

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
Факультет Информационных технологий и  
программирования

Расчетно-графическая работа  
**«Линейный оператор, спектральный анализ и  
евклидово пространство»**  
Специальные разделы высшей математики

Выполнили:

Бобков Артем

Грибов Артем

Комашко Александр

Насонов Петр

Орлов Максим

Группа:

М3100

Преподаватель:

Далевская Ольга Петровна

2023/2024 г.

## Содержание

1	Задание 1. Евклидовы пространства функций.	3
2	Задание 2. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.	6
3	Задание 3. Линейный оператор и спектральный анализ.	7

# Задание 1. Евклидовы пространства функций.

## Условие.

А) Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке  $[-1; 1]$ .

Проведите исследование:

1. Проверьте, что система векторов  $B = \{1, t, t^2\}$  является базисом этого пространства. Ортогонализируйте систему (построенный ортогональный базис обозначьте  $B_H$ )
2. Выпишите первые четыре (при  $n = 0, 1, 2, 3$ ) многочлена Лежандра:  
$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left( (t^2 - 1)^n \right), \text{ где } \frac{d^n}{dt^n} (y(t)) - \text{производная } n - \text{ого порядка функции } y(t)$$
3. Найдите координаты полученных многочленов  $L_n(t)$  в базисе  $B_H$ . Сделайте вывод об ортогональности системы векторов  $L_n(t)$ .
4. Разложите данный многочлен  $P_3(t)$  (см. варианты) по системе векторов  $L_n(t)$ .

$$P_3(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2$$

## Решение.

1. Система векторов  $B = \{1, t, t^2\}$  не является базисом, так как при помощи нее нельзя составлять вектора вида  $P_3(t) = t^3 + P_2(t)$   
Однако система  $B$  уже ортогональная, поэтому чтобы получить базис, следует добавить в систему вектор  $t^3$ :

$$B_H = \{1, t, t^2, t^3\}$$

2. Выпишем первые четыре многочлена Лежандра:

$$L_0(t) = \frac{1}{2^0 0!} \left( (t^2 - 1)^0 \right) = 1$$

$$L_1(t) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dt} (t^2 - 1) = \frac{1}{2} 2t = t$$

$$L_2(t) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dt^2} \left( (t^2 - 1)^2 \right) = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dt^2} (t^4 - 2t^2 + 1) = \frac{1}{8} \frac{d}{dt} (4t^3 - 4t) = \frac{12t^2 - 4}{8} = \frac{3t^2 - 1}{2}$$

$$L_3(t) = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dt^3} \left( (t^2 - 1)^3 \right) = \frac{1}{48} \frac{d^2}{dt^2} \left( 3(t^2 - 1)^2 2t \right) = \frac{1}{48} \frac{d^2}{dt^2} (6t^5 - 12t^3 + 6t) = \frac{1}{48} \frac{d}{dt} (30t^4 - 36t^2 + 6) = \frac{120t^3 - 72t}{48} = \frac{5t^3 - 3t}{2}$$

3. Представим базис  $B_H$  как  $\{e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2, e_4 = t^3\}$ , тогда многочлены Лежандра можно разложить по базису  $B_H$  так:

$$L_0(t) = 1 = e_1$$

$$L_1(t) = t = e_2$$

$$L_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2} = \frac{3}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_1$$

$$L_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2} = \frac{5}{2}e_4 - \frac{3}{2}e_2$$

Определим скалярное произведение на нашем пространстве, как:

$$(P_3(t), Q_3(t)) = a_3 b_3 + a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0, \text{ где } P_3(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, Q_3(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$$

Тогда система  $L = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$  неортогональна, так как  $(L_0, L_2) = -\frac{1}{2}$ , что говорит о том, что  $L_0 \not\perp L_2$

4. Чтобы разложить  $P_3(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2$  на систему  $L$ , решим уравнение  $c_0L_0(t) + c_1L_1(t) + c_2L_2(t) + c_3L_3(t) = P_3(t)$  или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_0 - \frac{1}{2}c_2 = 2 \\ c_1 - \frac{3}{2}c_3 = -1 \\ \frac{3}{2}c_2 = 1 \\ \frac{5}{2}c_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 - \frac{1}{2}c_2 = 2 \\ c_1 - \frac{3}{2}c_3 = -1 \\ c_2 = \frac{2}{3} \\ c_3 = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = \frac{7}{3} \\ c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = \frac{2}{3} \\ c_3 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Проверим это:

$$P_3(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2 = \frac{7}{3}L_0 + \frac{1}{5}L_1 + \frac{2}{3}L_2 + \frac{4}{5}L_3 = \frac{7}{3} + \frac{1}{5}t + \frac{2}{3} \frac{3t^2 - 1}{2} + \frac{4}{5} \frac{5t^3 - 3t}{2} = \frac{7}{3} + \frac{1}{5}t + t^2 - \frac{1}{3} + 2t^3 - \frac{6}{5}t = 2 - t + t^2 + 2t^3 - \text{верно}$$

$$\text{Тогда } P_3(t) = \frac{7}{3}L_0(t) + \frac{1}{5}L_1(t) + \frac{2}{3}L_2(t) + \frac{4}{5}L_3(t)$$

Б) Дано пространство  $R$  функций, непрерывных на отрезке  $[-\pi; \pi]$  со скалярным произведением  $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$  и длиной вектора  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ .

Тригонометрические многочлены  $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$ , где  $a_k, b_k$  - вещественные коэффициенты, образуют подпространство  $P$  пространства  $R$ .

Требуется найти многочлен  $P_n(t)$  в пространстве  $R$ , минимально отличающийся от функции  $f(t)$  - вектора пространства  $R$ .

Указание. Требуется решить задачу о перпендикуляре: расстояние от  $f(t)$  до  $P_n(t)$  будет наименьшим, если это длина перпендикуляра  $h = f(t) - P_n(t)$ , опущенного из точки  $f(t)$  на подпространство  $P$ . В этом случае,  $P_n(t)$  будет ортогональной проекцией вектора  $f(t)$  на  $P$ . Таким образом, требуется найти координаты вектора  $P_n(t)$  (коэффициенты многочлена) в заданном базисе  $P$ . Если выбран ортонормированный базис, то эти координаты суть проекции вектора  $f(t)$  на векторы данного базиса.

Проведите исследование:

1. Проверьте, что система функций  $\{1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt\}$  является ортогональным базисом подпространства  $P$ . Нормируйте систему.
2. Найдите проекции вектора  $f(t)$  (см. варианты) на векторы полученного ортонормированного базиса. (На вектор  $\{1\}$  найдите проекцию отдельно, а проекции на векторы вида  $\{\cos nt\}$  и  $\{\sin nt\}$  запишите формулами в зависимости от  $n$ . Воспользуйтесь свойствами интегралов от четных и нечетных функций на симметрично промежутке.)

3. Запишите минимально отстоящий многочлен  $P_n(t)$  с найденными коэффициентами (тригонометрический многочлен Фурье для данной функции).
4. Изобразите (например, в Desmos) графики функции  $f(t)$  и многочлена Фурье различных порядков  $n$  (можно положить  $n = 5; 10; 15$ ).
5. Сделайте вывод о поведении многочлена при росте его порядка.

$$f(t) = -3t$$

**Решение.**

*It is empty but you can fill it!*

*Ответ: It is empty but you can fill it!*

## Задание 2. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.

### Условие.

Дано уравнение поверхности 2-го порядка:

$$2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$$

План:

1. С помощью теории квадратичных форм приведите к каноническому виду данное уравнение.
2. Изобразите график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт? Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.

### Решение.

*It is empty but you can fill it.*

### Задание 3. Линейный оператор и спектральный анализ.

#### Условие.

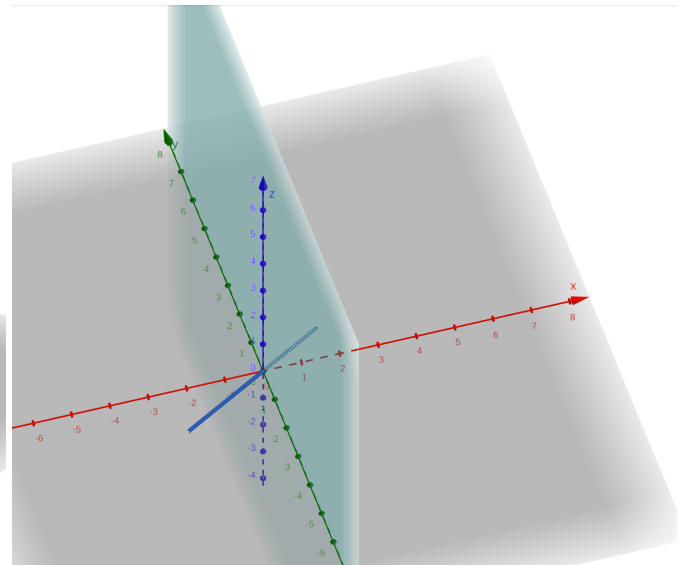
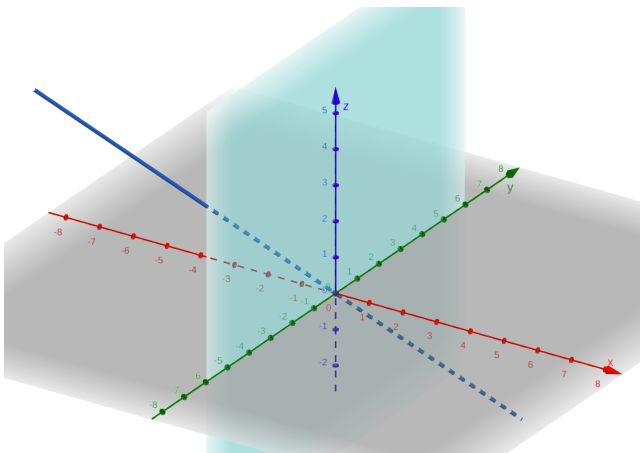
А) Дано пространство геометрических векторов  $\mathbb{R}^3$ , его подпространства  $L_1$  и  $L_2$  и линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Проведите исследование:

1. Изобразите на графике подпространства  $L_1$  и  $L_2$ .
2. Методами векторной алгебры составьте формулу для линейного оператора  $\mathcal{A}$ .
3. Составьте его матрицу в базисе  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  пространства  $\mathbb{R}^3$ .
4. Решите задачу о диагонализации полученной матрицы методом спектрального анализа.
5. На построенном ранее графике изобразите базис, в котором матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеет диагональный вид. Объясните его смысл.

$\mathcal{A}$  – оператор отражения пространства  $\mathbb{R}^3$  в  $L_1$  параллельно  $L_2$ , где  $L_1$  задано уравнением  $x = 0$ ,  $L_2$  – уравнением  $2x = y = -z$ .

#### Решение.

1. Графики подпространства



2. Формула для линейного оператора

Отражение через  $Oyz$  параллельно прямой значит что нам надо пройти через  $Oyz$  по  $x$  в другую сторону на  $x$ . Т.е. сделать  $x = -x$ . И также поправить все другие координаты. Как? По нужной прямой, параллельной  $2x = y = -z$ .

Чтобы ее построить можно задать прямую проходящую через нашу точку в  $\mathbb{R}^3$ . Т.е.  $2(x - x_0) = (y - y_0) = -(z - z_0)$ . Т.е. нам надо прибавить какой-то вектор параллельный нашей прямой.

Когда мы проходим расстояние  $x = 1$  то  $y$  и  $z$  меняются на 2. Т.е. наш вектор  $x = \{1, 2, -2\}$ . Этот вектор нужно умножить на два и вычесть из нашего вектора (если мы просто вычтем этот вектор из данного, мы окажемся в плоскости  $x = 0$ ).

Т.е.  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  задает перемещение и выглядит:  $\mathcal{A}x = x - \{1, 2, -2\} * 2 * (x, i)$ , где  $(x, i)$  – скалярное произведение (необходимое для нахождения координаты  $x$ ).

3. Линейный оператор

Запишем, как должна меняться каждая координата при применении оператора:

(мы знаем что  $x$  меняет знак, а все остальные координаты можно найти через уравнение прямой)

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2(x'-x) + y \\ z' = -2(x'-x) + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -4x + y \\ z' = -4x + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x + 0y + 0z \\ y' = -4x + y + 0z \\ z' = -4x + 0y + z \end{cases}$$

Как можно видеть:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4. Диагонализация

Чтобы решить задачу диагонализации, найдем ортогональный базис из собственных векторов этой матрицы.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$$

Значит  $\lambda = 1$  или  $\lambda = -1$ .

(a)  $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ . Как видно  $x = 0$  всегда должен быть, а что на  $y, z$  вообще не важно. Для простоты возьмем  $y = 1$  и  $z = 1$ . Т.е. эта система нам дает два вектора:  $\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}$ .

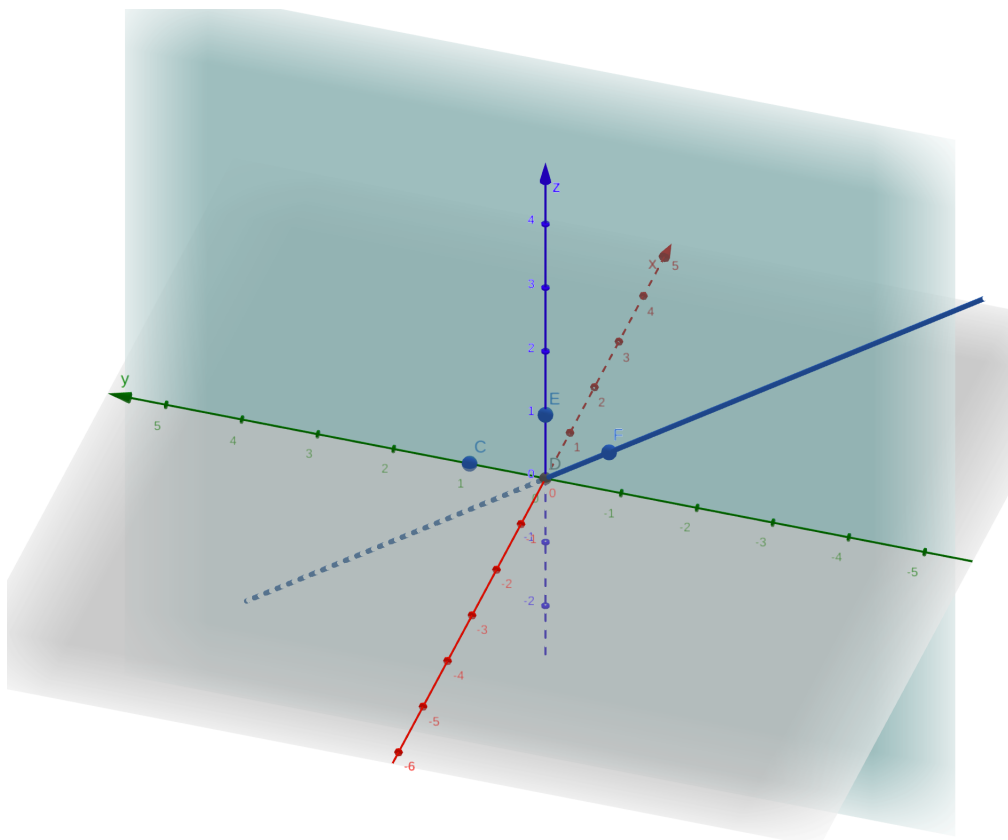
(b)  $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0. \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Как видно из системы:  $-4x - 2z = 0 \rightarrow x = -1/2z$ ,  $2y + 2z = 0 \rightarrow y = -z$ . Т.е. получаем один собственный вектор, который является ФСР данной системы:  $\{-0.5z, -z, z\}$ , т.е.  $\{-0.5, -1, 1\}$ .

(c) Базис диагонализированного оператора





Три вектора:  $\vec{DC}, \vec{DE}, \vec{DF}$ . Это соответственно вектора:  $\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{-0.5, -1.1\}$ . Первые два вектора буквально значат то, что мы можем перемещаться относительно  $Oyz(y = 1, z = 1)$ . Третий же вектор и означает то самое параллельное отражение относительно прямой  $2x = y = -z$ .

Б) Дано множество функций  $L$  и отображение  $\mathcal{A}: L \rightarrow L$ . Проведите исследование:

1. Проверьте, что  $L$  является линейным пространством над полем  $\mathbb{R}$ .
2. Выберите в нём базис.
3. Убедитесь, что отображение  $\mathcal{A}$  является линейным (оператором).
4. Решите задачу о диагонализации матрицы линейного оператора  $\mathcal{A}$  в выбранном базисе методом спектрального анализа:
  - в случае, если  $\mathcal{A}$  имеет скалярный тип, для диагонализации используйте собственный базис.
  - в случае, если  $\mathcal{A}$  имеет общий тип, для диагонализации используйте жорданов базис (приведите матрицу в жорданову форму).

**Решение.**

*It is empty but you can fill it!*

*Ответ: It is empty but you can fill it!*