Задачи по информатике

1. Дан отсортированный массив целых чисел, вывести отсортированный массив их квадратов.

2. Построй очередь на двух стеках.

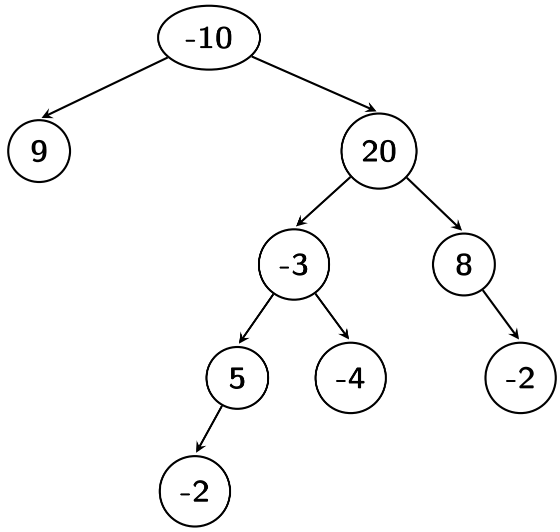
3. Двое играют в игру: нужно по очереди класть на прямоугольный стол пятирублевые монеты. Если один не может положить монету, то победа засчитывается второму.

Может ли какой-то из игроков гарантированно победить? Если может, то предложи стратегию.

4. *Студент1* и *Студент2* прогневали правителя здешних земель — А.Д. Поселочного. Им грозит смертная казнь. Однако властитель оказался милосердный. Он предложил им следующее: их ведут в темницу и разводят по одиночным камерам, там они бросают монетку, а далее каждый должен сказать, что выпало у товарища. Если хотя бы один угадывает, их отпускают, иначе ...

У товарищей есть пару минут, пока их ведут в камеры, чтобы обсудить стратегию. Итак вопрос: смогут ли они гарантированно выйти живыми и невредимыми?

5. 1,5 землекопа из *страны невыученных уроков* копали-копали яму и вдруг наткнулись на какой-то корешок. Пригляделись внимательно, куда он ведет, и увидели огромное бинарное дерево. И, по всем канонам этой чудесной страны, дерево оказалось не простым, а золотым (каждая его нода содержала *целое* количество золота). Они решили пройтись по дереву и по максимуму собрать золота. Они могут стартовать в любой ноде, а дальше двигаться вперед или назад. Однако возвращаться в уже посещенную ими ноду категорически запрещено. Как им лучше поступить?

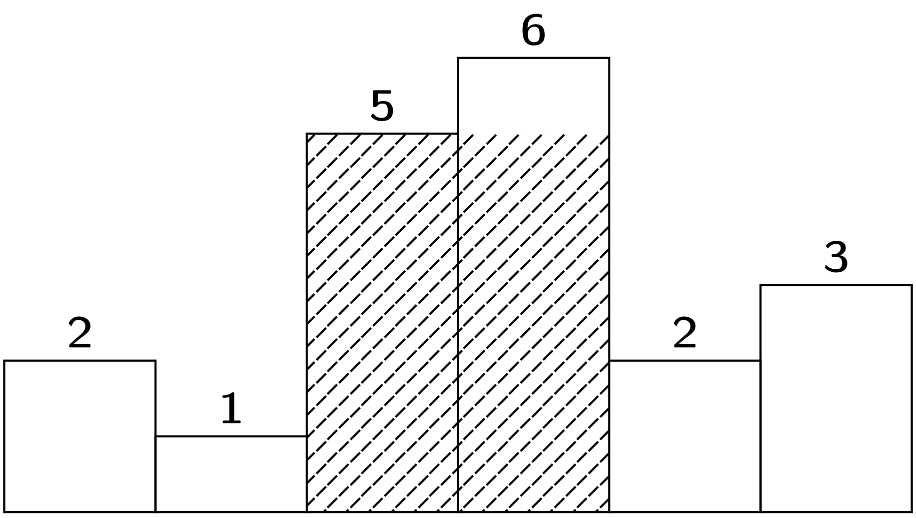


Предложить решение за линию.

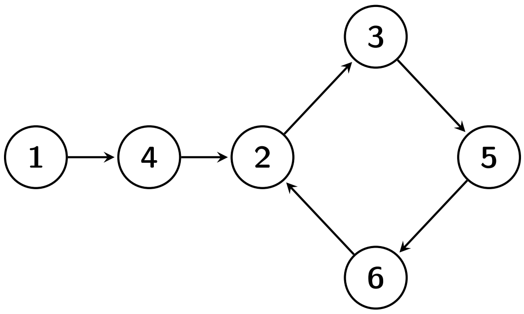
6. Принц-Полукровка оставил в своем учебнике по зельеварению огромное число подсказок и заметок. Одна из заметок содержала "Закон несохранения массы". Далее идет ее текст.

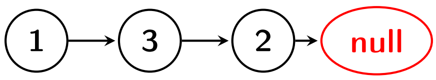
Посмотрим на веса каждого из ингредиентов в рецепте и каждому из них сопоставим столбик единичной ширины и высоты, равной числу граммов соответствующего ингредиента. Выровняем их снизу по одной линии и получим "гистограмму ингредиентов". Тогда масса полученного зелья будет равняться площади самого большого прямоугольника в гистограмме, одна из сторон которого лежит на общей нижней линии.

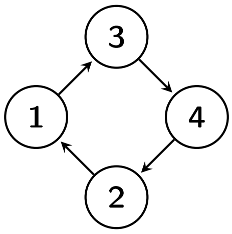
Найди площадь самого большого прямоугольника в гистограмме. Помни, что этот прямоугольник должен быть на общей базовой линии.



7. Есть односвязный список, состоящий из различных значений. Возможно в нем есть цикл. Опиши алгоритм, который находит начало этого цикла, а если цикла нет — выводит -1.







8. Вагоны новой кольцевой железной дороги было предложено расписать N дизайнерам. Каждый дизайнер выбирал для своей раскраски полосу длиной L_i, начинающуюся от начала вагона и гарантированно помещающуюся на вагоне. Тем самым какие-то работы были полностью закрашены, а какие-то всё же были видны хотя бы частично.

Тебе дана последовательность перекраски. После завершения работы каждого дизайнера выведи одно число — количество различных работ, элементы которых видны на момент завершения.

Предложить решение за линию.

9. Король и вино.

Представь, ты — король, и у тебя завтра день рождения. По такому случаю ты устраиваешь вечеринку! Но какая же вечеринка может обойтись без открытия винного погреба?) И вот ты спускаешься в свой погреб и обнаруживаешь в нем ... записку, в которой говорится, что одна из 1000 бутылок вина отравлена. Яд этот очень опасный и всего одна его капля способна убить человека всего за 15-20 часов. И всё бы было не так плохо, да вот до праздника остается всего один день!

Подвергать риску себя и своих гостей ты не можешь, зато у тебя в темнице множество узников, которые ждут своей казни. И ты решаешь дать им вина, чтобы вычислить отравленную бутылку. Человек ты сердобольный, поэтому тебе хочется подвергнуть риску как можно меньшее количество заключённых. Вопрос: какое минимальное количество заключённых должно попробовать вино из бутылок, чтобы точно найти отравленную в течение 24 часов?

10. Infinity Train

Начало триллера: ты просыпаешься в темном-темном вагоне, видишь перед собой выключатель. Как только ты перевел его в положение вкл., проверяешь карманы, находишь жухлую бумажку, на которой крупными буквами написано КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ПРЕДСТАВЛЯЕТ... Далее по тексту ты понимаешь, что оказался здесь не просто так. Это все один огромной эксперимент, целью которого является выяснение работы мозга студента, который отлетел на пересдачу. И этим испытанием он либо покажет, что достоин прийти на комиссию и все сдать, либо с позором покинет стены родного уже для него вуза и отправится к себе домой. Перед ним поставлена задача посчитать *количество вагонов в поезде*. В бумажке было написано, что железная дорога точно кольцевая, как и сам поезд (первый вагон скреплен с первым, т.е. переходы между ними бесшовные). Передвигаться студент может вперед-назад по вагонам, а в них уже выключать или выключать свет (изначальное положение тумблеров в каждом вагоне случайно).

Все вагоны внутри выглядят одинаково, окна закрыты так, что невозможно посмотреть наружу, движение поезда равномерное. Помечать вагоны как-либо, кроме включения или выключения света, нельзя. Количество вагонов конечно (не верьте заголовку).

Предложить решение за линию.

Задачи по математике

1. Можно ли торт 3 разрезами поделить на 8 частей.

2. В кубической комнате со стороной 2 летают 9 мух. Докажи, что найдется хотя бы одна пара мух, находящихся на расстоянии не большем $\sqrt{3}$.

3. У шахматной доски отрезали два противолежащих уголка. Можно ли теперь покрыть ее доминошками (по структуре они наполовину черные, наполовину белые)?

4. Решить $3\sqrt{4x-5y+7}+5|3x-4y+6| \leqslant 4$, где $x, y \in \mathbb{Z}$. В ответе указать $\max(x+y)$.

5. Читать голосом Александра Пушного.

В эфире самая смешивательная среди взбалтывательных и самая взбалтывательная среди смешивательных рубрик программы «Галилео», которая называется ЭЭЭЭЭЭКСПЕРИМЕНТЫ.

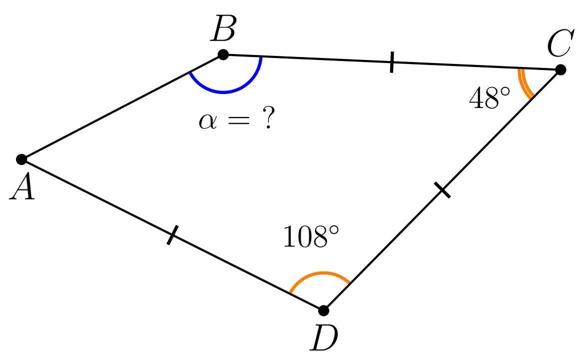
Друзья, смотрите, мы берем две совершенно одинаковые кружки. В одной из них молоко, в другой — кофе (в одинаковых количествах). Переливаем ложку молока в кофе, перемешаем, а затем обратно переливаем ложку получившейся смеси в стакан с молоком. Итак, наши внимательные зрители, чего же у нас оказалось больше: молока в кофе или кофе в молоке?

Подсказка. Можешь для начала решить следующую задачу:

На главную туристическую площадь приехали два туристических автобуса. Все места в каждом из автобусов были заняты. В первом автобусе находилось 20 польских туристов, во втором — 20 чешских. Во время экскурсии начался ливень, и туристы бросились в автобусы, не разбирая, где чей. Кого больше: чешских туристов в польском автобусе или польских туристов в чешском?

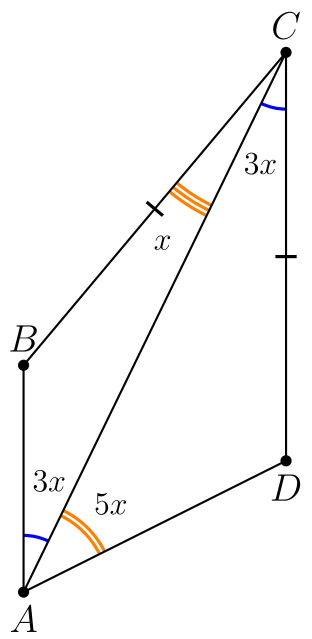
6. Существует ли такой x, что $\operatorname{tg}(x)+\sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg}(x)+\sqrt{3}$ целые числа?

7.



8. Решить $2x \cdot 2^x + 3x \cdot 3^x + 1 \geqslant \sqrt{4^x+9^x+1} \cdot \sqrt{13x^2+1}$.

9. $x = ?$



10. Реальный кейс.

Открывает первокурсник задавальник, ~~а он ему как раз~~ и видит такую задачу: «Почему $\sqrt{2}$ иррационально?»

11. Из 9 аксиом поля действительных чисел вывести следующее:

a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists!\ (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0;$

b) $\forall a \in \mathbb{R} :\ a \cdot 0 = 0;$

c) $\forall a \in \mathbb{R} :\ (-1) \cdot a = -a.$

Аксиомы сложения

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a;$

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c);$

3) $\exists 0 \in \mathbb{R}\, \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a;$

4) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists (-a) \in \mathbb{R} \quad a + (-a) = 0.$

Аксиомы умножения

5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a;$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

7) $\exists 1 \in \mathbb{R}\, \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a;$

8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \quad a \cdot a^{-1} = 1.$

Аксиома связи сложения и умножения

9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

12. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

13. Доказать, что $D(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi \cdot m! \cdot x)$, где $D(x)$ - функция Дирихле.

14. Бонус к первой задаче.

Докажите, что в $\mathbb{R}^2$ это невозможно.

Здесь торт — связное выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ с топологией, порождённой евклидовой метрикой.

Решения

Информатика

1. Идейно: самые большие по модулю числа на концах.

leftIndex = 0, rightIndex = n - 1;

Дальше сравниваем элементы и записываем в новый массив с конца.

2. stackIn, stackOut.

3. Идея симметрии. Первый кладет монету на центр стола, второй кладет куда-то, а задача первого — симметрично отражать ходы соперника.

4. *Подсказка.* От чего можно отталкиваться, если не знаешь, что выпало у соседа?

Решение: Один говорит, что выпало у него, второй — отрицание своего результата.

5. Через DFS посчитать максимальные пути.

```
class Solution {
    int answer = 0;
    int maxPathSum(TreeNode root) {
        helper (root);
        return answer;
    }

    int helper (TreeNode node) {
        if (node == null) {
            return 0;
        }

        int maxLeftPath = Math.max(helper(node.left), 0);
        int maxRightPath = Math.max(helper(node.right), 0);
        answer = Math.max(answer, maxLeftPath + maxRightPath + node.val);
        return Math.max(maxLeftPath, maxRightPath) + node.val;
    }
}
```

6. Разбор.

Первый проход имеет 3 базовых случая:

a) Слудующий столбец меньше предыдещего, тогда максимальная площадь — высота первого столбца.

b) Слудующий столбец равна предыдещего, тогда максимальная площадь — удвоенная высота столбца.

c) Слудующий столбец больше предыдещего, тогда максимальная площадь — высота первого столбца, но продленного дальше.

Тогда сделаем так: заведем два стека, в одном будут лежать индексы столбцов, а во втором их высоты. Будем идти по гистограмме, если введенный столбец $\geqslant$ предыдущего, то записываем его в стек, обновляем стек индексов. Если же меньше, то попаем из стеков столбцы, при этом считая возможную максимальную площадь, пока не дойдем до случая $\geqslant$. Индекс у последнего введенного столбца можно оставить как у последнего попнутого, тк туда мы очевидно можем продлиться. А после цикла еще раз пробегаемся по непопнутым значениям и считаем возможные макс площади для них (они все образуют строго возрастающую последовательность).

```
public class Task {
    public static void main(String[] args) throws IOException {
        BufferedReader bi = new BufferedReader(
            new InputStreamReader(System.in));
        PrintWriter pw = new PrintWriter(System.out);
        StringTokenizer st = new StringTokenizer(bi.readLine());
        Stack<Long> indexes = new Stack<>();
        Stack<Long> heights = new Stack<>();
        long maxArea = 0;
        int N = Integer.parseInt(st.nextToken());

        for (int i = 1; i <= N; i++) {
            long num = Long.parseLong(st.nextToken());
            long prevInd = i;
            while (!heights.isEmpty() && heights.peek() > num) {
                prevInd = indexes.peek();
                long area = heights.pop() * (i - indexes.pop());
                maxArea = Math.max(maxArea, area);
            }
            indexes.add(prevInd);
            heights.add(num);
        }

        while (!indexes.isEmpty()) {
            long area = heights.pop() * (N - indexes.pop() + 1);
            maxArea = Math.max(maxArea, area);
        }
```

```
            pw.printf("%d", maxArea);
            pw.close();
        }
    }
```

7. Плавно подводим к мысле об использовании двух указателей.

Подзадача: найти середину связного списка.

Метод Эзопа: заводим указатель-черепашку, указатель-кролика. У первого скорость v, у второго $2v$. Тогда при пробеге через весь список черепашка будет на середине.

В этой задаче сначала запускаем их, если цикла нет — ответ. Если есть, то рано или поздно они встретятся где-то в цикле. Если к этому моменту черепашка сделала i шагов, а кролик $2i$, то их позиции совпадают с точностью до целова количества кругов цикла: $2i = i + k\lambda \Rightarrow i = k\lambda$.

Далее перемещаем один указатель в начало и уравниваем скорости. Утверждается, что если их снова запустить, то встретятся они в начале цикла. Это так, ибо:

1. до начала цикла указатель из начала пройдет j шагов.

2. черепашка прошла целое количество циклов $k\lambda$, и тк она стартует из начала списка, то до конца цикла она не проходит аккурат j шагов.

Ч.Т.Д.

8. Берем стек.

Цикл по дизайнерам:

- Для очередного значения L снимаем с вершины элементы, пока они $\leqslant L$;

- Вставляем L;

- Выводим кол-во элементов стека;

9. Подводим к идее пронумеровать все бутылки двоичным кодом, а дальше сделать таблицу, где в столбцах указываются номера бутылок, соответственно по столбцу пишем их номер в двоичной СС, в строках будут просто наши узники. Тогда дадим одну каплю вина каждому узнику, если напротив него стоит 1. И тогда по набору умерших узников будет сразу понятно, какая бутылка была отравлена. Никто не умер — нулевая бутылка.

10. *I способ (много шагов):* Просыпаемся, ключаем свет, чулночно идти вправо на вагон, выключаем свет, возвращаемся, попутно считая вагоны. Если лмпа в вагоне, где вы точно начали, не горит, значит вы его выключили, тогда ответ.

Количество шагов в этом случае:

$$1 + 1 + 2 + 2 + ... + N + N = N(N + 1)$$

II способ (чуть меньше шагов): Идти влево — выключать свет, вправо — включать свет. Если возвращаемся в вагон, где уже были, но лампочка изменила свое состояние, значит мы ее выключили, тоже приходим в ответ.

Количество шагов в этом случае:

$$1 + 2 + ... + N + N = \frac{N(N + 3)}{2}$$

III способ (линия): Стратегия из способа II, однако делаем каждый раз шагов соразмерно степени двойки (1, 2, 4, 8, ...). Если заметили изменение в уже пройденном вагоне, значит длина поезда — это кол-во всех пройденных за этот обход вагонов без коллизий.

Количество шагов в этом случае (2^n – количество шагов, когда мы перескачили длину поезда, т.е. $2^{n-1} < N \leqslant 2^n$):

$$1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n + N = (2^{n+1} - 1) + N = (4 \cdot 2^{n-1} - 1) + N < 4N + N = 5N$$

Математика

1. Да, в R^3 крест на крест и по высоте.

2. Принцип Дирихле: делим на 8 частей, в какой-то две мухи.

3. Обе клеточки одного цвета $\Rightarrow$ остается 30 белых, 32 черных $\Rightarrow$ не получится.

4. Замечаем, что модуль и корень неотрицательны, а под модулем целое число, значит под модулем только 0. Помня про равносильные переходы и $y \vdots 3$ получаем ответ: $6 + 6 = \mathit{12}$.

5. *Решение подзадачи:* обозначаем часть туристов за x и понимаем, что их будет поровну в каждом автобусе.

Решение задачи: тот же ответ, можно через неизвестную, а можно рукомахательно это показать.

6. Пусть существуют, тогда из предположения приравниваем $\operatorname{tg} x$ и получаем дробь, которая должна являться рациональной, однако равна $\sqrt{3} \Rightarrow$ противоречие.

7. Так-то задача предполагалсь для 7 класса. Решений можно придумать много, однако я постараюсь привести наиболее приближенное к 7 классу.

Достроим $\triangle BCA'$ – равносторонний, тогда

$$\angle A'CD = 60^\circ + 48^\circ = 108^\circ = \angle ADC$$

Достроим AA'. Получилась равнобедренная трапеция $AA'CD$:

$$\angle AA'C = \angle A'AD = \frac{360^\circ - 2 \cdot 108^\circ}{2} = 72^\circ$$

(а можно через равенство тр-ков, ибо трапеции, насколько мне известно, в 7 классе еще не проходят).

$$\angle ACD = \angle CAD = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ,$$

$$\angle BCA = 48^\circ - 36^\circ = 12^\circ,$$

$$\angle A'CA = 60^\circ + 12^\circ = 72^\circ$$

$\Rightarrow \triangle AA'C$ – равнобедренный, $AA' = AC \Rightarrow \angle A'AC = 36^\circ$. При этом $\triangle AA'B = \triangle ACB \Rightarrow \angle ABA' = \angle ABC = \alpha$, $\angle AA'B = \angle BCA = 12^\circ$, $\angle A'AB = \angle BAC = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 12^\circ - 18^\circ = 150^\circ$.

Из интересного было только доп построение равностороннего тр-ка.

Самый быстрый II способ: можно зафигачить симметрию отн. AB. Углы так хорошо подобраны (108 – угол в правильном пятиугольнике), и из появившегося правильного треугольника получаем следующее уравнение: $2\alpha + 60^\circ = 360^\circ$.

8. Заметим, что тут фигурируют два вектора: $\vec{x} = (2x, 3x, 1), \vec{y} = (2^x, 3^x, 1)$.

Неравенство Коши-Буняковского: $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$.

А тут неравенство в обратную сторону, значит достигается равенство, а тогда векторы коллинеарны. Однако таких векторов не найдется.

9. *I способ (максимально алгебраичный):* запишем 2 теоремы синусов: $AC = a, BC = CD = b$

$$\frac{a}{\sin 4x} = \frac{b}{\sin 3x}, \frac{a}{\sin 8x} = \frac{b}{\sin 5x}$$

$$\sin 3x \cdot 2\sin 4x \cos 4x = \sin 3x \sin 8x = \sin 4x \sin 5x$$

$$\sin 7x - \sin x = 2\sin 3x \cos 4x = \sin 5x$$

$$\sin 7x - \sin 5x = \sin x$$

$$2\sin x \cos 6x = \sin x \Rightarrow x = 10^\circ.$$

II способ (можно потом рассказать школьнику как эталон простоты): Проведем AE так, чтобы $\angle EAC = x \Rightarrow AE = EC$. Значит $\angle BAE = 2x$ и $\angle BEA = 2x$ как внешний $\triangle AEC \Rightarrow AB = BE$; $\triangle BCD$ – равнобедренный по условию $\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB$, при этом $DC \parallel AB$ (по усл. через равенство накрест лежащих) $\Rightarrow BD$ – биссектриса $\angle ABC$. Замечаем, что $\triangle ABD = \triangle DBE$ по двум сторонам и углу м/д ними. $\angle BED = \angle BAD = 8x \Rightarrow AD = DE$. Но при этом $\angle ECD = 3x + x$. Из $\triangle ECD : \angle EDC = 4x \Rightarrow ED = EC$, $AD = DE$, $AE = EC \Rightarrow AE = ED = DA \Rightarrow x + 5x = 60^\circ$, $x = 10^\circ$.

10. Этот кейс был у пекусов ЛФИ :)

Можно арифметически.

Можно через теорему Безу.

Можно графически через наименьшие стороны квадратов.

11. a) От противного. Пусть $\exists a_1 \neq a_2$ противоположные к a.

$a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$. Противоречие.

b) $0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a + (a + (-a)) = (0 \cdot a + a) + (-a) = (0 + 1) \cdot a + (-a) = a + (-a) = 0.$

c) $(-1) \cdot a + a = (-1 + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow (-1) \cdot a = -a$

12. Докажем вспомогательное неравенство (*):

$$(1 + x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^2 x^k 1^{n-k} \geqslant C_n^2 x^2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2 \geqslant \frac{n^2}{4} \cdot x^2$$

Последнее верно в силу оценки:

$$n \geqslant 2;\ n-2 \geqslant 0;\ 2n-2 \geqslant n;\ n-1 \geqslant \frac{n}{2}$$

Само неравенство верно при $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x > 0$.

Возвращаемся к задаче. Сразу базовый кейс: при $n = 1$ — очев.

Положим $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow n = (1+\alpha_n)^n \overset{*}{\geqslant} \frac{n^2\alpha_n^2}{4} \Rightarrow 1 \geqslant \frac{n\alpha_n^2}{4}$.

Отсюда явным образом $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$. По теореме о двух миллиционерах

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Ч.Т.Д.

13. Два случая:

a) $x \in \mathbb{Q}$, т.е. x представим в виде несократимой дроби.

Начиная с какого-то $m', m!$ начнет перебивать знаменатель x, тогда под косинусом будет целое кол-во π, тогда косинус равен ± 1, а он еще в степени $2n \Rightarrow D(x) = 1$.

b) $x \notin \mathbb{Q}$.

Тогда очев $D(x) = 0$.

14. *За доказательство пойдет полный перебор случаев.* Тут абитуру должны испугать *страшные слова.*

Во-первых, нам важно, что торт выпуклый. Тогда рассмотрим первые два разреза. Они могут иметь 0 или одну общую точку (совпадение выкидываем).

Если 0 (при параллельности), то можно получить 4 (все параллельны) или 6 (две параллельны и 1 пересекает).

Если одна, то либо пересечение с обоими разрезами, тогда 6 или 7.

Рассмотрели все случаи.