Dato x, int n){
    cout << n << endl;
    if( radice==NULL )
        return false;
    if( radice->d.eq(x) )
        return true;
    return ( ricerca_per_valutazione(radice->sx, x, n+1) ||
        ricerca_per_valutazione(radice->dx, x, n+1) );
}
```

```
int n=0;
ricerca_per_valutazione(root, Tdato(3), n);
```

Ricerca in albero
Conteggio delle iterazioni

```
bool ricerca (Tree radice, Dato x){
    if( radice == NULL )
        return false;
    if( radice->d.eq(x) )
        return true;
    return ( ricerca(radice->sx, x) || ricerca(radice->dx, x) );
}
```

```
bool ricerca_per_valutazione (Tree radice, Dato x, int *n){
    cout << *n << endl;
    if( radice==NULL )
        return false;
    if( radice->d.eq(x) )
        return true;
    return ( ricerca_per_valutazione(radice->sx, x, &++(*n)) ||
        ricerca_per_valutazione(radice->dx, x, &++(*n)) );
}
```

```
int n=0;
ricerca_per_valutazione(root, Tdato(3), &n);
```

Ricerca binaria in albero
Conteggio delle iterazioni

```
bool ricercaBin (Tree radice, Dato x){
    if( radice == NULL ) return false;
    if( radice->d.eq(x) ) return true;
    if( x.gt(radice->d) ) return ricercaBin(radice->dx, x);
    else return ricercaBin(radice->sx, x);
}
```

```
bool ricercaBin_per_valutazione (Tree radice, Dato x, int n){
    cout << n << endl;
    if( radice == NULL ) return false;
    if( radice->d.eq(x) ) return true;
    if( x.gt(radice->d) ) return ricercaBin_per_valutazione(radice->dx, x, n+1);
    else return ricercaBin_per_valutazione(radice->sx, x, n+1);
}
```

```
int n=0;
ricercaBin_per_valutazione(root, Tdato(3), n);
```

Ricerca binaria in albero
Conteggio delle iterazioni

```
bool ricercaBin (Tree radice, Dato x){
    if( radice == NULL ) return false;
    if( radice->d.eq(x) ) return true;
    if( x.gt(radice->d) ) return ricercaBin(radice->dx, x);
    else return ricercaBin(radice->sx, x);
}
```

```
bool ricercaBin_per_valutazione (Tree radice, Dato x, int* n){
    cout << *n << endl;
    if( radice == NULL ) return false;
    if( radice->d.eq(x) ) return true;
    if( x.gt(radice->d) ) return ricercaBin_per_valutazione(radice->dx, x, &++(*n));
    else return ricercaBin_per_valutazione(radice->sx, x, &++(*n));
}
```

```
int n=0;
ricercaBin_per_valutazione(root, Tdato(3), &n);
```

Rappresentazione grafica di albero
Sorgente in file soluzione

- Albero ordinato a partire da questa sequenza

5 7 3 2 1 4 9

Funzioni in file sorgente delle soluzioni