离散数学第2次作业

林陈冉

2017年3月10日

2.1.13 证明过程中, 假设 $S = \{a, b, c, d, \cdots\}$, 即至少有4条直线, 这暗含着要求在 $n = 3$ 的情况下命题成立, 证明过程只说明了 $n = 1, 2$ 时命题成立, 且事实上 $n = 3$ 时确实不成立.

2.5.4 (a) $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, 当 n 是奇数, 则 $n+1, n-1$ 都是偶数, 故 $n^2 - 1$ 是 $2 \times 2 = 4$ 的倍数.

(b) $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$, 对 $\forall n$, $n, n+1$ 中至少有一个偶数, $n, n+1, n-1$ 中有一个是3的倍数, 故 $n^3 - n$ 是6的倍数.

2.5.5 记 $C = \{girlswholiketopalychess\}$, $S = \{girlswholiketoplaysoccer\}$, $B = \{girlswholikebiking\}$.

$$
\begin{aligned}
|S \cup B \cup c| &= |S| + |B| + |C| - |S \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |S \cap B \cap C| \\
&= |B| + 23 + 18 - 9 - 7 - 12 + 4 = |B| + 17 = 40
\end{aligned}
$$

则容易求得喜欢骑行的有23人

补充1 正向直接求解即可, 实际上, $\xi \geq 1$, $\eta \geq 2$, $\zeta \geq 3$, 故有 $1 + 2 + 3 = 6$ 组解.

补充2 设 $A = \{n = 0 \, mod \, 5\}$, $B = \{n = 0 \, mod \, 6\}$, $C = \{n = 0 \, mod \, 8\}$, 能被5或6或8整除的数构成集合 $A \cup B \cup C$

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 200 + 166 + 125 - 33 - 25 - 20 + 4 = 412
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

故1到1000间不能被5和6和8整除的数共588个.

补充3 (1) 两个z相邻有 $\frac{5!}{2!} = 60$ 种排列, 两个g相邻也有 $\frac{5!}{2!} = 60$ 种排列, 两个z和两个g同时相邻有 $4! = 24$ 种排列, 故两个z和两个g同时不相邻有 $\frac{6!}{2!2!} - 60 - 60 + 24 = 84$ 种排列.

(2) 考虑先排列好i, a, g, g, 有 $\frac{4!}{2!} = 12$ 种排列. 再插入z, z, 故有 $6 \times 3 + 4 \times 1 + 2 \times 1 = 24$ 种排列

补充4 设 $A=\{n\text{是平方数},1\le n\le 10000\}$, $B=\{n\text{是立方数},1\le n\le 10000\}$. $|A|=\lfloor 10000^{\frac{1}{2}}\rfloor=100$, $|B|=\lfloor 10000^{\frac{1}{3}}\rfloor=21$, $|A\cap B|=\lfloor 10000^{\frac{1}{6}}\rfloor=4$, 故是平方数或者立方数的数构成集合 $A\cup B$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=117$$

故1到10000间的平方数或立方数共117个.

补充1 假设命题不成立, 存在子集使任意两数的差大于等于 3 , 则最小数和最大数的差大于等于 $3n$, 由于最小数至少是 1 , 则最大数至少是 $3n+1$, 但原集合最大数是 $3n$, 产生矛盾. 故原命题成立.

补充2 可以更小, 只需要6个人, 直接证明这一点, 即可以证明原题. 转化考虑下面的问题: 房间中已经有 k 个人, 再进入一个人, 使任意两组人年龄都不相等, 最多可以加到多少人?

记第 i 个进入房间的人年龄为 a_i , 则至少 a_k 不等于 $\{a_1,\cdots,a_{k-1}\}$ 的任意子集的和. 不妨认为大家按年龄顺序进入, 即 $i<j\Leftrightarrow a_i<a_j$. 已知 $a_1\ge 1$, 那么容易知道 $a_2\ge 2$.

来考虑所有人年龄都取到最小的情况, 即所有 a_k 都取到等号, $a_1=1$, $a_2=2$. 那么当 $a_k=p$, 说明 $\{a_1,\cdots,a_{k-1}\}$ 的子集可以组合出任意小于等于 $p-1$ 的整数, 那么 $\{a_1,\cdots,a_{k-1},a_k\}$ 的子集可以组合出任意小于等于 $2p-1$ 的整数, 故 $a_{k+1}=2p$. 由 $a_1=1$, 则 $a_k=2^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-1$, $2^5-1<60<2^6-1$, 即最多房间中可以有5人, $\{1,2,4,8,16\}$ 是满足题意的年龄集合. 那么当有6人时, 房间中必有两组人的年龄之和相等, 原题得证.

补充3 考虑这个子集集合中元素最少的子集 A . 显然 $|A|\ge 1$, 若 $A=\{a\}$, 则由题意, 所有子集都必须含有元素 a , 那么这样的子集集合共有子集 2^{n-1} 个. 若 $|A|>1$, 则显然子集集合中的集合个数更少了, 故命题成立.

补充4 假设任意两点距离大于等于1, 考虑10个任意两点间距离大于等于1的点组成的最小面积, 这等价于10个半径为 $\frac{1}{2}$ 的互不相交的圆的圆心组成的最小面积.

为了面积更小, 我们让圆尽可能相切, 容易证明一个圆最多和6个圆相切, 此时圆心之间连线也构成等边三角形.10个点最少构成9个边长为1的等边三角形, 面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, 但这刚好是边长为3的等边三角形的面积, 与点在三角形内矛盾, 故三角形内不可能有10个任意两点间距离大于等于1的点.

补充5 记这任意取的两个数为 a , b, 不妨认为 $a>b$, $a=a'\,mod\,100$, $b=b'\,mod\,100$

$$a+b=0\,mod\,100\Leftrightarrow a'+b'=100\quad a-b=0\,mod\,100\Leftrightarrow a'=b'$$

则原题等价于: 在 $[0,99]$ 中可以重复地取52个整数, 至少有2个整数和为100或相等.

上述命题的否定形式为: 在 $[0,99]$ 中不重复地取52个整数, 任意2个整数的和都不等于100. 这显然不成立, 故原命题成立.

补充6 类似补充5, 记这任意取的三个数为 a , b, c 不妨认为 $a > b > c$, $a = a' \, mod \, 3$, $b = b' \, mod \, 3$, $c = c' \, mod \, 3$.

$$a + b + c = 0 \, mod \, 3 \Leftrightarrow a' + b' + c' = 0, 3, 6$$

则原题等价于: 在 $[0, 2]$ 中可以重复的取5个整数, 任意3个整数的和被3整除. 其否定形式等价于: 在 $[0, 2]$ 中可以重复的取5个整数构成集合S, $\{0, 0, 0\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{2, 2, 2\}$ 不是集合S的子集.