

泛函分析第17周作业

林陈冉

2016年12月22日

6.10

(1) $\forall u \in E$, 成立以下关系

$$\begin{aligned} \|Q(I)u\| &= \|Q(I)u - Q(T)u + Q(T)u\| \\ &\leq \|Q(I)u - Q(T)u\| + \|Q(T)u\| \\ &= \|\tilde{Q}(T)(I - T)u\| + \|Q(T)u\| \\ &\leq \|\tilde{Q}(T)\| \|(I - T)u\| + \|Q(T)u\| \\ &\leq C(\|(I - T)u\| + \|Q(T)u\|) \end{aligned}$$

其中 $C = \max\{\|\tilde{Q}(T)\|, 1\}$, 由 $Q(T)$ 是紧算子, $I - T$ 是线性算子, 由练习(6.9)可知, $N(I - T)$ 有限维, $R(I - T)$ 是闭集.

对于 $E_0 \subset E$, 只要考虑 T 在 E_0 上的限制 $T|_{E_0}$, 完全按照上面的证明, 即可得到 $R(I - T|_{E_0}) = (I - T)E_0$ 是闭集.

(2) 证明 $N(I - T) = \{0\} \Rightarrow R(I - T) = E$:

若 $R(I - T) \neq E$, 设 $(I - T)^n E = E_n$, 则显然 E_n 是一个递减的集合列. 构造序列 $\{u_n\}$, s.t. $\|u_n\| = 1$, $u_n \in E_n$, $\text{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$, 则当 $m \geq n + 1$

$$\begin{aligned} \|Q(T)u_m - Q(T)u_n\| &= \|Q(T)u_m - Q(T)u_n + Q(I)u_n - Q(I)u_m - Q(I)u_n + Q(I)u_m\| \\ &= \|Q(I)u_n - ((I - T)\tilde{Q}(T)(u_m - u_n) + Q(I)u_n)\| \end{aligned}$$

$u_n \in E_n$, $u_m \in E_m \subset E_{n+1} \subset E_n$, 则 $\tilde{Q}(T)(u_m - u_n) \in E_n$, 那么 $(I - T)\tilde{Q}(T)(u_m - u_n) + Q(I)u_n \in E_{n+1}$, 由 $\text{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$

$$\|Q(T)u_m - Q(T)u_n\| = \|Q(I)u_n - ((I - T)\tilde{Q}(T)(u_m - u_n) + Q(I)u_n)\| \geq \frac{\|Q(I)\|}{2}$$

但 $Q(T)$ 是紧算子, 这显然矛盾, 故 $R(I - T) = E$.

证明 $R(I - T) = E \Rightarrow N(I - T) = \{0\}$:

首先我们证明 $Q(T^*)$ 是紧算子. $\forall u \in E, v \in E^*$, 有 $\langle T^k u, v \rangle = \langle T^{k-1} u, T^* v \rangle = \cdots = \langle u, (T^*)^k v \rangle$, 即 $(T^k)^* = T^{*k}$. 那么

$$\langle Q(T)u, v \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^p a_k T^k u, v \right\rangle = \sum_{k=1}^p a_k \langle T^k, v \rangle = \sum_{k=1}^p \langle u, T^{*k} v \rangle = \langle u, \sum_{k=1}^p a_k T^{*k} v \rangle = \langle u, Q(T^*)v \rangle$$

即 $Q(T)^* = Q(T^*)$, 故 $Q(T^*)$ 是紧算子.

$R(I - T) = E$, 则 $N(I - T^*) = \{0\}$, 由上面半个小题的结论可以推出 $R(I - T^*) = E$, 那么 $N(I - T) = \{0\}$.

(3) 由 $S(T^*)$ 紧可知, $d^* = \dim(I - T^*) < \infty$. 假设 $d < d^*$, 完全仿照定理6.6构造有限秩算子 Λ , 投影 P , 令 $S = T + \Lambda \circ P \in \mathcal{L}(E)$, 可以证明 $N(I - S) = \{0\}$.

因为 $R((\Lambda \circ P)^k) = (\Lambda \circ P)^k E \subset R(\Lambda \circ P)$ 是有限维的, 则 $Q(\Lambda \circ P) = \sum_{k=1}^p a_k (\Lambda \circ P)^k$ 是有限秩的, 而 $Q(T)$ 是紧的, 故 $Q(S) = Q(T) + Q(\Lambda \circ P)$ 是紧的. 由第二小题, $R(I - S) = E$, 这显然是不可能的. 则 $d \geq d^*$

再对 T^* 做类似证明, 有 $d^* \geq d^{**} = \dim N(I - T^{**})$, 易知 $N(I - T) \subset N(I - T^{**})$, 则 $d^* \geq d^{**} \geq d$, 故 $d = d^*$.

6.11

(1) 设 $F_n = \{u \in F \mid \|u(x) - u(y)\| < nd(x, y)^{\frac{1}{n}}, x, y \in K\}$, 显然 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$, 由贝尔定理, $\exists n_0$, s.t. $\text{Int} F_{n_0} \neq \emptyset$. 设 $B(u_0, \rho) \subset F_{n_0}$, 则 $u \in F$, 令 $|\lambda| < \rho/\|u\|$, 则 $u_0 + \lambda u \in B(u_0, \rho) \subset F_{n_0}$, 即 $\forall x, y \in E$

$$\|(u_0(x) + \lambda u(x)) - (u_0(y) + \lambda u(y))\| < n_0 d(x, y)^{\frac{1}{n_0}}$$

而

$$\|\lambda(u(x) - u(y))\| \leq \|(u_0(x) + \lambda u(x)) - (u_0(y) + \lambda u(y))\| + \|u_0(x) - u_0(y)\| < 2n_0 d(x, y)^{\frac{1}{n_0}}$$

则

$$\|u(x) - u(y)\| < \frac{2}{n_0 |\lambda|} d(x, y)^{\frac{1}{n_0}} < \frac{2\|u\|}{n_0 \rho} d(x, y)^{\frac{1}{n_0}}$$

即对 $\forall u \in F$, $\exists C, \gamma$ s.t. $\|u(x) - u(y)\| < C\|u\|d(x, y)^\gamma$.

(2) K 是紧集, $F \cap B_F = B_F$ 是 $E = C(K)$ 的有界闭子集, 由第一小题, $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = (\varepsilon/C)^{1/\gamma}$, 则当 $d(x, y) < \delta$

$$\|u(x) - u(y)\| < C\|u\|d(x, y)^\gamma \leq Cd(x, y)^\gamma < \varepsilon$$

由Ascoli-Arzelà定理, $\bar{B}_F = B_F$ 是紧集, 则 F 是有限维的.

6.17

考虑算子 $M - \alpha I : l^p \rightarrow l^p$, $(M - \alpha I)x = ((\lambda_1 - \alpha)x_1, \dots, (\lambda_n - \alpha)x_n, \dots)$.

若 $\exists i$, s.t. $\alpha = \lambda_i$, $\forall x_i \in \mathcal{R}$, $(M - \alpha I)(\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1 \uparrow 0}, x_i, 0, \dots) = 0$, 则显然此时 $M - \alpha I$ 不是双射. 除此以外的 α 都满足 $M - \alpha I$ 可逆, 故 $\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$.

$\forall \alpha = \lambda_i \in \sigma(M)$, 上面说明了 $(\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1 \uparrow 0}, x_i, 0, \dots) \in N(M - \alpha I)$, 则 $\alpha \in EV(M)$, 即 $EV(M) = \sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$.

6.20

(1) 由实分析知识可知, 可积函数可以由阶梯函数来逼近, 定义算子 $P_n : L^p \rightarrow L^p$

$$P_n u(x) = u\left(\frac{i}{n}\right), \quad x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

当 $n \rightarrow \infty$, $P_n u(x) \rightarrow u(x)$. $P_n u(x)$ 只由 $0, 1/n, \dots, n$ 这 $n+1$ 个点上的值决定, 所以 $\dim R(P_n) = n+1$, P_n 是有限秩的. 再定义 $T_n = T \circ P_n$, 则显然 T_n 也是连续的有限秩的, 且由控制收敛定理有 $T_n \rightarrow T$, 故 T 是紧算子.

(2) 当 $\lambda = 0$, 由 $Tu(x) = T(u(x) + 1)$ 可知, $T - \lambda I$ 不是双射, 故 $0 \in \sigma(T)$. 但因为 $Tu(x) = \int_0^x u(t)dt = 0$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 成立, 则显然 $u(x) \equiv 0$, 故 $0 \notin EV(T)$.

若 $\lambda \neq 0$, 只要考虑 $Tu = \lambda u$ 是否存在非零解. 当 $x = 0$, 可得 $\lambda u(0) = \int_0^0 u(t)dt = 0$, 即 $u(0) = 0$. 对原方程两边求导

$$\begin{aligned} u(x) - \lambda u'(x) &= 0 \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

解该微分方程, 得 $u(x) = 0$, 那么 $N(T - \lambda I) = \{0\}$, $\lambda \notin EV(T)$.

综上, $EV(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$.

(3) 考虑 $f \in C((0, 1))$ 的特殊情况. 当 $\lambda \neq 0$, $T - \lambda I$ 可逆, 则 $\exists u \in C((0, 1))$, s.t. $u = (T - \lambda I)^{-1}f$, 那么 $(T - \lambda I)u = Tu - \lambda u = f$. 设 $v = Tu$, $v \in C^1((0, 1))$, $v' = u$, $v(0) = 0$, 故

$$\begin{aligned} v(x) - \lambda v'(x) &= f(x) \\ v(0) &= 0 \end{aligned}$$

求解该微分方程组, 得

$$v(x) = -\frac{e^{x/2}}{\lambda} \int_0^x f(t)e^{-t/2} dt$$

那么

$$u(x) = v'(x) = -\frac{f(x)}{\lambda} - \frac{e^{x/2}}{\lambda^2} \int_0^x e^{x/2} f(x) dx$$

上式即当 $\lambda \neq 0$ 时, $T - \lambda I$ 在 $C(0, 1)$ 上的限制的显式表达.

(4) $\forall v \in L^{p'}$, $u \in L^p$

$$\begin{aligned}\langle Tu, v \rangle &= \int_0^1 Tu(x)v(x)dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x u(y)dy \right) v(x)dx \\ &= \int_0^1 u(y) \left(\int_x^1 v(x)dx \right) dy\end{aligned}$$

记 $T^*v(x) = \int_x^1 v(t)dt$, 则满足 $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle$.