DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Examen Final   21-01-2019   Duración prevista: 3h 30'

PRIMER PARCIAL

---

1. $_{(2p)}$ Encuentra el dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\mid x^2-2\mid}-1}.$

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f)=\left\{\, x\in\mathbb{R}\ \Big/\ \frac{1}{\mid x^2-2\mid}-1\geq 0 \quad , \quad x^2-2\neq 0\right\}$$

Por un lado, tenemos que

$$x^2-2=0\ \Leftrightarrow\ x^2=2\ \Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{2}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mid x^2-2\mid}-1\geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\, x^2-2\,\right|\leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1\leq x^2-2\leq 1 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 1\leq x^2\leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1\leq |x|\leq\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad |x|\geq 1 \ \wedge\ |x|\leq\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ahora bien

$$|x|\geq 1\ \Leftrightarrow\ x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

mientras que

$$|x|\leq\sqrt{3}\ \Leftrightarrow\ x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$$

Por tanto, la solución de la desigualdad será la intersección de estos dos conjuntos, es decir,

$$\frac{1}{\mid x^2-2\mid}-1\geq 0\ \Leftrightarrow\ x\in\left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right]$$

En resumen,

$$D(f)=\left(\left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right]\right)-\left\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right\}$$

---

2. $_{(3p)}$ Halla el dominio de $f(x)=\left(x^2-2\right)e^{2x}$. A partir del estudio de su derivada, determina máximos y mínimos relativos así como las regiones de crecimiento y decrecimiento.

El dominio de la función $f(x)$ será todo $\mathbb{R}$ por ser el producto de un polinomio y una exponencial. Por otro lado, el signo de su derivada

$$f'(x)=2xe^{2x}+2\left(x^2-2\right)e^{2x}=2\left(x^2+x-2\right)e^{2x}$$

coincidirá con el del polinomio x^2+x-2, al ser la exponencial siempre positiva.
Así, teniendo en cuenta que x^2+x-2 es una parábola con las ramas hacia arriba que se anula en $x_1=-2$ y $x_2=1$, tenemos dos posibles extremos relativos. Además,

$$x^2+x-2>0\ \Leftrightarrow\ x\in\,]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,\infty[$$

$$x^2+x-2<0\ \Leftrightarrow\ x\in\,]-2,1[$$

y podemos concluir que f es estrictamente creciente en $]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,\infty[$, es estrictamente decreciente en $]-2,1[$ y alcanza un máximo relativo en $x_1=-2$, de coordenadas $\left(-2,2e^{-4}\right)$, y un mínimo relativo en $x_2=1$, de coordenadas $\left(1,-e^2\right)$. También puedes utilizar el signo de la derivada segunda para justificar esto último.

3. $_{(2p)}$ Calcula el área encerrada entre $f(x) = x - |x|\sin(x)$, el eje OX, y los dos puntos de corte (no nulos) de $f(x)$ con el eje de abscisas más próximos al origen de coordenadas.

Observa que

$$f(x) = \begin{cases} x\,(1-\sin(x)) & , \quad x \geq 0 \\ x\,(1+\sin(x)) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

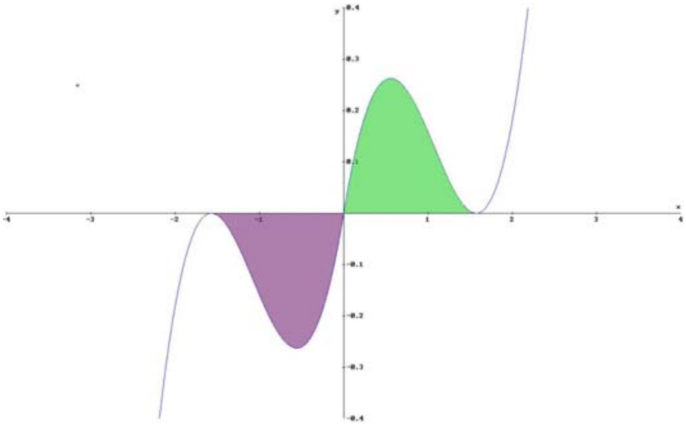
se anula en $x = 0$ y en los puntos de la forma

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y es una función impar, ya que

$$f(-x) = -x - |-x|\sin(-x) = -x + |x|\sin(x) = -f(x)$$

El área pedida será la del recinto encerrado entre $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$, tal y como se muestra en la gráfica:



Así, el área vendrá dada por

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\ x - |x|\sin(x)\ |\ dx$$

y, teniendo en cuenta que la función es impar,

$$A = 2\int_0^{\pi/2} x\,(1-\sin(x))\ dx$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x\,(1-\sin(x))\ dx &= \left(\begin{array}{ccc} u = x & ; & du = dx \\ dv = (1-\sin(x))\ dx & ; & v = x + \cos(x) \end{array} \right) = \\ &= \Big[\ x\cdot(x+\cos(x))\ \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x+\cos(x))\ dx = \\ &= \Big[\ x\cdot(x+\cos(x))\ \Big]_0^{\pi/2} - \left[\frac{x^2}{2} + \sin(x)\right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{\pi^2}{8} + 1\right) = \frac{\pi^2 - 8}{8} \end{aligned}$$

de donde

$$A = \frac{\pi^2 - 8}{4} \text{ u.l.}$$

4. $_{(3p)}$ Sabiendo que el valor absoluto de la derivada cuarta de la función $e^x\sqrt{4-x^2}$ es menor que 30, aproxima la integral $\displaystyle\int_0^1 e^x\sqrt{4-x^2}\,dx$ mediante la regla de Simpson con un error menor que 10^{-4}.

Teniendo en cuenta la cota de error de Simpson

$$\left|\int_0^1 e^x\sqrt{4-x^2}\,dx \;-\; S_n(f)\right| \le \frac{30\cdot(1-0)^5}{180\cdot n^4}$$

bastará con hallar n (par) que verifique la desigualdad

$$\frac{30}{180\cdot n^4} < 10^{-4}$$

de la que se deduce $n \ge 7$.

Puesto que n debe ser par tomaremos $n=8$. Para hallar la aproximación, consideremos $h=\dfrac{1}{8}$ y la partición

$$P=\left\{\,0\,,\,\frac{1}{8}\,,\,\frac{1}{4}\,,\,\frac{3}{8}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{5}{8}\,,\,\frac{3}{4}\,,\,\frac{7}{8}\,,\,1\,\right\}$$

La fórmula de la regla de Simpson vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x\sqrt{4-x^2}\,dx \;\simeq\; S_8(f) \;&=\; \frac{\frac{1}{8}}{3}\left(\sqrt{4}+4\cdot e^{1/8}\sqrt{4-\left(\frac{1}{8}\right)^2}+2\cdot e^{1/4}\sqrt{4-\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\;4\cdot e^{3/8}\sqrt{4-\left(\frac{3}{8}\right)^2}\;+\right.\\
&\quad +2\cdot e^{1/2}\sqrt{4-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+4\cdot e^{5/8}\sqrt{4-\left(\frac{5}{8}\right)^2}+2\cdot e^{3/4}\sqrt{4-\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\\
&\quad \left.+\;4\cdot e^{7/8}\sqrt{4-\left(\frac{7}{8}\right)^2}+e\,\sqrt{4-1^2}\right)=\\
&=\; \frac{1}{24}\,(\,2\;+\;4\cdot 2.261866213\;+\;2\cdot 2.547908947\;+\;4\cdot 2.858373128\;+\\
&\quad +\;2\cdot 3.192735011\;+\;4\cdot 3.549360028\;+\;2\cdot 3.925023080\;+\\
&\quad +\;4\cdot 4.314225658+4.708202236)=\\
&=\; 3.248951517...
\end{aligned}$$

SEGUNDO PARCIAL

1. (2p) Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones

$$\begin{aligned} a_n &= \log(2) - \log(3) + \log(4) + \cdots - \log(2n-1) + \log(2n) \\ b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Para comparar los órdenes de magnitud tenemos que calcular el límite del cociente

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{a_n}{b_n} &= \lim_n \frac{\log(2) - \log(3) + \log(4) + \cdots - \log(2n-1) + \log(2n)}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} = (\text{Stolz}) \\ &= \lim_n \frac{\log(2n+2) - \log(2n+1)}{\dfrac{1}{n+1}} = \lim_n \frac{\log\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)}{\dfrac{1}{n+1}} = \lim_n \left[(n+1)\log\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\right] \end{aligned}$$

Se trata ahora de una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Aplicando propiedades de los logaritmos ($\log(a^b) = b\log(a)$) y permutando límite con logaritmo, obtenemos una indeterminación del tipo 1^∞ que se resuelve mediante la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} \lim_n \left[(n+1)\log\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\right] &= \lim_n \left[\log\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{n+1}\right] = \log \lim_n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{n+1}\right] \underset{\text{EULER } (1^\infty)}{=} \\ &= \log\left[e^{\lim_n \left[(n+1)\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)\right]}\right] = \lim_n \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A la vista del resultado anterior podemos concluir que $a_n \approx b_n$.

---

2. (2p) Resuelve la recurrencia lineal de segundo orden definida por

$$\begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 4 \cdot (-1)^n \\ a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 16 \end{cases}$$

La ecuación característica asociada a la recurrencia es

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

que tiene una raíz real doble $r = 3$. Por tanto, la solución general de la homogénea puede escribirse en la forma

$$a_n^H = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n$$

Una solución particular de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n^P = A \cdot (-1)^n$$

de donde

$$A \cdot (-1)^{n+2} - 6A \cdot (-1)^{n+1} + 9A \cdot (-1)^n = 4 \cdot (-1)^n \;\Rightarrow\; A + 6A + 9A = 4 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{4}$$

y una solución particular de la recurrencia completa será

$$a_n^P = \frac{1}{4} \cdot (-1)^n$$

Por tanto, podemos concluir que la solución general de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{lcl} \text{para } n=1 \ ; \ a_1 &=& 3C_1 + 3C_2 - \frac{1}{4} = 2 \\ \text{para } n=2 \ ; \ a_2 &=& 9C_1 + 18C_2 + \frac{1}{4} = 16 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = -\frac{1}{4}$ y $C_2 = 1$. De aquí:

$$a_n = -\frac{1}{4} \cdot 3^n + n \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n$$

---

3 $_{(1p)}$ Halla k tal que $a_n^p = k \cdot n \cdot 3^n$ sea solución particular de la recurrencia $a_{n+1} = 3a_n + 6 \cdot 3^n$.

Si $a_n^p = k \cdot n \cdot 3^n$ es solución particular de la recurrencia, al sustituir $a_n^p = k \cdot n \cdot 3^n$, $a_{n+1}^p = k \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1}$ y $a_{n+2}^p = k \cdot (n+2) \cdot 3^{n+2}$ en la recurrencia se tendrá

$$\begin{array}{rcl} k \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1} - 3k \cdot n \cdot 3^n &=& 6 \cdot 3^n \Leftrightarrow \\ k \cdot n \cdot 3^{n+1} + k \cdot 3^{n+1} - 3k \cdot n \cdot 3^n &=& 6 \cdot 3^n \Leftrightarrow \\ 3k \cdot 3^n &=& 6 \cdot 3^n \Leftrightarrow 3k = 6 \Leftrightarrow k = 2 \end{array}$$

por lo que $a_n^p = 2 \cdot n \cdot 3^n$ es una solución particular de la recurrencia

$$a_{n+1} = 3a_n + 6 \cdot 3^n$$

---

4. Considera la serie alternada $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{5^n}$:

a)$_{(1p)}$ Justifica detalladamente que cumple las hipótesis del criterio de Leibniz.

b)$_{(2p)}$ Encuentra el valor de n necesario para aproximar la suma de la serie mediante la suma parcial s_n con un error menor que 10^{-4}. Calcula dicha aproximación.

---

a) Se trata de una serie alternada del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ que verifica las hipótesis del criterio de Leibniz, ya que

$$a_n = \frac{n}{5^n} > 0$$

$$\lim_n \frac{n}{5^n} \underset{\text{S-C}}{=} \lim_n \frac{(n+1) - n}{5^{n+1} - 5^n} = \lim_n \frac{1}{5^n(5-1)} = 0$$

y (a_n) es una sucesión decreciente:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{5^n} - \frac{n+1}{5^{n+1}} = \frac{5n - (n+1)}{5^{n+1}} = \frac{4n-1}{5^{n+1}} > 0, \ \forall n \ \Rightarrow \ a_n > a_{n+1} \ , \ \forall n$$

b) Aplicando la cota de error correspondiente,

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{N+1}{5^{N+1}} < 10^{-4} \ \Leftrightarrow \ \frac{5^{N+1}}{N+1} > 10000 \ \Leftrightarrow \ N \geq 6$$

por lo que la aproximación pedida será

$$s_6 = \sum_{n=1}^{6} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{5^n} = \frac{1}{5^1} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \frac{6}{5^6} = 0.138816$$

---

5. Dada la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n \cdot 3^n}$$

a)$_{(0.5p)}$ Obtén la serie de potencias correspondiente a $f'(x)$.

b)$_{(1p)}$ Suma la serie de potencias que define $f'(x)$ donde converja, indicando cuál es su intervalo de convergencia.

c)$_{(0.5p)}$ Integra la expresión obtenida en **b)** para hallar $f(x)$ explícitamente.

---

a) Derivando término a término la serie de potencias

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2n) \cdot x^{2n-1}}{n \cdot 3^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n} \cdot x^{2n-1}$$

b) Se trata de una serie geométrica, de razón $r = \dfrac{x^2}{3}$, que podemos sumar

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n} \cdot x^{2n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{n+1}} \cdot x^{2n+1} = \frac{2x}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^2}{3} \right)^n = \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \dfrac{x^2}{3}\right)} = \frac{2x}{(3 - x^2)}$$

para los valores de x tales que

$$\left| \frac{x^2}{3} \right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x|^2 < 3 \;\Leftrightarrow\; |x| < \sqrt{3} \Leftrightarrow\; x \in \left] -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right[$$

c) Integrando la expresión

$$f'(x) = \frac{2x}{(3 - x^2)}$$

obtenemos

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2x}{(3 - x^2)} dx \;\Rightarrow\; f(x) = -\log(3 - x^2) + C$$

y teniendo en cuenta, a partir de la serie de potencias, que $f(0) = 0$,

$$f(0) = -\log(3) + C \;\Rightarrow\; C = \log(3)$$

de donde

$$f(x) = -\log(3 - x^2) + \log(3) = \log\left(\frac{3}{3 - x^2}\right)$$