

דף מס. 1 – תרגילים להגשה.

שאלה 1 (30 נקודות) :

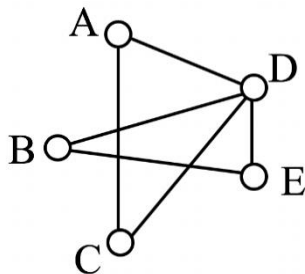
א. האלגוריתם הבא מקבל כקלט גרף בדיקה שהוא מקיים את תנאי אוילר למציאת מעגל אוילר (Euler circuit) או מסלול אוילר (Euler path) והוא מוצא אותו בפועל.

Fleury's Algorithm

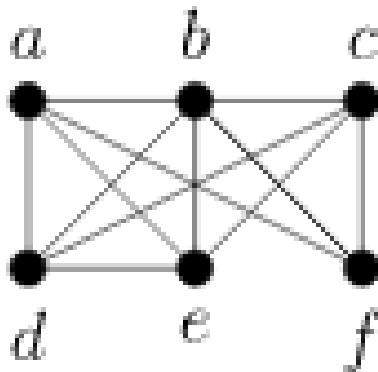
1. Start at any vertex if finding an Euler circuit. If finding an Euler path, start at one of the two vertices with odd degree.
2. Choose any edge leaving your current vertex, provided deleting that edge will not separate the graph into two disconnected sets of edges.
3. Add that edge to your circuit, and delete it from the graph.
4. Continue until you're done.

ב. הדגימו את האלגוריתם על הגרף המופיע מטה.

רשמו את תת הגרף המתקבל לאחר השמטת כל אחת מהקשתות, לפי המתווה של האלגוריתם, כאשר מתחילים התהליך מקדקוד E. תנו גם דוגמא לסדר מעבר והשמטה של קשתות אשר אינו מוביל למעגל אוילר.



ג. מיצאו מסלול אוילר בגרף הבא בסיוע אלגוריתם Fleury :



שאלה 2 (30 נקודות):

הוכיחו את הטענה הבאה:

טענה: בכל גרף, מספר הקודקודים שדרגתם היא אי זוגית הוא זוגי.

א. תנו הוכחה באינדוקציה על מספר הקשתות בגרף.

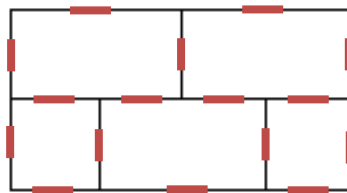
ב. תנו הוכחה נוספת המבוססת על השוויון: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

E

שאלה 3 (40 נקודות):

א. יהי $G(V, E)$ גרף קשיר המכיל k קודקודים שדרגתם היא אי זוגית. הוכיחו בפירוט שניתן להוסיף לגרף $k/2$ קשתות כך שבגרף המתקבל יש מעגל אוילר.

ב. להלן תרשים של בית בו מסומנות הדלתות באדום. הוסיפו מספר דלתות קטן ביותר כך שניתן יהיה לסייר בכל חדרי הבית (כולל בחוץ, בגינה), תוך מעבר בכל דלת פעם אחת בלבד וחזרה לחדר ממנו התחלנו את הסיור.



ג. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

יהי $G(V, E)$ גרף (לאו דווקא קשיר) שבו כל רכיב קשירות מכיל קודקוד שדרגתו היא אי זוגית.

טענה: אם בגרף כולו יש $k > 0$ קודקודים שדרגתם היא אי זוגית אזי ניתן להוסיף לגרף $k/2$ קשתות כך שיכיל מעגל אוילר.