



FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Strong Induction

Meganingrum Arista Jiwanggi, M.Kom, M.Comp.Sci.





FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER



Prinsip Strong Induction



Prinsip Strong Induction

Untuk membuktikan bahwa $P(n)$ bernilai BENAR untuk semua n bilangan bulat positif, dimana $P(n)$ adalah fungsi proposisi, maka lakukan dua tahapan berikut ini:

- **BASIS STEP:** Buktikan bahwa $P(1)$ bernilai BENAR
- **INDUCTIVE STEP:** Buktikan bahwa kondisi $[P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)] \rightarrow P(k + 1)$ bernilai BENAR untuk semua bilangan bulat positif k

Semua persoalan yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika biasa pasti bisa dibuktikan juga dengan strong induction



Prinsip Strong Induction

- Dengan menggunakan dua langkah induksi (**BASIS STEP** dan **INDUCTIVE STEP**) pada strong induction cukup membuktikan bahwa pernyataan $\forall x P(x)$ bernilai BENAR untuk $x \in \mathbb{Z}^+$
- Pertama, kita menunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar
- Kemudian, kita tahu bahwa $P(2)$ bernilai benar, karena
$$P(1) \rightarrow P(2)$$
- Kemudian, kita tahu bahwa $P(3)$ bernilai benar, karena
$$[P(1) \wedge P(2)] \rightarrow P(3)$$
- Kemudian, kita tahu bahwa $P(4)$ bernilai benar, karena
$$[P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)] \rightarrow P(4)$$
-
- dan seterusnya sehingga kita simpulkan bahwa $P(n)$ bernilai benar untuk $n \geq 1$



Tangga Tidak Berujung dengan Strong Induction

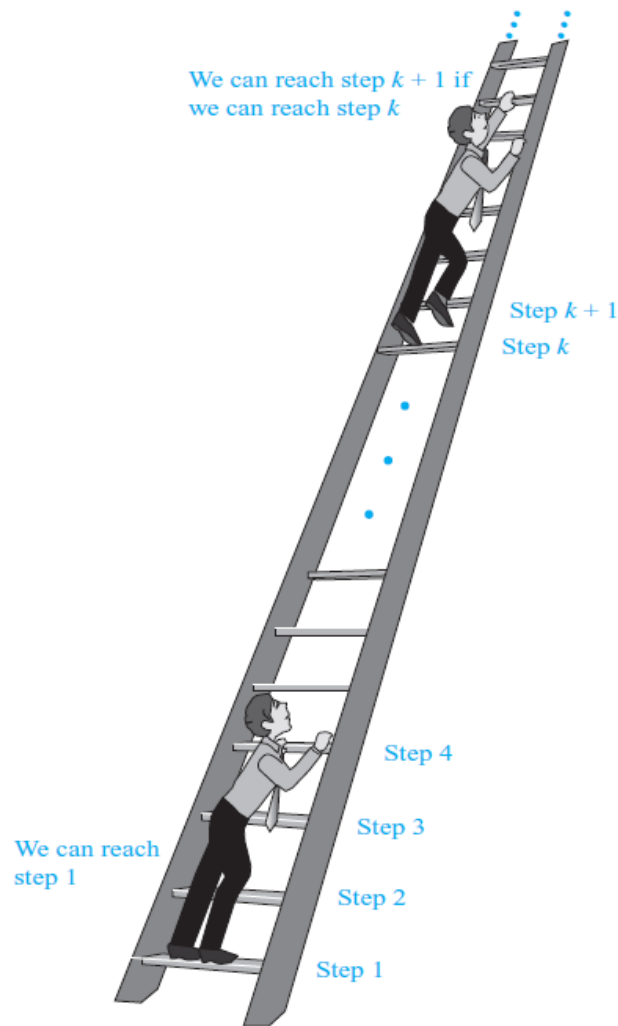


FIGURE 1 Climbing an Infinite Ladder.

Dengan prinsip strong induction, kita perlu menunjukkan bahwa

- (1) Diska dapat menaiki anak tangga pertama; dan
- (2) Jika Diska dapat menaiki SEMUA anak tangga dari yang pertama hingga anak tangga ke- k , maka Diska dapat menaiki anak tangga ke- $k+1$

Kemudian kita bisa menyatakan bahwa Diska dapat menaiki setiap anak tangga pada tangga tidak berujung tersebut.





UNIVERSITAS
INDONESIA
United People Better

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Contoh Soal



Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Untuk menyelesaikan soal ini, apakah cukup memakai induksi matematika biasa?

Basis Step: Membuktikan pernyataan untuk $n = 2$

Inductive Step:

Jika $n = k$ dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, apakah $n = k + 1$ pasti bisa juga?



Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

$P(n)$: n dapat dinyatakan dalam perkalian bilangan – bilangan prima

- **Basis Step:** Menunjukkan bahwa $P(2)$ benar

$P(2)$: 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian suatu bilangan prima. Pernyataan ini benar karena 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 bilangan prima yaitu dirinya sendiri

$$2 = 2$$

TERBUKTI $P(2)$ benar



Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

$P(n)$: n dapat dinyatakan dalam perkalian bilangan – bilangan prima

- **Basis Step:** Menunjukkan bahwa $P(2)$ benar

$P(2)$: 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian suatu bilangan prima. Pernyataan ini benar karena 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 bilangan prima yaitu dirinya sendiri

$$2 = 2$$

TERBUKTI $P(2)$ benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: $P(j)$ benar untuk semua $2 \leq j \leq k$ dimana j dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 atau lebih bilangan prima.

Perhatikan bahwa kita ingin menunjukkan bahwa $P(k+1)$ berlaku apabila diasumsikan $P(j)$ benar seperti pada asumsi Inductive Step



Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

Inductive Step:

Asumsikan: $P(j)$ benar untuk semua $2 \leq j \leq k$ dimana j dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 atau lebih bilangan prima.

Ada dua kasus yaitu jika $k+1$ bilangan prima atau $k+1$ bilangan komposit

- Jika $k+1$ adalah bilangan prima, maka **$P(k+1)$ berlaku** dimana $k+1$ merupakan hasil perkalian 1 bilangan prima yaitu dirinya sendiri
- Jika $k+1$ adalah bilangan komposit, maka $k+1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dua bilangan a dan b dimana $2 \leq a \leq b < k + 1$. Perhatikan bahwa a dan b minimal bernilai 2 dan nilainya tidak lebih dari k .
- Dari asumsi di Inductive Step, kita tau bahwa bilangan-bilangan pada rentang tersebut dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 atau lebih bilangan prima. Oleh karena $k+1$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dua bilangan a dan b dimana a dan b masuk pada asumsi di Inductive Step, maka kita dapat simpulkan **bahwa $k+1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima**



Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

Kesimpulan:

Dari pembuktian di Basis Step dan Inductive Step, untuk n bilangan bulat yang lebih besar dari 1, terbukti bahwa n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan-bilangan prima.



Soal 2

- Buktikan bahwa setiap uang sebesar Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibuat dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja.



[This Photo](#) by Unknown Author is licensed under [CC BY-SA](#)



[This Photo](#) by Unknown Author is licensed under [CC BY-SA](#)



Apa yang sudah dipelajari?

- Prinsip Strong Induction
- Contoh Soal Strong Induction dan Solusi

Sampai jumpa di Pembahasan Contoh Soal Strong Induction Berikutnya

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)
- Slide Matematika Diskret 1 : Induksi Matematika oleh Bapak Alfian F. Wicaksono (2013)