UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Induksi Matematika (2)

Soal 1

Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Contoh Solusi Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

TERBUKTI *P*(1) benar

Contoh Solusi Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$
$$1 = 1$$

Perhatikan bahwa kita ingin membawa bentuk
$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$
seperti rumus yang ingin dibuktikan pada soal

TERBUKTI *P*(1) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Maka P(k+1) :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

TERBUKTI $P(k) \rightarrow P(k+1)$ berlaku

Contoh Solusi Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$
$$1 = 1$$

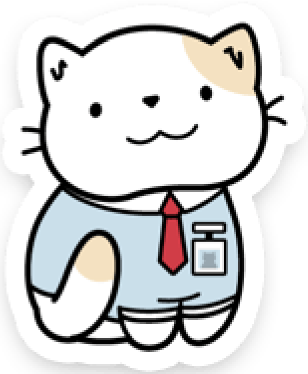
TERBUKTI *P*(1) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 2 + 3 + \cdots . + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Maka P(k+1) :

$$1 + 2 + 3 + \cdots . + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$



TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \rightarrow P(k+1)}$ berlaku

Kesimpulan: Jadi, dari langkah-langkah induksi matematika terbukti bahwa P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n

Soal 2

Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n):$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

TERBUKTI *P*(1) benar

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n):$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

Perhatikan bahwa kita ingin membawa bentuk
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$
seperti rumus yang ingin dibuktikan pada soal

TERBUKTI *P*(1) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 3 + 5 + \cdots . + (2k - 1) = k^2$

Maka P(k+1) :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = k^2 + (2k + 2 - 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2$$

TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \rightarrow P(k+1)}$ berlaku

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n):$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

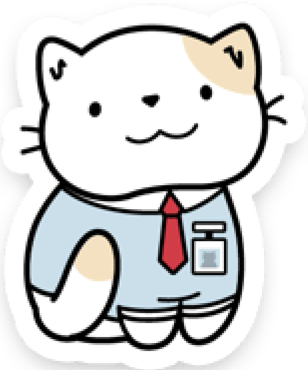
TERBUKTI *P*(1) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 3 + 5 + \cdots. + (2k - 1) = k^2$

Maka P(k+1) :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= k^2 + (2k + 2 - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$



TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \rightarrow P(k+1)}$ berlaku

Kesimpulan: Jadi, dari langkah-langkah induksi matematika terbukti bahwa P(n): $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n

FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS INDONESIA

Soal 3

Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $n < 2^n$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Contoh Solusi Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $\boxed{n < 2^n}$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Jawab:

P(n): $n < 2^n$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 < 2^1$$
$$1 < 2$$

TERBUKTI *P*(1) benar

UNIVERSITAS INDONESIA | FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Contoh Solusi Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $n < 2^n$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Jawab:

P(n):$n < 2^n$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 < 2^1$$
$$1 < 2$$

TERBUKTI *P*(1) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $\boldsymbol{k < 2^k}$ untuk k bilangan bulat positif

Maka P(k+1) :

$$k + 1 < 2^k + 1$$

$$k + 1 < \underline{2^k + 1} < \underline{2^k + 2^k} = \underline{2.2^k = 2^{k+1}}$$

Perhatikan bahwa kita ingin membawa bentuk $k + 1 < 2^{k+1}$ seperti rumus yang ingin dibuktikan pada soal

Sehingga

$$k + 1 < 2^{k+1}$$

TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \to P(k+1)}$ berlaku

Contoh Solusi Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $\mathrm{n} < 2^n$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Jawab:
P(n):$n < 2^n$
- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 < 2^1$$
$$1 < 2$$

TERBUKTI *P*(1) benar
- **Inductive Step:**

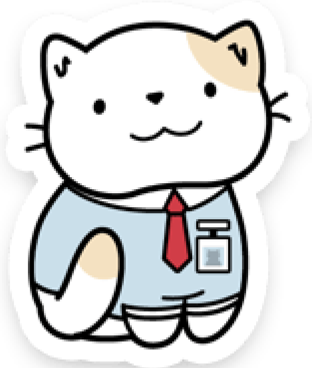
Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $k < 2^k$ untuk k bilangan bulat positif
Maka P(k+1) :

$$\mathrm{k} + 1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$$

Sehingga

$$\mathrm{k} + 1 < 2^{k+1}$$

TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \rightarrow P(k+1)}$ berlaku



Kesimpulan: Jadi, dari langkah-langkah induksi matematika terbukti bahwa P(n): $n < 2^n$ berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n

Latihan

1. Buktikan menggunakan induksi matematika bahwa pernyataan $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \ n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n.
2. Temukan formula untuk $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ dengan mencobanya pada beberapa n bernilai kecil. Buktikan formula yang kamu temukan dengan induksi matematika
3. Buktikan bahwa $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ habis dibagi 21 untuk semua n bilangan bulat positif
4. Buktikan bahwa $n! < n^n$ untuk $n = \{n > 1, n \in \mathbb{Z}^+\}$

Apa yang sudah dipelajari?

- Contoh soal Induksi Matematika dan pembahasan

Topik Selanjutnya: Strong Induction

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)