Задачи по информатике

1. Дан отсортированный массив целых чисел, вывести отсортированный массив их квадратов.

2. Построй очередь на двух стеках.

3. Двое играют в игру: нужно по очереди класть на прямоугольный стол пятирублевые монеты. Если один не может положить монету, то победа засчитывается второму.

Может ли какой-то из игроков гарантированно победить? Если может, то предложи стратегию.

4. *Студент1* и *Студент2* прогневали правителя здешних земель — А.Д. Поселочного. Им грозит смертная казнь. Однако властитель оказался милосердный. Он предложил им следующее: их ведут в темницу и разводят по одиночным камерам, там они бросают монетку, а далее каждый должен сказать, что выпало у товарища. Если хотя бы один угадывает, их отпускают, иначе ...

У товарищей есть пару минут, пока их ведут в камеры, чтобы обсудить стратегию. Итак вопрос: смогут ли они гарантированно выйти живыми и невредимыми?

5. 1,5 землекопа из *страны невыученных уроков* копали-копали яму и вдруг наткнулись на какой-то корешок. Пригляделись внимательно, куда он ведет, и увидели огромное бинарное дерево. И, по всем канонам этой чудесной страны, дерево оказалось не простым, а золотым (каждая его нода содержала *целое* количество золота). Они решили пройтись по дереву и по максимуму собрать золота. Они могут стартовать в любой ноде, а дальше двигаться вперед или назад. Однако возвращаться в уже посещенную ими ноду категорически запрещено. Как им лучше поступить?

Предложить решение за линию.

// Вставить картику с деревом

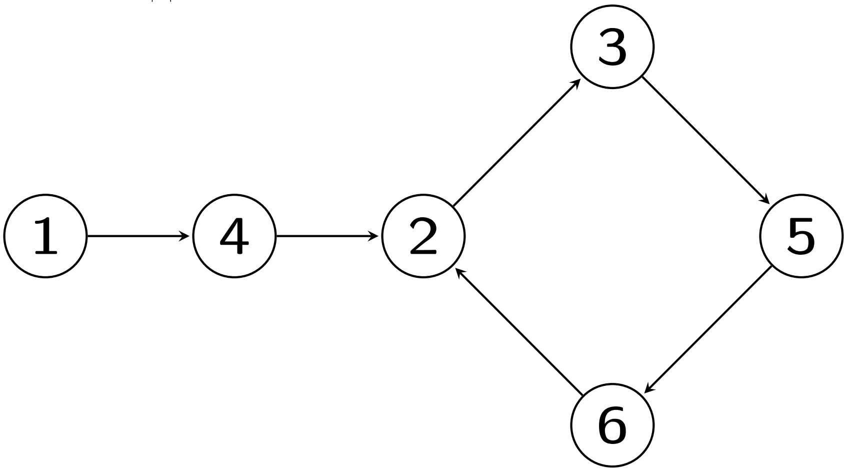
6. Принц-Полукровка оставил в своем учебнике по зельеварению огромное число подсказок и заметок. Одна из заметок содержала "Закон несохранения массы". Далее идет ее текст.

Посмотрим на веса каждого из ингредиентов в рецепте и каждому из них сопоставим столбик единичной ширины и высоты, равной числу граммов соответствующего ингредиента. Выровняем их снизу по одной линии и получим *"гистограмму ингредиентов". Тогда масса полученного зелья будет равняться площади самого большого прямоугольника в гистограмме, одна из сторон которого лежит на общей нижней линии.*

Найди площадь самого большого прямоугольника в гистограмме. Помни, что этот прямоугольник должен быть на общей базовой линии.

// Вставить пример гистограммы

7. Есть односвязный список, состоящий из различных значений. Возможно в нем есть цикл. Опиши алгоритм, который находит начало этого цикла, а если цикла нет — выводит *-1*.



8. Вагоны новой кольцевой железной дороги было предложено расписать N дизайнерам. Каждый дизайнер выбирал для своей раскраски полосу длиной L_i, начинающуюся от начала вагона и гарантированно помещающуюся на вагоне. Тем самым какие-то работы были полностью закрашены, а какие-то всё же были видны хотя бы частично.

Тебе дана последовательность перекраски. После завершения работы каждого дизайнера выведи одно число — количество различных работ, элементы которых видны на момент завершения.

Предложить решение за линию.

9. Король и вино.

Представь, ты — король, и у тебя завтра день рождения. По такому случаю ты устраиваешь вечеринку! Но какая же вечеринка может обойтись без открытия винного погреба?) И вот ты спускаешься в свой погреб и обнаруживаешь в нем ... записку, в которой говорится, что одна из 1000 бутылок вина отравлена. Яд этот очень опасный и всего одна его капля способна убить человека всего за 15-20 часов. И всё бы было не так плохо, да вот до праздника остается всего один день!

Подвергать риску себя и своих гостей ты не можешь, зато у тебя в темнице множество узников, которые ждут своей казни. И ты решаешь дать им вина, чтобы вычислить отравленную бутылку. Человек ты сердобольный, поэтому тебе хочется подвергнуть риску как можно меньшее количество заключённых. Вопрос: какое минимальное количество заключённых должно попробовать вино из бутылок, чтобы точно найти отравленную в течение 24 часов?

10. Infinity Train

Представь замкнутую по окружности железную дорогу. По ней едет поезд, последний вагон которого скреплён с первым так, что внутри можно свободно перемещаться между вагонами. Ты оказался в каком-то случайном вагоне и твоя задача — *посчитать их общее количество.* В каждом вагоне можно включать или выключать свет, но начальное положение переключателей случайное и заранее неизвестно.

Все вагоны внутри выглядят одинаково, окна закрыты так, что невозможно посмотреть наружу, движение поезда равномерное. Помечать вагоны как-либо, кроме включения или выключения света, нельзя. Количество вагонов конечно (не верьте заголовку).

Придумать решение за линию.

Задачи по математике

1. Можно ли торт 3 разрезами поделить на 8 частей.

2. В кубической комнате со стороной 2 летают 9 мух. Докажи, что найдется хотя бы одна пара мух, находящихся на расстоянии не большем $\sqrt{3}$.

3. У шахматной доски отрезали два противолежащих уголка. Можно ли теперь покрыть ее доминошками (по структуре они наполовину черные, наполовину белые)?

4. Решить $3\sqrt{4x-5y+7}+5|3x-4y+6| \leqslant 4$, где $x, y \in \mathbb{Z}$. В ответе указать $max(x+y)$.

5. Читать голосом Александра Пушного.

В эфире самая смешивательная среди взбалтывательных и самая взбалтывательная среди смешивательных рубрик программы «Галилео», которая называется ЭЭЭЭЭЭКСПЕРИМЕНТЫ.

Друзья, смотрите, мы берем две совершенно одинаковые кружки. В одной из них молоко, в другой — кофе (в одинаковых количествах). Переливаем ложку молока в кофе, перемешаем, а затем обратно переливаем ложку получившейся смеси в стакан с молоком. Итак, наши внимательные зрители, чего же у нас оказалось больше: молока в кофе или кофе в молоке?

Подсказка. Можешь для начала решить следующую задачу:

На главную туристическую площадь приехали два туристических автобуса. Все места в каждом из автобусов были заняты. В первом автобусе находилось 20 польских туристов, во втором — 20 чешских. Во время экскурсии начался ливень, и туристы бросились в автобусы, не разбирая, где чей. Кого больше: чешских туристов в польском автобусе или польских туристов в чешском?

6. Существует ли такой x, что $\operatorname{tg}(x) + \sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg}(x) + \sqrt{3}$ целые числа?

7. //Жду Федю с картинкой про геому 7 класс

8. Решить $2x \cdot 2^x + 3x \cdot 3^x + 1 \geqslant \sqrt{4^x + 9^x + 1} \cdot \sqrt{13x^2 + 1}$.

9. //Жду Федю с картинкой про геому 4 решения

10. Ральный кейс.

Открывает первокурсник задавальник ~~, а он ему как раз~~ и видит такую задачу: «Почему $\sqrt{2}$ иррационально?»

11. Из 9 аксиом поля действительных чисел вывести следующее:

a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists!\ (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0;$

b) $\forall a \in \mathbb{R} :\ a \cdot 0 = 0;$

c) $\forall a \in \mathbb{R} :\ (-1) \cdot a = -a.$

Аксиомы сложения

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a + b = b + a;$

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (a + b) + c = a + (b + c);$

3) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a + 0 = a;$

4) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} : \quad a + (-a) = 0.$

Аксиомы умножения

5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot b = b \cdot a;$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

7) $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot 1 = a;$

8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1.$

Аксиома связи сложения и умножения

9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

12. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

13. Доказать, что $D(x) = \lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{n \to \infty} \cos^{2n}(\pi \cdot m! \cdot x)$, где $D(x)$ - функция Дирихле.

14. Бонус к первой задаче.

Докажите, что в $\mathbb{R}^2$ это невозможно.

Здесь торт — связное выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ с топологией, порождённой евклидовой метрикой.

Решения

Информатика

1. Идейно: самые большие по модулю числа на концах.

leftIndex = 0, rightIndex = n - 1;

Дальше сравниваем элементы и записываем в новый массив с конца.

2. stackIn, stackOut.

3. Идея симметрии. Первый кладет монету на центр стола, второй кладет куда-то, а задача первого — симметрично отражать ходы соперника.

4. *Подсказка.* От чего можно отталкиваться, если не знаешь, что выпало у соседа?

Решение: Один говорит, что выпало у него, второй — отрицание своего результата.

5. Через DFS посчитать максимальные пути.

```
class Solution {
    int answer = 0;
    int maxPathSum(TreeNode root) {
        helper (root);
        return answer;
    }

    int helper (TreeNode node) {
        if (node == null) {
            return 0;
        }

        int maxLeftPath = Math.max(helper(node.left), 0);
        int maxRightPath = Math.max(helper(node.right), 0);
        answer = Math.max(answer, maxLeftPath + maxRightPath + node.val);
        return Math.max(maxLeftPath, maxRightPath) + node.val;
    }
}
```

6. Разбор.

Первый проход имеет 3 базовых случая:

а) Слудующий столбец меньше предыдещего, тогда максимальная площадь — высота первого столбца.

b) Слудующий столбец равна предыдещего, тогда максимальная площадь — удвоенная высота столбца.

c) Слудующий столбец больше предыдещего, тогда максимальная площадь — высота первого столбца, но продленного дальше.

Тогда сделаем так: заведем два стека, в одном будут лежать индексы столбцов, а во втором их высоты. Будем идти по гистограмме, если введенный столбец $\geqslant$ предыдущего, то записываем его в стек, обновляем стек индексов. Если же меньше, то попаем из стеков столбцы, при этом считая возможную максимальную площадь, пока не дойдем до случая $\geqslant$. Индекс у последнего введенного столбца можно оставить как у последнего попнутого, тк туда мы очевидно можем продлиться. А после цикла еще раз пробегаемся по непопнутым значениям и считаем возможные макс площади для них (они все образуют строго возрастающую последовательность).

```java
public class Task {
    public static void main(String[] args) throws IOException {
        BufferedReader bi = new BufferedReader(
            new InputStreamReader(System.in));
        PrintWriter pw = new PrintWriter(System.out);
        StringTokenizer st = new StringTokenizer(bi.readLine());
        Stack<Long> indexes = new Stack<>();
        Stack<Long> heights = new Stack<>();
        long maxArea = 0;
        int N = Integer.parseInt(st.nextToken());

        for (int i = 1; i <= N; i++) {
            long num = Long.parseLong(st.nextToken());
            long prevInd = i;
            while (!heights.isEmpty() && heights.peek() > num) {
                prevInd = indexes.peek();
                long area = heights.pop() * (i - indexes.pop());
                maxArea = Math.max(maxArea, area);
            }
            indexes.add(prevInd);
            heights.add(num);
        }

        while (!indexes.isEmpty()) {
            long area = heights.pop() * (N - indexes.pop() + 1);
            maxArea = Math.max(maxArea, area);
        }
```

```
            pw.printf("%d", maxArea);
            pw.close();
        }
    }
```

7. Плавно подводим к мысле об использовании двух указателей.

Подзадача: найти середину связного списка.

Метод Эзопа: заводим указатель-черепашку, указатель-кролика. У первого скорость v, у второго $2v$. Тогда при пробеге через весь список черепашка будет на середине.

В этой задаче сначала запускаем их, если цикла нет — ответ. Если есть, то рано или поздно они встретятся где-то в цикле. Если к этому моменту черепашка сделала i шагов, а кролик $2i$, то их позиции совпадают с точностью до целова количества кругов цикла: $2i = i + k\lambda \Rightarrow i = k\lambda$.

Далее перемещаем один указатель в начало и уравниваем скорости. Утверждается, что если их снова запустить, то встретятся они в начале цикла. Это так, ибо:

1. до начала цикла указатель из начала пройдет j шагов.

2. черепашка прошла целое количество циклов $k\lambda$, и тк она стартует из начала списка, то до конца цикла она не проходит аккурат j шагов.

Ч.Т.Д.

8. Берем стек.

Цикл по дизайнерам:

- Для очередного значения L снимаем с вершины элементы, пока они $\leqslant L$;

- Вставляем L;

- Выводим кол-во элементов стека;

9. Подводим к идее пронумеровать все бутылки двоичным кодом, а дальше сделать таблицу, где в столбцах указываются номера бутылок, соответственно по столбцу пишем их номер в двоичной СС, в строках будут просто наши узники. Тогда дадим одну каплю вина каждому узнику, если напротив него стоит 1. И тогда по набору умерших узников будет сразу понятно, какая бутылка была отравлена. Никто не умер — нулевая бутылка.

10. *I способ (много шагов):* Просыпаемся, ключаем свет, чулночно идти вправо на вагон, выключаем свет, возвращаемся, попутно считая вагоны. Если лмпа в вагоне, где вы точно начали, не горит, значит вы его выключили, тогда ответ.

Количество шагов в этом случае:

$$1 + 1 + 2 + 2 + ... + N + N = N(N + 1)$$

II способ (чуть меньше шагов): Идти влево — выключать свет, вправо — включать свет. Если возвращаемся в вагон, где уже были, но лампочка изменила свое состояние, значит мы ее выключили, тоже приходим в ответ.

Количество шагов в этом случае:

$$1 + 2 + ... + N + N = \frac{N(N + 3)}{2}$$

III способ (линия): Стратегия из способа II, однако делаем каждый раз шагов соразмерно степени двойки (1, 2, 4, 8, ...). Если заметили изменение в уже пройденном вагоне, значит длина поезда — это кол-во всех пройденных за этот обход вагонов без коллизий.

Количество шагов в этом случае (2^n – количество шагов, когда мы перескачили длину поезда, т.е. $2^{n-1} < N \leqslant 2^n$):

$$1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n + N = (2^{n+1} - 1) + N = (4 \cdot 2^{n-1} - 1) + N < 4N + N = 5N$$

Решения

Математика

1. Да, в R^3 крест на крест и по высоте.

2. Принцип Дирихле: делим на 8 частей, в какой-то две мухи.

3. Обе клеточки одного цвета $\Rightarrow$ остается 30 белых, 32 черных $\Rightarrow$ не получится.

4. Замечаем, что модуль и корень неотрицательны, а под модулем целое число, значит под модулем только 0. Помня про равносильные переходы и $y \vdots 3$ получаем ответ: $6 + 6 = $ *12*.

5. *Решение подзадачи:* обозначаем часть туристов за x и понимаем, что их будет поровну в каждом автобусе.

Решение задачи: тот же ответ, можно через неизвестную, а можно рукомахательно это показать.

6. Пусть существуют, тогда из предположения приравниваем tgx и получаем дробь, которая должна являться рациональной, однако равна $\sqrt{3} \Rightarrow$ противоречие.

7. жду задачу

8. Заметим, что тут фигурируют два вектора: $\vec{x} = (2x, 3x, 1), \vec{y} = (2^x, 3^x, 1)$.

Неравенство Коши-Буняковского: $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$.

А тут неравенство в обратную сторону, значит достигается равенство, а тогда векторы коллинеарны. Однако таких векторов не найдется.

9. жду задачу

10. Этот кейс был у пекусов ЛФИ :)

Можно арифметически.

Можно через теорему Безу.

Можно графически через наименьшие стороны квадратов.

11. a) От противного. Пусть $\exists a_1 \neq a_2$ противоположные к a.

$a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$. Противоречие.

b) $0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a + (a + (-a)) = (0 \cdot a + a) + (-a) = (0 + 1) \cdot a + (-a) = a + (-a) = 0$.

c) $(-1) \cdot a + a = (-1 + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow (-1) \cdot a = -a$

12. Докажем вспомогательное неравенство (*):

$$(1 + x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^2 x^k 1^{n-k} \geqslant C_n^2 x^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2 \geqslant \frac{n^2}{4} \cdot x^2$$

Последнее верно в силу оценки:

$$n \geqslant 2;\ n - 2 \geqslant 0;\ 2n - 2 \geqslant n;\ n - 1 \geqslant \frac{n}{2}$$

Само неравенство верно при $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x > 0$.

Возвращаемся к задаче. Сразу базовый кейс: при $n = 1$ — очев.

Положим $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (1 + \alpha_n)^n \overset{*}{\geqslant} \frac{n^2\alpha_n^2}{4} \Rightarrow 1 \geqslant \frac{n\alpha_n^2}{4}$.

Отсюда явным образом $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$. По теореме о двух миллиционерах

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

.

Ч.Т.Д.

13. Два случая:

a) $x \in \mathbb{Q}$, т.е. x представим в виде несократимой дроби.

Начиная с какого-то $m', m!$ начнет перебивать знаменатель x, тогда под косинусом будет целое кол-во π, тогда косинус равен ± 1, а он еще в степени $2n \Rightarrow D(x) = 1$.

b) $x \notin \mathbb{Q}$.

Тогда очев $D(x) = 0$.

14. *За доказательство пойдет полный перебор случаев.* Тут абитуру должны испугать *страшные слова.*

Во-первых, нам важно, что торт выпуклый. Тогда рассмотрим первые два разреза. Они могут иметь 0 или одну общую точку (совпадение выкидываем).

Если 0 (при параллельности), то можно получить 4 (все параллельны) или 6 (две параллельны и 1 пересекает).

Если одна, то либо пересечение с обоими разрезами, тогда 6 или 7.

Рассмотрели все случаи.