DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Primer Parcial **13-11-2017** **Duración prevista: 2h**

---

1. **a)**$_{(1p)}$ Determina el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|1 - |x+2|| > 5$.

b)$_{(1p)}$ Halla el dominio de $f(x) = \dfrac{\log(5-x)}{1-\sqrt{x-3}}$.

c)$_{(1p)}$ Calcula el valor del área del recinto encerrado entre la recta $y = x+1$ y la parábola $y = 3 - x^2$.

---

a) Observa que

$$\begin{aligned} \Big|\, 1 - |x+2| \,\Big| > 5 \;\; &\Leftrightarrow \;\; 1 - |x+2| < -5 \;\;\vee\;\; 1 - |x+2| > 5 \;\; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \;\; -|x+2| < -6 \;\;\vee\;\; -|x+2| > 4 \;\; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \;\; |x+2| > 6 \;\;\vee\;\; |x+2| < -4 \end{aligned}$$

La segunda desigualdad no se satisface nunca, por lo que la solución coincidirá con la de la primera

$$|x+2| > 6 \;\Leftrightarrow\; x+2 < -6 \;\vee\; x+2 > 6 \;\Leftrightarrow\; x < -8 \;\vee\; x > 4 \;\Leftrightarrow\; x \in \,]-\infty, -8[\, \cup \,]4, +\infty[$$

b) El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle/\; 5 - x > 0\ ,\ x - 3 \geq 0\ ,\ \sqrt{x-3} \neq 1 \right\}$$

Ahora bien,

$$5 - x > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 5 \;\Leftrightarrow\; x \in \,]-\infty, 5[$$

y

$$x - 3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x \in [3, +\infty[$$

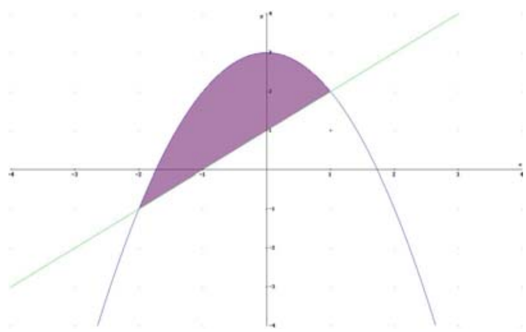
Por otro lado,

$$\sqrt{x-3} = 1 \;\Rightarrow\; x - 3 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 4$$

En resumen,

$$D(f) = \,]-\infty, 5[\, \cap \,[3, +\infty[\, \cap \,(\mathbb{R} \sim \{4\}) = [3, 5[\, \sim \{4\}$$

c) El recinto comprendido entre la recta $y = x+1$ y la parábola $y = 3 - x^2$ es el que se muestra en la gráfica



Las abscisas de los puntos de intersección entre ambas funciones se obtendrán al resolver la ecuación

$$3 - x^2 = x + 1 \ \Leftrightarrow\ x^2 + x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -2\ ,\ x = 1$$

Así pues, como se puede observar a partir de la figura, el área del recinto encerrado entre la recta $y = x + 1$ y la parábola $y = 3 - x^2$ vendrá dada por

$$\begin{aligned} A = \int_{-2}^{1} \Big(3 - x^2 - (x+1) \Big)\ dx \ &= \ \int_{-2}^{1} \big(-x^2 - x + 2 \big)\ dx \ = \ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-2}^{1} \ = \\ &= \ -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 4 \right) \ = \ \frac{9}{2}\ u^2 \end{aligned}$$

---

2. (2.5p) Encuentra el dominio de la función $f(x) = x \cdot e^{2/x^2}$. Demuestra si es par, impar o de ninguno de los dos tipos. A partir del estudio de su derivada, determina máximos y mínimos relativos así como las regiones de crecimiento y decrecimiento.

El dominio de $f(x)$ será

$$D(f) = \mathbb{R} \sim \{0\}$$

Se tiene, además, que $x = 0$ es una asíntota vertical. La función es impar ya que

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{2/(-x)^2} = -x \cdot e^{2/x^2} = -f(x)$$

Por otro lado, su derivada es

$$f'(x) = e^{2/x^2} + x \cdot e^{2/x^2} \cdot \left(-\frac{4x}{x^4} \right) = e^{2/x^2} \cdot \left(1 - \frac{4}{x^2} \right) = e^{2/x^2} \cdot \left(\frac{x^2 - 4}{x^2} \right)$$

por lo que los posibles máximos o mínimos de $f(x)$ serán las soluciones de la ecuación $x^2 - 4 = 0$, es decir, $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$.
Por otra parte, el signo de la derivada coincide con el de $x^2 - 4$ ya que el denominador de f' y la exponencial son siempre positivos. Así, teniendo en cuenta que $x^2 - 4$ es una parábola con las ramas hacia arriba que se anula en $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$,

$$\begin{aligned} x^2 - 4 \ &> \ 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]2, +\infty[\\ x^2 - 4 \ &< \ 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \,]-2, 2[\end{aligned}$$

podemos concluir que en el intervalo $]-\infty, -2[$ la función $f(x)$ es estrictamente creciente, en $]-2, 0[\cup]0, 2[$ la función $f(x)$ es estrictamente decreciente y en $]2, +\infty[$ vuelve a ser estrictamente creciente. Por ello, además podemos decir que en $x_1 = -2$ la función alcanza un máximo relativo de coordenadas $(-2, -2\sqrt{e})$, mientras que en $x_2 = 2$ alcanza un mínimo relativo de coordenadas $(\ 2, 2\sqrt{e})$. También puedes utilizar el signo de la derivada segunda para justificar esto último.
Observa, además, que como la función es impar habría sido suficiente con deducir su comportamiento en el intervalo $]-\infty, 0[$ o en el $]0, +\infty[$, ya que la simetría (respecto del origen) justificaría el del otro intervalo.

3. a)$_{(1.5p)}$ Calcula el valor exacto de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx$.

b)$_{(3p)}$ Sabiendo que $M_4 = 22$, determina el número de subdivisiones a realizar en el intervalo $[1,2]$ para conseguir aproximar el valor de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx$ con una precisión de 10^{-4} mediante la regla de Simpson. Obtén la aproximación en cuestión y verifica que es compatible con el valor exacto.

---

a) Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^2 x^{-1/2}\cdot\log(x)\,dx = \begin{pmatrix} u=\log(x) & ; & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^{-1/2}dx & ; & v=\dfrac{x^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{x}\end{pmatrix} = \\
&= \Big[\,2\sqrt{x}\cdot\log(x)\,\Big]_1^2 - \int_1^2 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \Big[\,2\sqrt{x}\cdot\log(x)\,\Big]_1^2 - 2\int_1^2 x^{-1/2}\,dx = \\
&= \Big[\,2\sqrt{x}\cdot\log(x) - 4\sqrt{x}\,\Big]_1^2 = 2\sqrt{2}\Big(\log(2)-2\Big) - \Big(2\log(1)-4\Big) = \\
&= 2\sqrt{2}\log(2) - 4\sqrt{2} + 4
\end{aligned}$$

b) Teniendo en cuenta la cota de error de Simpson

$$\left|\int_1^2 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx - S_6\right| \le \frac{22\cdot(2-1)^5}{180\cdot n^4}$$

bastará con hallar n (par) que verifique la desigualdad

$$\frac{22\cdot(2-1)^5}{180\cdot n^4} < 10^{-4}$$

de la que se deduce $n \ge 6$. Para hallar la aproximación, consideremos $h = \frac{1}{6}$ y la partición

$$P = \left\{\,1\,,\ 1+\frac{1}{6}\,,\ 1+\frac{1}{3}\,,\ 1+\frac{1}{2}\,,\ 1+\frac{2}{3}\,,\ 1+\frac{5}{6}\,,\ 2\,\right\}$$

La fórmula de la regla de Simpson vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx \simeq S_6 &= \frac{\frac{1}{6}}{3}\left(\frac{\log(1)}{\sqrt{1}} + 4\cdot\frac{\log\left(1+\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{6}}} + 2\cdot\frac{\log\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} + \right. \\
&\qquad \left. + \ 4\cdot\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} + 2\cdot\frac{\log\left(1+\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} + 4\cdot\frac{\log\left(1+\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{6}}} + \frac{\log(2)}{\sqrt{2}}\right) = \\
&= \frac{1}{18}(0 + 4\cdot 0.1427157977 + 2\cdot 0.2491399829 + 4\cdot 0.3310608744 + \\
&\qquad + 2\cdot 0.3956838267 + 4\cdot 0.4476609587 + 0.4901290717) = \\
&= \frac{1}{18}\cdot 5.465527214 = 0.3036404007...
\end{aligned}$$

En efecto, se cumple que la diferencia entre el valor exacto y el aproximado es menor que 10^{-4}

$$\begin{aligned}
\left|\int_1^2 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx - S_6\right| &= \left|\Big(2\sqrt{2}\log(2) - 4\sqrt{2}+4\Big) - 0.3036404007...\right| = \\
&= \Big|0.3036620374\ldots - 0.3036404007...\Big| = 2.16367...\cdot 10^{-5} < 10^{-4}
\end{aligned}$$

lo que garantiza, al menos, tres decimales exactos (en realidad, cuatro) en la aproximación de la integral.