# 离散数学第4周作业

林陈冉

2017年3月31日

**4.2.7**　　根据(4.5),

$$F_{a+b+1} = F_{a+1}F_{b+1} + F_aF_b$$

取 $a = b = n - 1$ , 则可得

$$F_{2+n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$$

这就是(4.2). 而当取 $a = n - 1, b = n$ , 可得

$$F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1}$$

这就是(4.3)

**补充1**　　若 $n \mid m$ , $\exists k \in \mathbb{N}$ , $m = kn$ . 当 $k = 1$ , 原命题显然成立, 当 $k = 2$ , 由上面证明的(4.2)

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$$

说明命题成立.

假设当 $F_n \mid F_{(k-1)n}$ , 则当 $m = kn$

$$F_{kn} = F_{(k-1)n-1+n+1} = F_nF_{(k-1)n-1} + F_{(k-1)n}F_{n+1}$$

则 $F_n \mid F_{kn}$ . 由归纳法, 原命题成立.

**补充2**　　当 $8 \mid n$ 时, $7 \mid F_n$ . 容易验证当 $1 \leq n \leq 7$ , $7 \nmid F_n$ 且 $7 \mid F_8$ . 由上一问, 已知 $7 \mid F_{8k}$ , 然后我们来证明当 $1 \leq n \leq 7$ , $F_{n+8k} \mod 7 = F_nF_7^k \mod 7 \neq 0$ .

当 $k = 1$

$$F_{n+8} = F_{n-1}F_8 + F_nF_7$$

这等价于 $F_{n+8} \mod 7 = F_nF_7 \mod 7$ , 那么由归纳法易得

$$F_{n+8k} \mod 7 = F_nF_7^k \mod 7 = (F_n \mod 7)(F_7 \mod 7)^k \mod 7 \neq 0$$

最后一个等号是由于7是素数. 那么我们就有 $\forall k \in \mathbb{N}$ , $7 \mid F_{8k}$ , $7 \nmid F_{8k+n}$ , $1 \leq n \leq 7$

**补充3** 由上面几个题已知 $F_d$ 是 $F_m$ , $F_n$ 的公约数, 我们来说明它的最大性.

**补充4** 特征方程为

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

特征根为-2, 1, 1, 存在重根. 首先 $h_n = (-2)^n$ , $h_n = 1$ 是递推关系的两个解, 容易证明 $h_n = n$ 也是递推关系的解. 设一般解为

$$h_n = c_1(-2)^n + c_2 n + c_3$$

由 $h_0 = 1$ , $h_1 = 0, h_2 = 0$ , 解得 $c_1 = \frac{1}{9}$ , $c_2 = -\frac{2}{3}$ , $c_3 = \frac{8}{9}$ , 即一般解为

$$h_n = \frac{1}{9}\Big((-2)^n - 6n + 8\Big)$$

**补充1**
(a) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n = \frac{1}{1-cx}$
(b) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

**补充2** $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$ , 先考虑部分和 $\sum_{n=0}^{k} n^3 x^n$ .

已知

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}, \quad \sum_{n=0}^{k} n x^n = \frac{(kx-k-1)x^{k+1}+x}{(x-1)^2}$$

, 由此求出

$$(x-1)\sum_{n=0}^{k} n^2 x^n = k^2 x^{k+1} - \sum_{n=2}^{k}(2n-1)x^n - x = k^2 x^{k+1} - 2\sum_{n=0}^{k} n x^n + \sum_{n=0}^{k} x^n$$

可得

$$\sum_{n=0}^{k} n^2 x^n = \frac{x(x+1) - x^{k+1}(k^2x^2 - (2k^2+2k-1)x + (k+1)^2)}{(1-x)^3}$$

. 类似的

$$(x-1)\sum_{n=0}^{k} n^3 x^n = k^3 x^{k+1} - \sum_{n=1}^{k}(3n^2-3n+1)x^n - x = k^3 x^{k+1} - 3\sum_{n=0}^{k} n^2 x^n + 3\sum_{n=0}^{k} n x^n - \sum_{n=0}^{k} x^n$$

可得

$$\sum_{n=0}^{k} n^3 x^n = \frac{x((k^3(x-1)^3 - 3k^2(x-1)^2 + 3k(x^2-1) - x(x+4) - 1)x^k + x^2 + 4x + 1)}{(x-1)^4}$$

当 $x < 1$ 则有

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2+4x+1)}{(x-1)^4}$$

**补充3**　该问题对应的生成函数为

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)^3=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{3x}=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+1)2^{n-1}\frac{x^n}{n!}$$

故排列数为 $(2^n+1)2^{n-1}$ .

**补充4**　把问题分解为4步

- 从9个不同的数中选$n$个, 形成$n$排列
- 从$n$个数字之间的$n-1$个空隙中选$k$个($k\leq n-1$), 用于插入运算符
- 从4个不同的算符中选$k$个, 形成$k$排列, 填入上面的空格
- 所得结果对$k$从1到4(或到$n-1$)求和

故$n$排列形成的表达式数目为

$$\sum_{k=1}^{\max\{4,n-1\}}\binom{9}{n}n!\binom{n-1}{k}\binom{4}{k}k!$$

**补充5**　$x^2-3x+1=0$ 的根为 $x=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ 或 $x=1/2(3+Sqrt[5])$ , 记作 $a,b$ . 设 $p,q$ 满足

$$\frac{p}{a-x}+\frac{q}{b-x}=\frac{1-x}{1-3x+x^2}$$

解得 $p=\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})$ , $q=\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})$ , 则

$$g(x)=\frac{p}{a}\frac{1}{1-x/a}+\frac{q}{b}\frac{1}{1-x/b}=\frac{p}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(x/a)^n+\frac{q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(x/b)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p}{a^{n+1}}+\frac{q}{b^{n+1}}\right)x^n$$

故

$$a_n=\frac{p}{a^{n+1}}+\frac{q}{b^{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

它还可以进一步化为和斐波那契相关的形式

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k$$