Bab 7
Integral Tentu

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Referensi, Kredit, dan Kontak

Referensi Utama

Varberg, Dale; Edwin J. Purcell; Steven E. Rigdon. Calculus, 9th Edition, Prentice Hall, 2006.

Kredit

Slide ini menggunakan tema Blue Connections Cordelia Presentation Template (https://www.slidescarnival.com/cordelia-free-presentation-template/216).

Kontak

Segala bentuk pertanyaan, kritik, dan saran mengenai slide ini dapat disampaikan via email ke okkyibrohim@cs.ui.ac.id.

Outline

- Jumlah Riemann
- Integral Tentu
- Teorema Dasar Kalkulus Pertama
- Teorema Dasar Kalkulus Kedua
- Integral Tentu untuk Fungsi-Fungsi Khusus
- Teorema Nilai Rata-Rata dan Nilai Rata-Rata Fungsi

Sub 7.1
Jumlah Riemann

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Teorema A: Kelinieran ∑

Misalkan c adalah suatu konstanta, maka

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i ;$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i ;$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i .$$

Contoh 1 Kelinieran $\sum$

Soal:

Misalkan $\sum_{i=1}^{100} a_i = 60$ dan $\sum_{i=1}^{100} b_i = 11$, hitunglah $\sum_{i=1}^{100}(2a_i+3b_i + 4)$

Solusi:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100}(2a_i - 3b_i + 4) &= \sum_{i=1}^{100} 2a_i - \sum_{i=1}^{100} 3b_i + \sum_{i=1}^{100} 4 \\ &= 2\sum_{i=1}^{100} a_i - 3\sum_{i=1}^{100} b_i + \sum_{i=1}^{100} 4 \\ &= 2(60) - 3(11) + 100(4) = 487\end{aligned}$$

Contoh 2 Kelinieran $\sum$

Soal:

Perlihatkan bahwa $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

Solusi:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)$$
$$= -a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + a_4 - \cdots - a_n + a_{n+1}$$
$$= -a_1 + a_{n+1} = a_{n+1} - a_1$$

Beberapa Rumus ∑ Khusus

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Contoh 1 Beberapa Rumus ∑ Khusus

Soal:

Cari suatu rumus untuk $\sum_{i=1}^{100}(j+1)(j-5)$

Solusi:

$$\sum_{j=1}^{n}(j+2)(j-5) = \sum_{j=1}^{n}(j^2-3j-10) = \sum_{j=1}^{n} j^2 - 3\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 10$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} - 10n$$

$$= \frac{n}{6}[2n^2 + 3n + 1 - 9n - 9 - 60]$$

$$= \frac{n(n^2 - 3n - 34)}{3}$$

Contoh 2 Beberapa Rumus ∑ Khusus

Soal:

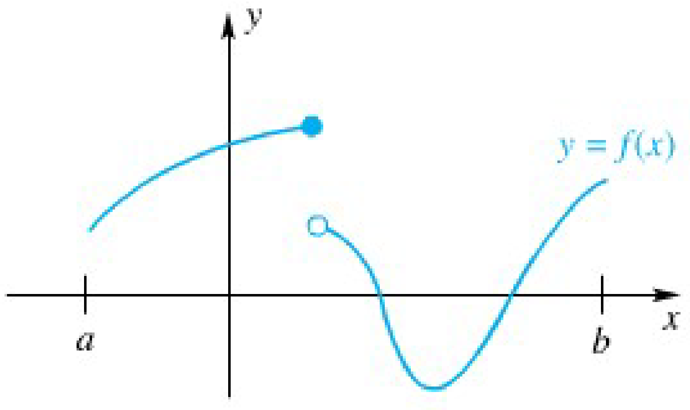
Berapa banyak jumlah jeruk yang ada pada pyramid dalam gambar berikut?

Solusi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^2 = \sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{7(8)(15)}{6} = 140$$

Jumlah Riemann

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$, fungsi ini dapat bernilai positif maupun negative pada interval tersebut yang mana bahkan tidak harus kontinu. Ilustrasi pernyataan ini mungkin dapat dilihat pada gambar berikut.

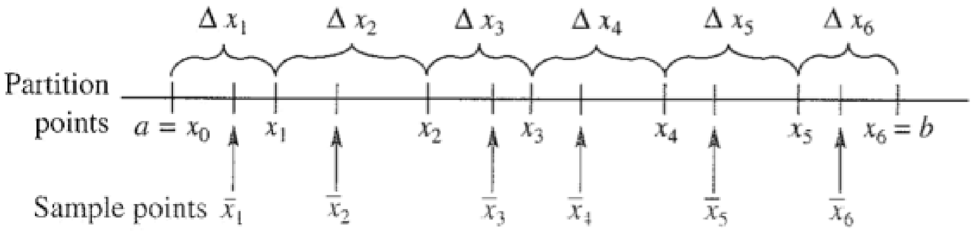


Jumlah Riemann (2)

Misalkan P adalah suatu partisi yang membagi $[a, b]$ menjadi n bagian partisi (tidak harus sama Panjang) dengan menggunakan titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ dan misalkan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada interval $[x_{i-1}, x_i]$, ambil sebuah titik sebarang $\overline{x_i}$ (yang mana bisa saja suatu titik ujung, kita sebut titik ini sebagai suatu titik sampel untuk bagian interval ke-i. Kita sebut jumlah partisi tersebut sebagai **Jumlah Riemann** dengan bentuk umum:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Sebuah contoh untuk konstruksi ini untuk kasus $n = 6$ dapat dilihat pada gambar berikut.

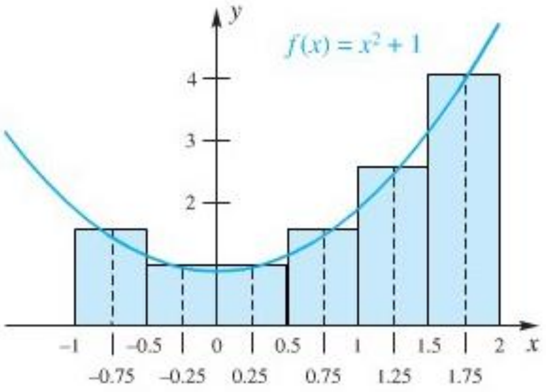


Contoh 1 Jumlah Riemann

Soal:

Hitung jumlah Riemann untuk $f(x) = x^2 + 1$ pada interval $[-1{,}2]$ dengan menggunakan titik-titik partisi berjarak sama $0{,}5$, yang mana titik sample $\bar{x}_i$ merupakan titik-titik tengah pada intervalnya.

Solusi:



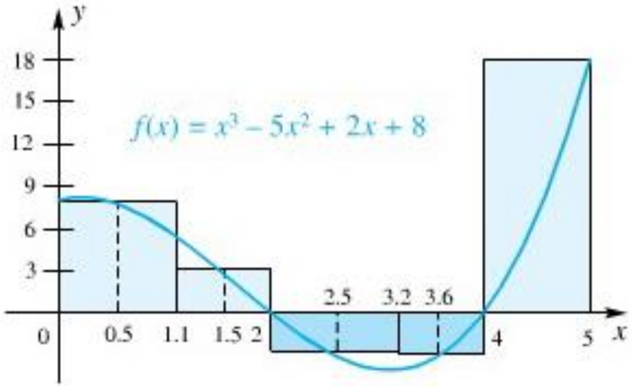
$$
\begin{aligned}
R_P &= \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= \big[f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)\big](0.5) \\
&= [1.5625 + 1.0625 + 1.0625 + 1.5625 + 2.5625 + 4.0625](0.5) \\
&= 5.9375
\end{aligned}
$$

Contoh 2 Jumlah Riemann

Soal:

Hitung jumlah Riemann untuk $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ pada interval $[0,5]$ dengan menggunakan titik-titik partisi $0 < 1{,}1 < 2 < 3{,}2 < 4 < 5$ dan titik-titik sampel yang berpadanan $\overline{x_1} = 0{,}5; \overline{x_2} = 1{,}5\,; \overline{x_3} = 2{,}5; \ \overline{x_4} = 3{,}6; \ \overline{x_5} = 5.$

Solusi:



$$
\begin{aligned}
R_P &= \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= f(\overline{x}_1)\,\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\,\Delta x_2 + f(\overline{x}_3)\,\Delta x_3 + f(\overline{x}_4)\,\Delta x_4 + f(\overline{x}_5)\,\Delta x_5 \\
&= f(0.5)(1.1 - 0) + f(1.5)(2 - 1.1) + f(2.5)(3.2 - 2) \\
&\quad + f(3.6)(4 - 3.2) + f(5)(5 - 4) \\
&= (7.875)(1.1) + (3.125)(0.9) + (-2.625)(1.2) + (-2.944)(0.8) + 18(1) \\
&= 23.9698
\end{aligned}
$$

Sub 7.2

Integral Tentu

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Definisi Integral Tentu

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

ada, maka kita katakanan f **terintegrasikan** pada $[a, b]$. Lebih lanjut, $\int_a^b f(x)dx$ disebut sebagai integral tentu (atau integral Rienmann) f dari a ke b, kemudian diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Apakah a harus kurang dari b?

Dalam definisi $\int_a^b f(x)dx$ yang didefinisikan sebelumnya, secara implisit kita mengasumsikan bahwa $a < b$. Kita hilangkan Batasan tersebut menggunakan definisi berikut

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad a > b$$

Teorema A: Teorema Keterintegrasian

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$ dan kontinu kecuali disuatu nilai terbatas pada interval tersebut, maka f dapat diintegralkan pada $[a, b]$. Khususnya, jika f sepenuhnya kontinu pada $[a, b]$, maka f dapat diintegralkan pada $[a, b]$.

Teorema B: Sifat Penambahan Interval

Jika f dapat diintegralkan pada interval yang mengandung titik a, b dan c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

tanpa mempermasalahkan bagaimana urutan a, b dan c.

Contoh 1 Definisi Integral Tentu

Soal:

Hitung $\int_{-2}^{3}(x+3)\,dx$

Solusi:

Bagi interval $[-2,3]$ menjadi n subinterval yang sama, yang mana setiap subinterval akan mempunyai Panjang $\Delta x = \frac{5}{n}$. Untuk setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, gunakan $\overline{x_i} = x_i$ sebagai titik sampel, sehingga

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -2 \\
x_1 &= -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n} \\
x_2 &= -2 + 2\,\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\vdots \\
x_i &= -2 + i\,\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\vdots \\
x_n &= -2 + n\,\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3
\end{aligned}
$$

Contoh 1 Definisi Integral Tentu (2)

FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

Dengan demikian, diperoleh $f(x_i) = x_i + 3 = 1 + i(5/n)$, sehingga mengakibatkan

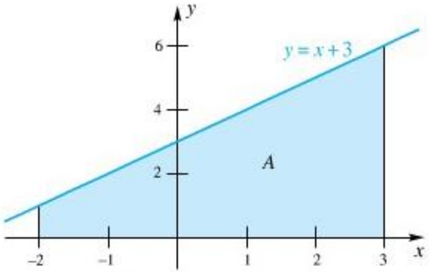
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n} \\
&= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Contoh 1 Definisi Integral Tentu (3)

Karena P adalah suatu partisi dengan $||P|| \to 0$ ketika $n \to \infty$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} (x+3)\,dx &= \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\
&= \frac{35}{2}
\end{aligned}$$

Ilustrasi dari jawaban kita dapat dilihat pada gambar berikut



$\int_{-2}^{3} (x+3)\,dx = A = \frac{35}{2}$

Contoh 2 Definisi Integral Tentu

Soal:

Hitung $\int_{-1}^{3}(2x^2 - 8)\,dx$

Solusi:

Bagi interval $[-1,3]$ menjadi n subinterval yang sama, yang mana setiap subinterval akan mempunyai Panjang $\Delta x = \frac{4}{n}$. Untuk setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, gunakan $\bar{x_i} = x_i$ sebagai titik sampel, sehingga

$$x_i = -1 + i\,\Delta x = -1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$f(x_i) = 2x_i^2 - 8 = 2\left[-1 + i\left(\frac{4}{n}\right)\right]^2 - 8$$

$$= -6 - \frac{16i}{n} + \frac{32i^2}{n^2}$$

Contoh 2 Definisi Integral Tentu (2)

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[-6 - \frac{16}{n}i + \frac{32}{n^2}i^2\right]\frac{4}{n} \\
&= -\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{64}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= -\frac{24}{n}(n) - \frac{64}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{128}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= -24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Contoh 2 Definisi Integral Tentu (3)

Karena P adalah suatu partisi dengan $||P|| \to 0$ ketika $n \to \infty$, maka diperoleh

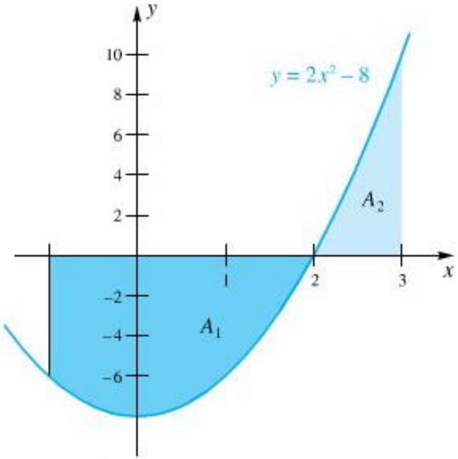
$$\int_{-1}^{3} (2x^2 - 8)\, dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[-24 - 32\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$= -24 - 32 + \frac{128}{3} = -\frac{40}{3}$$

Ilustrasi dari jawaban kita dapat dilihat pada gambar berikut

$$\int_{-1}^{3} (2x^2 - 8)\, dx = -A_1 + A_2 = -\frac{40}{3}$$



Latihan

Selesaikan integral tentu berikut dengan definisi intergal

1. $\int_0^5 (x+1)\,dx$
2. $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$
3. $\int_{-2}^1 (3x^2+2)\,dx$

Sub 7.3

Teorema Dasar Kalkulus Pertama

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Teorema A: Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$ dan kontinu kontinu pada interval tersebut, dan misalkan x adalah variabel titik pada (a, b), maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Teorema B: Sifat Perbandingan

Jika f dan g dapat diintegralkan pada $[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ disepanjang $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema C: Sifat Keterbatasan

Jika f diintegralkan pada $[a, b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua x dalam $[a, b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

Teorema D: Kelinieran Integral Tentu

Misalkan f dan g dapat diintegralkan pada $[a, b]$ dan k adalah suatu konstanta, maka

$$\text{(i)} \quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\text{(ii)} \quad \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

$$\text{(iii)} \quad \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Contoh 1 Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Soal:

Carilah $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$

Solusi:

Menurut Teorema Dasar Kalkulus Pertama,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = x^3$$

Contoh 2 Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Soal:

Carilah $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$

Solusi:

Menurut Teorema Dasar Kalkulus Pertama,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2+17}}$$

Sub 7.4

Teorema Dasar Kalkulus Kedua

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Teorema A: Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Misalkan f kontinu (karenanya terintegrasikan) pada $[a, b]$ dan misalkan F sebarang anti-turunan dari f pada $[a, b]$. Maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Contoh Soal Teorema A

Soal:

Hitunglah $\int_1^8 (x^{1/3} + x^{4/3})\, dx$.

Solusi:

$$\begin{aligned}\int_1^8 (x^{1/3} + x^{4/3})\, dx &= \left[\tfrac{3}{4}x^{4/3} + \tfrac{3}{7}x^{7/3}\right]_1^8 \\ &= \left(\tfrac{3}{4}\cdot 16 + \tfrac{3}{7}\cdot 128\right) - \left(\tfrac{3}{4}\cdot 1 + \tfrac{3}{7}\cdot 1\right) \\ &= \frac{45}{4} + \frac{381}{7} \approx 65.68\end{aligned}$$

Teorema B: Aturan Substitusi untuk Integral Tak-tentu

Misalkan g fungsi terdiferensiasikan dan misalkan bahwa F adalah anti-turunan f. Maka

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Contoh Soal Teorema B

Soal:

Hitunglah $\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)\,dx.$

Solusi:

Misalkan $u = x^2 + x$; maka $du = (2x+1)\,dx$. Sehingga

$$\int \underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{u}\,\underbrace{(2x+1)\,dx}_{du} = \int u^{1/2}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C$$

Karena itu menurut Teorema Dasar Kalkulus Kedua,

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}(x^2+x)^{3/2} + C\right]_0^4$$

$$= \left[\tfrac{2}{3}(20)^{3/2} + C\right] - [0 + C]$$

$$= \tfrac{2}{3}(20)^{3/2} \approx 59.63$$

Teorema C: Aturan Substitusi untuk Integral Tentu

Misalkan g mempunyai turunan kontinu pada $[a, b]$, dan misalkan f kontinu pada daerah nilai g. Maka,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

di mana $u = g(x)$.

Contoh Soal Teorema C

Soal:

Hitunglah $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\, dx.$

Solusi:

Misalkan $u = x^2 + 2x + 6$; maka $du = (2x+2)\, dx = 2(x+1)dx$, dan perhatikan bahwa $u = 6$ ketika $x = 0$ dan $u = 9$ ketika $x = 1$. Jadi,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+6)^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_6^9 u^{-2}\, du = \left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\right]_6^9 \\
&= -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

Latihan

1. $\int_1^4 \frac{s^4-8}{s^2}\, ds$
2. $\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+3x}}\, dx$
3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2(x^3) \cos^2(x^3)\, dx$

Sub 7.5

Integral Tentu untuk Fungsi-Fungsi Khusus

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Integral Tentu Fungsi-Fungsi Khusus

Dalam matematika terapan, banyak bentuk integral tentu yang tidak dapat diselesaikan dengan Teorema Dasar Kalkulus Kedua. Karena sering muncul, fungsi khusus tersebut diberi nama-nama khusus. Berikut beberapa bentuk integral tentu fungsi khusus:

the error function	$\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$
the sine integral	$\operatorname{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$
the Fresnel sine integral	$S(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$
the Fresnel cosine integral	$C(x) = \displaystyle\int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$

Penyelesaian Integral Tentu Fungsi-Fungsi Khusus

Selain fungsi-fungsi khusus yang sudah disebutkan, masih terdapat banyak fungsi-fungsi khusus lainnya. Anda bisa melihatnya di buku *Handbook of Mathematical Function*. Teknik penyelesaian integral tentu yang melibatkan fungsi-fungsi khusus ini seringkali melibatkan deret tak hingga (yang akan dibahas di Kalkulus 2), yang telah dikembangkan untuk mengaproksimasi hasil integral tentu dari fungsi-fungsi khusus ini.

Sub 7.6

Teorema Nilai Rata-Rata dan Nilai Rata-rata Fungsi

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Nilai Rata-Rata Sebuah Fungsi

Jika f terintegrasikan pada interval $[a, b]$, maka nilai rata-rata f pada $[a, b]$ adalah

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh Soal Nilai Rata-Rata Sebuah Fungsi

Soal:

Carilah nilai rata-rata fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = x\sin^2 x$ pada interval $[0, \sqrt{\pi}]$

Solusi:

Nilai rata-rata adalah

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}-0}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx$$

Untuk menghitung integral ini kita buat substitusi $u = x^2$, sehingga $du = 2x\,dx$. Ketika $x = 0, u = 0$ dan ketika $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. Jadi,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin u\,du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Teorema A: Teorema Nilai Rataan untuk Integral

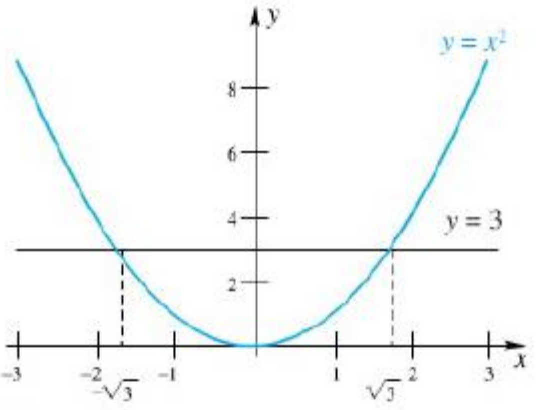
Jika f kontinu pada $[a,b]$, maka terdapat suatu bilangan c antara a dan b sedemikian rupa sehingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Contoh Soal Teorema A

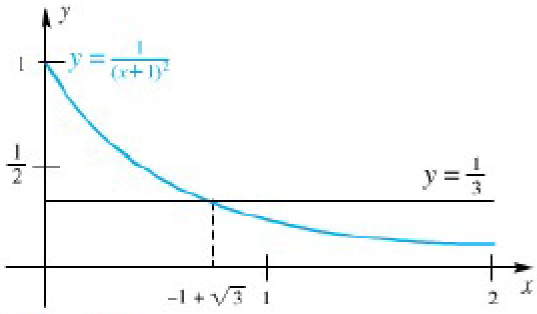
Soal:

Carilah semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rataan untuk integral fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[-3, 3]$



Solusi:

Grafik $f(x)$ yang diperlihatkan dalam gambar di samping menunjukkan bahwaa dapat ada dua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rataan untuk Integral. Nilai rata-rata fungsi adalah



$$\frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3} x^2\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{18}[27-(-27)] = 3$$

Untuk mencari nilai c, kita pecahkan

$$3 = f(c) = c^2$$

$$c = \pm\sqrt{3}$$

Teorema B: Teorema Simetri

Jika f adalah fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Jika f adalah fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Contoh Soal 1 Teorema B

Soal:

Hitunglah $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx.$

Solusi:

Karena $\cos\left(-\frac{x}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$, maka $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ adalah fungsi genap. Jadi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} dx$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/4} \cos u \, du = \left[8 \sin u\right]_{0}^{\pi/4} = 4\sqrt{2}$$

Contoh Soal 2 Teorema B

Soal:

Hitunglah $\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\, dx.$

Solusi:

Karena $f(x) = \frac{x^5}{x^2+4}$ adalah fungsi ganjil. Jadi, integral tersebut bernilai nol.

Teorema C

Jika f periodic dengan periode p, maka

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Contoh Soal Teorema C

Soal:

Hitunglah $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$

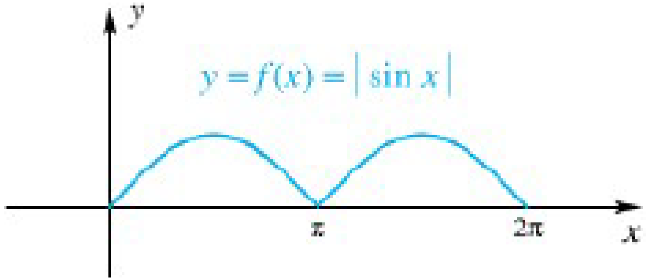
Solusi:

Perhatikan bahwa $f(x) = |\sin x|$ adalah periodik dengan periode π, sehingga

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx + \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2[1-(-1)] = 4$$



Latihan

1. Carilah semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rataan untuk integral fungsi $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ pada interval $[0,2]$.
2. Carilah semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rataan untuk integral fungsi $f(x) = \cos(2x)$ pada interval $[0, \pi]$
3. Hitunglah $\int_0^{100\pi} |\sin(x)|\, dx$

Terima kasih

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER