



FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Permutasi dan Kombinasi (Lanjutan)

Rahmad Mahendra, M.Sc.



Permutasi dengan Pengulangan

Teorema 1: Banyaknya **permutasi- r** dari sebuah himpunan dengan **n unsur** dengan **pengulangan** adalah **n^r**

Bukti: Terdapat n cara untuk memilih elemen dari himpunan untuk masing-masing posisi r . Menggunakan aturan perkalian, $n \times n \times \dots n$ (n dikali sebanyak r kali) = n^r permutasi- r dengan pengulangan.

Contoh:

Berapa banyak string berbeda dengan **panjang r** yang dapat dibentuk dari huruf kapital, dan masing-masing **huruf kapital dapat digunakan lebih dari sekali?**

Solusi:

Ada **26** huruf kapital.

Berdasarkan aturan perkalian, ada

$$26 \times 26 \times 26 \times \dots \times 26 = 26^r \text{ cara}$$

Permutasi dengan Unsur-Unsur Identik

Berapa banyak string berbeda yang dapat dibentuk dengan cara menyusun huruf-huruf dari kata **MISSISIPPI**?

Karena beberapa huruf pada kata **MISSISIPPI** muncul lebih dari satu, jadi solusinya **bukan** banyaknya **permutasi dari 10 huruf**.

Solusi:

4 huruf I dapat ditempatkan di **10 posisi** dalam **$C(10, 4)$ cara**.

3 huruf S dapat ditempatkan di **6 posisi tersisa** dalam **$C(6, 3)$ cara**.

2 huruf P dapat ditempatkan di **3 posisi tersisa** dalam **$C(3, 2)$ cara**.

1 huruf M diletakkan di **1 posisi tersisa** = **$C(1, 1)$ cara**.

$$C(10, 4) \cdot C(6, 3) \cdot C(3, 2) \cdot C(1, 1) = \frac{10!}{6!4!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{1!}{1!} = \frac{10!}{4!3!2!1!}$$

Permutasi dengan Unsur-Unsur Identik

Teorema 2:

Banyaknya permutasi berbeda dari **n objek**, dimana ada **n_1 objek identik untuk jenis 1**, **n_2 objek identik untuk jenis 2**, ..., **n_k objek identik untuk jenis k** , adalah

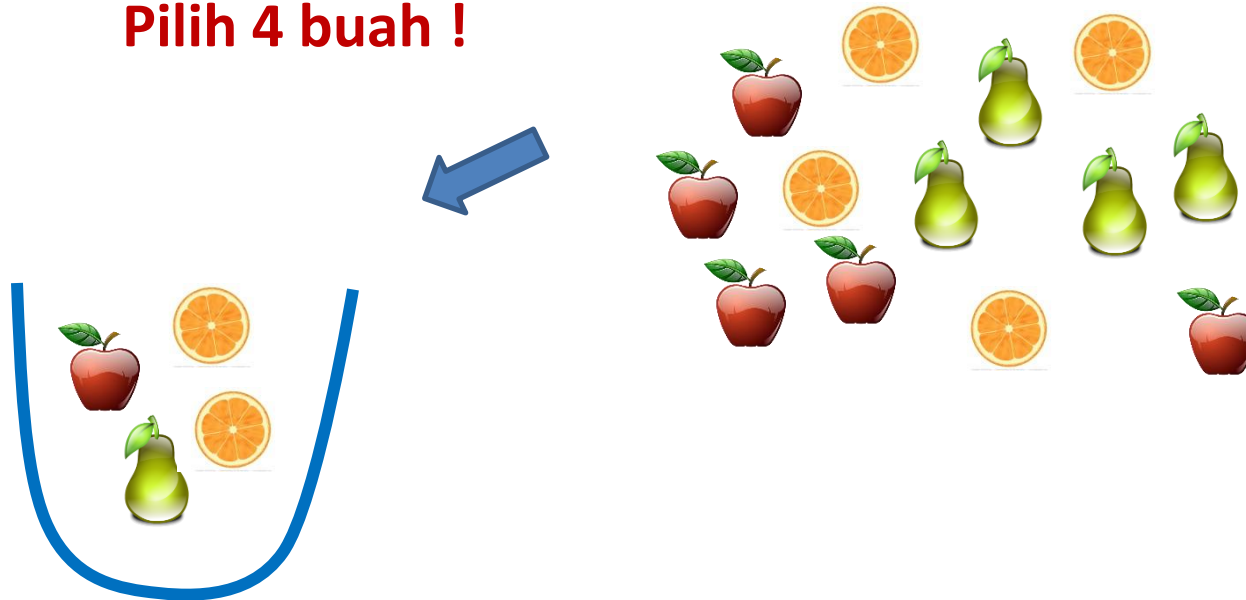
$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

di mana **$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$**

Kombinasi dengan Pengulangan

Ada berapa cara untuk memilih **4 buah** dari sebuah toko buah yang menjual **3 jenis buah**, yaitu **apel**, **jeruk**, dan **pir** ?

Pilih 4 buah !



Kombinasi dengan Pengulangan

- Cara 1: Enumerasi seluruh cara

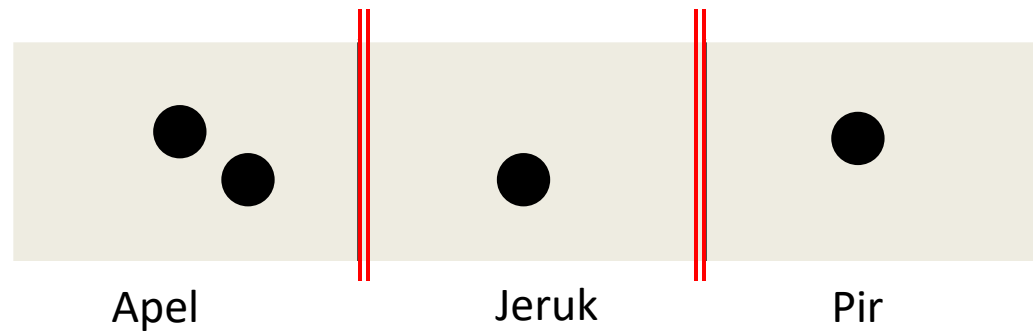
4 Apel	4 Jeruk	4 Pir
3 Apel, 1 Jeruk,	3 Apel, 1 Pir	3 Jeruk, 1 Apel
3 Jeruk, 1 Pir	3 Pir, 1 Apel	3 Pir, 1 Jeruk
2 Apel, 2 Jeruk	2 Apel, 2 Pir	2 Jeruk, 2 Pir
2 Apel, 1 Jeruk, 1 Pir	2 Jeruk, 1 Apel, 1 Pir	2 Pir, 1 Apel, 1 Jeruk

- 15 cara

Kombinasi dengan Pengulangan

Cara 2: Mendistribusikan Objek ke Dalam Kotak

Misal, ada **3 kotak**, di mana setiap kotak merepresentasikan **jenis buah**.

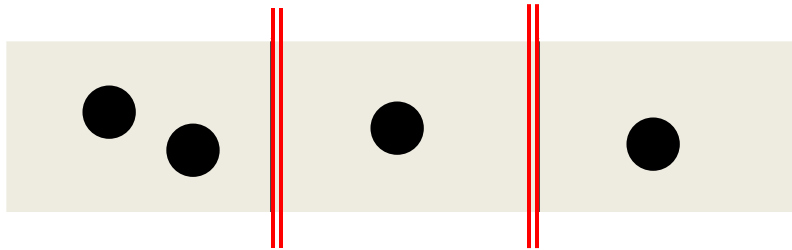


Ilustrasi di atas: memilih 2 apel, 1 jeruk, 1 pir

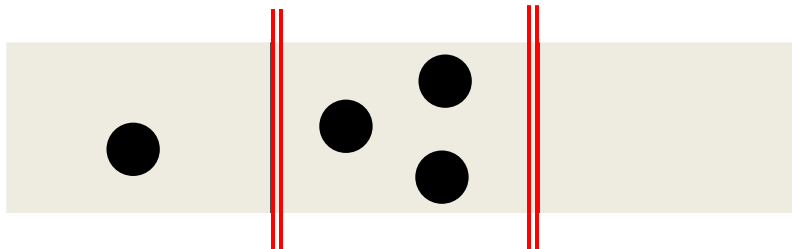
Kombinasi dengan Pengulangan

Banyaknya cara memilih 4 buah dari 3 jenis buah =

Banyaknya cara menyusun 2 garis tegak dan 4 B (objek) dari 6 posisi.



B B | B | B



B | B B B |

Permutasi barisan panjang 6 yang terdiri 2 garis dan 4 objek = $\frac{6!}{4!2!} = 15$ cara

Kombinasi dengan Pengulangan

Banyaknya cara memilih 4 buah dari 3 jenis buah =

Banyaknya cara mendistribusikan 4 objek ke dalam 3 kotak berbeda =

Permutasi barisan panjang 6 yang terdiri 2 garis dan 4 objek identik =

Kombinasi-4 dari himpunan yang terdiri 3 jenis unsur, **pengulangan** dibolehkan

Berdasarkan contoh kasus “pemilihan buah”, dapat digeneralisasi

Teorema 3: Dari himpunan dengan n jenis unsur, ada

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$$

banyaknya **kombinasi- r** ketika **pengulangan** dibolehkan.

Apa yang sudah dipelajari

Permutasi dengan Pengulangan

Permutasi dengan Unsur-Unsur Identik

Kombinasi dengan Pengulangan

Materi selanjutnya: Koefisien Binomial

Referensi

- Kenneth H. Rosen (2012) “Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition”
- Alfian Farizki Wicaksono (2013) “Slide MD1-12-permutasi-kombinasi”, Fasilkom UI