并行计算作业

林陈冉

2017年4月10日

1　对于求矩阵maxmin问题, 即

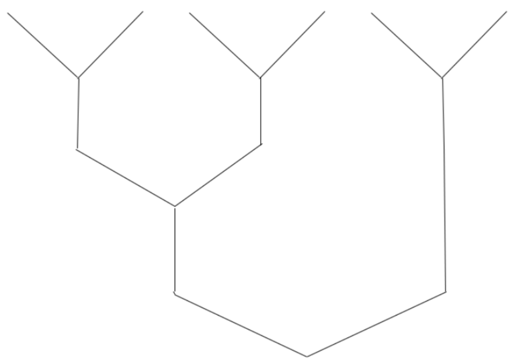
$$y = \max_{1\le i\le N} \min_{1\le j\le N} a_{ij}$$

显然, 这个问题的子任务为求每行的最小值. 我们按处理器数量 p 分情况讨论子问题的合并.

(1) 当 $p \le N$, 我们让每个处理器计算 N/p 行的最小值, 再算出这几行的结果中的最大值(当不能整除时, 如何取整会带来一定的问题, 实际上, 令 $N - p\lfloor N/p \rfloor$ 个处理器计算 $\lceil N/p \rceil$ 行, $p\lceil N/p \rceil - N$ 个处理器算 $\lfloor N/p \rfloor$ 行时, 各处理器的负载较为均衡). 求最小值算法显然是一个 $o(n)$ 的算法, 设每次次比较用时 α , 那么处理器的最大计算时间为

$$T(cal) = \alpha((N-1)\lceil N/p \rceil + \lceil N/p \rceil - 1) = \alpha(N\lceil N/p \rceil - 1)$$

计算完每行后, 要进行处理器间通信, 求各处理器的结果的最大值. 可以将这个过程分为很多轮, 每轮各处理器配对, 两两比较, 较大的进入下一轮比较, 不能凑对则轮空直接进入下一轮比较, 重复直至求出最大值, 示意图如下.



设两个处理器间单纯通信用时为 β , 加上一次比较用时 α , 通信总用时为

$$T(comm) = \sum_{i=1}^{\log p} (\alpha + \beta) p 2^{-i} = (\alpha + \beta)(p - 1)$$

整个过程总时间为

$$T = T(cal) + T(comm) = \alpha N\lceil N/p \rceil + (\alpha + \beta)p - 2\alpha - \beta$$

(2) 当 $p_0 \geq p > N$ (p_0 是某个阈值, 后面会分析), 我们让 p/N 个处理器去算每行的最小值(同样的, $N - N\lfloor p/N \rfloor$ 行由 $\lceil p/N \rceil$ 个处理器计算, $N\lceil p/N \rceil - N$ 行由 $\lfloor p/N \rfloor$ 个处理器计算时, 各处理器的负载较为均衡). 处理器的最大计算时间为

$$T(cal) = \alpha(\lceil N/\lfloor N/p \rfloor \rceil - 1)$$

再考虑通信过程, 实际上这个过程还是在比较 p 个处理器的结果, 用时没有发生变化

$$T(comm) = (\alpha + \beta)(p - 1)$$

整个过程总时间为

$$T = T(cal) + T(comm) = \alpha\lceil N/\lfloor N/p \rfloor \rceil + (\alpha + \beta)p - 2\alpha - \beta$$

实际上, 还应该有第三种情况, 处理器的数量应该有一个阈值 p_0 , 当 $p > p_0$, 再按(2)中的方式分配处理器反而总时间会变慢. 忽略取整运算

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \alpha + \beta - \alpha N^2 p^{-2}$$

令上式为0, 其解即为临界点

$$p_0 = \sqrt{\frac{\alpha N^2}{\alpha + \beta}}$$

(3) 当 $p > p_0$, 只取 p_0 个处理器, 按(2)中方式参与运算

$$\begin{aligned} T(cal) &= \alpha(\lceil N/\lfloor N/p_0 \rfloor \rceil - 1) \\ T(comm) &= (\alpha + \beta)(p_0 - 1) \\ T &= \alpha\lceil N/\lfloor N/p_0 \rfloor \rceil + (\alpha + \beta)p_0 - 2\alpha - \beta \end{aligned}$$

2 对于求积分问题, 即

$$y = \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i), \quad x_i = ih, \quad h = (b-a)/N$$

其子问题为求 $f(x_i)$. 对于子问题的合并, 我们断言, $\exists p_0 < N$, 使得当使用超过 p_0 个处理器的时候用时反而变长, 分情况讨论.

(1) 当 $p < p_0$, 每个处理器计算 N/p 个数的和(不能整除时, 分配方式类似上一题情况(1)), 设求每个 $f(x_i)$ 用时为 α , 单次求和用时为 β , 则最大计算用时

$$T(cal) = \alpha\lceil N/p \rceil + \beta(\lceil N/p \rceil - 1) = (\alpha + \beta)\lceil N/p \rceil - \beta$$

计算完成后, 类似上一题, 分多轮求总和, 每轮将各处理器结果两相加, 不凑整的数直接进入下一轮. 设处理器通信时间为 γ , 则该过程通信时间为

$$T(comm) = \sum_{i=1}^{\log p}(\beta + \gamma)p2^{-i} = (\beta + \gamma)(p - 1)$$

总时间为

$$T = T(cal) + T(comm) = (\alpha+\beta)\lceil N/p \rceil + (\beta+\gamma)p - 2\beta - \gamma$$

(2) 当 $p > p_0$, 只取 p_0 个处理器, 按(1)中方式参与运算

$$\begin{aligned} T(cal) &= (\alpha+\beta)\lceil N/p_0 \rceil - \beta \\ T(comm) &= (\beta+\gamma)(p_0 - 1) \\ T &= (\alpha+\beta)\lceil N/p_0 \rceil + (\beta+\gamma)p_0 - 2\beta - \gamma \end{aligned}$$

考虑这个阈值 p_0, 忽略取整运算

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \beta + \gamma - (\alpha+\beta)Np^{-2}$$

令上式为0, 其解即为临界点

$$p_0 = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta)N}{\beta+\gamma}}$$