泛函分析第17周作业

林陈冉

2016年12月21日

6.10

(1) $\forall u \in E$, 成立以下关系

$$
\begin{aligned}
|Q(I)|\|u\| =&\|Q(I)u - Q(T)u + Q(T)u\| \\
\leq&\|Q(I)u - Q(T)u\| + \|Q(T)u\| \\
=&\|\tilde{Q}(T)(I-T)u\| + \|Q(T)u\| \\
\leq&\|\tilde{Q}(T)\|\|(I-T)u\| + \|Q(T)u\| \\
\leq&C\Big(\|(I-T)u\| + \|Q(T)u\|\Big)
\end{aligned}
$$

其中 $C = \max\{\|\tilde{Q}(T), 1\|\}$, 由 $Q(T)$ 是紧算子, $I-T$ 是线性算子, 由练习(6.9)可知, $N(I-T)$ 有限维, $R(I-T)$ 是闭集.

对于 $E_0 \subset E$, 只要考虑 T 在 E_0 上的限制 $T|_{E_0}$, 完全按照上面的证明, 即可得到 $R(I-T|_{E_0}) = (I-T)E_0$ 是闭集.

(2) 证明 $N(I-T) = \{0\} \Rightarrow R(I-T) = E$:

若 $R(I-T) \neq E$, 设 $(I-T)^n E = E_n$, 则显然 E_n 是一个递减的集合列. 构造序列 $\{u_n\}$, s.t. $\|u_n\| = 1$, $u_n \in E_n$, $\operatorname{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$, 则当 $m \geq n+1$

$$
\begin{aligned}
\|Q(T)u_m - Q(T)u_n\| =&\|Q(T)u_m - Q(T)u_n + Q(I)u_n - Q(I)u_m - Q(I)u_n + Q(I)u_m\| \\
=&\|Q(I)u_n - \big((I-T)\tilde{Q}(T)(u_m-u_n) + Q(I)u_n\big)\|
\end{aligned}
$$

$u_n \in E_n$, $u_m \in E_m \subset E_{n+1} \subset E_n$, 则 $\tilde{Q}(T)(u_m - u_n) \in E_n$, 那么 $(I-T)\tilde{Q}(T)(u_m-u_n) + Q(I)u_m \in E_{n+1}$, 由 $\operatorname{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$

$$
\|Q(T)u_m - Q(T)u_n\| = \|Q(I)u_n - \big((I-T)\tilde{Q}(T)(u_m-u_n) + Q(I)u_n\big)\| \geq \frac{\|Q(I)\|}{2}
$$

但 $Q(T)$ 是紧算子, 这显然矛盾, 故 $R(I-T) = E$.

证明 $R(I-T) = E \Rightarrow N(I-T) = \{0\}$:

首先我们证明 $Q(T^*)$ 是紧算子. $\forall u \in E$, $v \in E^*$, 有 $\langle T^k u, v\rangle = \langle T^{k-1}u, T^* v\rangle = \cdots = \langle u, (T^*)^k v\rangle$, 即 $(T^k)^* = T^{*k}$. 那么

$$\langle Q(T)u, v\rangle = \langle \sum_{k=1}^{p} a_k T^k u, v\rangle = \sum_{k=1}^{p} a_k \langle T^k, v\rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle u, T^{*k} v\rangle = \langle u, \sum_{k=1}^{p} a_k T^{*k} v\rangle = \langle u, Q(T^*)v\rangle$$

即 $Q(T)^* = Q(T^*)$, 故 $Q(T^*)$ 是紧算子.

$R(I-T) = E$, 则 $N(I-T^*) = \{0\}$, 由上面半个小题的结论可以推出 $R(I-T^*) = E$, 那么 $N(I-T) = \{0\}$.

(3) 由 $S(T^*)$ 紧可知, $d^* = \dim(I-T^*) < \infty$. 假设 $d < d^*$, 完全仿照定理6.6构造有限秩算子 Λ , 投影 P , 令 $S = T + \Lambda \circ P \in \mathcal{L}(E)$, 可以证明 $N(I-S) = \{0\}$.

因为 $R\big((\Lambda\circ P)^k\big) = (\Lambda\circ P)^k E \subset R(\Lambda\circ P)$ 是有限维的, 则 $Q(\Lambda\circ P) = \sum_{k=1}^{p} a_k (\Lambda\circ P)^k$ 是有限秩的, 而 $Q(T)$ 是紧的, 故$Q(S) = Q(T) + Q(\Lambda\circ P)$ 是紧的. 由第二小题, $R(I-S) = E$, 这显然是不可能的. 则 $d \geq d^*$

再对 T^* 做类似证明, 有 $d^* \geq d^{**} = \dim N(I-T^{**})$, 易知 $N(I-T) \subset N(I-T^{**})$, 则 $d^* \geq d^{**} \geq d$, 故 $d = d^*$.

6.11

(1) 设 $F_n = \{u \in F | \|u(x)-u(y)\| < n d(x,y)^{\frac{1}{n}}, x, y \in K\}$, 显然 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$, 由贝尔定理, $\exists n_0$, s.t. $\mathrm{Int} F_{n_0} \neq \emptyset$. 设 $B(u_0,\rho) \subset F_{n_0}$, 则 $u \in F$, 令 $|\lambda| < \rho/\|u\|$, 则 $u_0 + \lambda u \in B(u_0,\rho) \subset F_{n_0}$, 即 $\forall x, y \in E$

$$\|(u_0(x)+\lambda u(x)) - (u_0(y)+\lambda u(y))\| < n_0 d(x,y)^{\frac{1}{n_0}}$$

而

$$\|\lambda(u(x)-u(y))\| \leq \|(u_0(x)+\lambda u(x)) - (u_0(y)+\lambda u(y))\| + \|u_0(x)-u_0(y)\| < 2n_0 d(x,y)^{\frac{1}{n_0}}$$

则

$$\|u(x)-u(y)\| < \frac{2}{n_0|\lambda|} d(x,y)^{\frac{1}{n_0}} < \frac{2\|u\|}{n_0\rho} d(x,y)^{\frac{1}{n_0}}$$

即对 $\forall u \in F$, $\exists C, \gamma$s.t. $\|u(x)-u(y)\| < C\|u\| d(x,y)^{\gamma}$.

(2) K 是紧集, $F \cap B_F = B_F$ 是 $E = C(K)$ 的有界闭子集, 由第一小题, $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = (\varepsilon/C)^{1/\gamma}$, 则当 $d(x,y) < \delta$

$$\|u(x)-u(y)\| < C\|u\| d(x,y)^{\gamma} \leq C d(x,y)^{\gamma} < \varepsilon$$

由Ascoli-Arzelà定理, $\bar{B_F} = B_F$ 是紧集, 则 F 是有限维的.

6.17

考虑算子 $M-\alpha I: l^p \to l^p$, $(M-\alpha I)x = ((\lambda_1-\alpha)x_i,\cdots,(\lambda_n-\alpha)x_i,\cdots)$.

若 $\exists i$, s.t. $\alpha=\lambda_i$, $\forall x_i \in \mathcal{R}$, $(M-\alpha I)(\overbrace{0,\cdots,0}^{i-1\text{个}0},x_i,0,\cdots)=0$, 则显然此时 $M-\alpha I$ 不是双射. 除此以外的 α 都满足 $M-\alpha I$ 可逆, 故 $\sigma(M)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$.

$\forall \alpha=\lambda_i \in \sigma(M)$, 上面说明了 $(\overbrace{0,\cdots,0}^{i-1\text{个}0},x_i,0,\cdots) \in N(M-\alpha I)$, 则 $\alpha \in EV(M)$, 即 $EV(M)=\sigma(M)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$.

6.20

(1) 由实分析知识可知, 可积函数可以由阶梯函数来逼近, 定义算子 $P_n: L^p \to L^p$

$$P_n u(x) = u(\frac{i}{n}), \quad x\in[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}], \quad i=0,1,\cdots,n$$

当 $n\to\infty$, $P_nu(x)\to u(x)$. $P_nu(x)$ 只由 $0,1/n,\cdots,n$ 这 $n+1$ 个点上的值决定, 所以 $\dim R(P_n)=n+1$, P_n 是有限秩的. 再定义 $T_n=T\circ P_n$, 则显然 T_n 也是连续的有限秩的, 且由控制收敛定理有 $T_n\to T$, 故 T 是紧算子.

(2) 当 $\lambda=0$, 由 $Tu(x)=T(u(x)+1)$ 可知, $T-\lambda I$ 不是双射, 故 $0\in\sigma(T)$. 但因为 $Tu(x)=\int_0^x u(t)dt=0$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立, 则显然 $u(x)\equiv 0$, 故$0\notin EV(T)$.

若 $\lambda\neq 0$, 只要考虑 $Tu=\lambda u$ 是否存在非零解. 当 $x=0$, 可得 $\lambda u(0)=\int_0^0 u(t)dtdx=0$, 即 $u(0)=0$. 对原方程两边求导

$$u(x)-\lambda u'(x)=0$$
$$u(0)=0$$

解该微分方程, 得 $u(x)=0$, 那么 $N(T-\lambda I)=\{0\}$, $\lambda\notin EV(T)$.

综上, $EV(T)=\emptyset$, $\sigma(T)=\{0\}$.

(3) 考虑 $f\in C((0,1))$ 的特殊情况. 当 $\lambda\neq 0$, $T-\lambda I$ 可逆, 则 $\exists|\, u\in C((0,1))$, s.t. $u=(T-\lambda I)^{-1}f$, 那么 $(T-\lambda I)u=Tu-\lambda u=f$. 设 $v=Tu$, $v\in C^1((0,1))$, $v'=u$, $v(0)=0$, 故

$$v(x)-\lambda v'(x)=f(x)$$
$$v(0)=0$$

求解该微分方程组, 得

$$v(x)=-\frac{e^{x/2}}{\lambda}\int_0^x f(t)e^{-t/2}dt$$

那么

$$u(x)=v'(x)=-\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{e^{x/2}}{\lambda^2}\int_0^x e^{x/2}f(x)dt$$

上式即当 $\lambda \neq 0$ 时, $T - \lambda I$ 在 $C(0,1)$ 上的限制的显式表达.

(4) $\forall v \in L^{p'}$, $u \in L^p$

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= \int_0^1 Tu(x)v(x)dx \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 u(y)dy\Big) v(x)dx \\ &= \int_0^1 u(y)\Big(\int_x^1 v(x)dx\Big)dy\end{aligned}$$

记 $T^*v(x) = \int_x^1 v(t)dt$, 则满足 $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$.