

### Solusi Tugas 3: Himpunan dan Induksi

#### Matematika Diskret 1 2021/2023 Gasal

---

- Cantumkan nama lengkap, NPM, dan kelas Anda di dalam berkas tugas Anda.
  - File yang dikumpulkan merupakan satu buah berkas .pdf dengan nama file Tugas2\_Kelas\_NamaLengkap\_NPM. Contoh: Tugas3\_A\_SalmaKarimah\_2006529934.pdf
  - Kecurangan akademis seperti menyontek, plagiarisme, dsb. pada tugas sangat dilarang. Pelanggar akan dikenakan sanksi sesuai peraturan.
  - Tugas **harus** ditulis tangan baik secara digital (menggunakan *pen tablet*) maupun secara nondigital (pensil/pena dan kertas).
  - Tugas dikumpulkan paling lambat tanggal **18 November 2022** melalui slot pengumpulan di SCeLe.
  - Pengumpulan tugas antara pukul 15:00-17:00 pada hari yang sama dengan tenggat waktu akan diberikan penalti 10% dari nilai yang diperoleh. Pengumpulan lewat dari pukul 17:00 tidak akan diterima.
- 

**Capaian Pembelajaran #9: Mahasiswa mampu menyatakan himpunan dengan beragam cara, menentukan hubungan dua buah himpunan, dan menggunakan operasi-operasi pada himpunan untuk memecahkan permasalahan.**

1. [4] Nyatakan himpunan berikut dengan notasi set builder  
S adalah himpunan semua bilangan bulat non negatif yang tidak habis dibagi 3 dan merupakan bilangan kuadrat sempurna
2. [2+2+2+2] Diberikan suatu himpunan M dan N dimana  $M = \{x \in \mathbb{R} : -10 < x < 10\}$  ;  $N = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 20\}$ . Tentukan :
  - a.  $M \cap N$
  - b.  $N - M$
  - c.  $M - \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - d.  $N^c$  (*complement of N*) dengan himpunan semesta adalah bilangan *real*
3. [2+2+2] Pada suatu himpunan semesta bilangan bulat terdapat himpunan A, B, dan C. Diketahui  $A = \{1, 2, 5, 10\}$ ,  $B - C = \{7, 9\}$ ,  $C - B = \{2, 8\}$ ,  $B \cap C = \{1, 3, 5\}$ . Tentukan:
  - a. Anggota masing-masing himpunan B dan C
  - b.  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - c.  $(A^c \cap B) \oplus (B - C^c)$
4. [2+2+2] Diketahui bahwa  $X = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ . Tentukan kebenaran pernyataan di bawah ini dan jelaskan alasannya
  - a.  $|X| = 4$
  - b. Misalkan  $Y = \{\emptyset\}$ , maka  $Y \in X$  dan  $Y \subseteq X$
  - c.  $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$  adalah subset dari  $\mathcal{P}(X)$

**Capaian Pembelajaran #10: Mahasiswa mampu menjelaskan fungsi dan kaitannya dengan himpunan, menentukan tipe fungsi, dan menerapkan operasi pada fungsi untuk memecahkan permasalahan.**

5. [3+3+3] Diberikan fungsi  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x^3 / 13 \rfloor$ 
  - a. Tentukan  $f(S)$  apabila  $S = \{-13, -7, 0, 7, 13\}$
  - b. Tentukan apakah  $f(x)$  injektif. Jelaskan jawaban Anda!
  - c. Tentukan apakah  $f(x)$  surjektif. Jelaskan jawaban Anda!
  
6. [3+3+3] Tentukan apakah fungsi-fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di bawah ini mempunyai *inverse*. Berikan penjelasannya dan tentukan fungsi inversnya jika ada.
  - a.  $f(x) = \lfloor (\lceil x \rceil) \rfloor$
  - b.  $f(x) = 3x/2$
  - c.  $f(x) = \pi(x + 4)$
  
7. [4+4] Misalkan  $g$  adalah fungsi dari  $A$  ke  $B$  dan  $f$  adalah fungsi dari  $B$  ke  $C$ . Buktikan pernyataan di bawah ini:
  - a. Jika  $f \circ g: A \rightarrow C$  merupakan fungsi surjektif, maka tunjukkan bahwa  $f$  adalah fungsi surjektif.
  - b. Jika  $f$  dan  $g$  merupakan fungsi injektif, maka  $f \circ g$  juga merupakan fungsi injektif
  
8. [3+3+3] Misalkan  $f(x) = x^2 + 4$  dan  $g(x) = 2x + 1$  adalah fungsi  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tentukan:
  - a.  $f \circ g$
  - b.  $f + g$
  - c.  $fg$

**Capaian Pembelajaran #11: Mahasiswa mampu menjelaskan barisan dan kaitannya dengan fungsi, menyatakan deret dari suatu barisan dengan menggunakan notasi yang tepat, dan menerapkan konsep barisan untuk menentukan sifat countable dari suatu himpunan.**

9. [4+4+5] Diberikan  $\{a_n\} = \{6, 10, 15, 21, 28, \dots\}$ ,  $\{b_n\} = \{8, 12, 24, 44, \dots\}$ ,  $\{c_n\} = \{12, 21, 30, 39, \dots\}$ .
  - a. Tentukan formula tertutup dari  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ .
  - b. Tentukan penjumlahan tujuh suku pertama dari  $\{b_n\}$  (gunakan notasi sigma)
  - c. Tentukan hasil perkalian dari penjumlahan suku ke-5 sampai suku ke-9 dari  $\{a_n\}$  dan penjumlahan suku ke-7 sampai suku ke-11 dari  $\{c_n\}$  (gunakan notasi sigma)
  
10. [5+5] Tentukan apakah himpunan di bawah ini bersifat countable atau uncountable. Jelaskan jawaban Anda.

- a.  $A = \{x(x + 2) \mid x \text{ bilangan bulat positif}\}$
- b.  $B = \{\frac{1}{x+1} - 1 \mid x \text{ bilangan bulat positif}\} \cup \{\frac{x-1}{x+1} \mid x \text{ bilangan bulat positif}\}$

**Capaian Pembelajaran #12: Mahasiswa mampu menerapkan metode pembuktian induksi untuk membuktikan sebuah pernyataan.**

11. [6] Buktikan dengan induksi matematika, untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ ,  $3^{2n} + 2^{2n+2}$  merupakan kelipatan 5.
12. [6] Buktikan dengan induksi matematika, untuk setiap bilangan cacah  $n$ ,  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n + 1)^3 = (n + 1)^2(2n^2 + 4n + 1)$
13. [6] Buktikan dengan *strong induction*, untuk setiap bilangan bulat  $n$  lebih dari 4,  $2^n > n^2 + n$