DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (E.I)

AMA - Segundo parcial **14-12-2009** **Duración prevista: 1 h. 30 min.**

---

1) (1.5 p) Considera la función definida por la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n}$$

a) $(0.5p)$ Usando la cota de error asociada al teorema de Leibniz, obtén el valor aproximado de $f(-1)$ con dos cifras decimales exactas.

b) $(0.5p)$ Obtén una serie de potencias para su derivada, $f'(x)$, y súmala indicando el intervalo de convergencia.

c) $(0.5p)$ Integrando la derivada, obtén $f(x)$ en forma explícita, y determina el valor exacto de $f(-1)$. Compara este resultado con la aproximación de a).

---

a) $f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n}$ es una serie alternada y verifica las condiciones del teorema de Leibniz.

Para encontrar una aproximación con dos decimales correctos necesitamos

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+2)\, 2^{N+1}} < 10^{-3} \Longleftrightarrow (N+2)\, 2^{N+1} > 1000 \Longleftrightarrow N \geq 6.$$

Y tomando $N = 6$ obtenemos la aproximación

$$f(-1) \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n} = -\frac{1}{1 \cdot 2^0} + \frac{1}{2 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{6 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} = -\frac{909}{1120} = -0.8116...$$

b) Derivando obtenemos una serie geométrica que podemos sumar.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) \cdot x^n}{(n+1) \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

para los valores de x tales que

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \,]-2, 2[$$

c) Integrando $f\prime(x)$

$$f'(x) = \frac{2}{2-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -2 \cdot \log(2-x) + C$$

y teniendo en cuenta que $f(0) = 0$,

$$f(0) = -2 \cdot \log(2-0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 2 \cdot \log(2)$$

de donde

$$f(x) = -2 \cdot \log(2-x) + 2 \cdot \log(2) = 2 \log\left(\frac{2}{2-x}\right)$$

El valor exacto de $f(-1)$ es

$$f(-1) = 2 \log\left(\frac{2}{2-(-1)}\right) = 2 \log(2/3) = -0.8109302162$$

resultado que confirma la precisión encontrada en a).

2) (1 p) Considera la curva paramétrica definida mediante

$$\gamma(t) = \left(\ t^3 + t\ ,\ \ \text{sen}(t^2 - 1)\ \right)$$

a) $(0.7p)$ Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P = (2, 0)$.

b) $(0.3p)$ ¿Cuál es el ángulo que forma esta recta con el eje de abscisas, OX?

---

a) Dado que $\gamma'(t) = \left(3t^2 + 1\ ,\ 2t \cdot \cos\left(t^2 - 1\right)\right)$, y que el punto $P = (2, 0)$ se obtiene para $t = 1$, la ecuación de la recta tangente será

$$RT \equiv P + t \cdot \gamma'(1)$$

$$RT \equiv (2\ ,\ 0) + t \cdot (4\ ,\ 2) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

o, de forma equivalente,

$$RT \equiv (4t + 2\ ,\ 2t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

b) El ángulo, α, que forma la recta con el eje OX es el mismo que forma su vector director, $(4, 2)$, con el vector $(1, 0)$

$$\cos(\alpha) = \frac{(4,2) \cdot (1,0)}{\|(4,2)\| \cdot \|(1,0)\|} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.46 \approx 26^o$$

---

3) (1 p) Considera la superficie definida implícitamente mediante

$$F(x, y, z) = x^2 y + \log\left(x - y^2\right) - z^2 = 0$$

a) $(0.7p)$ Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(2, 1, 2)$

b) $(0.3p)$ Calcula la ecuación de la recta normal a la superficie en ese mismo punto

---

a) Para obtener el vector normal a la superficie calculamos el gradiente de $F(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y,z) &= \left(2xy + \frac{1}{x - y^2}\ ,\ x^2 - \frac{2y}{x - y^2}\ ,\ -2z\right) \\ \nabla F(2,1,2) &= (5, 2, -4) \end{aligned}$$

y la ecuación del plano tangente será

$$5(x - 2) + 2(y - 1) - 4(z - 2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5x + 2y - 4z - 4 = 0$$

b) La ecuación de la recta normal será

$$r(t) = (2, 1, 2) + t \cdot (5, 2, -4) \qquad \Longleftrightarrow \qquad r(t) = (2 + 5t, 1 + 2t, 2 - 4t)$$