# README для задания 1

Пожилая саламандра

November 2019

## Содержание

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Обобщённые определения

Пусть функция $F(x, y)$ определена на декартовом произведении $X \times Y$, где $X, Y$ - множества произвольной природы.

**Определение 1.** Пара $(x^0, y^0) \in X \times Y$ называется *седловой точкой* функции $F(x, y)$ на $X \times Y$, если

$$F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y), \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Понятие седловой точки используется в определении решения антагонистической игры.

В антагонистической игре принимают участие два игрока: игрок 1 и игрок 2. Игрок 1 выбирает стратегию $x$ из множества стратегий $X$, игрок 2 - стратегию $y$ из $Y$. *Нормальная форма* игры подразумевает, что каждый игрок выбирает свою стратегию независимо, не зная выбора партнера. Задана *функция выигрыша* $F(x, y)$ первого игрока, определенная на $X \times Y$. Выигрыш $F(x, y)$ первого игрока является проигрышем для второго. Цель первого игрока состоит в увеличении своего выигрыша, в то время как цель второго - в уменьшении $F(x, y)$.

Таким образом, антагонистическая игра задается тройкой

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle \tag{1}$$

*Замечание.* Если значение $F(x, y) < 0$, то выигрыш первого игрока является фактически проигрышем.

**Определение 2.** Говорят, что антагонистическая игра $\Gamma$ имеет *решение*, если функция $F(x, y)$ имеет на $X \times Y$ седловую точку. Пусть $(x^0, y^0)$ - седловая точка функции $F(x, y)$. Тогда тройка $(x^0, y^0, v = F(x^0, y^0)$ называется решением игры, $x^0$, $y^0$ - *оптимальными стратегиями* игроков, а $v$ - *значением* игры.

Следующая лемма показывает, что значение игры не зависит от седловой точки.

**Лемма 1.** Если $(x^0, y^0), (x^*, y^*)$ - две седловые точки функции $F(x, y)$ на $X \times Y$, то $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$.

**Определение 3.** Антагонистическая игра $\Gamma$ называется *матричной*, если множества стратегий игроков конечны: $X = 1, ..., m, Y = 1, ..., n$. При этом принято обозначать стратегию первого игрока через $i$, стратегию второго через $j$, выигрыш первого $F(i, j)$ через $a_{ij}$. Матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$

называется *матрицей игры*. Первый игрок выбирает в ней номер строки $i$, а второй - номер столбца $j$.

В обозначениях матричной игры $(i^0, j^0)$ - седловая точка матрицы $A$ если

$$a_{ij^0} \leq a_{i^0j^0} \leq a_{i^0j}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.$$

Иначе, элемент матрицы $a_{i^0j^0}$ является минимальным в $i^0$-й строке и максимальным в $j^0$-м столбце.

Таким образом, антагонистическая матричная игра задается тройкой

$$\Gamma = \langle X = \{1, ..., m\}, Y = \{1, ..., n\}, F(i, j) = (a_{ij})_{m \times n}\rangle, i \in X, j \in Y \qquad (2)$$

## 1.2. Максиминные и минимаксные стратегии

Рассмотрим игру $\Gamma$ с точки зрения первого игрока. Пусть он выбрал стратегию $x$. Ясно, что что его выигрыш будет не меньше чем

$$\inf_{y \in Y} F(x, y)$$

Эту величину назовём *гарантированным выигрышем (результатом)* для первого игрока, если он использует стратегию $x$. Наилучший гарантированный выигрыш для первого игрока

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y)$$

называется *нижним значением* игры.

**Определение 4.** Стратегия $x^0$ называется *максиминной*, если

$$\inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}$$

Рассмотрим игру $\Gamma$ с точки зрения второго игрока. Если он выбрал стратегию $y$, то для него естественно считать гарантированным результатом величину

$$\sup_{x \in X} F(x, y)$$

Проигрыш второго игрока будет не больше, чем эта величина. Наилучший гарантированный результат для второго игрока

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

называется *верхним значением* игры.

**Определение 5.** Стратегия $y^0$ называется *минимаксной*, если

$$\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v}$$

**Лемма 2.** В любой антагонистической игре $\Gamma$ справедливо неравенство $\underline{v} \leq \overline{v}$.

**Теорема 1.** 1) Функция $F(x, y)$ имеет седловую точку $\Leftrightarrow$ выполняется равенство

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) \tag{3}$$

2) Пусть выполняется равенство (3). Пара $(x^0, y^0)$ - седловая точка функции $F(x, y) \Leftrightarrow x^0$ - максиминная, а $y^0$ - минимаксная стратегия игроков.

## 1.3. Смешанное расширение матричной игры

Бывают примеры антагонистических игр, не имеющих решения в чистых стратегиях[1]. Для таки задач теория игр предлагает игрокам использовать смешанные стратегии.

**Определение 6.** *Смешанной стратегией* первого (второго) игрока называется вероятностное распределение $\varphi$ $(\psi)$ на множестве стратегий $X$ $(Y)$.

Для первого игрока применить смешанную стратегию $\varphi$ - это выбрать стратегию $x \in X$ как реализацию случайной величины, имеющей закон распределения $\varphi$.

Пусть $X = 1, ..., m$, как это имеет место в матричной игре. Тогда вместо $\varphi$ для обозначения смешанной стратегии будем использовать *вероятностный вектор* $p = (p_1, ..., p_m)$, удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \leq 0, i = 1, ..., m$$

Если применяется вектор $p$, то стратегия $i$ выбирается с вероятностью $p_i$.

Обозначим через $\{\varphi\}$ - множество всех смешанных стратегий первого игрока на множестве $X$. Можно считать, что $X \subset \{\varphi\}$. Действительно, в последнем случае стратегию $x$ можно отождествить с вероятностной мерой $I_x$. Если множество $X$ конечно, то выбор стратегий $i$ эквивалентен выбору смешаннной стратегии $p^i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 0)$, где единица стоит на $i$-ом месте.

[1] Чистая стратегия $x^i$ $(y^j)$ - стратегия, выбор которой даёт полную определённость, каким образом игрок 1 (2) продолжит игру. Далее более подробно

Множество $X$ будем называть множеством *чистых стратегий* первого игрока (в противовес смешанным).

Пусть дана матричная игра Γ вида (2). Множество смешанных стратегий первого игрока -

$$P = \left\{ p = (p_1, ..., p_m) \Big| \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \leq 0, i = 1, ..., m \right\}$$

множество смешанных стратегий второго игрока -

$$Q = \left\{ q = (q_1, ..., q_n) \Big| \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \leq 0, j = 1, ..., n \right\}$$

а математическое ожидание выигрыша первого игрока -

$$K(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

Таким образом, $\overline{\Gamma} = \langle P, Q, K(p, q) \rangle$ - смешанное расширение матричной игры Γ. Следующее утверждение называют *основной теоремой матричных игр.*

**Теорема 2** (*теорема фон Неймана*). Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

### 1.4. Сведение матричной игры к паре двойственных ЗЛП

Матричная игра Γ в определенном смысле эквивалентна паре двойственных задач линейного программирования:

$$\begin{cases} (x, u) \to min, \\ xA \geq w, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad \begin{cases} (y, w) \to max, \\ Ay^T \leq w, \\ y_i \geq 0, i = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (4)$$

, где $u = \{1, 1, ..., 1\} \in \mathbb{R}^m$, $w = \{1, 1, ..., 1\} \in \mathbb{R}^n$.

**Теорема 3.** Пусть Γ - игра вида (2) с положительной матрицей $A^2$ и даны задачи ЛП (4). Тогда имеют место следующие утверждения:

1) Обе задачи (4) имеют оптимальное решение $\overline{x}$ и $\overline{y}$, при этом

$$\theta = \min_x (x, u) = \max_y (y, w)$$

[2]Все элементы матрицы положительны.

2) Значение игры $v$ игры $\Gamma$ равно

$$v = \frac{1}{\theta}$$

а вероятностные вектора

$$p^0 = \frac{\overline{x}}{\theta}, \qquad q^0 = \frac{\overline{y}}{\theta}$$

являются оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков.

3) Любые оптимальные стратегии $p \in P, q \in Q$ игроков могут быть построены указанным способом, то есть

$$P = \frac{\overline{X}}{\theta}, \qquad Q = \frac{\overline{Y}}{\theta};$$

где $\overline{X}, \overline{Y} \neq \varnothing$ множества оптимальных решений задач (4).

# 2. Метод решения

## 2.1. Реализованные функции

- correct_output() получает на вход матрицу игры $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, вероятностные вектора оптимальных стратегий $p^0, q^0$, значение игры $v$ и выводит их в красивом виде (если числа нецелые, представляет их в виде дробей).

- spectre_vizual() получает на вход вероятностный вектор и графически показывает вероятность использования каждой из стратегий

- permutation() получает на вход числа m и n и возвращает число перестановок

- combinations() получает на вход матрицу, размерность квадратной матрицы и возвращает все возможные комбинации из исходной матрицы.

- check_extreme() проверяет, удовлетворяет ли найденная точка условиям многогранника

- extreme_points() получает на вход исходную матрицу, столбец ограничений, строку с символами ограничений и находит крайние точки прямым методом решения ЗЛП (решения $C_n^m$ систем линейных уравнений)

- fixed_solution() получает на вход исходную матрицу, вектор минимумов по строкам, вектор максимумов по столбцам, цену игры и находит координаты седловых точек, а также вектора вероятностей применения стратегий для игроков 1 и 2 и цену игры ($\exists$ *решение в чистых стратегиях*).

- mixed_solution() получает на вход исходную матрицу и возвращает вектора вероятностей применения стратегий для игроков и цену игры (решение возможно только *в смешанных стратегиях*).
- KahanSum() - алгоритм Кэхэна (компенсационное суммирование) - необходимо для корректного суммирования float.
- nash_equilibrium() получает на вход матрицу, определяет, есть ли в ней седловая точка, и далее, в зависимости от ситуации, использует необходимые функции. Возвращает вероятностные вектора и цену игры.

## 2.2. Ход решения

На вход функции *nash_equilibrium()* подается матрица игры. Производится поиск решения в чистых стратегиях. Если оно есть - ищем решение с помощью функции *fixed_solution()*, если решение возможно только в смешанных стратегиях, то переходим к функции *mixed_solution()* и использует прямой метод решения ЗЛП(смотри пункт 2.1, функции *extreme_points()*, *check_extreme()*) В зависимости от выбранного решения (в чистых или смешанных стратегиях) *nash_equilibrium()* получает два вероятностных вектора и значение игры, и вызывает *correct_output()* для вывода этих результатов. Также вызывается функция *spectre_vizual()*, которую представляет полученные вероятностные векторы оптимальных стратегий в виде графика (*matplotlib.pyplot.plot*).

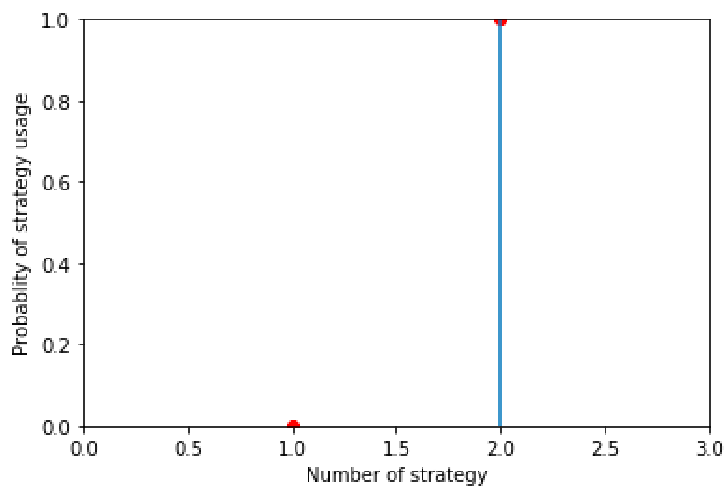
# 3. Тестирование

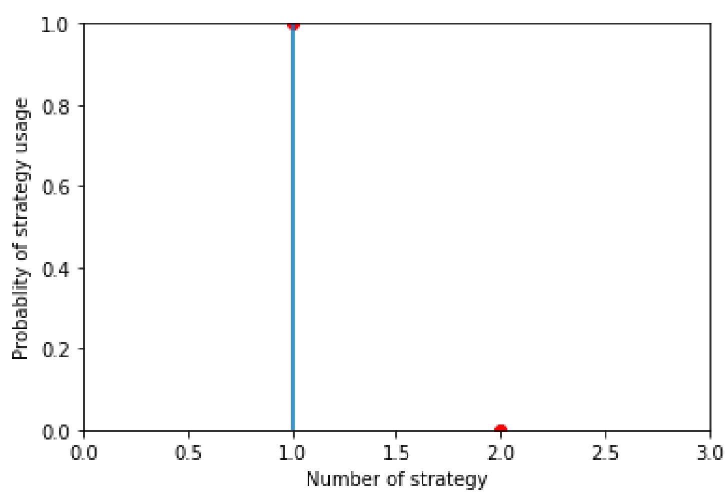
## 3.1. Тест 1

Saddle point: 3
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |

Price of the game: 3

| p || 0 | 1 |
| q || 1 | 0 |



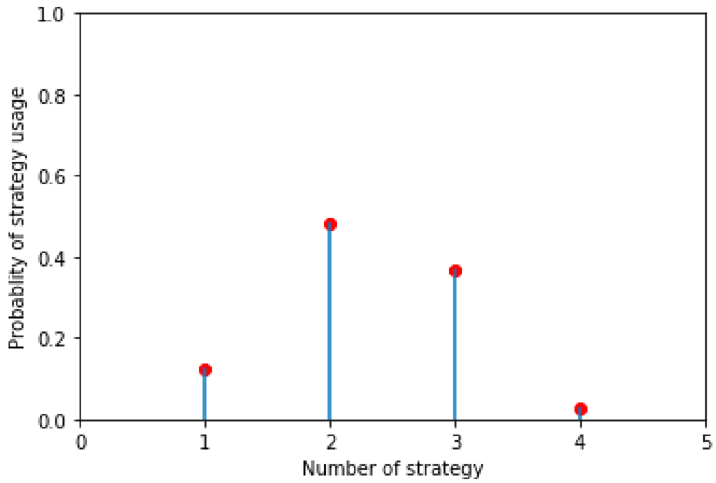



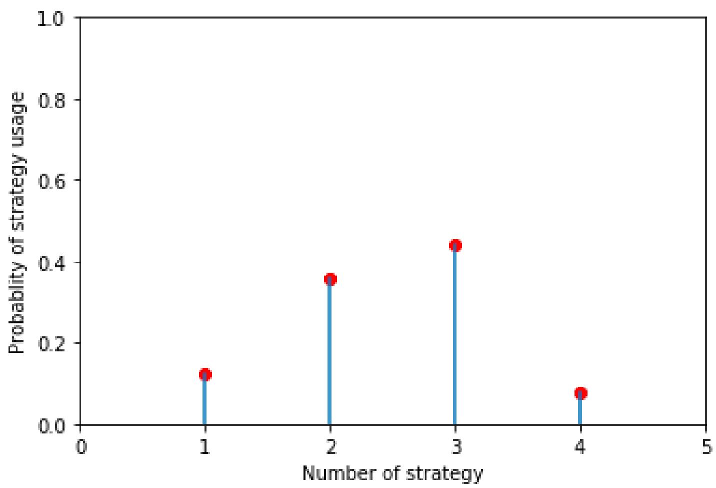
## 3.2. Тест 2

No saddle point
| 3 | 6 | 1 | 4 |
| 5 | 2 | 4 | 2 |
| 1 | 4 | 3 | 5 |
| 4 | 3 | 4 | -1 |

Price of the game: 339/104

| p || 1/8 | 25/52 | 19/52 | 3/104 |
| q || 1/8 | 37/104 | 23/52 | 1/13 |




Другие примеры рассмотрены в visual.ipynb

# 4. Необходимое ПО

**NumPy** – для работы с векторами и матрицами

**itertools** – для получения перестановок матриц и векторов, дабы облегчить жизнь и не писать это руками

**re** – для распарсивания входных данных

**Fractions** – для вывода в обыкновенных дробях

**Matplotlib.pyplot** – для визуализации

**Setuptools** – для более удобного сбора пакета

# 5. Инструкция по запуску

Для запуска самой программы перейти в папку matrgame, открыть ее в терминале и через python3 game.py запустить программу[3].

Для создания распространяемого пакета выполнить последовательность команд в корневой папке проекта:

- python3 setup.py sdist
- virtualenv -p python3 env
- ./env/bin/python3 setup.py install

Для проверки работоспособности пакета запускаем его в изолированной среде через:

- ./env/bin/python3

После запуска пакета в среде можно прописать:

- import matrgame.game as mg
- mg.nash_equilibrium([[1,2],[3,4])

[3]Так как в достаточно скором времени поддержка Python 2.7 будет прекращена, то весь проект создавался под Python 3.7

## 6. Вклад участников команды

**Ловягин Андрей** – реализация метода решения ЗЛП, тесты

**Никита Денисов** – нахождение оптимального решения матричной игры в чистых стратегиях, пакет, объединение частного и общего решения задачи

**Иванков Михаил** – математическая сторона программы, визуализация, вывод матрицы, README

## 7. Использованная литература

А. А. Васин, П. С. Краснощёков, В. В. Морозов - Исследование операций/ М.:2008 - пункт 1

http://eos.ibi.spb.ru/umk/4_4/5/print/5_R1_T11.pdf - информация из пункта 1.4