离散数学第5周作业

林陈冉

2017年3月31日

补充1 不妨顺时针记这 $2n$ 个点为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$, 设 a_1 与 a_m 相连, 由于不相交, 被 a_1a_m 分割得到的两端圆弧上的点的连线不会跨过这条线, 故 m 必定是偶数, 设 $m = 2k$. 对于小于 $2k$ 的一侧, 连线方法有 h_{k-1} 种, 另一侧为 h_{n-k} 种, 故

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} h_{k-1}h_{n-k}$$

令 $g_n = h_{n-1}$, 则 $g_n = \sum_{k=1}^{n} g_k g_{n-k}$, 同时我们容易求得 $g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 2$, 由定义可知 g_n 是 $n+1$ 个Catalan数, 那么 h_n 是Catalan数.

补充2 已知 $h_0 = 1, h_1 = -1, h_2 = 3, h_3 = 10$, 由于 h_n 是 n 的3次多项式, $\Delta^{p+1}h_n = 0$, $c_{p+1} = 0$, 差分表如下, 可知 $c_0 = 1, c_1 = -2, c_2 = 6, c_3 = -3, c_p = 0 (p \geq 4)$

1		-1		3		10
	-2		4		7	
		6		3		
			-3			

那么可以求得

$$h_n = \binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} = -\frac{n^3}{2} + \frac{9n^2}{2} - 6n + 1$$

以及

$$\sum_{k=0}^{n} h_n = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + c_2\binom{n+1}{3} + c_3\binom{n+1}{4} = -\frac{1}{8}(n^4 - 10n^3 + 7n^2 + 10n) + 1$$

补充3 当 $k = 1$,

$$\sum_{j=0}^{1} (-1)^{1-j}\binom{1}{j} h_{n+j} = h_{n+1} - h_n = \Delta h_n$$

命题成立.

假设对命题对 k 成立, 那么对 $k+1$

$$\begin{aligned}
\Delta^{k+1}h_n &= \Delta^k h_{n+1} - \Delta^k h_n \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}h_{n+1+j} - \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}h_{n+j} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\binom{k}{j-1}h_{n+j} + \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+1-j}\binom{k}{j}h_{n+j} \\
&= h_{n+k+1} + (-1)^{k+1}h_n + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+1-j}\left(\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right)h_{n+j} \\
&= h_{n+k+1} + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+1-j}\binom{k+1}{j}h_{n+j} + (-1)^{k+1}h_n \\
&= \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{k+1-j}\binom{k+1}{j}h_{n+j}
\end{aligned}$$

由归纳法, 命题成立.

补充4 k 个元素的原像为 $A_1, \cdots, A_k$, 都非空, 这样的映射有 $S^\sharp(p,k)$ 个. 另一方面, 这个映射个数相当于把 p 个元素的几个划分为 k 个非空几个的方法数为 $S(p,k)$, 再进行全排列, 即说明了

$$S^\sharp(p,k) = k!S(p,k)$$

补充5

(a) $S(p,0)=0(p\geq 1), S(p,p)=1(p\geq 0)$, 当 $n=1$ 时, $S(1,1)=1=0!$, 命题成立.

假设当 $n=k$ 时命题成立, 那么当 $n=k+1$ 时, 由 $S(p,k)=(p-1)S(p-1,k)+S(p-1,k-1)$

$$S(n,1)=S(k+1,1)=kS(k,1)+S(k,0)=k(k-1)!=k!=(n-1)!$$

由归纳法, 命题成立

(b) 当 $n=1$, $S(1,0)=0=\binom{1}{2}$, 当 $n=2$, $S(2,1)=1=\binom{2}{2}$.

假设当 $n=k$ 时命题成立,

$$S(n,n-1)=S(k+1,k)=kS(k,k)+S(k,k-1)=k+\frac{k(k-1)}{2}=\binom{n}{2}$$

由归纳法, 命题成立

补充1 若 n 是偶数, 则分成 $\frac{n}{2}$ 个2, 从中选出 k 个拆分为1, 那么有 $\frac{n}{2}-k$ 个2, $2k$ 个1, 拆分数为 $\frac{n}{2}+1$.

若是奇数, 拆为 $\frac{n-1}{2}$ 个2和1个1, 也选 k 个2继续拆, 这样有 $\frac{n-1}{2}+1$ 种拆法.

综上有 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1$ 种拆分

补充2

$$nx_n + (n-1)x_{n-1} + \cdots + x_1 = n \tag{1}$$

$$(n-1)y_{n-1} + \cdots + y_1 = n-1 \tag{2}$$

p_n 等于(1)的非负整数解数, p_{n-1} 等于(2)的非负整数解数, 容易知道(2)的任意一组解 $\{y_i\}$, 令 $x_i = y_{i-1}(i \geq 2)$, $x_1 = 1$, 这组解也满足(1), 故 $p_n \geq p_{n-1}$.

而 $x_1 = n$, $x_i = 0(i > 1)$ 是(1)的解, 但构造不出对应的(2)的解, 故 $p_n > p_{n-1}$

补充3　$S(8,0) = 0$, $S(8,8) = 1$, 而

$$S(8,k) = \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^8$$

直接计算得 $S(8,1) = 1$, $S(8,2) = 127$, $S(8,3) = 966$, $S(8,4) = 1701$, $S(8,5) = 1050$, $S(8,6) = 266$, $S(8,7) = 28$

$$B_8 = \sum_{k=1}^{8} S(8,k) = 4140$$

补充4　考虑把 $(1,1)$ 映成 $(0,1)$, $(1,-1)$ 映成 $(1,0)$ 的线性变换 $T \in L(\mathbb{R}^2)$, 容易求得其矩阵形式为

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

另外 $T\begin{pmatrix} 2n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 这说明 C_n 实际上是从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的仅使用下对角线矩形步的路径数.