Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 7
Robert Fuster

Exercici 7.1. *Donada la matriu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, *si* R *és la forma esglaonada reduïda de* A *calculeu una matriu* T *de manera que* $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$.

Calculem la forma esglaonada reduïda de la matriu A i fem simultàniament les mateixes operacions elementals sobre la matriu identitat:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(-1/2)} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Llavors,

$$\mathsf{T} = \mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_{2}(-1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Exercici 7.2. *Estudieu si els conjunts següents són linealment dependents o independents.*

(a) $A = \{(1,2,0),(1,-1,1),(1,5,-1)\}$

(b) $B = \{(1,2,0,1),(1,-1,1,1),(1,5,-1,0)\}$

(a) Discutim l'equació lineal

$$x_1(1,2,0) + x_2(1,-1,1) + x_3(1,5,-1) = (0,0,0)$$

o, de manera equivalent, el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Esglaonem la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com que el rang d'aquesta matriu és 2, el sistema lineal és indeterminat, així que l'equació inicial té més d'una solució i el conjunt A és linealment dependent.

(b) Ara cal estudiar l'equació

$$x_1(1,2,0,1) + x_2(1,-1,1,1) + x_3(1,5,-1,0) = (0,0,0,0)$$

que és equivalent a

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\vec{x} = \mathrm{O}$$

Com que

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = 3$$

el sistema és determinat i el conjunt B és independent.

Exercici 7.3. *(a) Calculeu la forma esglaonada reduïda,* R*, de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3 & 0\\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

i trobeu la matriu T *de manera que* $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$

(b) Quin és el rang de la matriu A*?*

(c) Trobeu alguna relació de dependència entre les columnes de la matriu A*.*

(d) Trobeu alguna relació de dependència entre les files de la matriu A*.*

(a) Esglaonem la matriu $\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \mathrm{I}\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \mathrm{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(2)} \left[\begin{array}{ccccc|ccc}1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccccc|ccc}1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right]$$

Així que la forma esglaonada reduïda de la matriu A és

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

i la matriu T de manera que $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$ és

$$\mathsf{T} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

(b) El rang de A és 2, perquè R té dues files no nul·les.

(c) Observant la matriu R comprovem que les columnes no principals són la segona, la quarta i la cinquena. Per tant, la segona columna és combinació lineal de la primera,

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1$$

la quarta i la cinquena són combinacions de la primera i la tercera:

$$\vec{a}_4 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_3$$
$$\vec{a}_5 = 2\vec{a}_3$$

(d) De

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

deduïm que

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, si A_1, A_2 i A_3 són les files de A, $-2\mathsf{A}_1 - \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 = \mathsf{O}$.

Exercici 7.4. *Proveu que qualsevol subconjunt de $\mathbb{R}^3$ amb quatre vectors és necessàriament linealment dependent.*

Si $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} \subset \mathbb{R}^3$, llavors $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{bmatrix}$ és una matriu 3×4. Per tant, el rang d'aquesta matriu és com a màxim 3, de manera que els quatre vectors no poden ser independents.

Exercici 7.5. *Determineu alguna relació de dependència entre les columnes de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

i calculeu el rang de A.

Apliquem l'algorisme de Gauss-Jordan per tal de trobar la forma esglaonada reduïda de A:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquesta matriu és la forma esglaonada reduïda de A. Com que hi ha dues columnes principals, el rang de A és 2. A més a més, si $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ i $\vec{a}_4$ són les columnes de A, trobem aquestes relacions de dependència:

$$\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$$
$$\vec{a}_4 = -3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2$$

Exercici 7.6. *Extraieu un subconjunt linealment independent del conjunt*

$$A = \{(1,2,1,0),(1,1,0,1),(0,1,1,-1),(1,1,1,1)\}$$

que tinga el màxim nombre possible d'elements.

El màxim possible d'elements linealment independents és el rang de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esglaonant aquesta matriu podrem calcular aquest rang i, simultàniament, trobar les columnes que són independents.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)\mathsf{E}_{3,1}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)\mathsf{E}_{4,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rang és 3, així que hi ha tres vectors independents, que corresponen a les columnes principals de la darrera matriu, és a dir, les columnes primera, segona i quarta. El conjunt

$$B = \{(1,2,1,0),(1,1,0,1),(1,1,1,1)\}$$

és un subconjunt de A linealment independent i té el màxim nombre possible d'elements amb aquesta propietat.

Exercici 7.7. *Proveu que si el conjunt $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent llavors, $B = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_1 + \vec{u}_3\}$ també és independent. Què podem dir quant a la independència lineal d'aquest altre conjunt: $C = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_1 - \vec{u}_3\}$?*

Per a estudiar la independència lineal del conjunt B hem de discutir l'equació

$$x_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + x_2(\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + x_3(\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = \vec{0}$$

Reordenant-la obtenim l'equació equivalent

$$(x_1 + x_3)\vec{u}_1 + (x_1 + x_2)\vec{u}_2 + (x_2 + x_3)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

Ara, com que el conjunt A és linealment independent, en aquesta darrera equació tindrem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com que la matriu d'aquest darrer sistema té rang 3 (comproveu-ho), la solució única és $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ i el conjunt B és linealment independent.

En canvi, el conjunt C és linealment dependent, perquè repetint el mateix raonament tindrem l'equació

$$x_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + x_2(\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + x_3(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = \vec{0}$$

O bé

$$(x_1 + x_3)\vec{u}_1 + (x_1 + x_2)\vec{u}_2 + (x_2 - x_3)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

I, com que el conjunt A és linealment independent, en aquesta darrera equació tindrem

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Però ara la matriu que hem obtingut té rang 2 i, en conseqüència, hi ha més d'una solució.