离散数学第12次作业

林陈冉

2017年5月4日

1　(上次没交)
正五边形 $D=\{1,2,3,4,5\}$ 上的置换群 D_5 为

- 恒等变换 e , 1个 $(5,0,0,0,0)$ 型.
- 旋转, 记 $a=(12345)$, 有 a , a^2 , a^3 , a^4 4个 $(0,0,0,0,1)$ 型.
- 翻转, 记 $b=(25)(34)$, 有 b , ab , a^2b , a^3b , a^4b 5个 $(1,2,0,0,0)$ 型.

故

$$P_{D_5}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{1}{10}(x_1^5+5x_1x_2^2+4x_5)$$

设红色为r, 蓝色为b, 白色为w, 则

$$\begin{aligned}
&P_{D_5}(r+b+w,r^2+b^2+w^2,r^3+b^3+w^3,r^4+b^4+w^4,r^5+b^5+w^5)\\
=&\frac{1}{10}\left((r+b+w)^5+5\,(r+b+w)\left(r^2+b^2+w^2\right)^2+4\left(r^5+b^5+w^5\right)\right)\\
=&b^5+b^4r+b^4w+2b^3r^2+2b^3rw+2b^3w^2+2b^2r^3+4b^2r^2w+4b^2rw^2+2b^2w^3+br^4\\
&+2br^3w+4br^2w^2+2brw^3+bw^4+r^5+r^4w+2r^3w^2+2r^2w^3+rw^4+w^5
\end{aligned}$$

其中 r^2bw^2 的系数为4, 故有4中不等价的染色

7.2.7　　设 $a\in V_1\cap V_2$, $\forall u,v\in V'$

- 若 $u,v\in V_1$, 由 H_1 的连通性可知存在 $u-v$ 路径.
- $u,v\in V_2$ 同理.
- 若 $u\in V_1$, $v\in V_2$, 由 H_1 , H_2 的连通性, 存在 $u-a$ 路径和 $v-a$ 路径, 故存在 $u-v$ 路径.
- $u\in V_2$, $v\in V_1$ 同理.

综上, H 是连通的.

7.2.11 对任何简单图 $G=(V,E)$, 当 $|G|=3$, 命题显然成立.

假设当 $|G|=n$ 时命题成立, 当 $|G|=n+1$, $\forall u \in V$, $\rho(u) \leq n$, 则 $G \setminus u$ 的边数大于 $\binom{n-1}{2}$, 故 $G \setminus u$ 是连通的. 若 $\rho(u)=0$, G 的边数等于 $G \setminus u$ 的边数, 不大于 $\binom{n}{2}$, 和条件矛盾, 故存在边连接 u 和 $G \setminus u$, 则 G 连通.

7.3.4

7.3.5

(a) 不存在, 一共7个点, 其中有一个点的degree是6, 说明和所有点连接, 这与存在degree为0的点矛盾.

(b) 不存在, degree之和为奇数.

补充1 假设 $u_1 - v_1$, $u_2 - v_2$ 是连通图 G 中的两条最长路径, $u_1 \neq u_2 \neq v_1 \neq v_2$, 由连通性可知, 存在路径 $v_1 - u_2$, 则路径 $u_1 - v_1 - u_2 - v_2$ 比最长路径更长, 矛盾.

补充2

补充3

(1) e 是割边, 但 a , b 不是割点

(2) 补充条件: 割边两端点 a , b 至少有一个degree大于1.
证明: 记图 G 割边为 e , 两个端点为 a , b . 因为 e 是割边, 则 $G \setminus e$ 有两个连通子图 G_a , G_b , $a \in G_a$, $b \in G_b$. 因为 $\rho(a)$, $\rho(b)$ 至少有一个大于1, 不妨设 $\rho(a) > 1$, 则 $|G_a| > 1$, $G_a \setminus a$ 非空 . $\forall u \in G_a \setminus a$, $u - b$ 路径必定包含 a , 这说明了 a 是割点命题得证.