离散数学第一次作业

林陈冉

2017年3月3日

1.2.4
Alice 和 $\{1\}$

1.2.9
$\{0,1,3,4,5\}$

1.2.17

$$
\begin{aligned}
&|A\cap B|+|A\cup B|\\
=&|A\cap B|+|A\setminus(A\cap B)|+|B\setminus A\cap B|+|A\cap B|\\
=&(|A\setminus(A\cap B)|+|A\cap B|)+(|B\setminus(A\cap B)|+|A\cap B|)\\
=&|A|+|B|
\end{aligned}
$$

1.3.2
2^{n-1}

1.3.3
设 $|A|=n$. 若 n 是奇数, 则 A 的任意一个子集 B , 其补集 B^c 的奇偶性和 B 相反, 故奇子集个数等于偶子集.
若 n 是偶数, 则可以认为 A 是由具有 $n-1$ 个元素的集合 A' 添加了元素 α 所得 ($\alpha\notin A'$). A 的子集可以分为两类: 含 α 的和不含 α 的.
其中, 不含 α 的那一类就是 A' 的子集, 已经证明 A' 的奇子集等于偶子集. 含有 α 的那一类子集, 偶(奇)子集可以看作是 A' 的奇(偶)子集添加 α 所得, 则偶子集还是等于奇子集.
故 A 的偶子集等于集子集

1.5.2
$5\times 4\times 3=60$

1.8.2

表 1: $\binom{n}{k}$对应表

$\binom{n}{k}$		n					
		0	1	2	3	4	5
k	0	1	1	1	1	1	1
	1		1	2	3	4	5
	2			1	3	6	10
	3				1	4	10
	4					1	5
	5						1

1.8.12

(a) $\emptyset$

(b) $\{n : n = 10 * k, k \in \mathbb{Z}\}$

1.8.13

$\{a, c\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}$

1.8.17

$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C$

1.8.19

$$
\begin{aligned}
&((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cap C = ((A \setminus B) \cap C) \cup ((B \setminus A) \cap C) \\
=&((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus (A \cap C)) \\
=&(((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup (B \cap C)) \setminus (((A \cap C) \setminus (B \cap C)) \cup (A \cap C)) \\
=&(((A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (B \cap C)) \setminus ((A \cap C) \setminus ((B \cap C) \cup (A \cap C)) \\
=&((A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

1.8.23

$\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\exists k \in \mathbb{N}$, s.t. $2^k \leq n < 2^{k+1}$;

令 $n_k = n$, 取 $a_k \in \mathbb{N}^+$, $a_k \leq 9$, s.t. $a_k 2^k \leq n_k < (a_k + 1)2^k$;

令 $n_{k-1} = n_k - a_k 2^k$, 同样的方法得到 a_{k-1};

重复上面步骤, 得到 $a_{k-2}, \cdots, a_0$;

由此我们求出 $\{a_k, a_{k-1}, \cdots, a_0\}$, s.t. $n = \sum_{m=0}^{k} a_m 2^m$, 这就是 n 的二进制表示, 其唯一性是显然的. 假设 $\{a_k, a_{k-1}, \cdots, a_0\}$, $\{b_k, b_{k-1}, \cdots, b_0\}$ 都是 n 的二进制表示, $\{a_k, a_{k-1}, \cdots, a_0\} \neq \{b_k, b_{k-1}, \cdots, b_0\}$, 则 $\sum_{m=0}^{k} a_m 2^m - \sum_{m=0}^{k} b_m 2^m \neq 0$, 而 n 不可能有两个不同值, 矛盾.

1.8.33

$$
\begin{aligned}
&\binom{n-2}{k}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}\\
=&\left(\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}\right)+\left(\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}\right)\\
=&\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

补充1

若 $b \notin \mathbb{N}$, 整数解数目为0组;
反之 , 整数解数目为 $\frac{(b+n)!}{b!}$ 组;

补充2

若 $b \notin \mathbb{N}$ 或 $b < n+1$, 整数解数目为0组;
反之 , 整数解数目为 $\frac{(b-1)!}{(b-n-1)!}$ 组;