DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Primer parcial **9-11-2015** **Duración: 2 horas**

---

1. (2p) Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\log(3 - |x^2 - 1|)}$$

Para resolver este ejercicio tenemos que tener en cuenta 2 factores:

a) En el denominador tenemos un logaritmo por lo tanto como el dominio de la función logaritmo son $x \in]0, +\infty[$, entonces tenemos que exigir que

$$(3 - |x^2 - 1|) > 0$$

b) Por otra parte, este logaritmo está en el denominador por lo que tenemos que excluir del dominio los puntos donde:

$$\log(3 - |x^2 - 1|) = 0.$$

Vamos a analizar las condiciones a) y b) por separado:

a)

$$(3 - |x^2 - 1|) > 0 \;\leftrightarrow 3 > |x^2 - 1| \;\leftrightarrow\; -3 < x^2 - 1 < 3 \;\leftrightarrow -3 + 1 < x^2 < 3 + 1 \;\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow -2 < x^2 < 4$$

Este resultado nos proporciona dos condiciones que se tienen que cumplir a la vez:

a.1) $-2 < x^2$ se cumple siempre puesto que x^2 es positivo.

a.2) $x^2 < 4$

$$x^2 < 4 \leftrightarrow \; x \; \in]-2, 2[.$$

Por lo tanto:

$$Dom\left(\log(3 - |x^2 - 1|)\right) = \{ \;\; x \in \mathbb{R} \mid \;\; x \; \in]-2, 2[\;\; \}$$

b) Ahora vamos a calcular los puntos donde el logaritmo se hace cero para excluirlos del dominio:

$$\log(3 - |x^2 - 1|) = 0 \leftrightarrow 3 - |x^2 - 1| = 1 \leftrightarrow 2 = |x^2 - 1| \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \;\; \{2 = x^2 - 1 \;\; \acute{o} \;\; -2 = x^2 - 1\}$$

Esto lleva a:

b.1)

$$x^2 = 3 \;\leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{3}$$

b.2)

$$x^2 = -1$$

que no tiene solución en $\mathbb{R}$ por lo que solo tenemos que excluir del dominio los dos puntos anteriores.

Entonces la solución final es la solución del apartado **a)** donde excluimos $x = \pm\sqrt{3}$.

$$x \; \in]-2, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2[$$

2. Sea la función:

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$$

a) (2p) Encontrar los valores de los parámetros α y β para que la función anterior tenga en $x = -1$ y $x = 2$ sus extremos relativos. Calcula de forma explícita las coordenadas de los extremos relativos obtenidos, indicando además cuál es el máximo y cuál es el mínimo. Esboza una gráfica de la función.

b) (1p) Para $\alpha = 0$ y $\beta = -1$ calcula el área encerrada entre la función y el eje OX.

---

a) Primero vamos a calcular la derivada primera para estudiar los candidatos a extremos relativos de la función:

$$\frac{df(x)}{dx} = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x)' = 3x^2 \;\; + 2\;\alpha x + \beta$$

Ahora imponemos la condición de que la derivada primera sea cero en los puntos $x = -1$ y $x = 2$:

$$\begin{array}{lcccccc} f'(-1) & = & 3(-1)^2 + 2\alpha(-1) + \beta & = & 3 - 2\alpha + \beta & = & 0 \\ f'(2) & = & 3(2)^2 + 2\alpha(2) + \beta & = & 12 + 4\alpha + \beta & = & 0 \end{array}$$

Ahora resolvemos el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas para encontrar los valores de α y β.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3 - 2\alpha + \beta & = & 0 \\ 12 + 4\alpha + \beta & = & 0 \end{array} \right.$$

restando ambas ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3 & -2\alpha & +\beta & = & 0 \\ -12 & -4\alpha & -\beta & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccc} -9 & -6\alpha & & = & 0 \end{array}$$

$$-9 - 6\alpha = 0 \;\leftrightarrow\; \alpha = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$$

despejamos β en la primera ecuación y sustituimos el valor obtenido de α

$$3 - 2\alpha + \beta = 0; \quad \beta = 2\alpha - 3 = 2\left(\frac{-3}{2}\right) - 3 = -6$$

por lo tanto

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

Para ver si son máximos o mínimos utilizamos la derivada segunda:

$$f"(x) = (3x^2 - 3x - 6)' = 6x - 3$$

$f"(-1) = 6(-1) - 3 = -9$, por lo tanto en $x = -1$ tenemos un máximo.

$f"(2) = 6(2) - 3 = 9$, por lo tanto en $x = 2$ tenemos un mínimo.

Las coordenadas del máximo son:

$$(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{7}{2}\right)$$

Las coordenadas del mínimo son:

$$(2, f(2)) = (2, -10)$$

Para hacer el esbozo de la gráfica vamos a calcular los puntos de corte con el eje OX. Para ello factorizamos el polinomio de tercer grado utilizando que $x = 0$ es una raiz:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x = x(x^2 - \frac{3}{2}x - 6)$$

resolvemos la ecuación $x^2 - \frac{3}{2}x - 6 = 0$

$$x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{4}$$

por lo tanto tenemos que la gráfica cruza tres veces el eje OX en $x = \frac{3-\sqrt{105}}{4} \simeq -1.8$, $x = 0$ y $x = \frac{3+\sqrt{105}}{4} \simeq 3.3$. Tiene un máximo local en $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ y un mínimo local en $(2, -10)$, por lo que un esbozo de la gráfica sería:

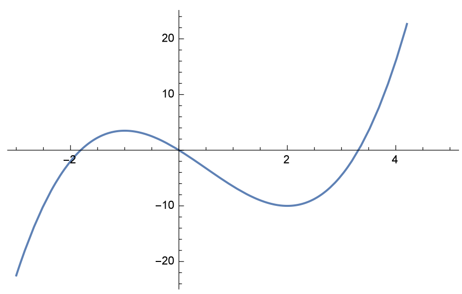

Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$.

b) Para $\alpha = 0$ y $\beta = -1$ la curva anterior queda:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se trata de una función impar, por lo tanto sabemos que pasa por el punto $(0, 0)$. Vamos a ver el resto de los cortes con los ejes para poder situar las posibles partes negativas y positivas del área:

$$f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$$

esta función se hace cero en $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Saber el signo de la función, y por lo tanto el signo del área en cada uno de los intervalos, es muy sencillo puesto que se trata de una función continua. Solo tendremos que calcular el signo de la función en un punto interior de uno de los intervalos $]-1, 0[$ ó $]0, 1[$. Por ejemplo: $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ es positivo, por simetría impar sabemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$. La gráfica de la función será:

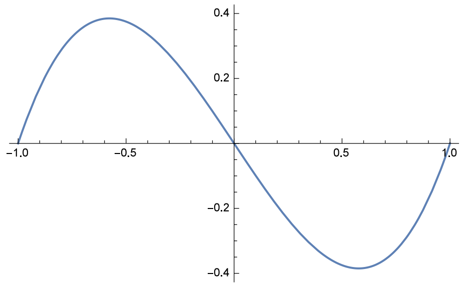

Figura 2: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$.

Por lo que el área es:

$$A = 2 \int_{-1}^{0} (\ x^3 \ - \ x\ )\ dx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ \ u.a.$$

---

3. (2 p) Calcula el valor exacto de la integral:

$$\int_1^{e^2} \frac{\log \ x}{x^2} dx$$

Esta integral se puede hacer utilizando diversos métodos como cambio de variables o por partes. Nosotros vamos a utilizar el método de integración por partes tomando:

$u = \log x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$

$dv = \frac{1}{x^2} dx \quad \rightarrow \quad v = \int dv = \int x^{-2} dx = \frac{-1}{x}$

Ahora utilizamos la fórmula de integración por partes:

$$\int_a^b u\ dv \ = \ u\ v\ \Big]_a^b - \int_a^b v\ du$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\log x}{x^2} dx = -\frac{\log x}{x} \Bigg]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x} dx =$$

$$= \frac{-\log e^2}{e^2} - \cancelto{0}{\frac{-\log 1}{1}} + \frac{-1}{x}\Bigg]_1^{e^2} = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{1} = -\frac{3}{e^2} + 1$$

---

4. **a)** (0.5p) Calcula el valor exacto de la integral:

$$\int_1^3 \frac{2x}{x^2+3} dx$$

b) (1p) Aproxima la integral anterior mediante el método de Simpson dividiendo el intervalo de integración en 4 subintervalos iguales.

c) (0.5p) Acota el error cometido mediante la aproximación anterior utilizando como dato la cota $M_4 = \frac{3}{4}$.

d) (1p) Si utilizamos la fórmula de los trapecios, ¿cuál sería el mínimo número de subdivisiones necesario para garantizar una cota de error menor o igual que la calculada en el apartado c)? Utiliza como dato el valor de la cota $M_2 = \frac{1}{2}$.

---

a) La integral $\int_1^3 \frac{2x}{x^2+3} dx$ puede considerarse inmediata puesto que en el numerador tenemos la derivada del denominador.

$$\int_1^3 \frac{2x}{x^2+3}\, dx \;=\; \log(x^2+3)\big]_1^3 \;=\; \log 12 \;-\; \log 4 \;=\; \log\frac{12}{4} = \log 3$$

Si no lo ves así puedes hacer el cambio de variable:

$$t \;=\; x^2 \;+\; 3 \;\to\; dt \;=\; 2x\; dx,$$

obtendrás el mismo resultado.

b) Calculamos primero el valor de h con $n = 4$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

Ahora podemos calcular la partición del intervalo:

$$P \;=\; \{\; 1,\; 1.5,\; 2,\; 2.5,\; 3\; \}$$

La fórmula de Simpson para $n = 4$ es:

$$S_4 f = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{1} f(a+(2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{1} f(a+2kh) + f(b) \right)$$

Por tanto:

$$S_4 f = \frac{0.5}{3}\left(\frac{2\cdot 1}{1^2+3} \;+\; 4\;\left(\frac{2\cdot 1.5}{1.5^2+3} \;+\; \frac{2\cdot 2.5}{2.5^2+3} \right) \;+\; 2\;\left(\frac{2\cdot 2}{2^2+3} \right) + \frac{2\cdot 3}{3^2+3} \right) = \frac{569}{518} \simeq 1.09846$$

c)

$$\text{Cota de error: } E_n = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4 \;;\; \text{ con } \;M_4 = \frac{3}{4}$$

En nuestro caso:

$$E_4 = \frac{(3-1)^5}{180\cdot 4^4}\frac{3}{4} = \frac{1}{1920} \simeq 0.0005$$

d)

$$\text{Cota de error: } E_n = \frac{(b-a)^3}{12 n^2} M_2 \;;\; \text{ con } \;M_2 = \frac{1}{2}$$

En nuestro caso:

$$E_n = \frac{(b-a)^3}{12 n^2} M_2 = \frac{2^3}{12 n^2}\frac{1}{2} = \frac{1}{3n^2}$$

Le imponemos la condición de que sea menor o igual que el error calculado en el apartado anterior y despejamos n

$$\frac{1}{3n^2} \le 0.0005 \;\leftrightarrow\; \frac{1}{3\cdot 0.0005} \le n^2 \;\leftrightarrow\; \sqrt{\frac{1}{3\cdot 0.0005}} \le n \leftrightarrow\; 25.8199 \le n \leftrightarrow\; 26 \le n$$

Necesitaríamos al menos 26 subintervalos.