泛函分析第16周作业

林陈冉

2016年12月15日

5.26

(1) $\forall v \in H$, $v=\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,v)$, 由 $v\in H$, 可知 $|v|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,v)|^2<\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}|(e_n,v)|^2=0$, 自然的, $\lim_{n\to\infty}(e_n,v)=0$, 故 $(e_n,v)\rightharpoonup 0$.

(2) a_n 有界, 设 $|a_n|<M$, 那么有

$$|u_n|^2=|(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i)|=\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\frac{1}{n}M^2$$

则 $\lim_{n\to\infty}|u_n|^2<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}M^2=0$, 故 $|u_n|\to 0$.

(3)

5.28

(1) H 是可分的, $V\subset H$, 则显然 V 也是可分的. 记 $\{v_n\}$ 是 V 的一个可数稠密子集, 记 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 张成的空间为 V_n , 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$ 在 V 中是稠密的, 由 V在 H 中稠密, 可知 $\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$ 在 H 中也是稠密的.

对于 V_1 , 可以任意找一个单位向量 e_1 ; 对于 V_2 , 当 $V_1\neq V_2$, 因为 V_2 是有限维的, 可以找另一个单位向量 e_2 , 使 $\{e_1,e_2\}$ 是 V_2 的一组正交基; 当 $V_1=V_2$, 则直接考虑 V_3 .

对所有的 V_n 重复这样的操作, 可以得到 H 的一组正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$, 显然它是属于 V 的.

(2) 由 H 是可分的, 则存在 H 的一个可数稠密子集 $\{v_k\}$, 那么 $\{v_k\}\bigcup\{e_n\}$ 也是 H 的一个可数稠密子集. 记 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 张成的空间为 V_0 , $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}\bigcup\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 张成的空间为 $V_k(k>0)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$ 在 H 中是稠密的 .

对于 V_1 , 当 $V_1\neq V_0$, 令 $u_1=\frac{P_{V_0}v_1}{|P_{V_0}v_1|}$, 因为 V_0 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{e_n\}$ 张成的, 可知它是 H 的闭凸子空间, 则有 $\forall x\in V_0,(x,u_1)=0$, 故 $(e_n,u_i)=0$. 且显然 $|u_1|=1$, 故 $\{u_1,e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是 V_1 的一组正交基. 当 $V_1=V_0$, 则直接考虑 V_2 与 V_1 , 以完全相同的办法可以找到 u_2 构成 V_2 的一组正交基.

对所有的 V_n 重复这样的操作, 可以到的 H 的一组正交基 $\{u_1,u_2,\cdots,u_k,\cdots\}\bigcup\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$, 显然它是包含 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 的.

6.1

(1) 充分性: 当 $\lambda_i\to 0$, 则对 $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$, s.t. $\forall n>N$, $\lambda_i<\epsilon$. 设$T_n(x)=(\lambda_1x_1,\cdots,\lambda_nx_n,0,0,\cdots)$, 当 $n>N$,

$$\|T-T_n\|=\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i^2x_i^2\le\epsilon^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i^2x_i^2\le\epsilon^2\|x\|\le\epsilon$$

即 $T_n \to T$, 显然 T_n 是线性的, 则 T 是紧算子.

(2) 必要性: 当 T 是紧算子, 假设 $\lambda_i \to 0$ 不成立, 则当 n 充分大, $\exists a > 0$, s.t. $|\lambda_n| > a$. 取序列 $x_n = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{n个1}, 0, 0, \cdots)$, 则当 i, j 充分大, $\|Tx_i - Tx_j\| > a^2$, 则 Tx_n 不可能存在收敛子列, 于 T 是紧算子矛盾, 故必然有 $\lambda_i \to 0$.

6.2

(1) 设 Tu_n 是 $T(B_E)$ 中的一个收敛列, $Tu_n \to Tu$, $u_n \subset B_E$, 要证 $T(B_E)$ 是闭的, 则要证 $u \subset B_E$. E 是自反的, 则 B_E 是弱紧的, $\exists u^* \subset B_E$, $u_n \rightharpoonup u^*$. $\forall v \subset F^*$, 有

$$\langle u_n, T^* v\rangle \to \langle u^*, T^* v\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle Tu_n, v\rangle \to \langle Tu^*, v\rangle$$

则 $Tu_n \rightharpoonup Tu^*$, 但同时由 Tu_n 的强收敛性可知 $Tu_n \rightharpoonup Tu$, 那么 $u = u^* \subset B_E$, 故 $T(B_E)$ 是闭的

(2) T 是紧算子, 则 $\overline{T(B_E)}$ 是紧的, 而 $T(B_E)$ 是闭的, 则 $T(B_E) = \overline{T(B_E)}$ 是紧的

(3) 先说明 T 是紧算子. 设 $G_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ 是把连续函数变成分段线性函数的泛函, 即

$$G_n u(t) = [u(\frac{i}{n}) - u(\frac{i-1}{n})] \cdot n(t - \frac{i-1}{n}) + u(\frac{i-1}{n}), \quad t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], \quad i = \{1, \cdots, n\}$$

再定义 $T_n = T \circ G_n$, 由定积分的性质, 显然 T 是线性的, 而对于 G_n

$$\begin{aligned} G_n(u_1+u_2)(t) =& [u_1(\frac{i}{n}) + u_2(\frac{i}{n}) - u_1(\frac{i-1}{n}) - u_2(\frac{i-1}{n})] \cdot n(t - \frac{i-1}{n}) + u_1(\frac{i-1}{n}) + u_2(\frac{i-1}{n}) \\ =& \left\{ [u_1(\frac{i}{n}) - u_1(\frac{i-1}{n})] \cdot n(t - \frac{i-1}{n}) + u_1(\frac{i-1}{n}) \right\} + \left\{ [u_2(\frac{i}{n}) - u_2(\frac{i-1}{n})] \cdot n(t - \frac{i-1}{n}) + u_2(\frac{i-1}{n}) \right\} \\ =& G_n u_1(t) + G_n u_2(t), \quad \forall t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], \quad i = \{1, \cdots, n\} \end{aligned} \tag{1}$$

则 G_n 是线性的, 那么 $T_n = T \circ G_n$ 也是线性的, 易证明 $T_n \to T$, 则 T 是紧算子.

再说明 $T(B_E)$ 不是闭的. 设 $u_n \in C([0,1])$

$$u_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ n(t - \frac{1}{2}), & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \text{if } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

已知 $Tu_n \to f$, 其中

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2}, & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

f 在 $1/2$ 处不可导, 故 $f \notin T(B_E)$.

6.8

(1) 把 $T : E \to F$ 看作映射 $T : E \to R(T)$, 则 T 是满射, 由开映射定理, $\exists \alpha > 0$, s.t. $\alpha B_F \subset T(B_E)$. 因为 T 是紧算子, 则 $\overline{T(B_E)}$ 是 F 中紧集, 而 $R(T)$ 是F 中闭集, 则则 $\overline{T(B_E)}$ 是 $R(T)$ 中紧集. αB_F 是 $\overline{T(B_E)}$ 的闭子集, 因此是 $R(T)$ 中紧集, 那么 B_F 是 $R(T)$ 中紧集, 故 $R(T)$ 是有限维的.

(2) 满射 $T : E \to R(T)$ 诱导了商映射 $\tilde{T} : E/N(T) \to R(T)$, 商映射 $\tilde{T}$ 是一个单射, 因而是个双射 . 这说明了 $E/N(T)$ 与 $R(T)$ 是等势的.

当 $\dim N(T) < \infty$, 假设 $\dim E = \infty$, 则 $\dim E/N(T) = \infty$, 这与 $R(T)$ 是有限维的矛盾, 故 $\dim E < \infty$.