



FAKULTAS  
ILMU  
KOMPUTER

# Analisis Kombinatorik 1: Aturan Dasar Berhitung

Dr. Dina Chahyati



Berhitung (*counting*) merupakan **proses menentukan jumlah objek** yang **memenuhi kriteria** tertentu. Contoh:

- Menghitung jumlah hari dalam seminggu
- Menghitung jumlah cara memilih menu makanan dan minuman di warung
- Menghitung kompleksitas algoritma

Aturan Dasar Berhitung:

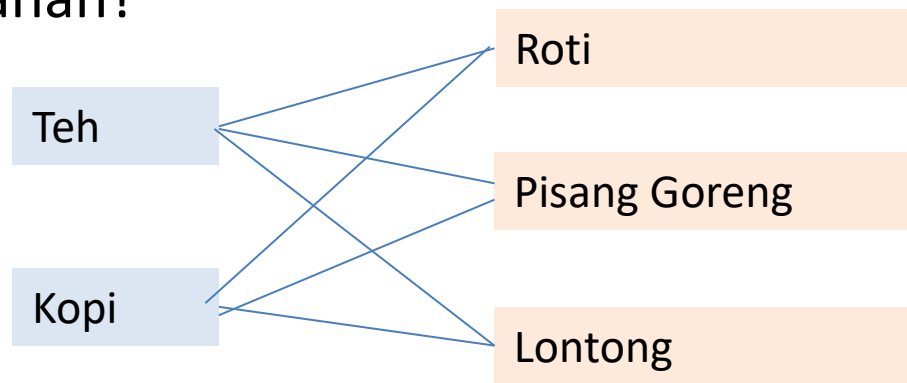
1. Aturan Perkalian
2. Aturan Pembagian
3. Aturan Penjumlahan
4. Aturan Pengurangan
5. Diagram Pohon

# 1. Aturan Perkalian

2

Misalkan suatu prosedur  $T$  dapat dibagi menjadi dua buah pekerjaan (*task*)  $T_1$  dan  $T_2$  yang **berurutan**. Jika terdapat  $n_1$  cara untuk melakukan  $T_1$  dan  $n_2$  cara untuk melakukan  $T_2$ , maka terdapat  $n_1 n_2$  cara untuk mengerjakan prosedur tersebut.

- Contoh: sebuah warung makanan menjual 2 macam minuman (teh, kopi) dan 3 macam makanan (roti, pisang goreng, lontong). Ada berapa cara memilih satu minuman dan satu makanan?



Teh & Roti  
 Teh & Pisang Goreng  
 Teh & Lontong  
 Kopi & Roti  
 Kopi & Pisang Goreng  
 Kopi & Lontong

$$\frac{n_1}{T_1} \quad \frac{n_2}{T_2}$$

$T_1$ : Memilih satu minuman  
 $n_1 = 2$  cara (teh, kopi)

$T_2$ : Memilih satu makanan  
 $n_2 = 3$  cara (roti, pisang goreng, lontong)

$T$ : Memilih satu minuman dan satu makanan  
 $n_1 n_2 = 6$  cara

# 1. Aturan Perkalian

3

Secara umum suatu prosedur  $T$  dapat dipecah menjadi  $T_1, T_2, \dots, T_m$  pekerjaan sehingga jumlah cara mengerjakan keseluruhan prosedur  $T$  menjadi  $n_1 n_2 \dots n_m$  dimana  $n_i$  adalah jumlah cara mengerjakan pekerjaan  $T_i$

- Contoh: ada berapa cara membuat password yang terdiri dari 5 karakter dimana karakter 1-2 adalah alfabet dan karakter 3-5 adalah angka?

$$\begin{array}{ccccc} 26 & 26 & 10 & 10 & 10 \\ \hline T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \end{array} = 676.000 \text{ cara}$$

Aturan perkalian ini merupakan dasar dari **permutasi**

## 2. Aturan Pembagian

4

Misalkan suatu pekerjaan dapat dilakukan dalam  $n$  prosedur. Jika ternyata untuk setiap prosedur terdapat  $d$  cara penyelesaian yang identik, maka pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dalam  $n/d$  cara berbeda.

- Contoh: ada berapa cara memilih 2 orang dari 4 mahasiswa: Ani, Beni, Cani, Deni, jika urutan tidak diperhatikan?

Cara memilih 2 orang jika  
urutan diperhatikan:  $\frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = 12$

Ani & Beni	Ani & Cani	Ani & Deni
Beni & Ani	Beni & Cani	Beni & Deni
Cani & Ani	Cani & Beni	Cani & Deni
Deni & Ani	Deni & Beni	Deni & Cani

Karena urutan tidak diperhatikan, maka pasangan Ani & Beni dianggap sama/identik dengan Beni & Ani. Karena ada 2 urutan cara memilih 2 orang yang berbeda, maka cara memilih tersebut (12) harus dibagi dengan 2 sehingga total cara memilih adalah  $12/2 = 6$  cara.

Aturan pembagian ini merupakan dasar dari **kombinasi**

### 3. Aturan Penjumlahan

5

Misalkan suatu pekerjaan dapat dilakukan dengan salah satu dari  $n_1$  cara **atau** salah satu dari  $n_2$  cara, dimana **tidak ada** dari “himpunan  $n_1$  cara” dan “himpunan  $n_2$  cara” yang sama, maka ada  $n_1 + n_2$  cara untuk melakukan pekerjaan tersebut.

Contoh: Bit string adalah string yang hanya terdiri dari 0 dan 1. Ada berapa banyak cara membuat bit string panjang 2 atau 3?

Solusi untuk soal ini dapat diperoleh dengan menjumlahkan  $n_1 + n_2$  dimana

$n_1$  = jumlah cara membuat bit string panjang 2

$n_2$  = jumlah cara membuat bit string panjang 3

Menggunakan aturan perkalian, didapatkan  $n_1 = 2.2 = 4$  dan  $n_2 = 2.2.2 = 8$

Kemudian dengan aturan penjumlahan didapatkan  $n_1 + n_2 = 4 + 8 = 12$

## 4. Aturan Pengurangan

6

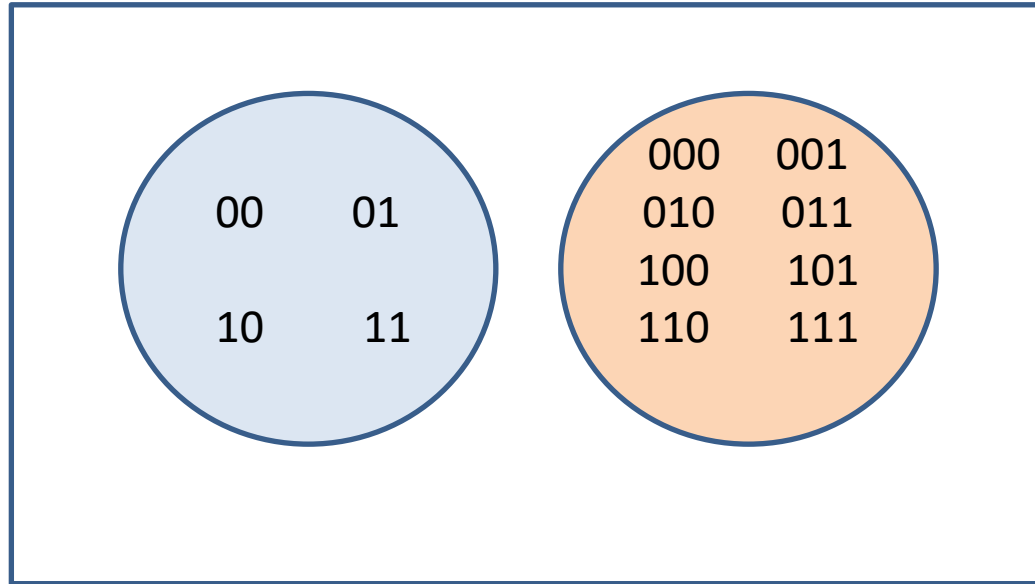
Misalkan suatu pekerjaan dapat dilakukan dengan salah satu dari  $n_1$  cara **atau** salah satu dari  $n_2$  cara, dimana **ada** dari “himpunan  $n_1$  cara” dan “himpunan  $n_2$  cara” yang **sama** sebanyak  $m$  cara, maka ada  $n_1 + n_2 - m$  cara untuk melakukan pekerjaan tersebut.

- Pengurangan ini perlu dilakukan agar tidak terjadi *overcounting* terhadap jumlah cara.
- Aturan pengurangan biasanya digunakan bersamaan dengan aturan penjumlahan
- Hint: Ketika menerapkan aturan penjumlahan, harap selalu cek apakah penjumlahan tersebut menyebabkan ada “cara/konfigurasi” yang dihitung lebih dari sekali (*overcount*)

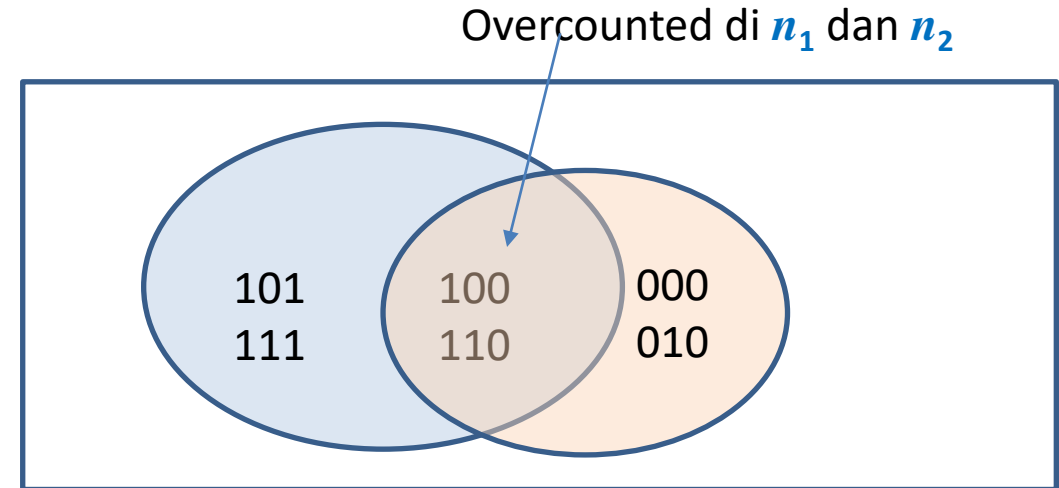


# Penjumlahan & Pengurangan

7



- Ada berapa banyak cara membuat bit string panjang 2 atau 3?
- Tidak ada irisan antara **himpunan bit string panjang 2** dan **himpunan bit string panjang 3** (saling lepas)
- Cukup dijumlahkan saja



- Ada berapa banyak cara membuat bit string panjang 3 yang diawali 1 atau diakhiri 0?
- $n_1$  = jumlah cara membuat bit string panjang 3 yang diawali 1 =  $1.2.2 = 4$  cara (1\_\_)
- $n_2$  = jumlah cara membuat bit string panjang 3 yang diakhiri 0 =  $2.2.1 = 4$  cara (\_\_0)
- **Ada** elemen yang dihitung dua kali (overcount) di  $n_1$  dan  $n_2$ , yaitu 100 dan 110 ( $m = 2$ ) → **perlu dilakukan pengurangan** (1\_0)
- Solusi akhir =  $n_1 + n_2 - m = 4 + 4 - 2 = 6$

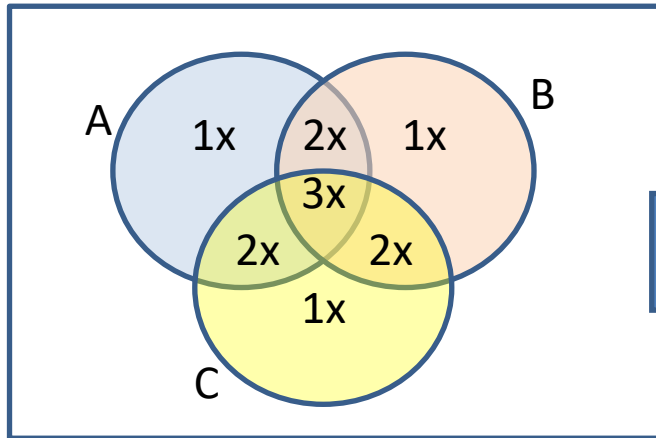


# Inklusi & Eksklusi

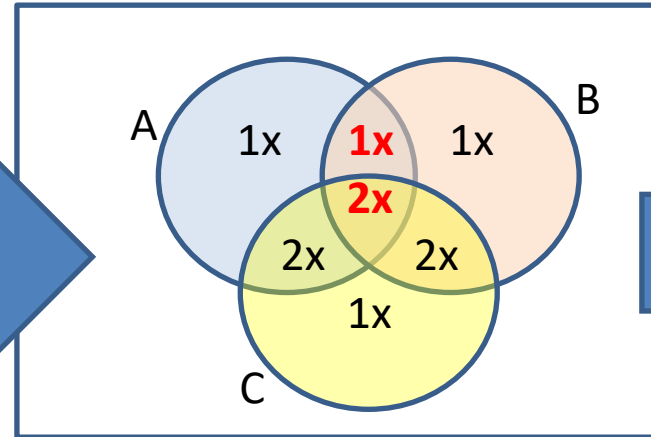
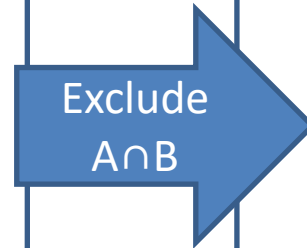
- Terkadang proses penjumlahan dan pengurangan perlu dilakukan berkali-kali
- Selalu cek apakah terjadi *overcount* atau *undercount*
- Jika terjadi *overcount* → kurangi / *exclude* / eksklususi
- Jika terjadi *undercount* → tambahkan / *include* / inklusi
- Pastikan semua “cara/konfigurasi” hanya dihitung **sekali saja**.

# Inklusi dan Eksklusi

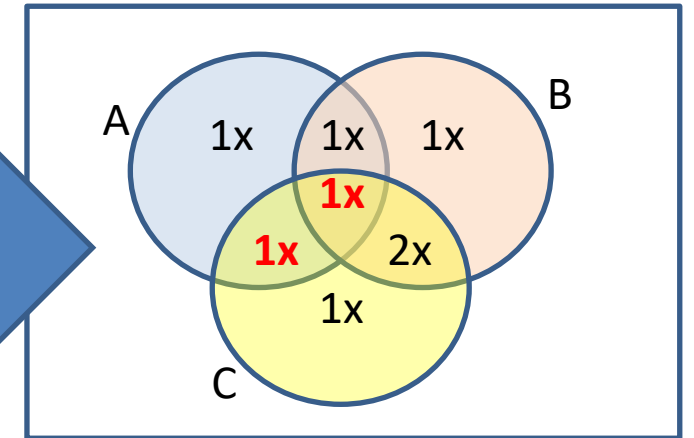
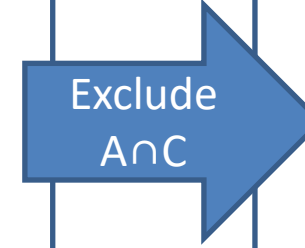
9



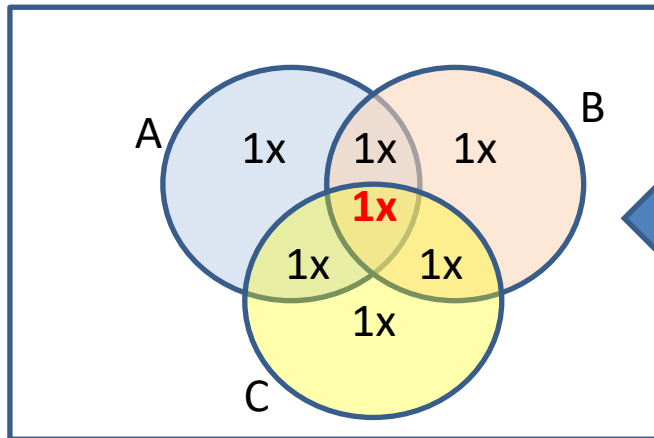
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$  ?  
ada overcount  $\rightarrow$  exclude some!



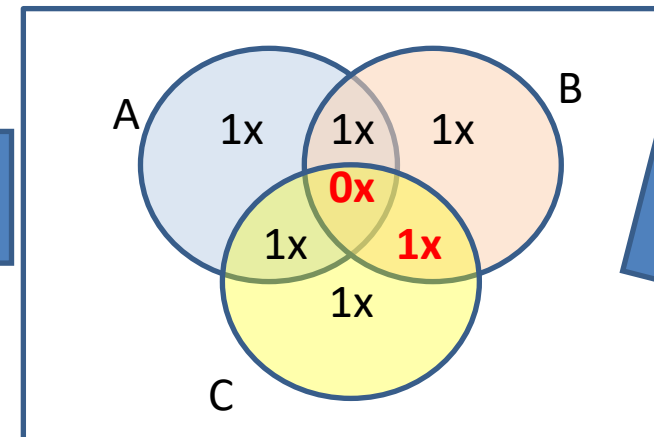
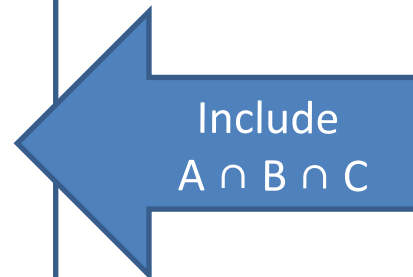
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$  ?  
ada overcount  $\rightarrow$  exclude some!



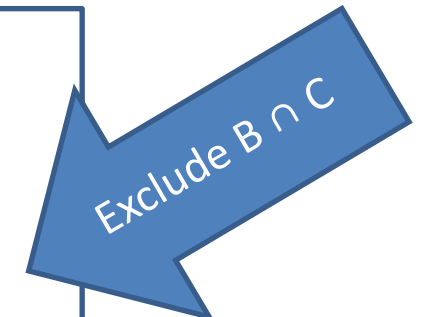
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C|$  ?  
ada overcount  $\rightarrow$  exclude some!



$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$  ?  
OK, tidak ada overcount maupun undercount



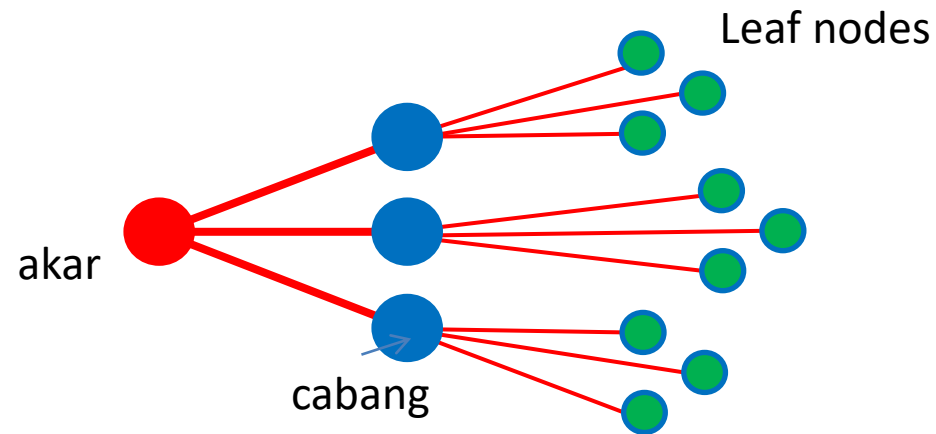
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$  ?  
ada undercount  $\rightarrow$  include some!



## 5. Diagram Pohon

10

- Masalah berhitung (*counting problems*) dapat diselesaikan menggunakan diagram pohon.
- Sebuah **cabang pohon** merepresentasikan sebuah pilihan yang mungkin.
- Sebuah **jalur dari akar ke sebuah endpoint (leaf node)** adalah sebuah solusi/cara yang mungkin.

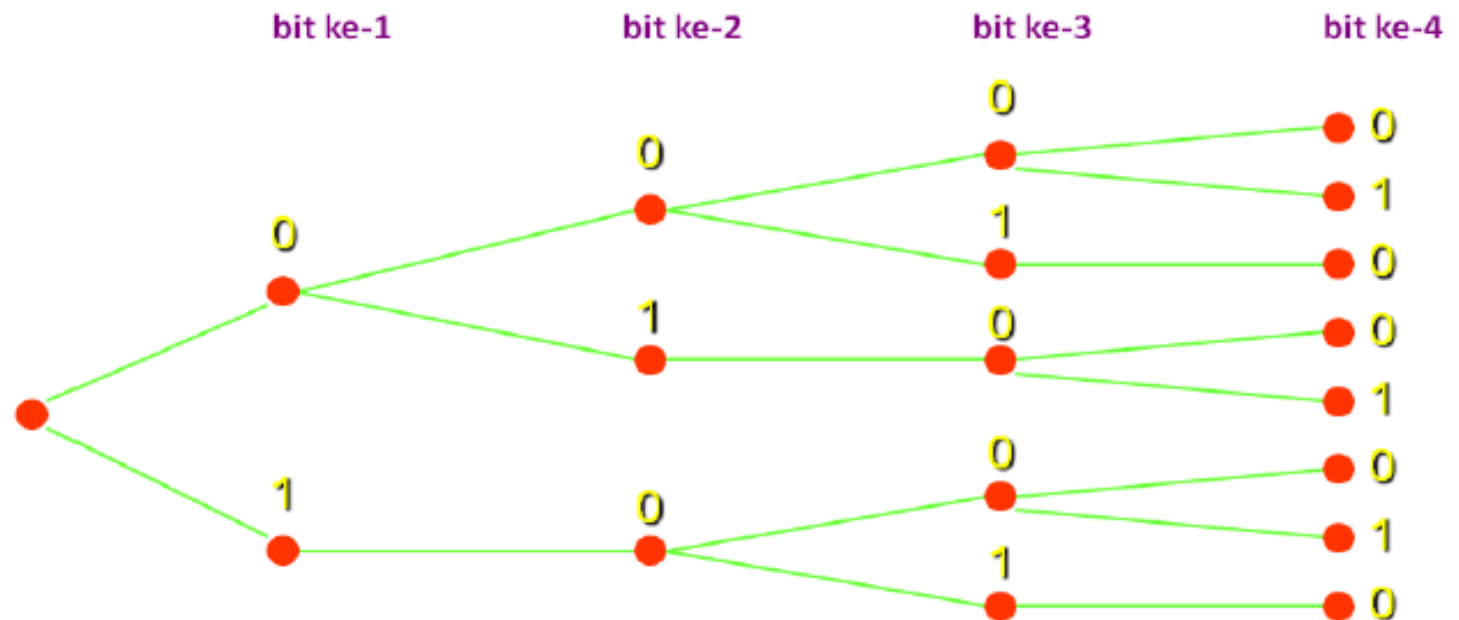


## 5. Diagram Pohon

11

Ada berapa banyak string biner dengan **panjang 4** yang tidak memuat dua **digit 1 secara berurutan** ?

**Jawaban: 8 string**



- Ada berapa susunan huruf alfabet panjang 5 huruf yang mengandung **setidaknya satu huruf hidup** dan **huruf tidak boleh diulang**

## Cara 1:

Jawaban = susunan tanpa pengulangan

– susunan tanpa pengulangan dan tanpa huruf hidup

$$\text{Jawaban} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 - 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 5\,451\,720$$

## Cara 2:

Jawaban = susunan 1 vokal + 2 vokal + 3 vokal + 4 vokal + 5 vokal

$$\begin{aligned} &= 5 \cdot (5 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18) + 10 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19) + 10 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 20) \\ &\quad + 5 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 21) + 1 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \end{aligned}$$

$$= 3\,591\,000 + 1\,596\,000 + 252\,000 + 12\,600 + 120 = 5\,451\,720$$

Berapa banyak variasi string berbeda dengan panjang 9 huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf pada kata 'MAHASISWA' jika string harus mengandung substring 'HSW' atau 'MA'?

- $n_1$  = jumlah variasi string yang mengandung 'HSW'
- $n_2$  = jumlah variasi string yang mengandung 'MA'
- $m$  = jumlah variasi string yang mengandung 'HSW' dan 'MA'

Gunakan aturan penjumlahan dan pengurangan sehingga solusi yang diinginkan adalah  $n_1 + n_2 - m$

Hitung  $n_1$  :

- Anggap ada 7 slot yang dapat diisi oleh 'H', 'S', 'W', 'M', 'I', 'A', 'A'
- Jika semua huruf dianggap berbeda, maka dengan aturan perkalian didapatkan  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$  variasi string
- Namun perhatikan bahwa string HSWMISAAA dan HSWMISAAA adalah identik (2 variasi identik)
- Demikian juga dengan variasi HSWMISAAA, HSWMISAAA, HSWMISAAA, HSWMISAAA, HSWMISAAA, HSWMISAAA (6 variasi identik)
- Dengan demikian kita perlu menerapkan aturan pembagian sehingga didapatkan  $\frac{5040}{2 \cdot 6} = 420$

Hitung  $n_2$  : jumlah variasi string yang mengandung 'MA'

- Dengan cara yang sama dengan sebelumnya, anggap ada 8 slot yang dapat diisi oleh 'MA', 'W', 'I', 'H', 'S', 'S', A', 'A'
- Jika semua huruf dianggap berbeda, maka dengan aturan perkalian didapatkan  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$  variasi string
- Setelah menghapus variasi-variasi identik didapatkan  $\frac{40320}{2.6} = 3360$

Hitung  $m$  : jumlah variasi string yang mengandung 'HSW' dan 'MA'

- Dengan cara yang sama dengan sebelumnya, anggap ada 6 slot yang dapat diisi oleh 'HSW', 'MA', 'I', 'S', A', 'A'
- Jika semua huruf dianggap berbeda, maka dengan aturan perkalian didapatkan  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$  variasi string
- Setelah menghapus variasi-variasi identik didapatkan  $\frac{720}{2.6} = 60$

Hitung  $n_1 + n_2 - m$

- Dapatkan solusi akhir yaitu  $420 + 3360 - 60 = 3720$  variasi string





FAKULTAS  
ILMU  
KOMPUTER

# Berikutnya: Prinsip Sarang Merpati