Bab 4
Aplikasi Turunan

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Referensi, Kredit, dan Kontak

Referensi Utama

Varberg, Dale; Edwin J. Purcell; Steven E. Rigdon. Calculus, 9th Edition, Prentice Hall, 2006.

Kredit

Slide ini menggunakan tema Blue Connections Cordelia Presentation Template (https://www.slidescarnival.com/cordelia-free-presentation-template/216).

Kontak

Segala bentuk pertanyaan, kritik, dan saran mengenai slide ini dapat disampaikan via email ke okkyibrohim@cs.ui.ac.id.

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Outline

- Karakteristik grafik fungsi: Kemonotonan (naik, turun), Kecekungan (cekung ke bawah/cembung, cekung ke atas/cekung), dan Nilai Ekstrim (maksimum, minimum)
- Optimisasi
- Aplikasi di bidang fisika dan ekonomi

Sub 4.1

Karakteristik Grafik Fungsi: Kemonotonan, Kecekungan, dan Nilai Ekstrim

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Turunan Pertama untuk Cek Kemonotonan

Definisi

Misalkan f terdefinisi interval I (terbuka, tertutup, atau tak satupun). Kita katakan bahwa:

(i) f **naik** pada I jika, untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(ii) f **turun** pada I jika, untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(iii) f **monoton murni** pada I jika f naik pada I atau turun pada I.

Teorema A: Teorema Kemonotonan

Misalkan f kontinu pada interval I dan terdiferensial pada setiap titik-dalam dari I.

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik-dalam I, maka f naik pada I.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik-dalam I, maka f turun pada I.

Contoh Kemonotonan

Soal:

Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, cari di mana f naik dan di mana f turun.

Solusi:

Kita mulai dengan mencari turunan f.

$$f'(x) = 6x^2 - x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$$

Kita perlu menentukan nilai x yang memenuhi

$$(x + 1)(x - 2) > 0$$

Dan juga yang memenuhi

$$(x + 1)(x - 2) < 0$$

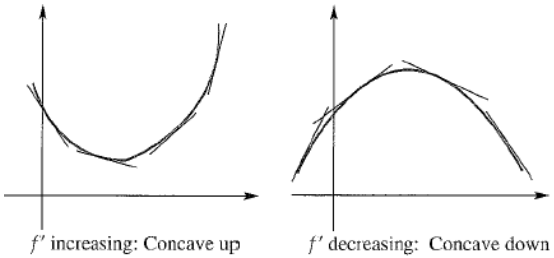
Titik-titik pemisah adalah -1 dan 2; titik-titik ini membagi sumbu- x atas tiga interval: $(-\infty, -1), (-1, 2)$ dan $(2, \infty)$. Dengan menggunakan titik-titik uji -2, 0, dan 3, kita simpulkan bahwa $f(X) > 0$ pada interval pertama dan terakhir dan bahwa $f'(x) < 0$ pada interval tengah. Jadi, menurut Teorema A, f naik pada $(-\infty, -1)$ dan $(2, \infty)$; turun pada $(-1, 2)$. Perhatikan bahwa teorema tersebut membolehkan kita menyertakan titik-titik ujung dari interval-interval ini, walaupun $f'(x) = 0$ pada titik-titik itu.

Turunan Kedua untuk Cek Kecekungan

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Definisi

Misalkan f terdiferensiasi pada interval terbuka I. Kita katakan bahwa f (dan grafiknya) **cekung ke atas** pada I jika f' menaik pada I dan kita katakan bahwa f **cekung ke bawah** pada I jika f' menurun pada I.



Teorema B: Teorema Kecekungan

Misalkan f terdiferensikan dua kali pada interval terbuka I

(i) Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I, maka f cekung ke atas pada I.

(ii) Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I, maka f cekung ke bawah pada I.

Contoh 1 Kecekungan

Soal:

Dimana $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ menaik, menurun, cekung ke atas, cekung ke bawah?

Solusi:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

Dengan menyelesaikan pertidaksamaan $(x+1)(x-3) > 0$ dan lawannya, $(x+1)(x-3) < 0$, kita simpulkan bahwa f menaik pada $(-\infty, -1]$ dan $[3, \infty)$ dan turun pada $[-1, 3]$. Demikian pula, dengan menyelesaikan $2(x-1) > 0$ dan $2(x-1) < 0$ memperlihatkan bahwa f cekung ke atas pada $(1, \infty)$, cekung ke bawah pada $(-\infty, -1)$

Contoh 2 Kecekungan

Soal:

Dimana $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)}$ cekung ke atas dan di mana cekung ke bawah?

Solusi:

Untuk menganalisis kecekungan, kita hitung g''.

$$g'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

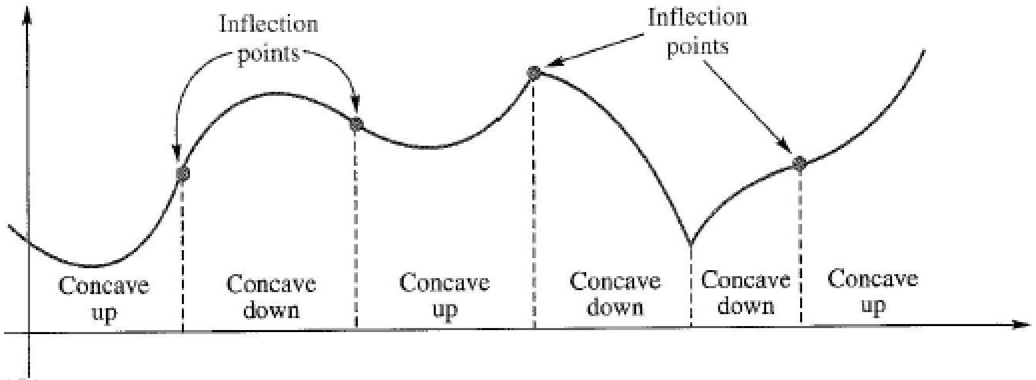
$$g''(x) = \frac{(1 + x^2)^2(-2x) - (1 - x^2)(2)(1 + x^2)(2x)}{(1 + x^2)^4} = \frac{(1 + x^2)^2(-2x) - (1 - x^2)(2)(1 + x^2)(2x)}{(1 + x^2)^4}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x}{(1 + +x^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

Karena penyebut selalu positif, kita hanya perlu menyelesaikan $x(x^2 - 3) > 0$ dan lawannya. Titik-titik pemisah adalah $-\sqrt{3}, 0,$ dan $\sqrt{3}$. Tiga titik pemisah itu menentukan empat interval. Setelah mengujinya, kita simpulkan bahwa g cekung ke atas pada $(-\sqrt{3}, 0)$ dan $(\sqrt{3}, \infty)$ dan bahwa cekung ke bawah pada $(-\infty, -\sqrt{3})$ dan $(0, \sqrt{3})$.

Titik Belok

Misalkan f kontinu di c. Kita sebut $(c, f(c))$ suatu **titik belok** (*inflection point*) dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari c.



Contoh Titik Belok

Soal:

Cari semua titik belok untuk $F(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$

Solusi:

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \qquad\qquad F''(x) = \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}}$$

Turunan kedua, $F''(x)$, tidak pernal 0; namun gagal untuk ada di $x = 0$. Titik $(0, 2)$ adalah titik belok, karena $F''(x) > 0$ untuk $x < 0$ dan $F''(x) < 0$ untuk $x > 0$.

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

Nilai Ekstrim: Maksimum dan Minimum

Definisi

Misalkan S adalah daerah asal (belum tentu daerah asal alami) f, mengandung titik c. Kita katakan bahwa

(i) $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S;

(ii) $f(c)$ adalah nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S;

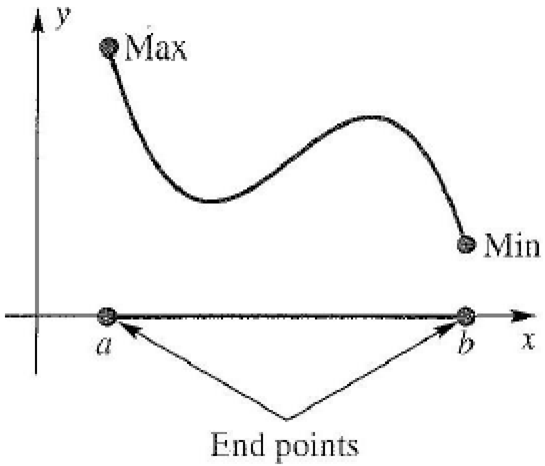
(iii) $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** (atau disebut juga nilai optimum) f pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum;

(iv) Fungsi yang ingin dicari nilai maksimum dan minimumnya disebut dengan **fungsi objektif**. Nilai maksimum dan minimum **untuk keseluruhan *S*** selanjutnya disebut dengan **maksimum global** dan **minimum global**.

Teorema A: Teorema Keberadaan Maks-Min

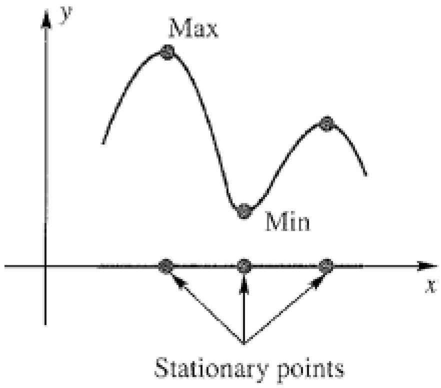
Jika f kontinu pada interval tertutup $S = [a, b]$, maka f mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum global di sana.

Dimana Terjadinya Nilai-Nilai Ekstrim?



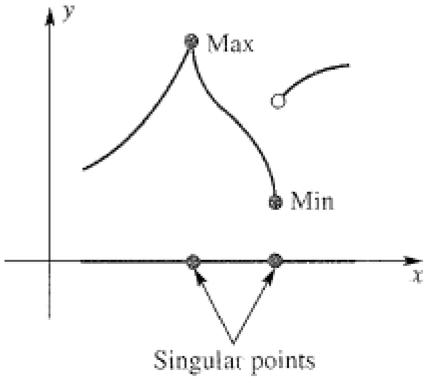
Dimana Terjadinya Nilai-Nilai Ekstrim?

Jika c sebuah titik tempat $f'(x) = 0$, kita sebut c **titik stasioner**. Nama itu diturunkan dari fakta bahwa pada titik stasioner, grafik f mendatar, karena garis singgung mendatar. Nilai-nilai ekstrim seringkali terjadi pada titik stasioner.



Dimana Terjadinya Nilai-Nilai Ekstrim?

Jika c adalah titik-dalam dari f di mana $f'(c)$ **tidak ada**, kita sebut c sebagai **titik singular**. Pada titik ini grafik f memiliki sudut yang tajam, garis singgung vertical, atau berupa loncatan, atau di dekatnya grafik bergoyang sangat buruk. Nilai-nilai ekstrim dapat terjadi pada titik-titik singular, walaupun dalam masalah-masalah praktis hal ini jarang terjadi.



Ketiga jenis titik ini (titik ujung, titik stasioner, dan titik singular) merupakan titik-titik kunci dari teori maks-min. sebarang titik dalam daerah asal fungsi f yang termasuk salah satu dari tiga tipe ini disebut **titik kritis** f.

FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS INDONESIA

Teorema B: Teorema Titik Kritis

Misalkan f didefinisikan pada interval I yang memuat titik $c.$ Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah berupa suatu titik kritis; dengan kata lain, c adalah salah satu dari

(i) Titik ujung dari I
(ii) Titik stasioner dari f; yakni titik di mana $f'(c) = 0$; atau
(iii) Titik singular dari f; yakni titik di mana $f'(c)$ tidak ada.

Contoh Titik Kritis

Soal:

Carilah titik-titik kritis dari $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

Solusi:

Titik-titik ujung adalah $-\frac{1}{2}$ dan 2. Untuk mencari titik stasioner kita pecahkan $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ untuk x, diperoleh 0 dan 1. tidak ada titik-titik singular. Jadi, titik-titik kritisnya adalah $-\frac{1}{2}, 0, 1,$ dan 2.

Nilai Ekstrim Global

Dari Teorema A dan B, sekarang kita dapat menyatakan suatu prosedur yang sangat sederhana untuk menghitung nilai maksimum global atau nilai minimum global suatu fungsi kontinu f **pada interval tertutup** I.

Langkah 1: Carilah titik-titik kritis f pada I.

Langkah 2: Hitunglah f pada setiap titik kritis. Yang terbesar di antara nilai-nilai ini adalah nilai **maksimum global**, yang terkecil adalah nilai **minimum global**.

Contoh Nilai Ekstrim Global

Soal:

Carilah nilai maksimum global dan minimum global dari $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

Solusi:

Dalam contoh sebelumnya, $-\frac{1}{2}, 0, 1,$ dan 2 sebagai titik-titik kritis. Sekarang $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -4$. Jadi, nilai **maksimum global** adalah 1 (dicapai di $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 1$) dan nilai **minimum global** adalah -4 (dicapai di $x = 2$).

Ekstrim Lokal dan Ekstrim pada Interval Terbuka

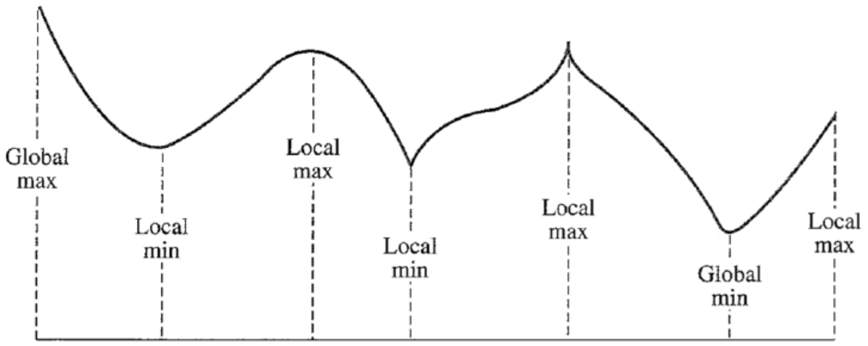
Definisi

Misalkan S, daerah asal f, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

(i) $f(c)$ **nilai maksimum lokal** f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap S$;

(ii) $f(c)$ **nilai minimum lokal** f jika terdapat interval (a, b) yang memuat c sedemikian rupa sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap S$;

(iii) $f(c)$ **nilai ekstrim lokal** f jika ia berupa nilai maksimum local atau minimum lokal.



FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Teorema A: Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu pada interval terbuka (a, b) yang memuat sebuah titik kritis c.

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

(iii) Jika $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim local f.

Contoh Nilai Ekstrim Lokal

Soal:

Carilah nilai-nilai ekstrim lokal dari $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ pada $(-\infty, \infty)$.

Solusi:

Karena $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, titik-titik kritis f hanyalah -1 dan 3. ketika kita gunakan titik-titik uji -2, 0, dan 4, kita ketahui bahwa $(x+1)(x-3) > 0$ pada $(-\infty, -1)$ dan $(3, \infty)$ serta $(x+1)(x-3) < 0$ pada $(-1, 3)$. Menurut Uji Turunan Pertama kita simpulkan bahwa $f(-1) = \frac{17}{3}$ adalah nilai maksimum local dan bahwa $f(3) = -5$ adalah nilai minimum lokal.

Teorema B: Uji Turunan Kedua

Misalkan f' dan f'' ada pada setiap titik interval terbuka (a, b) yang memuat c, dan misalkan $f'(c) = 0$.

(i) Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal.

(ii) Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal.

Contoh 1 Uji Turunan Kedua

Soal:

Untuk $f(x) = x^2 - 6x + 5$, gunakan Uji Turunan Kedua utuk mengenali ekstrim lokal.

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$f'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - 6 = 2(\mathrm{x} - 3)$$

$$f''(\mathrm{x}) = 2$$

Jadi, $f'(3) = 0$ dan $f''(3) > 0$. Karena itu, menurut Uji Turunan Kedua, $f(3)$ adalah nilai minimum local.

Penggambaran Grafik Fungsi

Langkah 1: Analisis Prakalkulus

(a) Periksa daerah asal dan daerah hasil fungsi untuk melihat apakah ada daerah di bidang yang dikecualikan.
(b) Uji kesimetrian terhadap sumbu-y dan titik asal. (apakah fungsi genap atau fungsi ganjil).
(c) Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

Langkah 2: Analisis Kalkulus

(a) Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan mengetahui tempat-tempat grafik menaik dan menurun.
(b) Uji titik-titik kritis untuk maksimum dan minimum local
(c) Gunakan turunan kedua untuk mengetaahui tempat-tempat grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan untuk melokasikan titik balik.
(d) Cari asimtot-asimtot.

Contoh Sketsa Grafik Fungsi

Soal:

Analisis fungsi $F(x) = \frac{\sqrt{x}(x-5)^2}{4}$ dan sketsakan grafiknya.

Solusi:

Daerah asal F adalah $[0, \infty)$ dan daerah nilai adalah $[0, \infty)$, sehingga grafik F terbatas di kuadran pertama dan sumbu koordinat positif. Perpootongan sumbu-x adalah 0 dan 5; perpotongan sumbu-y adalah 0. Dari

$$F'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{8\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$

Kita temukan titik stasioner 1 dan 5. Karena $F'(x) > 0$ pada $(0,1)$ dan $(5, \infty)$ sedangkan $F'(x) < 0$ pada $(1,5)$, kita simpulkan bahwa $F(1) = 4$ adalah nilai maksimum local dan $F(5) = 0$ adalah nilai minimum lokal.

Solusi (lanjutan):

Pada perhitungan turunan kedua, kita peroleh

$$F'(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{16x^{\frac{3}{2}}}, x > 0$$

Namun, $3x^2 - 6x - 5 = 0$ mempunyai satu penyelesaian dalam interval $(0, \infty)$, yaitu $1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 2{,}6$.

Dengan menggunakan titik-titik uji 1 dan 3, kita simpulkan bahwa $f'(x) < 0$ pada $\left(0{,}1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ dan $f'(x) > 0$ pada $\left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$. Akibatnya titik $\left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}, F\left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\right)$, yaitu sekitar $(2{,}6; 2{,}3)$ adalah titik belok.

Ketika x bertambah besar, $F(x)$ bertambah besar tanpa batas dan jauh lebih cepat daripada fungsi linear manapun, tidak terdapat asimtot-asimtot.

Sub 4.2

Optimisasi

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Langkah Penyelesaian Optimisasi

Langkah 1: Buat sebuah gambar untuk masalah dan berikan variab-variabel yang sesuai untuk besaran-besaran penting.

Langkah 2: Tuliskan rumus untuk fungsi tujuan Q yang harus dimaksimumkan (diminimumkan) dalam bentuk variable-variable dari langkah 1.

Langkah 3: Gunakan kondisi-kondisi masalah untuk menghilangkan semua kecuali satu dari variable-variable ini dan karenanya menyatakan Q sebagai fungsi dari variable tunggal.

Langkah 4: Carilah titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, titik singular)

Langkah 5: Substitusikan nilai-nilai kritis ke dalam fungsi tujuan atau gunakan teori dari subbab terakhir (yaitu Uji Turunan Pertama dan Kedua) untuk menentukan maksimum atau minimum.

Contoh Optimisasi

Soal:

Kotak segiempat akan dibuat dari selembar papan, panjang 24 inci dan lebar 9 inci, dengan memotong segiempat identic pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa volume maksimumnya?

Solusi:

Misalkan x adalah sisi segiempat yang harus dipotong dan V adalah volume kotak yang dihasilkan. Maka,

$$V = x(9-2x)(24-2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Sekarang x tidak dapat lebih kecil dari 0 ataupun lebih besar dari 4,5. Jadi masalah kita adalah memaksimumkan V pada $[0;4{,}5]$. Titik-titik stasioner ditemukan dengan menetapkan $\frac{dV}{dx}$ sama dengan nol dan menyelesaikan persamaan yang dihasilkan:

$$\frac{dV}{dt} == 216 - 132x + 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2) = 12(9-x)(2-x) = 0$$

Ini memberikan $x = 2$ atau $x = 9$, tetapi 9 tidak berada di dalam interval $[0;4{,}5]$. Kita lihat bahwa hanya terdapat tiga titik kritis yaitu 0, 2, dan 4,5. Pada titik-titik ujung 0 dan 4,5; $V = 0$; pada 2, $V = 200$. kita simpulkan bahwa kotak mempunyai volume maksimum 200 inci kubik jika $x = 2$, yakni jika kotak berukuran panjang 20 inci, lebar 5 inci, dan tinggi 2 inci.

Sub 4.3

Aplikasi di Bidang Fisika dan Ekonomi

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Aplikasi Turunan Parametrik di Bidang Fisika

Jika variable y bergantung pada waktu t, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut laju perubahan sesaat.

Prosedur:

Langkah 1: Misal t menyatakan waktu yang terlalui. Gambarkan sebuah diagram yang berlaku untuk semua $t > 0$. Beri pengenal besaran-besaran yang nilainya tidak berubah bila t bertambah dengan nilai-nilai konstantanya yang diketahui. Berikan nama huruf pada besaran yang berubah sesuai dengan t, dan beri pengenal bagian-bagian gambar yang sesuai dengan variable-variable ini.

Langkah 2: Nyatakan apa yang diketahui dan apa yang diinginkan tentang variable-variable tersebut. Informasi ini akan berbentuk turunan-turunan terhadap variable t.

Langkah 3: Hubungkan variable-variable dengan menuliskan persamaan yang valid untuk semua waktu $t > 0$, bukan hanya pada beberapa saat tertentu.

Langkah 4: Diferensiasikan secara implisit persamaan yang ditemukan dalam Langkah 3 terhadap t. Persamaan yang dihasilkan, memuat turunan-turunan terhadap t, benar untuk semua $t > 0$.

Langkah 5: Pada tahap ini, bukan lebih dini, substitusikan ke dalam persamaan yang ditemukan dalam Langkah 4 semua data yang sahih pada saat tertentu seperti yang diperlukan untuk jawaban soal. Pecahkan untuk turunan yang diinginkan.

Contoh Aplikasi Bidang Fisika

Soal:

Sebuah pesawat udara terbang ke utara dengan laju 640 mil/jam melintasi sebuah kota pada tengah hari. Pesawat kedua terbang ke timur dengan laju 600 mil/jam langsung di atas kota yang sama 15 menit kemudian. Jika pesawat-pesawat itu terbang pada ketinggian yang sama, seberapa cepat mereka berpisah pada pukul 13.15?

Solusi:

Langkah 1: Misalkan t menyatakan lamanya jam setelah pukul 12.15, y jarak dalam mil yang ditempuh pesawat ke arah utara setelah pukul 12.15, x jarak yang ditempuh oleh pesawat ke arah timur setelah pukul 12.15, dan s jarak antara pesawat-pesawat tersebut. Dalam waktu 15 menit dari tengah hari ke pukul 12.15, pesawat ke arah utara akan terbang $\frac{640}{4} = 160$ mil, sehingga jarak dari kota ke pesawat ke arah utara pada saat t akan sebesar $y + 160$.

Langkah 2: Untuk semua $t > 0$, diketahui bahwa $\frac{dy}{dt} = 640$ dan $\frac{dx}{dt} = 600$. Kita ingin mengetahui $\frac{dx}{dt}$ pada saat $t = 1$, yakni pukul 13.15.

Langkah 3: Menurut Teorema Pythagoras

$$s^2 = x^2 + (y + 160)^2$$

Contoh Aplikasi Bidang Fisika (lanjutan)

Solusi:

Langkah 4: Dengan mendiferensiasikan secara implisit terhadap t dan menggunakan Aturan Rantai, kita mempunyai

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(y+160)\frac{dy}{dt}$$

Atau

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (y+160)\frac{dy}{dt}$$

Langkah 5: Untuk semua $t > 0, \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 600$ dan $\frac{dy}{dt} = 640$, sedangkan pada saat khusus $t = 1, x = 600, y = 640,$ dan $s = \sqrt{600^2 + (640+160)^2} = 1000$. Ketika kita mensubstitusikan data-data ini ke dalam persamaan dari Langkah 4, kita peroleh

$$1000\frac{ds}{dt} = 36(600)(600) + (640+160)(640)$$

Sehingga

$$\frac{ds}{dt} = 872$$

Pada pukul 13.15,m pesawat-pesawat itu berpisah pada kecepatan 872 mil/jam.

Aplikasi Bidang Ekonomi

Konsep kunci untuk sebuah perusahaan adalah **total laba**, $P(x)$. Laba adalah selisih antara pendapatan dan biaya, yakni

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$$

Dengan

$R(x)$ adalah pendapatan total

$p(x)$ adalah harga untuk setiap unit

$C(x)$ adalah biaya total (biaya tetap ditambah biaya variabel)

Umumnya, sebuah perusahaan berusaha memaksimumkan total labanya.

Biaya marjinal: $\frac{dC}{dx}$

Contoh Aplikasi Bidang Ekonomi

Soal:

Misalkan $C(x) = 8.300 + 3.25x + 40\sqrt[3]{x}$ rupiah. Carilah biaya rata-rata tiap unit dan biaya marjinal, dan kemudian hitung ketika $x = 1.000$.

Solusi:

Biaya rata-rata: $\frac{C(x)}{x} = \frac{8.300+3{,}25x+40x^{\frac{1}{3}}}{x}$

Biaya marjinal: $\frac{dC}{dx} = 3{,}25 + \frac{40}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Pada $x = 1.000,$ ini masing-masing mempunyai nilai-nilai 11,95 dan 3,38. Ini berarti bahwa secara ratarata biaya tiap unit adalah 11,95 rupiah untuk memproduksi 1.000 unit yang pertama. Untuk memproduksi satu unit tambahan di atas 1.000 hanya memerlukan biaya 3,38 rupiah.

Terima kasih

Muhammad Okky Ibrohim
Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER