UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Kardinalitas Himpunan

Kardinalitas Himpunan

Sebelumnya....

Himpunan **A** dikatakan berhingga (*finite*) apabila **A** memuat tepat **n** anggota, dengan $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$.

Kardinalitas Himpunan

DEFINISI

Himpunan **A** dan **B** mempunyai kardinalitas sama (**|A| = |B|**) jika dan hanya jika **ada korespondensi satu-satu** dari **A** ke **B**.

Jika terdapat **fungsi injektif** dari himpunan **A** ke **B**, kardinalitas himpunan **A** dikatakan kurang dari atau sama dengan kardinalitas himpunan **B**, dinyatakan dengan **|A|≤|B|**.

Countability

DEFINISI

Sebuah himpunan **S** dikatakan **countable** apabila:

- Himpunan **berhingga (*finite*), atau**
- Himpunan mempunyai **kardinalitas yang sama** dengan **himpunan bilangan bulat positif** (Z^+).

Kardinalitas **S** yang merupakan himpunan *countably infinite* dinyatakan dengan $\aleph_0$ (**aleph null**), $|S| = \aleph_0$.

Jika sebuah himpunan tak berhingga *S uncountable*, $|S| = c$ ("continuum")

Contoh: Infinite Countable Set

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat ganjil positif A = {1, 3, 5, 7, ...} bersifat **countable**

Karena himpunan **A** *infinite*, harus ditunjukkan fungsi korespondensi satu-satu dari himpunan bilangan bulat positif $\mathbf{Z^+}$ ke **A**. Dengan kata lain, tunjukkan $|A| = |Z^+| = \aleph_0$.

Kita ambil fungsi $f : Z^+ \rightarrow A$, dengan **f(n) = 2n - 1**. Kemudian, tunjukkan bahwa ***f*** **bijektif**:

- Injektif: jika **f(n) = f(m)**, maka **2n – 1 = 2m – 1**. Kita dapatkan **n = m.**
- Surjektif: misalnya *t* adalah bilangan bulat positif ganjil. Maka, *t* memiliki selisih 1 dengan sebuah bilangan bulat positif genap 2k, dengan k adalah bilangan natural. Sehingga $t = 2k - 1 = f(k)$.

Terbukti bahwa A *countable*. A *countably infinite* dan $|A| = \aleph_0$.

Summary: countability untuk infinite sets

Himpunan tak berhingga **S** dikatakan *countable* jika dan hanya jika mempunyai kardinalitas yang sama dengan himpunan $\mathbf{Z^+}$

$$|S| = |Z^+| = \aleph_0$$

Dengan kata lain…

S *countable* jika dan hanya jika **ada fungsi bijeksi (korespondensi satu-satu)** dari himpunan $\mathbf{Z^+}$ ke himpunan **S**.

Dengan kata lain…

S *countable* jika dan hanya jika kita dapat membentuk **barisan dari elemen-elemen** yang ada di **S**.

Teorema

Teorema 1

Misalkan A dan B adalah dua himpunan dengan $A \subseteq B$. Apabila B bersifat **countable**, maka A juga bersifat **countable**.

Teorema 2

Misalkan A dan B adalah dua himpunan dengan $A \subseteq B$. Apabila A bersifat **uncountable**, maka B juga bersifat **uncountable**.

Teorema 3

Misalkan A dan B adalah dua himpunan. Jika A dan B bersifat **countable**, maka $A \cup B$ juga bersifat **countable**.

Uncountable Sets

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan **riil R** adalah ***uncountable*** !

Bukti Kontradiksi:

Kita asumsikan bahwa **R** bersifat ***countable***. Oleh karena itu, <u>himpunan bagian</u> bilangan riil antara **0** dan **1** juga bersifat ***countable***.

Jadi, kita dapat membuat **list/barisan** bilangan riil antara **0** dan **1**, yaitu $\mathbf{r_1, r_2, r_3, r_4}, \ldots$

Misal, representasi desimalnya adalah:

$\mathbf{r_1} = 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14} \ldots$
$\mathbf{r_2} = 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{12} \ldots$
$\mathbf{r_3} = 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34} \ldots$
$\mathbf{r_4} = 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44} \ldots$
…

dengan, $\mathbf{d_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}}$

Uncountable Sets

Kita bisa bangun bilangan riil baru $\mathbf{r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots}$, dengan aturan berikut:

- $\mathbf{d_i = 1}$**, jika** $\mathbf{d_{ii} \neq 1}$
- $\mathbf{d_i = 0}$**, jika** $\mathbf{d_{ii} = 1}$

Contoh: **apabila**:

$\mathbf{r_1} = 0.$ **2** 0 1 4 8 …

$\mathbf{r_2} = 0.$ 1 **6** 8 4 7 …

$\mathbf{r_3} = 0.$ 0 3 **1** 5 3 …

$\mathbf{r_4} = 0.$ 0 0 0 **3** 9 …

…

Uncountable Sets

$\mathbf{d_1}$ = **1** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 2 ≠ 1.
$\mathbf{d_2}$ = **1** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 6 ≠ 1.
$\mathbf{d_3}$ = **0** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 1 ≠ 1.
$\mathbf{d_4}$ = **1** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 3 ≠ 1.
…

Kita dapatkan **r = 0.1101…**, yang kita ketahui bahwa **r berada di antara 0 dan 1**. Akan tetapi, semua $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$,… tidak akan pernah sama dengan **r** karena digit ke-**n** pada **r** dan $\mathbf{r_n}$ selalu berbeda.

Artinya, **kita menemukan bilangan riil antara 0 dan 1**, tetapi **tidak ada di dalam daftar barisan tersebut**.

Akibatnya, asumsi bahwa bilangan riil antara **0** dan **1** dapat dibentuk list/barisan adalah **salah**.

Jadi, himpunan bilangan riil antara **0** dan **1** adalah *uncountable*. Setiap himpunan yang mempunyai subset *uncountable*, maka ia *uncountable*. Jadi, **R bersifat uncountable.**