

第五章习题

林陈冉

2016年12月27日

5.2

当 $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, 令 $A, B \in \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $|A| = |B| = 1$, $f = \chi_A$, $g = \chi_B$. 则 $\|f + g/2\|_p = \|f - g/2\|_p = \left(\int_{A \cup B} (\frac{1}{2})^p dx \right)^{1/p} = 2^{\frac{2}{p}-2}$, $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, 即

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p = 2^{\frac{2}{p}-1} \neq 1 = \frac{1}{2}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

当 $p = \infty$, $\|f + g/2\|_\infty = \|f - g/2\|_\infty = \frac{1}{4}$, $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, 即

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_\infty + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_\infty = \frac{1}{2} \neq 1 = \frac{1}{2}(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$$

综上, 当 $p \neq 2$, L^p 不是Hilbert的.

5.4

$$\begin{aligned} & |v-f|^2 - |u-f|^2 - |v-u|^2 \\ &= (v-f, v-f) - (u-f, u-f) - (u-v, u-v) \\ &= (v-f, v) - (v-f, f) - (u-f, u) + (u-f, f) - (u-v, u) + (u-v, v) \\ &= (v, v) - (f, v) - (v, f) + (f, f) - (u, u) + (f, u) \\ &\quad + (u, f) - (f, f) - (u, u) + (v, u) + (u, v) - (v, v) \\ &= -2(u, u) - 2(f, v) + 2(f, u) + 2(u, v) \\ &= 2\left((f, u-v) - (u, u-v)\right) \\ &= 2(f-u, v-u) \end{aligned}$$

由 $u = P_K f$, 则 $(f-u, v-u) \geq 0$, 那么

$$|v-f|^2 - |u-f|^2 - |v-u|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |v-u|^2 \leq |v-f|^2 |u-f|^2$$

从上面的式子可知 $|v-u|^2 \leq |v-f|^2 - |u-f|^2 \leq |v-f|$, 显然有 $|v-u| \leq |v-f|$. 几何解释为钝角三角形最大角的余弦公式.

5.14 $\forall u, v \in H, t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
& tF(u) + (1-t)F(v) - F(tu + (1-t)v) \\
&= ta(u, u) + (1-t)a(v, v) - a(tu + (1-t)v, tu + (1-t)v) \\
&= ta(u, u) + (1-t)a(v, v) - t^2a(u, u) - (1-t)^2a(v, v) \\
&\quad - t(1-t)a(u, v) - t(1-t)a(v, u) \\
&= t(1-t)(a(u, u) + a(v, v) - a(u, v) - a(v, u)) \\
&= t(1-t)a(u - v, u - v) \geq 0
\end{aligned}$$

则 $F(tu + (1-t)v) \leq tF(u) + (1-t)F(v)$, F 是凸函数.

给定 $\forall v \in H$, 定义映射 $T_v : H \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle T_v, u \rangle = a(u, v)$, 显然 $T_v \in H^*$, 由里斯表示定理, $\exists h_v \in H$, $\langle T_v, u \rangle = (u, h_v) = a(u, v)$, 这相当于给出一个映射 $\mathcal{A}(v) = h_v$. $\forall v_1, v_2 \in H, v_1 \neq v_2$,

$$(u, h_{v_1} + h_{v_2}) = (u, h_{v_1}) + (u, h_{v_2}) = a(u, v_1) + a(u, v_2) = a(u, v_1 + v_2) = (u, h_{v_1+v_2})$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(u, h_{\alpha v}) = a(u, \alpha v) = \alpha a(u, v) = \alpha(u, h_v)$$

上面两个式子说明 $\mathcal{A} \in H^*$. 则 $a(u, v) = (u, \mathcal{A}v) = (\mathcal{A}^*u, v)$

$$F(u + v) - F(v) = a(v, v) + (\mathcal{A}^*u, v) + (\mathcal{A}u, v)$$

则当 $v \rightarrow 0$, 可得 $F'(u) = \mathcal{A}^*u + \mathcal{A}u$.

5.22

(1) 首先考虑 $C = H$. $\forall u, v \in H, |T(u + tv) - Tu| \leq |tv| \leq |t||v|$, 当 $t \rightarrow 0$, $|T(u + tv) - Tu| \rightarrow 0$, 即 T 连续, $T(u + tv) \rightarrow Tu$. $\forall u, v \in H$

$$\begin{aligned}
& ((u - Tu) - (v - Tv), u - v) \\
&= (u - v, u - v) - (Tu - Tv, u - v) \\
&\geq |u - v| - |Tu - Tv|^{\frac{1}{2}}|u - v|^{\frac{1}{2}} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

则 $((u_n - Tu_n) - (u + tv - T(u + tv)), u_n - u + tv) \geq 0$. 由 $u_n - Tu_n \rightarrow f$, $u_n \rightarrow u$, 可得当 $n \rightarrow \infty$, $(f - (u + tv - T(u + tv)), tv) \geq 0$.

当 $t > 0$, $(f - (u + tv - T(u + tv)), v) \geq 0$; 当 $t < 0$, $(f - (u + tv - T(u + tv)), v) \leq 0$. 故 $(f - (u + tv - T(u + tv)), v) = 0$. 当 $t \rightarrow 0$, $(f - (u - Tu), v) = 0, \forall v \in H$, 故 $f = u - Tu$.

当 $C \subset H$, 考虑映射 $\bar{T} = T \circ P_C$, $\bar{T} : H \rightarrow H$, 易证 \bar{T} 连续, 且也是压缩映射, 完全类似上面的证明, 可得 $f = u - Tu$.

(2) 定义 $T_n : C \rightarrow C$, $T_n u = (1 - \frac{1}{n})Tu - \frac{a}{n}$, 其中 $a \in C$ 固定. $\forall u, v \in C$

$$T_n u - T_n v = (1 - \frac{1}{n})(Tu - Tv) < |u - v|$$

故 T_n 是压缩算子, $\exists u_n^* \in C \subset mB_H$, s.t. $T_n u_n^* = u_n^*$, 其中 $m = \sup_{u \in C} |u|$. 由 H 自反, 可知 mB_H 是弱紧的, 则 $\{u_n^*\}$ 中有弱收敛子列 $u_{n_k}^* \rightharpoonup u^*$.

$$u_n^* - Tu_n^* = \frac{1}{n}|Tu_n^* - a| \leq \frac{1}{n}(|Tu_n^*| + |a|) \leq \frac{2m}{n}$$

故当 $n \rightarrow \infty$, $|u_n^* - Tu_n^*| \rightarrow 0$. 由第一小题结论可知, $u^* - Tu^* = 0$, 即 T 有不动点.