低秩矩阵完整化问题的几种高效解法

林陈冉

2016年12月19日

1 简介

1.1 什么是低秩矩阵完整化(low-rank matrix completion)

简单来说, 低秩矩阵完整化问题, 就是在仅仅知道矩阵的少部分元素的情况下, 恢复出这个矩阵的所有元素. 这个问题在统计, 图像处理, 计算几何, 机器学习, 信号处理, 模型控制等方面有广泛应用, 比如著名的NetFlix大奖赛问题.

1.2 数学模型

显而易见, 补全一个完全随机的矩阵几乎是不可能的, 也是意义不大的. 一般情况下, 我们认为所需要补全的矩阵是有一定规律的, 也就是说, 这个矩阵的秩比较小. 通常我们最感兴趣的是这样的一个最优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & rank(X) \\ \text{s.t.} \quad & X_{ij} = M_{ij}, \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $X, M \in \mathbb{R}^{p\times q}$, Ω 是已知元素的下标 (i,j) 构成的集合, $|\Omega| = m$.

在一些情况下, (**??**)等价于线性约束问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & rank(X) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{A}(X) = b \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中$b = (b_1, \cdots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{p\times q} \to \mathbb{R}^m$ 是线性算子, $\mathcal{A}(X) = (\langle A_1, X\rangle, \cdots, \langle A_m, X\rangle)$, $A_i \in \mathbb{R}^{p\times q}, \forall i = 1, \cdots, m$, $\langle A, X\rangle$ 是矩阵内积,

在此给出线性算子 $\mathcal{A}$ 的共轭算子的定义: $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{p\times q}$, $\mathcal{A}^*(y) = \sum_{i=1}^m y_i A_i, \forall y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. 容易验证 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*$ 是well-defined, 即

$$\langle \mathcal{A}(X), y\rangle = \langle (\langle A_i, X\rangle), (y_i)\rangle = \sum_{i=1}^m y_i \langle A_i, X\rangle = \langle \sum_{i=1}^m y_i A_i, X\rangle = \langle \mathcal{A}^*(y), X\rangle = \langle X, \mathcal{A}^*(y)\rangle$$

但是(??), (??)都是**"NP-难"**的, 因此需要一定的转化. 这里我们用核范数来近似矩阵的秩, 把(??)与(??)转化为以下形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|X\|_* \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{A}(X) = b \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \|X\|_* \\ \text{s.t.} \quad & X_{ij} = M_{ij}, \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \tag{1.4}$$

很自然的, 一个重要的问题是: (??)与(??), 或者(??)与(??)什么时候等价? 略过证明, 直接描述以下重要的结论:

对于(??), Candes和陶哲轩等给出了一个证明. 当在某些条件下, 若已知元素个数 $|\Omega| = m = O(nr \cdot polylog(n))$, 其中 $n = max(p, q)$, $polylog$ 是多重对数函数, 则矩阵有很高概率可以通过(??)恢复.

对于(??), Recht等给出了一个证明. 将线性映射 $\mathcal{A}$ 的矩阵形式记作 A , 即 $\mathcal{A}(X) = A\text{vec}(X)$, 其中 $\text{vec}(X) \in \mathbb{R}^{pq}$ 为矩阵 X 的向量化. 当 A 是一个随机高斯矩阵, 若向量 b 的维数 $m \geq C(r(p+q)log(pq)$, 其中 C 是一个正的常数, 则矩阵有很高概率可以通过(??)恢复.

实际上, 由线性代数知识容易知道, (??)要求的线性约束条件并不总能成立, 因此有时需要适当松弛. 考虑(??)的罚函数:

$$\min \quad \|X\|_* + \frac{1}{2\mu}\|\mathcal{A}(X) - b\|_2^2 \tag{1.5}$$

其中 μ 是某个给定常数.

下面, 将对(??), (??), (??)分别给出一种高效的解法.

2 预备知识

此部分会给出一些阅读本文必备的结论,许多结论将略过证明.

2.1 奇异值分解

$\forall X \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $X = UDV^\top$, 其中 $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $V \in \mathbb{R}^{q\times q}$ 是正交矩阵, $D = \text{Diag}(\sigma) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 对角线上为非负实数,其他位置为0的矩阵.

这个分解称为**奇异值分解(SVD)**, 对角矩阵Diag(σ)的每个对角元素 σ_i 都是非负的, 称为矩阵的**奇异值**, 正交矩阵 U 的列向量称为矩阵的**左奇异向量**, 正交矩阵 V 的列向量称为矩阵的**右奇异向量**.

有时也认为 $X = UDV^\top$, 其中 $U \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $V \in \mathbb{R}^{q\times r}$ 是列正交矩阵, $D \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 是非负实对角矩阵,$r = rank(X)$.

2.2 罚函数

对于约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \quad i = 1, \cdots, m_e; \\ & c_i(x) \geq 0, \quad i = m_e + 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们可以通过把约束条件平方后, 乘上一个很大的常数 μ , 再加到目标函数上, 转化为**罚函数**:

$$P(x, \mu) = f(x) + \mu \|\bar{c}(x)\|_2^2 \tag{2.2}$$

其中 $\bar{c}(x) = (\bar{c}_1(x), \cdots, \bar{c}_m(x)) \in \mathbb{R}^m$, $\bar{c}_i(x)$如下定义: $\bar{c}_i(x) = \begin{cases} c_i(x), & i \leq m_e \\ \max\{0, c_i(x)\}, & i > m_e \end{cases}$.

当 $\mu \to \infty$, (**??**)和原问题(**??**)等价.

$$\min_x \quad P(x, \mu) \tag{2.3}$$

但在实际中, μ 无法取到无穷大, 为了克服这一缺点, 可以定义**增广Lagrange函数**(以下叙述仅考虑等值约束的情况, 即 $m_e = m$):

$$P(x, \lambda, \mu) = f(x) - \lambda^\top c(x) + \frac{1}{2}\mu \|c(x)\|_2^2 \tag{2.4}$$

其中 λ , λ , μ, $c(x) \in \mathbb{R}^m$ 给定.

(**??**)等价于以下的**Powell罚函数**:

$$P(x, \theta, \mu) = f(x) + \frac{1}{2}\mu \|c(x) - \theta\|_2^2 \tag{2.5}$$

其中 $c(x), \theta \in \mathbb{R}^m$.

(**??**)与(**??**)只相差一个与 x 无关的常数 $\frac{1}{2}\sigma\|\theta\|_2^2$.

2.3 对偶问题

对于约束优化问题(??),它的**Langrange**函数为:

$$L(x,\mu,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_e} \mu_i c_i(x) + \sum_{i=m_e+1}^{m} \lambda_i c_i(x) \tag{2.6}$$

定义 $g(\mu,\lambda) = \inf_x L(x,\mu,\lambda)$, 通过这个函数我们可以把(??)转化为它的对偶问题:

$$\begin{aligned} \max_{\mu,\lambda} \quad & g(\mu,\lambda) \\ \text{s.t.} \quad & \mu \succeq 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

当满足一定条件(KKT条件)时, (??)和(??)是等价的.

2.4 次梯度

$f: E \to \mathbb{R}$ 是一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 的凸子集 E 上的实值函数,则所有满足

$$f(y) - f(x) \geq u(y-x), \quad \forall y \in E \tag{2.8}$$

的向量 u 称为 f 在 x 点的**次梯度**, 所有这样的 u 构成的集合称为 f 在 x 点的**次梯度集**.

次梯度集通常用 $\partial f(x)$ 表示

$$\partial f(x) = \{u \in \mathbb{R}^m | f(y) - f(x) \geq u(y-x), \quad \forall y \in E\} \tag{2.9}$$

当函数在 x 点可微, $\partial f(x) = \{f'(x)\}$; 当函数在 x 点不可微, $\partial f(x)$ 是一个非空的紧凸集.

对于不可微函数或者不可微点, 我们可以采用次梯度替代梯度进行分析. 众所周知, 一个点是最优解的必要条件是该点梯度为0. 相应的,有如下结论:

定理 2.1. *x^* 是(??)问题的最优解的一个必要条件是: $0 \in \partial f(x^*)$. 特别的, 若 f 是凸函数, 则是充要条件.*

2.5 矩阵范数

以下默认 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k = \max\{m,n\}$, $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \cdots, \lambda_k(A)) \in \mathbb{R}^k$ 是矩阵 A 的奇异值向量, $\lambda_i(A)$ 是矩阵 A 的第i个奇异值.

2.5.1 诱导-p范数

矩阵的**诱导-p范数**是将矩阵看作线性算子, 由向量的p-范数诱导而来.

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|Ax\|_p$$

常见的有**2-范数**:

$$\|A\|_2 = \max_i \lambda_i(A)$$

1-范数, 又称**列范数**:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

∞-范数, 又称**行范数**:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2.5.2 F-范数

矩阵的**F-范数**定义类似于向量的2-范数:

$$\|A\|_F = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$$

定义矩阵内积 $\langle A, X\rangle = tr(A^\top X)$, F-范数与矩阵内积是相容的, 可以看作内积诱导的范数, 即 $\|A\|_F = \langle A, A\rangle^{\frac{1}{2}}$.

2.5.3 Schaten-p范数

矩阵的**Schaten-p范数**是p-范数应用与矩阵奇异值向量所得的:

$$\|A\|_p = (\sum_{i}^{k} \lambda_i(A)^p)^{\frac{1}{p}} = \|\lambda(A)\|_p$$

2.5.4 核范数

矩阵的**核范数**, 又称**迹范数**, 是在 $p = 1$ 时的Schaten-p范数:

$$\|A\|_* = \sum_{i}^{k} \lambda_i(X) = tr(\sqrt{AA^\top}) = \|A\|_{tr}$$

特别的, 当 A 是对称正定的方阵, 则有 $A = \sqrt{AA^\top}$, 即

$$\|A\|_* = tr(A)$$

核范数 $\|A\|_* = \|\lambda(A)\|_1$, 而矩阵的秩 $rank(A) = \|\lambda(A)\|_0$, 由此可以看出, 核范数与秩的关系就是1-范数与0-范数的关系, 故采用核范数来近似秩.

核范数是非光滑函数的, 次梯度集如下

$$\partial\|X\|_* = \{UV^\top + W | U^\top W = 0, WV = 0, \|W\|_2 \le 1\} \tag{2.10}$$

其中 $X = UDV^\top$

3 交替方向增广Lagrange法

3.1 问题转化

对于问题(**??**), 我们考虑它的对偶问题

$$\begin{aligned} \max_{y\in\mathbb{R}^m} \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathcal{A}^*(y)\|_2 \le 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

引入一个形式上的变量 S , 将(**??**)变为如下的等价形式

$$\begin{aligned} \min_{y\in\mathbb{R}^m} & -b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{A}^*(y) - S = 0 \\ & \|S\|_2 \le 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

可以考虑(**??**)的增广Lagrange函数

$$L(y, S, X, \mu) = -b^\top y + \langle X, \mathcal{A}^*(y) - S\rangle + \frac{1}{2\mu}\|\mathcal{A}^*(y) - S\|_F^2 \tag{3.3}$$

其中 $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 是某个给定的矩阵(不同于原问题中的 X), $\|\cdot\|_F$ 是矩阵的 $F-$范数.

由此我们得到(**??**)的一个等价问题

$$\begin{aligned} \min_{y,S} \quad & L(y, S, X, \mu) \\ \text{s.t.} \quad & \|S\|_2 \le 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

通过选取最佳的 μ 和 X 可以求出(**??**)的最优解.

采用如下的迭代过程以求解问题(**??**)

$$\begin{aligned} \mu^{k+1} =& \alpha\mu^k, \quad \alpha \in (0,1) \\ X^{k+1} =& X^k + \frac{\mathcal{A}^*(y^{k+1}) - S^{k+1}}{\mu^k} \\ (y^{k+1}, S^{k+1}) =& \arg\min_{y,S} L(y, S, X^k, \mu^k) \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2 交替方向求解

但实际上, (??)第3式并不容易解, 因此我们考虑使用交替方向法来求解这个方程, 即

$$y^{k+1} = \arg\min_{y,S} L(y, S^k, X^k, \mu^k) \tag{3.6}$$

$$S^{k+1} = \arg\min_{y,S} L(y^{k+1}, S, X^k, \mu^k) \tag{3.7}$$

定理 3.1. *当固定 S^k , (??)的最优解为:*

$$y^{k+1} = \mu^k(b - \mathcal{A}(X^k)) + \mathcal{A}(S^k) \tag{3.8}$$

当固定 y^{k+1} , (??)的最优解为:

$$S^{k+1} = U Diag(\min\{\sigma, 1\}) V^\top \tag{3.9}$$

其中 U, V 来自 $Y = \mathcal{A}^*(y^{k+1}) + \mu^k X^k$ 的奇异值分解, 即 $Y = U Diag(\sigma) V^\top$.

证明. 首先来求解(??), 当固定 S^k

$$L(y, S^k, X^k, \mu^k) = -b^\top y + \mathcal{A}(X^k)^\top y - \langle X, S^k\rangle + \frac{1}{2\mu^k}\|\mathcal{A}^*(y) - S^k\|_F^2 \tag{3.10}$$

记 $T = \mathcal{A}^*(y) - S^k$, $\mathcal{A}_{ij} = (A_{1_{ij}}, \cdots, A_{m_{ij}}) \in \mathbb{R}^m$,考虑 $\|T\|_F^2$

$$\|T\|_F^2 = \sum_{i,j}((\sum_{k=1}^m y_k A_{k_{ij}}) - S_{ij}^k)^2 = \sum_{i,j}(\mathcal{A}_{ij}^\top y - S_{ij}^k)^2$$

则它对y的梯度

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\|T\|_F^2}{\partial y} \\ =&\frac{\partial\sum_{i,j}(\mathcal{A}_{ij}^\top y - S_{ij}^k)^2}{\partial y} \\ =&\sum_{i,j}\frac{\partial(\mathcal{A}_{ij}^\top y - S_{ij}^k)^2}{\partial y} \\ =&2\sum_{i,j}(\mathcal{A}_{ij}^\top y - S_{ij}^k)\mathcal{A}_{ij} \\ =&2(\sum_{i,j} T_{ij} A_{k_{ij}}) \\ =&2(\langle A_i, T\rangle) \\ =&2\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(y) - S^k) \end{aligned} \tag{3.11}$$

由此可以给出(??)的梯度

$$\frac{\partial L(y, S^k, X^k, \mu^k)}{\partial y} = -b + \mathcal{A}(X^k) + \frac{1}{\mu^k}\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(y) - S^k) \tag{3.12}$$

令(??)式等于0, 可得

$$y^{k+1} = \mu^k(b - \mathcal{A}(X^k)) + \mathcal{A}(S^k) \tag{3.13}$$

再考虑(??). 当固定 y^{k+1}

$$
\begin{aligned}
&L(y^{k+1}, S, X^k, \mu^k) \\
=&-b^\top y^{k+1} + \mathcal{A}(X^k)^\top y^{k+1} - \langle X, S\rangle + \frac{1}{2\mu^k}\|\mathcal{A}^*(y^{k+1}\|) - S_F^2 \\
=&\frac{1}{2\mu^k}(\|S\|_F^2 - 2\langle Y, S\rangle + \|\mathcal{A}^*(y^{k+1}\|)_F^2) - b^\top y^{k+1} + \mathcal{A}(X^k)^\top y^{k+1}
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

其中 $Y = \mathcal{A}^*(y^{k+1}) + \mu^k X^k$.

$$
\frac{\partial L(y^{k+1}, S, X^k, \mu^k)}{\partial S} = \frac{1}{2\mu^k}(\frac{\partial\|S\|_F^2}{\partial S} - 2\frac{\partial\langle Y, S\rangle}{\partial S}) = \frac{S-Y}{\mu^k} \tag{3.15}
$$

令(??)式等于0, 则可得 $S^{k+1} = Y$, 但由约束条件 $\|S\|_2 \le 1$, 需对 Y 进行修正, 即

$$
S^{k+1} = U\mathrm{Diag}(\min\{\sigma, 1\})V^\top \tag{3.16}
$$

其中 $Y = U\mathrm{Diag}(\sigma)V^\top$. □

根据 Y 的定义, 可以简化 X^{k+1} 的计算方法

$$
X^{k+1} = \frac{\mu^k X^k + \mathcal{A}^*(y^{k+1}) - S^{k+1}}{\mu^k} = \frac{Y - S^{k+1}}{\mu^k} \tag{3.17}
$$

重复进行上述迭代,到目标精度停止,下面给出相应算法

算法 1.

步1 给出 μ^0 , X^0 , y^0 , S^0 , ϵ , α , 设置计数器 $k=0$;

步2 若 $\frac{\|X^{k+1}-X^k\|_F}{\max\{1,\|X^k\|_F\}} \le \epsilon$, 则停止;

步3 计算 $y^{k+1} = \mu^k(b - \mathcal{A}(X^k)) + \mathcal{A}(S^k)$;

步4 计算 $Y = \mathcal{A}^*(y^{k+1}) + \mu^k X^k$, 并计算其SVD: $Y = UDiag(\sigma)V^\top$;

步5 计算 $S^{k+1} = UDiag(min\{\sigma, 1\})V^\top$;

步6 计算 $X^{k+1} = \frac{Y - S^{k+1}}{\mu^k}$;

步7 计算 $\mu^{k+1} = \alpha\mu^k$, $k = k+1$,转步2.

4 RBR法

4.1 SDP问题与Schur补

对于问题(??), 我们可以考虑把它转化为一个半定规划(SDP)问题.

一个标准的半定规划问题是

$$
\begin{aligned}
\min_{X\in S^n} \quad & \langle C, X\rangle \\
\text{s.t.} \quad & \mathcal{A}(X) = b, X \succ 0
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

其中 $b \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}(X) = (\langle A_1, X\rangle, \cdots, \langle A_m, X\rangle)$, $C, A_i \in S^n$, S^n 是全体对称矩阵.

对于一个对称正定矩阵 $X \in S^n$, 我们可以把它写成分块矩阵的形式

$$X = \begin{pmatrix} \xi & y^\top \\ y & B \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

其中$\xi \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $B \in S^{n-1}$.

容易验证的, X 可以表示为以下形式

$$X = \begin{pmatrix} 1 & y^\top B^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi - y^\top B^{-1} y & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{-1} y & I \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

记 $(X/B) = \xi - y^\top B^{-1} y$, 称为X对于B的Schur补.

显然的

$$X \succeq 0 \Leftrightarrow B \succeq 0, (X/B) \geq 0 \tag{4.4}$$

4.2 SOCP问题

约定以下记号

$$X_{\alpha,\beta} = \begin{cases} x_{\alpha\beta} & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ (x_{\alpha\beta_1}, \cdots, x_{\alpha\beta_n}) & \alpha \in \mathbb{R}, \beta = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \\ (x_{\alpha_1\beta}, \cdots, x_{\alpha_m\beta})^\top & \alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \beta \in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_{\alpha_1\beta_1} & \cdots & x_{\alpha_1\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\alpha_m\beta_1} & \cdots & x_{\alpha_m\beta_n} \end{pmatrix} & \alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \beta = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \end{cases} \tag{4.5}$$

$$i^c = \{1, \cdots, n\} \backslash \{i\} = \{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n\} \tag{4.6}$$

令 $X = \begin{pmatrix} \xi & y^\top \\ y & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{i,i} & X_{i,i^c} \\ X_{i^c,i} & X_{i^c,i^c} \end{pmatrix}$, 等号在相差一个初等变化下成立. 基于(**??**), 令 i 取遍 $\{1, \cdots, n\}$, 逐行解如下的SOCP问题来解决SDP问题(**??**)

$$\begin{aligned} \min_{[\xi;y] \in \mathbb{R}^n} \quad & \bar{c}^\top \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{X} \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} = \bar{b} \\ & (X/B) \geq \delta \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} C_{i,i} \\ 2Ci^c, i \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} X^(1)_{i,i} & 2X^(1)_{i,i^c} \\ \cdots & \cdots \\ X^(m)_{i,i} & X^(m)_{i,i^c} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 - \langle X^(1)_{i^c,i^c}, B\rangle \\ \cdots \\ b_m - \langle X^(m)_{i^c,i^c}, B\rangle \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

若 X 是半正定的, 即 $X \succeq 0$, 取 $\delta = 0$;

若 X 是正定的, 即 $X \succ 0$, 用大于零的数来限制Schur补, 取$\delta > 0$.

4.3 Powell罚函数

考虑(3.7)的Powell罚函数

$$F(X, \theta, \mu) = \bar{c}^\top \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2\mu} \|\bar{X}[\xi; y] - \bar{b} - \theta\|_2^2 \tag{4.9}$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}^m$, $\mu > 0$ 都是是给定的. 记 $\lambda = \theta + \bar{b}$

(**??**)等价于以下问题

$$\begin{aligned} \min_X \quad & F(X, \lambda, \mu) = \bar{c}^\top \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2\mu} \|\bar{X}[\xi; y] - \lambda\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & X \succeq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.4 用SDP和RBR法补全矩阵

回头考虑(**??**). 当 $X \in S^n$ 对称正定, 有 $\|X\|_* = tr(X)$, (**??**)等价于下面的SDP问题

$$\begin{aligned} \min_X \quad & tr(X) = \langle E, X\rangle \\ \text{s.t.} \quad & X_{ij} = M_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \tag{4.11}$$

当 $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 不是对称正定的, 可以考虑一个更大的对称正定矩阵 W . 当补全了 W , 则 X 自然被补全了(当然, 当 X 是对称正定矩阵时, 我们也可以这么做)

$$\begin{aligned} \min_X \quad & tr(X) \\ \text{s.t.} \quad & X = \begin{pmatrix} X_1 & W \\ W^\top & X_2 \end{pmatrix} \succ 0 \\ & W_{ij} = M_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中 $X \in S^n$, $n = p + q$,$W_1 \in S^p$, $W_2 \in S^q$, $X, W_1, W_2 \succ \delta$.

我们主要讨论一般的情况, 即问题(??). 采用RBR法, 对于某个 i , 我们把向量 y 分为两个部分, 即

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_1 = X_{\alpha_i,i}, \quad y_2 = X_{\beta_i,i} \tag{4.13}$$

其中 $\alpha_i = \begin{cases} \{j+p|(i,j \in \Omega)\}, i \le p \\ \{j|(j,i-p) \in \Omega\}, p < i \le n \end{cases}$, $\beta_i = \{1,\cdots,p\}\backslash(\alpha_i \cup \{i\})$, y_1 是 X 第 i 列除去第 i 行后所有已知元素构成的列向量,y_2 是 X 第 i 列除去第 i 行后所有未知元素构成的列向量.

相应的, $B = \begin{pmatrix} X_{\alpha_i,\alpha_i} & X_{\alpha_i,\beta_i} \\ X_{\beta_i,\alpha_i} & X_{\beta_i,\beta_i} \end{pmatrix}$, $\xi = X_{i,i}$. 同时,可以给出 $\bar{X}\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}$,$\lambda$ 和 $\bar{c}$ 的显式表达

$$\lambda = \begin{cases} (M_{i,\alpha_i-p})^\top, & i \le p \\ M_{\alpha_i,i-p}\ , & p < i \le n \end{cases}, \quad \bar{X}\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} = y_1, \quad \bar{c} = (1, \overbrace{0,\cdots,0}^{n-1}) \tag{4.14}$$

故(??)化为以下形式

$$\begin{aligned} \min \quad & \xi + \frac{1}{2\mu}\|y_1 - \lambda\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \xi - y^\top B^{-1} y \ge \delta \end{aligned} \tag{4.15}$$

定理 4.1. *问题(??)的最优解为*

$$\begin{aligned} y_1 =& (2\mu I + X_{\alpha,\alpha})^{-1} X_{\alpha,\alpha}\tilde{b} \\ y_2 =& \frac{1}{2\mu} X_{\beta,\alpha}(\lambda - y_1) \\ \xi =& \frac{1}{2\mu} y_1^\top(\lambda - y_1) + \delta \end{aligned} \tag{4.16}$$

证明. 容易发现, 当 $\xi = y^\top B^{-1} y + \delta$ 时, 才可能取到最小值, 则(??)等价于

$$\min_y y^\top B^{-1} y + \frac{1}{2\mu}\|y_1 - \lambda\|_2^2 \tag{4.17}$$

令其梯度为0

$$\begin{pmatrix} X_{\alpha,\alpha} & X_{\alpha,\beta} \\ X_{\beta,\alpha} & X_{\beta,\beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} y_1 - \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.18}$$

变形可得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} X_{\alpha,\alpha} \\ X_{\beta,\alpha} \end{pmatrix}(y_1 - \lambda) = 0 \tag{4.19}$$

则

$$\begin{aligned} y_1 =& (2\mu I + X_{\alpha,\alpha})^{-1} X_{\alpha,\alpha} \\ y_2 =& \frac{1}{2\mu} X_{\beta,\alpha}(y_1 - \lambda) \end{aligned} \tag{4.20}$$

那么由(??)和(??), 有

$$\xi = y^\top B^{-1} y + \delta = -\frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} y_1 - \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \delta = \frac{1}{2\mu} y_1^\top (\lambda - y_1) + \delta \tag{4.21}$$

即 (??)的最优解为(??) □

我们可以让 i 循环取遍 $\{1, \cdots, n\}$, 逐行求解(??), 最终解决问题(??). 给出算法

算法 2.

步1 给出 $\delta \geq 0$, $X^1 \succ 0$, $F^0 = tr(X^1)$, $F^1 = +\infty$, $\epsilon > 0$, 设置计数器 $k = 1$, $i = 1$;

步2 若 $\frac{|F^{k-1} - F^k|}{\max\{1, |F^{k-1}|\}} \leq \epsilon$, 则停止;

步3 若 $i > n$, 则令 $i = 1$, $X^{k+1} = X^k$, $k = k + 1$, $F^k = tr(X^k)$, 转步2;

步4 求出 i 对应的 α_i , β_i;

步5 若 $|\alpha_i| = 0$, 令 $X^k_{\alpha,\alpha} = x^l_{\alpha,\beta} = X^k_{\beta,\alpha} = 0$, $X^k_{\beta,\beta} = X^k$, 否则按通常定义求出以上几个量.

步6 按(??), 计算当前最优解 ξ , y_1 , y_2 , 以及 $y = [y_1, y_2]$;

步7 令 $X^k_{i,i} = \xi$, $X^k_{i,i^c} = y$, $X^k_{i^c,i} = y^\top$;

步8 $i = i + 1$, 转步3;

5 FPCA法

5.1 FPC法

FPC法是一种基于不动点定理的算法, 可以解决问题(??).

$\|X\|_* + \frac{1}{2\mu}\|\mathcal{A}(X) - b\|_2^2$ 是一个凸函数, 求最优解只要求梯度为0的点. 但 $\|X\|_*$ 是不可微的, 故考虑次梯度, 即

$$0 \in \mu\partial\|X\|_* + g(X) \tag{5.1}$$

其中 $g(X) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(X) - b)$

设 $Y = X - \psi g(X)$, $\psi > 0$ 是给定常数, 则(??)等价于

$$0 \in \psi\mu\partial\|X\|_* + X - (X - \psi g(X)) = \psi\mu\partial\|X\|_* + X - Y \tag{5.2}$$

(??)恰好是 $\|X\|_* + \frac{1}{2}\|X - Y\|_F^2$ 的次梯度, 即(??)等价于

$$\min \psi\mu\|X\|_* + \frac{1}{2}\|X - Y\|_F^2 \tag{5.3}$$

引入矩阵的Shinkage算子, 定义如下

定义 5.1 (Shinkage算子)**.** 对 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 做奇异值分解, $X = UDiag(\sigma)V^\top$, $r = rank(X)$, $U \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times r}$, 对 $\forall \nu > 0$, 定义向量 $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma_1}, \cdots, \bar{\sigma_r})$, 其中$\bar{\sigma_i} = \max\{\sigma_i - \nu, 0\}$, 那么*Shinkage*算子定义为 $S_\nu(X) = UDiag(\bar{\sigma})V^\top$

当认为(**??**)中的 Y 是给定的情况下, 有如下定理

定理 5.1. *(**??**)的最优解为 $S_{\psi\mu}(Y)$, 其中 $S_{\psi\mu}(\cdot)$ 是Shinkage算子*

证明. 不失一般性, 设 $m \le n$, 记 $\nu = \psi\mu$, $X = U\mathrm{Diag}(\sigma)V^\top$, $Y = U_Y\mathrm{Diag}(\gamma)V_Y^\top$ 是 X , Y 的SVD, $\mathrm{rank}X = r$, $\mathrm{rank}Y = t$.

因为 $\partial\|X\|_* = \{UV^\top + W | U^\top W = 0, WV = 0, \|W\|_2 \le 1\}$, 找到矩阵 $\bar{U} \in \mathbb{R}^{m\times(m-r)}$, $\bar{V} \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$, 使得 $\tilde{U} = [U, \bar{U}]$, $\tilde{V} = [V, \bar{V}]$ 分别是 m , n 阶正交矩阵. 那么易验证, 当 $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}_+^{m-r}$, $\|\sigma\|_\infty \le 1$, 形如 $W = \bar{U}[\mathrm{Diag}(\bar{\sigma}), 0]\bar{V}^\top$ 的矩阵 $W \in \partial\|X\|_*$.

若 $0 \in \nu\partial\|X\|_* + X - Y$, 则说明 $\exists W \in \partial\|X\|_*$ 使 $\nu(UV^\top + W) + X - Y = 0$. 那么可以看到当 $W = \bar{U}[\mathrm{Diag}(\bar{\sigma}), 0]\bar{V}^\top$, 则要求

$$
\begin{aligned}
&\nu(UV^\top + W) + X - Y \\
=&(\nu UIV^\top + \bar{U}[\mathrm{Diag}(\bar{\sigma}), 0]\bar{V}^\top + U\mathrm{Diag}(\sigma)V^\top) - Y \\
=&\begin{pmatrix} U \\ \bar{U} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \nu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu\mathrm{Diag}(\bar{\sigma}) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} V \\ \bar{V} \end{pmatrix}^\top - U_Y\mathrm{Diag}(\gamma)V_Y^\top \\
=&\begin{pmatrix} U \\ \bar{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu I + \mathrm{Diag}(\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \nu\mathrm{Diag}(\bar{\sigma}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \bar{V} \end{pmatrix}^\top - U_Y\mathrm{Diag}(\gamma)V_Y^\top = 0
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

当 $\gamma_1 \ge \cdots \ge \gamma_t \ge \nu$, 那我们令 $X = S_\nu(Y)$, 则 $r = t$, $U = U_Y$, $V = V_Y$, $\sigma = (\gamma_1 - \nu, \cdots, \gamma_t - \nu)$, 对于这样的 X , 取 $\bar{\sigma} = 0$ 即 $W = 0$, (**??**)成立.

当 $\gamma_1 \ge \cdots \ge \gamma_k \ge \nu \ge \gamma_{k+1} \ge \cdots \ge \gamma_t$, 那我们令 $X = S_\nu(Y)$, 则 $r = k$, $\sigma = (\gamma_1 - \nu, \cdots, \gamma_k - \nu, 0, \cdots, 0)$, 对这样的 X , 取 $\bar{\sigma} = (\gamma_{k+1}/\nu, \cdots, \gamma_t/\nu, 0, \cdots, 0)$, 同时令 $\bar{U}$ 的前 $t-k$ 行依次为 U_Y 的 $k+1$ 至 t 行, $\bar{V}$ 的前 $t-k$ 行依次为 V_Y 的 $k+1$ 至 t 行, 即 $\begin{pmatrix} U \\ \bar{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_Y \\ \bar{U}' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} V \\ \bar{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_Y \\ \bar{V}' \end{pmatrix}$, 其中 $\bar{U}'$ 是 $\bar{U}$ 的后 $m-t$ 行, $\bar{V}'$ 是 $\bar{V}$ 的后 $n-t$ 行, 此时(**??**)也成立.

故 $S_{\psi\mu}(Y)$ 是(**??**)的解. □

5.2 FPC法的收敛性

也就是说, 我们只需要求出合适的 Y , $S_{\psi\mu}(Y)$ 就是(**??**)的解. 由 X 与 Y 的关系可以看出, 若 X^* 是(**??**)的解, 则

$$X^* = S_{\psi\mu}(X^* - \mu g(X^*)) = S_{\psi\mu}(X^* - \mu\mathcal{A}^*(\mathcal{A}(X^*) - b)) \tag{5.5}$$

即 X^* 是映射 $S_{\psi\mu} \circ h$ 的不动点, 其中 $h(X) = X - \mu g(X)$.

我们有如下的结论

定理 5.2. *Shinkage算子* $S_\nu(\cdot)$ *是非扩张的, 即*

$$\|S_\nu(Y_1) - S_\nu(Y_2)\|_F \leq \|Y_1 - Y_2\|_F \tag{5.6}$$

定理 5.3. *当* $\mu \in (0, 2/\lambda_{max}(A^\top A))$ *, 其中* A *满足* $\mathcal{A}(X) = Avec(X)$ *,* h *是非扩张的, 即*

$$\|h(X_1) - h(X_2)\|_F \leq \|X_1 - X_2\|_F \tag{5.7}$$

那么很自然的推论是, 当 $\mu \in (0, 2/\lambda_{max}(A^\top A))$

$$\|S_{\psi\mu}(h(X_1)) - S_{\psi\mu}(h(X_2))\|_F \leq \|h(X_1) - h(X_2)\|_F \leq \|X_1 - X_2\|_F \tag{5.8}$$

即 $S_{\psi\mu} \circ h$ 是一个非扩张的映射, 由Brouwer不动点定理可知, 由任意 X 开始进行迭代, 都能收敛到某个不动点.

5.3 奇异值计算的近似算法FPCA

实际计算中, 上述迭代过程中, 每步都要求做奇异值分解, 这并不是一件容易的事. 我们认为问题(**??**)中的原矩阵 X 是一个低秩矩阵, 那么其奇异值大多都是 0 , 故可以考虑只求很少的几个奇异值.

$A \in \mathbb{R}^{p\times q}$, 取整数 c , d , $1 \leq d \leq c \leq q$, $(P_1, \cdots, P_q)$, $P_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^q P_i = 1$. 构造随机向量 $(i_1, \cdots, i_c)$, $P(i_t = j) = P_j$, $t \in \{1, \cdots, c\}$, $j \in \{1, \cdots, q\}$. 再令随机矩阵

$$C = \begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \cdots \\ C^{(c)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(i_1)}/\sqrt{cP_{i_1}} \\ \cdots \\ A^{(i_c)}/\sqrt{cP_{i_c}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times c} \tag{5.9}$$

求 $C^\top C$ 的特征值分解

$$C^\top C = \sum_{i=1}^{c} \sigma_i^2(C) y_i y_i^\top \tag{5.10}$$

其中 $\sigma_i(C) \geq 0$, 为 C 的奇异值 , 再构造矩阵

$$H = \begin{pmatrix} H^{(1)} \\ \cdots \\ H^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cy_1/\sigma_1(C) \\ \cdots \\ Cy_d/\sigma_d(C) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times d} \tag{5.11}$$

令

$$A_d = H\mathrm{Diag}(\sigma(C))\big(A^\top H\mathrm{Diag}(1/\sigma(C))\big)^\top \tag{5.12}$$

可以证明 A_d 是 A 的一个比较好的近似

$$\|A - A_d\|_\xi^2 \leq \min_{\mathrm{rank}(D)\leq d} \|A - D\|_\xi^2 + ploylog(d, 1/c)\|A\|_\xi^2 \tag{5.13}$$

其中 $\xi = 2$ 或 F , $polylog$ 是多重对数函数.

用这种近似的方法改进的FPC算法就是FPCA法, 给出算法

算法 3.

步1 给出 X^1 , $\mu^0 > 0$, $1 > \theta > 0$, $\epsilon > 0$, 设置计数器 $k = 1$;

步2 若 $\mu^k = \mu^{k-1}\theta \leq \epsilon$, 则停止;

步3 选取合适的 $\psi > 0$;

步4 计算 $Y^k = X^k - \psi\mathcal{A}^*(\mathcal{A}(X^k) - b))$;

步5 选取合适的 d , $\{P_i\}$, 按(??)至(??), 计算近似的奇异值分解 $Y_d = HDiag(\sigma(C))\big(Y^\top HDiag(1/\sigma(C))\big)^\top$

步6 计算 $X^{k+1} = S_{\psi\mu^k}(Y_d)$;

步7 $k = k + 1$, 转步2;