Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Информационных технологий и
программирования

Расчетно-графическая работа

«Линейный оператор, спектральный анализ и евклидово пространство»

Специальные разделы высшей математики

Выполнили:
Бобков Артем
Грибов Артем
Комашко Александр
Насонов Петр
Орлов Максим

Группа:
M3100

Преподаватель:
Далевская Ольга Петровна

2023/2024 г.

Содержание

Задание 1. Евклидовы пространства функций.

Условие.

А) Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке $[-1;1]$.

Проведите исследование:

1. Проверьте, что система векторов $B=\left\{1,\ t,\ t^2\right\}$ является базисом этого пространства. Ортогонализируйте систему (построенный ортогональный базис обозначьте B_H)
2. Выпишите первые четыре (при $n=0,1,2,3$) многочлена Лежандра: $L_n(t)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dt^n}\left(\left(t^2-1\right)^n\right)$, где $\dfrac{d^n}{dt^n}(y(t))$- производная n - ого порядка функции $y(t)$
3. Найдите координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе B_H. Сделайте вывод об ортогональности системы векторов $L_n(t)$.
4. Разложите данный многочлен $P_3(t)$ (см. варианты) по системе векторов $L_n(t)$.

$$P_3(t)=2t^3-t^2+t+2$$

Решение.

1. Система векторов $B=\left\{1,\ t,\ t^2\right\}$ не является базисов, так как при помощи нее нельзя составлять вектора вида $P_3(t)=t^3+P_2(t)$

   Однако система B уже ортогональная, поэтому чтобы получить базис, следует добавить в систему вектор t^3:

$$B_H=\left\{1,\ t,\ t^2,t^3\right\}$$

2. Выпишем первые четыре многочлена Лежандра:

   $L_0(t)=\dfrac{1}{2^0 0!}\ \left(\left(t^2-1\right)^0\right)=1$

   $L_1(t)=\dfrac{1}{2^1 1!}\ \dfrac{d}{dt}\left(t^2-1\right)=\dfrac{1}{2}\ 2t=t$

   $L_2(t)=\dfrac{1}{2^2 2!}\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\left(t^2-1\right)^2\right)=\dfrac{1}{8}\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left(t^4-2t^2+1\right)=\dfrac{1}{8}\ \dfrac{d}{dt}\left(4t^3-4t\right)=\dfrac{12t^2-4}{8}=\dfrac{3t^2-1}{2}$

   $L_3(t)=\dfrac{1}{2^3 3!}\ \dfrac{d^3}{dt^3}\left(\left(t^2-1\right)^3\right)=\dfrac{1}{48}\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left(3\left(t^2-1\right)^2 2t\right)=\dfrac{1}{48}\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left(6t^5-12t^3+6t\right)=\dfrac{1}{48}\ \dfrac{d}{dt}\left(30t^4-36t^2+6\right)=$ $\dfrac{120t^3-72t}{48}=\dfrac{5t^3-3t}{2}$

3. Представим базис B_H как $\{e_1=1,e_2=t,e_3=t^2,e_4=t^3\}$, тогда многочлены Лежандра можно разложить по базису B_H так:

   $L_0(t)=1=e_1$

   $L_1(t)=t=e_2$

   $L_2(t)=\dfrac{3t^2-1}{2}=\dfrac{3}{2}e_3-\dfrac{1}{2}e_1$

   $L_3(t)=\dfrac{5t^3-3t}{2}=\dfrac{5}{2}e_4-\dfrac{3}{2}e_2$

   Определим скалярное произведение на нашем пространстве, как:

   $(P_3(t),Q_3(t))=a_3b_3+a_2b_2+a_1b_1+a_0b_0$, где $P_3(t)=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$, $Q_3(t)=b_3t^3+b_2t^2+b_1t+b_0$

Тогда система $L = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ неортогональна, так как $(L_0, L_2) = -\frac{1}{2}$, что говорит о том, что $L_0 \not\perp L_2$

4. Чтобы разложить $P_3(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2$ на систему L, режим уравнение $c_0L_0(t) + c_1L_1(t) + c_2L_2(t) + c_3L_3(t) = P_3(t)$ или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_0 + -\frac{1}{2}c_2 = 2 \\ c_1 - \frac{3}{2}c_3 = -1 \\ \frac{3}{2}c_2 = 1 \\ \frac{5}{2}c_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 + -\frac{1}{2}c_2 = 2 \\ c_1 - \frac{3}{2}c_3 = -1 \\ c_2 = \frac{2}{3} \\ c_3 = \frac{4}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = \frac{7}{3} \\ c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = \frac{2}{3} \\ c_3 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Проверим это:

$P_3(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2 = \dfrac{7}{3}L_0 + \dfrac{1}{5}L_1 + \dfrac{2}{3}L_2 + \dfrac{4}{5}L_3 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{5}t + \dfrac{2}{3}\dfrac{3t^2 - 1}{2} + \dfrac{4}{5}\dfrac{5t^3 - 3t}{2} = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{5}t + t^2 - \dfrac{1}{3} + 2t^3 - \dfrac{6}{5}t = 2 - t + t^2 + 2t^3$ - верно

Тогда $P_3(t) = \dfrac{7}{3}L_0(t) + \dfrac{1}{5}L_1(t) + \dfrac{2}{3}L_2(t) + \dfrac{4}{5}L_3(t)$

Б) Дано пространство R функций, непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ и длиной вектора $\|f\| = sqrt(f, f)$.

Тригонометрические многочлены $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1cost + b_1sint + \cdots + a_ncosnt + b_nsinnt$, где a_k, b_k - вещественные коэффициенты, образуют подпространство P пространства R.

Требуется найти многочлен $P_n(t)$ в пространстве R, минимально отличающийся от функции $f(t)$ - вектора пространства R.

Указание. Требуется решить задачу о перпендикуляре: расстояние от $f(t)$ до $P_n(t)$ будет наименьшим, если это длина перпендикуляра $h = f(t) - P_n(t)$, опущенного из точки $f(t)$ на подпространство P. В этом случае, $P_n(t)$ будет ортогональной проекцией вектора $f(t)$ на P. Таким образом, требуется найти координаты вектора $P_n(t)$ (коэффициенты многочлена) в заданном базисе P. Если выбран ортонормированный базис, то эти координаты суть проекции вектора $f(t)$ на векторы данного базиса.

Проведите исследование:

1. Проверьте, что система функций $\{1, \cos t, \sin t, \ldots \cos nt, \sin nt\}$ является ортогональным базисом подпространства P. Нормируйте систему.
2. Найдите проекции вектора $f(t)$ (см. варианты) на векторы полученного ортонормированного базиса. (На вектор $\{1\}$ найдите проекцию отдельно, а проекции на векторы вида $\{\cos nt\}$ и $\{\sin nt\}$ запишите формулами в зависимости от n. Воспользуйтесь свойствами интегралов от четных и нечетных функций на симметрично промежутке.)

3. Запишите минимально отстоящий многочлен $P_n(t)$ с найденными коэффициентами (тригонометрический многочлен Фурье для данной функции).
4. Изобразите (например, в Desmos) графики функции $f(t)$ и многочлена Фурье различных порядков n (можно положить $n = 5; 10; 15$).
5. Сделайте вывод о поведении многочлена при росте его порядка.

$$f(t) = -3t$$

Решение.
It is empty but you can fill it!
Ответ: *It is empty but you can fill it!*

Задание 2. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.

Условие.

Дано уравнение поверхности 2-го порядка:

$$2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$$

План:

1. С помощью теории квадратичных форм приведите к каноническому виду данное уравнение.
2. Изобразите график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт? Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.

Решение.

1. Возьмем матрицу этой поверхности $Q(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + C \Rightarrow Q_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Чтобы привести ее к каноническому виду, найдем собственные числа этой матрицы: $|Q_e - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Раскроем определитель по второй строчке: $(4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$.

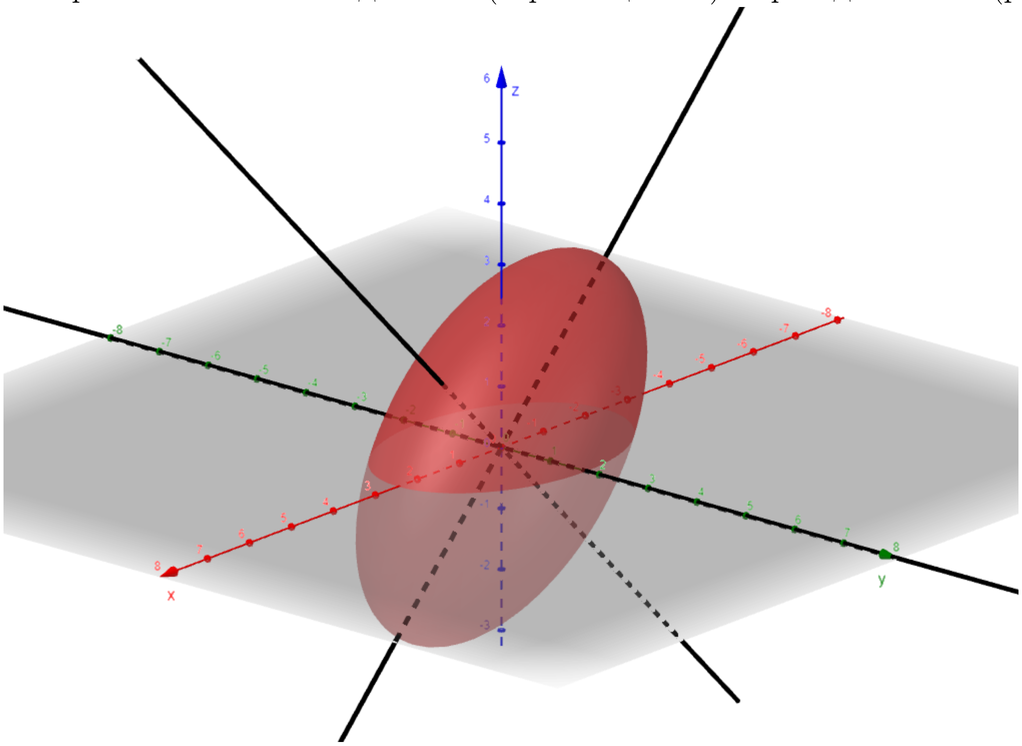
   Тогда матрица этой поверхности в каноническом виде будет выглядеть так: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Проверим правильность с помощью преобразования координат. Собственные векторы этой матрицы: $Q_e x_1 = \lambda_1 x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 \\ 4a_2 \\ 4a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a_1 = a_3, a_2 = a_2, 2a_3 = a_1 \Rightarrow x_1 = C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $Q_e x_2 = \lambda_2 x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ 3a_2 \\ 3a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_3, a_2 = 0 \Rightarrow x_2 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Q_e x_3 = \lambda_3 x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = -a_3, a_2 = 0 \Rightarrow x_3 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Тогда ортонормированный базис из их этих векторов: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, преобразование координат: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение будет $Q(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + z^2 - 12$, канонический вид уравнения: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{12} = 1$.

2. Поверхность с осями исходной СО (черным цветом) и приведённой СО (разными цветами)



Уравнение задает эллипс.

Задание 3. Линейный оператор и спектральный анализ.

Условие.

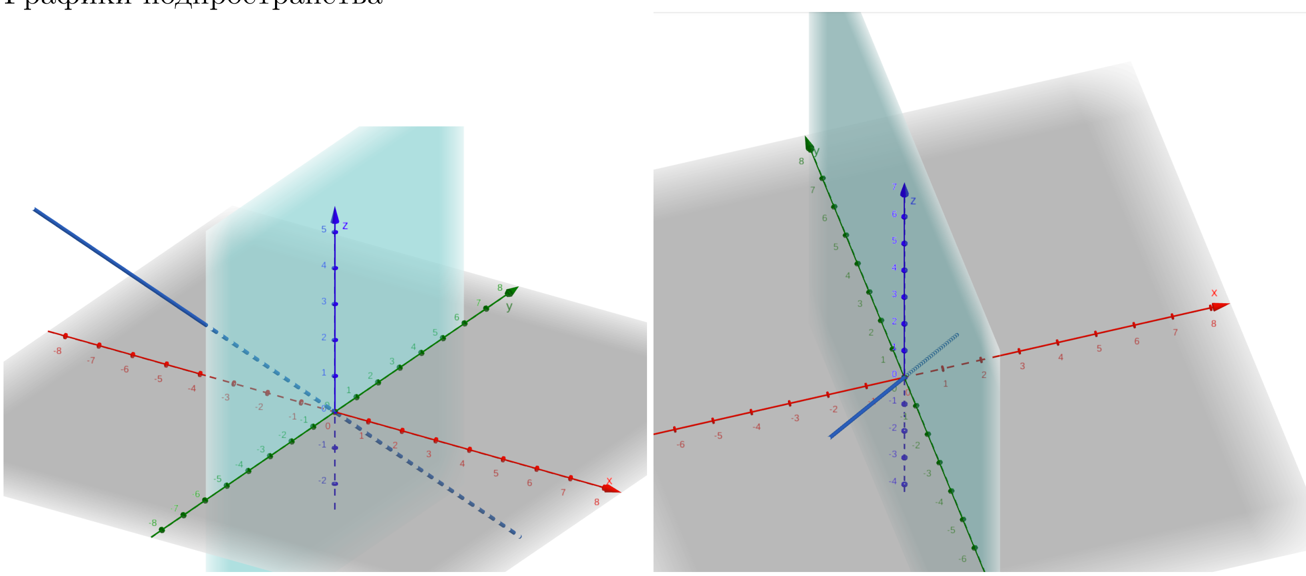
А) Дано пространство геометрических векторов $\mathbb{R}^3$, его подпространства L_1 и L_2 и линейный оператор $\mathcal{A}: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Проведите исследование:

1. Изобразите на графике подпространства L_1 и L_2.
2. Методами векторной алгебры составьте формулу для линейного оператора $\mathcal{A}$.
3. Составьте его матрицу в базисе $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ пространства $\mathbb{R}^3$.
4. Решите задачу о диагонализации полученной матрицы методом спектрального анализа.
5. На построенном ранее графике изобразите базис, в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Объясните его смысл.

$\mathcal{A}$ – оператор отражения пространства $\mathbb{R}^3$ в L_1 параллельно L_2, где L_1 задано уравнением $x = 0$, L_2 – уравнением $2x = y = -z$.

Решение.

1. Графики подпространства



2. Формула для линейного оператора

   Отражение через Oyz параллельно прямой значит что нам надо пройти через Oyz по x в другую сторону на x. Т.е. сделать $x = -x$. И также поправить все другие координаты. Как? По нужной прямой, параллельной $2x = y = -z$.

   Чтобы ее построить можно задать прямую проходящую через нашу точку в $\mathbb{R}^3$. Т.е. $2(x - x_0) = (y - y_0) = -(z - z_0)$. Т.е. нам надо прибавить какой-то вектор параллельный нашей прямой.

   Когда мы проходим расстояние $x = 1$ то y и z меняются на 2. Т.е. наш вектор $x = \{1, 2, -2\}$. Этот вектор нужно умножить на два и вычесть из нашего вектора (если мы просто вычтем этот вектор из данного, мы окажемся в плоскости $x = 0$).

   Т.е. $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задает перемещение и выглядит: $\mathcal{A}x = x - \{1, 2, -2\} * 2 * (x, i)$, где (x, i) - скалярное произведение (необходимое для нахождения координаты x).

3. Линейный оператор

   Запишем, как должна меняться каждая координата при применении оператора:

(мы знаем что x меняет знак, а все остальные координаты можно найти через уравнение прямой)

$$\begin{cases} \text{x' = -x} \\ \text{y' = 2(x'-x) + y} \\ \text{z' = -2(x'-x) + z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{x' = -x} \\ \text{y' = -4x + y} \\ \text{z' = -4x + z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{x' = -x + 0y + 0z} \\ \text{y' = -4x + y + 0z} \\ \text{z' = 4x + 0y + z} \end{cases}$$

Как можно видеть:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Диагонализация

Чтобы решить задачу диагонализации, найдем ортогональный базис из собственных векторов этой матрицы.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$

Значит $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$.

(a) $\lambda = 1$

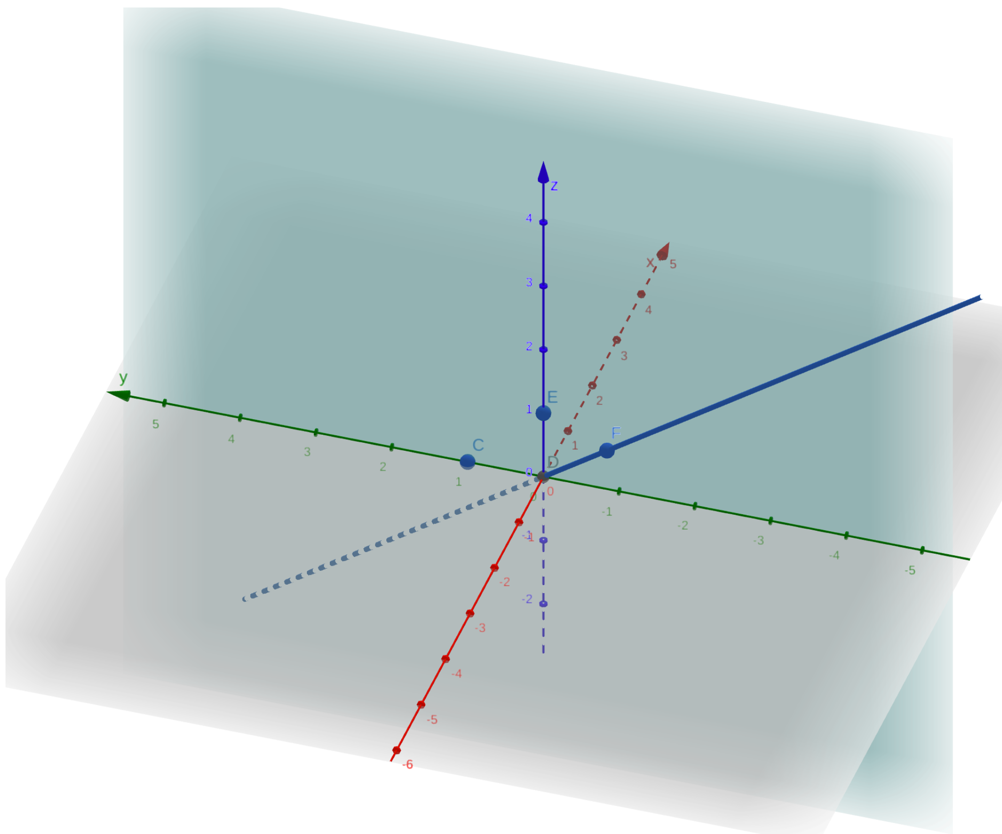
$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. Как видно $x = 0$ всегда должен быть, а что на y, z вообще не важно. Для простоты возьмем $y = 1$ и $z = 1$. Т.е. эта система нам дает два вектора: $\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}$.

(b) $\lambda = -1$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$.

Как видно из системы: $-4x - 2z = 0 \longrightarrow x = -1/2z$, $2y + 2z = 0 \longrightarrow y = -z$. Т.е. получаем один собственный вектор, который является ФСР данной системы: $\{-0.5z, -z, z\}$, т.е. $\{-0.5, -1, 1\}$.

(c) Базис диагонализированного оператора



Три вектора: $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}$. Это соответственно вектора: $\{0,0,1\}, \{0,1,0\}, \{-0.5,-1.1\}$. Первые два вектора буквально значат то, что мы можем перемещаться относительно $Oyz(y=1, z=1)$. Третий же вектор и означает то самое параллельное отражение относительно прямой $2x = y = -z$.

Б) Дано множество функций L и отображение $\mathcal{A}: \quad L \to L$. Проведите исследование:

1. Проверьте, что L является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.
2. Выберите в нём базис.
3. Убедитесь, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным (оператором).
4. Решите задачу о диагонализации матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в выбранном базисе методом спектрального анализа:
   - в случае, если $\mathcal{A}$ имеет скалярный тип, для диагонализации используйте собственный базис.
   - в случае, если $\mathcal{A}$ имеет общий тип, для диагонализации используйте жорданов базис (приведите матрицу в жорданову форму).

L – множество многочленов $P(x)$ степени не выше 2,

$\mathcal{A}(P(x)) = \int_{-1}^{1} K(x,y)\ \ P(y)\ \ dy$, где $K(x,y) = y^2 + 2x(y-1) + \left(1 - 3y^2\right)x^2$.

Решение.

1. $\forall P(x)\ \ \deg P \leq 2\ \exists a, b, c \in \mathbb{R} \quad P(x) = ax^2 + bx + c$

$\sqsupset (a,b,c)$ - арифметический вектор. Так как мы знаем, что пространство арифметических векторов линейное, а многочлен мы можем представить, как вектор коэффициентов (при этом операции между многочленом и векторами будут давать одинаковые результаты), то мы можем сказать, что пространство многочленов изоморфно пространству векторов и соответственно линейно.

2. Так как L изоморфно $\mathbb{R}^3$, за базис можно взять стандартный базис:
$\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \{1, t, t^2\} = E_3 \subset L$

3. $(A)(P(x)) = \int_{-1}^{1} K(x,y)P(y)dy = \int_{-1}^{1}(y^2+2x(y-1)+(1-3y^2)x^2)(ay^2+by+c)dy = -\frac{2}{15}(a(4x^2+10x-3)-5(2bx-6cx+c)) - \frac{2}{15}(4ax^2+x(10a-10b+30c)-3a-5c)$

Тогда $\forall x = (a,b,c) \quad \mathcal{A}(x) = (-\frac{8}{15}a, -\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b-4c, \frac{2}{5}a+\frac{2}{3}c)$

Так как каждая компонента вектора - многочлен $Q(a,b,c), \deg P = 1$, то по свойствам сложения и умножения $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ и $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\mathcal{A}x$

(!) $\forall y \in \mathbb{R}^3 \ \exists! x \in \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{A}x = y = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{15}a \\ -\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b-4c \\ \frac{2}{5}a+\frac{2}{3}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{15}{8}d \\ b = \frac{3}{4}e+3c+a \\ c = \frac{3}{2}f - \frac{3}{5}a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{15}{8}d \\ b = \frac{3}{4}e+\frac{9}{2}f+\frac{3}{2}d \\ c = \frac{3}{2}f+\frac{9}{8}d \end{cases} \Longleftarrow \exists! \text{ обратная}$$

$\Longleftarrow \mathcal{A}$ - линейный оператор, $\mathcal{A} : L \longrightarrow L$

Тогда его матрица $A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{15} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ - общий тип

4. Решим вековое уравнение
$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{8}{15}-\lambda & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3}-\lambda & -4 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{8}{15}-\lambda\right)\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\left(\frac{2}{3}-\lambda\right) = \left(\frac{8}{15}+\lambda\right)\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)\left(\frac{2}{3}-\lambda\right) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{8}{15} \\ \lambda_2 = \frac{2}{3} \\ \lambda_3 = \frac{4}{3} \end{cases} \Longrightarrow \text{диагональная форма} \begin{pmatrix} -\frac{8}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Матрица из собственных векторов (жорданов базис): $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$