מתימטיקה שימושית ותכנות מדעי - תרגיל בית מספר 1

סמסטר א' תשפ"ג

1. חשבו את המכפלות הפנימיות עבור הפונקציות הבאות, עבור הגדרת המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

א. $f(x)=x^2,\quad g(x)=x+1$

ב. $f(x) = sin(2\pi x),\quad g(x) = sin(2\cdot 2\pi x)$

2. א. הוכיחו או הפריכו: לכל וקטור ב-R^3 הפונקציה הבאה מגדירה מכפלה פנימית לכל $u,v\in R^3$

$$\langle u,v\rangle=\alpha u_1v_1+\beta u_2v_2+\gamma u_3v_3$$

כאשר: $u=(u_1,u_2,u_3)^T, v=(v_1,v_2,v_3)^T\in R^3$ לכל $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל שתי מטריצות $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ במרחב הוקטורי $M_{2,2}$ הפונקציה הבאה מגדירה מכפלה פנימית:

$$\langle A,B\rangle=a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}$$

3. קבעו האם הפעולה הבאה מגדירה מכפלה פנימית במרחב הליניארי בו היא מוגדרת:

יהי $C^1(R)$ - המרחב הליניארי של פונקציות בעלות נגזרת רציפה ב-R.

נגדיר את הפעולה $\langle f,g\rangle= f(0)\cdot\overline{g(0)}+f'(0)\cdot\overline{g'(0)}+f(1)\cdot\overline{g(1)}$. האם זוהי מכפלה פנימית?

4. תהי $p(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. נגדיר פעולה: $\langle f,g\rangle=\int_a^b p(x)f(x)\overline{g(x)}dx$

כאשר $f,g\in C[a,b]$ פונקציות כלשהן.

הוכיחו כי אם $p(x)>0$ בכל נקודה $x\in[a,b]$ אז הפעולה הנ"ל מגדירה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$, ואם $p(x)\le 0$ אז הפעולה הנ"ל לא בהכרח מגדירה מכפלה פנימית ב-$C[a,b]$.

5. יהי C^{nxn} מרחב כל המטריצות הריבועיות nxn.

הגדירו מכפלה פנימית במרחב C^{nxn} (כלומר בין כל שתי מטריצות ריבועיות המקבלות ערכים קומפלכסיים) והוכיחו כי היא תקינה.

תרגיל Python:

מטרת תרגיל זה היא לכתוב scripts קצרים ופונקציות לתרגול שמוש במטריצות ווקטורים ולמושגים של מכפלה פנימית.

1. עבור המטריצות הבאות חשבו באמצעות Python (אם הפעולה היא חוקית)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -1 & i\\ 0 & 2i\end{pmatrix}$$

א. Ax ב. BxC ג. yAB ד. CC^Tx ה. yx

ב. א. עבור המטריצות B,A הקודמות מצאו שתי דרכים לחשב את סכום כל הערכים של מכפלת המטריצות באמצעות Python.

2. כתבו פונקציית Python innerProd.py המקבלת כקלט שני וקטורי עמודה, ומחזירה את המכפלה הפנימית הסטנדרטית בין שני הוקטורים אם האורך זהה, או הודעת שגיאה אם האורך לא זהה. הפעילו את הפונקציה עבור הוקטורים הבאים וחשבו את המכפלה. רשמו את התוצאה בתשובתם.

u=(2i, 3, 5,-2, 5), v=(i,-i,2, 1,5), w=(2, 3, -3i, -1, 3) .

א. $\langle u, 2v\rangle$

ב. $\langle u, v+2w\rangle$

3. בתרגיל זה נייצג באמצעות Python שתי פונקציות (למעשה סדרות או וקטורים ייצגו את הפונקציות הרציפות) ונמצא את המכפלה הפנימית ביניהן.

א. ראשית ניצור את ציר ה- x (הדגום).

```
Ts = 1/44100;
x = np.arange(0,1-Ts,Ts)
```

(בין 0 ל- 1, לא כולל 1).

עתה ניצור פונקציה ראשונה – פונקציית קוסינוס דגומה:

```
y1 = np.cos(2*np.pi*1*x);
```

אפשר לצייר את הפונקציה על-ידי פקודת plot באופן הבא:

```
plt.plot(x,y1)
```

ניצור את הפונקציה השניה:

```
y2 = np.sin(2*np.np.pi*1*x)
```

ציירו את הפונקציה השניה.

אפשר לצייר את שתי הפונקציות על אותו גרף על-ידי:

```
plt.plot(x,y1,'b',x,y2,'r')
```

ב. חשבו בשתי דרכים את המכפלה הפנימית בין שתי הפונקציות הדגומות (למעשה שני הוקטורים) y1 ו- y2. מה התוצאה שקיבלתם?

אפשר להעזר ב- script הבא:

```
"""
Examples of an inner product - sines and cosines
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fs = 44100
Ts = 1/fs
x = np.arange(0,1-Ts,T)
y1 = np.cos(2*np.pi*x)
y2 = np.sin(2*np.pi*x)
```