DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Segundo Parcial 10-01-2018 Duración prevista: 2h

---

1. a)$_{(1p)}$Compara el orden de magnitud de las siguientes sucesiones. Justifica tu respuesta.

$$\begin{cases} a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2n} \\ b_n = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n \end{cases}$$

b)$_{(1p)}$ Calcula el límite

$$\lim_n \left(\sqrt{n} \cdot \log\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right)$$

---

a) Para comparar los órdenes de magnitud tenemos que calcular el límite del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_n}{b_n} &= \lim_n \left(\frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2n}}{1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n}\right) = \text{(Stolz)} \\
&= \lim_n \frac{\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2n} + 2^{2n+1} + 2^{2(n+1)}\right) - \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2n}\right)}{(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n + 4^{n+1}) - (1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n)} = \\
&= \lim_n \frac{2^{2n+1} + 2^{2n+2}}{4^{n+1}} = \lim_n \frac{2 \cdot 4^n + 4 \cdot 4^n}{4 \cdot 4^n} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

y podemos concluir que $a_n \approx b_n$.

b) Se trata de una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Aplicando propiedades de los logaritmos ($\log(a^b) = b\log(a)$) y permutando límite con logaritmo, obtenemos una indeterminación del tipo 1^∞ que se resuelve mediante la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(\sqrt{n} \cdot \log\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right) &= \lim_n \left[\log\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\sqrt{n}}\right] = \\
&= \log \lim_n \left[\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\sqrt{n}}\right] \underset{\text{EULER } (1^\infty)}{=} \log\left[e^{\lim_n \sqrt{n}\left(\frac{2n-1}{2n} - 1\right)}\right] = \\
&= \lim_n \left[\sqrt{n}\left(\frac{2n-1}{2n} - 1\right)\right] = \lim_n \left(-\frac{\sqrt{n}}{2n}\right) = 0.
\end{aligned}$$

---

2. Considera la recurrencia lineal de segundo orden definida por

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 12 \cdot 5^{n+1}$$

a)$_{(1p)}$ Encuentra la solución general de la recurrencia homogénea.

b)$_{(1p)}$ Comprueba que $a_n^p = 2n \cdot 5^n$ es solución particular de la recurrencia completa.

c)$_{(1p)}$ Determina la solución explícita de la recurrencia completa con condiciones iniciales $a_1 = -1$, $a_2 = 51$.

---

a) La ecuación característica asociada a la recurrencia homogénea es

$$r^2 - 4r - 5 = 0$$

que tienes dos raíces reales distintas $r_1 = -1$ y $r_2 = 5$.

La recurrencia corresponde al primer caso y la solución general puede escribirse en la forma

$$a_n^H = C_1 (-1)^n + C_2 \cdot 5^n$$

b) Sustituyendo $a_n^p = 2n \cdot 5^n$, $a_{n+1}^p = 2(n+1) \cdot 5^{n+1}$ y $a_{n+2}^p = 2(n+2) \cdot 5^{n+2}$ en la recurrencia, se tiene

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n &= \left(2(n+2) \cdot 5^{n+2}\right) - 4\left(2(n+1) \cdot 5^{n+1}\right) - 5\left(2n \cdot 5^n\right) = \\ &= 10(n+2) \cdot 5^{n+1} - 8(n+1) \cdot 5^{n+1} - 2n \cdot 5^{n+1} = \\ &= (10n + 20 - 8n - 8 - 2n) \cdot 5^{n+1} = \\ &= 12 \cdot 5^{n+1} \end{aligned}$$

por lo que $a_n^p = 2n \cdot 5^n$ es una solución particular de la recurrencia completa

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 12 \cdot 5^{n+1}$$

c) A partir de los apartados anteriores podemos concluir que la solución general de la recurrencia completa puede escribirse como

$$a_n = a_n^H + a_n^p = C_1 (-1)^n + C_2 \cdot 5^n + 2n \cdot 5^n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{aligned} \text{para } n = 1: &\quad a_1 = -C_1 + 5C_2 + 10 = -1 \\ \text{para } n = 2: &\quad a_2 = C_1 + 25C_2 + 100 = 51 \end{aligned}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 1$ y $C_2 = -2$. De aquí:

$$a_n = (-1)^n - 2 \cdot 5^n + 2n \cdot 5^n$$

---

3. Sea la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{3n}}{n}$$

a)$_{(2p)}$ Aproxima $f(\frac{1}{2})$ con una precisión de 10^{-5}. Justifica tu respuesta.

b)$_{(1p)}$ Deriva la serie de potencias anterior y calcula su suma donde converja.

c)$_{(1p)}$ Integra el resultado anterior para encontrar $f(x)$ explícitamente.

d)$_{(1p)}$ Calcula el valor exacto de $f(\frac{1}{2})$ utilizando el resultado anterior. Compáralo con la aproximación del apartado a).

---

a) Observa que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 8^n}$$

es una serie alternada y verifica las condiciones del teorema de Leibniz. Para encontrar una aproximación con un error menor que 10^{-5} necesitamos

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)\cdot 8^{N+1}} < 10^{-5} \;\Leftrightarrow\; (N+1)\cdot 8^{N+1} > 100000 \;\Leftrightarrow\; N \geq 4.$$

Y tomando $N = 4$ obtenemos la aproximación

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 8^n} = \frac{1}{1\cdot 8^1} - \frac{1}{2\cdot 8^2} + \frac{1}{3\cdot 8^3} - \frac{1}{4\cdot 8^4} = \frac{5789}{49152} = 0.1177775065...$$

b) Derivando $f(x)$ obtenemos una serie geométrica que podemos sumar

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}\cdot(3n)\cdot x^{3n-1}}{n} = -\frac{3}{x}\sum_{n\geq 1}\left(-x^3\right)^n = -\frac{3}{x}\cdot\frac{\left(-x^3\right)}{1+x^3} = \frac{3x^2}{1+x^3}$$

para los valores de x tales que

$$\left|-x^3\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| < 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \,]-1,1[$$

c) Integrando $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3} \;\Rightarrow\; f(x) = \log(1+x^3) + C$$

y teniendo en cuenta, a partir de la serie de potencias, que $f(0) = 0$,

$$f(0) = \log(1+0) + C \;\Rightarrow\; C = 0$$

de donde

$$f(x) = \log(1+x^3)$$

d) El valor exacto pedido es

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \log\left(\frac{9}{8}\right) = 0.1177830356...$$

resultado que confirma la precisión encontrada en a) y que proporciona cuatro decimales exactos. En efecto, se cumple

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 8^n}\right| = \left|\log\left(\frac{9}{8}\right) - \sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 8^n}\right| = 5.529100309...\cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$