偏微分方程第一次作业

林陈冉

2017年3月3日

1 Weierstrass函数的例子是

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

其中 $0 < a < 1$, $b > 0$ 且为奇数, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

首先说明连续性. 设 $f_n(x) = a^n \cos(b^n x)$, 对 $\forall x$, $f_n(x) < a^n$, 而 $\sum_0^\infty a^n < \infty$, 则 $f(x) < \infty$, 可知这个级数一致收敛, 又由每一个 f_n 连续可知 f 连续.

再说明不可导. (其实说明不来) 若 $f(x)$ 可导,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -(ab)^n \sin(b^n x)$$

但 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, 好像这个级数不收敛?

2 Holder不等式等号成立的条件:

- $u(x) = 0$ 或 $v(x) = 0$;
- $\exists k > 0$, $|u(x)|^p = k|v(x)|^q$ 几乎处处成立.

第一个情况显然成立, 考虑第二种情况. 从定理证明可知, 只要考虑什么时候

$$s_1 t_1 = \int_0^{t_1} t^{p-1} dt + \int_0^{s_1} s^{q-1} ds$$

容易知道等号当且仅当 $t_1^p = s_1^q$ 时成立.

若该式几乎处处成立, 则有

$$\int_\Omega s_1(x) t_1(x) dx = \frac{\int_\Omega t_1(x)^p dx}{p} + \frac{\int_\Omega s_1(x)^q dx}{q} = 1$$

若否则这个积分严格小于1. 又由

$$t_1(x) = \frac{|u(x)|}{(\int_\Omega |u(x)^p| dx)^{\frac{1}{p}}}, \quad s_1(x) = \frac{|v(x)|}{(\int_\Omega |v(x)^q| dx)^{\frac{1}{q}}}$$

可得

$$|u(x)|^p = \frac{\int_\Omega |u(x)^p|dx}{\int_\Omega |v(x)^q|dx}|v(x)|^q$$

上式等价于 $t_1^p = s_1^q$, 是Holder不等式等号成立的情况2.

3 Friedrichs不等式在无界区域下不成立的例子

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad f^h(x) = \int_\Omega w_h(x-y)f(y)dy$$

其中 $w_h(x)$ 是半径为 h 的磨光核, $\Omega = \{x \ge -1\}$.

显然, Friedrichs不等式左边的积分 $\int_\Omega |f^h|^2 dx$ 发散, 而右边的积分 $\int_\Omega |\frac{\partial f^h}{\partial x}|^2 dx$ 收敛, 不可能存在常数使不等式成立.