Chapter 4

林陈冉

2016年12月27日

4.5

(1) 当 $f \in L^1 \cap L^\infty$, $\|f\|_p \le \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \le \infty$, 则 $f \in L^p$, 即 $L^1 \cap L^\infty \subset L^p$. Ω 是 σ-有限的, 则 $\Omega = \bigcup_{1=1}^N \Omega_i$, $|\Omega_i| < \infty$. 令 $\chi_n = \chi_{\Omega_n}$, 则易知 $f_n = \chi_n T_n f \in L^1 \cap L^\infty$, $\|f_n - f\|_p \to 0$, 即在 L^p 意义下 $f_n \to f$, 故 $L^1 \cap L^\infty$ 在 L^p 中稠密.

(2) 记 $V = \{f \in L^p \cap L^q \,\big|\, \|f\|_q \le 1\}$, $f_n \in V$, 则 $f_n \in L^p$, $\|f_n\|_q \le 1$, 若 $f_n \to f$, 显然 $f \in L^p$, 又由法图引理, 易知有 $\|f_n\|_q \le 1$, 故 $f \in V$, 即 V 是闭集.

(3) 由第(2)小题可知, $f \in L^p$, $\|f\|_q \le C$. 对于任意大小介于 p , q 之间的 r , 令 $\alpha \in \mathbb{R}$ 满足 $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, 则 $\|f\|_r \le \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha} < \infty$, 即 $f \in L^r$, $\forall \varepsilon > 0$, 由在 L^p 意义下 $f_n \to f$, 对上面由 r 给定的 α , $\exists N > 0$, $\forall n > N$, $\|f_n - f\|_p \le (\frac{(2C)^{1-\alpha}}{\varepsilon})^\alpha$, 则

$$\|f_n - f\|_r \le \|f_n - f\|_p^\alpha \|f_n - f\|_q^{1-\alpha} \le \Big(\frac{(2C)^{1-\alpha}}{\varepsilon})^\alpha\Big)^\alpha (2C)^{1-\alpha} \le \varepsilon$$

故在 L^r 意义下, $f_n \to f$.

4.6

(1) $\forall f \in L^\infty$, $\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f|_p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_\infty^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{p}}$, 则 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$.

另一方面, 令 $A_k = \{x \in \Omega \,\big|\, f(x) > k\}$, 由 $\|f\|_\infty < \infty$, 对 $\forall 0 < k < \|f\|_\infty$, $|A_k| \ne 0$, 那么 $\|f\|_p \ge \Big(\int_{A_k} |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ge k|A_k|^{\frac{1}{p}}$, 则 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \ge k$, 当 $k \to \|f\|_\infty$, 可得 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty$.

综上, 有 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(2) $\forall k > C$, 如第(1)小题定义 A_k , 则有 $C^p > \|f\|_p^p > \int_{A_k} |f|^p > k^p |A_k|$, 即 $|A_k| < (\frac{C}{k})^{\frac{1}{p}}$, 那么 $\lim_{p\to\infty} |A_k| = 0$, 故 $\|f\|_\infty \le C$.

(3) $f(x) = log(x)$

4.16

(1) 已知 f_n 有界, 记 $M=\sup|f_n|$, 由 $1<p<\infty$, 则 MB_{L^p} 是弱紧且可度量的, 故 $\exists \bar{f}\in L^p$, $f_n\rightharpoonup \bar{f}$, 设 $E=conv\{f_n\}$, 由习题3.4, 可知 $\exists g_n\in E$, s.t. $|g_n-\bar{f}|\to 0$, 则存在子列 $\{g_{n_k}\}$, 几乎处处 $g_{n_k}\to\bar{f}$. $g_{n_k}(x)=\sum a_k f_k(x)$, 而同时, 几乎处处 $f_n\to f$, 则

$$\bar{f}(x)=\lim_{n\to\infty}g_{n_k}(x)=\sum_k a_k\lim_{k\to\infty}f_k(x)=\sum_k a_k f(x)=f(x)$$

即几乎处处 $f=\bar{f}$. 故 $f_n\rightharpoonup f$.

(2) 当 $\|f_n-f\|_1\to 0$, 则存在子列 f_{n_k} , 几乎处处 $f_{n_k}\to f$, 又化为第(1)小题的情况.

(3) 由Egorov定理, $\forall\delta>0$, $A\subset\Omega$, $|\Omega\setminus A|<\delta$, 使得 f_n 在 A 上一致收敛到 f . 即 $\forall\delta>0$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $|f_n(x)-f(x)|<\delta$ 对 $\forall x\in A$ 成立. 对 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta<\frac{\varepsilon}{|\Omega|+(2M)^p}<1$, 取满足上述条件的集合 A 和整数 N ,

$$\|f_n-f\|_p^p=\int_A|f_n(x)-f(x)|^p+\int_{\Omega\setminus A}|f_n(x)-f(x)|^p\le\delta(|\Omega|+(2M)^p)\le\varepsilon$$

故 $\|f_n-f\|_p\to 0$.

4.28

设 $\chi_n=\chi_{B(0,n)}$, 由 $\rho\in L^1$, $\chi_n\rho\to\rho$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$, $\forall n>N_1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\chi_n\rho-\rho|=\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,n)}|\rho|<\varepsilon$$

那么 $\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\frac{1}{n})}|\rho_{n^2}|<\varepsilon$.

先考虑 $f\in C_c(\mathbb{R}^N)$, 则 $|f|=M<\infty$. 对于上述给定 ε , $\exists\delta>0$, s.t. $|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in supp\, f$, $\forall y\in B(0,\delta)$. 取 $N_2<\frac{1}{\delta}$, 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n>N$, $\forall x\in\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
&|f(x)-\rho_{n^2}*f(x)|\\
=&\Big|\int_{\mathbb{R}^N}(f(x)-f(x-y))\rho_{n^2}(y)dy\Big|\\
=&\Big|\int_{B(0,\frac{1}{n})}(f(x)-f(x-y))\rho_{n^2}(y)dy\Big|+\Big|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\frac{1}{n})}(f(x)-f(x-y))\rho_{n^2}(y)dy\Big|\\
\ge&\varepsilon+2M\varepsilon
\end{aligned}\tag{0.1}$$

故几乎处处 $\rho_n*f\to f$, 易得当 $1<p<\infty$, $\|\rho_n*f-f\|_p\to 0$.

再考虑 $f\in L^p$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists f_0\in C_c(\mathbb{R}^n)$, s.t. $\|f-f_0\|_p<\varepsilon$. 由上面的证明, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $\|\rho_n*f_0-f_0\|_p<\varepsilon$. 那么

$$\|f-\rho_n*f\|_p\le\|f-f_0\|_p+\|f_0-\rho_n*f_0\|_p+\|\rho_n*f-\rho_n*f_0\|_p<3\varepsilon$$

故在 L^p 意义下 $\rho_n * f \to f$.

4.29

设 $\chi_n = \chi_{K+B(0,\frac{1}{2n})}$, $u_n = \rho_{2n} * \chi_n$.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\rho_{2n}(x) \geq 0$, $\chi_n x \geq 0$, 则 $u_n(x) \geq 0$. 另一方面, $u_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{2n}(x-y)\chi_n(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{2n}(x-y)dy \leq 1$.

(b) 当 $x \in K$, $B(0,\frac{1}{2n}) \subset x - (K + B(0,\frac{1}{2n}))$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{2n}(x-y)\chi_n(y)dy = \int_{x-(K+B(0,\frac{1}{2n}))\cap B(0,\frac{1}{2n})} \rho_{2n}(x-y)\chi_n(y)dy = \int_{B(0,\frac{1}{2n})} \rho_{2n}(y)dy = 1$$

(c) $supp\, u_n \subset \overline{supp\, \rho_{2n} + supp \chi_n} = \overline{B(0,\frac{1}{2n}) + K + B(0,\frac{1}{2n})} = \overline{K + B(0,\frac{1}{n})}$

(d) $D^\alpha \rho_n(x) = \frac{1}{\int \rho} n^N D^\alpha \rho(nx) = \frac{n^\alpha}{\int \rho} n^N \rho^{[\alpha]}(nx) = n^\alpha \frac{\int \rho^{[\alpha]}}{\int \rho} \frac{1}{\int \rho^{[\alpha]}} n^N \rho^{[\alpha]}(nx) = C_\alpha n^\alpha \rho_n^{[\alpha]}(x)$, 其中 $\rho_n^{[\alpha]}(x) = \frac{1}{\int \rho^{[\alpha]}} n^N \rho^{[\alpha]}(nx)$, 是由 $\rho^{[\alpha]}$ 构造的磨光子, 易验证它确实满足磨光子的3个条件.

$D^\alpha u_n = (D^\alpha \rho_{2n}) * \chi_n = 2^\alpha C_\alpha n^\alpha (\rho_{2n}^{[\alpha]}(x) * \chi_n)$, 完全类似上面的证明, 有 $|\rho_{2n}^{[\alpha]}(x) * \chi_n(x)| \leq 1$ 则 $|D^\alpha u_n(x)| \leq 2^\alpha C_\alpha n^\alpha$.

4.32

(1) $f, g \in L^1$, 则

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(z)g(x-z)d(-z) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x-z)f(z)dz = g * f(x)$$

$h \in L^p$, 则设 $F(x,y,z) = f(x-y-z)g(z)h(y)$

$$F(x,y,z)$$