离散数学第13次作业

林陈冉

2017年5月19日

1 v 是割点, 设 $G-v$ 有 k 个连通分支 $G_1,\cdots,G_k$. $\forall u,w\in G-v$, $u,w\in\bar{G}-v$, 不失一般性, 认为 $u\in G_1$.

若 $w\notin G_1$, $G-v$ 不存在 $u-w$ 路径, 那么在 $\bar{G}-v$ 中存在 $u-w$ 路径.

若 $w\in G_1$, $u'\neq u$, 可以取任意一个 $x\notin G_1$, $\bar{G}-v$ 中存在 $u-x$ 路径和 $w-x$ 路径, 则存在 $u-w$ 路径.

于是 $\forall u,w\in\bar{G}-v$, 存在 $u-w$ 路径, 故 $\bar{G}-v$ 连通.

2 $F_1,\cdots,F_k$ 是 G 的所有最小点割集, $|F_1|=\cdots=|F_k|=\kappa(G)=h$,

3 G 是 k 边连通的, 则 $\forall u\in G$, $d(u)\geq k$, 否则去掉这个点相连的 $d(u)<k$ 条边, G 即变成不连通的图, 于 $\lambda(G)=k$ 矛盾. 故所有点的度和

$$\sum_{u\in V}d(u)\geq k|V|$$

又由握手定理可知

$$|E|=\sum_{u\in V}d(u)/2\geq k|V|/2$$

4 定义一个圈为极小圈, 若它不是单点, 且它的任何非单点的真子图都不是圈. 这里认为单点是圈. 将 G 看作极小圈和 K_2 的组合, 由题可知, 所有这些圈都是奇圈.

任意两个极小圈 A,B , 若它们有公共边, 那么 G 中含有偶圈, 来说明这一点.

- 若 A,B 的所有公共边相邻接, 公共边形成的最长路径有 k 个点, $k\geq 2$. 从某一段开始, 其上的点依次记作 $u_1,\cdots,u_k$. 则 A,B 中不在 u_1-u_k 路径上的点是 $|A|-k,|B|-k$ 个, 这些点和 u_1,u_k 一起组成一个圈, 有 $|A|+|B|-2k+2$ 个点, 形成偶圈
- 若 A,B 的公共边不邻接, 那么 A,B 间还夹着其他的极小圈 C , 返回考虑 A,C .

从上面可以知道, 极小圈之间不存在公共边, 那么任意两个极小圈, 它们或相分离, 或有一个公共点. 故 G 的块只有奇圈和 K_2.

5 若 G 不是块, 那么考虑它的一条割边 e , 其端点记作 u,v . $G-e$ 含有两个连通分支 U,V , 不妨设 $u \in U$, $v \in V$, 由连通性, 显然 u,v 不可能同时出现在 U,V 中. U 中至少存在一个含有 u 的块 U', 同理 V 中也至少存在一个含有 v 的块 V', 命题得证.

6 记第 i 笔画出的路径为 G_i , 显然 G_i 是欧拉路径, 至多有两个奇度点. 对于任意一个点 $u \in G$

$$d_G(u) = \sum_{i=1}^{k} d_{G_i}(u)$$

若 $d_G(u)$ 是奇数, 则有奇数个 $d_{G_i}(u)$ 是奇数, 故 G 中的奇度点个数小于所有 G_i 中奇度点个数之和 $2k$, 命题得证.

7 不存在. G 是欧拉图, $\forall u \in G$, $d(u)$ 是偶数, 又 $|G|$ 是偶数, 故 $\sum_{u\in G}^{k} d(u)$ 被4整除, 由握手定理, 边数是偶数.

8

- 充分性: $G_1, \cdots, G_n$ 是圈 , G 是它们的无交并 . 在任何一个圈中, 任意一点的度都是2, 设

  $$\delta_i(u) = \begin{cases} 1, & \text{if } u \in G_i \\ 0, & \text{if } u \notin G_i \end{cases}, \quad \forall u \in G$$

  那么 $\forall u \in G$

  $$d_G(u) = \sum_{i=1}^{k} d_{G_i}(u) = 2\sum_{i=1}^{k} \delta_i(u)$$

  即 G 的每个点都是偶度点, G 是欧拉图.

- 必要性: G 是欧拉图, 从 $G_0 = G$ 中任取一个圈 C_1 , 考虑 $G_1 = G_0 - C_1$, $\forall u \in G_1$

  $$d_{G_1}(u) = \begin{cases} d_{G_0}(u) - 2, & \text{if } u \in C_0 \\ d_{G_0}(u), & \text{if } u \notin C_0 \end{cases}$$

  那么 $d_{G_1}(u)$ 是偶数, 即 G_1 还是欧拉图. 继续进行上述操作, 直至 G_n 是空图, 得到 $C_2, \cdots, C_n$, 显然 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是无公共边的, 这给出了 G 的一个分解.