Bab 8
Aplikasi Integral

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Referensi, Kredit, dan Kontak

Referensi Utama

Varberg, Dale; Edwin J. Purcell; Steven E. Rigdon. Calculus, 9th Edition, Prentice Hall, 2006.

Kredit

Slide ini menggunakan tema Blue Connections Cordelia Presentation Template (https://www.slidescarnival.com/cordelia-free-presentation-template/216).

Kontak

Segala bentuk pertanyaan, kritik, dan saran mengenai slide ini dapat disampaikan via email ke okkyibrohim@cs.ui.ac.id.

Outline

- Luas Daerah di Bawah Kurva
- Volume Benda Putar
- Panjang Kurva
- Luas Permukaan Benda Putar
- Pengenalan Aplikasi Lainnya

Sub 8.1

Luas Area di Bawah Kurva

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

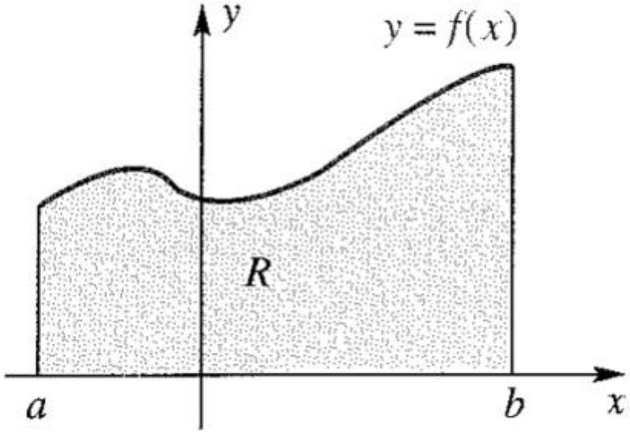
FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Luas Daerah di Atas Sumbu-x

Misalkan $f(x)$ kontinu dan tak negatif di $[a, b]$, luas kurva di bawah kurva $f(x)$ di $[a, b]$ dapat dihitung sebagai:

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ilustrasinya dapat kita lihat pada gambar berikut:



Contoh Luas Daerah di Atas Sumbu-x

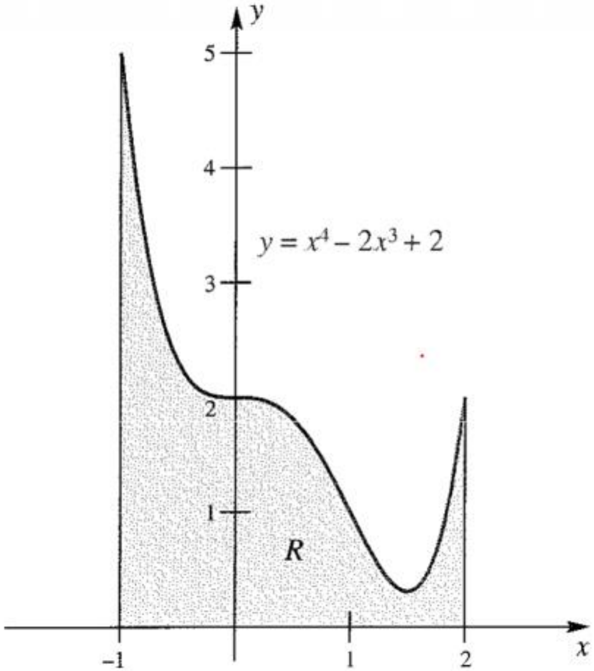
Soal:

Hitung luas area di bawah kurva $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ di $[-1,2]$

Solusi:

$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10} = 5.1$$



Luas Daerah di Bawah Sumbu-x

Pada pembahasan integral tentu, kita mendapati bahwa untuk $f(x)$ di $[a, \mathrm{b}]$ kontinu dan tak positif, hasil integral $f(x)$ pada daerah tersebut hasilnya adalah negatif. Karena luas tidak mungkin negatif, maka kita hanya perlu mengalikannya dengan -1, sehingga luas daerah di atas kurva $f(x)$ di $[a, \mathrm{b}]$ adalah:

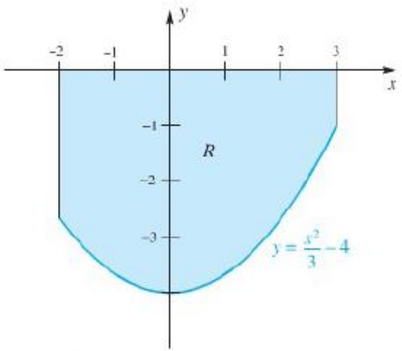
$$A(R) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh Luas Daerah Di Bawah Sumbu-x

Soal:

Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^{\frac{2}{3}} - 4$, sumbu-x, $x = -2$ dan $x = 3$

Solusi:



$$A(R) = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9} \approx 16.11$$

Luas Daerah di Atas dan di Bawah Sumbu-x

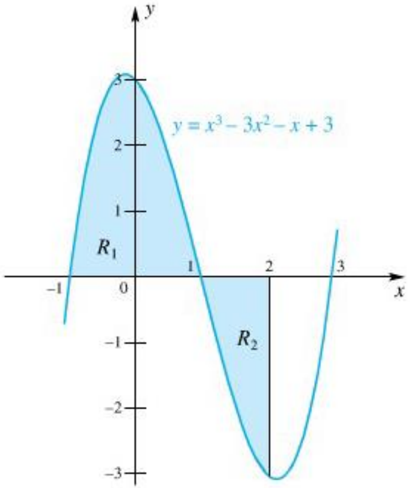
Jika $f(x)$ kontinu dan mempunyai nilai positif dan negatif di $[a, \mathrm{b}]$, maka luas daerah yang dibentuk oleh $f(x)$ dengan sumbu x di $[a, \mathrm{b}]$ perlu dicari dengan membagi daerah-daerah positif dan negatif di $[a, \mathrm{b}]$, kemudian kita cari masing-masing luas daerahnya, baru kemudian kita jumlahkan semua luas daerahnya.

Contoh Luas Daerah di Atas dan di Bawah Sumbu-x

Soal:

Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, sumbu-x, $x = -1$ dan $x = 2$.

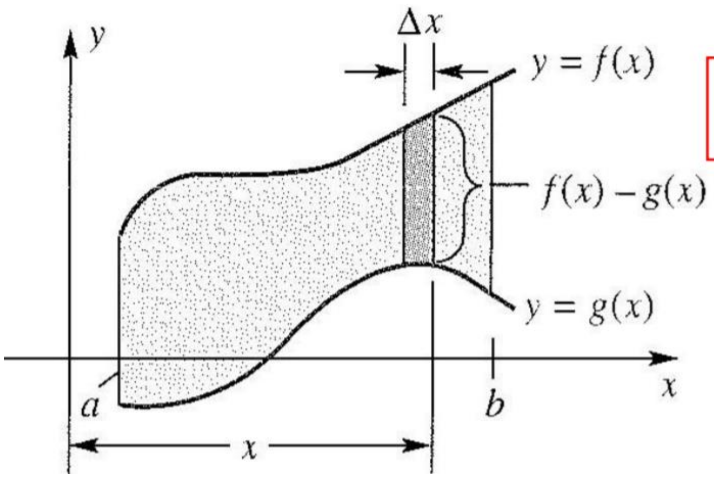
Solusi:



$$
\begin{aligned}
A(R) &= A(R_1) + A(R_2) \\
&= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2} \\
&= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4}
\end{aligned}
$$

Luas Daerah di Antara Dua Kurva

Tinjaulah kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \leq g(x)$ pada $a \leq x \leq b$. Kita gunakan metode iris, aproksimasikan, integrasikan untuk mencari luasnya.



$$\boxed{A = \int_a^b [\, f(x) - g(x)]\, dx}$$

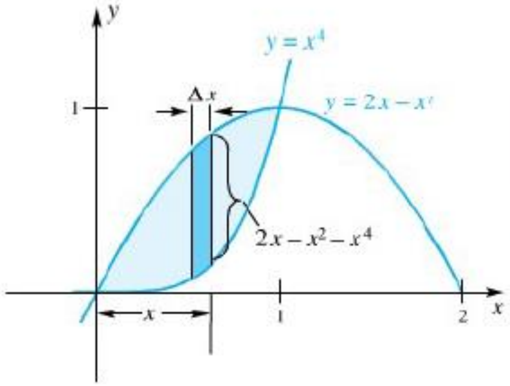
Contoh 1 Luas Daerah di Antara Dua Kurva: Pengirisan Tegak

Soal:

Carilah luas daerah di antara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$

Solusi:

Kita mulai dengan mencari titik-titik potong ddari dua kurva tersebut. Untuk ini, kita perlu menyelesaikan $2x - x^2 = x^4$. Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $x = 0$ dan $x = 1$. Sehingga,



$$\Delta A \approx (2x - x^2 - x^4)\,\Delta x$$
$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx$$

$$\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

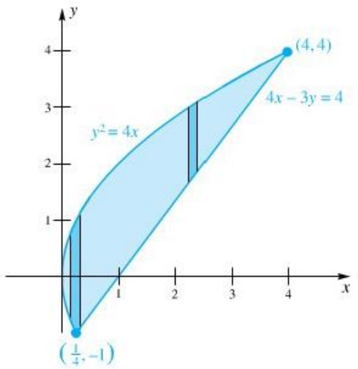
Contoh 2 Luas Daerah di Antara Dua Kurva: Pengirisan Mendatar

Soal:

Carilah luas daerah di antara kurva $y^2 = 4x$ dan $4x - 3y = 4$

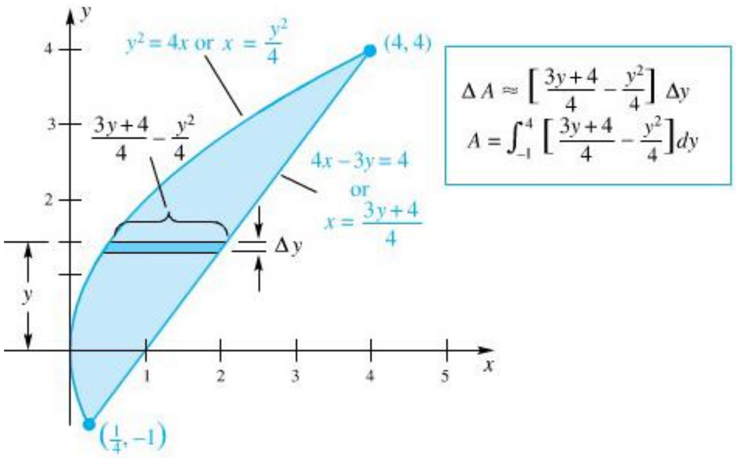
Solusi:

Kita mulai dengan mencari titik-titik potong ddari dua kurva tersebut. Untuk ini, kita bisa mengubah bentuk persamaan kedua menjadi $3y + 4 = 4x$ sehingga titik-titik potong dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan $y^2 = 3y + 4$. Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah $y = 4$ dan $y = -1$, yang mana selengkapnya dapat dilihat dari gambar berikut:



Dari gambar disamping, terlihat bahwa kita tidak dapat menghitung luas daerah tersebut dengan pemotongan tegak, maka kita perlu menghitung luas daerah tersebut dengan pemotongan mendatar.

Dengan mengubah bentuk masing-masing persamaan fungsi, kita peroleh perubahan bentuk fungsi pada gambar berikut,



Jadi, luas daerahnya adalah:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y + 4 - y^2}{4}\right] dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(3y + 4 - y^2)\, dy \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(24 + 16 - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)\right] \\
&= \frac{125}{24} \approx 5.21
\end{aligned}
$$

Latihan Luas Daerah

1. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3 - x + 2$, ruas sumbu-x antara $x = -1$ dan $x = 2$.
2. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 2x - 3$ dan ruas sumbu-x.
3. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3 - x^2 - 6x$ dan ruas sumbu-x.
4. Carilah luas daerah di antara $y = -x + 2$ dan $y = x^2$.
5. Carilah luas daerah di antara $y = x + 4$ dan $y = x^2 - 2$.
6. Carilah luas daerah di antara $y = x - 1$ dan $x = 3 - y^2$.

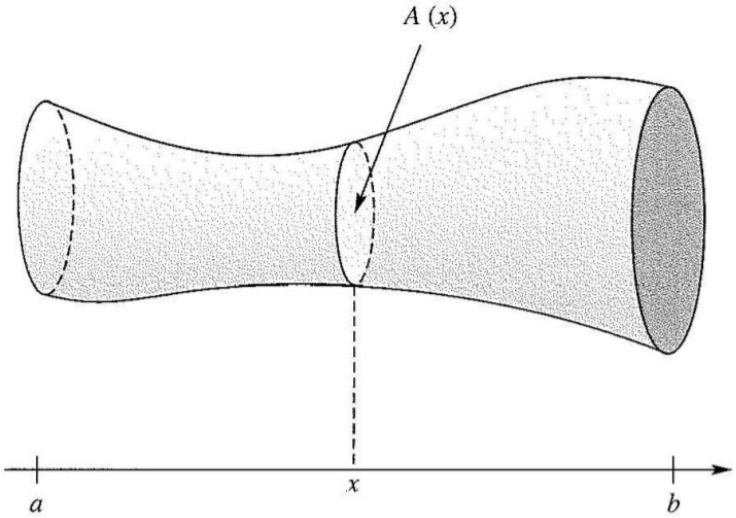
Sub 8.2

Volume Benda Putar

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

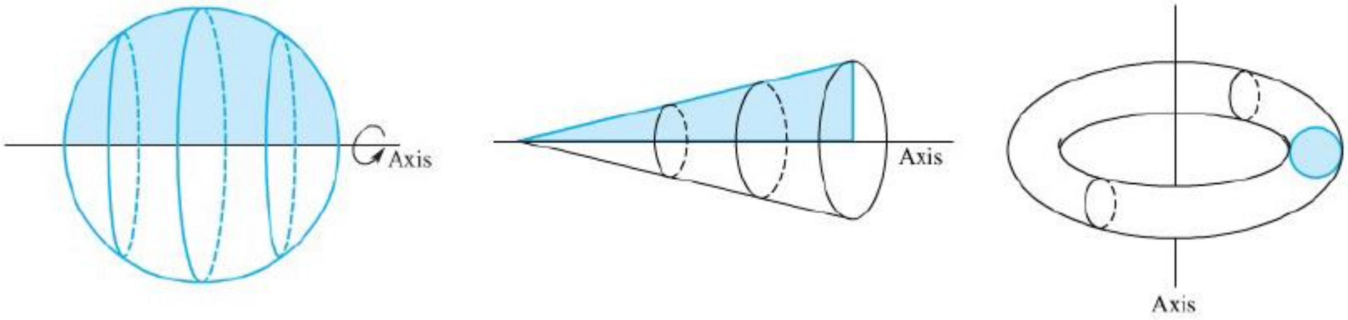
Volume Benda Putar



$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Metode Cakram

Ketika sebuah daerah rata, yang terletak seluruhnya pada satu sisi dari sebuah garis tetap dalam bidangnya, diputar mengelilingi garis tersebut, daerah itu akan membentuk sebuah benda-pejal putar. Garis tetap tersebut dinamakan sumbu benda pejal putar.



$$V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)dx$$

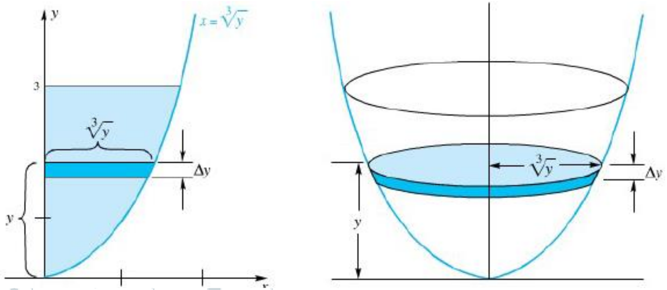
Contoh Luas Metode Cakram

Soal:

Carilah volume benda-pejal putar yang diperoleh dari pemutaran daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, sumbu-y dan garis $y = 3$ mengelilingi sumbu-y.

Solusi:

Di sini kita mengiris secara mendatar yang membuat y pilihan yang cocok sebagai variabel integrasi. Perhatikan bahwa, $y = x^3$ setara dengan $x = \sqrt[3]{y}$.

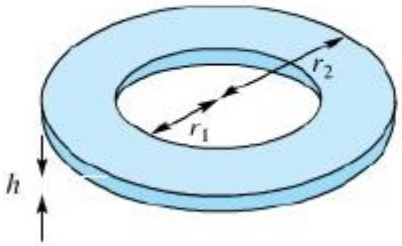


$$\boxed{\begin{aligned} \Delta V &\approx \pi(\sqrt[3]{y})^2 \Delta y \\ V &= \int_0^3 \pi y^{2/3}\, dy \end{aligned}}$$

$$V = \pi \int_0^3 y^{2/3}\, dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^3 = \pi \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11.76$$

Metode Cincin

Ada kalanya pengirisan suatu benda-pejal putar menghasilkan cakram-cakram dengan lubang di tengahnya. Daerah yang demikian kita sebut cincin



$$V = A \bullet h$$
$$= \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

Contoh Metode Cincin

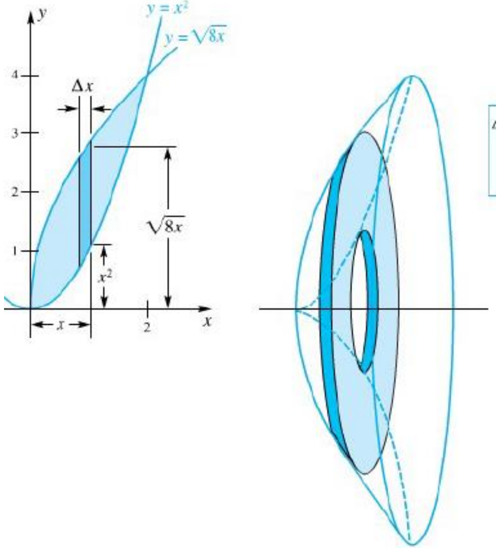
Soal:

Carilah volume benda pejal yang dibentuk dengan memutar daerah yang dibatasi oleh parabola-parabola $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$, mengelilingi sumbu-x.

Solusi:

$$\Delta V \approx \pi\,[(\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2]\,\Delta x$$

$$V = \int_0^2 \pi\,(8x - x^4)\,dx$$



$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} \approx 30.16$$

Volume Benda Pejal Lain yang Penampangnya Diketahui

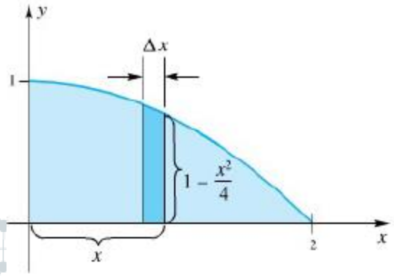
Volume benda yang sudah kita pelajari dari *slide* sebelumnya memiliki penampang lingkaran (karena diperoleh dengan memutar daerah terhadap suatu sumbu, yang mana karenanya disebut benda putar). Ada kalanya, benda pejal mempunyai penampang berbentuk segi empat atau segitiga. Dalam kasus ini, kita dapat menghitung volume irisan, yaitu lempengan-lengpengan terhadap penampang tersebut.

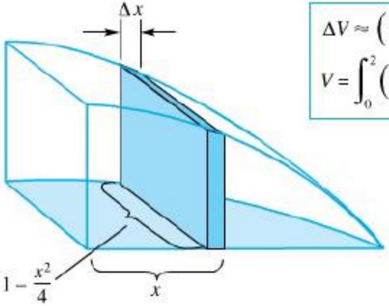
Contoh Volume Benda Pejal Lain

Soal:

Misalkan alas sebuah benda berupa daerah rata pada kuadran pertama yang dibatasi oleh $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, sumbu-x, sumbu-y. Misalkan penampang yang tegak lurus pada sumbu-x berbentuk bujur sangkar. Tentukan volume benda ini.

Solusi:





$$\Delta V \approx \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \Delta x$$

$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx$$

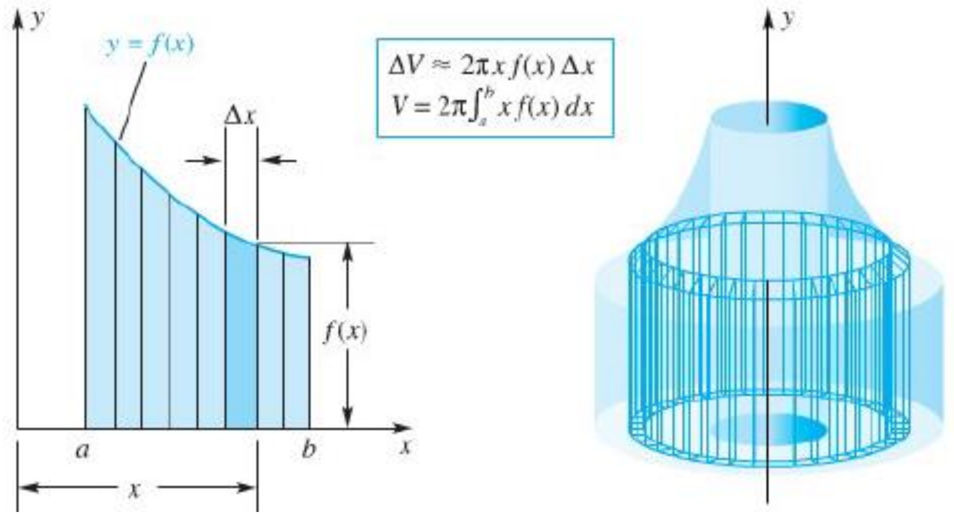
$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2$$

$$= 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} = \frac{16}{15} \approx 1.07$$

Metode Kulit Silinder

Perhatikan suatu daerah semacam yang diperlihatkan pada gambar. Irislah daerah itu secara tegak dan kemudian putar mengelilingi sumbu-y.



Contoh Metode Kulit Silinder

Soal:

Daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sumbu-x, $x = 1$, dan $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu-y. Carilah volume benda putar yang terbentuk.

Solusi:

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x)\,\Delta x$$

$$\Delta V \approx 2\pi x \frac{1}{\sqrt{x}} \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_1^4 x \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\pi \int_1^4 x^{1/2}\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_1^4 = 2\pi\left(\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{28\pi}{3} \approx 29.32$$

Latihan Volume Benda Putar

1. Hitung volume benda putar yang diperoleh dengan cara memutar daerah yang dibatasi oleh $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu-y terhadap garis $x = 1$.
2. Alas sebuah benda berupa daerah diantara sebuah busur $y = \sin x$ dan sumbu-x. Tiap penampang yang tegak lurus pada sumbu-x berupa sebuah segitiga sama sisi yang berdiri pada alas ini. Carilah volume benda pejal tersebut.
3. Carilah volume benda yang dihasilkan apabila kurva $y = 3 + 2x - x^2$ diputar mengelilingi
    a. Sumbu-x
    b. Sumbu-y
    c. Garis $y = -1$
    d. Garis $x = 4$

Sub 8.3
Panjang Kurva

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Panjang Kurva Bidang

Sebuah kurva bidang disebut mulus jika kurva itu ditentukan oleh sepasang persamaan parameter $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$, dengan f' dan g' ada dan kontinu pada $[a, b]$, dan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak secara bersama-sama bernilai nol pada (a, b)

Panjang Busur

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Terdapat dua kasus khusus yang sangat menarik. Jika kurva diberikan oleh $y = f(x), a \leq x \leq b$, kita perlakukan x sebagai parameter dan persamaan di atas menjadi

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Demikian pula jika kurva diberikan oleh $x = g(y), c \leq y \leq d$, kita perlakukan y sebagai parameter, diperoleh

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Contoh 1 Panjang Busur

Soal:

Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Solusi:

Kita tuliskan persamaan lingkaran dalam bentuk parameter, $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Sehingga $\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \frac{dy}{dt} = a\cos t$, dan dengan menggunakan rumus pertama diperoleh

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = \left[at\right]_0^{2\pi} = 2\pi a$$

Contoh 2 Panjang Busur

Soal:

Carilah panjang busur kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ mulai dari titik (1,1) ke titik (4,8)

Solusi:

Kita mulai dengan penaksiran panjang ini dengan pencarian panjang ruas mulai dari (1,1) ke titik (4,8) yaitu $\sqrt{(4-1)^2 + (8-1)\text{^}2} = \sqrt{58} \approx 7{,}6$. Pajang yang sebenarnya harus sedikit lebih besar. Untuk perhitungan eksak, perhatikan bahwa $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, sehingga

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

Misalkan $u = 1 + \frac{9}{4}x$; maka $du = \frac{9}{4}dx$. Karena itu,

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} + C$$

Sehingga

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \frac{13^{3/2}}{8}\right) \approx 7.63$$

Latihan Panjang Kurva

1. Hitung panjang kurva $y = \ln(\sec(x))$ untuk $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
2. Hitung panjang kurva $x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}$ untuk $1 \leq y \leq 4$.
3. Hitung panjang kurva $x = \frac{1}{2}y^2$ untuk $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Asumsikan y bernilai positif.
4. Hitung panjang kurva $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}$ untuk $1 \leq x \leq 2$.
5. Hitung panjang kurva yang dibentuk oleh persamaan $30xy^3 - y^8 = 15$ untuk $1 \leq y \leq 3$.
6. Hitung panjang kurva yang dibentuk oleh persamaan parametrik $x = 4\sin(t), y = 4\cos(t-5)$, untuk $0 \leq t \leq \pi$.
7. Hitung panjang kurva yang dibentuk oleh persamaan parametrik $x = \sqrt{5}\sin(2t-2)$, $y = \sqrt{5}\cos(2t-\sqrt{3})$, untuk $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Sub 8.4

Luas Permukaan Benda Putar

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

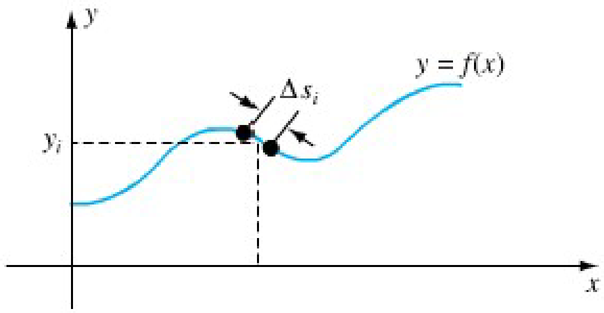
Diferensial Panjang Busur

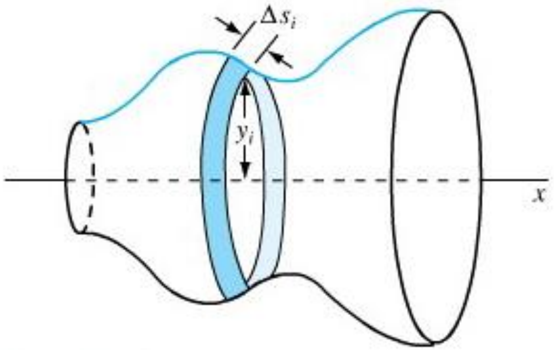
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Kenyataannya, tergantung bagaimana cara gambar grafik diparameterkan, kita akan menjumpai tiga rumus untuk ds, yaitu

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Luas Permukaan Benda Putar





$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \, \Delta s_i \\
&= 2\pi \int_a^b y \, ds \\
&= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx
\end{aligned}
$$

Luas Permukaan Benda Putar (lanjutan)

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, rumus diferensial panjang busur adalah tergantung pada bagaimana cara menggambar grafik diparameterkan. Dengan demikian, Jika kurva diberikan secara parameter $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$, maka rumus luas permukaan menjadi

$$A = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Contoh Luas Permukaan Benda Putar

Soal:

Carilah luas permukaan putar yang dibentuk dari pemutaran kurva $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4$ mengelilingi sumbu-x

Solusi:

Di sini $f(x) = \sqrt{x}$ dan $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Jadi

$$A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1}\, dx = \left[\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x+1)^{3/2}\right]_0^4$$

$$= \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1^{3/2}) \approx 36.18$$

Latihan Luas Area Permukaan Benda Putar

1. Hitung luas permukaan benda putar yang diperoleh dari pemutaran $y = \sqrt{9 - x^2}$ dengan $-2 \leq x \leq 2$ mengelilingi sumbu-x.
2. Carilah luas permukaan yang terbentuk dengan memutar kurva $y = \sqrt{25 - x^2}$ dengan $-2 \leq x \leq 3$ mengelilingi sumbu-x.
3. Carilah luas permukaan benda putar dari kurva $y = 4 + 3x^2$ dengan $1 \leq x \leq 2$ yang mengelilingi sumbu- y.

Sub 8.5

Pengenalan Aplikasi Lainnya

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Beberapa Aplikasi Lainnya

- Kerja dan Gaya Fluida
- Momen dan Pusat Massa
- Peluang dan Variabel Acak

Terima kasih

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER