UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Himpunan

Definisi

- Himpunan (*set*): Kumpulan objek (unik) yang **tidak memperhatikan urutan anggota**.
- Elemen atau anggota: objek di dalam himpunan

- Notasi **$a \in A$** :
  - **a** adalah elemen dari himpunan **A**
- Notasi **$a \notin A$**:
  - **a** bukan elemen dari himpunan **A**

Penyajian Himpunan

Metode *Roster* (dengan daftar)

- Himpunan semua huruf vokal

  V = {a, e, i, o, u}

- Himpunan bilangan ganjil positif kurang dari 10

  O = {1, 3, 5, 7, 9}

- Himpunan bilangan bulat kurang dari 50

  B = {1, 2, 3, …, 49}

  Tanda **elipsis “…”** digunakan jika pola dari elemen-elemen sudah jelas.

Penyajian Himpunan

Notasi *Set Builder*

- Menyatakan kriteria yang harus dipenuhi setiap anggota himpunan.
  - Contoh: O = {x | x adalah bilangan bulat ganjil positif kurang dari 10}

- Menggunakan predikat: **H = {x | P(x)}**
  - Contoh: $S = \{x \mid \text{Prime}(x)\}$

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Some Important Sets

$\boldsymbol{N}$ = *natural numbers* = $\{0,1,2,3....\}$

$\boldsymbol{Z}$ = *integers* = $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

$\boldsymbol{Z}^+$ = *positive integers* = $\{1,2,3,.....\}$

$\boldsymbol{R}$ = *set of real numbers*

$\boldsymbol{R}^+$ = *set of positive real numbers*

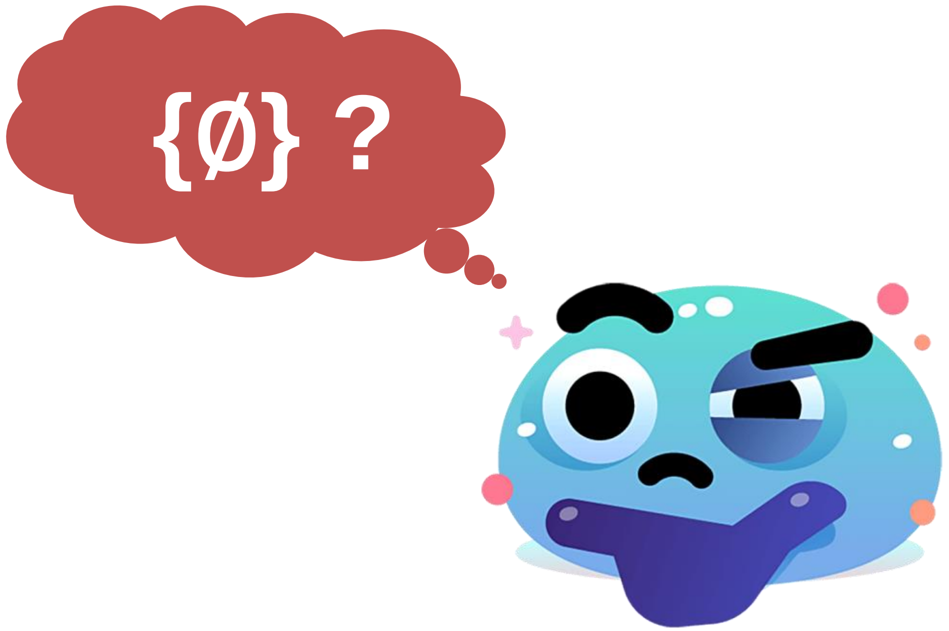
$\boldsymbol{C}$ = *set of complex numbers*

$\mathbf{Q}$ = *set of rational numbers*

Himpunan Kosong

- **Himpunan kosong (*empty set*)**: sebuah himpunan spesial yang tidak mempunyai elemen.

- Sebuah himpunan kosong dinyatakan dengan **∅** atau **{ }**.

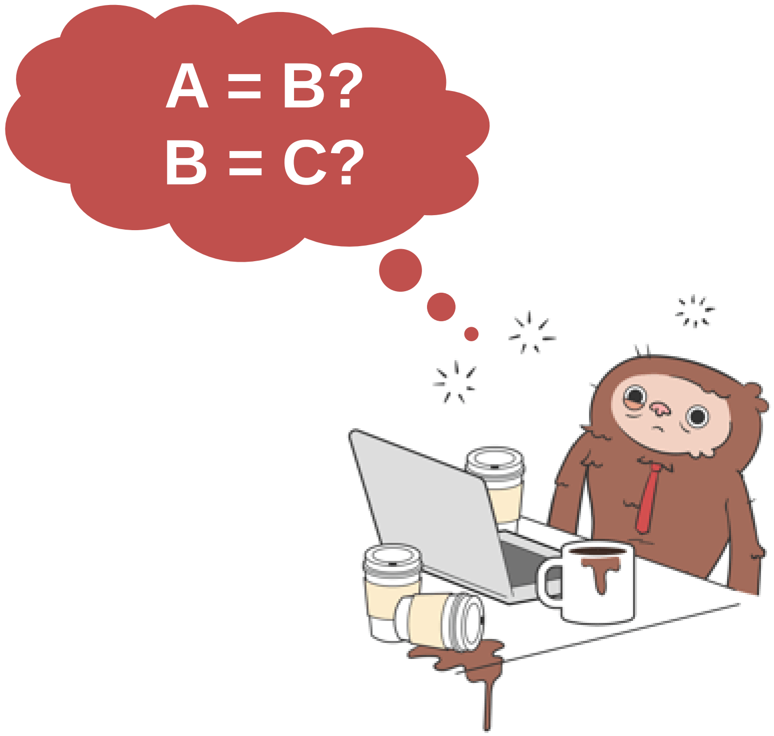


Kesamaan Himpunan

Himpunan A dan B sama (*equal*) jika dan hanya jika mereka mempunyai elemen-elemen yang sama.

$A = B$ jika dan hanya jika $\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

- **Contoh:**
- $A = \{1, 3, 5\}$
- $B = \{3, 5, 1\}$
- $C = \{1, 3, 5, 7\}$



Himpunan Bagian

- Notasi: **$A \subseteq B$**
- Definisi:

$A \subseteq B$ Jika dan hanya jika $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

Contoh:

- **$\{1,2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$**
- **$S \subseteq S$** (sebuah himpunan **S** adalah himpunan bagian dari dirinya sendiri)
- **$\emptyset \subseteq S$** (himpunan kosong adalah himpunan bagian dari himpunan **S**)
- Himpunan bilangan bulat ganjil positif $\subseteq$ himpunan bilangan bulat positif
- $\{1, 2, 3\} \nsubseteq \{1, 3, 4, 5\}$

Teorema

Untuk sembarang himpunan **A** berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) **A** adalah himpunan bagian dari **A** itu sendiri ($A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari **A** ($\emptyset \subseteq A$)

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Himpunan Bagian Sejati (*Proper Subset*)

Notasi: $A \subset B$

Himpunan A merupakan himpunan bagian **sejati** dari B jika dan hanya jika A adalah himpunan bagian dari B, **tetapi A ≠ B**.

$A \subset B$ **Jika dan hanya jika** $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \land \exists x\ (x \in B \land x \notin A)$

"ada sebuah elemen x di B **yang bukan elemen** himpunan A"

Contoh:

- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1 ,2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 3\}$

Kardinalitas Himpunan

Himpunan Berhingga (*Finite Set*)

- Misal **S** adalah sebuah himpunan:
  - Jika ada tepat **n** elemen berbeda di **S**, di mana **n** adalah bilangan bulat bukan negatif, maka himpunan **S berhingga (*finite set*)**. Selain itu, himpunan S tak berhingga (infinite set)
  - **n** adalah kardinalitas dari himpunan **S**, dinyatakan dengan **|S|**

A = {**m** ∈ **N** | **m** < 10 dan **m** ganjil}. **|A| = 5**

B = {**n** | **n** adalah semua alfabet inggris}. **|B| = 26**

|∅| = 0

|{∅}| = 1

|{{∅}}| = …

|{∅, {∅}, {{∅}}}| = …

Himpunan Kuasa (Power Set)

Power set dari himpunan **S**, **$\mathcal{P}$(S)**, merupakan himpunan yang anggotanya adalah semua himpunan bagian dari **S**.

Contoh:

$\mathcal{P}$({0, 1, 2}**)** : {∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}

$\mathcal{P}$(∅**)** : {∅}

$\mathcal{P}$({∅}**)** : {∅, {∅}}

Teorema:

Jika himpunan **S** mempunyai **n** elemen, anggota **$\mathcal{P}$(S)** mempunyai sebanyak **2^n** elemen,
atau **$|\mathcal{P}(S)| = 2^n$**.

Ordered n-tuples

- Terkadang, **urutan elemen di dalam sebuah kumpulan data bisa jadi sangat penting**. Oleh karena itu, **kita butuh struktur lain** (selain himpunan) yang mampu merepresentasikan hal ini.

Ordered n-tuple

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- **ordered n-tuple** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dikatakan setara jika dan hanya jika $a_m = b_m$ untuk $m = 1, 2, \ldots, n$.
- **2-tuples** disebut sebagai ordered pairs (bentuk khusus ordered n-tuples dengan n = 2)

Cartesian Product

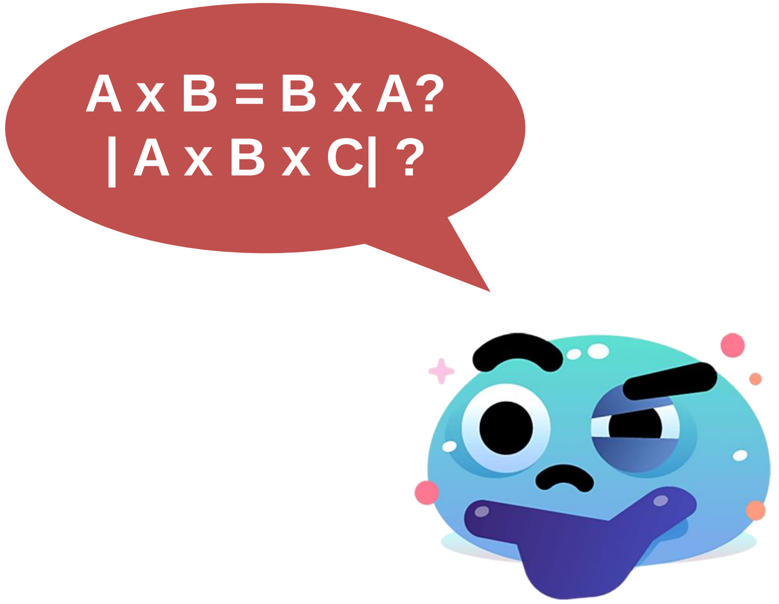
Misal, A dan B adalah himpunan. Cartesian Product dari A dan B, dinyatakan dengan A x B, adalah himpunan seluruh ordered pairs (a, b), di mana a ∈ A dan b ∈ B.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Contoh:

1. C = {1, 2, 3}, D = {y, z}
   a. C x D = {(1, y), (1, z), (2, y), (2, z), (3, y), (3, z)}
   b. D x C = …
2. $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{0,1,2\}$

   $A \times B \times C = \ldots$



Cartesian Product dari banyak himpunan

Produk kartesius dari himpunan $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ adalah *ordered n-tuples* $\mathbf{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$ dengan aturan:

$$\mathbf{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n\}}$$

Relasi

- Sebuah relasi **R** dari himpunan **A** ke himpunan **B**: himpunan bagian dari **A x B**, dengan kata lain **R ⊆ A x B**.

$$R \subseteq A \times B$$

Contoh:

- A = {1, 2, 3} dan B = {2, 3, 4, 5}
  R = {(1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 5)}

- Ordered pairs dari relasi R: “lebih kecil dari” dalam himpunan A = {0, 1, 2, 3} adalah:
  - R = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)}.

Truth Sets of Quantifiers

- Diberikan predikat *P* dan domain *D*, truth set dari P adalah himpunan elemen di domain *D* yang membuat P(x) bernilai true.

$$\{x \in D | P(x)\}$$

Contoh:

- $P(x)$: "$|x| = 1$", domain x adalah bilangan bulat.

  Truth set dari P(x) adalah {-1, 1}
- Tentukan truth set dari $Q(x)$ and $R(x)$, di mana domain x adalah bilangan bulat dan $Q(x)$: "$x^2 = 2$," dan $R(x)$: "$|x| = x$"?

Gabungan (Union)

- **Definisi:**
  Gabungan dari himpunan **A** dan **B**, dinyatakan dengan **A ∪ B**, adalah sebuah himpunan yang elemennya merupakan anggota dari **A** atau **B**, atau keduanya.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Contoh**

$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Irisan (Intersection)

- **Definisi**
  Irisan dari himpunan **A** dan **B**, dinyatakan dengan **A ∩ B**, adalah sebuah himpunan yang elemennya merupakan anggota dari **A** dan **B**.

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}}$$

- Dua buah himpunan **A** dan **B** dikatakan **saling lepas (*disjoint*)** jika irisannya adalah himpunan kosong, **A ∩ B = ∅**

- **Contoh:**

{1, 3, 5} ∩ {1, 2, 3} = {1, 3}

{1, 3} dan **{2, 4} disjoint** karena **{1, 3} ∩ {2, 4} = ∅**

Selisih (Difference)

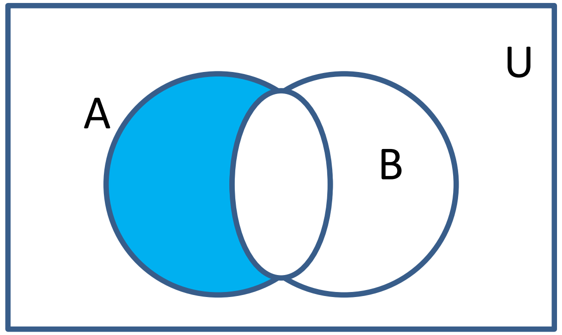
- **Definisi:**
  Selisih/difference dari himpunan **A** dan **B**, dinyatakan dengan **A – B**, adalah himpunan yang elemennya anggota dari **A**, tetapi bukan anggota **B**.

$$\mathbf{A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}}$$

Contoh:

{1, 3, 5} – {1, 2, 3} =

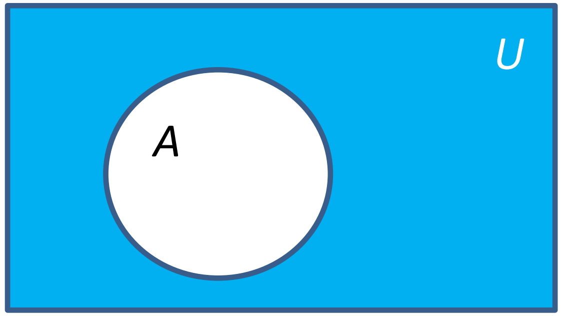
{1, 2, 3} – {1, 3, 5} =



Komplemen (Complement)

- **Definisi:**
  Komplemen dari A relatif terhadap U, dinyatakan dengan $\bar{A}$ atau $\boldsymbol{A^C}$, adalah himpunan yang elemennya berasal himpunan universal, tetapi **bukan** anggota **A**.
  $\bar{A}$ = U – A

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



Contoh:

Misal U adalah himpunan bilangan bulat positif

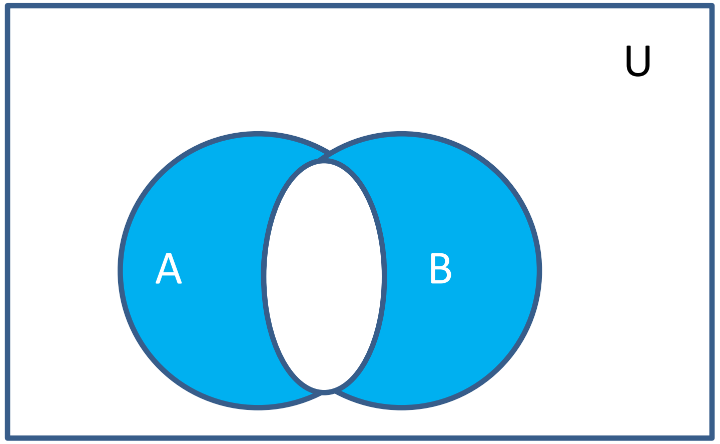
$A = \{x \in Z^+ \mid x > 10\}$

$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$

Symmetric Difference

- **Definisi**: S*ymmetric difference* dari himpunan **A** dan **B**, dinotasikan dengan **A ⊕ B** adalah **(A – B)** ∪ **(B – A)**

- **Contoh**:
  $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
  $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{4,5,6,7,8\}$
  A ⊕ B = …



Generalized Unions and Intersections

- Misalnya $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan
- Secara umum, **gabungan** dari himpunan $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

- Secara umum, **irisan** dari himpunan $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n}$**:**

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Set Identities

Identity law	$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap U = A$
Domination laws	$A \cup U = U, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotent laws	$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$
Complementation law	$(A^C)^C = A$
Complement laws	$A \cup A^C = U, \qquad A \cap A^C = \emptyset$
Commutative laws	$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$
Associative laws	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributive laws	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan's laws	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
Absorption laws	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Latihan 1

U = {a, b, c, d, e}, A = {a, b, c}, B = {b, c, d}, C = {b, c, e}.

- $A \cup B \cup C$
- $(A \cap B \cap C)^C$

- $(A - B) - C$
- $A - (B - C)$

Latihan 2

Untuk **k** = 1, 2, 3, ..., himpunan $\mathbf{A_k}$ didefinisikan sebagai **{k, k + 1, k + 2, k + 3, ...}**

Tentukan:

$$\bigcup_{k=1}^{10000} A_k$$

dan

$$\bigcap_{k=1}^{10000} A_k$$

Pembahasan $\bigcup_{k=1}^{10000} A_k$

A_k = {k, k + 1, k + 2, k + 3, ...}

A_{k+1} = {k + 1, k + 2, k + 3, k + 4, ...}

A_{k+2} = {k + 2, k + 3, k + 4, k + 5, ...}

…

A_{10000} = {10000, 10001, 10002, 10003, ...}

Kita dapatkan bahwa **$A_{k+1} \subseteq A_k$**, sehingga:

$A_k \cup A_{k+1} = A_k$, dan **$A_{k+1} \cup A_{k+2} = A_{k+1}$**, dst....

$A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup A_{k+3} \cup \ldots = A_k$

$$\bigcup_{k=1}^{10000} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10000} = A_1$$