UNIDAD DIDÁCTICA 4

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

OBJETIVO

El objetivo de la segunda parte de esta Unidad Didáctica es introducir:

1. Dos modelos para variables aleatorias discretas: Binomial y Poisson,
2. y tres modelos para variables continuas: Uniforme, exponencial y normal.

Contenidos

2- DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Distribución binomial

- Suceso **A** asociado a un experimento aleatorio.

$$P(A) = p$$

- Se realizan **n** repeticiones independientes del experimento.
- **X=** número de veces que se presenta el suceso **A** en las n repeticiones

- Valores posibles de X

  E={0, 1, 2,..,n}

la probabilidad de cada x_i es función de **p** y **n**

$$\Downarrow$$

X sigue distribución binomial

X ~ B(n,p)

Distribución binomial

Ejemplos:

- El número de cincos que se obtienen al lanzar 10 dados simétricos, $B(n = 10, p= 1/6)$
- El número de piezas defectuosas en una muestra de 10 obtenida al azar. Dicha muestra procede de una partida con un número muy elevado de piezas, y con un 30% de defectuosas. $B(n=10, p=0,3)$
- **Distribución de 2 puntos o de Bernouilli:** variables binomiales con $n=1$. Sólo tienen 2 valores posibles,

  $E=\{0 , 1\}$.

Función de probabilidad

$P(\mathbf{X}=1) = p$

$P(\mathbf{X}=0) = 1-p$

Distribución binomial

- Función de probabilidad $P(X=x_i)$

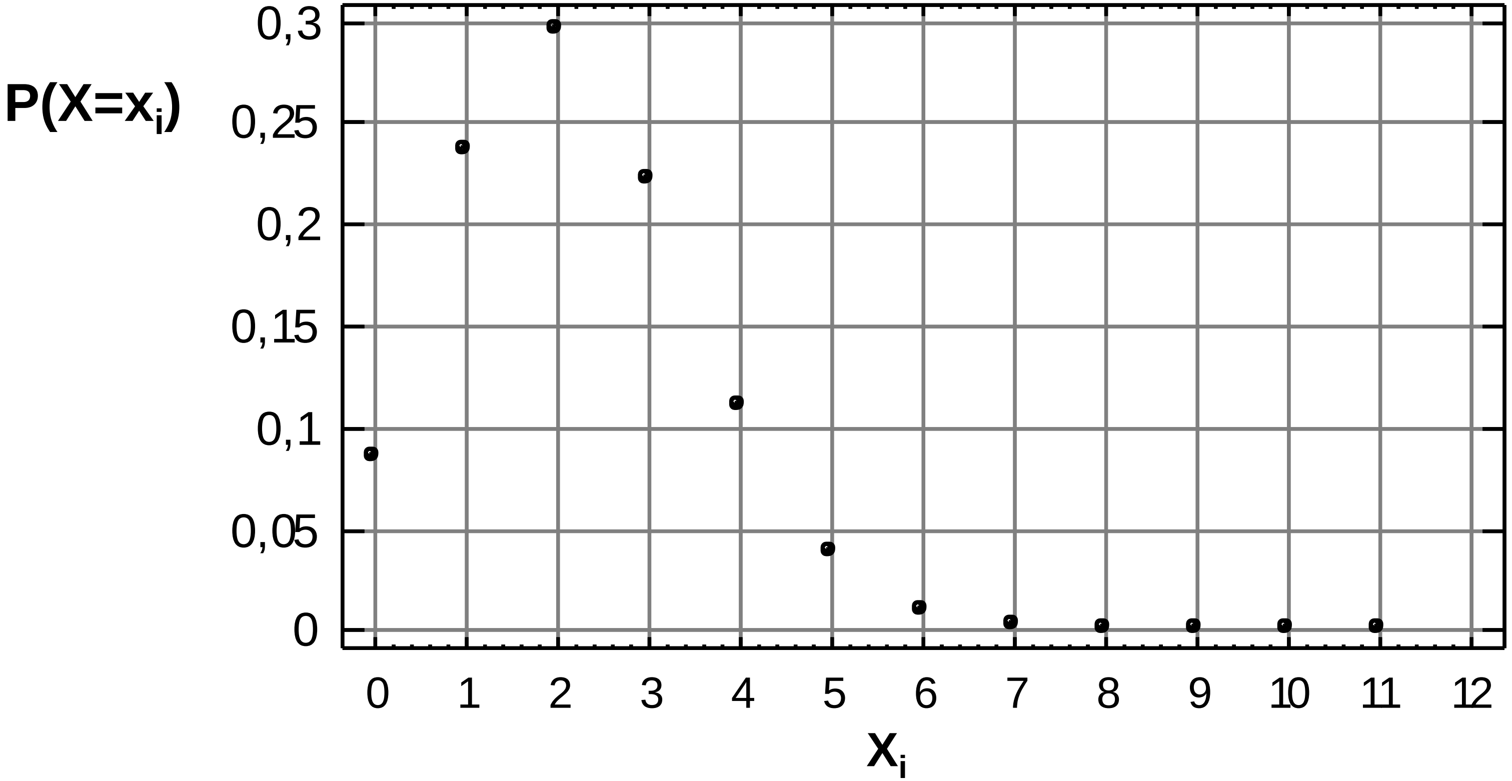
- En la B(n,p) es

$$P(X=x_i)=P(\text{Binomial}(n,p)=x_i)=\binom{n}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{n-x_i}$$

donde $$\binom{n}{x_i}=\frac{n!}{x_i!(n-x_i)!}$$

Distribución binomial

- La función de probabilidad de una **X**~B(n=11,p=0,2) tiene la siguiente forma (**Figura 1**):



Distribución binomial

Ejercicio 1: *para controlar la calidad de las partidas que recibe, el servicio de control de calidad de una empresa extrae una muestra de 50 piezas. Acepta la partida si en la muestra hay menos de 2 unidades defectuosas.*

¿Qué probabilidad tiene este plan de inspección de aceptar partidas que tengan un 1% de unidades defectuosas?

Distribución binomial

SOLUCIÓN:

X=nº de piezas defectuosas en la muestra de 50 extraída de partidas con un 1% de defectuosas. $\Rightarrow$ ***X***~ B(n=50,p=0,01)

*Se aceptan las partidas si **X**<2* $\Rightarrow$

*P(aceptar)=P(**X**<2)=P(B(50,0,01)<2)=*

$$=\binom{50}{0}0{,}01^{0}(1-0{,}01)^{50}+\binom{50}{1}0{,}01^{1}(1-0{,}01)^{50-1}=0{,}9106$$

Distribución binomial

Ejercicio 2: *Calcular la probabilidad de obtener al menos un seis en seis lanzamientos de un dado simétrico.*

SOLUCIÓN: ***X****=nº de seises en 6 lanzamientos* $\Rightarrow$

$\boldsymbol{X} \sim B(n=6,\ p=1/6)$

P(al menos un 6)=P(***X*** *≥ 1) = 1- P(****X*** *= 0)=*

$$=1-\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}(1-\frac{1}{6})^{6}=1-0{,}335=0{,}665$$

Distribución binomial

- **Media m=E(X) (esperanza matemática)**

$$m = np$$

- **Varianza $\sigma^2(X) = E(X-m)^2 = np(1-p)$**

Distribución binomial

Ejercicio 3: *Calcular el número medio de unidades defectuosas del ejercicio 1 y el número medio de seises obtenidos del ejercicio 2.*

SOLUCIÓN:

Nºmedio de unidades defectuosas = np = 50x0,01= =0,5

Nºmedio de seises obtenidos= np= 6 x (1/6) = 1

¿Cuánto vale la varianza en cada caso?

Primer caso: $\sigma^2 = np(1-p)=50x0,01x0,99=0,495$

Segundo caso: $\sigma^2 = np(1-p)=6x(1/6)x(1-1/6)=0,83$

Distribución binomial

- La suma de variables binomiales independientes sigue también una distribución binomial.

$\mathbf{X_1} \sim B(n_1, p)$ $\mathbf{X_2} \sim B(n_2, p)$ independientes.

$\mathbf{Y} = \mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} \Rightarrow Y \sim B(n_1 + n_2 , p)$

Distribución binomial

Ejercicio 4:

En el caso planteado en el ejercicio 1, se toma una segunda muestra de tamaño 20. Las partidas tienen un 5% de unidades defectuosas ¿Cuánto vale la probabilidad de que entre las dos muestras haya más de 2 unidades defectuosas?

SOLUCIÓN:

$\boldsymbol{X_1}$=*nº de piezas defectuosas en la primera muestra de 50* $\Rightarrow \boldsymbol{X_1} \sim B(n_1=50,p=0{,}05)$

$\boldsymbol{X_2}$=*nº de piezas defectuosas en la segunda muestra de 20* $\Rightarrow \boldsymbol{X_2} \sim B(n_2=20,p=0{,}05)$

Distribución binomial

SOLUCIÓN:

$\boldsymbol{Y}$=nº de piezas defectuosas entre las dos muestras $\Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X_1} + \boldsymbol{X_2} \Rightarrow \boldsymbol{Y} \sim B(70, 0{,}05)$

P(más de dos defectuosas entre las dos muestras) $=P(\boldsymbol{Y}>2) = 1-P(\boldsymbol{Y}\leq 2) =$

$$=1-[\binom{70}{0}0{,}05^{0}0{,}95^{70}+\binom{70}{1}0{,}05^{1}0{,}95^{69}+\binom{70}{2}0{,}05^{2}0{,}95^{68}]=0{,}6862$$

Distribución de Poisson

- Variables binomiales con un valor muy elevado de **n** y un valor muy bajo de **p**.

- Se conoce su valor medio **m=np=λ** $\Rightarrow$

  Distribución de Poisson $X \sim Poisson(\lambda)$

- Ejemplos:
  - Número de registros dañados en una base de datos de gran tamaño.
  - Número de errores de compilación en programas de gran tamaño.
  - Número de fallos en un sistema informático de consultas a lo largo de un mes.

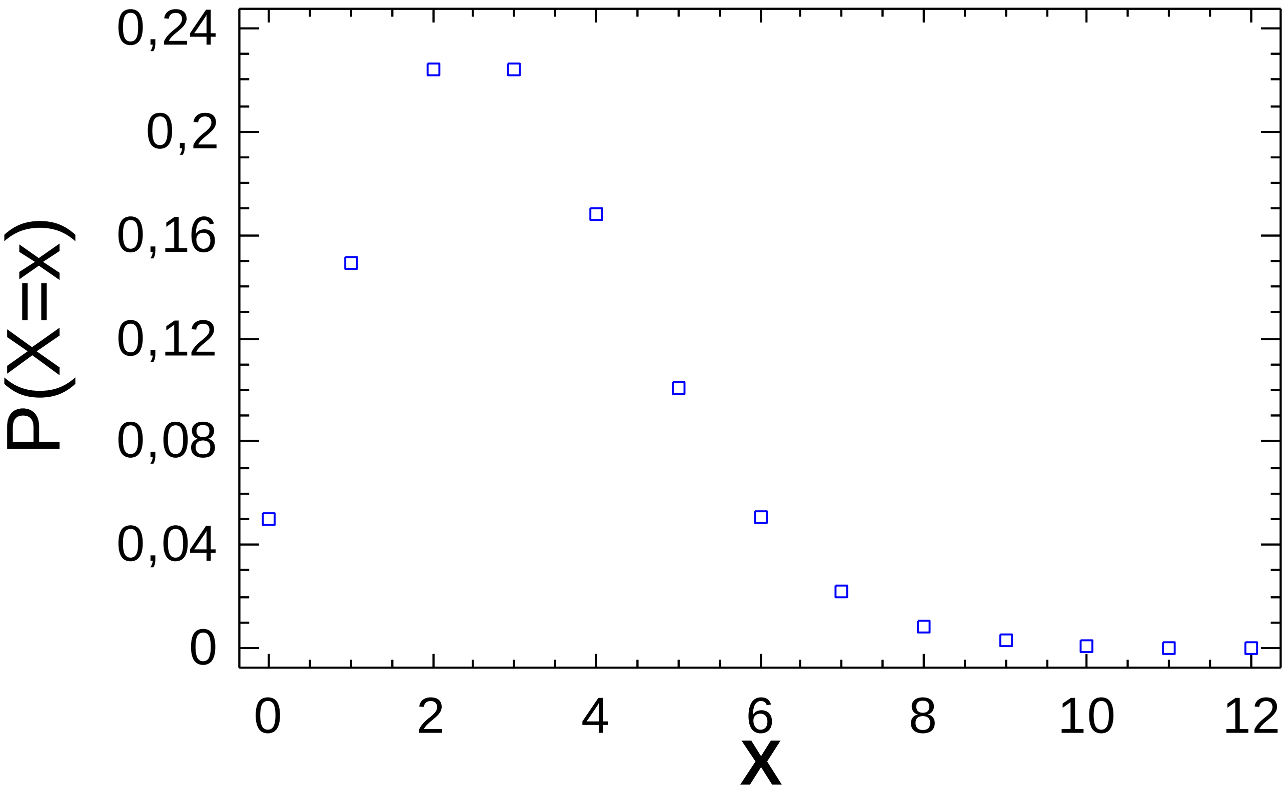
Distribución de Poisson

- Función de probabilidad de una distribución de Poisson de media **λ**

$$P(\text{Poisson}(\lambda)=x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0\\ np\to\lambda}}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Distribución de Poisson

- La función de probabilidad de una Poisson(λ=3) tiene la siguiente forma (**Figura 2**):



Distribución de Poisson

Ejercicio 5: *Si el número medio de abolladuras por capó de los vehículos del aparcamiento de la ETSINF es 0,8, ¿Qué porcentaje de coches no tendrá ninguna abolladura?*

SOLUCIÓN: ***X*** *= nº abolladuras por capó* $\Rightarrow$

X $\sim$ *Poisson(λ=0,8)*

*Porcentaje de coches sin abolladuras=P(**X**=0)=*

$$= e^{-0,8}\frac{0,8^{0}}{0!} = 0,449 \Rightarrow 44,9\%$$

Distribución de Poisson

Ejercicio 6:

Si en las carreteras españolas se producen en promedio 3 accidentes mortales diarios (excluyendo fines de semana)

¿cuál es la probabilidad de que un determinado día no se produzca un solo accidente mortal?

Distribución de Poisson

SOLUCIÓN:

X= nº accidentes mortales un día determinado.

Valor medio = 3 = **λ**

$$\Downarrow$$

*P(no se produzca ningún accidente mortal un día determinado)=P(**X**=0)*

Aplicando la función de probabilidad de la distribución de Poisson:

$$P(X=0)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{0}}{0!}=e^{-\lambda}=e^{-3}=0{,}05$$

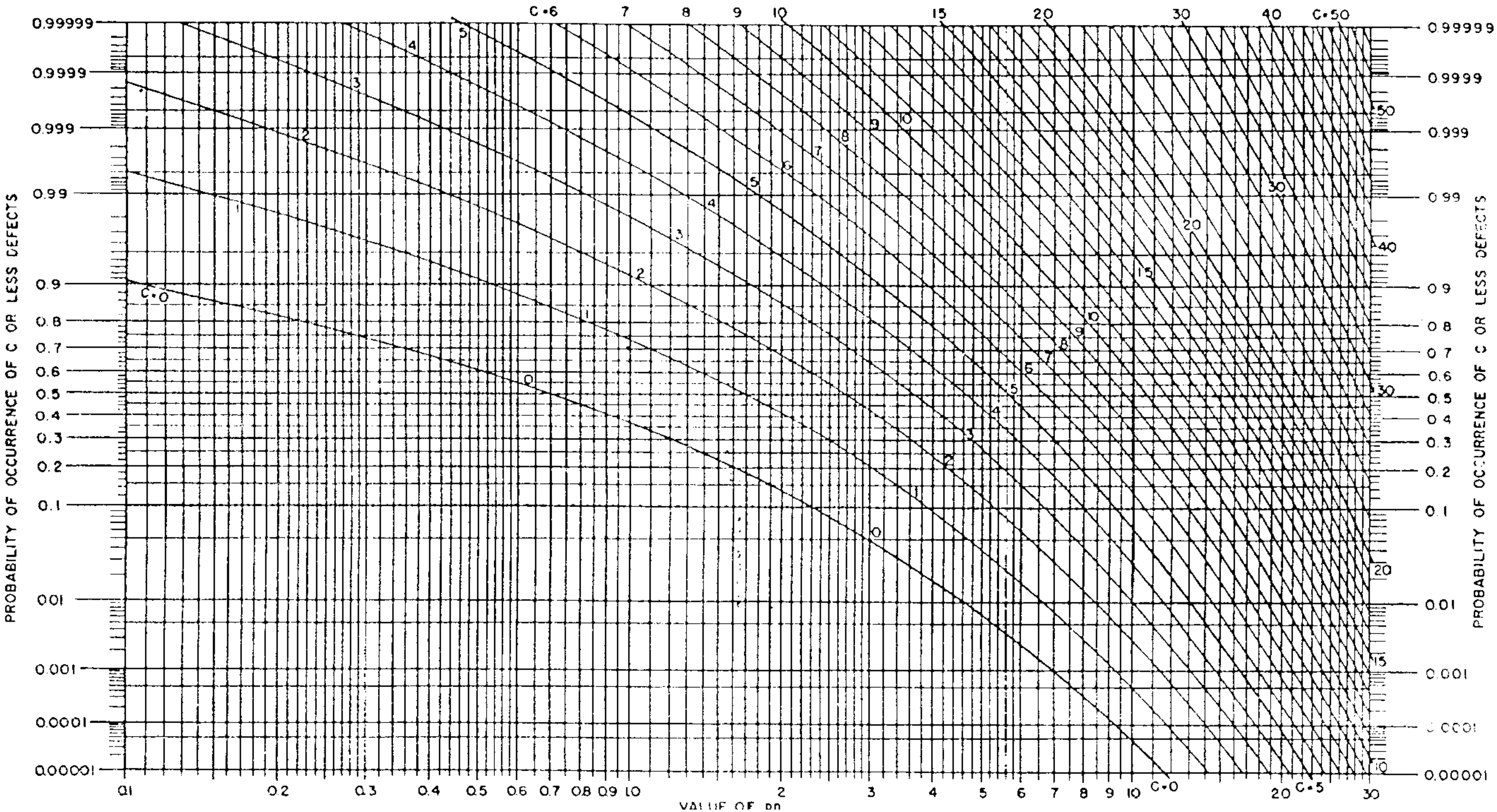
Distribución de Poisson

$$m = E(X) = \sigma^2(X) = \lambda$$

- Para calcular probabilidades con la distribución de Poisson es útil el ábaco

ÁBACO DE POISSON

CALCULA LA P(X ≤ υ) SIENDO X ~ POISSON (λ)



Valor de λ

Curvas de probabilidad acumulada de la distribución de Poisson

Distribución de Poisson

Ejercicio 7: *Siguiendo con la variable del ejercicio 5, ¿qué porcentaje de coches tendrá más de una abolladura?*

SOLUCIÓN:

Porcentaje coches con >1 abolladura $=P(\mathbf{X}>1)=$

$= 1-P(\mathbf{X}\leq 1) = 1-0,8=0,20 \Rightarrow 20\%$

Porcentaje de coches con >5 abolladuras $=P(\mathbf{X}>5)$

$=1-P(\mathbf{X} \leq 5)= 1- 0,99983=0,00017 \Rightarrow 0,017\%$

Distribución de Poisson

Ejercicio 8:

Calcula la probabilidad de obtener más de 3 piezas defectuosas en una muestra de 200 piezas, de un proceso que produce un 5 por mil de defectuosas.

Distribución de Poisson

SOLUCIÓN:

X*= nº piezas defectuosas en la muestra de 200*

n=200 (elevado)

p=0,005 (pequeño)

$$\Downarrow$$

X *se puede estudiar con la distribución de Poisson con parámetro* ***λ****=np=1.*

P(**X**>3)=1-P(**X**≤3)=1-0,98=**0,02**

donde P(**X**≤3)=0,98 se puede obtener en el ábaco.

Distribución de Poisson

- La suma de variables de Poisson independientes sigue también distribución de Poisson.
- Su media es igual a la suma de las medias, y su varianza es la suma de las varianzas.

$\mathbf{X_1} \sim \text{Poisson}\ (\lambda_1)$ $\mathbf{X_2} \sim \text{Poisson}\ (\lambda_2)$

independientes

$\mathbf{Y} = \mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} \Rightarrow \mathbf{Y} \sim \text{Poisson}\ (\lambda_1 + \lambda_2)$

Distribución de Poisson

Ejercicio 9: *Si por día laborable hay en promedio 3 accidentes mortales, calcula la probabilidad de que de lunes a viernes haya más de 20 accidentes mortales.*

SOLUCIÓN:

X_i =nºaccidentes mortales por día laborable $\Rightarrow$

$X_i \sim$ Poisson (λ_i =3)

Y=nºaccidentes mortales de lunes a viernes $\Rightarrow$

$$Y = \sum_{i=1}^{5} X_i \Rightarrow Y \approx Poisson(\lambda = 5x3 = 15)$$

Distribución de Poisson

SOLUCIÓN:

Probabilidad de más de 20 accidentes de lunes a viernes=

$= P(\mathbf{Y}>20) = 1\text{-}P(Y\leq 20) = 1\text{-}0{,}91 = 0{,}09 \Rightarrow 9\%$

Distribuciones binomial y de Poisson

Ejercicio 10 (plan de muestreo):

Una industria utiliza en sus productos un componente electrónico. Comprueba que el porcentaje de componentes defectuosos en cada partida que compra es inferior al 10%.

Para ello prueba en N unidades de cada partida, y la acepta si todas son correctas.

¿Cuánto debe valer como mínimo N para que la probabilidad de admitir una partida con un 10% o más de unidades defectuosas no supere el 5%?

Distribuciones binomial y de Poisson

SOLUCIÓN: *X="nº de componentes defectuosas en la muestra de N extraídos de partidas que no satisfacen el requisito"*

X~B(N, p≥0,1) Tomamos el caso más difícil de detectar p=0,1.

$P(aceptar) \leq 0,05 \Rightarrow P(X=0) \leq 0,05 \Rightarrow \binom{N}{0} 0,1^0 (1-0,1)^N \leq 0,05$

$\Rightarrow 0,9^N \leq 0,05 \Rightarrow N \log 0,9 \leq \log 0,05 \Rightarrow$

$\Rightarrow N \geq (\log 0,05)/(\log 0,9) \Rightarrow N \geq 28,43 \Rightarrow N_{mínimo}=29$

Distribuciones binomial y de Poisson

Ejercicio 11 (plan de muestreo):

Un fabricante de circuitos integrados desea garantizar que la proporción de chips defectuosos en los lotes que vende es inferior al 5 por mil.

Para ello selecciona al azar N chips de un lote, y rechaza el lote en el caso de que 3 o más de los chips sean defectuosos.

Determinar el valor mínimo de N si se desea que la probabilidad de rechazar un lote que no satisfaga el requisito exigido sea al menos del 99%.

Distribuciones binomial y de Poisson

SOLUCIÓN: *X="nº de chips defectuosos en los N extraídos de un lote que no satisface el requisito"*

X∼ Poisson (λ≥N 0,005) Caso más difícil de detectar λ=N 0,005.

$P(\text{rechazar}) \geq 0{,}99 \Rightarrow P(X\geq 3) \geq 0{,}99 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X\leq 2)\leq 0{,}01 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(\text{Poisson}(\lambda=N0{,}005)\leq 2)\leq 0{,}01$

$\Rightarrow$ *Mirando en el ábaco* $\lambda\geq 8{,}5 \Rightarrow N\geq 8{,}5/0{,}005$

$\Rightarrow N\geq 1700 \Rightarrow$ $\mathbf{N_{mínimo}=1700}$