



FAKULTAS  
ILMU  
KOMPUTER

# Analisis Kombinatorik 2: Prinsip Sarang Merpati

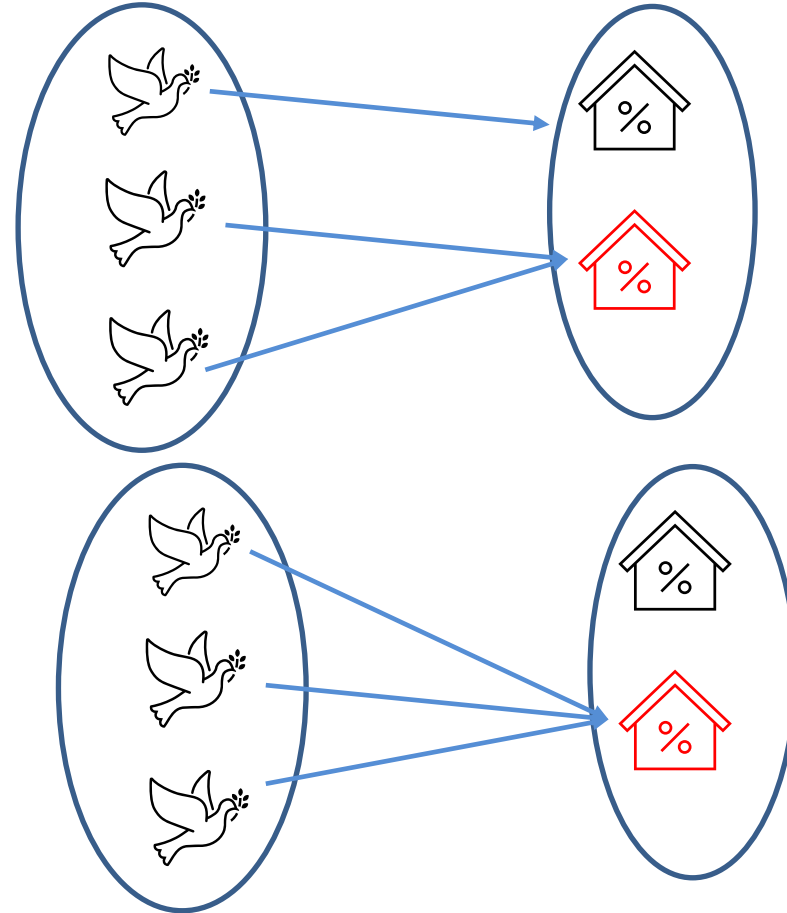
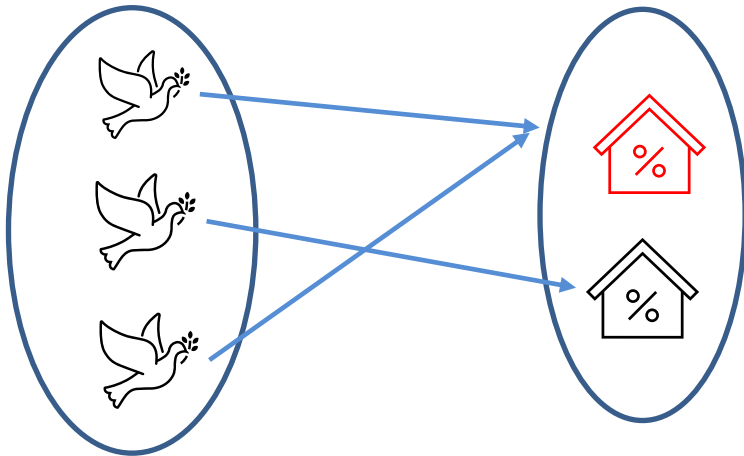
Dr. Dina Chahyati



# Prinsip Sarang Merpati

1

- Jika terdapat  **$k+1$**  merpati dan  **$k$**  sarang, maka pasti terdapat **setidaknya satu** sarang yang diisi oleh **lebih dari satu** merpati.



Prinsip Sarang Merpati (*Pigeonhole Principle*) menyatakan:

Jika terdapat  **$k+1$**  atau **lebih** objek dan  **$k$**  kotak, maka **pasti** terdapat **setidaknya satu** kotak yang diisi oleh **lebih dari satu** objek.

Jika terdapat  **$k+1$  atau lebih** objek dan  **$k$**  kotak, maka pasti terdapat **setidaknya satu** kotak yang diisi oleh **lebih dari satu** objek ( $p \rightarrow q$ )

**Bukti Kontradiksi:** Asumsikan  $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$  **benar**

$p$  **benar** : terdapat  **$k+1$  atau lebih** objek

$\neg q$  **benar** : tidak ada satupun dari  **$k$**  kotak yang mengandung lebih dari satu objek.

Dari  $\neg q$  artinya semua kotak hanya mengandung maksimal satu objek, sehingga maksimal hanya ada  **$k$**  objek.

Hal ini **kontradiksi** dengan  $p$  yang menyatakan terdapat  **$k+1$  atau lebih** objek !

# Prinsip Sarang Merpati yang Diperumum

*Recall:* Prinsip Sarang Merpati (Pigeonhole Principle) menyatakan:  
Jika terdapat  **$k+1$**  atau lebih objek dan  **$k$**  kotak, maka **pasti** terdapat **setidaknya satu** kotak yang diisi oleh **lebih dari satu** objek.

Prinsip Sarang Merpati **yang diperumum** menyatakan:  
Jika terdapat  **$N$**  objek dan  **$K$**  kotak, maka **pasti** terdapat **setidaknya satu** kotak yang diisi oleh **minimal  $\lceil N/K \rceil$**  objek.

- Prinsip Sarang Merpati sangat sederhana dan tidak sulit dipahami 😊
- Namun dalam penerapannya, kadang menjadi sulit **karena tidak jelas** apa analogi merpati dan sangkarnya.



# Contoh 1 (mudah)

5

- Buktikan bahwa di antara sembarang 27 kata dalam Bahasa Indonesia, setidaknya pasti ada 2 kata yang diawali oleh huruf yang sama.
- Solusi: Ada 26 huruf dalam Bahasa Indonesia, sementara diberikan 27 kata. Jika **kata** dianggap sebagai **merpati**, dan **huruf awal** dianggap sebagai **sarang**, maka berdasarkan Prinsip Burung Merpati pasti terdapat minimal 2 kata yang diawali oleh huruf yang sama.

## Contoh 2 (mudah)

6

- Berapa (paling sedikit) orang harus dikumpulkan dalam satu ruangan agar **dijamin** setidaknya terdapat 3 orang yang lahir di bulan yang sama?

### Solusi:

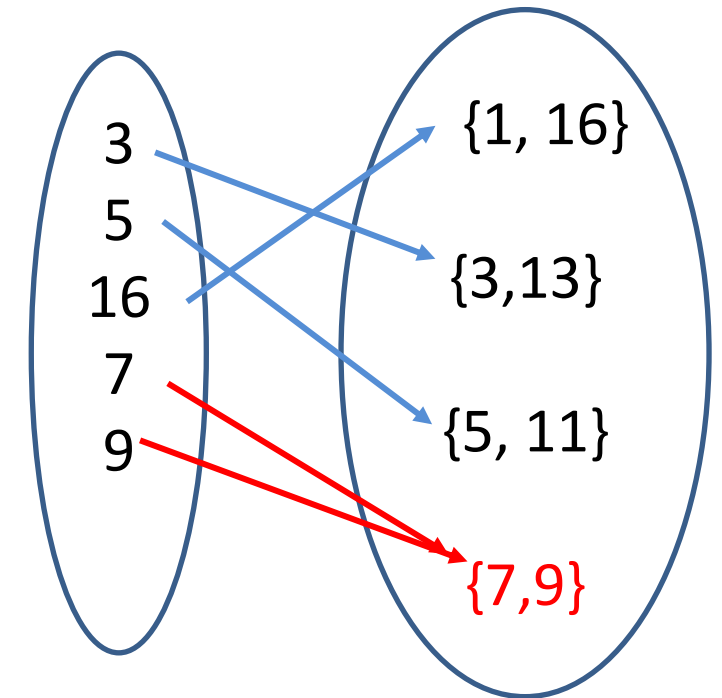
- Jumlah bulan dalam setahun adalah 12.
- Anggap **bulan** adalah **sarang** dan **orang** adalah **merpati**.
- Ingin dicari  $N$  sedemikian hingga  $[N/12] = 3$ .
- $N$  terkecil yang memenuhi adalah 25.
- Dengan demikian perlu dikumpulkan 25 orang agar setidaknya terdapat 3 orang yang lahir di bulan yang sama.



## Contoh 3 (tidak mudah)

7

- Berapa minimal bilangan harus dipilih dari himpunan  $\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$  agar **dijamin** ada sepasang bilangan yang jika dijumlahkan menjadi 16?
  - Apakah cukup diambil 3 bilangan saja?
- Apa analogi merpati dan sarangnya? 😊
- Merpati: bilangan yang diambil
- Sarang: pasangan bilangan yang jika dijumlahkan menjadi 16. Ada 4 pasang bilangan yaitu  $\{1,16\}$ ,  $\{3,13\}$ ,  $\{5, 11\}$ ,  $\{7,9\}$ .
- Karena ada 4 kotak, maka perlu diambil **minimal 5** angka agar dijamin ada sepasang angka yang jika dijumlahkan menjadi 16.





## Contoh 4 (tidak mudah)

8

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ , pasti ada kelipatan dari  $n$  yang representasi desimalnya hanya mengandung angka 0 dan 2 saja.

Contoh:

- Kelipatan 2 yang hanya mengandung angka 0 dan 2 saja: 20
- Kelipatan 3 yang hanya mengandung angka 0 dan 2 saja : 2220
- Kelipatan 8 yang hanya mengandung angka 0 dan 2 saja : 200
- Apa analogi merpati dan sarangnya?

## Contoh 4 (solusi)

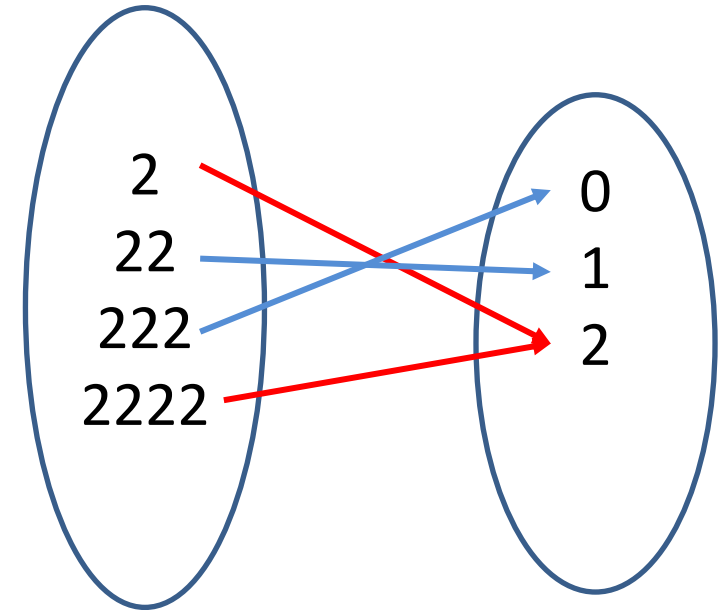
9

- Ambil  $n+1$  buah bilangan yang hanya terdiri dari angka 2, misalnya 2, 22, 222, 2222, 2222, 22222, dan seterusnya
- Jika kita membagi suatu bilangan dengan  $n$ , kemungkinan sisanya adalah  $n$  bilangan, yaitu 0, 1, 2, ...  $n-1$ . Misal kita membagi bilangan dengan 3, maka kemungkinan sisa pembagiannya hanya 0, 1, 2 saja (ada 3 bilangan)
- Dengan demikian, jika kita memiliki  $n+1$  buah bilangan yang hanya terdiri dari angka 2, dan membaginya dengan  $n$ , pasti ada setidaknya dua bilangan yang memiliki sisa pembagian yang sama.
- Hasil pengurangan kedua bilangan ini pasti merupakan kelipatan  $n$  yang hanya terdiri dari angka 0 dan 2 saja.
- Merpati:  $n+1$  bilangan yang hanya terdiri dari angka 2.  
Sarang:  $n$  bilangan dari 0 sampai  $n-1$  (hasil bagi yang mungkin)

## Contoh 4 (solusi)

10

- Ilustrasi: untuk menunjukkan ada bilangan kelipatan 3 yang hanya terdiri dari angka 0 atau 2 saja.
- Dari bilangan 2, 22, 222, 2222, ada dua bilangan yang jika dibagi 3 sisanya sama, yaitu **2** dan **2222**.
- Hasil pengurangan kedua bilangan tersebut:  
 $2222 - 2 = 2220$
- Maka **2220** adalah kelipatan 3 yang hanya terdiri dari angka 0 dan 2 saja 😊



2 dibagi 3 = 0 sisa **2**  
22 dibagi 3 = 7 sisa **1**  
222 dibagi 3 = 74 sisa **0**  
2222 dibagi 3 = 740 sisa **2**

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ , pasti ada kelipatan dari  $n$  yang representasi desimalnya hanya mengandung angka **0 dan 3** saja.
2. Diberikan sembarang 10 bilangan bulat positif  $\leq 50$ . Akan dibentuk himpunan-himpunan beranggotakan lima bilangan dari kesepuluh bilangan tersebut. Buktikan bahwa ada setidaknya **dua himpunan yang hasil penjumlahan kelima elemennya sama**.

Contoh: dari bilangan 1,3,6,11,15,20,23,35,37,45 ada dua himpunan beranggotakan lima bilangan yang hasil penjumlahan elemennya sama, yaitu  $\{6,20,35,37,45\}$  dan  $\{3,23,35,37,45\}$ . Perhatikan bahwa  $6+20+35+37+45 = 3+23+35+37+45 = 143$ )



FAKULTAS  
ILMU  
KOMPUTER

# Berikutnya: Permutasi, Kombinasi dan Variasinya