

Bab 5

Integral Tak Tentu

Muhammad Okky Ibrohim
Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia



UNIVERSITAS
INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Referensi, Kredit, dan Kontak

Referensi Utama

Varberg, Dale; Edwin J. Purcell; Steven E. Rigdon. Calculus, 9th Edition, Prentice Hall, 2006.

Kredit

Slide ini menggunakan tema Blue Connections Cordelia Presentation Template (<https://www.slidescarnival.com/cordelia-free-presentation-template/216>).

Kontak

Segala bentuk pertanyaan, kritik, dan saran mengenai slide ini dapat disampaikan via email ke okkyibrohim@cs.ui.ac.id.

Outline

- ◎ Integral sebagai anti turunan
- ◎ Properti dasar integral
- ◎ Integral fungsi sederhana menggunakan *lookup table*

Sub 5.1

Integral sebagai Anti Turunan



UNIVERSITAS
INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Anti Turunan

Kita sebut F suatu anti turunan f pada interval I jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I , yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I .

Contoh 1 Anti Turunan

Soal:

Carilah suatu anti turunan fungsi $f(x) = 4x^3$ pada $(-\infty, \infty)$

Solusi:

Kita mencari suatu fungsi F yang memenuhi $F'(x) = 4x^3$ untuk semua x real. Dengan diferensiasi kita mengetahui bahwa $F(x) = x^4$ adalah **salah satu fungsi** yang demikian. Pada kenyataannya, untuk sembarang konstanta C , $F(x) = x^4 + C$ merupakan anti turunan dari $f(x) = 4x^3$ karena $F'(x) = 4x^3$. Dengan demikian, anti turunan dari $f(x) = 4x^3$ adalah $F(x) = x^4 + C$.

Contoh 2 Anti Turunan

Soal:

Carilah anti turunan umum dari $f(x) = x^2$ pada $(-\infty, \infty)$

Solusi:

Fungsi $F(x) = x^3$ tidak akan berhasil karena turunannya adalah $3x^2$. Tetapi ini menyarankan $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, yang memenuhi $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$. Karenanya, anti turunan umum dari $f(x) = x^2$ adalah $F'(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

Notasi untuk Anti Turunan

Mengikuti Leibniz, kita akan sering menggunakan istilah integral tak-tentu sebagai ganti anti turunan. Anti diferensiasi juga berarti mengintegrasikan. Dalam lambang

$$\int f(x) dx$$

\int disebut tanda integral dan $f(x)$ disebut integran. Jadi, kita integralkan integran dan karenanya menghitung integral tak tentu. Mungkin Leibniz menggunakan integral tak tentu untuk menyatakan secara tidak langsung bahwa integral tak tentu selalu melibatkan konstanta sembarang.

Sub 5.2

Properti Dasar Integral



FAKULTAS
**ILMU
KOMPUTER**

Teorema A: Aturan Pangkat

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1 , maka

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Contoh Aturan Pangkat

Soal:

Carilah anti turunan umum dari $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

Solusi:

$$\int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$$

Teorema B: Integral Tak Tentu $\sin(x)$ dan $\cos(x)$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \text{ dan } \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Teorema C: Integral Tak Tentu Adalah Operator Linear

Misalkan f dan g mempunyai anti turunan (integral tak tentu) dan misalkan k suatu konstanta. Maka

(i) $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$

(ii) $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$

(iii) $\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$

Contoh Teorema C

Soal:

Menggunakan kelinearan integral, hitunglah $\int (3x^2 + 4x) dx$

Solusi:

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 4x) dx &= \int 3x^2 dx + \int 4x dx \\&= 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx \\&= 3 \left(\frac{1}{3} x^3 + C_1 \right) + 4 \left(\frac{1}{2} x^2 + C_2 \right) \\&= x^3 + 2x^2 + (3C_1 + 4C_2) \\&= x^3 + 2x^2 + C\end{aligned}$$

Teorema D: Aturan Pangkat yang Digeneralisir

Misalkan g suatu fungsi yang dapat didiferensiasi dan r suatu bilangan rasional $\neq -1$, maka

$$\int [g(x)]^r g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Untuk dapat menerapkan Teorema D, kita harus mampu mengenali fungsi g dan g' di dalam integran.

Contoh Teorema D

Soal:

Hitunglah: a) $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3) dx$ dan b) $\int \sin^{10}(x) \cos(x) dx$

Solusi:

a) Misalkan $g(x) = x^4 + 3x$, maka $g'(x) = 4x^3 + 3$. Jadi, menurut Teorema D diperoleh

$$\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3) dx = \int [g(x)]^{30} g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C = \frac{(x^4 + 3x)^{31}}{31} + C$$

b) Misalkan $g(x) = \sin(x)$, maka $g'(x) = \cos(x)$. Jadi, menurut Teorema D diperoleh

$$\int \sin^{10}(x) \cos(x) dx = \int [g(x)]^{10} g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{11}}{11} + C = \frac{\sin^{11}(x)}{11} + C$$

Sub 5.3

Integral Fungsi Sederhana Menggunakan *Lookup Table*



UNIVERSITAS
INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Contoh Tabel Integral

Note:

Tabel integral yang lebih lengkap bisa dilihat di buku. Atau, bisa juga mencari di internet dengan *keyword: integral table*

Standard Integral Forms

Constants, Powers

$$1. \int k \, du = ku + C$$

$$2. \int u^r \, du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| + C & r = -1 \end{cases}$$

Exponentials

$$3. \int e^u \, du = e^u + C$$

$$4. \int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$$

Trigonometric Functions

$$5. \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

$$6. \int \cos u \, du = \sin u + C$$

$$7. \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$8. \int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$9. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$10. \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$11. \int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$$

$$12. \int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$$

Algebraic Functions

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$14. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$15. \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{|u|}{a}\right) + C = \frac{1}{a} \cos^{-1}\left(\frac{a}{|u|}\right) + C$$

$$16. \int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$17. \int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

Latihan Integral Tak Tentu

Selesaikan integral tak tentu berikut

1. $\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t} \right) dt$

2. $\int (u^{\frac{3}{2}} - 3u + 14) du$

3. $\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12) dx$

4. $\int (x^2 + 4)^{10} x dx$

5. $\int t \sqrt{t^2 - 4} dt$

6. $\int (5 - u^2)^{-\frac{1}{2}} du$

7. $\int (u^2 + 7)^{-1} du$

Terima kasih

Muhammad Okky Ibrohim

Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia



UNIVERSITAS
INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
**ILMU
KOMPUTER**