第五章习题

林陈冉

2016年12月27日

5.2

当 $1 \le p < \infty$, $p \neq 2$, 令 $A, B \in \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $|A| = |B| = 1$, $f = \chi_A$, $g = \chi_B$. 则 $\|f + g/2\|_p = \|f - g/2\|_p = \Big(\int_{A\cup B} (\frac{1}{2})^p dx \Big)^{1/p} = 2^{\frac{2}{p}-2}$, $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, 即

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p + \|\frac{f-g}{2}\|_p = 2^{\frac{2}{p}-1} \neq 1 = \frac{1}{2}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

当 $p = \infty$, $\|f + g/2\|_\infty = \|f - g/2\|_\infty = \frac{1}{4}$, $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, 即

$$\|\frac{f+g}{2}\|_\infty + \|\frac{f-g}{2}\|_\infty = \frac{1}{2} \neq 1 = \frac{1}{2}(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$$

综上, 当 $p \neq 2$, L^p 不是Hilbert的.

5.4

$$\begin{aligned}
&|v-f|^2 - |u-f|^2 - |v-u|^2 \\
=&(v-f, v-f) - (u-f, u-f) - (u-v, u-v) \\
=&(v-f, v) - (v-f, f) - (u-f, u) + (u-f, f) - (u-v, u) + (u-v, v) \\
=&(v, v) - (f, v) - (v, f) + (f, f) - (u, u) + (f, u) \\
&+ (u, f) - (f, f) - (u, u) + (v, u) + (u, v) - (v, v) \\
=&-2(u, u) - 2(f, v) + 2(f, u) + 2(u, v) \\
=&2\Big((f, u-v) - (u, u-v)\Big) \\
=&2(f-u, v-u)
\end{aligned}$$

由 $u = P_K f$, 则 $(f-u, v-u) \ge 0$, 那么

$$|v-f|^2 - |u-f|^2 - |v-u|^2 \ge 0 \Leftrightarrow |v-u|^2 \le |v-f|^2 |u-f|^2$$

从上面的式子可知 $|v-u|^2 \le |v-f|^2 - |u-f|^2 \le |v-f|$, 显然有 $|v-u| \le |v-f|$. 几何解释为钝角三角形最大角的余弦公式.

5.14 $\forall u,v\in H$, $t\in(0,1)$

$$\begin{aligned}
&tF(u)+(1-t)F(v)-F(tu+(1-t)v)\\
=&ta(u,u)+(1-t)a(v,v)-a(tu+(1-t)v,tu+(1-t)v)\\
=&ta(u,u)+(1-t)a(v,v)-t^2a(u,u)-(1-t)^2a(v,v)\\
&-t(1-t)a(u,v)-t(1-t)a(v,u)\\
=&t(1-t)\big(a(u,u)+a(v,v)-a(u,v)-a(v,u)\big)\\
=&t(1-t)a(u-v,u-v)\geq 0
\end{aligned}$$

则 $F(tu+(1-t)v)\leq tF(u)+(1-t)F(v)$, F 是凸函数.

给定 $\forall v\in H$, 定义映射 $T_v: H\to\mathbb{R}$, $\langle T_v,u\rangle=a(u,v)$, 显然 $T_v\in H^*$, 由里斯表示定理, $\exists h_v\in H$, $\langle T_v,u\rangle=(u,h_v)=a(u,v)$, 这相当于给出一个映射 $\mathcal{A}(v)=h_v$. $\forall v_1,v_2\in H$, $v_1\neq v_2$,

$$(u,h_{v_1}+h_{v_2})=(u,h_{v_1})+(u,h_{v_2})=a(u,v_1)+a(u,v_2)=a(u,v_1+v_2)=(u,h_{v_1+v_2})$$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$,

$$(u,h_{\alpha v})=a(u,\alpha v)=\alpha a(u,v)=\alpha(u,h_v)$$

上面两个式子说明 $\mathcal{A}\in H^*$. 则 $a(u,v)=(u,\mathcal{A}v)=(\mathcal{A}^*u,v)$

$$F(u+v)-F(v)=a(v,v)+(\mathcal{A}^*u,v)+(\mathcal{A}u,v)$$

则当 $v\to 0$, 可得 $F'(u)=\mathcal{A}^*u+\mathcal{A}u$.

5.22

(1) 首先考虑 $C=H$. $\forall u,v\in H$, $|T(u+tv)-Tu|\leq|tv|\leq|t||v|$, 当 $t\to 0$, $|T(u+tv)-Tu|\to 0$, 即 T 连续 , $T(u+tv)\to Tu$. $\forall u,v\in H$

$$\begin{aligned}
&((u-Tu)-(v-Tv),u-v)\\
=&(u-v,u-v)-(Tu-Tv,u-v)\\
\geq&|u-v|-|Tu-Tv|^{\frac{1}{2}}|u-v|^{\frac{1}{2}}\\
\geq&0
\end{aligned}$$

则 $((u_n-Tu_n)-(u+tv-T(u+tv)),u_n-u+tv)\geq 0$. 由 $u_n-Tu_n\to f$, $u_n\rightharpoonup u$, 可得当 $n\to\infty$, $(f-(u+tv-T(u+tv)),tv)\geq 0$.

当 $t>0$, $(f-(u+tv-T(u+tv)),v)\geq 0$; 当 $t<0$, $(f-(u+tv-T(u+tv)),v)\leq 0$. 故 $(f-(u+tv-T(u+tv)),v)=0$. 当 $t\to 0$, $(f-(u-Tu),v)=0$, $\forall v\in H$, 故 $f=u-Tu$.

当 $C\subset H$, 考虑映射 $\bar{T}=T\circ P_c$, $\bar{T}:H\to H$, 易证 $\bar{T}$ 连续, 且也是压缩映射, 完全类似上面的证明, 可得 $f=u-Tu$.

(2) 定义 $T_n : C \to C$, $T_n u = (1-\frac{1}{n})Tu - \frac{a}{n}$, 其中 $a \in C$ 固定. $\forall u, v \in C$

$$T_n u - T_n v = (1-\frac{1}{n})|Tu - Tv| < |u-v|$$

故 T_n 是压缩算子, $\exists u_n^* \in C \subset mB_H$, s.t. $T_n u_n^* = u_n^*$, 其中 $m = \sup_{u\in C} |u|$. 由 H 自反, 可知 mB_H 是弱紧的, 则 $\{u_n^*\}$ 中有弱收敛子列 $u_{n_k}^* \rightharpoonup u^*$.

$$u_n^* - Tu_n^* = \frac{1}{n}|Tu_n^* - a| \le \frac{1}{n}(|Tu_n^*| + |a|) \le \frac{2m}{n}$$

故当 $n \to \infty$, $|u_n^* - Tu_n^*| \to 0$. 由第一小题结论可知, $u^* - Tu^* = 0$, 即 T 有不动点.