DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Primer Parcial 04-11-2019 Duración prevista: 2h

---

1. **a)**$_{(1p)}$ Encuentra el conjunto de valores, $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen la desigualdad: $|2 - |x|| < 3$

   b)$_{(1p)}$ Obtén el dominio de $f(x) = \dfrac{\alpha x^3 + \beta}{2 - \log(x^2)}$ y razona para qué valores de α y β la función es par o impar.

---

a) Dado que $|x| < 3$ se satisface en el intervalo $]-3, 3[$, para la desigualdad del enunciado tendremos:

$$|2 - |x|| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < 2 - |x| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < |x| < 5$$

La desigualdad en la izquierda siempre se cumple y la de la derecha es cierta en el intervalo $]-5, 5[$. Así pues:

$$|2 - |x|| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-5, 5[$$

b) Para que esté definido el logaritmo debe cumplirse $x^2 > 0$

$$x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

Por otra parte, el denominador puede anularse

$$2 - \log(x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log(x^2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-e, e\}$$

En consecuencia: $D(f) = \mathbb{R} - \{-e, 0, e\}$

Para que la función sea par debe cumplirse $f(x) = f(-x)$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha x^3 + \beta}{2 - \log(x^2)} = \frac{\alpha(-x)^3 + \beta}{2 - \log((-x)^2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha x^3 + \beta}{2 - \log(x^2)} = \frac{-\alpha x^3 + \beta}{2 - \log(x^2)} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

y para que sea impar $f(x) = -f(-x)$ para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha x^3 + \beta}{2 - \log(x^2)} = -\frac{\alpha(-x)^3 + \beta}{2 - \log((-x)^2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha x^3 + \beta}{2 - \log(x^2)} = \frac{\alpha x^3 - \beta}{2 - \log(x^2)} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 0$$

En resumen, la función es par cuando $\alpha = 0$ y es impar cuando $\beta = 0$. Si ninguno de los dos parámetros es 0 la función no es par ni impar.

---

2. $_{(2p)}$ A partir del estudio de su derivada, halla las regiones de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \sqrt{6 - x^2} \cdot e^{-x}$ y analiza la existencia de máximos y mínimos relativos en su dominio.

Antes de nada notemos que el dominio de $f(x)$ es el intervalo $\left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$.
En los extremos del dominio la función no es derivable y para $x \in \left]-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right[$ su derivada es:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{6 - x^2}} \cdot e^{-x} + \sqrt{6 - x^2} \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-x} \cdot \left(x^2 - x - 6\right)}{\sqrt{6 - x^2}} = \frac{e^{-x} \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)}{\sqrt{6 - x^2}}$$

El numerador de la derivada se anula en dos puntos pero $x = 3$ queda fuera del dominio de $f(x)$ por lo que solo puede darse un máximo o mínimo relativo cuando $x = -2$.

Analizando el signo de la derivada,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{6}, -2\right[\quad \text{y} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2, \sqrt{6}\right[$$

por lo que la función es creciente en $\left]-\sqrt{6}, -2\right[$, alcanza un máximo relativo en $\left(-2, \sqrt{2} \cdot e^2\right)$ y decrece en $\left]-2, \sqrt{6}\right[$

3. **a)**$_{(1,5p)}$ Haciendo un cambio de variable y una integración por partes, determina el valor exacto de $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\ dx$

b)$_{(1,5p)}$ Calcula el valor del área encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 3 - x^2$ y $g(x) = |x|$

---

a) Con el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\ dx = \left(\begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right] \Leftrightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t) \cdot 2t\ dt$$

y aplicando integración por partes a la obtenida,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t) \cdot 2t\ dt &= \left(\begin{array}{cc} u = 2t & du = 2\ dt \\ dv = \operatorname{sen}(t)\ dt & v = -\cos(t)\ dx \end{array} \right) = -2t \cdot \cos(t)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2\cos(t) dt = \\ &= -2t \cdot \cos(t)\Big]_0^{\pi/2} + 2\operatorname{sen}(t)\Big]_0^{\pi/2} = (0 - 0) + (2 - 0) = 2 \end{aligned}$$

b) Las funciones se cortan en los puntos $(-1, 1)$ y $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ así que el área pedida es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{\sqrt{3}} \left(x + 3 - x^2 - |x|\right)\ dx = \int_{-1}^{0} \left(x + 3 - x^2 + x\right)\ dx + \int_0^{\sqrt{3}} \left(x + 3 - x^2 - x\right)\ dx = \\ &= \int_{-1}^{0} \left(2x + 3 - x^2\right)\ dx + \int_0^{\sqrt{3}} \left(3 - x^2\right)\ dx = \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-1}^{0} + \left(3x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{\sqrt{3}} = \\ &= \left(0 - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right)\right) + \left(\left(3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}^3}{3}\right) - 0\right) = \frac{5}{3} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

---

4. **a)**$_{(1p)}$ Aplica el método de Trapecios y el método de Simpson para aproximar el valor de $\displaystyle\int_1^7 \frac{x}{x^2+1} dx$ dividiendo el intervalo de integración en seis partes. Comprueba cuál de las dos aproximaciones es mejor sabiendo que el valor exacto es $\log(5)$.

b)$_{(1p)}$ Acota el error cometido aproximando $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx$ con trapecios y $n = 500$. Para el cálculo de M_2 puedes tener en cuenta que la segunda derivada es creciente en $[1, 2]$.

c)$_{(1p)}$ ¿Cuántas subdivisiones serían necesarias para obtener la misma precisión con el método de Simpson? Toma $M_4 = 3$.

---

a) Si dividimos $[1, 7]$ en seis partes, $n = 6$, cada parte mide $h = \dfrac{7-1}{6} = 1$ y la partición a considerar es:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Usando la fórmula de Trapecios:

$$\begin{aligned} T(6) &= \frac{1}{2}(f(1) + 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(3) + 2 \cdot f(4) + 2 \cdot f(5) + 2 \cdot f(6) + f(7)) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{4}{17} + 2 \cdot \frac{5}{26} + 2 \cdot \frac{6}{37} + \frac{7}{50}\right) = \frac{1}{2}\frac{658152}{204425} \approx 1.609763972... \end{aligned}$$

Aplicando la de Simpson

$$\begin{aligned} S(6) &= \frac{1}{3}(f(1)+4\cdot f(2)+2\cdot f(3)+4\cdot f(4)+2\cdot f(5)+4\cdot f(6)+f(7)) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+4\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{4}{17}+2\cdot\frac{5}{26}+4\cdot\frac{6}{37}+\frac{7}{50}\right) = \frac{1\,984192}{3\,204425} \approx 1.604813501... \end{aligned}$$

Comparando con el valor real, $\log(5) = 1.609437912..$, observamos que la aproximación de Trapecios comete un error catorce veces más pequeño que la aproximación de Simpson.

No se pide en el enunciado pero no costaría nada obtener el valor exacto

$$\int_1^7 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot\log(x^2+1)\Big]_1^7 = \frac{1}{2}\cdot(\log(50)-\log(2)) = \frac{1}{2}\cdot\log(25) = \log(\sqrt{25}) = \log(5)$$

b) Puesto que la segunda derivada es creciente, nos basta con conocer sus valores inicial y final para acotarla.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad , \quad f(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{2x\cdot\left(x^2-3\right)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(1) = \frac{-1}{2} = -0.5 \quad , \quad f''(2) = \frac{4}{125} = 0.032$$

al ser creciente en el intervalo los valores de la función aumentan desde -0.5 hasta 0.032. Con lo cual:

$$|f''(x)| \le \frac{1}{2} = 0.5$$

$$M_2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

y por tanto,

$$ET(500) < \frac{(2-1)^3}{12\cdot 500^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\cdot 10^{-6}$$

c) Para obtener ese mismo error con el método de Simpson:

$$ES(n) < \frac{1}{6}\cdot 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2-1)^5}{180\cdot n^4}\cdot 3 < \frac{1}{6}\cdot 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad n^4 > 10^5 \quad \Leftrightarrow \quad n = 18$$