TUGAS 3
MATDIS

ALDEN LUTHFI
2206028392

1. $a \mid b$ = a habis membagi b

$\therefore S = \{x \in Z^+ : \sqrt{x} \in Z \land 3 \nmid x\} \cup \{0\}$

2. a. $\{x \in R : 1 < x < 10\}$

b. $\{x \in R : 10 \leq x < 20\}$

c. $\{x \in R : -10 < x < 10 \land x \notin \{1,2,3,4,5\}\}$

d. $\{x \in R : x \leq 1 \lor x \geq 20\}$

3. $A = \{1, 2, 5, 10\}$

a. $B = (B - C) \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$C = (C - B) \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 5, 8\}$

b. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
$= \{1, 2, 3, 5, 10\}$

c. $A^c \cap B = B - A = \{3, 7, 9\}$
$B - C^c = B \cap C = \{1, 3, 5\}$

$\therefore (A^c \cap B) \oplus (B - C^c) = \{1, 5, 7, 9\}$

4. a. false karena $|X| = 3$ yaitu: 1. $\emptyset$
2. $\{\emptyset\}$
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

b. True karena $\{\emptyset\}$ ada didalam X
dan $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = X$

c. True karena $P(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{X\}\}$

ALDEN LUTHFI

2 2 0 6 0 2 8 9 3 2

5\. a. $\{-26, 0, 26, 169, -169\}$

b. Syarat injektif : setiap domain dipetakan dengan kodomain yang berbeda

$\therefore$ f tidak injektif karena 1 dan 2 yang berada didalam domain dipetakan ke kodomain yang sama yaitu 0 ▨

c. Syarat surjektif : untuk setiap kodomain k dapat dicari a dalam domain sehingga $f(a) = k$

$\therefore$ f tidak surjektif, ada kodomain 6 yang tidak memiliki prapeta

6\. a. $f(x) = \lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil x \rceil$

tidak memiliki invers karena $f(x)$ tidak injektif, terdapat domain seperti 1,5 dan 1,7 yang memiliki pemetaan yang sama yaitu 2 sehingga tidak bijektif ▨

b. $f^{-1}(x) = \frac{2x}{3}$

memiliki invers karena bijektif. untuk setiap a dan b dalam domain jika $a \neq b$ maka $3a \neq 3b \rightarrow \frac{3a}{2} \neq \frac{3b}{2}$ $\Rightarrow f(a) \neq f(b)$ sehingga injektif dan untuk setiap c dalam domain dapat dipilih $a = \frac{2}{3}c$ sehingga $f(a) = c$ maka surjektif ▨

c. $f^{-1}(x) = \frac{x}{\pi} - 4$

f memiliki invers karena f merupakan fungsi linear dan semua fungsi linear adalah bijektif ▨

2 2 0 6 0 2 8 9 3 2

ALDEN LUTHFI

7\. a. Syarat surjektif : setiap pemetaan memiliki prapeta

karena $f \circ g$ surjektif maka untuk setiap $c \in C$ dapat dicari $a \in A$ sehingga $f \circ g(a) = c$

misal $g(a) = b$, karena $f \circ g(a) = f(g(a)) = f(b) = c$ maka untuk setiap $c \in C$ dapat dicari $b \in B$ sehingga $f(b) = c$

$\therefore$ f itu surjektif ▨

b. f injektif maka untuk setiap $b_1, b_2 \in B$ dengan $b_1 \neq b_2$ maka $f(b_1) \neq f(b_2)$

g injektif maka untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ maka $g(a_1) \neq g(a_2)$

misal $g(a_1) = b_1$ dan $g(a_2) = b_2$, karena $a_1 \neq a_2$ maka $b_1 \neq b_2$ maka $f(b_1) \neq f(b_2) \rightarrow f(g(a_1)) \neq f(g(a_2))$ $\rightarrow f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$ maka $f \circ g$ injektif

8\. a. $f \circ g(x) = 4x^2 + 4x + 5$

b. $f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 5$

c. $f(x)g(x) = 2x^3 + x^2 + 8x + 4$

9\. a. $a_n = 6 + n\left(4 + \frac{n-1}{2}\right)$ dengan $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$b_n = 4n^2 - 8n + 12$ dengan $n \in \{1, 2, 3 \ldots\}$

$c_n = 12 + 9n$ dengan $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

b. $\sum_{n=1}^{7} 4n^2 - 8n + 12 = 420$ c. $230 \cdot 420 = 96600$

ALDEN LUTHFI
2206028932

9. b. Teorema

(i) $\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$ (iii) $\sum_{n=1}^{k} c = ck$

(ii) $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k}{2}(k+1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{7} 4n^2 - 8n + 12$

$= 4\sum_{n=1}^{7} n^2 - 8\sum_{n=1}^{7} n + 12\sum_{n=1}^{7} 1 = \frac{7}{6}(8)(15) + \frac{7}{2}(8) + 84 = 420$

(c) $\sum_{n=4}^{8} 6 + n\left(4 + \frac{n-1}{2}\right) = \sum_{n=5}^{9} 6 + (n-1)\left(4 + \frac{n-2}{2}\right)$

$= \sum_{n=5}^{9} 6 + n^2 + 5n - 6 = \sum_{n=5}^{9} n^2 + 5n$

$= \sum_{n=5}^{9} n^2 + 5\sum_{n=5}^{9} n = \sum_{n=1}^{5} (n+4)^2 + 5\sum_{n=1}^{5} (n+4)$

$= \sum_{n=1}^{5} n^2 + 8\sum_{n=1}^{5} n + 16\sum_{n=1}^{5} + 5\left(\sum_{n=1}^{5} n + 4\sum_{n=1}^{5} 1\right)$

$= 230$

$\sum_{n=6}^{10} 12 + 9n = \sum_{1}^{5} 12 + 9(n+5) = \sum_{n=1}^{5} 9n + 57 = 420$

$\therefore \sum_{n=4}^{8} 6 + n\left(4 + \frac{n-1}{2}\right) \cdot \sum_{n=6}^{10} 12 + 9n = 96600$

ALDEN LUTHFI
2206028932

10. a. perhatikan bahwa $x(x+2)$ akan selalu bernilai positif untuk $x \in \mathbb{Z}^+$, misal $f(x) = x(x+2)$, $f: \mathbb{Z}^+ \to A$

(i) untuk $x_1 \neq x_2$, $x_1 + 2 \neq x_2 + 2$ sehingga $f(x_1) \neq f(x_2)$ untuk $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$ maka f injektif

(ii) untuk setap $a \in A$ dapat diambil $x_i = \sqrt{a+1} - 1$ sehingga $f(x_i) = a$ untuk $x_i \in \mathbb{Z}^+$ maka f surjektif
x_i akan selalu ≥ 1 karena elemen terkecil A adalah $f(1) = 3$

$\therefore$ karena ada korespondensi bijektif antara $\mathbb{Z}^+$ dan A maka set A countably infinite

b. Teorema : gabungan 2 set countable adalah countable

$B_1 = \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

$B_2 = \left\{ \frac{x-1}{x+1} \mid x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

(i) misal $f: \mathbb{Z}^+ \to B_1$, $f(x) = \frac{-x}{x+1}$
$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ akan selalu bernilai negatif untuk $x \in \mathbb{Z}^+$ maka dari definisi fungsi turun $f(a) > f(b)$ untuk $a < b$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$ karena $f(a) \neq f(b)$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}^+$ maka f injektif ~~karena untuk~~ $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$

untuk semua $b \in B_1$ dapat diambil $x_i \in \mathbb{Z}^+ = -\frac{b}{b+1}$ sehingga $f(x_i) = b$ maka f surjektif

$\therefore$ karena ada korespondensi bijektif antara $\mathbb{Z}^+$ dan B_1 maka B_1 countably infinite

ALDEN LUTHFI

2206028932

(ii) misal $g: \mathbb{Z}^+ \to B_2$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$g'(x)$ akan selalu bernilai positif untuk $x \in \mathbb{Z}^+$
maka dari definisi fungsi naik untuk $a > b$ $a, b \in \mathbb{Z}^+$
$g(a) > g(b)$ maka dapat disimpulkan jika $a \neq b$ $a, b \in \mathbb{Z}^+$
maka $f(a) \neq f(b)$ sehingga g injektif

untuk semua $b \in B_2$ dapat diambil $x_i \in \mathbb{Z}^+ = -\frac{b+1}{b-1}$ sehingga
$g(x_i) = b$ maka g sunjektif

$\therefore$ karena ada korespondensi bijektif antara $\mathbb{Z}^+$ dan B_2
maka B_2 bersifat countably infinite

$\therefore$ sehingga $B_1 \cup B_2 = B$ bersifat countably infinite
dengan kardinalitas $\aleph_0$

(11.) base case :
$P(n)$: $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5

$P(1)$: $3^2 + 2^4 = 25$ habis dibagi 5 , $P(1)$ bernilai benar

induction step

$P(k)$: $3^{2k} + 2^{2k+2} = 3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k}$ habis dibagi 5
$= 5p$ untuk $p \in \mathbb{Z}^+$

$P(k+1)$: $3^{2k+2} + 2^{2k+4} = 9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$
$= 5 \cdot 3^{2k} + 4(3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k})$
$= 5 \cdot 3^{2k} + 4(5p) = 5(3^{2k} + 4p)$

maka $P(k) \to P(k+1)$ terbukti
$\therefore$ $P(n)$ bernilai benar untuk $n \in \mathbb{Z}^+$

ALDEN LUTHFI
2206028932

(12.) $P(n): 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$

Base case :

$P(0): 1^3 = (0+1)^2(0+0+1)$

$1 = 1$

P(0) bernilai benar

Induction step :

$P(k): 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k+1)^3 = (k+1)^2(2k^2+4k+1)$

$= 2k^4 + 8k^3 + 11k^3 + 6k + 1$

$P(k+1): 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k+1)^3 + (2k+3)^3 = (k+2)^2(2(k+1)^2 + 4k+5)$

$= 2k^4 + 16k^3 + 47k^2 + 60k + 28$

$= (2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1) + (8k^3 + 36k^2 + 54k + 27)$

$= (k+1)^2(2k^2+4k+1) + (2k+3)^3$

maka terbukti $P(k) \rightarrow P(k+1)$

sehingga $P(n)$ bernilai benar untuk $n \in \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

ALDEN LUTHFI
2206028932

(13.) $P(n): 2^n > n^2 + n$

Base case:

$P(5): 2^5 > 25+5 \Rightarrow 32 > 30$ benar

$P(6): 2^6 > 36+6 \Rightarrow 64 > 42$ benar

$P(7): 2^7 > 49+7 \Rightarrow 128 > 56$ benar

$P(8): 2^8 > 64+8 \Rightarrow 256 > 72$ benar

$P(9): 2^9 > 81+9 \Rightarrow 512 > 90$ benar

Induction step :

asumsikan $P(j)$ benar untuk $5 \leq j \leq k$, $k \geq 9$

$P(k-1)$ benar karena $5 \leq k-1 \leq k$, $k \geq 9$

maka $2^{k-1} > (k-1)^2 + (k-1)$

$\frac{2^k}{2} > k^2 - k$

$4 . \frac{2^k}{2} > 4k^2 - 4k$

$2 . 2^k > 4k^2 - 4k$

$= (3k^2 - 7k - 2) + (k^2 + 3k + 2)$

$\geq 18 + (k^2 + 3k + 2)$ untuk $k \geq 5$

$= 18 + (k^2 + 2k + 1 + k + 1)$

$> (k^2 + 2k + 1) + k + 1$

$= (k+1)^2 + (k+1)$

$\therefore 2^{k+1} > (k+1)^2 + (k+1)$

maka dari itu terbukti $2^n > n^2 + n$ untuk $n \geq 5$ atau n bilangan bulat lebih dari 4