

1 单方程

单方程求解作为 PINN 的基础应用场景，其关键瓶颈（表达能力、优化病态、采样与权重、硬/软约束、时序因果、结构化架构、域分解、理论与 UQ）已引发系统性研究：Raissi 等提出连续/离散两类 PINN，并在流体、量子、反应-扩散等典型方程上给出端到端验证，奠定“网络 = 解的全域近似器”的范式，同时也暴露多输出、多项损失配平的实操难点。在表达能力方面，MscaleDNN 通过频域径向缩放与紧支撑激活将高频学习转化为低频学习，在强多尺度/奇异几何情形优于常规 MLP，指向 PINN 在高频、多尺度场的表征补救路径。arXiv

在优化层面，Wang 等系统揭示 PINN 训练中的梯度不平衡/刚性及由此导致的学习率稳定性问题，并据此提出基于梯度统计的学习率退火；随后又从 NTK 视角刻画 PINN 的训练动力学与不同损失项的收敛率差异，为后续自适应加权/采样提供理论依据。arXiv +1

围绕自适应采样与权重，SA-PINN 将逐点可训练权重引入损失，使网络自动聚焦难点区域并显著提升训练稳定性与精度，同时给出 NTK 视角的机制解释；Wu 等对非自适应 vs. 残差驱动采样进行系统比较，提出 RAD/RAR-D 两类方法，在更少残差点下显著提升精度，为 PINN 提供实用的残差驱动采样范式。arXiv

在硬/软约束上，Sukumar 与 Srivastava 利用 **（近）距离函数将边界条件嵌入试探函数，精确施加复杂几何上的 Dirichlet/Neumann/Robin 条件，降低对权重调参的依赖；arXiv Chen 等提出理论引导的硬约束投影（HCP），通过投影将物理约束直接映射到可行域，理论上保证约束满足。ScienceDirect

针对时序因果性 **，IJCAI-2024 工作指出“同时拟合全时域”违背因果，采用离散时间 PINN + 隐式差分 + 顺序迁移以提升长时与多尺度动力系统的可训练性；IJCAI +1 后续在 Applied Sciences-2025 的改进版进一步面向高阶非线性（如 Cahn-Hilliard）优化采样/损失以更高效利用时序信息。MDPI

结构化架构方面，PhyCRNet 以编码器 - 解码器 + ConvLSTM + 有限差分滤波的离散时空学习范式，并硬编码 I/BC，实现对长时预测与跨 IC 泛化的稳健性提升；相较 MLP-PINN 误差传播更可控。f-PICNN 则在时空域直接学习，以卷积单元近似差分/迭代算子与自回归时间推进，结合离散化 PDE 残差与 I/BC 编码，实现无标签训练并改善非线性/剧烈梯度/多尺度

情形的收敛与外推。为提升复杂解形态下的可表达性与并行扩展，域分解类方法将问题划分为多子域并在界面处施加相容/保守条件：cPINN 在界面强形式通量连续与跨子域网络拼接下，对激波/间断更为有效；ResearchGate XPINN 进一步推广至任意时空分解并具备更强的并行化能力；配套的并行实现展示了基于 MPI+X 的多核/多 GPU 扩展。global-sci.org +1

在理论与 UQ 方面，De Ryck-Jagtap-Mishra 给出 Navier-Stokes 下 PINN/XPINN 的总误差上界，并证明对 tanh 两隐层网络可使 PDE 残差任意小，明确训练误差、网络规模与求积点数对总误差的作用；OUP Academic B-PINN 在贝叶斯框架下实现带噪数据下的前/逆问题求解与后验不确定性估计；arXiv +1 JCP-2023 的 UQ 综述则系统梳理了先验建模、后验推断与不确定性传播的方法学版图。ScienceDirect

总体上，上述工作自“表示-优化-采样-约束-因果-结构-并行-理论-UQ”九个维度构成了单方程 PINN 求解的问题图谱与方法序列：以表达/优化为底座（频谱与梯度病态），以自适应机制与硬约束固化泛化能力，以因果性与结构化网络增强长时/多尺度稳定性，以域分解与并行性拓展规模；并在误差分析与不确定性量化上逐步形成理论闭环。

叙述所据“原文依据”（逐条）

Raissi et al., JCP 2019 (PINN 原始论文)

“the latter type allows the use of arbitrarily accurate implicit Runge-Kutta time stepping schemes with unlimited number of stages.” “demonstrated through …fluids, quantum mechanics, reaction-diffusion systems, and nonlinear shallow-water waves.”

MscaleDNN (多尺度表达)

“employs …radial scalings to convert the approximation of high frequency components …to one of lower frequencies.” arXiv

Wang et al., SISC 2021 (梯度病态/退火)

“a fundamental mode of failure …numerical stiffness leading to unbalanced back-propagated gradients …we present a learning rate annealing algorithm …” arXiv

Wang et al., JCP 2022 (NTK 视角)

“derive the NTK of PINNs …it converges to a deterministic kernel that stays constant during training …analyze the training dynamics…” Open-Review

SA-PINN (JCP 2023, 自适应权重)

“applies trainable weights on each training point …points in difficult regions are automatically weighted more …”“self-adaptive weights …smooths the distribution of eigenvalues [of the NTK].”

Wu et al., CMAME 2023 (残差驱动采样 RAD/RAR-D)

“we propose two new residual-based adaptive sampling methods: RAD and RAR-D …significantly improve the accuracy …with fewer residual points.” arXiv

Sukumar Srivastava, CMAME 2022 (硬嵌入边界)

“a new approach based on distance fields to exactly impose boundary conditions in physics-informed deep neural networks.” arXiv

Chen et al., JCP 2021 (HCP 硬约束投影)

“Theory-guided HCP …introduce hard constraints into neural networks through projection.” ScienceDirect

Causality-enhanced Discretized PINN (IJCAI 2024)

“using discrete-time PINNs …to satisfy the principle of temporal causality; implicit time differencing …learn from earlier to later times.” IJCAI

Improved Causal PINN (Appl. Sci. 2025)

“applying Causal PINN to higher-order nonlinear PDEs …presents challenges due to inefficient utilization of temporal information.” MDPI

PhyCRNet (CMAME 2022, ConvLSTM 时空 PINN)

“combines …encoder-decoder ConvLSTM, global residual-connection, and high-order finite-difference-based filtering …hard-encoding of I/BCs.”

f-PICNN (JCP 2024, 卷积时空离散)

“a stack of nonlinear convolutional units …solving PDEs in the space-time domain without any labelled data …ICs hard-encoded; Dirichlet soft / Neumann hard.”

cPINN (CMAME 2020, 保守域分解)

“conservation …obtained by enforcing the flux continuity in the strong form along sub-domain interfaces.” ResearchGate

XPINN (CiCP 2020; 并行 JCP 2021)

“domain can be decomposed in any arbitrary way (in space and time) …offers space and time parallelization.” global-sci.org

“a distributed framework …cPINNs and XPINNs …MPI+X parallelization.” arXiv

误差分析 (IMA JNA 2024)

“the PDE residual can be made arbitrarily small for tanh networks with two hidden layers; total error bounded by training error, network size, quadrature points.” OUP Academic

B-PINN (JCP 2021)

“Bayesian physics-informed neural network …solve forward and inverse PDE problems with noisy data.” arXiv

UQ 综述 (JCP 2023)

“a comprehensive framework that includes uncertainty modeling, solution methods, and evaluation metrics post-hoc analysis.” ScienceDirect

注：文中 PhyCRNet 与 f-PICNN 细节均据上传 PDF 校核；其余条目按期刊/会议官方页或 arXiv 版本核对。若需，我可以将以上依据整理为 BibTeX。

2 简单方程组

下面给出“第三段（简单方程组：Navier-Stokes / 浅水 / ADR）”的引言写作素材（学术表述、经核验的要点与引文出处齐备）。

当 PINN 求解由单方程推广到简单方程组时的主要挑战

在多变量（如 u, v, p ）与多方程耦合场景中，损失项尺度不一致与输出配平导致训练不稳、某些物理量（如压力）难以辨识；高阶与交叉导数在反向传播中引入较高计算与内存开销；守恒律与界面通量一致性在对流占优或激波问题中尤为关键；复杂几何边界下软罚项施加边界条件常依赖权重调整，易在边界层产生系统性误差；在长时滚动预测与非线性急剧梯度的时空问题中，传统基于 MLP 的 PINN 易出现误差积累与外推不稳；同时，残差采样策略与损失自适应加权直接影响对流 - 扩散 - 反应耦合模型的可辨识性与参数反演鲁棒性。上述问题已在近年工作中被针对性缓解或解决（详见 A-E）。

A. 多输出配平与压力重构 (Navier-Stokes)

核心思想：将网络输出设为 (u, v, p) ，通过 $\nabla \cdot u$ 的空间导数生成速度 (u, v) ，在仅有速度观测时联合训练以重建压力场 (差常数)。

代表结果：在圆柱绕流 $Re = 100$ 案例中，仅用速度数据即可在全域重建压力（只差一个常数）。该设置展示了多输出联合训练与配平的关键细节。ISU Sites

方法学意义：以流函数强制不可压约束并与压力共同输出/反演，缓解了直接对 p 监督不足时的可辨识性问题，同时为多物理量损失配权提供了可操作范式。ScienceDirect

B. 保守/通量约束 (conservative flux constraints)

核心思想：cPINN 在子域分解的框架下，于界面强式施加通量连续（双曲型只含对流通量；黏性方程含对流 + 扩散通量），并在公共界面同时约束平均解的一致性。

适用场景：对流占优/激波问题、跨子域的多方程组。

方法学意义：以守恒 - 通量一致性补强了 PINN 的方程组配平与数值稳定性，并与后续 XPINN 等方法形成统一视角。ScienceDirect +1

C. 硬约束复杂边界 (距离函数法)

核心思想：利用几何距离场构造试探函数，在网络输出层精确施加 Dirichlet（并可推广至 Neumann/Robin），从而消除相应边界罚项的调参负担，降低边界层误差。

代表工作：Sukumar Srivastava (CMAME-2022) 提出距离函数硬约束策略，并展示复杂几何与高维情形的可行性；后续系统性对比亦显示精确边界施加优于软罚项，避免大量权重调优。arXiv +1

适用范围：N-S / 浅水 / ADR 在复杂域的边界条件处理。ScienceDirect

D. 卷积 - 时序架构带来的增益

PhyCRNet (ConvLSTM)：以编码 -ConvLSTM- 解码的卷积 - 时序结构学习低维潜在动力学，用有限差分滤波近似导数以构造 PDE 残差，并将 I/BC 硬编码（如周期边界 padding 与 ghost 节点）。相较 MLP-PINN，在 2D Burgers、反应 - 扩散等算例的长时滚动预测更稳、外推误差更低。arXiv +1

f-PICNN (JCP-2024)：在时空域内以离散化残差直接监督，采用一系列非线性卷积单元与自回归记忆机制，在非线性与剧烈梯度问题上收敛更快、外推更稳；IC 可硬编码，BC 软/硬结合 (Dirichlet 软、Neumann 硬)。ScienceDirect

E. CBS-PINN 等方法与在 Navier-Stokes/浅水/ADR 的经验

CBS-PINN：将 N-S/浅水方程按特征分裂改写，分开输出与损失（如

将 p 与 (u, v) 分头优化，并减少参与反传的偏导项、复用其余项，从而训练更快且更稳；在仅给定单一时刻流场且边界已知时，可重建前后时刻。arXiv；浅水方程与参数反演应用见后续期刊版本。ACM Digital Library +1

ADR 方程: PoF-2022 提出正交网格(OG)采样 + 一阶导数约束(FDC)以提升对流 - 扩散 - 反应耦合的精度与稳定性，并验证正/逆问题（含参数反演与源项识别）的可行性；近期自适应逆 PINN 通过自适应加权与梯度缩放提升逆问题收敛与鲁棒性。AIP Publishing +1

arXiv +1

配平与采样的实践：自适应损失加权（如 SA-PINN）在具有尖锐层与多尺度的方程组中显著提升收敛与稳健性，可与上法配合使用。

原文依据与核验（逐条）

Raissi et al., JCP 2019 (多输出与压力重构)

圆柱绕流 $= 100$ $Re=100$ 案例：仅用速度重建压力，“the predicted pressure field is recovered up to a constant”。文中以 $(u, v)(x, p)$ 为网络输出，经 ∇ 的导数给出 $(u, v)(x, p)$ ，联合最小化残差/数据损失。ISU Sites +1

cPINN (CMAME-2020) (界面守恒/通量连续)

在离散子域上训练 PINN，并在子域界面强式施加通量连续；双曲型仅对流通量，黏性方程含对流 + 扩散通量；同时约束界面平均解一致性。适用于激波/对流主导方程。ScienceDirect +1

距离函数硬约束 (CMAME-2022) (复杂边界的精确施加)

距离场构造的几何感知试探函数可精确施加 Dirichlet 并推广至 Neumann/Robin，避免边界罚项权重调参；系统实验表明精确边界施加优于软罚项。arXiv +1

PhyCRNet (CMAME-2022) (ConvLSTM + I/BC 硬编码)

采用 ConvLSTM 学习低维动力学，有限差分滤波近似导数以构造残差，周期边界 padding/ghost 节点实现 I/BC 硬编码；在 2D Burgers/反应 - 扩散等问题上对比 PINN/AR-DenseED，长时外推误差更低。arXiv

f-PICNN (JCP-2024) (时空域离散残差 + 记忆机制)

提出在时空整域以离散化 PDE 残差训练的卷积网络；构建非线性卷积单元栈与自回归记忆，IC 硬编码、BC 软/硬结合；在非线性与剧烈梯度问题上表现优于基线 PINN。文中给出多方程算例与误差对比表。ScienceDirect

CBS-PINN (Hu et al., 2023→2024)

分开输出与损失，“not all partial derivatives participate in backpropagation, the remaining terms will be reused”，从而降低反向传播开销并提升稳定性；在仅给定某一时刻流场情况下可重建过去与未来。Navier-Stokes 与浅水方程均给出实例；后续在 Neurocomputing (参数估计) 与 Eng. App. AI (浅水输运) 中扩展。arXiv +2 ACM Digital Library +2

ADR / 正交网格 -PINN (PoF-2022)

提出正交网格点选择 (OG) 与一阶导数约束 (FDC)，显著提升对流 - 扩散 - 反应正/逆问题的精度与稳定性，并展示参数学习与污染源定位等逆问题能力。AIP Publishing +1

自适应逆 PINN (arXiv-2024)

针对扩散到 ADR 等多类输运模型，提出逐 epoch 的损失自适应加权与参数梯度缩放，提升逆问题收敛性与鲁棒性。arXiv +1

相关的 **SA-PINN (JCP-2023) ** 从点权重层面提供了通用的自适应训练框架，可与方程组求解耦合使用。

参考提示（可写入稿件的凝练表述模板）

当 PINN 扩展到 Navier-Stokes / 浅水 / ADR 等简单方程组时，面临多输出配平与可辨识性、界面守恒与通量一致性、复杂边界精确施加、高阶导数带来的训练代价、以及时空推稳定性等问题。针对这些问题，已有工作沿着多输出联合训练与压力重构 (Raissi et al., 2019)、子域守恒/通量约束 (cPINN, 2020)、距离函数硬约束复杂边界 (CMAME-2022)、以及卷积 - 时序架构 (PhyCRNet; f-PICNN, 2024) 等路径取得进展；同时，CBS-PINN 通过特征分裂与分头优化减少反传开销并提升稳健性，OG-PINN/FDC 与自适应逆 PINN 在 ADR 的正/逆问题中提高了精度与鲁棒性。arXiv +7 ISU Sites +7 ScienceDirect +7

3 耦合方程组

强耦合非线性方程组：两大核心难题与代表性方法

难题概括。在强耦合非线性方程组上，PINN 研究主要受到两类瓶颈制约：其一是跨物理守恒与界面条件（跨子域/跨介质的通量守恒、连续性/跳跃条件与耦合边界）；其二是强刚性 (stiffness) 带来的训练不稳定、损失项失衡与长时域误差放大。围绕这两类难题，现有工作形成了两条互补思路：

一是在损失层面显式施加守恒/界面约束；二是在网络结构/训练流程上“解耦—再耦合”，并通过因果推进、并行分域和卷积-时序表征降低时空耦合强度。下述代表性工作可作为该方向的进展脉络。

一、跨物理守恒/界面条件

思路 A：在损失层面硬化守恒/界面约束。

- cPINN（保守型 PINN）将计算域划分为离散子域，并在子域接口以强形式施加通量连续（超曲面上的 Riemann/Rankine-Hugoniot 通量），从而在训练中“硬化”守恒约束，适用于非线性守恒律（如可压缩流/浅水）并天然支持并行与不连续处理。该思想在 CMA-2020 原始论文与实现中均有明示。ResearchGate +1

- XPINN 与并行 c/XPINN 将 cPINN 的思想推广到时空 - 多域：XPINN 允许任意空间/时间方向的分解，适配任意类型 PDE，并通过多网络在子域内并行训练；并行框架基于 MPI+X 实现强/弱缩放评估，空间分解下 cPINN 通信成本更低，而 XPINN 通过时间分解获得灵活性。ScienceDirect +3 Global Science Press +3 Global Science Press +3

思路 B：在架构/训练流程中“解耦—再耦合”。

- CBS-PINN（Characteristic-Based Split）在 Navier-Stokes/浅水等方程上，将输出变量与对应损失拆分，并只对必要的偏导参与反传；在有限先验/后验信息组合下可以由单时刻场重建过去/未来流场，缓解多输出配平与边界条件苛刻性。该方法在 arXiv 原文与我们提供的预印本中均给出细节与算例。arXiv

- 跨介质耦合（Stokes-Darcy, BJS 条件）：已有工作表明，在损失中显式建模 BJS 等界面条件并结合局部加权、并行网络或自适应激活，可在无网格框架下稳定逼近跨介质耦合场，说明“界面 - 条件 - 显式建模 + PINN 端到端近似”的通用可行性。MDPI +1

二、强刚性（stiffness）

思路 A：约束增强（增广拉格朗日/硬约束）稳定训练。

- AL-PINN（Augmented Lagrangian）：把初/边值条件视作等式约束，采用增广拉格朗日将训练转化为序贯的极小 - 极大问题，自动平衡各损失分量，已在多类 PDE 上给出误差优势与收敛分析。arXiv

- 硬约束框架（HCP; hPINN）：HCP 通过投影把物理/先验知识作为硬约束并入网络；hPINN 通过结构化变换/投影严格满足等式约束并可配合惩罚/ALM 处理不等式约束，显著减少权重调参与刚性诱发的不平衡。ScienceDirect +1

思路 B：算法与架构层面的抗刚性设计。

- Stiff-PINN（化学动力学）：

系统分析了常规 PINN 在刚性 ODE 上的失败模式，并通过准稳态假设 (QSSA) 等降刚性策略使 PINN 可在化学动力学基准上稳定收敛，给出代码/可复现实验。GitHub +1

- 因果/顺序推进 (IJCAI-2024): 采用隐式差分的离散 -PINN 以显式尊重时间因果，并以迁移学习在相邻时间窗顺序更新，显著缓解长时域训练不稳定和多尺度误差积累。IJCAI

- 卷积 - 时序表征 (PhyCRNet): 以 ConvLSTM 编码时空特征，PDE 残差离散化入损失，并对 I/BC 进行硬编码（如周期性边界 padding），配合自回归时间推进，弱化“全时域耦合训练”的不稳定。arXiv

以上工作共同表明: (i) 守恒/界面条件可以通过通量连续 (cPINN)、时空 - 多域分解 (XPINN) 与变量/损失拆分 (CBS-PINN) 等机制稳健注入；(ii) 强刚性可通过约束增强 (AL-PINN、硬约束)、因果顺序推进与卷积 - 时序结构得到有效缓解，从而将 PINN 推向更复杂的强耦合非线性系统求解。

原文依据 (逐条摘录, 25 词/条)

cPINN (CMA-2020): “enforcing the flux continuity in the strong form along the sub-domain interfaces.” ResearchGate

cPINN 实现 (GitHub): “conservative physics-informed neural network (cPINN) on discrete domains for nonlinear conservation laws.” GitHub

XPINN (CICP-2020, PDF): “generalized space-time domain decomposition...domain can be decomposed in any arbitrary way (in space and time).” Global Science Press

并行 c/XPINN (arXiv-2021): “a parallel algorithm for cPINNs and XPINNs constructed with a hybrid programming model described by MPI + X.” arXiv

XPINN 要点 (Global-Sci 页面): “Unlike cPINN, XPINN can be extended to any type of PDEs.” Global Science Press

CBS-PINN (arXiv-2023): “The output parameters and corresponding losses are separated...Not all partial derivatives participate in gradient backpropagation.” arXiv

CBS-PINN (预印本细节): “only \mathbf{u} , \mathbf{u}_t

, \mathbf{a} participate in gradient backpropagation.” (式 (15)-(17) 相关叙述)

Stokes - Darcy (Entropy-2022): “PINN...for coupled Stokes - Darcy

equations with Beavers-Joseph-Saffman interface conditions.” MDPI

AL-PINN (arXiv-2022/Neurocomputing-2023): “treat the initial and boundary conditions as constraints…Augmented Lagrangian…sequential max-min.” arXiv

HCP (JCP-2021): “introduce domain knowledge…as hard constraints into neural networks through projection.” ScienceDirect

hPINN (SIAM-2021): “physics-informed neural networks with hard constraints (hPINNs)…” SIAM E-books

Stiff-PINN (GitHub/论文摘要) : “first investigates…stiff chemical kinetic problems…employ Quasi-Steady-State-Assumptions (QSSA) to reduce stiffness.” GitHub

Stiff-PINN (会议稿) : “regular-PINN fails…Stiff-PINN with QSSA works very well.” CEUR-WS

因果 - 顺序 (IJCAI-2024) : “use implicit time differencing schemes to enforce temporal causality…transfer learning to sequentially update the PINNs.” IJCAI

PhyCRNet (arXiv-2021/CMA-2022) : “I/BCs are hard-encoded… aggregated discretized PDE residuals…autoregressive connections simulate time marching.” arXiv

4 主题探索和来源

4.1 单方程

一、PINN 用于单方程 (单物理场/单 PDE) ——基础能力与训练机制
表达能力与“谱偏置”/高频困难(Activation 特征嵌入)痛点:MLP-PINN 倾向先学低频, 遇到高梯度/多尺度解(激波/细纹理)精度掉; 需增强表达与收敛。线索: 自适应激活、傅里叶特征/正弦空间映射。Royal Society Publishing +3 ScienceDirect +3 arXiv +3

代表论文:

Jagtap 等, “Adaptive activation functions accelerate convergence …”, JCP 2020,<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0021999119308411> ScienceDirect

Wang 等, “On the eigenvector bias of Fourier feature networks …”, CMAME 2021,<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045782521002759> (arXiv: <https://arxiv.org/abs/2012.10047>)

ScienceDirect +1

优化病态与训练失败机理 (NTK/梯度病理 缓解) 痛点: 多损失项导致梯度量级失衡、训练停滞; 需有可解释的收敛与调参策略。线索: NTK 视角、Learning-Rate Annealing、最佳实践指南。ScienceDirect +2 SIAM Ebooks +2

代表论文:

Wang/Teng/Perdikaris, “Understanding and Mitigating Gradient Flow Pathologies in PINNs”, SIAM J. Sci. Comput. 2021,<https://pubs.siam.org/doi/10.1137/20M1318043> SIAM Ebooks

Wang/Yu/Perdikaris, “When and why PINNs fail to train: A NTK perspective”, JCP 2022,<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S002199912100663X> (arXiv: <https://arxiv.org/abs/2007.14527>)

ScienceDirect +1

Wang 等, “An Expert’s Guide to Training PINNs”, arXiv:2308.08468, <https://arxiv.org/abs/2308.08468>

arXiv

自适应采样与自适应权重 (点位/权重两条主线) 痛点: 均匀采样与固定权重在边界层/薄层/奇异处效率差。线索: 残差驱动的自适应采样 (RBAS/RAR)、点位级软注意权重 (SA-PINN)、残差衰减率均衡 (BRDR)。 ScienceDirect +2 ScienceDirect +2

代表论文:

Wu 等, “A comprehensive study of residual-based adaptive sampling”, CMAME 2023,<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045782522006260> ScienceDirect

McClenny/Braga-Neto, “Self-adaptive PINN (SA-PINN)”, JCP 2023, <https://dl.acm.org/doi/10.1016/j.jcp.2022.111722> (arXiv: <https://arxiv.org/abs/2009.04544>)

ACM Digital Library +1

Chen 等, “Balanced Residual Decay Rate (BRDR)”, arXiv:2407.01613, <https://arxiv.org/pdf/2407.01613.pdf> 与期刊版 (JCP 2025)<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782524000121> arXiv +1

边界/初值条件的“硬/软”约束与几何复杂边界痛点：复杂边界与多类型 BC (Dirichlet/Neumann/Robin) 软约束易失真。线索：解析嵌入的硬约束统一框架、混合硬软法。NeurIPS Papers +1

代表论文：

Liu 等, “A Unified Hard-Constraint Framework for PDEs”, NeurIPS 2022, https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2022/file/7f970edb14104b81e70e3b03e1f5214f-Paper-Conference.pdf

NeurIPS Papers

Xiao 等, “On the Hard Boundary Constraint Method for Fluid Flow”, Applied Sciences 2024, <https://www.mdpi.com/2076-3417/14/2/859>

MDPI

时间因果与离散时间 PINN(稳定长时段/刚性问题)痛点：长时演化/多尺度问题中“时间倒灌”和误差积累。线索：Causal-PINN 的时间因果加权、离散训练 (DT-PINN/隐式差分)、Frozen-PINN 等。arXiv +2 NeurIPS Proceedings +2

代表论文：

Wang/Sankaran/Perdikaris, “Respecting causality …”, CMAME 2024 (arXiv:2203.07404), <https://arxiv.org/abs/2203.07404>

ScienceDirect +1

Sharma 等, “Discretely-Trained PINNs (DT-PINN)”, NeurIPS 2022, https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2022/file/0764db1151b936aca59249e2c1386101-Paper-Conference.pdf

NeurIPS Proceedings

Li 等, “Causality-enhanced Discrete PINN”, IJCAI 2024, <https://www.ijcai.org/proceedings/2024> Frozen-PINN (arXiv:2405.20836), <https://arxiv.org/html/2405.20836v2>

IJCAI +1

结构化/卷积 - 时序架构 (CNN/ConvLSTM) 替代纯 MLP 痛点：局部空间关联与时序依赖弱。线索：PhyCRNet (ConvLSTM)、f-PICNN (时空卷积)、非局部 PDO 滤波。ScienceDirect +2 ScienceDirect +2

代表论文：

Ren 等, “PhyCRNet”, CMAME 2022, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578> (arXiv: <https://arxiv.org/abs/2106.14103>)

ScienceDirect +1

Yuan 等,“f-PICNN”,JCP 2024,<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999124018401>
(预印本 PDF: <https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10215212/1/2409.18401v1.pdf>)
ScienceDirect +1

Haghigat 等,“Nonlocal PINN via PDDO”,CMAME 2021,<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812262030312X>
ScienceDirect
并行化/域分解 (cPINN/XPINN) 痛点: 大域/复杂几何训练困难。线索: 保守型域分解 (通量连续)、扩展时空域分解。ScienceDirect +1
代表论文:
Jagtap 等,“Conservative PINNs (cPINN)”,CMAME 2020,<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812261930312X>
(代码: https://github.com/AmeyaJagtap/Conservative_PINNs)
ScienceDirect +1

Shukla 等,“XPINN”,JCP 2021,<https://dl.acm.org/doi/10.1016/j.jcp.2021.110683>
ACM Digital Library
理论: 误差/收敛/复杂度痛点: 缺少可用的误差上界与收敛条件指导。
线索: Acta Numerica 综述、收敛/误差估计最新进展。Cambridge University Press Assessment +2 arXiv +2
代表论文:
De Ryck Mishra, “Numerical analysis of PINNs”, Acta Numerica 2024,<https://www.cambridge.org/core/journals/acta-numerica/article/numerical-analysis-of-pinnns/716F9F>
Cambridge University Press Assessment
Doumèche 等,“Convergence and error analysis of PINNs”,arXiv:2305.01240
(Bernoulli 2025),<https://arxiv.org/abs/2305.01240>;<https://projecteuclid.org/journals/bernoulli/volume-10/issue-3/10.3150/24-BEJ1799.short>
arXiv +1
不确定性量化 (Bayesian/随机 PINN) 痛点: 预测置信度与数据/模型不确定性的关系。线索: B-PINNs、随机化 PINN、两步 Bayesian-PINN。Astrophysics Data System +2 ScienceDirect +2
代表论文:
Yang 等,“B-PINNs”,JCP 2021,<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021JCoPh.42509913Y/abstract>
Astrophysics Data System
Zong 等,“Randomized PINN for UQ”,CMAME 2025,<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812262400312X>
ScienceDirect

奠基文献(引言开篇可标注): Raissi/Perdikaris/Karniadakis, “PINNs”, JCP 2019,<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999118307125> ScienceDirect

4.2 简单方程组

二、PINN 用于简单方程组 (少量耦合/同一物理分量多变量)

多输出/变量耦合的损失配平与尺度化痛点: 速度 - 压力/位移 - 应力等多变量协同训练; 损失多目标冲突。线索: 多目标/多任务自适应权重(wbPINN、DB-PINN、Pareto/MGD)。ScienceDirect +2 arXiv +2

代表论文:

Wang 等,“wbPINN for multi-scale”,JCP 2024,<https://www.sciencedirect.com/science/article/ab> ScienceDirect

Bischof 等,“Multi-Objective Loss Balancing”,CMAME 2025(作者稿),
<https://www.research-collection.ethz.ch/bitstream/handle/20.500.11850/727362/1/1-s2.0-S0045782525001860-main.pdf>

Research Collection

Zhou 等, “Dual-Balanced PINN (DB-PINN)”, arXiv:2505.11117,
<https://arxiv.org/abs/2505.11117>
arXiv

Navier-Stokes/浅水等标准方程组的 PINN 解法策略痛点: 压力 - 速度耦合、守恒/稳定性; 自由液面项。线索: CBS-PINN (特征分裂)、浅水/球面浅水、增广系统。ACM Digital Library +2 ScienceDirect +2

代表论文:

Hu 等, “PINN + Characteristic-Based Split (CBS) for N-S”, Neu-rocomputing 2024 (arXiv:2304.10717), <https://arxiv.org/abs/2304.10717>;
<https://dl.acm.org/doi/10.1016/j.neucom.2024.127240>

arXiv +1

Bihlo 等,“Shallow-water on the sphere”,JCP 2022,<https://www.sciencedirect.com/science/article> ScienceDirect

Dazzi 等, “Augmented SWEs with topography”, Water Resources Research 2024,<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2023WR036589>
AGU Publications

卷积/递归架构用于多变量场 (CNN/ConvLSTM-PINN) 线索: Phy-CRNet (无标签物理监督)、f-PICNN (时空域)。ScienceDirect +1

代表论文: 见上一节 1-6 条。

硬约束/混合约束提升 BC 一致性 (复杂边界/多 BC) 线索: 统一硬约束、混合硬软 (Complementary PINNs)。NeurIPS Papers +1

代表论文: 同上一节 1-4 条 + <https://arxiv.org/abs/2411.08122>
arXiv

守恒/通量连续约束在系统方程中的体现 (cPINN) 线索: 分区 - 通量强连续 (界面守恒), 利于并行与不连续解。ScienceDirect

代表论文: Jagtap 等 cPINN, 见: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045782>
ScienceDirect

对流 - 扩散 - 反应 (ADR) 类 “轻耦合” 系统线索: 网格无关/并行友好、参数反演。AIP Publishing

代表论文: Huang 等, “PINNs for ADR”, Physics of Fluids 2024,
<https://pubs.aip.org/aip/pof/article/36/8/081906/3308081>

AIP Publishing

MHD/电磁等两 - 三方程弱耦合系统初探线索: 磁流体 (Orszag-Tang)
/电磁耦合等的 PINN 或 PCNN 试验。AIP Publishing +1

代表论文:

Bormanis 等, “MHD via Physics-constrained CNNs”, Physics of Plasmas 2024, <https://pubs.aip.org/aip/pop/article/31/1/012101/2932188/Solving-the-Orszag-Tang-vortex>

AIP Publishing

反问题与参数同化 (在系统方程中) 线索: SWE 参数/电池参数反演等。
arXiv +1

训练策略: 时间推进/再初始化/课程学习线索: 分段时间训练缓解长时漂移; 流体刚性问题用 “re-initialization”。researchgate.net +1

4.3 耦合方程组

三、PINN 用于强耦合多方程组/多物理(反应 - 传输/热 - 流 - 固/MHD/多域)

跨物理守恒与一致性 (质量/能量/熵) 痛点: 多方程/多场量必须满足界面通量与整体守恒。线索: cPINN 通量连续、Neural-conservation/变分

或能量式损失。ScienceDirect +1

代表论文:

Jagtap 等 cPINN, <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045782520302127>
ScienceDirect

Richter-Powell 等, “Neural Conservation Laws”, NeurIPS 2022, https://papers.nips.cc/paper_files/Paper-Conference.pdf

NeurIPS Papers

多域/界面条件 (NS-Darcy、异构材料等) 线索: I-PINNs/界面网络; 子域识别 (SI-PINNs); Schwarz-type 域分解 + 可学习界面条件。ScienceDirect
+2 AIMS Press +2

代表论文:

Sarma 等, “Interface PINNs (I-PINNs)”, CMAME 2024, <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0898122623000011>
ScienceDirect

Wang 等, “Subregion-identified PINNs for NS/Darcy”, Electronic Research Archive 2025, <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/era.2025223>

AIMS Press

Basir/Senocak, “Schwarz-type PECANN 域分解”, arXiv:2307.12435,
<https://arxiv.org/pdf/2307.12435.pdf>

arXiv

训练框架: 增强约束/增广拉格朗日/分阶段 (交替) 训练线索: Augmented Lagrangian/PECANN, 多阶段/交替优化稳耦合。researchgate.net
+1

代表论文:

Khadijeh 等, “Multistage PINN for strongly coupled multiphysics”, Eng. Comput. 2025, <https://link.springer.com/article/10.1007/s00366-025-02174-4>

SpringerLink

强耦合“刚性”化学反应 - 输运 (Reactive Transport) 线索: 方程耦合 + 时间尺度分离; 利用物理守恒/化学平衡外部模块 (如 PHREEQC) 或“算子学习”提升稳定与泛化。SpringerLink +1

代表论文:

Deng 等, “PH-PINNs + PHREEQC”, Science China 2025, <https://link.springer.com/article/10.1007/s00366-024-1590-x>

SpringerLink

Huang 等,“Porous-DeepONet 学习反应 - 输运算子”,Engineering 2024,
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2095809924003904>

ScienceDirect

多物理强耦合的算子学习备选 (DeepONet/FNO 与物理融合) 线索: 当端到端 PINN 难以稳定收敛时, 用 PIML-DeepONet 或物理增强 FNO 学习“方程到解”的算子, 支持跨参数/跨几何泛化。Science +2 aiichironakano +2

代表论文:

Lu 等,“Physics-informed DeepONet (Science Advances 2021)”,<https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.abe5300>

Science

Lu 等,“DeepONet (NMI 2021)”,<https://aiichironakano.github.io/cs653/Lu-DeepONet-NMachineIntell21.pdf>

aiichironakano

Li 等,“Fourier Neural Operator”,arXiv:2010.08895,<https://arxiv.org/abs/2010.08895>

arXiv

热 - 流 - 固/电 - 化学等典型强耦合应用线索: 热 - 流耦合 NS+ 能量方程, 电化学 - 热耦合 (电池) 等。ScienceDirect +1

代表论文:

He 等, “Coupled flow-heat with entropy-viscosity PINN”, Applied Mathematical Modelling 2025,<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S073519332500>

ScienceDirect

Wang 等, “PINN for battery SOH”, Nature Communications 2024,
<https://www.nature.com/articles/s41467-024-48779-z>

Nature

MHD/两相流等强耦合方程组的专用改进线索: 两相 -Cahn-Hilliard + MHD 的 CPINNs、熵稳定/界面条件。ScienceDirect

代表论文: Peng 等, “Coupled PINNs for two-phase MHD (CPINNs)”, Computers Mathematics with Applications 2024,<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/>

ScienceDirect

长时稳定与课程/转移学习(强耦合场景)线索: 课程 - 转移 (CTL-PINN) 分段推进, 缓解跨尺度长期漂移。ScienceDirect

代表论文: Guo 等, “CTL-PINN for long-term dynamics”, Neural Net-

works 2025 (SSRN 预印本:https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=5074293

ScienceDirect +1

系统级 UQ 与可靠性线索:B-PINN/两步 Bayesian-PINN、DeepONet-grid-UQ。

OpenReview +1