Bab 2
Limit dan Kekontinuan

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Referensi, Kredit, dan Kontak

Referensi Utama

Varberg, Dale; Edwin J. Purcell; Steven E. Rigdon. Calculus, 9th Edition, Prentice Hall, 2006.

Kredit

Slide ini menggunakan tema Blue Connections Cordelia Presentation Template (https://www.slidescarnival.com/cordelia-free-presentation-template/216).

Kontak

Segala bentuk pertanyaan, kritik, dan saran mengenai slide ini dapat disampaikan via email ke okkyibrohim@cs.ui.ac.id.

Outline

- Pengantar
- Definisi formal limit
- Teorema limit
- Kontinuitas fungsi
- Teorema limit untuk fungsi kontinu
- Limit fungsi transendental: teorema dan aplikasi
- Limit menuju tak hingga dan limit tak hingga
- Asimtot datar dan tegak

Sub 2.1

Pengantar

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Makna limit secara intuisi

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa ketika x dekat tetapi berlainan dari c maka $f(x)$ dekat ke L.

Contoh 1 pemaknaan limit secara intuisi

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 3} (4x - 5)$

Solusi:

Ketika x dekat 3, maka $4x - 5$ dekat terhadap $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Contoh 2 pemaknaan limit secara intuisi

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

Solusi:

Perhatikan bahwa $\frac{x^2-x-6}{x-3}$ tidak terdefinisi di $x = 3$, tetapi itu tidak masalah. Untuk mendapatkan gagasan tentang apa yang terjadi Ketika x mendekati 3, kita dapat menggunakan kalkulator untuk menghitung ekspresi yang diberikan, misalnya 3,1; 3,01; 3,001, dan seterusnya. Tetapi akan lebih baik apabila kita sederhanakan dengan menggunakan aljabar.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x+2) = 3 + 2 = 5$$

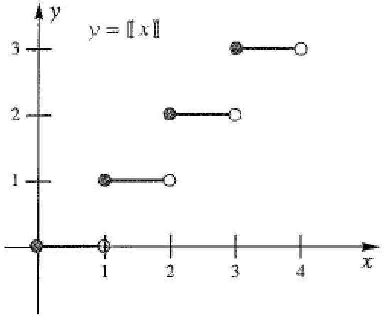
Pencoretan $x - 3$ dalam Langkah kedua diperbolehkan karena definisi limit mengabaikan perilaku tepat di $x = 3$. ingat, $\frac{x-3}{x-3} = 1$ selama x tidak sama dengan 3.

Contoh 3 pemaknaan limit secara intuisi (tidak ada limit pada suatu lompatan)

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$

Solusi:



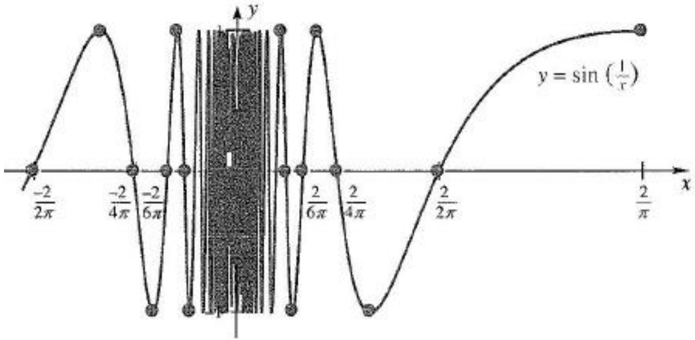
Kesimpulan kita adalah bahwa $\lim_{x \to 2} [\![x]\!]$ tidak ada.

Contoh 4 pemaknaan limit secara intuisi (terlalu banyak goyangan)

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Solusi:



Kita simpulkan bahwa $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tidak ada.

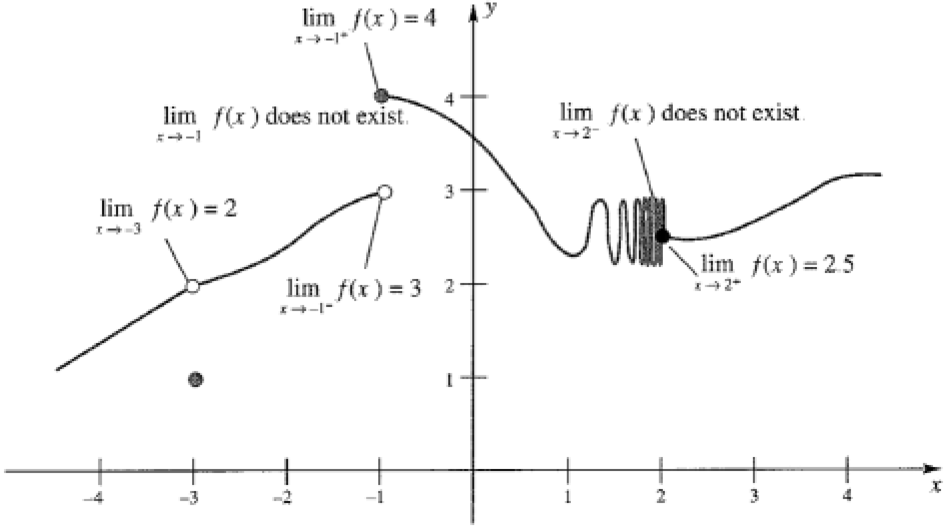
Limit-limit Satu Sisi

Definisi Limit Kiri dan Limit Kanan

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kanan c, maka $f(x)$ dekat ke-L. Demikian pula, untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ berarti bahwa ketika x dekat tetapi pada sebelah kiri c, maka $f(x)$ dekat ke-L.

Teorema

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$



Sub 2.2

Definisi Formal Limit

UNIVERSITAS INDONESIA

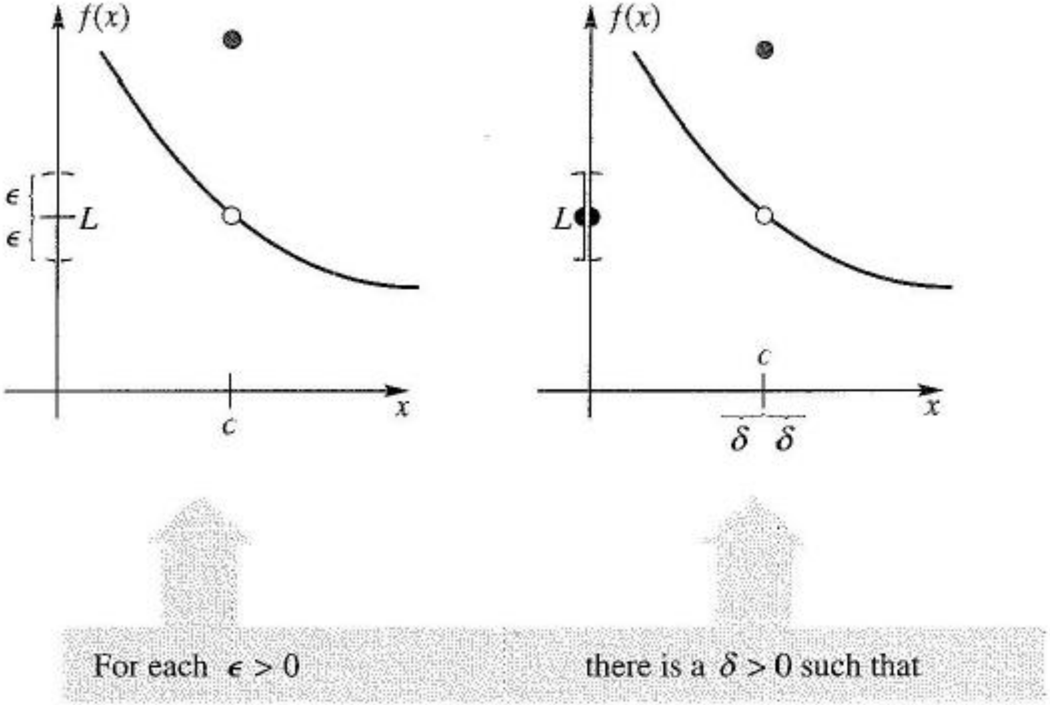
Veritas, Probitas, Iustitia

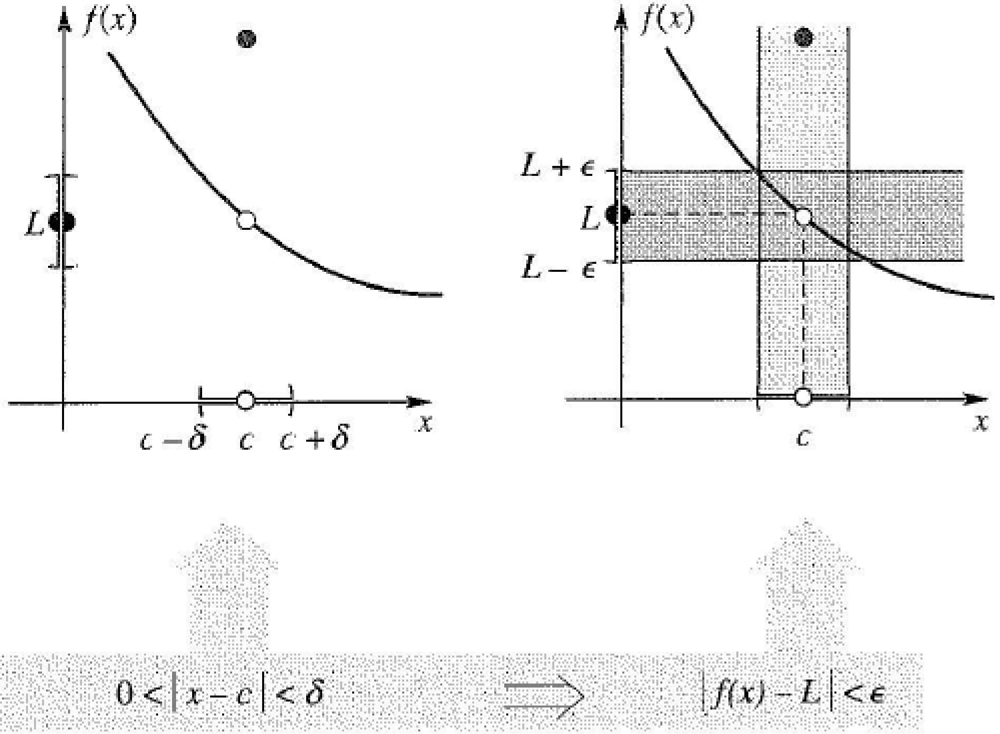
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Pengertian Presisi Limit

Mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapa pun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, yakni

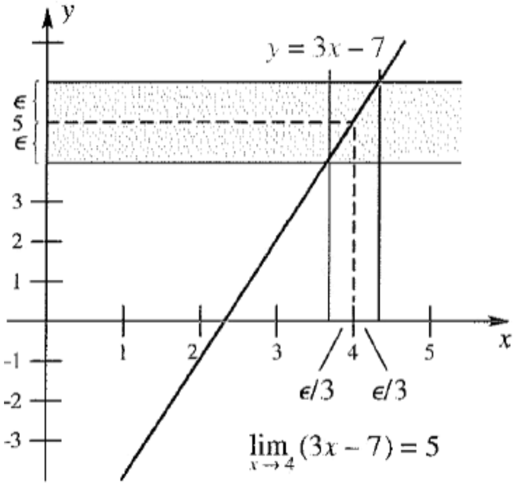
$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$


f(x)
ϵ
ϵ
L
c
x
f(x)
L
c
x
δ δ
For each ϵ > 0
there is a δ > 0 such that


$f(x)$
L
$c-\delta$
c
$c+\delta$
x
$f(x)$
$L+\epsilon$
L
$L-\epsilon$
c
x
$0<|x-c|<\delta \implies |f(x)-L|<\epsilon$

Contoh 1 definisi limit formal

Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$



Solusi

Analisis Pendahuluan

Misalkan ε bilangan positif sebarang. Kita harus menghasilkan suatu $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$0 < |x - 4| < \delta \Longrightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Pandang pertidaksamaan di sebelah kanan

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3||(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |(x - 4)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Sekarang kita lihat bagaimana memilih δ, yakni $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Tentu saja, sebarang δ yang lebih kecil akan memenuhi

Bukti Formal

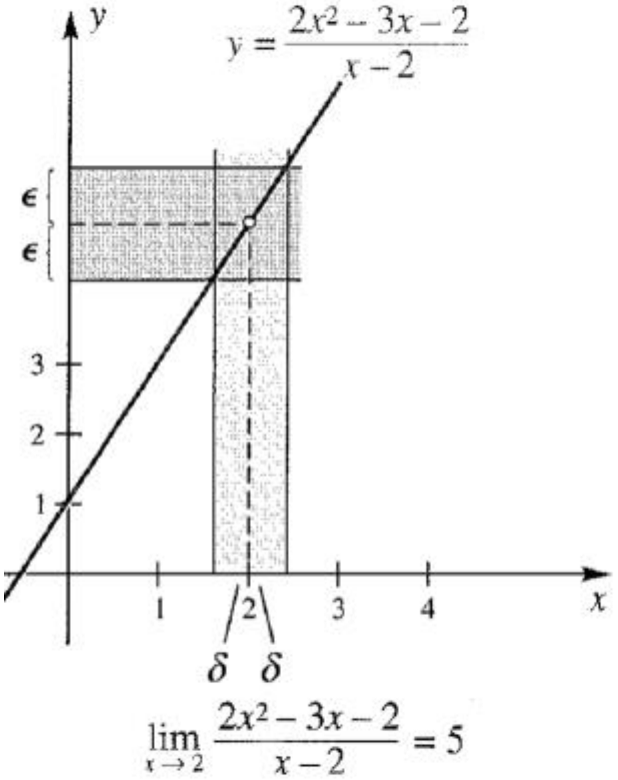
Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Maka $0 < |x - 4| < \delta$ mengimplikasikan

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3\,|(x - 4)| < 3\delta = \varepsilon$$

Contoh 2 definisi limit formal

Buktikan bahwa

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$$



Solusi

Analisis Pendahuluan

Kita mencari δ sedemikian rupa sehingga

$$0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| < \varepsilon$$

Sekarang untuk $x \neq 2$,

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5\right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |(2x+1)-5| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |2(x-2)| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |2||(x-2)| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow |(x-2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ini menunjukkan bahwa $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ akan memenuhi.

Bukti Formal

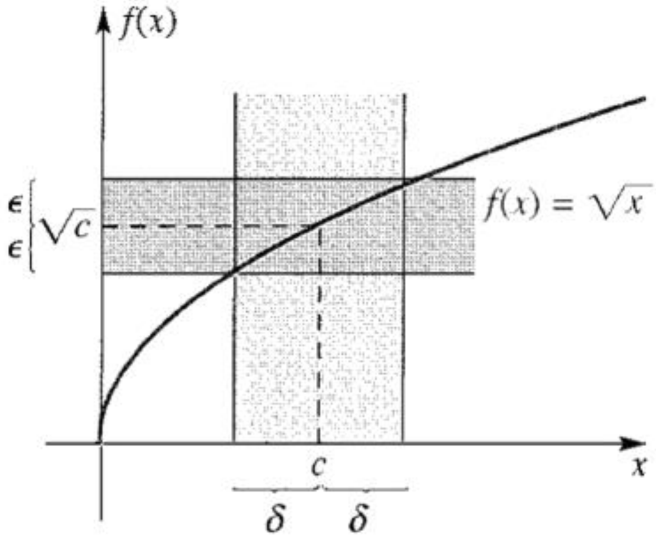
Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Dari $0 < |x-2| < \delta$ kita peroleh

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5\right| = |(2x+1)-5| = |2(x-2)| = 2|(x-2)| < 2\delta = \varepsilon$$

Pencoretan factor $x-2$ sah karena $0 < |x-2|$ mengimplikasikan $x \neq 2$, dan $\frac{x-2}{x-2} = 1$ selama $x \neq 2$.

Contoh 3 definisi limit formal

Buktikan bahwa jika $c > 0$, $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$



$\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

Solusi

Analisis Pendahuluan

Lihat pada gambar. Kita harus mencari δ sedemikian rupa sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| < \varepsilon$$

Sekarang

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}}$$

Untuk membuat yang belakang lebih kecil daripada ε, disyaratkan bahwa kita membuat $|x - c| < \varepsilon\sqrt{c}$.

Bukti Formal

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$. Maka $0 < |x - c| < \delta$ mengimplikasikan bahwa

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon$$

Terdapat satu hal teknis di sini. Kita mulai dengan $c > 0$, tetapi dapat terjadi bahwa c berada sangat dekat ke 0 pada sumbu-x. Kita seharusnya bersikeras bahwa $\delta \leq c$, karena dengan demikian $|x - c| < \delta$ mengimplikasikan $x > 0$ sehingga $\sqrt{x}$ terdefinisi. Jadi untuk memperoleh tingkat ketelitian yang tinggi, pilih δ yang lebih kecil di antara c dan $\varepsilon\sqrt{c}$.

Limit Satu Sisi

Limit Kanan

Mengatakan $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

$$0 < x - c < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limit Kiri

Mengatakan $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

$$-\delta < x - c < 0 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Latihan 1 definisi limit formal

Buktikan $\lim_{x \to 2} (6x - 4) = 8$

Latihan 2 definisi limit formal

Buktikan $\lim_{x \to 1} \left(\frac{3x^2-6x-24}{x-4}\right) = 9$

Latihan 3 definisi limit formal

Buktikan $\lim_{x \to 3} (x^2 + x - 5) = 7$

Analisis Pendahuluan

Bukti Formal

Sub 2.3

Teorema Limit

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Teorema A: Teorema Limit Utama

Misalkan n bilangan bulat positif, k konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c. Maka

1. $\lim_{x \to c} k = k$;
2. $\lim_{x \to c} x = c$;
3. $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$;
7. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ ketika n genap.

Contoh 1 Teorema Limit Utama

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x)$

Solusi:

$$\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x) = \lim_{x \to 4} 3x^2 - \lim_{x \to 4} 2x = 3 \lim_{x \to 4} x^2 - 2 \lim_{x \to 4} x = 3\left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 - 2 \lim_{x \to 4} x$$

$$= 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

Contoh 2 Teorema Limit Utama

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

Solusi:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} = \frac{\lim_{x\to4} \sqrt{x^2+9}}{\lim_{x\to4} x} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to4} (x^2+9)}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x \to 4} x^2 + \lim_{x \to 4} 9}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left[\lim_{x \to 4} x\right]^2 + 9} = \frac{1}{4}\sqrt{[4]^2 + 9} = \frac{5}{4}$$

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

Latihan 1 Teorema Limit Utama

Carilah $\lim_{x \to 10} \left(4x + \sqrt[3]{x - 2}\right)$

Latihan 2 Teorema Limit Utama

Misal diberikan $\lim_{x \to 8} f(x) = -9$; $\lim_{x \to 8} g(x) = 2$ dan $\lim_{x \to 8} h(x) = 4$. Carilah

a. $\lim_{x \to 8} [2f(x) - 12h(x)]$

b. $\lim_{x \to 8} [g(x)h(x) - f(x)]$

c. $\lim_{x \to 8} [\sqrt[3]{g(x)h(x)} + 6]$

Teorema B: Teorema Substitusi

Jika f fungsi polynomial atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

asalkan $f(c)$ terdefinisi. Dalam kasus fungsi rasional, ini bermakna bahwa nilai penyebut pada c tidak nol.

Contoh 1 Teorema Substitusi

Soal:

Carilah $\lim\limits_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Solusi:

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$

Contoh 2 Teorema Substitusi

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 1} \frac{x^3+3x+7}{x^2-2x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3+3x+7}{(x-1)^2}$

Solusi:

Baik Teorema Substitusi ataupun Teorema Limit Utama tidak berlaku, karena limit dari penyebut 0. Tetapi, karena limit pembilang adalah 11, kita lihat bahwa selama x dekat 1, kita membagi sebuah bilangan dekat 11 dengan sebuah bilangan positif dekat 0. Hasilnya sebuah bilangan positif yang besar. Kenyataannya, bilangan yang dihasilkan dapat dibuat besar sekehendak kita dengan membiarkan x cukup dekat ke 1. Kita katakana bahwa limitnya tidak ada. Nanti dalam bab ini (lihat Subbab 2.6) kita akan mengatakan bahwa limitnya adalah $+\infty$.

Latihan 1 Teorema Subtitusi

Carilah $\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x)$

Latihan 2 Teorema Subtitusi

Carilah $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2+x-6}{x-2}\right)$

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Teorema C

Jika $f(x) = g(x)$ untuk semua x di dalam suatu interval terbuka yang mengandung bilangan c, terkecuali mungkin pada bilangan c sendiri, dan jika $\lim_{x \to c} g(x)$ ada, maka $\lim_{x \to c} f(x)$ ada dan $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$.

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Contoh 1 Teorema C

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solusi:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x}+1 = \sqrt{1}+1 = 2$$

Contoh 2 Teorema C

Soal:

Carilah $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$

Solusi:

Teorema Substitusi tidak dapat digunakan. Tetapi kali ini, hasil bagi mengambil tanpa arti $\frac{0}{0}$ pada $x = 2$. Ketika ini terjadi kita harus mencari suatu cara penyederhanakan seperti halnya pemfaktoran.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x+3} = \frac{7}{5}$$

Identitas yang kedua sebelum yang terakhir dibenarkan oleh Teorema C karena

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}$$

untuk semua x kecuali $x = 2$. Segera kita menerapkan Teorema C, kita dapat menghitung limit dengan substitusi, yakni dengan menerapkan Teorema Substitusi.

Latihan 1 Teorema C

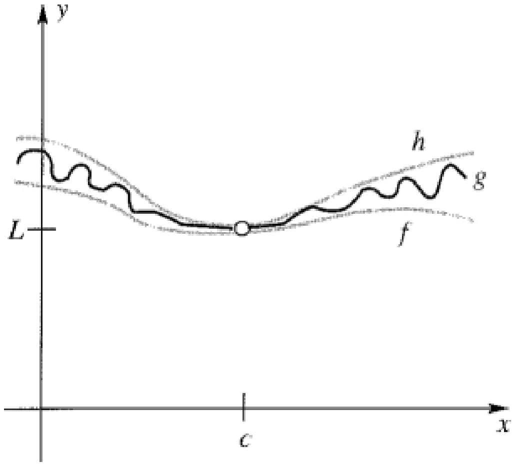
Carilah $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2+x-12}{x^2-2x-3}\right)$

Latihan 2 Teorema C

Jika ada, carilah $\lim_{x \to 1} \left(\frac{|x-1|}{x-1}\right)$

Teorema D : Teorema Apit (*Squeeze Theorem*)

Misalkan $f, g,$ dan h adalah fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, terkecuali mungkin pada c. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$.



Contoh Teorema Apit

Soal:

Asumsikan bahwa kita telah membuktikan bahwa $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ untuk semua x yang dekat tetapi berlainan dengan 0. Apa yang kita simpulkan tentang $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$?

Solusi:

Misalkan $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, dan $h(x) = 1$. Menyusul bahwa $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0} h(x)$ dan akibatnya, menurut Teorema Apit,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Latihan 1 Teorema Apit

Jika $\forall x \in \mathbb{R}$ berlaku $2x \leq f(x) \leq x^2 + 1$, carilah $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Latihan 2 Teorema Apit

Tunjukan bahwa $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Sub 2.4

Kontinuitas Fungsi

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Kontinuitas di Satu Titik

Misalkan f terdefinisi pada suatu interval terbuka yang mengandung c. Kita katakana bahwa f **kontinu** di c jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Dengan definisi ini kita bermaksud mensyaratkan 3 hal:

1. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
2. $f(c)$ ada (yakni, c berada dalam daerah asal f), dan
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga ini tak terpenuhi, maka f **diskontinu** di c.

Contoh 1 kontinuitas fungsi

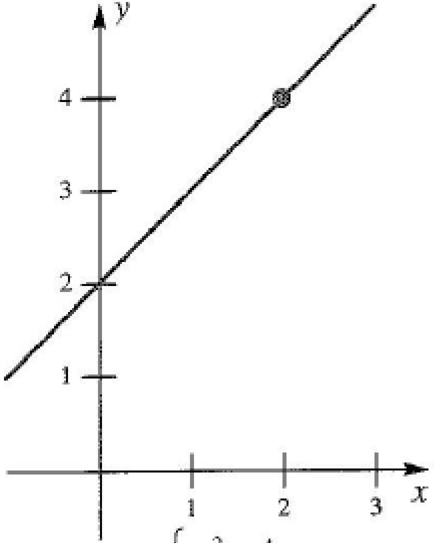
Soal:

Misalkan $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$. Bagaimana seharusnya f didefinisikan di $x = 2$ agar kontinu di titik itu?

Solusi:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Karena itu, kita definisiikan $f(2) = 4$. Grafik dari fungsi yang dihasilkan diperlihatkan pada gambar. Kenyataannya, kita lihat bahwa $f(x) = x + 2$ untuk semua x.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Kontinuitas di Satu Titik

Titik diskontinuitas di c disebut dapat dipindahkan (*removeable*) jika fungsi dapat didefinisikan atau didefinisikan ulang pada c sehingga membuat fungsi kontinu. Jika tidak, suatu titik diskontinuitas disebut tak dapat dipindahkan (*non removeable*).

Latihan 1 Kontinuitas Fungsi

Diberikan suatu fungsi sebagai berikut

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + x, & jika\ x < 1 \\ a, & jika\ x = 1 \\ 3x + 5, & jika\ x > 1 \end{cases}$$

Apakah ada nilai a sedemikian sehingga fungsi $h(x)$ kontinu dititik $x = 1$

Latihan 2 Kontinuitas Fungsi

Tentukan dimana saja $f(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$ tidak kontinu (jika ada). Jika terdapat titik diskontinu, tentukan apakah *removable* atau *non-removable*.

Latihan 3 Kontinuitas Fungsi

Tentukan dimana saja $g(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ tidak kontinu (jika ada). Jika terdapat titik diskontinu, tentukan apakah *removable* atau *non-removable*.

Sub 2.5

Teorema Limit untuk Fungsi Kontinu

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Kontinuitas Fungsi yang Dikenal

Teorema A: Kontinuitas Fungsi Polinomial dan Rasional

Fungsi polinomial kontinu di setiap bilangan real C. Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan real c dalam daerah asalnya, yaitu kecuali di mana penyebutnya nol.

Teorema B: Kontinuitas Fungsi Nilai Mutlak dan Fungsi Akar ke-n

Fungsi nilai mutlak adalah kontinu di setiap bilangan real c. Jika n ganjil, fungsi akar ke- n kontinu di setiap bilangan real c. Jika n genap, fungsi akar ke- n kontinu di setiap bilangan real positif c.

Teorema C: Kontinuitas di dalam Operasi Fungsi

Jika f dan g kontinu di c, maka demikian juga kf, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (asalkan $g(c) \neq 0$), f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$ jika n genap).

Kontinuitas Fungsi yang Dikenal (lanjutan)

Teorema D: Kontinuitas Fungsi-Fungsi Trigonometri

Fungsi sinus dan kosinus kontinu di setiap bilangan real c. Fungsi $\tan x$, $\cot x$, dan $\csc x$ kontinu di setiap bilangan real c dalam daerah asalnya.

Teorema E: Teorema Limit Komposit

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan jika f kontinu di L, maka

$$\lim_{x \to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

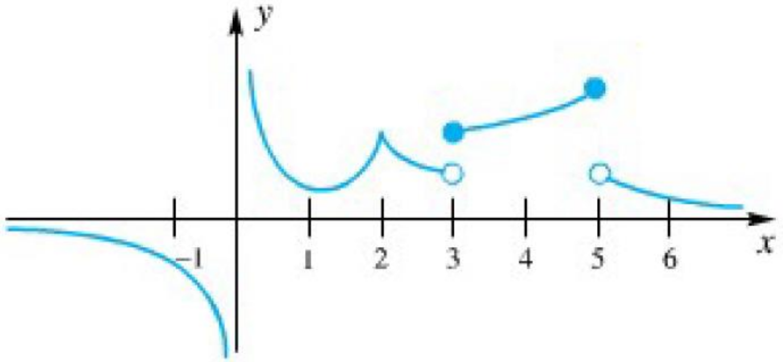
Khususnya, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c.

Kontinuitas pada Interval

Fungsi f adalah kontinu kanan pada a jika $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan kontinu kiri pada b jika $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Kita katakan f kontinu pada sebuah interval terbuka jika f kontinu pada setiap titik dari interval tersebut. Dia kontinu pada sebuah interval tertutup $[a, b]$ jika kontinu pada (a, b), kontinu kanan pada a, dan kontinu kiri pada b.

Contoh kontinuitas pada interval

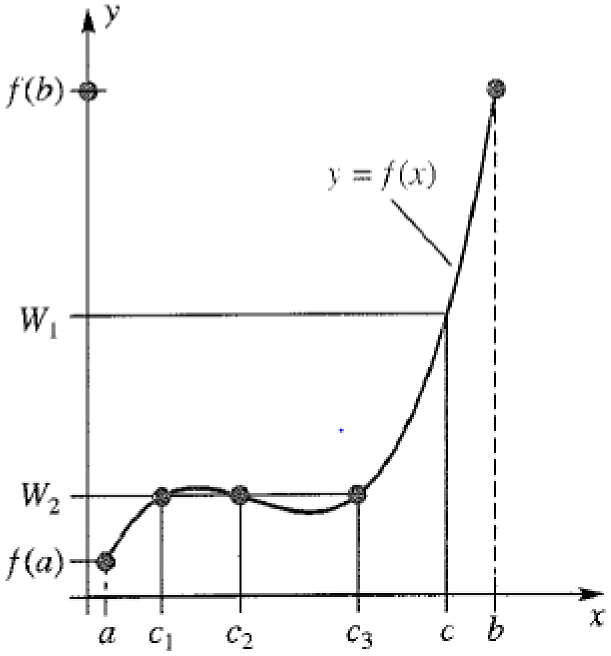
Soal:
Dengan menggunakan definisi kontinuitas pada interval, uraikan sifat-sifat kontinuitas dari fungsi yang grafiknya disketsakan pada gambar berikut.



Solusi:
Fungsi nampaknya kontinu pada interval terbuka $(-\infty, 0), (0, 3)$, dan $(5, \infty)$ dan juga pada interval tertutup $[3, 5]$.

Teorema Nilai Antara

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada $[a, b]$ dan misalkan W bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$. Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka terdapat paling sedikit sebuah bilangan c di antara a dan b sedemikian rupa sehingga $f(\mathrm{c}) = \mathrm{W}$.



FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

Latihan 1 Teorema Limit untuk Fungsi Kontinu

Misal diberikan $g(x) = \frac{x^2-3x-1}{x^2-x-6}$. Dengan teorema-teorema limit untuk fungsi kontinu, tunjukan bahwa $h(x) = \sin(g(x))$ diskontinu di $x = 3$ dan $x = -2$.

Latihan 2 Teorema Limit untuk Fungsi Kontinu

Dengan teorema-teorema limit untuk fungsi kontinu, tunjukan bahwa daerah asal alami (*natural domain*) dari $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ adalah $[-2,2]$

Sub 2.6

Limit Fungsi Transendental: Teorema dan Aplikasi

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Limit Fungsi Trigonometri

Untuk setiap bilangan real c di dalam daerah asal fungsi,

1. $\lim_{t \to c} \sin t = \sin c$
2. $\lim_{t \to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim_{t \to c} \tan t = \tan c$
4. $\lim_{t \to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim_{t \to c} \sec t = \sec c$
6. $\lim_{t \to c} \csc t = \csc c$

Contoh 1 limit fungsi trigonometri

Soal:

Carilah $\lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1}$

Solusi:

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1} = \left(\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t+1}\right)\left(\lim_{t \to 0} \cos t\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

Limit Trigonometri Khusus

1. $$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

2. $$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Contoh 1 limit trigonometri khusus

Soal:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

Solusi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\,\frac{\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

Di sini argument terhadap fungsi sinus adalah $3x$, bukan hanya x seperti yang disyaratkan oleh Teorema B. Misalkan $y = 3x$. Maka $y \to 0$ jika dan hanya jika $x \to 0$, sehingga

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Jadi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$$

Contoh 2 limit trigonometri khusus

Soal:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t}$$

Solusi:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t}}{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

Contoh 3 limit trigonometri khusus

Soal:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}$$

Solusi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{4\sin 4x}{4x}}{\dfrac{\sin x}{x\cos x}} = \frac{4\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}{\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)} = \frac{4}{1\cdot 1} = 4$$

Latihan 1 Limit Trigonometri

Tentukan limit fungsi berikut $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x}$

Latihan 2 Limit Trigonometri

Tentukan limit fungsi berikut $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 3\theta}{\tan \theta}$

Latihan 3 Limit Trigonometri

Tentukan limit fungsi berikut $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(3t) + 4t}{t \sec t}$

Latihan 4 Limit Trigonometri

Tentukan limit fungsi berikut $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cot \pi\theta \sin \theta}{2 \sec \theta}$

Sub 2.7

Limit Menuju Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Limit ketika $x \to \infty$

Misalkan f terdefinisi pada $[c, \infty)$ untuk suatu bilangan c. Kita katakan bahwa $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ jika untuk masing-masing $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

$$x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limit ketika $x \to -\infty$

Misalkan f terdefinisi pada $(-\infty, c]$ untuk suatu bilangan c. Kita katakan bahwa $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ jika untuk masing-masing $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian rupa sehingga

$$x < M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh 1 limit menuju tak hingga

Soal:

Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2} = 0$

Solusi:

Kita gunakan cara yang biasa: bagilah pembilang dan penyebut dengan pangkat x tertinggi yang muncul di penyebut, yaitu x^2.

.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{\mathrm{x}^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Contoh 2 limit menuju tak hingga

Soal:

Carilah $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$

Solusi:

Untuk mencari limit, bagi pembilang dan penyebut dengan x^3

.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^3}+1} = \frac{2}{0+1} = 2$$

Limit Tak Hingga

Kita katakana bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$ jika untuk masing-masing bilangan positif M berpadanan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Terdapat definisi-definisi yang berpadanan dari

$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Contoh 1 limit tak hingga

Soal:

Carilah $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$

Solusi:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

Ketika $x \to 2^+$ kita lihat bahwa $x+1 \to 3, x-3 \to -1,$ dan $x-2 \to 0^+$; jadi pembilang mendekati 3, tetapi penyebut negative dan mendekati 0. Kita simpulkan bahwa

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

Latihan Limit Menuju Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

Carilah nilai limit berikut

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-5)(3-x)}$

2. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

3. $\lim_{\theta \to \infty} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2 - 5}$

4. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x \right)$

5. $\lim_{y \to -\infty} \frac{9y^3+1}{y^2-2y+2}$

6. $\lim_{t \to -\infty} \left(t^{\frac{1}{3}} + 12t - 2t^2 \right)$

7. $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$

8. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

9. Untuk $g(x) = \frac{x+7}{x^2-4}$, tentukan

   (a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ **(b)** $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

10. Untuk $g(z) = \frac{z+3}{(z+1)^2}$, tentukan

    (a) $\lim_{z \to -1^-} g(z)$ **(b)** $\lim_{z \to -1^+} g(z)$

Sub 2.8

Asimtot Datar dan Tegak

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Kaitan terhadap Asimtot

Garis $x = c$ adalah **asimtot tegak** grafik $y = f(x)$ jika salah satu dari empat pernyataan berikut benar.

1. $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$
3. $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$
4. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Garis $y = b$ adalah **asimtot datar** grafik $y = f(x)$ jika salah satu pernyataan berikut benar

1. $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$
2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Contoh 1 asimtot

Soal:

Jika ada, carilah asimtot tegak dan datar dari grafik $y = f(x)$ jika $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Solusi:

Seringkali kita mempunyai asimtot tegak pada titik yang bersifat bahwa penyebut nol, dan dalam kasus ini memang demikian karena

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty$$

dan

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

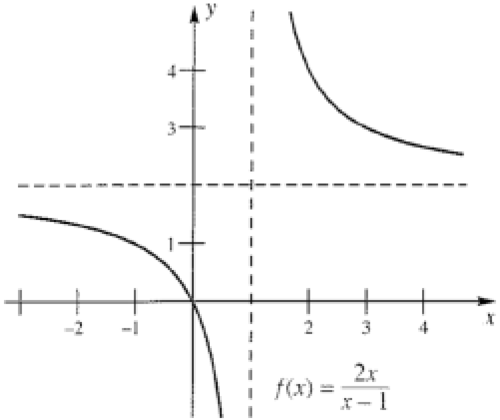
Dengan demikian, $x = 1$ adalah asimtot tegak.
Di lain pihak,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{x}} = 2$$

dan

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Dengan demikian, $y = 2$ adalah asimtot datar.



Latihan Asimtot Fungsi

Jika ada, tentukan asimtot tegak dan asimtot datar dari fungsi-fungsi berikut

1. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$
3. $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{14}{2x^2+7}$
5. $f(x) = x^2$
6. $f(x) = x^3$
7. $f(x) = \dfrac{3}{9-x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
10. $f(x) = 2 + \dfrac{\sin(x)}{x}$

Terima kasih

Muhammad Okky Ibrohim
Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER