第五章习题

林陈冉

2016年12月27日

5.2

当 $1 \le p < \infty$ ，$p \ne 2$ ，令 $A, B \in \Omega$ ，$A \cap B = \emptyset$ ，$|A| = |B| = 1$ ，$f = \chi_A$ ，$g = \chi_B$ ．则 $\|f + g/2\|_p = \|f - g/2\|_p = \Big(\int_{A\cup B} (\frac{1}{2})^p dx \Big)^{1/p} = 2^{\frac{2}{p}-2}$ ，$\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ，即

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p + \|\frac{f-g}{2}\|_p = 2^{\frac{2}{p}-1} \ne 1 = \frac{1}{2}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

当 $p = \infty$ ，$\|f + g/2\|_\infty = \|f - g/2\|_\infty = \frac{1}{4}$ ，$\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ ，$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ ，即

$$\|\frac{f+g}{2}\|_\infty + \|\frac{f-g}{2}\|_\infty = \frac{1}{2} \ne 1 = \frac{1}{2}(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$$

综上, 当 $p \ne 2$ ，L^p 不是Hilbert的.

5.4

$$\begin{aligned}
&|v-f|^2 - |u-f|^2 - |v-u|^2 \\
=&(v-f, v-f) - (u-f, u-f) - (u-v, u-v) \\
=&(v-f, v) - (v-f, f) - (u-f, u) + (u-f, f) - (u-v, u) + (u-v, v) \\
=&(v,v) - (f,v) - (v,f) + (f,f) - (u,u) + (f,u) \\
&+ (u,f) - (f,f) - (u,u) + (v,u) + (u,v) - (v,v) \\
=&-2(u,u) - 2(f,v) + 2(f,u) + 2(u,v) \\
=&2\Big((f, u-v) - (u, u-v)\Big) \\
=&2(f-u, v-u)
\end{aligned}$$

由 $u = P_K f$ ，则 $(f-u, v-u) \ge 0$ ，那么

$$|v-f|^2 - |u-f|^2 - |v-u|^2 \ge 0 \Leftrightarrow |v-u|^2 \le |v-f|^2 |u-f|^2$$

从上面的式子可知 $|v-u|^2 \le |v-f|^2 - |u-f|^2 \le |v-f|$ ，显然有 $|v-u| \le |v-f|$ ．几何解释为钝角三角形最大角的余弦公式.

5.14 $\forall u, v \in H$, $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&tF(u)+(1-t)F(v)-F(tu+(1-t)v)\\
=&ta(u,u)+(1-t)a(v,v)-a(tu+(1-t)v,tu+(1-t)v)\\
=&ta(u,u)+(1-t)a(v,v)-t^2a(u,u)-(1-t)^2a(v,v)\\
&-t(1-t)a(u,v)-t(1-t)a(v,u)\\
=&t(1-t)\big(a(u,u)+a(v,v)-a(u,v)-a(v,u)\big)\\
=&t(1-t)a(u-v,u-v)\geq 0
\end{aligned}$$

则 $F(tu+(1-t)v) \leq tF(u)+(1-t)F(v)$, F 是凸函数.

给定 $\forall v \in H$, 定义映射 $T_v : H \to \mathbb{R}$, $\langle T_v, u\rangle = a(u,v)$, 显然 $T_v \in H^*$, 由里斯表示定理, $\exists h_v \in H$, $\langle T_v, u\rangle = (u, h_v) = a(u,v)$, 这相当于给出一个映射 $\mathcal{A}(v) = h_v$. $\forall v_1, v_2 \in H$, $v_1 \neq v_2$,

$$(u, h_{v_1}+h_{v_2}) = (u, h_{v_1}) + (u, h_{v_2}) = a(u, v_1) + a(u, v_2) = a(u, v_1+v_2) = (u, h_{v_1+v_2})$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(u, h_{\alpha v}) = a(u, \alpha v) = \alpha a(u,v) = \alpha(u, h_v)$$

上面两个式子说明 $\mathcal{A} \in H^*$. 则 $a(u,v) = (u, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}^*u, v)$

$$F(u+v)-F(v) = a(v,v) + (\mathcal{A}^*u, v) + (\mathcal{A}u, v)$$

则当 $v \to 0$, 可得 $F'(u) = \mathcal{A}^*u + \mathcal{A}u$.

5.22

(1) 首先考虑 $C = H$. $\forall u, v \in H$, $|T(u+tv)-Tu| \leq |tv| \leq |t||v|$, 当 $t \to 0$, $|T(u+tv)-Tu| \to 0$, 即 T 连续 , $T(u+tv) \to Tu$. $\forall u, v \in H$

$$\begin{aligned}
&((u-Tu)-(v-Tv), u-v)\\
=&(u-v,u-v)-(Tu-Tv,u-v)\\
\geq&|u-v|-|Tu-Tv|^{\frac{1}{2}}|u-v|^{\frac{1}{2}}\\
\geq&0
\end{aligned}$$

则 $((u_n-Tu_n)-(u+tv-T(u+tv)), u_n-u+tv) \geq 0$. 由 $u_n - Tu_n \to f$, $u_n \rightharpoonup u$, 可得当 $n \to \infty$, $(f-(u+tv-T(u+tv)), tv) \geq 0$.

当 $t > 0$, $(f-(u+tv-T(u+tv)), v) \geq 0$; 当 $t < 0$, $(f-(u+tv-T(u+tv)), v) \leq 0$. 故 $(f-(u+tv-T(u+tv)), v) = 0$. 当 $t \to 0$, $(f-(u-Tu), v) = 0$, $\forall v \in H$, 故 $f = u - Tu$.

当 $C \subset H$, 考虑映射 $\bar{T} = T \circ P_c$, $\bar{T} : H \to H$, 易证 $\bar{T}$ 连续, 且也是压缩映射, 完全类似上面的证明, 可得 $f = u - Tu$.

(2) 定义 $T_n : C \to C$, $T_n u = (1-\frac{1}{n})Tu - \frac{a}{n}$, 其中 $a \in C$ 固定. $\forall u, v \in C$

$$T_n u - T_n v = (1-\frac{1}{n})|Tu - Tv| < |u - v|$$

故 T_n 是压缩算子, $\exists u_n^* \in C \subset mB_H$, s.t. $T_n u_n^* = u_n^*$, 其中 $m = \sup_{u \in C} |u|$. 由 H 自反, 可知 mB_H 是弱紧的, 则 $\{u_n^*\}$ 中有弱收敛子列 $u_{n_k}^* \rightharpoonup u^*$.

$$u_n^* - Tu_n^* = \frac{1}{n}|Tu_n^* - a| \le \frac{1}{n}(|Tu_n^*| + |a|) \le \frac{2m}{n}$$

故当 $n \to \infty$, $|u_n^* - Tu_n^*| \to 0$. 由第一小题结论可知, $u^* - Tu^* = 0$, 即 T 有不动点.