ALDEN LUTHFI
KALKULUS - C
2206028932
PR - 1

1. Definisi formal limit:
Sebuah fungsi $f(x)$ memiliki limit $L$ di $x=c$ jika dan hanya jika untuk semua $\varepsilon>0$ dapat dicari $\delta>0$ sehingga

$$|x-c|<\delta \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Jawab:
1. Analisis Pendahuluan:

$$|x-k|<\delta$$
$$|(mx+b)-(mk+b)|<\varepsilon$$
$$=|mx-mk|<\varepsilon$$
$$=|m||x-k|<\varepsilon$$
$$=|x-k|<\frac{\varepsilon}{|m|}$$

2. Bukti Formal:
Untuk semua $\varepsilon>0$, dapat dipilih $\delta=\frac{\varepsilon}{|m|}$ sehingga $0<|x-k|<\delta$ mengimplikasikan:

$$|(mx+b)-(mk+b)|=|mx-mk|=|m||x-k|<|m|\delta=\varepsilon \quad \blacksquare$$

2. a. $\lim\limits_{x\to -1}(x^{2022}+3)^5 = ((-1)^{2022}+3)^5$ (substitusi)
$= 1024 \quad \blacksquare$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} = \dfrac{(x+3)-(x-1)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$ (kali sekawan)

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} \quad \text{(teorema A)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i) } \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+3}=\infty \\ \text{ii) } \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-1}=\infty \end{array}}$$

(teorema A, bentuk akar)
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}f(x)}$$

$$=\frac{4}{\infty}=0 \quad \blacksquare$$ substitusi (i dan ii)

ALDEN LUTHFI
KALKULUS - C
22 0602893 2 PR-1

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{x+2-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$ (kali sekawan)

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$ (aljabar)

$= \frac{0}{2\sqrt{2}}$ (substitusi)

$= 0$ $\blacksquare$

3. a. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 (\cos 5x)^{-1}}{2x+1} = \frac{(0)^3 (\cos 5(0))^{-1}}{2(0)+1}$ (substitusi)

$= \frac{0}{1} = 0$ $\blacksquare$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin 3x)^{-2}}{x^{-2}} = \frac{x^2}{(\sin 3x)^2}$ (aljabar)

$= \frac{x}{\sin 3x} \cdot \frac{x}{\sin 3x}$ (teorema A)

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3} \frac{3x}{\sin 3x}$ (aljabar)

$= \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot 1$ (teorema D/apit)

$= \frac{1}{9}$ $\blacksquare$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x} = \frac{1 - (\cos x)^2}{2x \sin x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$ (kali sekawan)

$= \frac{(\sin x)^2}{2x \sin x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$ (identitas trigono)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2}$ (Teorema A)

$= \frac{1}{4}$ $\blacksquare$ (Teorema D/apit)

ALDEN LUTHFI

KALKULUS - C PR-1

2 2 0 6 0 2 8 9 3 2

4. a. 3 Syarat fungsi kontinu di c:

i. f(c) ada / terdefinisi

ii. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

iii. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Satu saja salah, maka f(x) tidak kontinu di c

Jawab:

→ Syarat yang di langgar : i

apabila $x = -5$ atau $x = 2$

$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - 10}$ akan memiliki penyebut bernilai 0

dimana $\frac{1}{0}$ akan membuat f(x) tidak terdefinisi.

Sehingga, f(x) tidak kontinu di $x = -5$ dan $x = 2$

hal ini terjadi karena -5 dan 2 adalah akar-akar dari

$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$

b. Dengan konsep Removable Discontinuity:

Sebuah fungsi yang diskontinu di c dapat dihiraukan diskontinuitasnya jika dan hanya jika $\lim_{x \to c} f(x)$ ada namun $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

f(c) dapat didefinisikan dengan menetapkan nilai

$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

Jawab:

f diskontinu di 4 karena $x = 4$ melanggar syarat i kontinuitas fungsi. namun $\lim_{x \to 4} f(x)$ dapat ditemukan dengan "menghilangkan" faktor $(x-4)$ dari polinomial tersebut (teorema c)

$$\lim_{x \to 4} \frac{4x^2 - 64}{x - 4} = \frac{4(x+4)(x-4)}{(x-4)} = 4(x+4) = 32$$

Sehingga f dapat didefinisikan ulang sebagai $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-64}{x-4}, & x \neq 4 \\ 32, & x = 4 \end{cases}$

ALDEN LUTHFI
KALKULUS - C PR-1
2 2 0 6 0 2 8 9 3 2

(5.) Jika kita mensubstitusikan $x = -2$ ke penyebut pecahan tersebut, kita akan memperoleh nilai 0. karena semua nilai selain 0 dari pembilang akan membuat limit pecahan menjadi tidak ada, maka pembilang dari pecahan tersebut harus juga bernilai 0 jika disubstitusikan dengan $x = -2$

Jawab:

$$3(-2)^2 + a(-2) + a + 3 = 0$$
$$= 12 + a + 3 - 2a = 0$$
$$= 15 - a = 0$$
$$= a = 15 \quad \blacksquare$$

maka $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2} = \dfrac{3x^2 + 15x + 18}{(x+2)(x-1)}$ (aljabar)

$$= \frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)} \quad \text{(faktorisasi)}$$

$$= \frac{3(x+3)}{(x-1)} \quad \text{(teorema C)}$$

$$= -1 \quad \blacksquare \quad \text{(Substitusi)}$$

(6.) Intermediate Value Theorem (IVT)
Jika suatu fungsi f kontinu di interval tertutup $[a, b]$ dan m adalah angka diantara $f(a)$ dan $f(b)$ maka ada c sehingga $f(c) = m$ dan c diantara a dan b

Jawab:

misal $g(x) = x - f(x)$, peristiwa $f(x) = x$ akan menyebabkan $g(x)$ bernilai 0. karena $f(x)$ kontinu di $[0,1]$ maka $g(x)$ juga akan kontinu di $[0,1]$. karena $0 < f(x) < 1$ maka nilai terkecil yang dapat dimiliki $g(0)$ adalah $0 - 1 = -1$ dan nilai terbesar yang dapat dimiliki $g(1)$ adalah $1 - 0 = 1$ ($g(0) < 0$ dan $g(1) > 0$).

$\because$ karena $g(x)$ kontinu di $[0,1]$ dan 0 diantara $g(0) = 0 - f(x) < 0$ dan $g(1) = 1 - f(x) > 0$ (karena $0 < f(x) < 1$) maka akan ada c sehingga $g(c) = 0 \rightarrow f(c) = c \quad \blacksquare$

ALDEN LUTHFI
KALKULUS - C PR-1
2206028932

tambahan no. 6. :

untuk lebih jelas: $g(0) < 0 < g(1)$ karena

$g(0) = 0 - f(0)$ yang dimana $f(x) > 0$
sehingga $g(0) < 0$

dan $g(1) = 1 - f(1)$ yang dimana $f(x) < 1$
sehingga $g(1) > 0$

Bukti $g(x)$ kontinu di $[0,1]$:
Syarat fungsi kontinu di interval $[a,b]$
1. kontinu di $(a,b)$
2. $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
3. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

1. tidak ada nilai $f(x)$ maupun $x$ pada interval $(0,1)$ yang membuat $g(x)$ tidak terdefinisi (tidak kontinu)
2. $\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1)$ karena $g(1)$ terdefinisi (teorema B)
3. $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$ karena $g(0)$ terdefinisi (teorema B)

ALDEN LUTHFI
KALKULUS - C PR 1
2206028932

7. BONUS (maaf kalau kurang rigourous)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\frac{1}{x^2}} + 2^{\frac{1}{x}} + 3}{2^{\frac{1}{x^2}+1} + 2^{\frac{1}{x}+1} + 5}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{x^2}} + 2^{\frac{1}{x}} + 3}{2\left(2^{\frac{1}{x^2}} + 2^{\frac{1}{x}}\right) + 5}$$ (aljabar)

$$= \frac{1 + \frac{3}{2^{\frac{1}{x^2}} + 2^{\frac{1}{x}}}}{2 + \frac{5}{2^{\frac{1}{x^2}} + 2^{\frac{1}{x}}}}$$ (kali dengan $\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}} + 2^{\frac{1}{x}}}$)

$$= \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$ (substitusi) dan (teorema A pembagian, penambahan dan perkalian)