UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Fungsi

Definisi

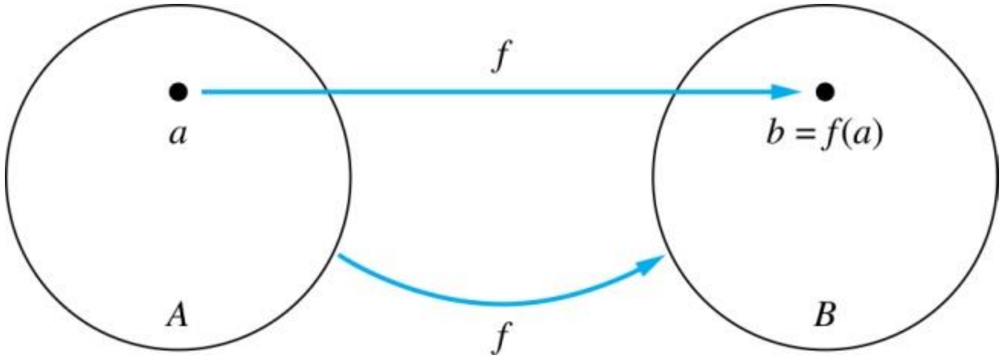
- Diberikan himpunan nonempty **A** dan **B.** Sebuah fungsi dari **A** ke **B** yang dinyatakan dengan $f : A \rightarrow B$ merupakan suatu **relasi** yang menghubungkan **setiap elemen** di **A** dengan **tepat satu elemen** di **B**.

- Fungsi juga dinamakan dengan **pemetaan (*mappings*)** atau **transformasi**.

Fungsi sebagai Relasi

- Fungsi adalah himpunan bagian dari himpunan **A x B,** yang mengandung satu-satunya **ordered pair (a, b)** untuk **setiap elemen a ∈ A**.
- Fungsi dinyatakan dengan ***f*(a) = b**, dengan **(a, b)** adalah **ordered pair unik** di relasi tersebut.

Terminologi



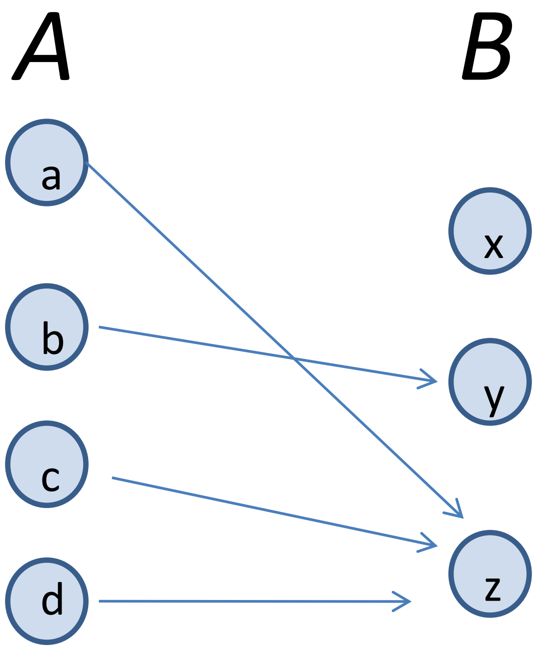
- Kita katakan *f* memetakan (*maps*) A ke B / *f* adalah mapping dari A ke B
- A adalah domain dari *f* dan B adalah codomain dari *f*.

Jika *f*(a) = b:

- *b* adalah peta (*image*) dari *a*
- *a* adalah prapeta (*preimage*) dari *b*
- Range dari *f* adalah himpunan semua peta dari elemen A.

Contoh

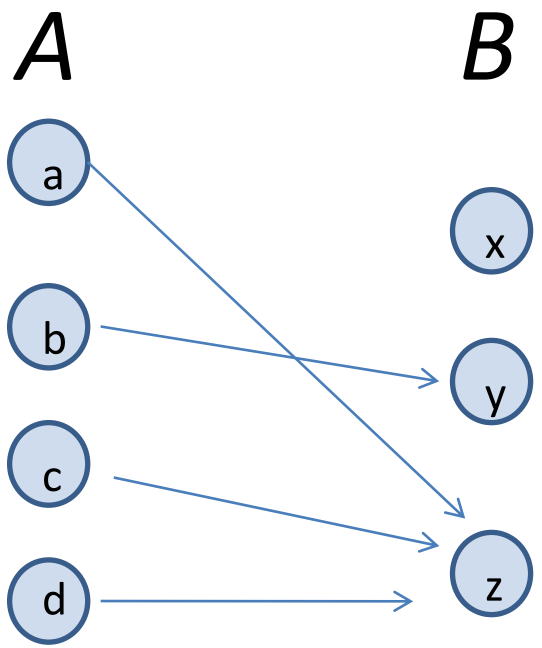
- *f*(*a*) =
- Peta/image dari *d* adalah...
- Domain *f* adalah ...
- Kodomain *f* adalah ...
- Prapeta/preimage dari *y* adalah ...
- Prapeta/Preimage(s) dari z adalah ...
- *f*(*A*)= ...



Fungsi dan Himpunan

- Diberikan $f : A \to B$ dan S yang merupakan subset dari A. Peta (*image*) dari S terkait fungsi *f* adalah subset dari *B* (yang anggotanya adalah peta dari anggota-anggota S).

$$f(S) = \{f(s) | s \in S\}$$



- Peta (image) dari subset $S = \{a,b,c\}$ adalah ...
- Peta (image) dari subset $S=\{c,d\}$ adalah ...

Latihan

- *Diketahui himpunan:*

  $A = \{a, b, c, d, e\}$

  $B = \{1, 2, 3, 4\}$

  dan $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$, and $f(e) = 1$.

  Diberikan $S = \{b, c, d\}$

  $f(S) = \ldots..$

Kategori Fungsi

- Fungsi injektif / satu-ke-satu / one-to-one
- Fungsi surjektif / onto
- Fungsi bijektif / korespondensi satu-satu

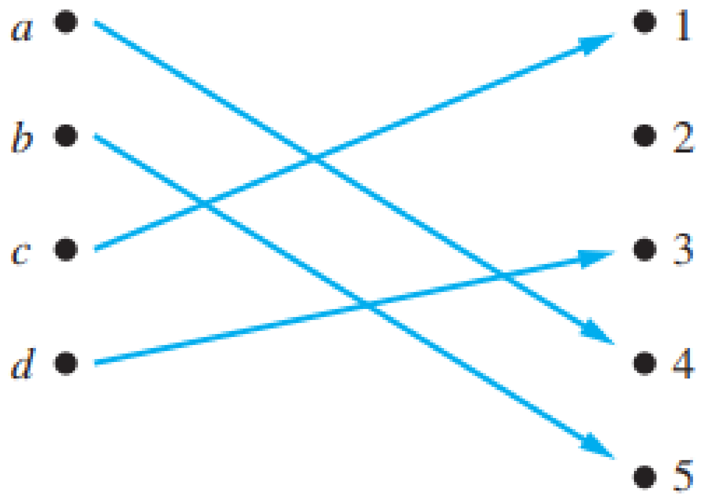
Fungsi Injektif (one-to-one)

Definisi:

Jika $\boldsymbol{f}\mathbf{(a)} = \boldsymbol{f}\mathbf{(b)}$, maka $\mathbf{a = b}$, dengan $\mathbf{a, b} \in$ domain $\boldsymbol{f}$

atau, Jika $\mathbf{a \neq b}$, maka $\boldsymbol{f}\mathbf{(a)} \neq \boldsymbol{f}\mathbf{(b)}$

Dengan kata lain, setiap elemen pada **domain dipetakan ke elemen yang berbeda** di **codomain**.



Latihan

Tentukan apakah fungsi berikut merupakan fungsi injektif:

- Fungsi $\boldsymbol{f} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, dengan $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$

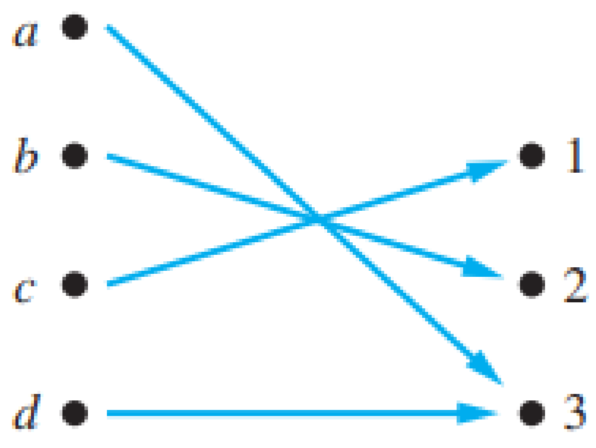
- Fungsi $\boldsymbol{g} : \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{Z}$, dengan $\boldsymbol{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$

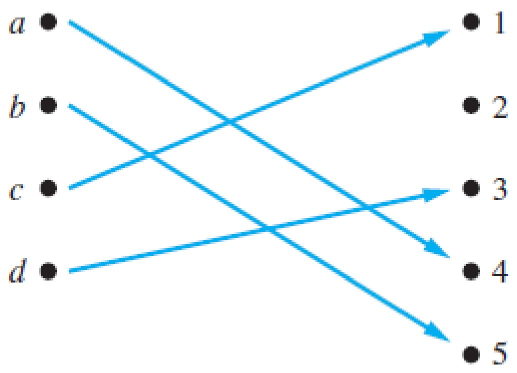
Fungsi Surjektif (onto)

Definisi

Untuk **setiap** elemen **b ∈ B**, **ada sebuah** elemen **a ∈ A** dengan ***f*(a) = b**

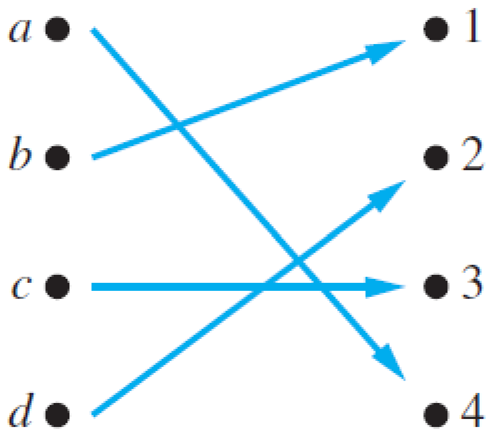
Manakah yang merupakan fungsi surjektif?





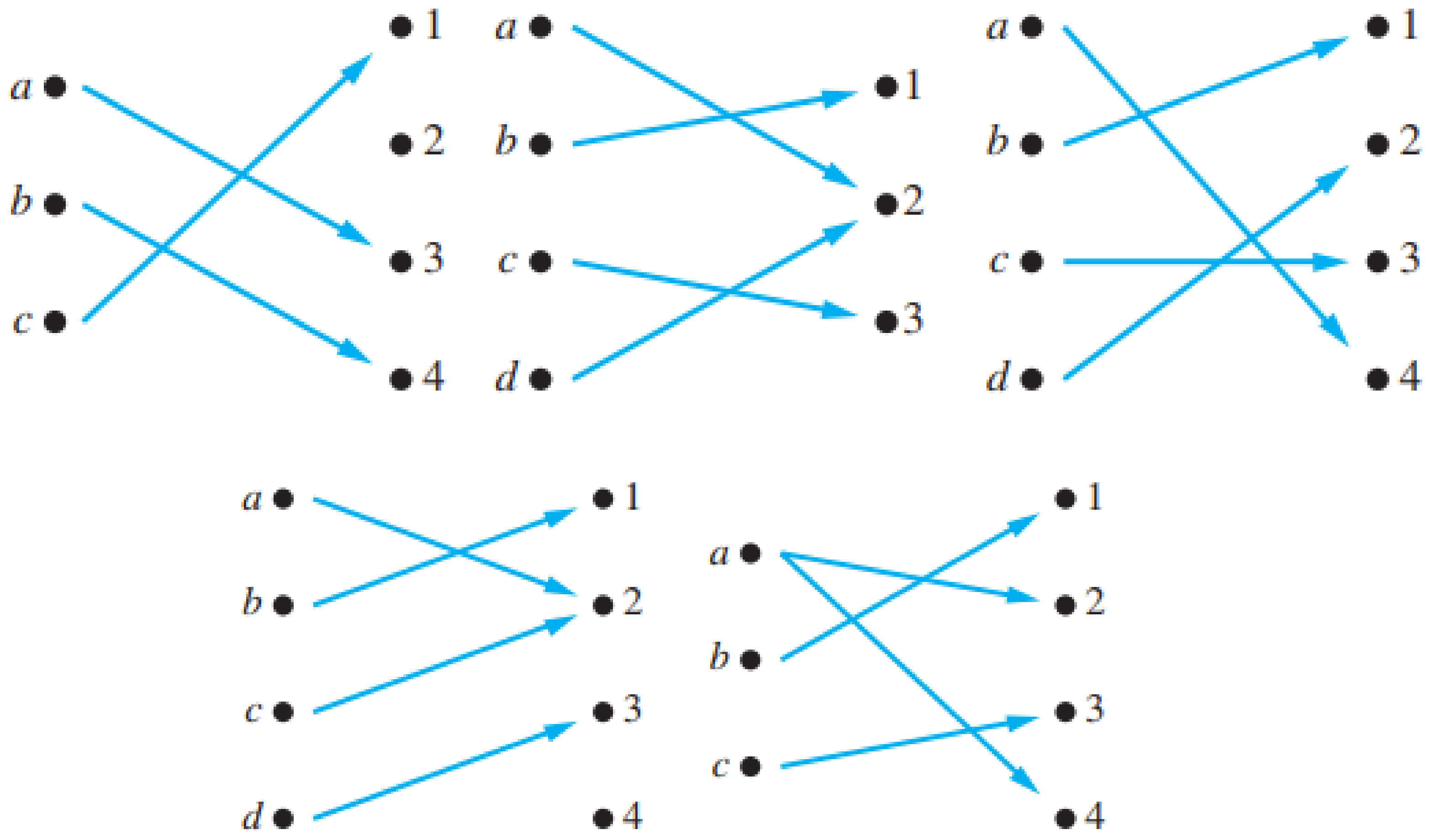
Fungsi Bijektif

- Definisi:
  Sebuah fungsi ***f*** dikatakan **bijektif** jika dan hanya jika ***f*** adalah **injektif** dan **surjektif**.



Latihan

- Identifikasi masing-masing fungsi berikut, apakah injektif, surjektif, atau bijektif?



Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Untuk $\boldsymbol{f} : A \rightarrow B$ dengan $A \subseteq \mathbf{R}$ dan $B \subseteq \mathbf{R}$, dan ada **x ,y** $\in A$, maka untuk setiap kali $x < y$:

- f dikatakan *naik (increasing)* jika $f(x) \leq f(y)$,
- f dikatakan *naik sejati (strictly increasing)* jika $f(x) < f(y)$,
- f dikatakan *turun (decreasing)* jika $f(x) \geq f(y)$,
- f dikatakan *turun sejati (strictly decreasing)* jika $f(x) > f(y)$

Latihan

Buktikan fungsi naik sejati (strictly increasing function) ***f*** **:** R $\rightarrow$ R adalah fungsi injektif.

Definisi:

- *Naik sejati (strictly increasing):* *jika $x < y$, $f(x) < f(y)$*
- *Injektif (One-to-one):* *jika* $f(a) = f(b)$, maka $a = b$

Solusi

Asumsikan $f(a) = f(b)$.

Apabila $a < b$, dengan f strictly increasing, $f(a) < f(b)$. Oleh karena itu, tidak mungkin $a < b$ karena kita mengasumsikan $f(a) = f(b)$.

Apabila $a > b$, dengan f strictly increasing, $f(a) > f(b)$. Oleh karena itu, tidak mungkin $a > b$.

Dengan demikian a harus memiliki nilai sama dengan b

Dengan f strictly increasing, jika $f(a) = f(b)$, maka $a = b$.

Terbukti bahwa fungsi naik sejati merupakan fungsi injektif.

Operasi Dasar Fungsi

Misalnya diberikan dua buah fungsi f, g **:** A $\rightarrow$ **R**, maka

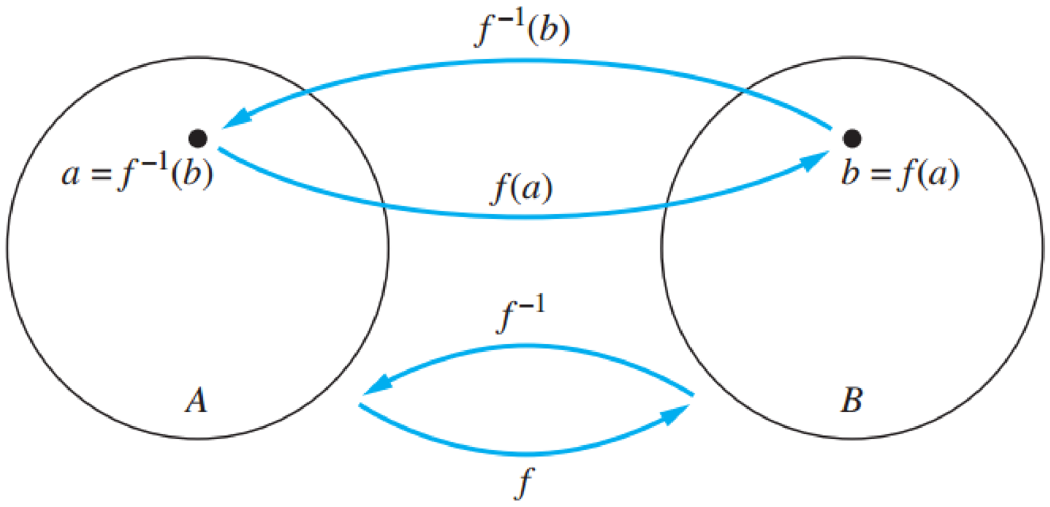
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f.g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$

Contoh:

$f(x) = x^2$ and $g(x) = x - x^2$

- $(f+g)(x) =$
- $(f.g)(x) =$

Fungsi Inverse



Definisi

Misal, $\boldsymbol{f} : A \to B$ adalah fungsi **bijektif**, fungsi invers dari ***f*** adalah fungsi yang memetakan $b \in B$ ke elemen unik $a \in A$ sehingga $\boldsymbol{f(a) = b}$.

$$f(a) = b \text{ ketika } f^{-1}(b) = a$$

Bagaimana bila ***f*** **bukan** fungsi **bijektif**?

Contoh

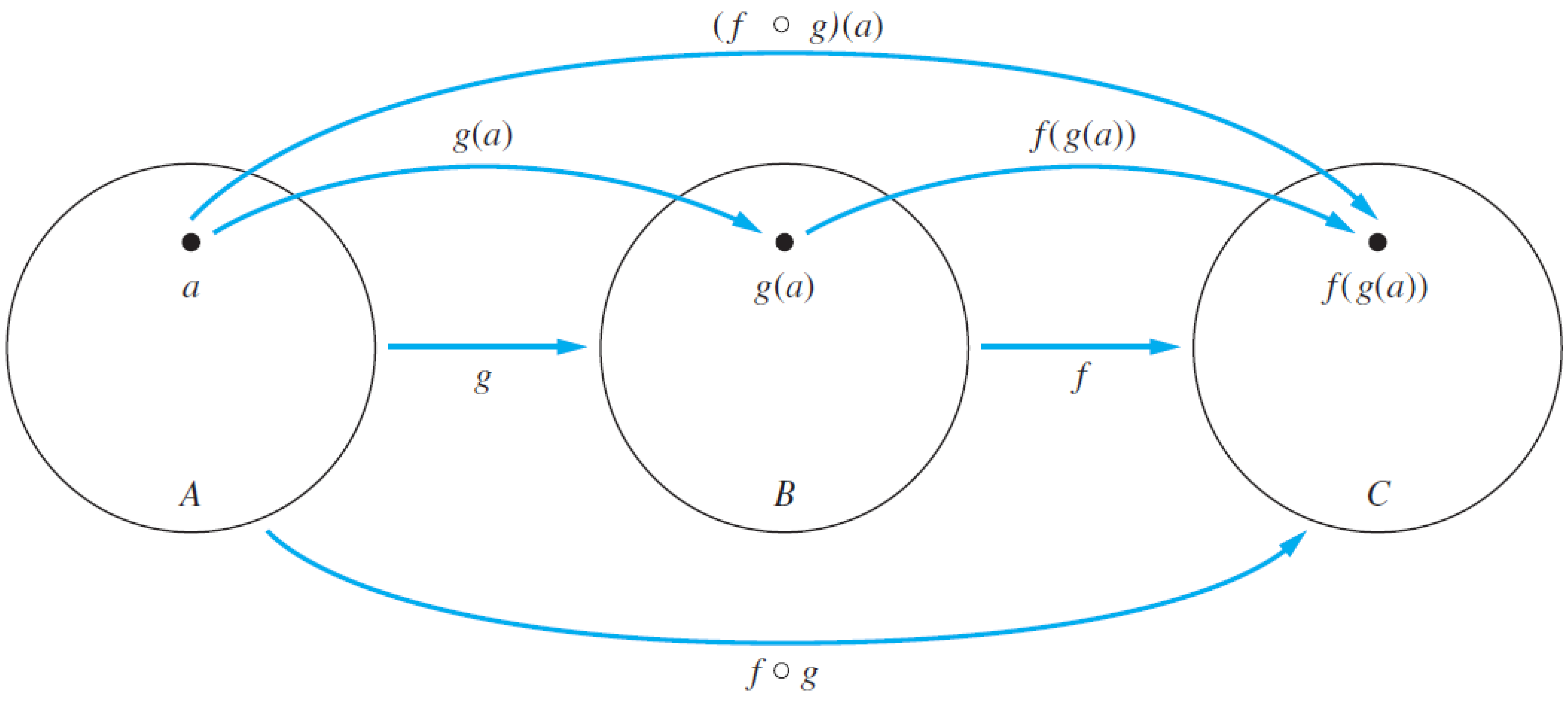
- Diberikan f: **Z** → **Z** yaitu $f(x) = x + 1$. Tentukan inversenya.

Komposisi Fungsi

Misalkan A, B, C adalah tiga himpunan, ***g*** : A → B dan ***f*** : B → C. Komposisi fungsi dari ***f*** dan ***g*** adalah fungsi dari A ke C yang dinyatakan dengan:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

untuk setiap **a** ∈ A.



Latihan

Misal, f, g : **R** $\rightarrow$ **R**, dengan $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = 3x + 2$.

Apakah $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

Komposisi Fungsi

- Komposisi fungsi dengan inversnya akan menghasilkan fungsi identitas
  - Fungsi identitas pada A, $\iota_A : A \to A$, adalah fungsi yang memenuhi $\iota_A(x) = x$ untuk setiap $x \in A$.

Kita tahu bahwa $\boldsymbol{f}^{-1}(b) = a$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{f}(a) = b$.

- $(\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{f})(a) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(a)) = \boldsymbol{f}^{-1}(b) = a$
- $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1})(b) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(b)) = \boldsymbol{f}(a) = b$

- Dengan demikian, $f^{-1} \circ f = \iota_A$ and $f \circ f^{-1} = \iota_B$