UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Induksi Matematika (Bagian 1)

Pembuktian Deduktif

- Metode pembuktian yang kita kenal di kuliah sebelumnya meliputi *direct proof*, *indirect proof* (kontraposisi & kontradiksi), serta *proof by cases*.

- Metode pembuktian di atas bersifat **deduktif**.

- **Deduktif** artinya:
  - Pembuktian **dimulai** dari **fakta-fakta (aksioma atau teorema lain)** dan **sesuatu yang diasumsikan benar**.
  - Pembuktian **berakhir** dengan **menunjukkan kesimpulan** atau teorema yang ingin dibuktikan.

- Lawan dari deduktif adalah **induktif**: dari **sekumpulan kecil observasi di domain**, kita mencoba menarik **generalisasi yang berlaku untuk seluruh elemen**.

Contoh Soal

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Soal ini sulit dibuktikan dengan menggunakan metode pembuktian yang sudah dipelajari sebelumnya.

Kita perlu mempelajari metode lain untuk membuktikan pernyataan-pernyataan seperti pada soal ini

Tangga Tidak Berujung (*Infinite Ladder*)

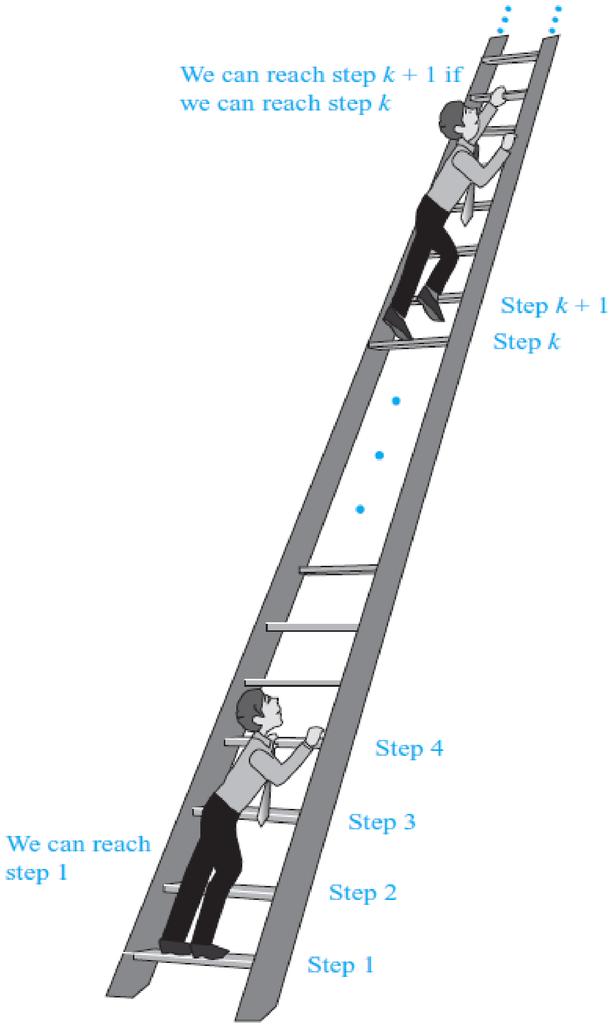


FIGURE 1 **Climbing an Infinite Ladder.**

Misalnya ada sebuah tangga yang tidak memiliki ujung dan seseorang bernama Diska ingin menaiki tangga tersebut.

Apakah dia dapat **menaiki setiap anak tangga** yang ada?

Bagaimana cara memastikan hal tersebut?

Tangga Tidak Berujung (*Infinite Ladder*)

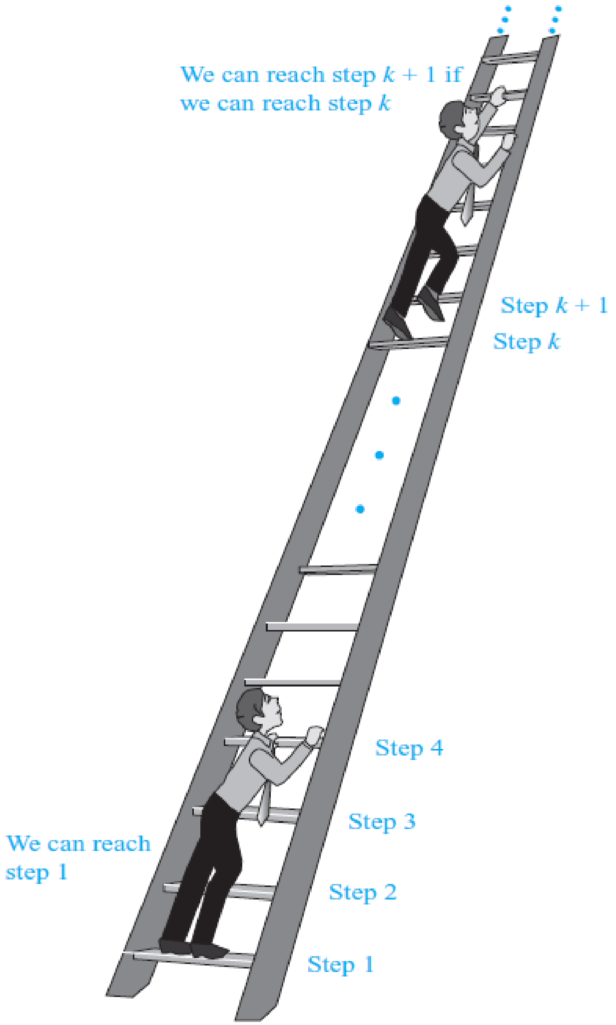


FIGURE 1 **Climbing an Infinite Ladder.**

Jika dapat ditunjukkan bahwa

(1) Diska dapat menaiki anak tangga pertama; dan

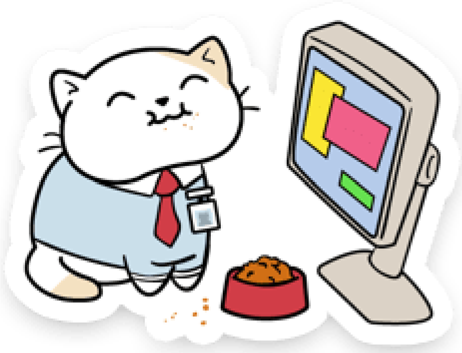
(2) Jika Diska berada pada anak tangga ke-k maka Diska dapat menaiki anak tangga ke-k+1

Maka kita bisa menyatakan bahwa **Diska dapat menaiki setiap anak tangga** pada tangga tidak berujung tersebut

Prinsip Induksi Matematika

Untuk membuktikan bahwa $P(n)$ bernilai BENAR untuk semua *n* bilangan bulat positif, dimana $P(n)$ adalah fungsi proposisi, maka lakukan dua tahapan berikut ini:

- **BASIS STEP**: Untuk membuktikan bahwa $P(1)$ bernilai BENAR
- **INDUCTIVE STEP**: Untuk membuktikan bahwa kondisi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ bernilai BENAR untuk semua bilangan bulat positif *k*



Induksi Matematika pada Tangga Tidak Berujung

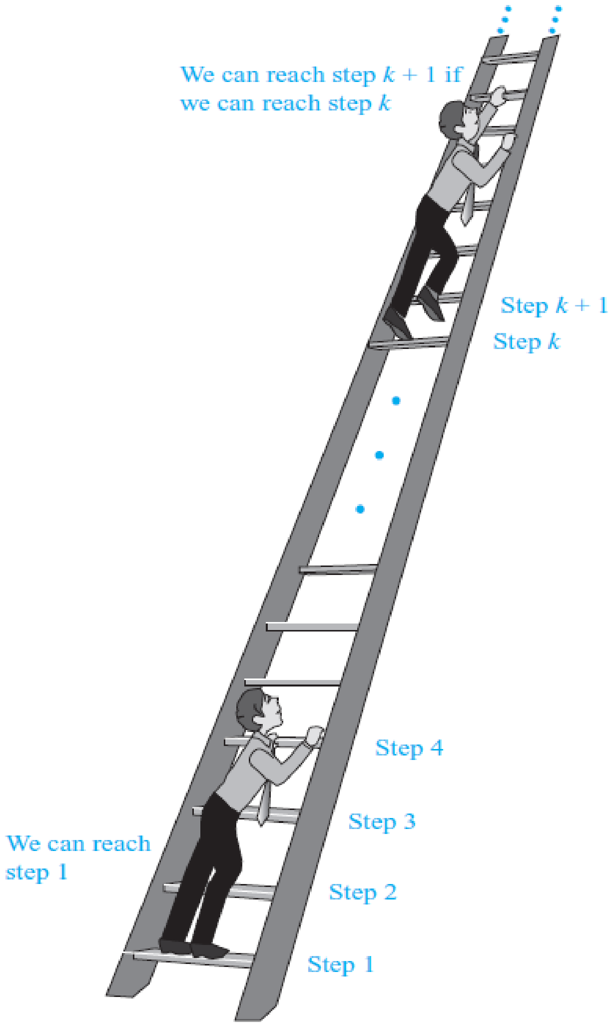


FIGURE 1 **Climbing an Infinite Ladder.**

Jika didefinisikan **P(n): "Diska dapat menaiki anak tangga ke-n"**. Maka,

BASIS STEP :

Diska dapat menaiki anak tangga pertama (P(1) bernilai benar)

INDUCTIVE STEP:

Jika Diska berada pada anak tangga ke-k maka Diska dapat menaiki anak tangga ke-k+1 ($P(k) \rightarrow P(k+1)$) berlaku untuk k bilangan bulat positif)

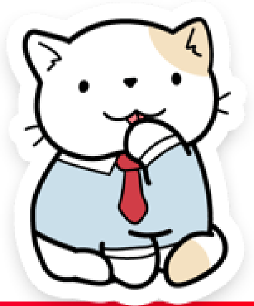
Kesimpulan:

Diska dapat menaiki setiap anak tangga pada tangga tidak berujung tersebut (**P(n) bernilai benar untuk setiap n bilangan bulat positif**)

Prinsip Induksi Matematika

- Dua langkah induksi (**BASIS STEP** dan **INDUCTIVE STEP**) cukup membuktikan bahwa pernyataan $\forall x\, P(x)$ bernilai BENAR untuk $x \in \mathbb{Z}^+$

- Pertama, kita menunjukkan bahwa $\boldsymbol{P}(\mathbf{1})$ bernilai benar
- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P}(\mathbf{2})$ bernilai benar, karena $\boldsymbol{P}(\mathbf{1}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\mathbf{2})$
- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P}(\mathbf{3})$ bernilai benar, karena $\boldsymbol{P}(\mathbf{2}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\mathbf{3})$
- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P}(\mathbf{4})$ bernilai benar, karena $\boldsymbol{P}(\mathbf{3}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\mathbf{4})$
- ….
- dan seterusnya sehingga kita simpulkan bahwa P(n) bernilai benar untuk $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$

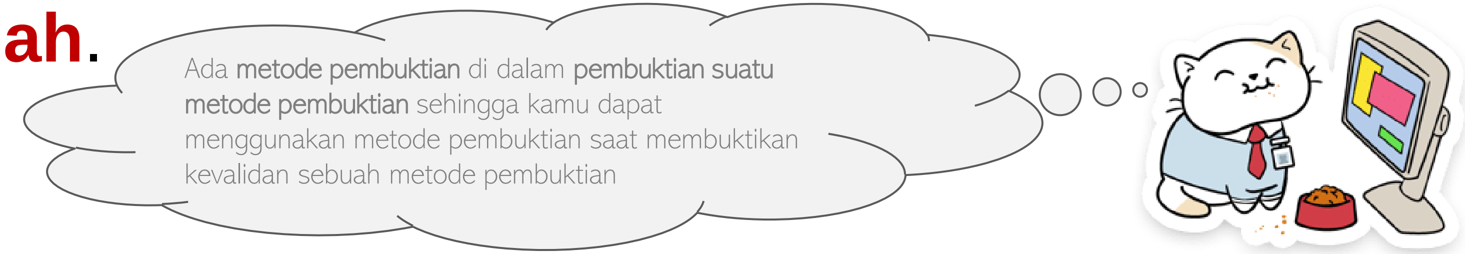


Mengapa Induksi Matematika Valid?

- *Well-ordering property*

Sebuah aksioma yang menyatakan bahwa setiap subset tidak kosong dari suatu himpunan bilangan bulat positif pasti **memiliki nilai minimum**.

- Dari langkah-langkah induksi kita tahu bahwa P(1) bernilai benar (**BASIS STEP**) dan proposisi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ berlaku untuk setiap bilangan bulat positif k (**INDUCTIVE STEP**).
- Guna membuktikan bahwa ***P*(n) bernilai BENAR untuk semua bilangan bulat positif *n***, kita akan menggunakan *proof by contradiction.*
- Untuk itu, **asumsikan** bahwa **ada setidaknya satu bilangan bulat positif dimana *P*(n) bernilai salah**.



Mengapa Induksi Matematika Valid?

- Didefinisikan suatu himpunan S yang berisi bilangan bulat positif *n* dimana *P*(n) bernilai salah. Dengan **asumsi** sebelumnya maka himpunan S menjadi himpunan tidak kosong.
- Dari *well-ordering property*, himpunan S pasti memiliki **nilai minimum**, misalnya *m,* dimana ***P*(m) bernilai salah**.
- Kita tahu bahwa *m* tidak mungkin 1 karena ***P*(1) benar**. Karena *m* > 1, maka *m* – 1 merupakan bilangan bulat positif juga.
- Berhubung $m - 1 < m$, maka *m* – 1 tidak ada dalam himpunan S sehingga P(*m – 1*) bernilai benar.
- Dari $P(k) \to P(k+1)$ **berlaku untuk setiap k bilangan bulat** kita tahu bahwa $P(m-1) \to P(m)$ bernilai benar. Ini bertentangan dengan pernyataan awal bahwa *P*(m) bernilai salah.
- Dari pembuktian tersebut tidak ada *m* yang membuat *P*(m) bernilai salah sehingga ***P*(n) bernilai benar untuk setiap bilangan bulat positif n**.

Apa yang sudah dipelajari?

- Prinsip Induksi Matematika
- Mengapa Pembuktian Induksi Matematika itu Valid

Sampai jumpa di Pembahasan Contoh Soal Induksi Matematika

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)
- Slide Matematika Diskret 1 : Induksi Matematika oleh Bapak Alfan F. Wicaksono (2013)