Bab 3
Turunan

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Referensi, Kredit, dan Kontak

Referensi Utama

Varberg, Dale; Edwin J. Purcell; Steven E. Rigdon. Calculus, 9th Edition, Prentice Hall, 2006.

Kredit

Slide ini menggunakan tema Blue Connections Cordelia Presentation Template (https://www.slidescarnival.com/cordelia-free-presentation-template/216).

Kontak

Segala bentuk pertanyaan, kritik, dan saran mengenai slide ini dapat disampaikan via email ke okkyibrohim@cs.ui.ac.id.

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Outline

- Pengantar
- Pengertian turunan dan turunan sebagai operator
- Aturan turunan
- Hubungan antara turunan dan kekontinuan
- Turunan fungsi transendental
- Teorema Rolle, Teorema Nilai Tengah, dan Teorema Nilai Rataan untuk Turunan
- Turunan tingkat tinggi
- Turunan implisit
- Turunan fungsi parametrik

Sub 3.1

Pengantar

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

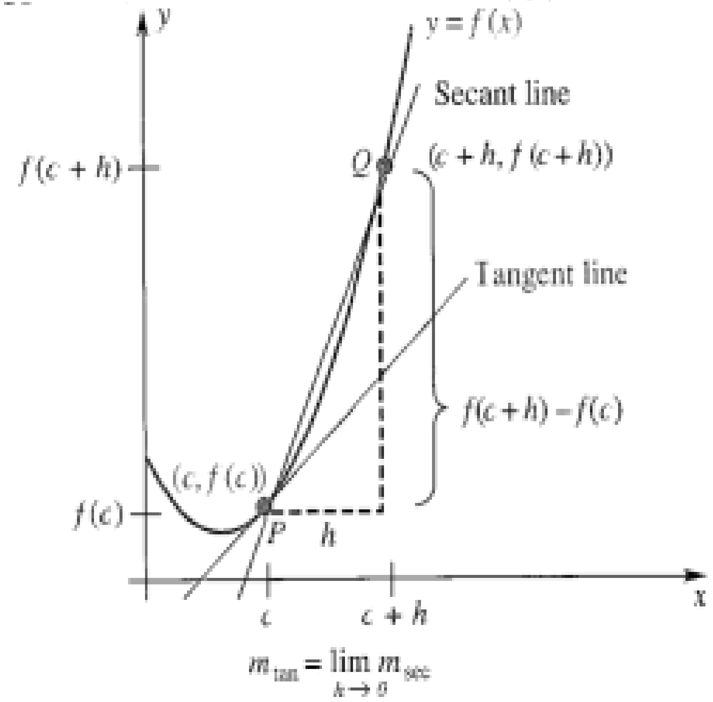
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Garis Singgung

Garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $P\big(c, f(c)\big)$ adalah garis yang melalui P dengan kemiringan

$$m_{\tan g} = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

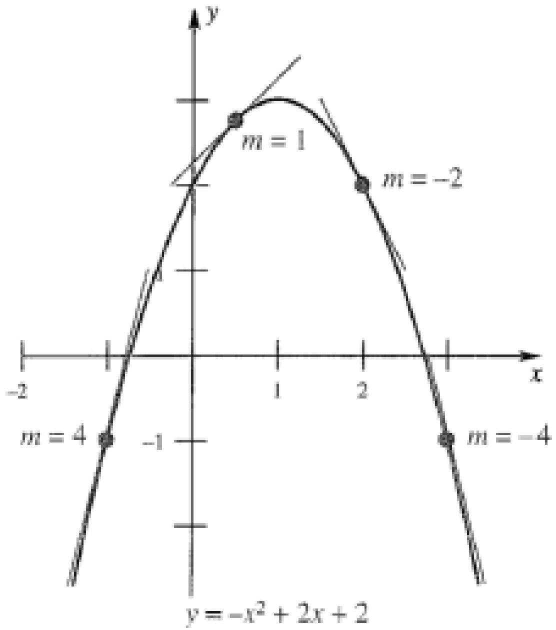
Asalkan bahwa limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$



Contoh 1 Garis Singgung

Soal:

Carilah kemiringan garis singgung pada kurva $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ di titik-titik dengan absis $-1, \frac{1}{2}, 2,$ dan 3.



Contoh 1 Garis Singgung (lanjutan)

Solusi:

Ketimbang membuat empat perhitungan terpisah, lebih baik kita menghitung kemiringan itu pada titik dengan absisnya c dan kemudian mendapatkan empat jawaban yang diinginkan dengan cara substitusi.

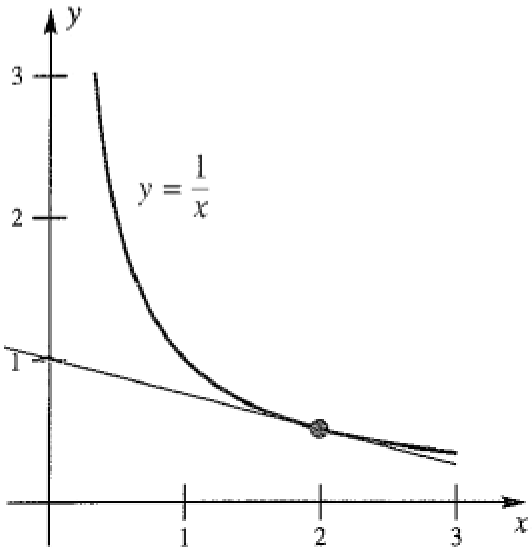
$$
\begin{aligned}
m_{tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(c+h)^2 + 2(c+h) + 2 - (-c^2 + 2c + 2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-c^2 - 2ch - h^2 + 2c + 2h + 2 + c^2 - 2c}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2c - h + 2)}{h} \\
&= -2c + 2
\end{aligned}
$$

Keempat kemiringan yang diinginkan (diperoleh dengan menetapkan $c = -1, \frac{1}{2}, 2,$ dan 3) adalah 4, 1, ~~--~~2, dan -4.

Contoh 2 Garis Singgung

Soal:

Carilah persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = \frac{1}{\mathrm{x}}$ di titik $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.



Contoh 2 Garis Singgung (lanjutan)

Solusi:

Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$
\begin{aligned}
m_{tan} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2-(2+h)}{2(2+h)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2(2+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Dengan mengetahui bahwa kemiringan garis adalah $-\frac{1}{4}$ dan titik $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ berada pada garis itu, dengan mudah kita dapat menuliskan persamaannya dengan menggunakan bentuk kemiringan-titik $y - y_0 = \mathrm{m}(\mathrm{x} - x_0)$. Hasilnya adalah $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)$, atau $y = 1 - \frac{1}{4}x$.

Kecepatan Sesaat

Jika benda bergerak di sepanjang garis koordinat dengan fungsi posisi $f(t)$, maka **kecepatan sesaat** pada saat c adalah

$$y = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan bahwa limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$

Contoh 1 Kecepatan Sesaat

Soal:

Sebuah benda, awalnya diam, jatuh dikarenakan gaya berat. Carilah kecepatan pada $t = 3{,}8$ detik dan pada $t = 5{,}4$ detik. Diketahui $f(t) = 16t^2$.

Solusi:

Kita hitung kecepatan sesaat pada $t = c$ detik. Karena $f(t) = 16t^2$,

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{16(c+h)^2 - 16c^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{16c^2 + 32ch + h^2 - 16c^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 32c + 16h = 32c$$

Jadi, kecepatan sesaat pada $t = 3{,}8$ detik adalah $32(3{,}8) = 121{,}6$ feet per detik, pada $t = 5{,}4$ detik adalah $32(5{,}4) = 172{,}8$ feet per detik.

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Laju Perubahan

- Kecepatan adalah laju perubahan jarak terhadap waktu
- Kita harus membedakan antara laju perubahan rata-rata pada suatu interval dan laju perubahan sesaat pada suatu titik. Istilah laju perubahan tanpa keterangan apa-apa akan bermakna laju perubahan sesaat.

Sub 3.2

Pengertian Turunan dan Turunan Sebagai Operator

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Definisi Turunan

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan bahwa limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$.

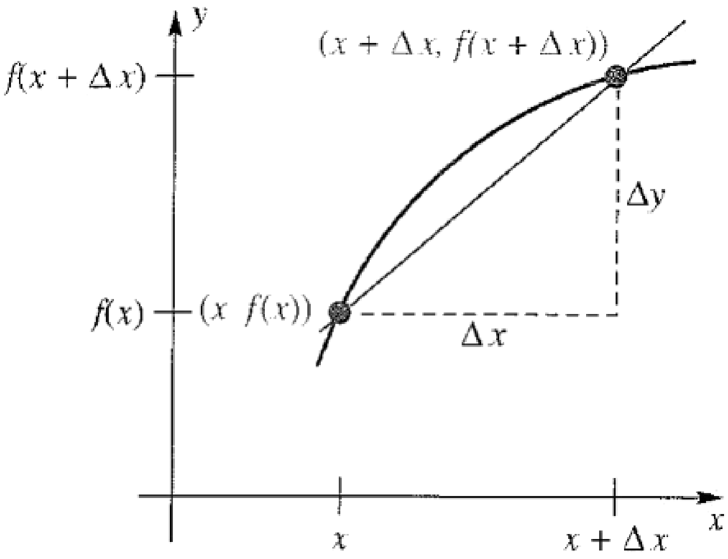
Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa f **terdiferensiasi** di c. Pencarian turunan disebut **diferensial**, bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut **kalkulus diferensial**.

Bentuk Setara untuk Turunan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Lambang Leibniz untuk Turunan: Turunan Sebagai Operator

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x)$$



Notasi untuk Turunan

Dalam subbab ini, kita telah menggunakan semua ragam notasi untuk turunan, yaitu

$$f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

Dan

$$D_x f(x)$$

Sekarang anda seharusnya sudah terbiasa dengan notasi ini. Mereka semuanya akan digunakan.

Latihan

Gunakan definisi turunan untuk mencari turunan dari fungsi berikut

1. $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$
2. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x}$

Sub 3.3

Aturan Turunan

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Teorema A: Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta maka untuk sembarang x, $f'(x) = 0$; yakni,

$$D_x(k) = 0$$

Teorema B: Aturan Fungsi Satuan

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$; yakni,

$$D_x(x) = 1$$

Teorema C: Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan riil tidak sama dengan 0, maka $f'(x) = nx^{n-1}$; yakni,

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Teorema D: Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; yakni,

$$D_x(k \cdot f(x)) = k \cdot D_x f(x).$$

Dalam kata-kata, pengali konstanta dapat dikeluarkan dari operator D_x.

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Teorema E : Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ yakni,

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x).$$

Dalam kata-kata, turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan.

Teorema F: Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; yakni,

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x).$$

Teorema G: Aturan Hasil Kali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ yakni,

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x).$$

Teorema H: Aturan Hasil Bagi

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan dengan $g(x) \neq 0$, maka $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ yakni,

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Aturan Rantai

Teorema:

Misalkan $y = f(u)$ dengan $u = g(x)$. Jika g terdiferensiasikan di x dan f terdiferensiasikan di $u = g(x)$, maka fungsi komposit $f \circ g$, yang didefinisikan oleh $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$, adalah terdiferensiaskan di x dan

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

yakni

$$D_x f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Contoh 1 Aturan Rantai

Soal:

Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, carilah $D_x y$

Solusi:

Kita pikirkan y sebagai pangkat ke-60 suatu fungsi x; yakni $y = u^{60}$ dan $u = 2x^2 - 4x + 1$.

Fungsi sebelah luar adalah $f(u) = u^{60}$ dan fungsi sebelah dalam adalah $u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

Jadi,

$$D_x y = D_x f\big(g(x)\big) = f'(u)g'(x) = (60u^{59})(4x - 4) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

Contoh 2 Aturan Rantai

Soal:

Jika $y = \sin 2x$, carilah $\frac{dy}{dx}$

Solusi:

Langkah terakhir dalam menghitung ekspresi ini adalah mengambil sinus dari besaran $2x$. Jadi, kita mulai dengan menerapkan Aturan Rantai pada fungsi $y = \sin u$ dengan $u = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = (\cos 2x)\left(\frac{d}{dx}2x\right) = 2\cos 2x$$

Contoh 3 Aturan Rantai

Soal:

Carilah $\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3}$

Solusi:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(2x-1)^3} = \frac{d}{dx}(2x-1)^{-3} = -3(2x-1)^{-3-1}\frac{d}{dx}(2x-1) = \frac{6}{(2x-1)^4}$$

Latihan

Gunakan aturan-aturan turunan untuk mencari turunan dari fungsi berikut

1. $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$
2. $f(x) = \frac{5x-4}{3x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{1}{(3x^2+x-3)^9}$

Sub 3.4

Hubungan Antara Turunan dan Kekontinuan

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Keterdiferensiasian Mengimplikasikan Kontinuitas

Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c.

Latihan

Gunakan teorema keterdiferensiasian mengimplikasikan kekontinuan untuk mengetahui apakah fungsi berikut kontinu di $x = c$

1. $f(x) = (x^2 + 5)(x + 4)$ di $x = -4$
2. $f(x) = \frac{2}{(2x^2 - 18)^3}$ di $x = 3$

Sub 3.5
Turunan Fungsi Transendental

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU KOMPUTER

Rumus-Rumus Turunan Trigonometri

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Rumus Turunan untuk $\sin x$ dan $\cos x$

Fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ keduanya terdiferensiasikan untuk setiap x, dan

$$D_x(\sin x) = \cos x \qquad D_x(\cos x) = -\sin x.$$

Rumus Turunan untuk $\tan x$, $sec\ x$, $\cot x$, dan $\csc x$

Untuk semua titik x di dalam daerah asal alami fungsi

$$D_x(\tan x) = \sec^2 x \qquad D_x(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$D_x(sec\ x) = \sec x \ \tan x \qquad D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Rumus-Rumus Turunan Eksponensial dan Logaritma

Rumus Turunan untuk Fungsi Eksponensial

Fungsi $f(x) = e^x$ dan $g(x) = a^x$ keduanya terdiferensiasikan untuk setiap x, dan

$$D_x(e^x) = e^x \qquad D_x(a^x) = a^x \ln(a)\,;\, a > 0, a \neq 1.$$

Rumus Turunan untuk Fungsi Logaritma

Untuk semua titik x di dalam daerah asal alami fungsi

$$D_x(\log_a(x)) = \frac{1}{x\ln(a)} \qquad D_x(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Aturan Rantai untuk Turunan Fungsi Transendental

Misal $f(g(x))$ suatu fungsi transendental dan $g(x)$ sembarang fungsi riil, dan keduanya terdiferensiasikan untuk setiap x, maka $D_x\left(f(g(x))\right)$ bisa kita cari menggunakan aturan rantai.

Latihan

Tentukan turunan dari fungsi transendental berikut

1. $f(x) = \sin^3(\cos(x))$
2. $f(x) = \tan(x)\sec(x)$
3. $f(x) = 3^{3x^2-2x+1} + e^{-x}$
4. $f(x) = \log_{(2x+1)}(x-2)$

Sub 3.6

Teorema Rolle, Teorema Nilai Tengah, dan Teorema Nilai Rataan untuk Turunan

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Teorema Rolle

Misalkan fungsi $f(x)$ kontinu di interval tertutup $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b). Jika $f(a) = f(b)$, maka terdaoat setidaknya satu titik c di interval terbuka (a, b) sedemikian sehingga

$$f'(c) = 0.$$

Contoh 1 Teorema Rolle

Soal:

Tunjukan bahwa terdapat suatu nilai c di $[1,5]$ yang memenuhi $f'(c) = 0$ untuk

$$f(x) = -x^2 + 6x - 6$$

Solusi:

Teorema Nilai Tengah atau Teorema Nilai Antara (Intermediate Value Theorm)

Misalkan fungsi $f(x)$ kontinu di interval tertutup $[a, b]$. Misal diberikan I yang mana I terletak diantara $f(a)$ dan $f(b)$ ($f(a) \leq I \leq f(b)$ atau $f(b) \leq I \leq f(a)$), maka terdapat setidaknya satu titik c di interval tertutup $[a, b]$ sedemikian sehingga

$$f(c) = I$$

Contoh 1 Teorema Nilai Tengah (IVT)

Soal:

Tunjukan bahwa $3x^5 - 4x^2 = 3$ punya penyelesaian di interval [0,2]

Solusi:

Teorema Nilai Rataan (Mean Value Theorm) untuk Turunan

Misalkan fungsi $f(x)$ kontinu di interval tertutup $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b), maka terdapat setidaknya satu titik c di interval terbuka (a, b) sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Contoh 1 Teorema Nilai Rataan (MVT)

Soal:

Cari semua nilai c yang memenuhi MVT untuk $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$ di interval $[-1,2]$

Solusi:

Sub 3.7
Turunan Tingkat Tinggi

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Operasi diferensiasi mengambil sebuah fungsi f dan menghasilkan sebuah fungsi baru f'. Jika f' sekarang kita diferensiasikan, kita masih tetap menghasilkan fungsi lain, dinyatakan oleh f'' (dibaca "f dua aksen") dan disebut **turunan kedua** dari f. Pada gilirannya dia boleh didiferensiasikan lagi, dengan demikian menghasilkan f''', yang disebut **turunan ketiga** dari f. **Turunan keempat** dinyatakan $f^{(4)}$, **turunan kelima** dinyatakan $f^{(5)}$, dan seterusnya.

Jika sebagai contoh,

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

Maka

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$
$$f''(x) = 12x - 8$$
$$f'''(x) = 12$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

Notations for Derivatives of $y = f(x)$

Derivative	f' Notation	y' Notation	D Notation	Leibniz Notation
First	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Second	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Third	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Fourth	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
nth	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh 1 Turunan Tingkat Tinggi

Soal:

Cari turunan ke-*n* untuk $f(x) = x^n$, kemudian gunakan untuk mencari $f^{(13)}(13)$

Solusi:

Sub 3.8

Turunan Implisit

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Diferensiasi Implisit

Metode untuk mencari $\frac{dy}{dx}$ tanpa terlebih dahulu menyelesaikan secara gamblang persamaan yang diberikan untuk y dalam x disebut **diferensiasi implisit**.

Contoh 1 Turunan Implisit

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

Soal:

Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$

Solusi [Metode 1]:

Kita dapat menyelesaikan persamaan yang diberikan untuk y secara gambling sebagai berikut:

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 - 3)(3x^2) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Solusi [Metode 2]:

Kita samakan turunan-turunan kedua ruas dari

$$\frac{d}{dx}(4x^2y - 3y) = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

Setelah menggunakan Aturan Hasil Kali pada suku pertama, kita peroleh

$$4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 8x - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Dari jawaban ini kelihatannya berlainan. Untuk satu hal, jawaban yang diperoleh dari Metode 1 hanya melibatkan x, sedangkan jawaban dari Metode 2 melibatkan x maupun y. Namun, ingat bahwa persamaan yang semula dapat dipecahkan untuk y dalam bentuk x memberikan $y = \frac{x^3-1}{4x^2-3}$. Ketika kita memsubstitusi $y = \frac{x^3-1}{4x^2-3}$ ke dalam ekspresi untuk $\frac{dy}{dx}$ yang baru saja diperoleh, kita mendapatkan yang berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} = \frac{3x^2 - 8x\left(\frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3} = \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

Sub 3.9

Turunan Fungsi Parametrik

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Turunan Fungsi Parametrik

Jika $y = f(t)$ dan $x = f(t)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Contoh 1 Turunan Fungsi Parametrik

Soal:

Cari turunan fungsi parametrik $x(t) = t^2 - 4t$, $y(t) = 2t^3 - 6t$, untuk $-2 \leq t \leq 3$

Solusi:

Terima kasih

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER