Лабораторная работа №1

Задача 1. Варианты:

1. Пусть n писем случайно раскладываются по n конвертам. Найти вероятность, что в точности m писем попадут в свои конверты. Как данную вероятность можно приближенно посчитать при фиксированном m и достаточно большом n?

2. Уходя из детского, сада каждый ребенок случайно берет один левый и один правый ботинок. Найти вероятность того, что все они уйдут не в своих парах ботинок.

3. Тот же детский сад. Найти вероятность того, что каждый их них возьмет не свой левый и не свой правый ботинок.

4. С какой вероятностью можно разместить n супружеских пар за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались, но супруги не сидели рядом.

Задача 2. Варианты:

1. На части параболы $y = x^2$, $x \in (0, 2)$ случайно выбирается точка. Как можно интерпретировать "случайность" в данной задаче? С какой вероятностью угол, образованный радиус-вектором выбранной точки с положительным направлением оси абсцисс, не превосходит $\pi/3$?

2. Три товарища договорились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем условились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что они приходят в случайные моменты времени, найти вероятность того, что хотя бы двое встретятся.

3. Случайная точка A имеет равномерное распределение в правильном n-угольнике. Найти вероятность P_n, что точка A находится ближе к границе многоугольника, чем к его диагоналям. Найти числа C, a, что
$$P_n = Cn^a(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

4. В квадрат наудачу брошены точки A, B. Найти вероятность того, что круг, диаметром которого является отрезок AB, целиком содержится в квадрате.

Задача 3. Варианты:

1. Пусть имеются две независимые серии испытаний Бернулли на n опытов в каждой с вероятностью успеха p, S_i – количество успехов в n испытаниях в i-ой серии. Найти вероятность $\mathrm{P}(S_1 = k | S_1 + S_2 = m)$.

2. Введем события $A_i = \{X = i\}$, $B_i = \{Y = i\}$, $i \geqslant 0$. Известно, что для любых $i \geqslant 0$ и $j \geqslant 0$ события A_i и B_i – независимы, при этом
$$\mathrm{P}(X = i) = e^{-\lambda}\tfrac{\lambda^i}{i!}, \quad \lambda > 0, \quad i \geqslant 0,$$
$$\mathrm{P}(Y = j) = e^{-\mu}\tfrac{\mu^j}{j!}, \quad \mu > 0, \quad j \geqslant 0.$$

   Найти $\mathrm{P}(X = i | X + Y = j)$.

3. Введем события $A_i = \{X = i\}$, $B_i = \{Y = i\}$, $i \geqslant 0$. Известно, что для любых $i \geqslant 0$ и $j \geqslant 0$ события A_i и B_i – независимы, при этом

$$P(X = i) = P(Y = i) = (1-p)^i p \quad i \geqslant 0,$$

где $p \in (0,1)$. Найти $P(X = i | X + Y = j)$.

Задача 4. Рассмотрите схемы Бернулли при $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$ и $p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$ и рассчитайте точные вероятности (где это возможно) $P(S_n \in [n/2 - \sqrt{npq}, n/2 + \sqrt{npq}])$, S_n – количество успехов в n испытаниях, и приближенную с помощью одной из предельных теорем. Сравните точные и приближенные вероятности. Объясните результаты.