Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 3
Robert Fuster

Exercici 3.1. *(Un producte matriu-vector)*

Calculeu el producte $A\vec{b}$, essent $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, (a) element a element i (b) fent combinacions lineals de les columnes de A.

(a)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 5 - 5\cdot 2 \\ 0\cdot 5 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Exercici 3.2. *Siga $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ i $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$. Escriviu el vector $\vec{b} = A\vec{x}$ com a combinació lineal de les columnes de A.*

$$\vec{b} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Exercici 3.3. *Donades les matrius $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, calculeu el producte AB de quatre maneres diferents: (a) fent productes de les files de A per les columnes de B, (b) fent combinacions lineals de les columnes de A, (c) fent combinacions lineals de les files de B i (d) fent productes de les columnes de A per les files de B.*

(a) Fent productes de les files de A per les columnes de B:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 & 3\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Fent combinacions lineals de les columnes de A:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \left[1\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 0\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Fent combinacions lineals de les files de B:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \\ -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) Fent productes de les columnes de A per les files de B:

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercici 3.4. *En cadascun dels casos següents, què podem dir de la matriu* AB*? Justifiqueu les respostes.*

(a) si la primera fila de A *és nul·la*

La primera fila del producte també és nul·la, perquè és la combinació lineal de les files de B amb tots els coeficients escalars iguals a zero.

(b) si la primera fila de A *és* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

La primera fila del producte és igual a la primera fila de B, perquè és la combinació lineal $1\text{fila}_1(\mathsf{B}) + 0\text{fila}_2(\mathsf{B}) + \cdots + 0\text{fila}_n(\mathsf{B})$

(c) si la primera fila de A *és* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

La primera fila del producte és igual a la suma de totes les files de B.

(d) si la primera columna de B *és* $(0, 1, 0, \dots, 0)$

La primera columna del producte és igual a la segona columna de A.

(e) Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

El producte és igual a la matriu B: $\mathsf{AB} = \mathsf{B}$.

(f) Si $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

El producte és igual a la matriu A: $\mathsf{AB} = \mathsf{A}$.

Exercici 3.5. *Donades les matrius*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

calculeu tots els productes que siguen possibles.

Els productes AA, AB, AC, BC, BD, CA, CB, CC, DA, DB i DD no existeixen. La resta de productes són

$$\mathsf{AD} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{BA} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{BB} = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{CD} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{DC} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercici 3.6. *Calculeu totes les potències* A^n, $n \geq 1$ *de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Si calculem A^2 i A^3 obtenim

$$\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Així que sembla que

$$\mathsf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

proveu-ho per inducció.

Exercici 3.7. *Trobeu totes les matrius* B *que commuten amb la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Estracta de trobar les matrius $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ que compleixen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a + b \\ c & c + d \end{bmatrix}$$

Igualant element a element,

$$\left.\begin{array}{rl} a + c &= a \\ b + d &= a + b \\ c &= c \\ d &= c + d \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} c &= 0 \\ d &= a \\ c &= c \\ c &= 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} c &= 0 \\ d &= a \end{array}\right]$$

Així que les matrius que commuten amb A són les que tenen la forma

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Exercici 3.8. *(Producte de matrius i operacions elementals)*

Calculeu els productes següents fent combinacions lineals de les files de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} & 2a_{13} + a_{23} \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

(c) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

La matriu que hem obtingut en el primer apartat és el resultat de sumar-li, a la segona fila de A, el doble de la primera fila; en l'apartat segon, hem permutat les dues files de la matriu A; en el tercer, hem multiplicat per 2 la primera fila.

Exercici 3.9. *(Matrius inverses i determinants)*

Calculeu el producte AB *essent*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El nombre $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ és el determinant de A.

Exercici 3.10. *(Matrius transposades, matrius simètriques i matrius ortogonals)*

La transposada de la matriu A *és la matriu* A^t *les files de la qual són les columnes de la matriu* A *(la primera fila de* A^t *és igual a la primera columna de* A*, la segona fila de* A^t *és igual a la segona columna de* A*, etc.).*

(a) Quina són les matrius transposades de les matrius següents?

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathsf{D}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \mathsf{D}$$

Es diu que la matriu A *és simètrica si és igual a la seua matriu transposada.*

(b) *Quines de les matrius de l'apartat anterior són simètriques?*

Només és simètrica la matriu D.

Es diu que la matriu real quadrada A *és ortogonal si les seues columnes formen un conjunt de vectors ortonormal.*

(c) *Proveu que la matriu* $\mathsf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *és ortogonal.*

Si fem els productes escalars de les columnes d'aquesta matriu trobem

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = 1$$
$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 = 0$$

així que el conjunt $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ és ortonormal.

(d) *Si la matriu* A *és ortogonal, què podem dir del producte* $\mathsf{A}^t\mathsf{A}$*?*

Com que les entrades de la matriu producte són els productes de les files de A^t per les columnes de A i les files de A^t coincideixen amb les columnes de A, tindrem

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}^t\mathsf{A} &= \begin{bmatrix} \vec{a}_1^t \\ \vec{a}_2^t \\ \dots \\ \vec{a}_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vec{a}_1^t\vec{a}_1 & \vec{a}_1^t\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_1^t\vec{a}_n \\ \vec{a}_2^t\vec{a}_1 & \vec{a}_2^t\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_2^t\vec{a}_n \\ \dots \\ \vec{a}_n^t\vec{a}_1 & \vec{a}_n^t\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n^t\vec{a}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n \\ \dots \\ \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$