AULA 03
ALGORITMOS DE CONVERSÃO MATRICIAL: RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS

PROF. DR. DENIS HENRIQUE PINHEIRO SALVADEO

Aula Anterior

- Breve Histórico de CG
- Dispositivos Gráficos
  - Entrada, Saída
- Revisão de Conceitos Geométricos
- Primitivas Gráficas
- Padronização e Pacotes Gráficos

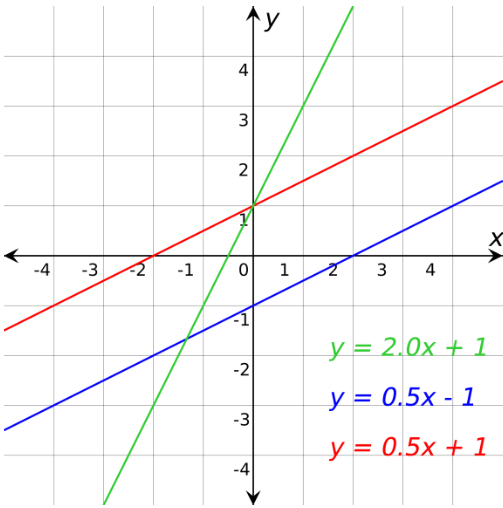
Aula de Hoje

- Algoritmos de Geração de Linhas
  - Equação da Reta
  - DDA
  - Bresenham (Ponto Médio)

- Algoritmo de Geração de Circunferências
  - Bresenham (Ponto Médio)

- Aliasing

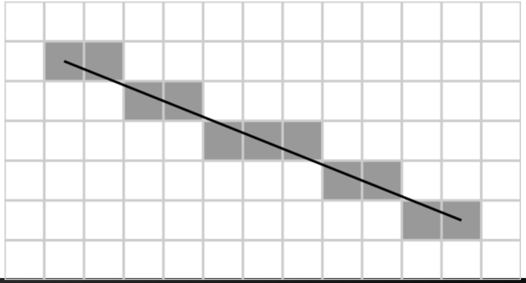
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/86/FuncionLineal01.svg/2000px-FuncionLineal01.svg.png



- Equação da reta:
  - $y = mx + b$
    - $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$
    - $b = y_1-m*x_1$

- $\Delta y = m*\Delta x$ e $\Delta x = \Delta y /m$
  - Usados para controlar a voltagem de deflexão em dispositivos vetoriais

- Em dispositivos matriciais, a linha é convertida em pixels



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/ab/Bresenham.svg/2000px-Bresenham.svg.png

Algoritmo DDA (Digital Differential Analyzer)

- Estratégia:
  - Definir o valor de m
  - Fixar os pontos com incremento unitário em uma direção e calcular a coordenada na outra (com arredondamento)

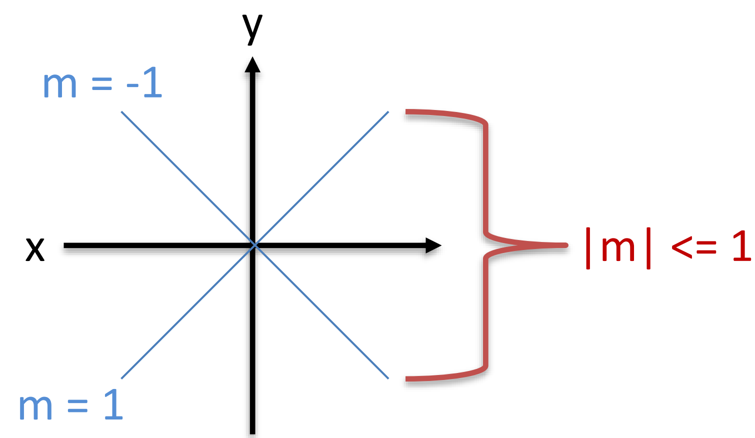
- $|m|<=1$
  - $\Delta x = 1$, $y_{k+1}=y_k+m$
- $m > 1$
  - $\Delta y = 1$, $x_{k+1} = x_k + 1/m$
- $m < -1$
  - $\Delta y = -1$, $x_{k+1} = x_k - 1/m$

- Assumindo do ponto mais a esquerda para o ponto mais a direita. E o contrário?

__Caso |m| <=1__

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

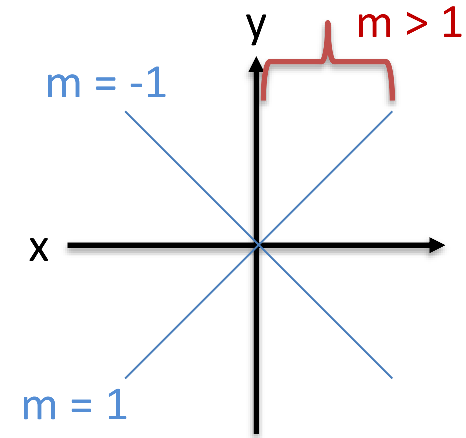
= 1



$$m = y_{k+1} - y_k$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + m}$$

<u>Caso m >1</u>

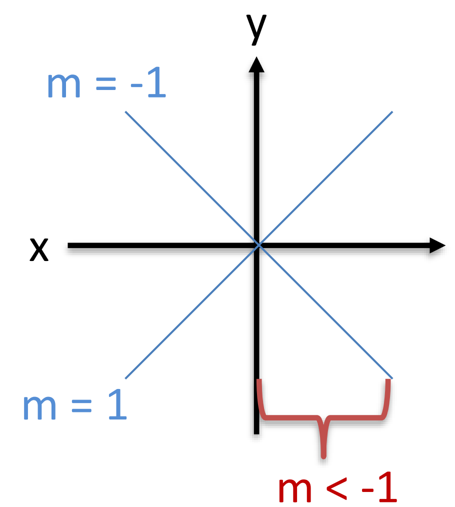


$$m = \frac{\overset{=1}{\Delta y}}{\Delta x} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$m = \frac{1}{x_{k+1} - x_k}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{m} \Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m}}$$

__Caso m < -1__



$$m = \frac{\overbrace{\Delta y}^{= -1}}{\Delta x} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$m = -\frac{1}{x_{k+1} - x_k}$$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{1}{m}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{1}{m}}$$

Algoritmo DDA (Digital Differential Analyzer)

- Problemas
  - Propagação de erros devido ao arredondamento (linhas mais longas) => distorção da reta real
  - Arredondamento e ainda necessidade de manipulação de números reais (custo computacional)

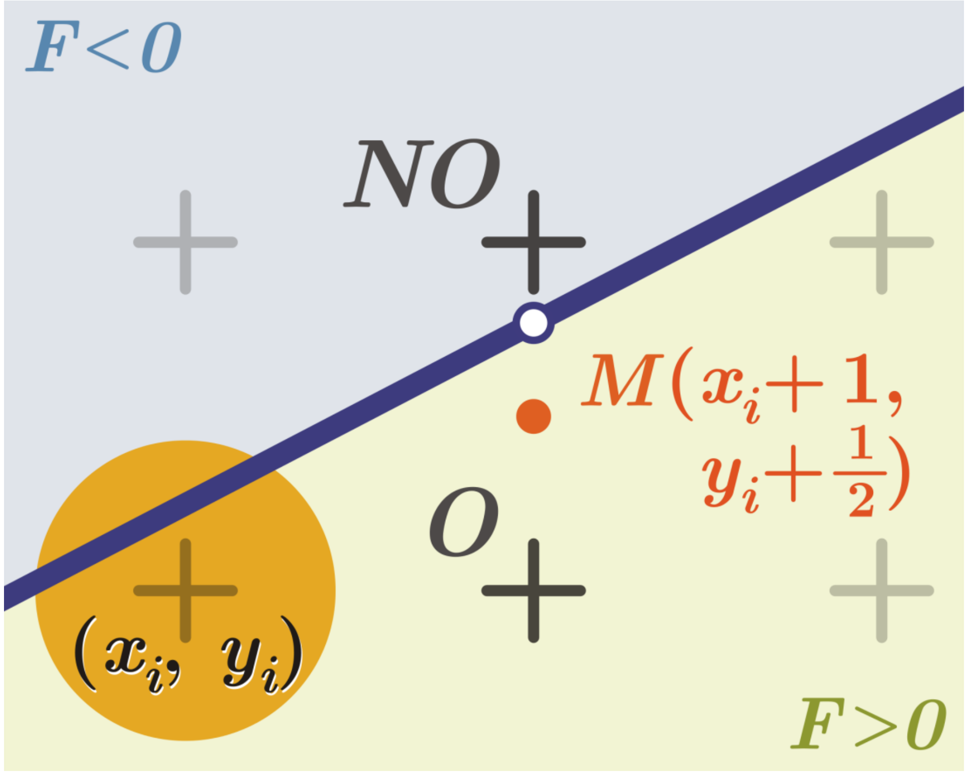
- Vantagens
  - Cálculo mais rápido do que equação da reta diretamente (elimina multiplicação de m)
  - Uso de acumuladores

ALGORITMO DDA

```
Algoritmo DDA(x1, y1, x2, y2: Inteiros)
Variáveis
   dx, dy, iter, k: inteiros
   x_inc, y_inc, x, y: reais
Início
   dx = x2 - x1
   dy = y2 - y1
   Se abs(dx) > abs(dy) Então
        iter = abs(dx)
   Senão
        iter = abs(dy)
   Fim_Se
   x_inc = dx/iter
   y_inc = dy/iter
   x = x1
   y = y1
   SetPixel(round(x), round(y))
   Para k = 1 Até iter Faça
        x = x + x_inc
        y = y + y_inc
        SetPixel(round(x), round(y))
   Fim_Para
Fim
```

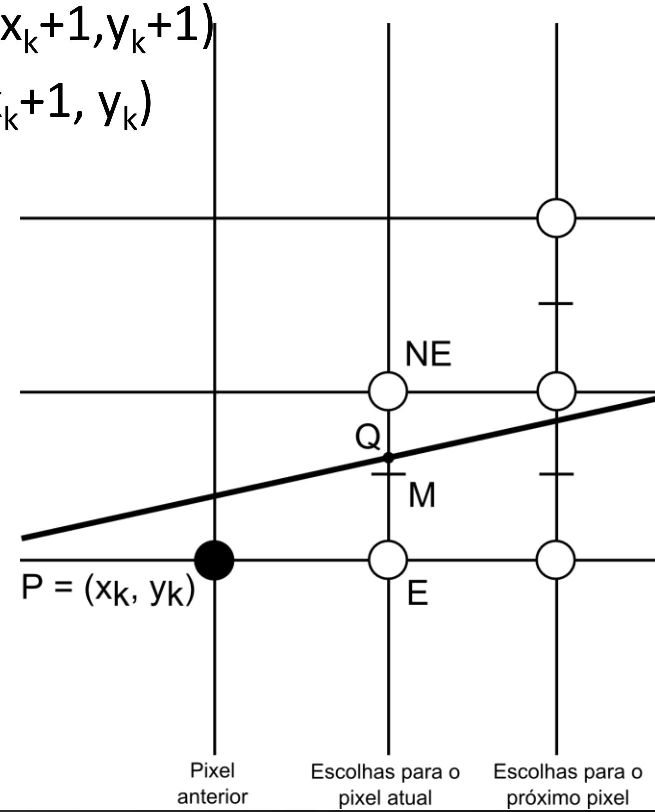
Bresenham para Linhas

- Usa somente aritmética de inteiros
- Da equação da reta, temos:
  - $mx + b - y = 0 \longrightarrow \Delta y/\Delta x * x + b - y = 0$
  - $F(x,y) = \Delta y * x + \Delta x * b - \Delta x * y = 0$
  - $F(x,y) > 0$ (abaixo da reta)
  - $F(x,y) < 0$ (acima da reta)



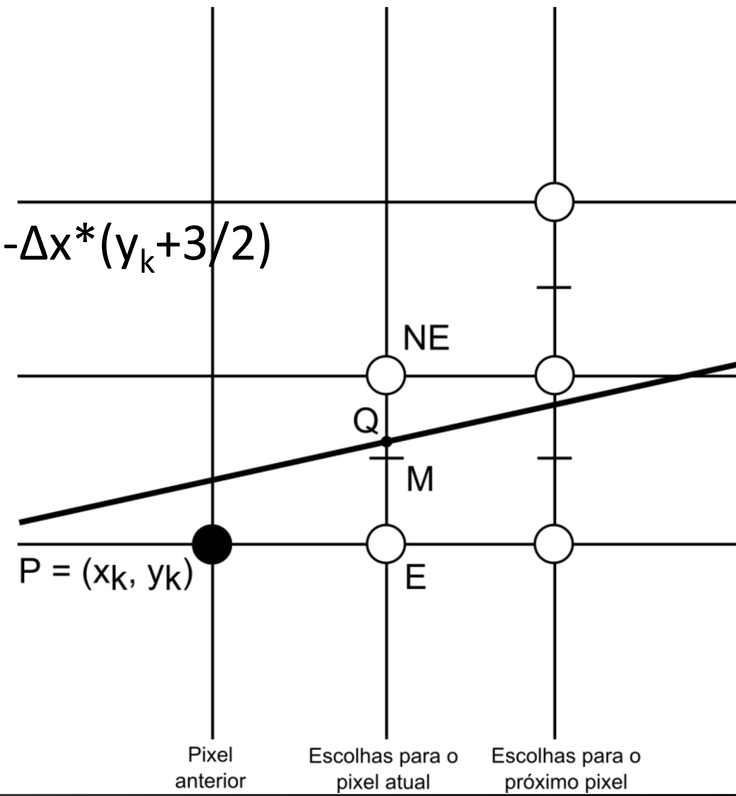
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b9/Bresenham-Pitteway_pixel_choice.svg/2000px-Bresenham-Pitteway_pixel_choice.svg.png

- A ideia é determinar:
  - "Onde está o próximo ponto médio (M) com relação à reta (interseção Q)?"
  - $d = F(x_k+1, y_k+1/2) = \Delta y*(x_k+1) + \Delta x*b - \Delta x*(y_k+1/2)$
    - Se $d > 0$, M está abaixo da reta, escolho NE (x_k+1, y_k+1)
    - Se $d <= 0$, M está acima da reta, escolho E (x_k+1, y_k)



Baseado em HILL JR., F. S. Computer Graphics. Machmillan Publishing Company, 1990.

- Dado que escolhi NE ou E, qual o próximo valor de d (do próximo ponto médio)?
  - Se escolho E,
    - $d_{Novo} = F(x_k+2, y_k+1/2) = \Delta y*(x_k+2)+ \Delta x*b-\Delta x*(y_k+1/2)$
    - $d_{Novo} - d_{Velho} = \Delta y$
      - $d_{Novo} = d_{Velho} + \Delta y$
  - Se escolho NE,
    - $d_{Novo} = F(x_k+2, y_k+3/2) = \Delta y*(x_k+2)+ \Delta x*b-\Delta x*(y_k+3/2)$
    - $d_{Novo} – d_{Velho} = \Delta y – \Delta x$
      - $d_{Novo} = d_{Velho} + \Delta y – \Delta x$



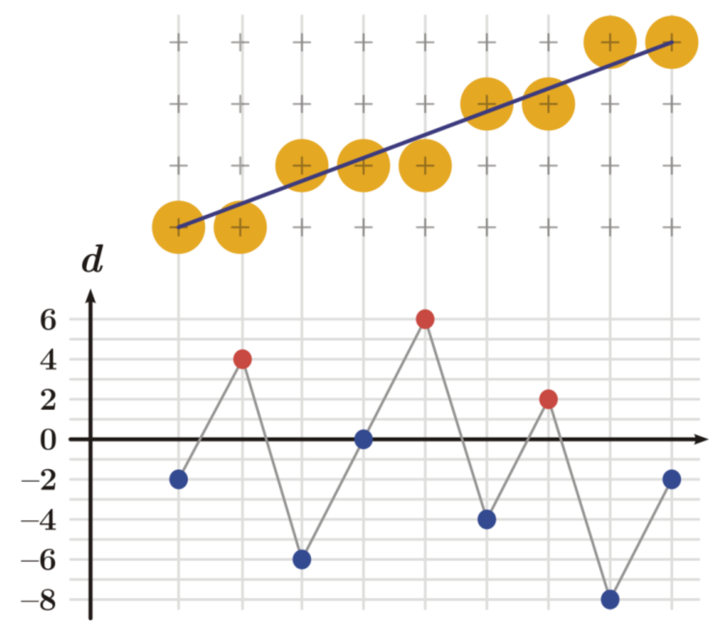
Baseado em HILL JR., F. S. Computer Graphics. Machmillan Publishing Company, 1990.

- Como definir o dInicial?
  - $d_{Inicial} = F(x_0+1, y_0+1/2) = \Delta y*(x_0+1)+ \Delta x*b-\Delta x*(y_0+1/2)$
  - $d_{Inicial} = F(x_0, y_0) + \Delta y-\Delta x/2$
    - Como é número real e apenas estamos interessados no valor de d para teste, podemos usar 2*F(x,y)

- Funciona somente para 0 < m < 1
  - Para m > 1?
  - 0 > m > -1?
  - m < -1?

- Linhas horizontais e verticais

- Espessura



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/0c/Bresenham_decision_variable.svg/2000px-Bresenham_decision_variable.svg.png

ALGORITMO BRESENHAM

```
Algoritmo bresenham_linha(x1, y1, x2, y2: Inteiros)
Variáveis
    dx, dy, d, const1, const2, x, y, xFinal: inteiros
Início
    dx = abs(x2 - x1)
    dy = abs(y2 - y1)
    d = 2*dy-dx
    const1 = 2*dy
    const2 = 2 * (dy - dx)
    Se x1 > x2 Então
          x = x2
          y = y2
          xFinal = x1
    Senão
          x = x1
          y = y1
          xFinal = x2
    Fim_Se
    SetPixel(x, y)
    Enquanto x < xFinal Faça
          x = x + 1;
          Se d < 0 Então
                   d = d + const1
          Senão
                   y = y + 1
                   d = d + const2
          Fim_Se
          SetPixel(x, y)
    Fim_Enquanto
Fim
```

Exercício

- Desenhe os segmentos de reta definidos pelos pontos (4,7) e (14, 14) usando os algoritmos de geração de linhas abaixo:
  - Equação da Reta
  - DDA
  - Bresenham

Solução Eq. da Reta e DDA

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14-7}{14-4} = \frac{7}{10} = 0{,}7 \qquad \therefore |m| \leq 1$$

incX = 1 incY = m = 0,7

k	X_real	Y_real	X_DDA	Y_DDA
0	4	7	4	7
1	5	7,7	5	8
2	6	8,4	6	8
3	7	9,1	7	9
4	8	9,8	8	10
5	9	10,5	9	10
6	10	11,2	10	11
7	11	11,9	11	12
8	12	12,6	12	13
9	13	13,3	13	13
10	14	14	14	14

Solução usando Bresenham

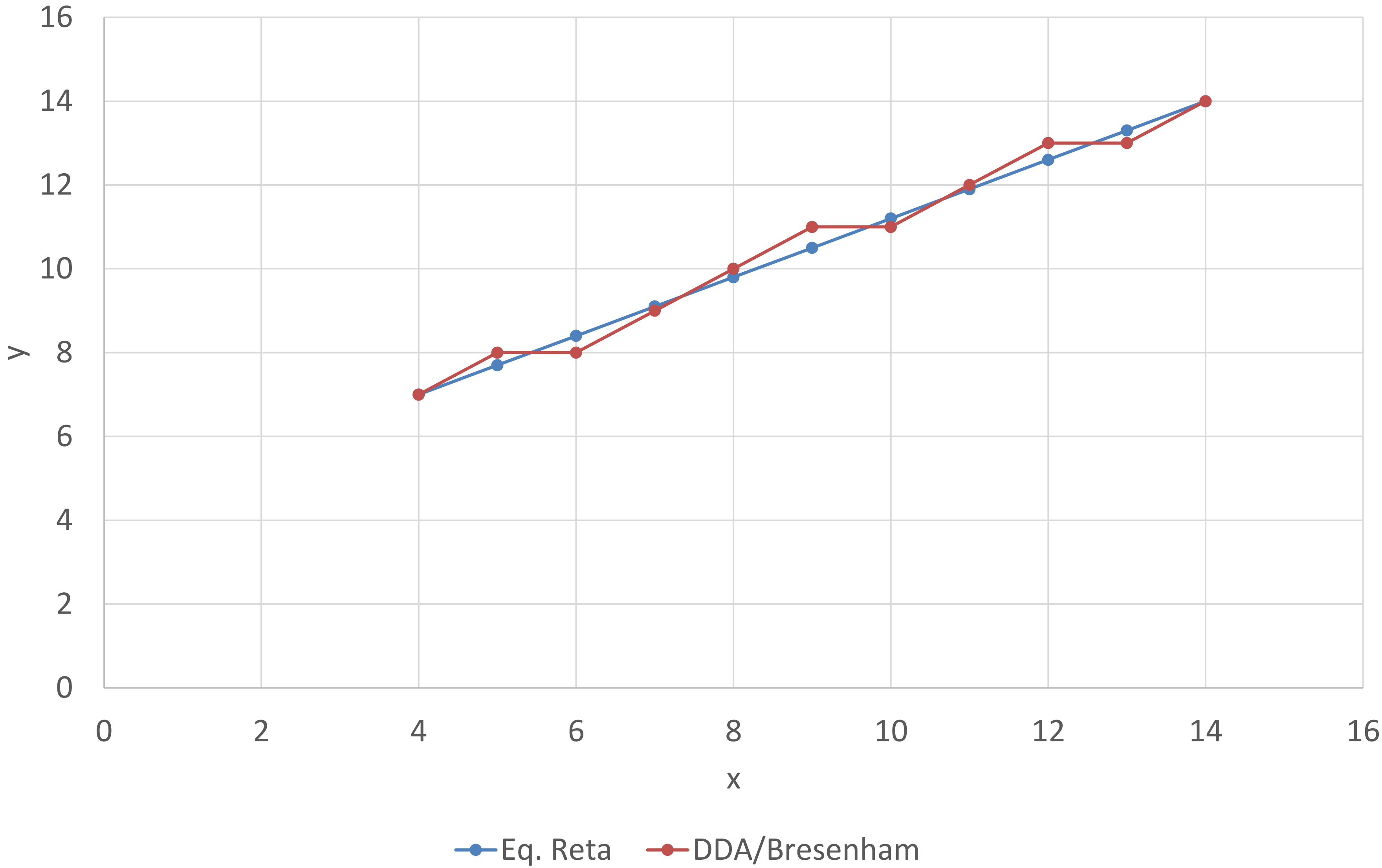
$\Delta x = 14 - 4 = 10 \qquad \Delta y = 14 - 7 = 7$

$d = 2.\Delta y - \Delta x = 2.7 - 10 = 14 - 10 = 4$

$incE = 2.\Delta y = 2.7 = 14 \qquad incNE = 2.(\Delta y - \Delta x) = 2.(7 - 10) = -6$

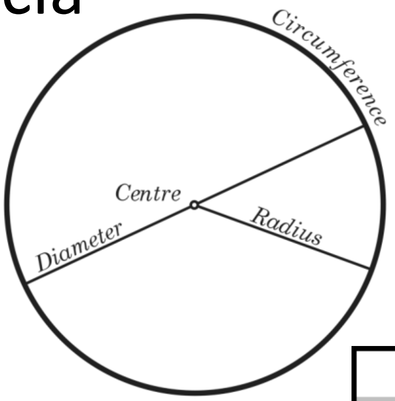
k	Próx_direção	Ponto Gerado	d
0	-	(4, 7)	4
1	NE	(5, 8)	4 – 6 = -2
2	E	(6, 8)	-2 + 14 = 12
3	NE	(7, 9)	12 – 6 = -6
4	NE	(8, 10)	6 – 6 = 0
5	NE	(9, 11)	0 – 6 = -6
6	E	(10, 11)	-6 + 14 = 8
7	NE	(11, 12)	8 – 6 = 2
8	NE	(12, 13)	2 – 6 = -4
9	E	(13, 13)	-4 + 14 = 10
10	NE	(14, 14)	10 – 6 = 4

LINHAS GERADAS

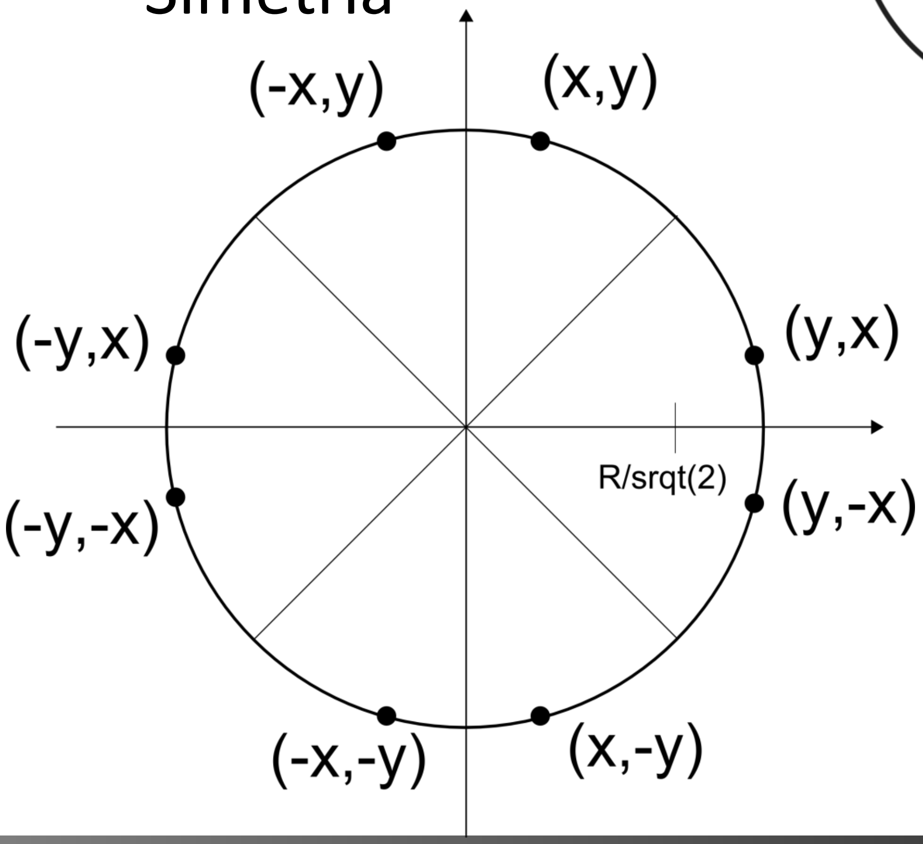


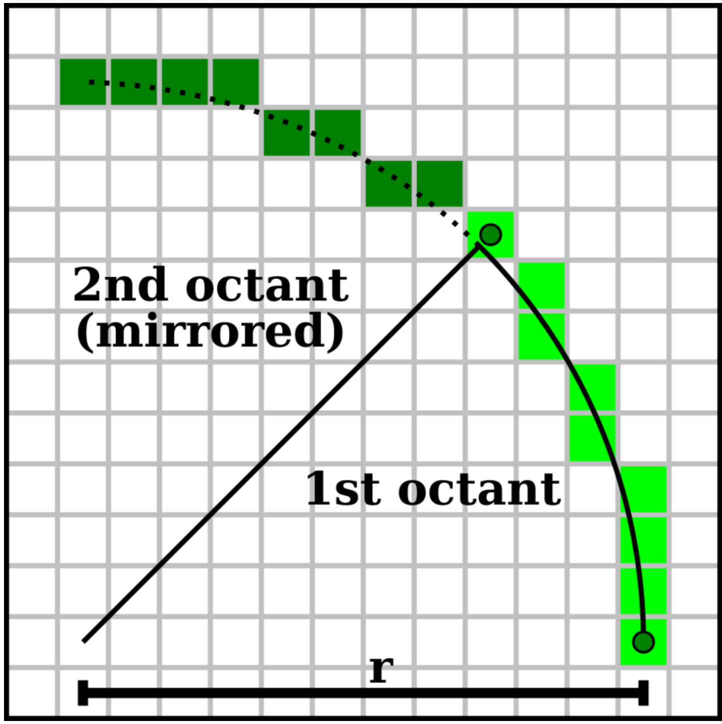
- Equação da circunferência
  - $x^2 + y^2 = r^2$

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1d/CIRCLE_1.svg/2000px-CIRCLE_1.svg.png



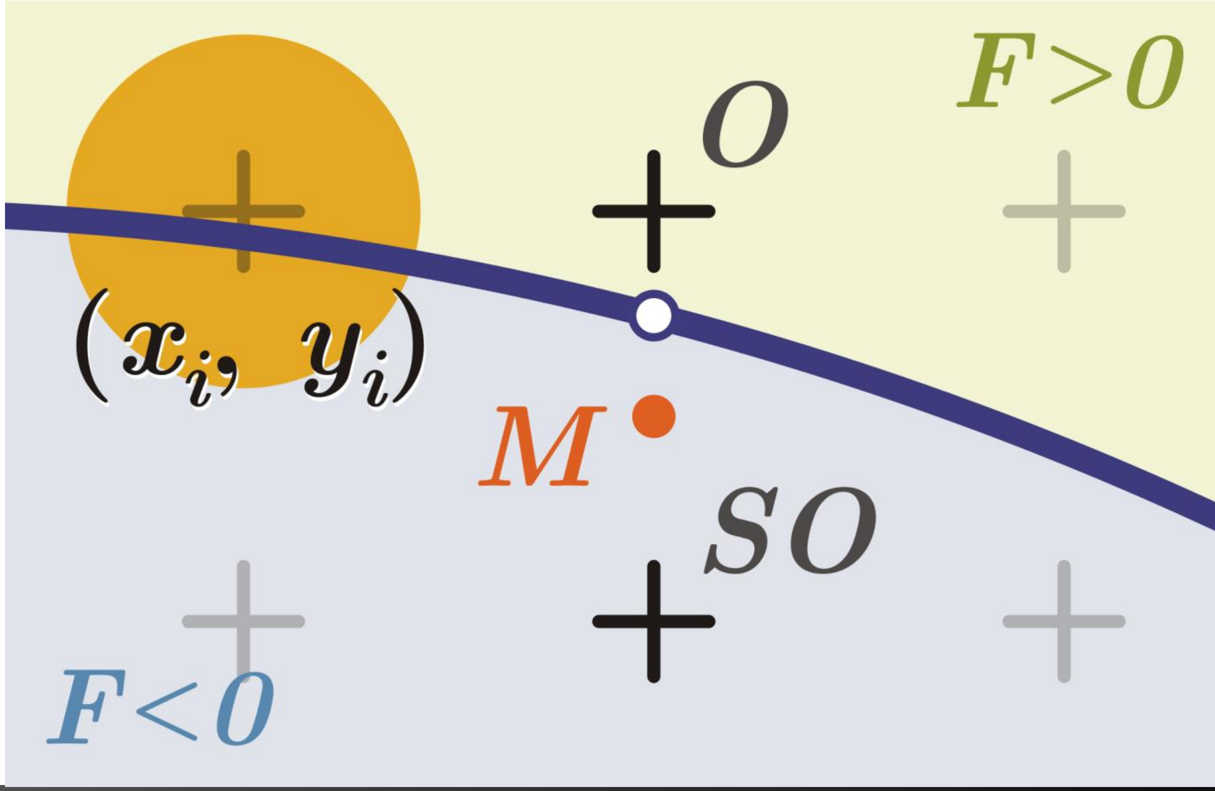
- Simetria





http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/24/Bresenham_circle.svg/2000px-Bresenham_circle.svg.png

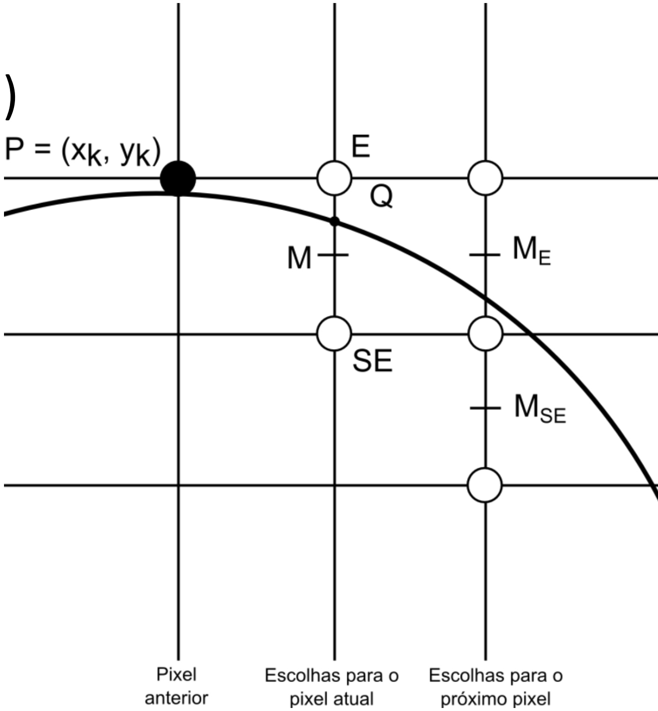
- Da equação da circunferência, temos:
  - $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$
  - $F(x,y) > 0$ (fora da circunferência)
  - $F(x,y) < 0$ (dentro da circunferência)



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/ca/Circle_drawing_-_Midpoint.svg/2000px-Circle_drawing_-_Midpoint.svg.png

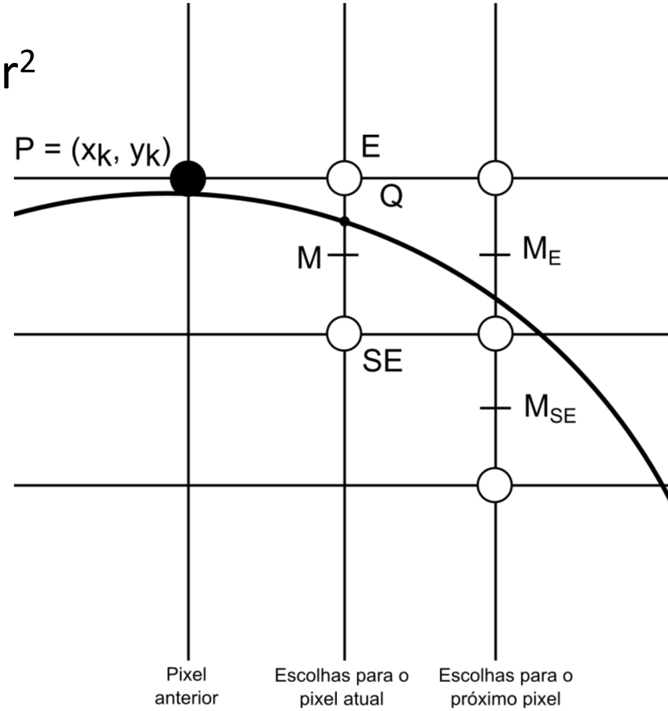
BRESENHAM PARA CIRCUNFERÊNCIAS

- A ideia é determinar:
  - “Onde está o próximo ponto médio (M) com relação à circunferência (interseção Q)?”
  - x = 0 a x = y = R/sqrt(2)
  - $d = F(x_k+1, y_k-1/2) = (x_k+1)^2 + (y_k-1/2)^2 - r^2$
    - Se $d < 0$, M está dentro, escolho E (x_k+1, y_k)
    - Se $d >= 0$, M está fora, escolho SE (x_k+1, y_k-1)



Baseado em HILL JR., F. S. Computer Graphics. Machmillan Publishing Company, 1990.

- Dado que escolhi SE ou E, qual o próximo valor de d?
  - Se escolho E,
    - $d_{Novo} = F(x_k+2, y_k-1/2) = (x_k+2)^2 + (y_k-1/2)^2 - r^2$
    - $d_{Novo} - d_{Velho} = 2*x_k+3$
      - $d_{Novo} = d_{Velho} + 2*x_k+3$
  - Se escolho SE,
    - $d_{Novo} = F(x_k+2, y_k-3/2) = (x_k+2)^2 + (y_k-3/2)^2 - r^2$
    - $d_{Novo} - d_{Velho} = 2*x_k-2*y_k+5$
      - $d_{Novo} = d_{Velho} + 2*x_k-2*y_k+5$



Baseado em HILL JR., F. S. Computer Graphics. Machmillan Publishing Company, 1990.

Bresenham para Circunferências

- Como definir o dInicial, lembrando que (0,r) é o ponto inicial?
  - $d_{Inicial} = F(1, r-1/2) = (1)^2 + (r-1/2)^2 - r^2$
  - $d_{Inicial} = 5/4 - r$
    - Como é número real e apenas estamos interessados no valor de d para teste, podemos usar $d_{Inicial} = 1 - r$

Algoritmo Bresenham para Circunferências

```
Algoritmo bresenham_circunferencia (xCentro, yCentro, raio: Inteiros)
Variáveis
   x, y, d: inteiros
Início
   x = 0
   y = raio
   d = 1 - raio

   plotaPontosCircunferencia(xCentro, yCentro, x, y)

   Enquanto x < y Faça
        Se d < 0 Então
                d = d + 2 * x + 3
        Senão
                d = d + 2 * (x - y) + 5
                y = y - 1
        Fim_Se

        x = x + 1

        plotaPontosCircunferencia(xCentro, yCentro, x, y)
   Fim_Enquanto
Fim
```

Algoritmo Bresenham para Circunferências

```
Procedimento plotaPontosCircunferencia(xCentro, yCentro, x, y: Inteiros)
   SetPixel(xCentro + x, yCentro + y)
   SetPixel(xCentro + y, yCentro + x)
   SetPixel(xCentro + y, yCentro - x)
   SetPixel(xCentro + x, yCentro - y)
   SetPixel(xCentro - x, yCentro - y)
   SetPixel(xCentro - y, yCentro - x)
   SetPixel(xCentro – y, yCentro + x)
   SetPixel(xCentro - x, yCentro + y)
Fim_Procedimento
```

EXERCÍCIO

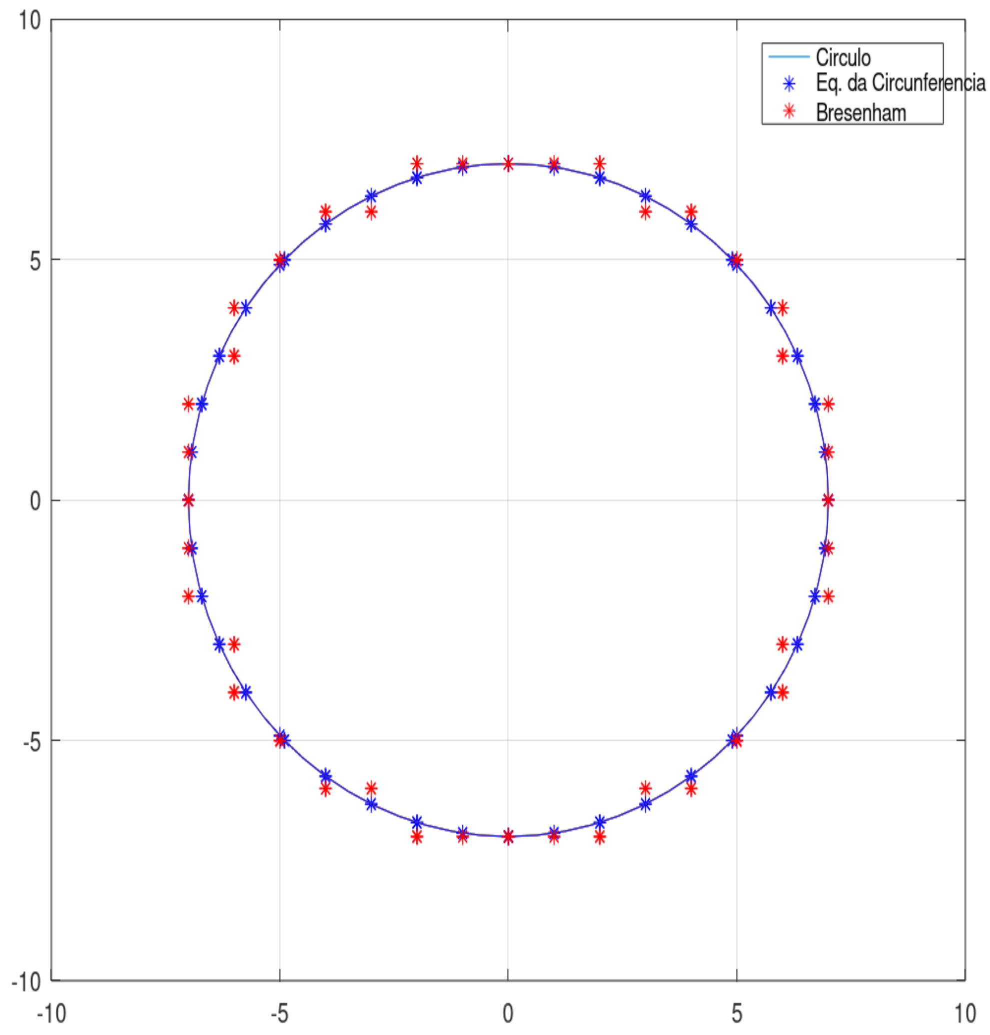
- Desenhe a circunferência definida pelo centro (0,0) e raio = 7 usando os algoritmos de geração de circunferências abaixo:
  – Equação da Circunferência
  – Bresenham

Solução usando Eq. da Circunferência e Bresenham

$x = 0$
$y = raio = 7$
$d = 1 - raio = 1 - 7 = -6$
$y\_real = \sqrt{raio^2 - x\_real^2}$

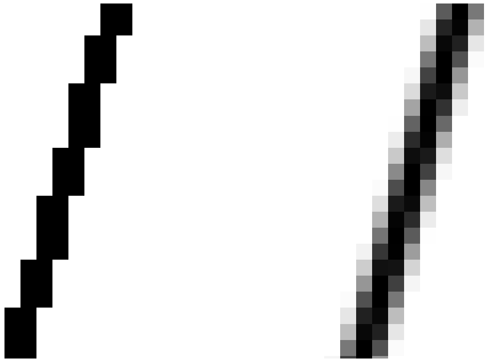
k	X_real	Y_real	Dir	d	X_PM	Y_PM
0	0	7	-	-6	0	7
1	1	6,9	E	-6 + 2 . 0 + 3 = -3	1	7
2	2	6,7	E	-3 + 2 . 1 + 3 = 2	2	7
3	3	6,3	SE	2 + 2 . (2 – 7) + 5 = -3	3	6
4	4	5,7	E	-3 + 2 . 3 + 3 = 6	4	6
5	5	4,9	SE	6 + 2 . (4 – 6) + 5 = 7	5	5

CIRCUNFERÊNCIAS GERADAS



ANTI-ALIASING

- Antisserrilhado
- Causa do Serrilhado:
  - Aproximações no cálculo da posição do pixel
  - Amostragem de baixa frequência



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/59/Kantutj%C3%A4mning_2_linjer.png

- Algumas técnicas anti-aliasing:
  - Teoria de Amostragem
    - Considera a intensidade proporcional à área do pixel
  - Filtro da média e filtro Gaussiano

- Aplique o filtro da média M na imagem I abaixo

$$
\begin{array}{c c|c|c|c|}
 & & \multicolumn{3}{c}{l} \\
 & & -1 & 0 & 1 \\
\hline
 & -1 & 1/9 & 1/9 & 1/9 \\
\hline
k & 0 & 1/9 & 1/9 & 1/9 \\
\hline
 & 1 & 1/9 & 1/9 & 1/9 \\
\hline
\end{array}
$$

M

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

$$I'(i,j) = \sum_{k=-1}^{1} \sum_{l=-1}^{1} I(i+k, j+l) M(k,l)$$

Exercício

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0				

I’

EXERCÍCIO

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0			

I'

EXERCÍCIO

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28		

I’

EXERCÍCIO

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	

I’

EXERCÍCIO

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	57

I’

Exercício

	0	0	0	0	255
	0	0	0	255	0
	0	0	255	0	0
	0	255	0	0	0
	255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	57
0				

I’

Exercício

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	57
0	28			

I’

EXERCÍCIO

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	57
0	28	57		

I'

Exercício

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	57
0	28	57	85	

I’

Exercício

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	57
0	28	57	85	57

I’

Exercício

E assim segue o processo, até preencher toda a matriz I’

0	0	0	0	255
0	0	0	255	0
0	0	255	0	0
0	255	0	0	0
255	0	0	0	0

I

0	0	28	57	57
0	28	57	85	57
28	57	85	57	28
57	85	57	28	0
57	57	28	0	0

I’

IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS VISTOS