UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Strong Induction (2)

Meganingrum Arista Jiwanggi, M.Kom, M.Comp.Sci.

FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS INDONESIA

Soal 2

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Soal 2

Buktikan bahwa setiap uang sebesar Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibuat dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja.

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja

Jawab:

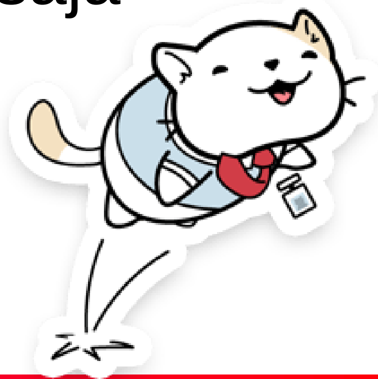
P(n): untuk $n \geq 10$, n ribu rupiah dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan 2 ribuan dan 5 ribuan saja.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membayar 10 ribu dan 11 ribu dari 2 ribuan dan 5 ribuan saja

P(10) : 2 x 5 ribu

P(11) : 1 x 5 ribu + 3 x 2 ribu



Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja

Jawab:

P(n): n ribu rupiah dapat dibayarkan dengan pecahan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membentuk 10 ribu dan 11 ribu dari 2 ribuan dan 5 ribuan saja

P(10) : 2 x 5 ribu

P(11) : 1 x 5 ribu + 3 x 2 ribu

- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(j) benar untuk semua j dimana 10 <= j <= k dan k >= 11 artinya

kita bisa membentuk j ribu rupiah dengan 2 ribu dan 5 ribu rupiah saja

Kita perlu buktikan P(k+1):

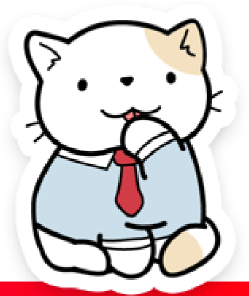
Berdasarkan asumsi Induksi, P(k-1) benar karena $10 \leq k-1 \leq k$ sehingga k-1 ribu rupiah dapat kita bentuk dengan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

k - 1 = 2a + 5b, a dan b bilangan bulat non negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)

k + 1 – 2 = 2a + 5b

k + 1 = 2(a+1) + 5b

$P(10) \wedge P(11) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar



Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja

Jawab:

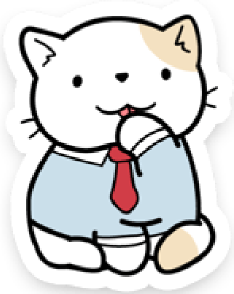
P(n): n ribu rupiah dapat dibayarkan dengan pecahan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membentuk 10 ribu dan 11 ribu dari 2 ribuan dan 5 ribuan saja

P(10) : 2 x 5 ribu

P(11) : 1 x 5 ribu + 3 x 2 ribu



- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(j) benar untuk semua j dimana 10 <= j <= k dan k >= 11 artinya kita bisa membentuk j ribu rupiah dengan 2 ribu dan 5 ribu rupiah saja

Kita perlu buktikan P(k+1):

Berdasarkan asumsi Induksi, P(k-1) benar karena $10 \leq k - 1 \leq k$ sehingga k-1 ribu rupiah dapat kita bentuk dengan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

k - 1 = 2a + 5b, a dan b bilangan bulat non negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)

k + 1 – 2 = 2a + 5b

k + 1 = 2(a+1) + 5b

$P(10) \wedge P(11) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar

Kesimpulannya: P(n) benar *atau* berlaku pernyataan “uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja”

Soal 3

Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Contoh Solusi Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): untuk $n \geq 12$, perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12, 13, 14, dan 15 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

P(13) : 2 x 4 rupiah + 1 x 5 rupiah

P(14) : 1 x 4 rupiah + 2 x 5 rupiah

P(15) : 3 x 5 rupiah

Contoh Solusi Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12, 13, 14, dan 15 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

P(13) : 2 x 4 rupiah +

P(14) : 1 x 4 rupiah +

P(15) : 3 x 5 rupiah

Hipotesis Induksi:

$P(12) \wedge P(13) \wedge \cdots \wedge P(k)$ bernilai benar

- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(j) benar untuk semua $12 \leq j \leq k$ dan $k \geq 15$ artinya kita bisa membentuk perangko j rupiah dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Kita perlu buktikan $P(k+1)$:

Berdasarkan asumsi Induksi, $P(k-3)$ benar karena $12 \leq k-3 \leq k$ sehingga perangko k -3 dapat kita bentuk dengan 4 dan 5 rupiah.

k - 3 = 4a + 5b, a dan b bilangan bulat non-negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)

k + 1 – 4 = 4a + 5b

k + 1 = 4(a+1) + 5b

$P(12) \wedge P(13) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar

Contoh Solusi Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12, 13, 14, dan 15 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

P(13) : 2 x 4 rupiah + 1 x 5 rupiah

P(14) : 1 x 4 rupiah + 2 x 5 rupiah

P(15) : 3 x 5 rupiah

- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(j) benar untuk semua $12 \leq j \leq k$ dan $k \geq 15$ artinya

kita bisa membentuk perangko j rupiah dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Kita perlu buktikan $P(k+1)$:

Berdasarkan asumsi Induksi, $P(k-3)$ benar karena $12 \leq k-3 \leq k$ sehingga perangko k -3 dapat kita bentuk dengan 4 dan 5 rupiah.

k - 3 = 4a + 5b, a dan b bilangan bulat non-negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)

k + 1 – 4 = 4a + 5b

k + 1 = 4(a+1) + 5b

$P(12) \wedge P(13) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar

Kesimpulannya: P(n) benar *atau* berlaku pernyataan “setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah”

Dapatkah persoalan di Soal 3 diselesaikan dengan Induksi Matematika Biasa?

Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12 rupiah dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(k) benar sehingga kita bisa membentuk perangko k rupiah dengan perangko 4 dan 5 rupiah atau

$$k = 4a + 5b$$

Dengan a dan b bilangan bulat nonnegatif.

Jika P(k) benar, maka ada 2 kemungkinan yaitu:

- Perangko k dapat dbentuk dengan menggunakan minimal 1 perangko 4 rupiah
- Perangko k dapat dibentuk TANPA menggunakan perangko 4 rupiah (hanya 5 rupiah)

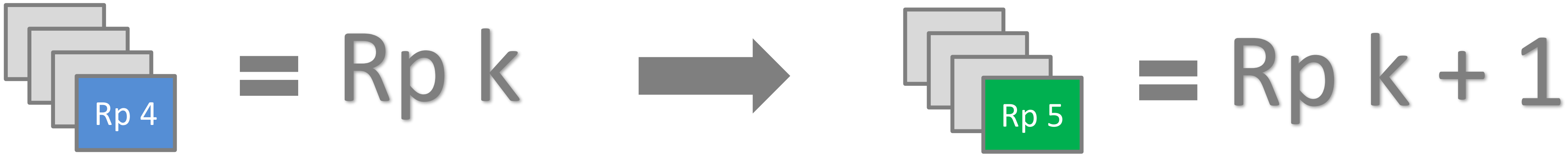
Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

- **INDUCTIVE STEP**

Jika perangko k rupiah dapat dibentuk dengan menggunakan **minimal 1 perangko 4 rupiah**, maka perangko k+1 rupiah dapat dibentuk dengan mengganti 1 perangko 4 rupiah dengan 1 perangko 5 rupiah.



Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

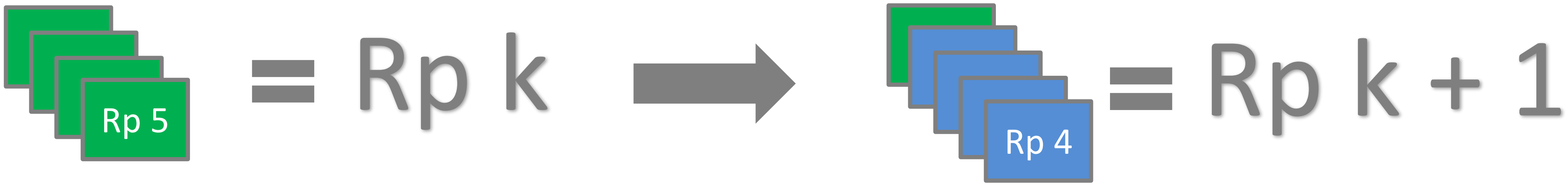
Jawab:

- **INDUCTIVE STEP**

Jika perangko k rupiah dapat dibentuk dengan menggunakan **minimal 1 perangko 4 rupiah**, maka perangko k+1 rupiah dapat dibentuk dengan mengganti 1 perangko 4 rupiah dengan 1 perangko 5 rupiah.

Jika Perangko k dapat dibentuk TANPA menggunakan perangko 4 rupiah (hanya 5 rupiah) :

- Berhubung kita tau bahwa $k \geq 12$, maka nilai k terkecil yang dibentuk dengan hanya 5 rupiah adalah 15 rupiah (dibentuk dari 3 x 5 rupiah)
- k+1 dapat dibuat dengan mengganti 3 perangko 5 rupiah dengan 4 perangko 4 rupiah.



Maka, pernyataan $P(k) \rightarrow P(k+1)$ BENAR

Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

Kesimpulan: P(n) benar atau berlaku pernyataan “setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah”

Semua persoalan yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika biasa pasti bisa dibuktikan juga dengan strong induction

Latihan

1. Tentukan perangko dengan besar berapa saja yang dapat dibentuk hanya dengan menggunakan perangko 4 rupiah atau 11 rupiah. Buktikan jawabanmu menggunakan (a) Induksi Matematika biasa dan (b) Strong Induction
2. Gunakan strong induction untuk menunjukkan bahwa setiap n bilangan bulat positif dapat dituliskan sebagai penjumlahan bilangan-bilangan hasil pangkat 2 yang unik (2^0, 2^1, 2^2, 2^3,dst). [Petunjuk: Untuk inductive step, pertimbangkan untuk membagi ini ke dalam beberapa kasus yaitu saat k + 1 adalah bilangan genap dan saat k+1 ganjil. Saat k+1 adalah bilangan genap, maka (k + 1)/2 adalah suatu bilangan bulat.]

Apa yang sudah dipelajari?

- Contoh Soal Strong Induction dan Pembahasan

Topik Berikutnya: Aturan Berhitung

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)
- Slide Matematika Diskret 1 : Induksi Matematika oleh Bapak Alfan F. Wicaksono (2013)