Una condición de no regularidad

U.D. Computación

DSIC - UPV

2017-18

Índice

- Definiciones
- Una condición de no regularidad
- Teorema de Nerode

Definiciones

- Dado un AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, se define el *lenguaje por la derecha* de $q \in Q$ como:

$$R_q = \{x \in \Sigma^* \ : \ \delta(q, x) \in F\}$$

- Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ y un AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L(A) = L$, se dice que A es *reducido* si para todo $p, q \in Q$ tales que $p \neq q$ se cumple que $R_p \neq R_q$

Definiciones

- Una relación R sobre A es una *relación de equivalencia* si:
  1. $\forall x \in A\ (xRx)$ (reflexiva).
  2. $\forall x, y \in A\ (xRy \Rightarrow yRx)$ (simétrica).
  3. $\forall x, y, z \in A\ (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$ (transitiva).
- Dada una relación de equivalencia R sobre A y dado un elemento $x \in A$, el conjunto $\{y \in A | xRy\}$ se dice *clase de equivalencia* de x y se representa por $[x]_R$.
- Dados A y R, el conjunto cuyos elementos son las diferentes clases de equivalencia de R se llama *conjunto cociente* de A por R y se representa por A/R.
- El cardinal de A/R se llama *índice* de la relación de equivalencia R. El índice es un entero positivo o infinito.

Definiciones

L'equivalència de Nerode

Dado $L \subseteq \Sigma^*$, se define la *equivalencia de Nerode* R_L como:

$$x \equiv_{R_L} y \Longleftrightarrow x^{-1}L = y^{-1}L$$

Se conoce también como la *relación de equivalencia de los buenos finales* inducida por L en Σ^*

Definiciones

Ejemplo de obtención de las clases de equivalencia de R_L

Sea $L = \{x \in \{a, b\}^* : |x|_b \leq 1\}$

Definiciones

Ejemplo de obtención de las clases de equivalencia de R_L

Sea $L = \{x \in \{a,b\}^* : |x|_b \leq 1\}$

- Clase de λ: palabras que no contienen ninguna b,
  $[\lambda]_{R_L} = \{a\}^*$ Buenos finales: $\{a\}^* \cup \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$

Definiciones

Ejemplo de obtención de las clases de equivalencia de R_L

Siga $L = \{x \in \{a, b\}^* : |x|_b \leq 1\}$

- Clase de λ: palabras que no contienen ninguna b,
  $[\lambda]_{R_L} = \{a\}^*$ Buenos finales: $\{a\}^* \cup \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$
- Clase de b: palabras que contienen una b,
  $[b]_{R_L} = \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$ Buenos finales: $\{a\}^*$

Definiciones

Ejemplo de obtención de las clases de equivalencia de R_L

Siga $L = \{x \in \{a, b\}^* : |x|_b \leq 1\}$

- Clase de λ: palabras que no contienen ninguna b,
  $[\lambda]_{R_L} = \{a\}^*$ Buenos finales: $\{a\}^* \cup \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$
- Clase de b: palabras que contienen una b,
  $[b]_{R_L} = \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$ Buenos finales: $\{a\}^*$
- Clase de bb: palabras que contienen como mínimo dos b,
  $[bb]_{R_L} = \{a\}^*\{b\}\{a\}^*\{b\}\{a, b\}^*$ Buenos finales: $\emptyset$

Una Condición de no regularidad (1/2)

- Si existe una secuencia infinita $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de palabras sobre Σ tales que $\forall i, j,\ i \neq j$ se cumple que:

$$\exists z \in \Sigma^* \ : \ x_i z \in L \textit{ sii } x_j z \notin L$$

entonces L no es regular
demostración:

  - Supongamos que L es regular y sea A un AFD reducido que acepta L.
  - Para todo $i \neq j$, el lenguaje por la derecha del estado $\delta(q_0, x_i)$ es distinto al lenguaje por la derecha del estado $\delta(q_0, x_j)$
  - Por lo tanto, de cumplirse la condición, A tendría infinitos estados

Una Condición de no regularidad (2/2)

- R_L es de índice infinito si y solo si existe una secuencia infinita $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de palabras sobre Σ tales que $\forall i, j,\ i \neq j$, se cumple que $\exists z \in \Sigma^* \ : \ x_i z \in L \ sii \ x_j z \notin L$
- Por el resultado anterior, esta condición de no regularidad, se puede expresar como:

Una Condición de no regularidad (2/2)

- R_L es de índice infinito si y solo si existe una secuencia infinita $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de palabras sobre Σ tales que $\forall i, j,\ i \neq j$, se cumple que $\exists z \in \Sigma^* \ :\ x_i z \in L \textit{ sii } x_j z \notin L$
- Por el resultado anterior, esta condición de no regularidad, se puede expresar como:

  Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, si R_L es de índice infinito, entonces L no es regular

Teorema de Nerode

- Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, el lenguaje L es regular si y solo si L es de índice finito

  demostración

  1. Por la condición de no regularidad, se tiene que si L es regular, entonces R_L es de índice finito
  2. Supongamos que R_L es de índice finito, puede verse que L es regular dando un algoritmo de construcción de un AF que acepta L a partir de las clases de R_L:
     $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:
     - $Q = \{[u]_{R_L} | u \in \Sigma^*\} = \Sigma^*/R_L$,
     - $q_0 = [\lambda]_{R_L}$,
     - $F = \{[u]_{R_L} | u \in L\} = L/R_L$,
     - $\forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma, \delta([u]_{R_L}, a) = [ua]_{R_L}$.