Bab 6
Teknik Pengintegralan

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Referensi, Kredit, dan Kontak

Referensi Utama

Varberg, Dale; Edwin J. Purcell; Steven E. Rigdon. Calculus, 9th Edition, Prentice Hall, 2006.

Kredit

Slide ini menggunakan tema Blue Connections Cordelia Presentation Template (https://www.slidescarnival.com/cordelia-free-presentation-template/216).

Kontak

Segala bentuk pertanyaan, kritik, dan saran mengenai slide ini dapat disampaikan via email ke okkyibrohim@cs.ui.ac.id.

Outline

- Substitusi sederhana
- Pengintegralan bagian demi bagian (integral parsial)
- Integral trigonometri
- Substitusi trigonometri untuk fungsi irasional
- Integral pecahan parsial
- Strategi untuk integrasi

Sub 6.1
Substitusi Sederhana

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Substitusi dalam Integral Tak Tentu

Teorema A

Misalkan g adalah fungsi yang terdiferensiasikan dan misalkan F adalah anti-turunan f. Maka, jika $u = g(x)$,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Contoh 1 Substitusi dalam Integral Tak Tentu

Soal:

Carilah $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}} dx$

Solusi:

Ingatlah bentuk $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$. Misalkan $u = 3x$, sehingga $du = 3\,dx$. Maka,

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}} du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C = \sin^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Contoh 2 Substitusi dalam Integral Tak Tentu

Soal:

Carilah $\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\, dt$

Solusi:

Substitusikan $u = \tan t$

$$\int \frac{a^{\tan t}}{\cos^2 t}\, dt = \int a^{\tan t}\ (\sec^2 t\, dt) = \frac{a^{\tan t}}{\ln a} + C$$

Mengapa Hasil Integral Tak Tentu Bisa Terlihat Berbeda?

Integral tak tentu mungkin memiliki jawaban-jawaban yang kelihatannya berbeda. Namun demikian, hasil integral tak tentu tersebut pada dasarnya mempunyai hasil yang sama.

Contoh:

Misal $\int \sin x \cos x \, dx$ akan diselesaikan dengan subtitusi sederhana, namun dengan permisalan subtitusi yang berbeda.

Jika kita misalkan $u = \cos x$ sehingga diperoleh $du = -\sin x \, dx$, maka diperoleh

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\int \cos x \, (-\sin x) dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

Sebaliknya, jika kita misalkan $u = \sin x$ sehingga diperoleh $du = \cos x \, dx$, maka diperoleh

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, (\cos x) dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + C = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x) + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \left(\frac{1}{2} + C\right)$$

Sub 6.2
Pengintegralan Parsial

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Pengintegralan Parsial

Integrasi Parsial

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Contoh 1 Pengintegralan Parsial

Soal:

Carilah $\int x \cos x \; dx$

Solusi:

Kita ingin menuliskan $x \cos x$ sebagai $u \, dv$.Salah satu kemungkinannya adalah dengan memisalkan $u = x$ dan $dv = \cos x \; dx$. Maka $du = dx$ dan $v = \int \cos x \; dx = \sin x$ (kita dapat menghilangkan konstanta integrasi pada tahap ini). Berikut adalah ringkasan substitusi ganda ini dalam bentuk yang mudah

$$u = x \;\rightarrow \mathrm{du} = \mathrm{dx}$$

$$dv = \cos x \; dx \;\rightarrow v = \sin x$$

Rumus integral parsial memberikan

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du}$$
$$= x \sin x + \cos x + C$$

Contoh 1 Pengintegralan Parsial (lanjutan)

Jika

$$u = \cos x \ \rightarrow du = -\sin x \, dx$$

$$dv = x \, dx \ \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Kali ini rumus integrase parsial memberikan

$$\int \underbrace{(\cos x)}_{u} \underbrace{x\,dx}_{dv} = \underbrace{(\cos x)}_{u} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \underbrace{(-\sin x\,dx)}_{du}$$

Permisalan ini juga benar, akan tetapi tidak membantu. Integral baru di ruas kanan menjadi lebih rumit daripada yang semula. Oleh karena itu, kita harus melakukan pemilihan yang tepat untuk u dan dv.

Contoh 2 Pengintegralan Parsial

Soal:

Carilah $\int x^2 \sin x \ dx$

Solusi:

Misalkan

$$u = x^2 \ \rightarrow du = 2x\, dx$$
$$dv = \sin x \ dx \ \rightarrow v = -\cos x$$

Maka

$$\int x^2 \sin x \ dx = -\mathrm{x}^2 \cos \mathrm{x} + 2 \int x \ \cos x \ dx$$

Kita telah memperoleh kemajuan (pangkat pada x berkurang dari 2 menjadi 1), dari sini kita harus melakukan intgrasi parsial sekali lagi pada integral di sebelah kanan. Sebennarnya, kita telah mengerjakan integral ini dalam Contoh 1, jadi kita akan menggunnakan hasilnya di sini.

$$\int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K$$

Contoh 3 Pengintegralan Parsial

Soal:

Carilah $\int e^x \sin x \; dx$

Solusi:

Misalkan

$$u = e^x \;\rightarrow du = e^x \, dx$$
$$dv = \sin x \; dx \;\rightarrow v = -\cos x$$

Maka

$$\int e^x \sin x \; dx = -e^x \cos x + \int e^x \; \cos x \; dx$$

Yang tampaknya tidak memperbaiki keadaan, tetapi tidak lebih buruk. Jadi, jangan menyerah dan cobalah integras parsial sekali lagi.

Pada integral di kanan, misalkan

$$u = e^x \;\rightarrow du = e^x\,dx$$
$$dv = \cos x\;dx \;\rightarrow v = \sin x$$

Maka

$$\int e^x \cos x\;dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\;dx$$

ketika kita substitusikan ini ke dalam hasil pertama, kita peroleh

$$\int e^x \sin x\;dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\;dx$$

Dengan memindahkan suku yang terakhir ke ruas kiri dan menggabungkan suku-sukunya, kita peroleh

$$2\int e^x \sin x\;dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

Sehingga

$$\int e^x \sin x\;dx = \frac{1}{2}e^x[\sin x - \cos x] + K$$

Rumus Reduksi

Suatu rumus yang berbentuk

$$\int f^n(x)g(x)\,dx = h(x) + \int f^k(x)g(x)\,dx$$

di mana $k < n$, dinamakan **rumus reduksi** (pangkat f direduksi/berkurang). Rumus-rumus seperti ini sering kali diperoleh dengan menggunakan integral parsial.

Contoh 1 Rumus Reduksi

Soal:

Carilah $\int \sin^n x\,dx$

Solusi:
Misalkan

$$u = \sin^{n-1} x \;\rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \; dx$$
$$dv = \sin x \; dx \;\rightarrow v = -\cos x$$

dan

$$\int \sin^n x \; dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \; dx$$

Jika kita mengganti $\cos^2 x$ dengan $1 - \sin^2 x$ pada integral yang terakhir, kita peroleh

$$\int \sin^n x \; dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x \; dx$$

Setelah menggabungkan integral pertama dan integral yang terakhir dan menyelesaikan untuk $\int \sin^{\mathrm{n}} x \; dx$, kita memperoleh rumus reduksi (valid untuk $n \geq 2$)

$$\int \sin^n x \; dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

Latihan

Selesaikan integral tak tentu berikut

1. $\int \sec(1-z)\tan(1-z)\,dz$
2. $\int (15t^{-2}-5t)\cos(6t^{-1}+t^2)\,dt$
3. $\int (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}dx$
4. $\int t^7\sin(2t^4)\,dt$
5. $\int \sin^6(x)\;dx$ (*hint*: gunakan rumus reduksi yang sudah diperoleh sebelumnya)

Sub 6.3

Integral Trigonometri

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Bentuk Trigonometri

1. $\int \sin^n x \, dx$ dan $\int \cos^n x \, dx$
2. $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$
3. $\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \, sin \, nx \, dx, \int \cos mx \cos nx \, dx$
4. $\int \tan^n x \, dx$ dan $\int \cot^n x \, dx$
5. $\int \tan^m x \, sec^n \, x \, dx$ dan $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

Contoh 1 Tipe 1: $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$

Soal:

(n ganjil) Carilah $\int \sin^5 x\, dx$

Solusi:

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \sin x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\, dx$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-\sin x)\, dx$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

Contoh 2 Tipe 1: $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$

Soal:

(n genap) Carilah $\int \sin^2 x\, dx$

Solusi:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int (\cos 2x)\,(2dx)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Contoh 3 Tipe 1: $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$

Soal:

(n genap) Carilah $\int \cos^4 x\, dx$

Solusi:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2)\, dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) dx$$

$$= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)\,(2\, dx) + \frac{1}{32}\int (\cos 4x)(4\, dx)$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Contoh 1 Tipe 2: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Soal:

(m atau n ganjil) Carilah $\int \sin^3 x \ \cos^{-4} x \, dx$

Solusi:

$$\int \sin^3 x \ \cos^{-4} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)(\cos^{-4} x)(\sin x) \, dx$$

$$= -\int (\cos^{-4} x \ - \cos^{-2} x)\,(-\sin x \, dx)$$

$$= -\left[\frac{\cos^{-3} x}{-3} - \frac{\cos^{-1} x}{-1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C$$

Contoh 2 Tipe 2: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Soal:

(m dan n genap) Carilah $\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx$

Solusi:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \ \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \ dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left[1+\cos 2x \ - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - (1-\sin^2 2x)\cos 2x\right] dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x \ + \sin^2 2x \cos 2x\right] dx \\
&= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x \ (4 \, dx) + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x \ (2\cos 2x \ dx)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right] + C
\end{aligned}
$$

Tipe 3: $\int \sin mx \cos nx \; dx$, $\int \sin mx \sin nx \; dx$, $\int \cos mx \cos nx \; dx$

1. $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$
2. $\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$
3. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

Contoh 1 Tipe 3: $\int \sin mx \cos nx \; dx$

Soal:

Carilah $\int \sin 2x \cos 3x \; dx$

Solusi:

$$\int \sin 2x \cos 3x \; dx = \frac{1}{2}\int [\sin 5x + \sin(-x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{10}\int \sin 5x \; (5\, dx) - \frac{1}{2}\int \sin x \; dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

Contoh 1 Tipe 4: $\int \tan^n x\, dx$, $\int \cot^n x\, dx$

Soal:

Carilah $\int \cot^4 x \; dx$

Solusi:

$$\int \cot^4 x \; dx = \int \cot^2 x \,(\csc^2 x - 1)\; dx$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x \; dx - \int \cot^2 x \; dx$$

$$= -\int \cot^2 x \,(-\csc^2 x \; dx) - \int (\csc^2 x \; - 1) \; dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$

Contoh 2 Tipe 4: $\int \tan^n x\, dx$, $\int \cot^n x\, dx$

Soal:

Carilah $\int \tan^5 x\ dx$

Solusi:

$$\int \tan^5 x\ dx = \int \tan^3 x\,(\sec^2 x - 1)\ dx$$

$$= \int \tan^3 x\ \sec^2 x\ dx - \int \tan^3 x\ \ dx$$

$$= \int \tan^3 x\ \sec^2 x\ dx - \int \tan x\ (\sec^2 x - 1)\ dx$$

$$= \int \tan^3 x\ \sec^2 x\ dx - \int \tan x\ \sec^2 x\ dx - \int \tan x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x\,| + C$$

Contoh 1 Tipe 5: $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$, $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

Soal:

(n genap, m sembarang bilangan) Carilah $\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \ \sec^4 x \, dx$

Solusi:

$$\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \ \sec^4 x \, dx = \int \left(\tan^{-\frac{3}{2}} x\right)(1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \left(\tan^{-\frac{3}{2}} x\right) \sec^2 x \, dx + \int \left(\tan^{\frac{1}{2}} x\right) \sec^2 x \, dx +$$

$$= -2 \tan^{-\frac{1}{2}} x + \frac{2}{3} tan^{\frac{3}{2}} x + C$$

Contoh 2 Tipe 5: $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$, $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$

Soal:

(m ganjil, n sembarang bilangan) Carilah $\int \tan^3 x \ \sec^{-\frac{1}{2}} x\, dx$

Solusi:

$$\int \tan^3 x \ \sec^{-\frac{1}{2}} x\, dx = \int (\tan^2 x)\left(\sec^{-\frac{3}{2}} x\right)(\sec x \ \tan x)\, dx$$

$$= \int (sec^2 x \ - 1)\left(\sec^{-\frac{3}{2}} x\right)(\sec x \ \tan x)\, dx$$

$$= \int \left(\sec^{\frac{1}{2}} x\right)(\sec x \ \tan x)\, dx - \int \left(\sec^{-\frac{3}{2}} x\right)(\sec x \ \tan x)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\sec^{\frac{3}{2}} x + 2\sec^{-\frac{1}{2}} x + C$$

Latihan

Selesaikan integral tak tentu berikut

1. $\int \sin^4(6x)\, dx$
2. $\int \sin^4\left(\frac{w}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) dw$
3. $\int \sin(3t)\sin(t)\, dt$
4. $\int \cot^5(2t)\, dt$
5. $\int \tan^{-\frac{3}{2}} x \sec^4 x\, dx$

Sub 6.4

Substitusi Trigonometri untuk Fungsi Irasional

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Integran yang Melibatkan $\sqrt[n]{ax+b}$

Jika $\sqrt[n]{ax+b}$ muncul dalam suatu integral, substitusi $u = \sqrt[n]{ax+b}$ akan menghilangkan akar.

Contoh 1 Integran yang Melibatkan $\sqrt[n]{ax+b}$

Soal:

Carilah $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

Solusi:

Misalkan $u = \sqrt{x}$, sehingga $u^2 = x$ dan $2u\,du = dx$. Maka

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u}du = 2\int \frac{1}{u-1}\,du = 2\ln|u-1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C$$

Contoh 2 Integran yang Melibatkan $\sqrt[n]{ax+b}$

Soal:

Carilah $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx$

Solusi:

Misalkan $u = \sqrt[3]{x-4}$, sehingga $u^3 = x - 4 \Longrightarrow x = u^3 + 4$ dan $3u^2\,du = dx$. Maka

$$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \int (u^3+4)u \cdot (3u^2\,du) = 3\int (u^6 + 4u^3)\ du = 3\left[\frac{u^7}{7} + u^4\right] + C$$

$$= \frac{3}{7}(x-4)^{\frac{7}{3}} + 3(x-4)^{\frac{4}{3}} + C$$

Contoh 3 Integran yang Melibatkan $\sqrt[n]{ax+b}$

Soal:

Carilah $\int x\sqrt[5]{x^2+2x+1}\,dx$

Solusi:

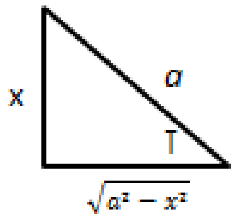
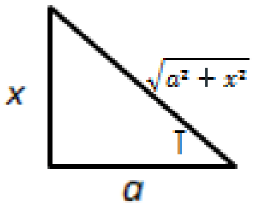
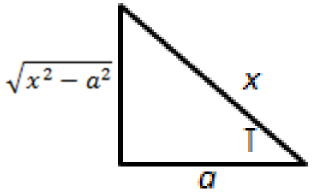
Perhatikan bahwa $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Misalkan $u=\sqrt[5]{x+1}$, sehingga $u^5=x+1 \Longrightarrow x=u^5-1$ dan $5u^4\,du=dx$. Maka

$$\int x(x+1)^{2/5}\,dx = \int (u^5-1)u^2\cdot 5u^4\,du$$
$$= 5\int (u^{11}-u^6)\,du = \tfrac{5}{12}u^{12} - \tfrac{5}{7}u^7 + C$$
$$= \tfrac{5}{12}(x+1)^{12/5} - \tfrac{5}{7}(x+1)^{7/5} + C$$

Integran yang Melibatkan $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$

Untuk merasionalkan tiga ekspresi ini, kita boleh mengasumsikan bahwa a positif dan membuat substitusi trigonometri berikut

Akar	Substitusi	Pembatasan pada t
1. $\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$\boldsymbol{0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2}}$

BENTUK	PERMISALAN		SEGITIGA TRIGONOMETRI
	x	dx	
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta$	$dx = a\cos\theta\, d\theta$	
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$	$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$	

Contoh 1 Integran yang Melibatkan $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

Soal:

Carilah $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Solusi:

Kita gunakan substitusi $x = a \sin t$, dengan $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Maka $dx = a \cos t \; dt$ dan $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Jadi,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos t \cdot a \cos t \; dt = a^2 \int \cos^2 t \; dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) \; dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \; \cos t) + C$$

Sekarang, $x = a \sin t$ ekuivalen dengan $\frac{x}{a} = \sin t$ dan karena interval t kita batasi sehingga sinus memiliki invers,

$$t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Dengan menggunakan segitiga siku-siku, kita melihat bahwa

$$\cos t = \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Jadi,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\mathrm{x}}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \mathrm{C}$$

Contoh 2 Integran yang Melibatkan $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$

Soal:

Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

Solusi:

Misalkan $x = 3\tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Maka $dx = 3\sec^2 t \; dt$ dan $\sqrt{9+x^2} = 3\sec t$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3\sec^2 t}{3\sec t}\, dt = \int \sec t \; dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

Langkah yang terakhir, yakni itegraasi $\sec t$. Karena $\tan t = \frac{x}{3}$, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa $\sec t = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$.

Jadi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{3}\right| + C = \ln\left|\sqrt{9+x^2}+x\right| - \ln 3 + C = \ln\left|\sqrt{9+x^2}+x\right| + \mathrm{K}$$

Contoh 3 Integran yang Melibatkan $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Soal:

Carilah $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$

Solusi:

Pehatikan bahwa $x^2 + 2x + 26 = x^2 + 2x + 1 + 25 = (x + 1)^2 + 25$. Misalkan $u = x + 1$, maka $du = dx$, sehingga diperoleh:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 25}}$$

Kemudian, misalkan $u = 5 \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Maka $du = 5 \sec^2 t\, dt$ dan $\sqrt{u^2 + 25} = 5 \sec t$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 25}} &= \int \frac{5 \sec^2 t\, dt}{5 \sec t} = \int \sec t\, dt \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + 25}}{5} + \frac{u}{5}\right| + C \\
&= \ln\left|\sqrt{u^2 + 25} + u\right| - \ln 5 + C \\
&= \ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 26} + x + 1\right| + K
\end{aligned}$$

Latihan

Selesaikan integral tak tentu berikut

1. $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}\, dx$
2. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{9-x^2}}\, dx$
3. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$
4. $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$
7. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$

Sub 6.5

Integral Pecahan Parsial

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Dekomposisi Pecahan Parsial

Menambahkan pecahan merupakan latihan aljabar baku, yaitu mencari penyebut bersama dan kemudian tambahkan. Sebagai contoh untuk kasus linier:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x^2-1}$$

Yang menarik adalah proses kebalikannya, yang mana pada contoh diatas bagaimana kita mendekomposisi $\frac{5x-1}{x^2-1}$ menjadi $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}$. Dalam melakukan proses dekomposisi semacam ini, kita perlu memusatkan perhatian pada penyebut dan meninjau berbagai kasus (linier, kuadratik, dll). Proses dekomposisi ini cukup penting pada pengerjaan integral karena dapat menyederhanakan bentuk integran yang akan kita integralkan.

Contoh 1 Integral Pecahan Parsial (Faktor Linear yang Berbeda)

Soal:

Dekomposisikan $\frac{3x-1}{x^2-x-6}$ dan carilah integral tak tentunya.

Solusi:

Karena penyebut diuraikan sebagai $(x+2)(x-3)$, maka

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Dan

$$3x-1 = A(x-3) + B(x+2)$$
$$3x-1 = (A+B)x + (-3A+2B)$$

Diperoleh $A+B=3$ dan $-3A+B=-1$, maka $A=\frac{7}{5}$ dan $B=\frac{8}{5}$. Dengan demikian ,

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{\frac{7}{5}}{x+2} + \frac{\frac{8}{5}}{x-3}$$

Dan

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx = \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{8}{5}\int \frac{dx}{x-3} = \frac{7}{5}\ln|x+2| + \frac{8}{5}\ln|x-3| + C$$

Contoh 2 Integral Pecahan Parsial (Faktor Linear yang Berulang)

Soal:

Carilah $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$

Solusi:

Sekarang proses dekomposisi menghasilkan bentuk

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

Kita peroleh $x = A(x-3) + B$. Jika sekarang kita substitusikan nilai $x = 3$ dan sembarang nilai x yang lainnya, misalkan $x = 0$, maka kita peroleh $A = 1$ dan $B = 3$. Jadi

$$\int \frac{x}{(x-3)^2}\, dx = \int \frac{1}{x-3}\, dx + 3\int \frac{1}{(x-3)^2} dx = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C$$

Contoh 3 Integral Pecahan Parsial
(Beberapa Faktor Linear Berbeda, Beberapa Berulang)

Soal:

Carilah $\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} dx$

Solusi:

Kita dekomposisikan integran dengan cara berikut

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Kita peroleh

$$3x^2-8x+13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$$

Substitusi $x = 1, x = -3$ dan $x = 0$ menghasilkan $C = 2, A = 4$ dan $B = -1$. Jadi

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} dx = 4\int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} = 4\ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

Contoh 4 Integral Pecahan Parsial (Faktor Kuadrat Tunggal)

Soal:

Carilah $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx$

Solusi:

Dekomposisi terbaik yang dapat kita harapkan adalah dekomposisi berbentuk

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{(4x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

Untuk menentukan konstanta $A, B,$ dan C kita kalikan kedua ruas persamaan dengan $(4x+1)(x^2+1)$ dan memperoleh

$$6x^2-3x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(4x+1)$$

Substitusi $x = -\frac{1}{4}, x = 0,$ dan $x = 1$ menghasilkan $A = 2, B = 1,$ dan $C = -1$

Jadi,

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{4x+1}dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4}{4x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|4x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \tan^{-1}x + C$$

Contoh 5 Integral Pecahan Parsial (Faktor Kuadrat Berulang)

Soal:

Carilah $\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx$

Solusi:

Dekomposisi yang sesuai adalah

$$\frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Dengan metode substitusi diperoleh $A=1, B=-1, C=3, D=-5$, dan $E=0$. Jadi,

$$\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}dx = \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{x-3}{x^2+2}\,dx - 5\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{5}{2}\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2(x^2+2)^2} + C$$

Ringkasan

Untuk mendekomposisikan fungsi rasional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsial, lakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1: Jika $f(x)$ tak sejati, yaitu jika derajat (pangkat tertinggi) $p(x) \geq$ derajat $q(x)$, bagilah $p(x)$ dengan $q(x)$ sehingga diperoleh

$$f(x) = polinomial + \frac{N(x)}{D(x)}$$

Langkah 2: Uraikan $D(x)$ menjadi suatu hasil kali faktor-faktor kuadrat yang linear dan tak bisa direduksi lagi dengan koefisien real.

Langkah 3: Untuk masing-masing factor yang berbentuk $(ax+b)^k$, harapkan dekomposisi mempunyai suku-suku

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

Ringkasan (lanjutan)

Langkah 4: Untuk masing-masing faktor yang berbentuk $(ax^2+bx+c)^m$, harapkan dekomposisi mempunyai suku-suku

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Langkah 5: Tetapkan $\frac{N(x)}{D(x)}$ sama dengan jumlah semua suku yang diperoleh dalam Langkah 3 dan Langkah 4. Banyaknya konstanta yang harus ditentukan harus sama dengan derajat penyebut, yaitu $D(x)$.

Langkah 6: Kalikan kedua ruas persamaan yang diperoleh dalam Langkah 5 dengan $D(x)$ dan carilah nilai dari konstanta-konstanta yang tidak diketahui. Ini dapat diperoleh dengan salah satu daru dua metode:

1. Samakan koefisien dari suku-suku yang derajatnya sama, atau
2. masukan nilai-nilai yang sesuai kepada variable x.

Latihan

Selesaikan integral tak tentu berikut

1. $\int \frac{2}{x^2+3x} dx$
2. $\int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx$
3. $\int \frac{3x+2}{x^3+3x^2+3x+1} dx$
4. $\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x} dx$
5. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{4x^3-28x^2+56x-32} dx$

Sub 6.6

Strategi untuk Integrasi
(Review, Tips, dan Trik Teknik Pengintegralan)

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Strategi Pengintegralan

FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

1. Carilah subtitusi yang membuat integral tampak seperti salah satu rumus dasar integrasi atau tampak seperti yang ada pada tabel integral (bisa melihat dibuku-buku kalkulus atau cari diinternet dengan kata kunci: *integral table*). Sebagai contoh, $\int \sin(2x)\,dx$ dan $\int xe^{-x^2}dx$ dapat dikerjakan menggunakan subtitusi sederhana.
2. Carilah subtitusi yang membuat kita memiliki hasil kali dua fungsi yang mana turunan fungsi yang satu dikali turunan factor lainnya berupa salah satu rumus dasar integrasi pada teknik integral parsial. Sebagai contoh, $\int x\sinh(x)\,dx$ dan $\int xe^{x}dx$ dapat dikerjakan menggunakan teknik integral parsial.
3. Jika menemukan bentuk integran $\sqrt[n]{ax+b}$, lakukan teknik subtitusi yang merasionalkan dengan memisalkan $u = \sqrt[n]{ax+b}$. Perlu perhatian khusus apakah fungsi yang diakar bisa dibawa kebentuk ini atau tidak. Sebagai contoh, $\int x\sqrt[5]{x^2+2x+1}\,dx$ dapat kita bawa kebentuk $\int x\left(\sqrt[5]{x+1}\right)^2 dx$ sehingga dapat kita kerjakan dengan teknik subtitusi yang merasionalkan dengan memisalkan $u = \sqrt[5]{x+1}$.

Strategi Pengintegralan (lanjutan)

4. Jika menemukan bentuk integran $\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$, selesaikan dengan teknik integral subtitusi trigonometri dengan aturan subtitusi:
   - Untuk $\sqrt{a^2 - x^2}$ gunakan subtitusi $x = a \sin t$
   - Untuk $\sqrt{a^2 + x^2}$ gunakan subtitusi $x = a \tan t$
   - Untuk $\sqrt{x^2 - a^2}$ gunakan subtitusi $x = a \sec t$

5. Jika integran berupa fungsi rasional sejati (derajat/pangkat tertinggi pembilang lebih kecil dari derajat penyebut), gunakan teknik integral pecahan parsial. Jika berupa fungsi rasional tak sejati, maka lakukan pembagian fungsi polynomial terlebih dahulu, kemudian fungsi rasional sejati yang merupakan sisa pembagian diintegralkan dengan teknik integral parsial.

Terima kasih

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER