

## Задачи по информатике

1. Дан отсортированный массив целых чисел, вывести отсортированный массив их квадратов.
2. Построй очередь на двух стеках.
3. Двое играют в игру: нужно по очереди класть на прямоугольный стол пятирублевые монеты. Если один не может положить монету, то победа засчитывается второму.

Может ли какой-то из игроков гарантированно победить? Если может, то предложи стратегию.

4. *Студент1* и *Студент2* прогневали правителя здешних земель — А.Д. Поселочного. Им грозит смертная казнь. Однако властитель оказался милосердный. Он предложил им следующее: их ведут в темницу и разводят по одиночным камерам, там они бросают монетку, а далее каждый должен сказать, что выпало у товарища. Если хотя бы один угадывает, их отпускают, иначе ...

У товарищей есть пару минут, пока их ведут в камеры, чтобы обсудить стратегию. Итак вопрос: смогут ли они гарантированно выйти живыми и невредимыми?

5. 1,5 землекопа из *страны невыученных уроков* копали-копали яму и вдруг наткнулись на какой-то корешок. Пригляделись внимательно, куда он ведет, и увидели огромное бинарное дерево. И, по всем канонам этой чудесной страны, дерево оказалось не простым, а золотым (каждая его нода содержала *целое* количество золота). Они решили пройтись по дереву и по максимуму собрать золота. Они могут стартовать в любой ноде, а дальше двигаться вперед или назад. Однако возвращаться в уже посещенную ими ноду категорически запрещено. Как им лучше поступить?

*Предложить решение за линию.*

// Вставить картинку с деревом

6. Принц-Полукровка оставил в своем учебнике по зельеварению огромное число подсказок и заметок. Одна из заметок содержала "Закон несохранения массы". Далее идет ее текст.

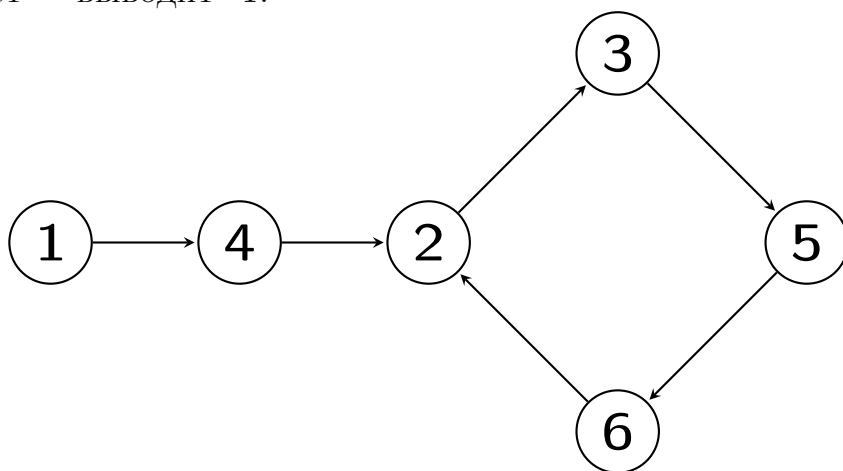
*Посмотрим на веса каждого из ингредиентов в рецепте и каждому из них сопоставим столбик единичной ширины и высоты, равной числу граммов соответствующего ингредиента. Выводим их снизу по одной линии и получим*

"гистограмму ингредиентов". Тогда масса полученного зелья будет равняться площади самого большого прямоугольника в гистограмме, одна из сторон которого лежит на общей нижней линии.

Найди площадь самого большого прямоугольника в гистограмме. Помни, что этот прямоугольник должен быть на общей базовой линии.

// Вставить пример гистограммы

7. Есть односвязный список, состоящий из различных значений. Возможно в нем есть цикл. Опиши алгоритм, который находит начало этого цикла, а если цикла нет — выводит -1.



8. Вагоны новой кольцевой железной дороги было предложено расписать  $N$  дизайнерам. Каждый дизайнер выбирал для своей раскраски полосу длиной  $L_i$ , начинающуюся от начала вагона и гарантированно помещающуюся на вагоне. Тем самым какие-то работы были полностью закрашены, а какие-то всё же были видны хотя бы частично.

Тебе дана последовательность перекраски. После завершения работы каждого дизайнера выведи одно число — количество различных работ, элементы которых видны на момент завершения.

*Предложить решение за линию.*

## 9. Король и вино.

Представь, ты — король, и у тебя завтра день рождения. По такому случаю ты устраиваешь вечеринку! Но какая же вечеринка может обойтись без открытия винного погреба?) И вот ты спускаешься в свой погреб и обнаруживаешь в нем ... записку, в которой говорится, что одна из 1000 бутылок вина отравлена. Яд этот очень опасный и всего одна его капля способна убить человека всего за 15-20 часов. И всё бы было не так плохо, да вот до праздника остается всего один день!

Подвергать риску себя и своих гостей ты не можешь, зато у тебя в темнице множество узников, которые ждут своей казни. И ты решаешь дать им вина, чтобы вычислить отравленную бутылку. Человек ты сердобольный, поэтому тебе хочется подвергнуть риску как можно меньшее количество заключённых. Вопрос: какое минимальное количество заключённых должно попробовать вино из бутылок, чтобы точно найти отравленную в течение 24 часов?

## 10. Infinity Train

Представь замкнутую по окружности железную дорогу. По ней едет поезд, последний вагон которого скреплён с первым так, что внутри можно свободно перемещаться между вагонами. Ты оказался в каком-то случайном вагоне и твоя задача — *посчитать их общее количество*. В каждом вагоне можно включать или выключать свет, но начальное положение переключателей случайное и заранее неизвестно.

Все вагоны внутри выглядят одинаково, окна закрыты так, что невозможно посмотреть наружу, движение поезда равномерное. Помечать вагоны как-либо, кроме включения или выключения света, нельзя. Количество вагонов конечно (не верьте заголовку).

*Придумать решение за линию.*

## Задачи по математике

1. Можно ли торт 3 разрезами поделить на 8 частей.
2. В кубической комнате со стороной 2 летают 9 мух. Докажи, что найдется хотя бы одна пара мух, находящихся на расстоянии не большем  $\sqrt{3}$ .
3. У шахматной доски отрезали два противоположных уголка. Можно ли теперь покрыть ее доминошками (по структуре они наполовину черные, наполовину белые)?
4. Решить  $3\sqrt{4x - 5y + 7} + 5|3x - 4y + 6| \leq 4$ , где  $x, y \in \mathbb{Z}$ . В ответе указать  $\max(x + y)$ .
5. **Читать голосом Александра Пушкиного.**

В эфире самая смешивательная среди взбалтывательных и самая взбалтывательная среди смешивательных рубрик программы «Галилео», которая называется ЭЭЭЭЭЭКСПЕРИМЕНТЫ.

Друзья, смотрите, мы берем две совершенно одинаковые кружки. В одной из них молоко, в другой — кофе (в одинаковых количествах). Переливаем ложку молока в кофе, перемешаем, а затем обратно переливаем ложку получившейся смеси в стакан с молоком. Итак, наши внимательные зрители, чего же у нас оказалось больше: молока в кофе или кофе в молоке?

*Подсказка.* Можешь для начала решить следующую задачу:

На главную туристическую площадь приехали два туристических автобуса. Все места в каждом из автобусов были заняты. В первом автобусе находилось 20 польских туристов, во втором — 20 чешских. Во время экскурсии начался ливень, и туристы бросились в автобусы, не разбирая, где чей. Кого больше: чешских туристов в польском автобусе или польских туристов в чешском?

6. Существует ли такой  $x$ , что  $tg(x) + \sqrt{3}$  и  $ctg(x) + \sqrt{3}$  целые числа?

7. //Жду Федю с картинкой про геому 7 класс

8. Решить  $2x \cdot 2^x + 3x \cdot 3^x + 1 \geq \sqrt{4^x + 9^x + 1} \cdot \sqrt{13x^2 + 1}$ .

9. //Жду Федю с картинкой про геому 4 решения

## 10. Ральный кейс.

Открывает первокурсник задавальник, а он ему как раз и видит такую задачу: «Почему  $\sqrt{2}$  иррационально?»

11. Из 9 аксиом поля действительных чисел вывести следующее:

a)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists! (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0;$

b)  $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 0 = 0;$

c)  $\forall a \in \mathbb{R} : (-1) \cdot a = -a.$

Аксиомы сложения

- 1)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + b = b + a;$
- 2)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a + b) + c = a + (b + c);$
- 3)  $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + 0 = a;$
- 4)  $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0.$

Аксиомы умножения

- 5)  $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a;$
- 6)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
- 7)  $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 1 = a;$
- 8)  $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1.$

Аксиома связи сложения и умножения

- 9)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

12. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

13. Доказать, что  $D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n}(\pi \cdot m! \cdot x)$ , где  $D(x)$  - функция Дирихле.

**14. Бонус к первой задаче.**

Докажите, что в  $\mathbb{R}^2$  это невозможно.

Здесь торт — связное выпуклое множество в  $\mathbb{R}^2$  с топологией, порождённой евклидовой метрикой.

# Решения

## Информатика

1. Идеино: самые большие по модулю числа на концах.

$leftIndex = 0, rightIndex = n - 1;$

Дальше сравниваем элементы и записываем в новый массив с конца.

2. `stackIn, stackOut`.

3. Идея симметрии. Первый кладет монету на центр стола, второй кладет куда-то, а задача первого — симметрично отражать ходы соперника.

4. *Подсказка.* От чего можно отталкиваться, если не знаешь, что выпало у соседа?

**Решение:** Один говорит, что выпало у него, второй — отрицание своего результата.

5. Через DFS посчитать максимальные пути.

```
class Solution {
    int answer = 0;
    int maxPathSum(TreeNode root) {
        helper (root);
        return answer;
    }

    int helper (TreeNode node) {
        if (node == null) {
            return 0;
        }

        int maxLeftPath = Math.max(helper(node.left), 0);
        int maxRightPath = Math.max(helper(node.right), 0);
        answer = Math.max(answer, maxLeftPath + maxRightPath + node.val);
        return Math.max(maxLeftPath, maxRightPath) + node.val;
    }
}
```

6. Разбор.

Первый проход имеет 3 базовых случая:

- а) Следующий столбец меньше предыдущего, тогда максимальная площадь — высота первого столбца.

- b) Следующий столбец равен предыдущему, тогда максимальная площадь — удвоенная высота столбца.
- c) Следующий столбец больше предыдущего, тогда максимальная площадь — высота первого столбца, но продленного дальше.

Тогда сделаем так: заведем два стека, в одном будут лежать индексы столбцов, а во втором их высоты. Будем идти по гистограмме, если введенный столбец  $\geq$  предыдущего, то записываем его в стек, обновляем стек индексов. Если же меньше, то попадаем из стеков столбцы, при этом считая возможную максимальную площадь, пока не дойдем до случая  $\geq$ . Индекс у последнего введенного столбца можно оставить как у последнего попнутого, тк туда мы очевидно можем продлиться. А после цикла еще раз пробегаемся по непопнутым значениям и считаем возможные макс площади для них (они все образуют строго возрастающую последовательность).

```
public class Task {
    public static void main(String[] args) throws IOException {
        BufferedReader bi = new BufferedReader(
            new InputStreamReader(System.in));
        PrintWriter pw = new PrintWriter(System.out);
        StringTokenizer st = new StringTokenizer(bi.readLine());
        Stack<Long> indexes = new Stack<>();
        Stack<Long> heights = new Stack<>();
        long maxArea = 0;
        int N = Integer.parseInt(st.nextToken());

        for (int i = 1; i <= N; i++) {
            long num = Long.parseLong(st.nextToken());
            long prevInd = i;
            while (!heights.isEmpty() && heights.peek() > num) {
                prevInd = indexes.peek();
                long area = heights.pop() * (i - indexes.pop());
                maxArea = Math.max(maxArea, area);
            }
            indexes.add(prevInd);
            heights.add(num);
        }

        while (!indexes.isEmpty()) {
            long area = heights.pop() * (N - indexes.pop() + 1);
            maxArea = Math.max(maxArea, area);
        }
    }
}
```

```
        pw.printf("%d", maxArea);  
        pw.close();  
    }  
}
```

7. Плавню подводем к мысле об использовании двух указателей.

Подзадача: найти середину связного списка.

Метод Эзопа: заводим указатель-черепашку, указатель-кролика. У первого скорость  $v$ , у второго  $2v$ . Тогда при пробеге через весь список черепашка будет на середине.

В этой задаче сначала запускаем их, если цикла нет — ответ. Если есть, то рано или поздно они встретятся где-то в цикле. Если к этому моменту черепашка сделала  $i$  шагов, а кролик  $2i$ , то их позиции совпадают с точностью до целого количества кругов цикла:  $2i = i + k\lambda \Rightarrow i = k\lambda$ .

Далее перемещаем один указатель в начало и уравниваем скорости. Утверждается, что если их снова запустить, то встретятся они в начале цикла. Это так, ибо:

1. до начала цикла указатель из начала пройдет  $j$  шагов.
2. черепашка прошла целое количество циклов  $k\lambda$ , и тк она стартует из начала списка, то до конца цикла она не проходит аккуратно  $j$  шагов.

Ч.Т.Д.

8. Берем стек.

Цикл по дизайнерам:

- Для очередного значения  $L$  снимаем с вершины элементы, пока они  $\leq L$ ;
- Вставляем  $L$ ;
- Выводим кол-во элементов стека;

9. Подводим к идее пронумеровать все бутылки двоичным кодом, а дальше сделать таблицу, где в столбцах указываются номера бутылок, соответственно по столбцу пишем их номер в двоичной СС, в строках будут просто наши узники. Тогда дадим одну каплю вина каждому узнику, если напротив него стоит 1. И тогда по набору умерших узников будет сразу понятно, какая бутылка была отравлена. Никто не умер — нулевая бутылка.



**10. I способ (много шагов):** Просыпаемся,ключаем свет, чулочно идти вправо на вагон, выключаем свет, возвращаемся, попутно считая вагоны. Если лампа в вагоне, где вы точно начали, не горит, значит вы его выключили, тогда ответ.

Количество шагов в этом случае:

$$1 + 1 + 2 + 2 + \dots + N + N = N(N + 1)$$

**II способ (чуть меньше шагов):** Идти влево — выключать свет, вправо — включать свет. Если возвращаемся в вагон, где уже были, но лампочка изменила свое состояние, значит мы ее выключили, тоже приходим в ответ.

Количество шагов в этом случае:

$$1 + 2 + \dots + N + N = \frac{N(N + 3)}{2}$$

**III способ (линия):** Стратегия из способа II, однако делаем каждый раз шагов соразмерно степени двойки (1, 2, 4, 8, ...). Если заметили изменение в уже пройденном вагоне, значит длина поезда — это кол-во всех пройденных за этот обход вагонов без коллизий.

Количество шагов в этом случае ( $2^n$  — количество шагов, когда мы перескачили длину поезда, т.е.  $2^{n-1} < N \leq 2^n$ ):

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + N = (2^{n+1} - 1) + N = (4 \cdot 2^{n-1} - 1) + N < 4N + N = 5N$$

## Решения

### Математика

1. Да, в  $R^3$  крест на крест и по высоте.
2. Принцип Дирихле: делим на 8 частей, в какой-то две мухи.
3. Обе клеточки одного цвета  $\Rightarrow$  остается 30 белых, 32 черных  $\Rightarrow$  не получится.
4. Замечаем, что модуль и корень неотрицательны, а под модулем целое число, значит под модулем только 0. Помня про равносильные переходы и  $y : 3$  получаем ответ:  $6 + 6 = 12$ .

5. *Решение подзадачи:* обозначаем часть туристов за  $x$  и понимаем, что их будет поровну в каждом автобусе.

*Решение задачи:* тот же ответ, можно через неизвестную, а можно рукомахательно это показать.

6. Пусть существуют, тогда из предположения приравниваем  $tgx$  и получаем дробь, которая должна являться рациональной, однако равна  $\sqrt{3} \Rightarrow$  противоречие.

7. жду задачу

8. Заметим, что тут фигурируют два вектора:  $\vec{x} = (2x, 3x, 1), \vec{y} = (2^x, 3^x, 1)$ .

Неравенство Коши-Буняковского:  $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$ .

А тут неравенство в обратную сторону, значит достигается равенство, а тогда векторы коллинеарны. Однако таких векторов не найдется.

9. жду задачу

10. Этот кейс был у пекусов ЛФИ :)

Можно арифметически.

Можно через теорему Безу.

Можно графически через наименьшие стороны квадратов.

11. а) От противного. Пусть  $\exists a_1 \neq a_2$  противоположные к  $a$ .

$$a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2. \text{ Противоречие.}$$

$$\text{b) } 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a + (a + (-a)) = (0 \cdot a + a) + (-a) = (0 + 1) \cdot a + (-a) = a + (-a) = 0.$$

$$\text{c) } (-1) \cdot a + a = (-1 + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow (-1) \cdot a = -a$$

12. затехать

13. Два случая:

a)  $x \in \mathbb{Q}$ , т.е.  $x$  представим в виде несократимой дроби.

Начиная с какого-то  $m', m!$  начнет перебивать знаменатель  $x$ , тогда под косинусом будет целое кол-во  $\pi$ , тогда косинус равен  $\pm 1$ , а он еще в степени  $2n \Rightarrow D(x) = 1$ .

b)  $x \notin \mathbb{Q}$ .

Тогда очев  $D(x) = 0$ .

14. *За доказательство пойдет полный перебор случаев.* Тут абитуру должны испугать страшные слова.

Во-первых, нам важно, что торт выпуклый. Тогда рассмотрим первые два разреза. Они могут иметь 0 или одну общую точку (совпадение выкидываем).

Если 0 (при параллельности), то можно получить 4 (все параллельны) или 6 (две параллельны и 1 пересекает).

Если одна, то либо пересечение с обоими разрезами, тогда 6 или 7.

Рассмотрели все случаи.