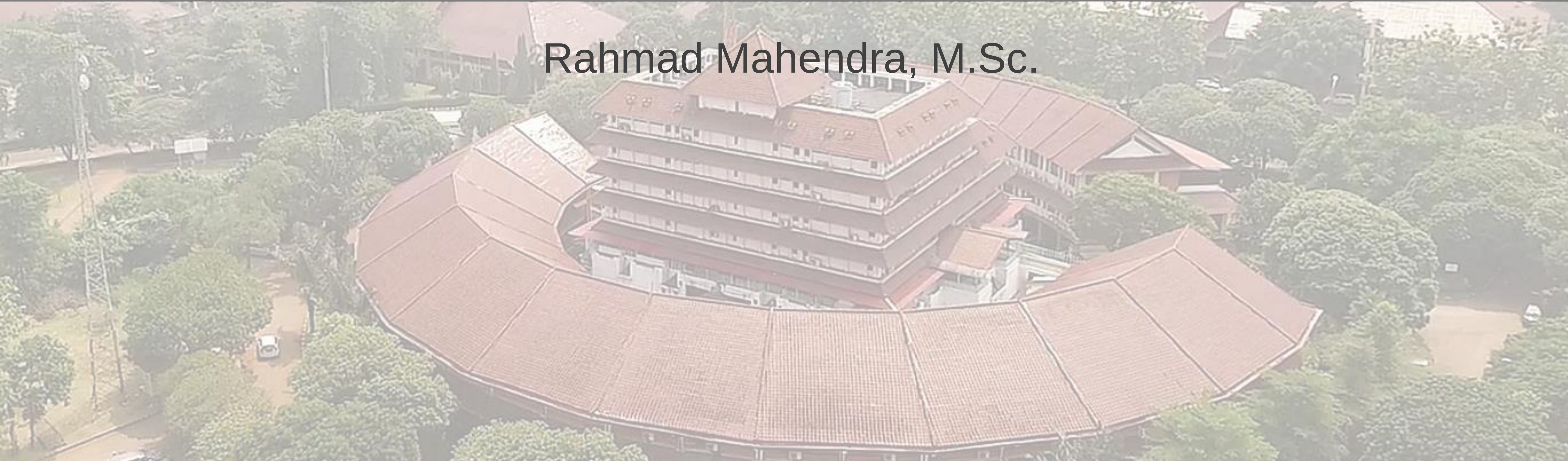
UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Koefisien Binomial

Rahmad Mahendra, M.Sc.



Ekspresi Binomial

Ekspresi binomial: penjumlahan dari dua buah **term**.

Contoh dari ekspresi binomial : **$x + y$**

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$$
$$= 1.x^3 + 3.x^2y + 3.xy^2 + 1.y^3$$

$(x + y)^3$ merupakan **pangkat 3 dari ekspresi binomial $x + y$**.

Ekspansi (penjabaran) **$(x + y)^3$** menghasilkan **4 term** berbeda: **x^3**, **x^2y**, **xy^2**, dan **y^3**.

Koefisien dari term **x^3** adalah **1**, koefisien dari term **x^2y** adalah **3**, dst.

Koefisien Binomial

Tentukan ekspansi (penjabaran) dari $\mathbf{(x + y)^4}$!

Jika $\mathbf{(x + y)^4}$ dijabarkan, maka akan muncul term $\mathbf{x^4}$, $\mathbf{x^3y}$, $\mathbf{x^2y^2}$, $\mathbf{xy^3}$, $\mathbf{y^4}$.

Berapa koefisien dari masing-masing term ini?

Anggap $\mathbf{(x + y)^4}$ merupakan perkalian dari **4 buah term (x + y)** yang berasal dari **4 kotak berbeda**.

	K1	K2	K3	K4
$(x + y)^4 =$	$\boxed{(x + y)}$	$\boxed{(x + y)}$	$\boxed{(x + y)}$	$\boxed{(x + y)}$

Term x^4:

Term $\mathbf{x^4}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **4 buah x** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{4}$ cara**. Jadi, koefisien dari term $\mathbf{x^4}$ adalah $\binom{4}{4} = 1$.

atau dengan cara mengambil **0 buah y** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{0} = 1$ cara**.

Koefisien Binomial

Term x^3y :

Term $\mathbf{x^3y}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **3 buah x** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{3}$ cara**, maka koefisien dari term $\mathbf{x^3y}$ adalah $\binom{4}{3}$ = **4**.

<u>atau...</u>

dapat dibentuk dengan cara mengambil **1 buah y** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{1}$ = 4 cara**.

Term x^2y^2 :

Term $\mathbf{x^2y}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **2 buah x** dari **4 kotak berbeda (atau 2 buah y dari 4 kotak)**. **Ada $\binom{4}{2}$ cara**, maka koefisien dari term $\mathbf{x^2y^2}$ adalah $\binom{4}{2}$ = **6**.

Koefisien Binomial

Term xy^3 :

Term $\mathbf{xy^3}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **1 buah x** dari **4 kotak berbeda (atau 3 buah y dari 4 kotak)**. **Ada $\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$ cara**. Oleh karena itu, koefisien dari term $\mathbf{xy^3}$ adalah $\binom{4}{1}$ = **4**.

Term y^4 :

Term $\mathbf{y^4}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **0 buah x** dari **4 kotak berbeda (atau 4 buah y dari 4 kotak)**. **Ada $\binom{4}{0} = \binom{4}{4}$ cara**. Oleh karena itu, koefisien dari term $\mathbf{y^4}$ adalah $\binom{4}{0}$ = **1**.

Ekspresi Binomial

$(x + y)^4$ = xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx + xyyy + yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy + yyyx + yyyy

$(x + y)^4 =$

$\binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3y + \binom{4}{2} x^2y^2 + \binom{4}{3} xy^3 + \binom{4}{4} y^4$

$\binom{4}{4} x^4 + \binom{4}{3} x^3y + \binom{4}{2} x^2y^2 + \binom{4}{1} xy^3 + \binom{4}{0} y^4$

$1.x^4 + 4.x^3y + 6.x^2y^2 + 4.xy^3 + 1.y^4$

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Kita gunakan **bukti kombinatorial**. Term hasil penjabaran atau ekspansi berbentuk $\boldsymbol{x^{n-j}y^j}$ dengan **j = 0, 1, 2, ..., n**. Menghitung banyaknya term $\boldsymbol{x^{n-j}y^j}$ sama saja dengan menghitung banyaknya cara memilih **(n - j) buah x** dari **n "kotak" term (x + y)**.

Oleh karena itu, koefisien dari $\boldsymbol{x^{n-j}y^j}$ adalah $\binom{n}{n-j}$, yang juga sama dengan $\binom{n}{j}$. Teorema binomial terbukti. **Q.E.D**

Latihan (1)

Tentukan koefisien dari $\mathbf{x^{12}.y^{13}}$ dari ekspansi $\mathbf{(x + y)^{25}}$?

Solusi:

Berdasarkan Teorema Binomial, koefisien $\mathbf{x^{12}.y^{13}}$ adalah

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!\,12!}$$

Latihan (2)

Tentukan koefisien dari **$x^{12}.y^{13}$** dari ekspansi **$(2x - 3y)^{25}$** ?

Solusi:

Berdasarkan teorema binomial, kita dapat nyatakan:

$$((2x) + (-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j$$

Jadi, koefisien dari **$x^{12}.y^{13}$** didapatkan ketika ***j* = 13**, yaitu:

$$\binom{25}{13} 2^{12} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!} 2^{12} 3^{13}$$

Latihan (3)

Tentukan koefisien dari $\mathbf{x^{18}}$ dari ekspansi $\mathbf{(x + (1/x))^{30}}$?

Solusi:

Berdasarkan teorema binomial, kita dapat nyatakan:

$$((x) + (x^{-1}))^{30} = \sum_{j=0}^{30} \binom{30}{j} (x)^{30-j} (x^{-1})^{j} = \sum_{j=0}^{30} \binom{30}{j} (x)^{30-2j}$$

Jadi, koefisien dari $\mathbf{x^{18}}$ didapatkan ketika $\boldsymbol{j = 6}$, yaitu:

$$\binom{30}{6} = \frac{30!}{6!\,24!}$$

Corrolary

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$ ... Corrolary I

<u>Bukti aljabar</u>

Ganti **x = 1 & y = 1** pada teorema binomial.

<u>Bukti kombinatorial</u>

Kita tahu bahwa himpunan dengan **n elemen** mempunyai $\mathbf{2^n}$ subset yang berbeda.

Setiap subset ada yang terdiri dari **0 elemen** (ada $\binom{n}{0}$), **1 elemen** (ada $\binom{n}{1}$), **2 elemen** (ada $\binom{n}{2}$), ..., **k elemen** (ada ada $\binom{n}{k}$). Berarti total ada $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ subset.

2 formula dihubungkan dengan operator '=' dan terbuktilah corrolary I

Corrolary

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$ ... Corrolary II

<u>Bukti aljabar untuk corrolary II</u>

Ganti **x = 1 & y = -1** pada teorema binomial

Corrolary II ini mengakibatkan:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} (2)^k \binom{n}{k}$$ ... Corrolary III

<u>Bukti aljabar untuk corrolary III</u>

Ganti **x = 1 & y = 2** pada teorema binomial.

Identitas Pascal

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

<u>Bukti kombinatorik</u>

- Misal, himpunan **T** mengandung **(n + 1)** elemen, dan **a** merupakan sebuah elemen di **T**, **a ϵ T**.
- Misal, ada juga sebuah himpunan **S = T – {a}**. Artinya, **S** mengandung **n elemen**.
- Perhatikan bahwa ada $\binom{n+1}{k}$ **himpunan bagian T** yang mengandung **k elemen**.
- **Himpunan bagian T** yang mengandung **k elemen** dibagi menjadi 2 group:
  – Ada elemen **a** dan **(k - 1) elemen** di **S**
  – **Tidak** ada elemen **a** dan **k elemen** di **S**

Identitas Pascal

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Bukti kombinatorik (lanjutan)

- Karena ada $\binom{n}{k-1}$ himpunan bagian dari **S** yang terdiri dari **(k - 1) elemen**, maka ada $\binom{n}{k-1}$ himpunan bagian dari **T** yang terdiri dari **k elemen** dan mengandung **a**.
- Karena ada $\binom{n}{k}$ himpunan bagian dari **S** yang terdiri dari **k elemen**, maka ada $\binom{n}{k}$ himpunan bagian dari **T** yang terdiri dari **k elemen** dan tidak mengandung **a**.
- Penggabungan menggunakan operator '=' membuktikan bahwa $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Segitiga Pascal

- Basisnya adalah **Identitas Pascal**: “Ketika 2 koefisien binomial yang bersebelahan dijumlahkan, hasilnya adalah koefisien binomial yang terletak pada **baris berikutnya & di antara 2 koefisien tersebut**.”

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$
$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

Apa yang sudah dipelajari

Koefisien Binomial

Identitas Pascal

Referensi

- Kenneth H. Rosen (2012) “Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition”
- Alfan Farizki Wicaksono (2013) “Slide MD1-13-koefisien-binomial”, Fasilkom UI