טורי פוריה - מרחבי מכפלה פנימית

1) מרחב לינארי:

הגדרה אקסיומטית, המאחדת את התכונות של עצמים רבים: נקודות במישור $\Re^2$, נקודות במרחב $\Re^3$, פולינומים, פונקציות רציפות, פונקציות רציפות למקוטעין וכו' (דוגמא חלקית).

ההגדרה כוללת שתי קבוצות, V ו- F, ושתי פעולות אלגבריות הנקראות חיבור וקטורי וכפל בסקלר.

V הוא קבוצה לא ריקה של עצמים הנקראים וקטורים, לדוגמא n–יות של מספרים או מטריצות.

F - שדה של סקלרים, במקרה זה $\Re$ or C

חיבור וקטורי: פעולה בין איברים ב- V $\quad (x+y)$

כפל בסקלר: פעולה בין איברים של F לאיברים של V $\quad (\alpha \cdot x)$

מרחבים וקטוריים ליניאריים

הגדרה אקסיומתית, המאחדת את התכונות של עצמים רבים:

נקודות במישור R^2,

נקודות במרחב R^3,

פולינומים,

פונקציות רציפות,

פונקציות רציפות למקוטעין ועוד.

ההגדרה של מרחב וקטורי כוללת 4 "דברים":

שתי קבוצות: V ו- F, ושתי פעולות אלגבריות הנקראות חיבור וקטורי וכפל בסקלר.

V הוא קבוצה לא ריקה של עצמים הנקראים וקטורים.
עצמים: לדוגמא: n-יות של מספרים או מטריצות.

F – שדה של סקלרים (R או C).

חיבור וקטורי $\left(x+y\right)$ פעולה בין רכיבים ב- V.

כפל בסקלר $\left(\alpha \cdot x\right)$ פעולה בין אלמנטים של F ושל V.

הגדרה של מרחב ליניארי

תהי V קבוצה בה מוגדרות שתי פעולות: חיבור וקטורים וכפל בסקלר.

אם מתקיימות האקסיומות הבאות לכל $u, v, w \in V$

ולכל α, β סקלרים (ממשיים או מרוכבים) אזי V נקרא מרחב וקטורי.

$1)\quad u+v\in V$ — סגירות לחיבור

$2)\quad u+v=v+u$ — חילופיות

$3)\quad u+(v+w)=(u+v)+w$ — אסוציאטיביות לחיבור

$4)\quad u+0=u$ — וקטור האפס

$5)\quad u+(-u)=0$ — איבר נגדי לפעולת החיבור

6) $\alpha u \in V$ סגירות לכפל בסקלר

7) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ פילוג

8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ פילוג

9) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ אסוציטיביות לכפל בסקלר

10) $1(u) = u$ סקלר היחידה

תת-מרחב ליניארי

יהי V מרחב ליניארי ויהי W תת-מרחב מעל שדה הסקלרים C או R

בתת-מרחב לינארי $V \sqsubseteq W$ קיים:

אם $f, g \in W$ $a, b \in C$ אזי: $af + bg \in W$

2) אי-תלות לינארית:

$f_1, f_2, \dots, f_n \in W$ נקראים ב.ת.ל. , אם עבור

$a_1, a_2, \dots, a_n \in C$

מתקיים:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

כלומר, לא קיים צירוף לינארי של $f_1, f_2, \dots, f_n$

השווה ל-0.

במילים אחרות, אף f_i הוא לא צ"ל של כל האחרים.

אם $f_1, f_2, \dots, f_n$ אינם ב.ת.ל, נאמר שהם תלויים ליניארית.

הערה :

נתונות הפונקציות $\cos^2\alpha, \cos 2\alpha, 1$

האם הן תלויות או בלתי-תלויות?

ניתן לראות כי הפונקציות הנ"ל בלתי תלויות בזוגות, האם הקבוצה היא בת"ל?

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

ולכן הפונ' תלויות ליניארית.

נתונות הפונקציות $\cos^2\alpha, \cos 2\alpha, 1$

האם הן תלויות או בלתי-תלויות?

ידועה הזהות הבאה: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ולכן הפונ' תלויות ליניארית.

3) קבוצה פורשת:

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ פורשים את W,

אם כל איבר ב-W ניתן לקבל כ-צ״ל של $f_1, f_2, \ldots, f_n$

4) בסיס:

הגדרה : $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ הוא בסיס ל-W אם :

א. $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ הם קבוצה פורשת (פורשים את W).

ב. $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ הינם בת"ל.

5) מימד:

$$n = \dim(V)$$

כלומר מספר איברי הבסיס הוא המימד של המרחב הליניארי.

6) מכפלה פנימית:

זהו חוק או פונקציה, המעבירה כל זוג ב-W לסקלר

$$(\cdot,\cdot): W \times W \to C$$

מכפלה זו מקיימת מס' חוקים:

א. לכל $f \in W$ המכפלה הפנימית היא $(f,f) \geq 0$
(מספר ממשי אי שלילי)

ו- $f = 0 \Leftrightarrow (f,f) = 0$

ב. לכל $f,g,h \in W$ $a,b \in C$

מתקיים: $(af + bg, h) = a(f,h) + b(g,h)$

התכונה נקראת **ליניאריות של הצד השמאלי**.

ג. לכל $f, g \in W$ מתקיים: $(f, g) = \left(\overline{g, f}\right)$

(תזכורת: $z = x + iy$ $\quad \bar{z} = x - iy$)

להלן נסמן את המכפלה הפנימית ב: $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

תכונות הנובעות מההגדרה:

1) אם $\mathbb{F}=\Re$: לפי סעיף ג' $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$

2) לכל $f,g,h\in W$

$$\langle f,ag+bh\rangle=$$

$$=\bar{a}\langle f,g\rangle+\bar{b}\langle f,h\rangle \qquad a,b\in C$$

הסבר:

$$\langle f,ag+bh\rangle=\overline{\langle ag+bh,f\rangle}=\bar{a}\overline{\langle g,f\rangle}+\bar{b}\overline{\langle h,f\rangle}=$$

$$=\bar{a}\langle f,g\rangle+\bar{b}\langle f,h\rangle$$

3) לכל $f \in W, a \in C$ מתקיים: $\langle af, af \rangle = |a|^2 \langle f, f \rangle$

הסבר:

$$\langle af, af \rangle = a\langle f, af \rangle = a\overline{\langle af, f \rangle} = a\bar{a}\langle \overline{f, f} \rangle = |a|^2 \langle f, f \rangle$$

4) לכל $f \in W$: $\langle f, 0 \rangle = 0$

באופן אינטואיטיבי, ניתן לומר שמכפלה פנימית היא התאמה בין שני ווקטורים (או שתי פונקציות) לסקלר, שהוא מקדם דימיון בין שתי הפונקציות הנ"ל.

7. דוגמאות של מרחבי מכפלה פנימית:

מרחב ליניארי בעל מכפלה פנימית, ניקרא מרחב מכפלה פנימית.

1) $W=C^n$, $f\in W$ $\qquad f=\left(f_1,f_2,\ldots,f_n\right)$

$$f_i\in C$$

המכפלה הפנימית הסטנדרטית על C^n :

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i=1}^{n} f_i\overline{g_i}$$

2) יהי $W = C^n$, נקבע $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

כאשר $w_i > 0$ כלומר $w_i \in R$

נגדיר מכפלה פנימית על C^n:

$$\langle f, g \rangle_w = \sum_{i=1}^{n} f_i \overline{g_i} w_i$$

$\underline{w}$ - נקרא ווקטור משקל.

3) $W = C[a,b]$ $\quad [a,b] \in R$

קבוצת כל הפונקציות הרציפות, המוגדרות בקטע סגור המקבלות ערכים ב-C.

$f \in C(a,b)$ $\quad f(x) \in C$

$x \in [a,b]$

לכל זוג פונקציות $f, g \in C[a,b]$ מתקיים:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

קל לראות, שזוהי מכפלה פנימית.

נראה שהיא מקיימת את 3 התכונות :

$$1)\ \langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$$

וכן : $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

מאחר והפונקציה היא אי-שלילית,
האינטגרל שווה ל-0 רק כאשר f=0.

$$2)\ \langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_a^b (\alpha f + \beta g)\bar{h}dx = \alpha \int f \cdot \bar{h}dx + \beta \int g \cdot \bar{h}dx =$$

$$= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

3) $$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

$$\overline{\langle g, f \rangle} = \left(\overline{\int_a^b g(x)\,\overline{f}(x)\,dx} \right) = \int_a^b \overline{g(x)} f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = \langle f, g \rangle$$

$$4)\quad l_2 = \left\{ x \,\middle|\, x = (x_1, x_2, \ldots), \quad x_n \in C, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

מרחב כל הסדרות האינסופיות של מספרים

מרוכבים, כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ מתכנס.

פעולת החיבור על l_2 - פעולת **חיבור** סטנדרטית בין שתי סדרות.

פעולת הכפל בסקלר על l_2 - פעולת **כפל** סטנדרטית בין סדרה לסקלר.

ההגבלה:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n\right|^2 < \infty$ קיימת, כיוון שמכפלה פנימית היא פונציה,
מ- C^n לסקלר, אבל ∞ אינו סקלר.

לכל $x, y \in l_2$ נגדיר:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$