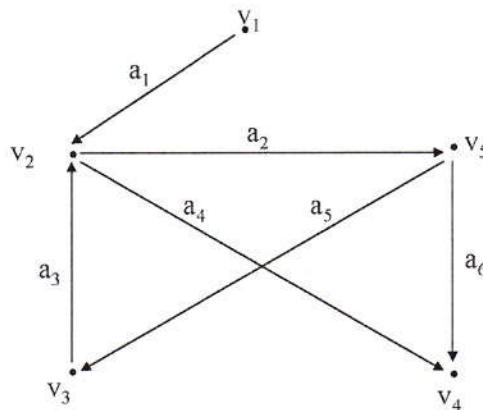


Prácticas de Matemática Discreta

Problemas sesión 8 (Grafos dirigidos)

1. Sea G el grafo de la figura



- Obtén las matrices de adyacencia e incidencia del grafo G .
- Determina los grados de entrada y salida de todos sus vértices y encuentra los vértices pozo y los vértices fuente.
- Determina si el grafo es débilmente conexo o fuertemente conexo.
- Calcula las componentes fuertemente conexas de G .

a)

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz de adyacencia

$$M_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz de incidencia

b)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
\deg^+	1	2	1	0	2
\deg^-	0	2	1	2	1

pozo : v_4 fuente : v_1

c) El grafo es débilmente conexo porque su grafo subyacente es conexo.

El grafo no es fuertemente conexo. Por ejemplo, v_1 no es accesible desde v_2 .

d) Hay 3 componentes fuertemente conexas :

$$CF_1 = \{v_1\} \quad CF_2 = \{v_2, v_3, v_5\} \quad CF_3 = \{v_4\}$$

2. Decide, en cada caso, si las listas que se muestran pueden corresponder a los grados de entrada y de salida de un grafo dirigido de 5 vértices. En caso afirmativo, muestra un ejemplo.

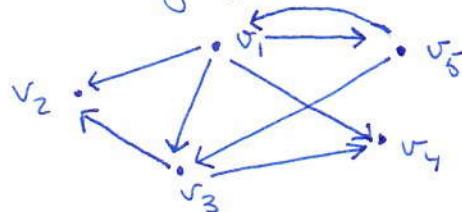
a) $\deg^+(v_1) = 4, \deg^+(v_2) = 0, \deg^+(v_3) = 2, \deg^+(v_4) = 0, \deg^+(v_5) = 2$
 $\deg^-(v_1) = 1, \deg^-(v_2) = 2, \deg^-(v_3) = 2, \deg^-(v_4) = 2, \deg^-(v_5) = 3$

b) $\deg^+(v_1) = 4, \deg^+(v_2) = 0, \deg^+(v_3) = 2, \deg^+(v_4) = 0, \deg^+(v_5) = 2$
 $\deg^-(v_1) = 1, \deg^-(v_2) = 2, \deg^-(v_3) = 2, \deg^-(v_4) = 2, \deg^-(v_5) = 1$

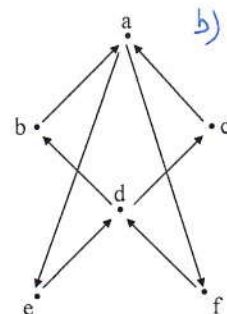
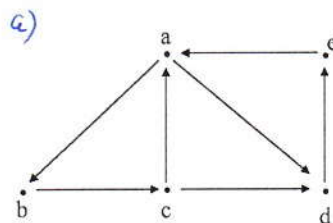
a) No hay un grafo dirigido con esa lista de grados ya que $\sum_{i=1}^5 \deg^+(v_i) = 8$ y $\sum_{i=1}^5 \deg^-(v_i) = 10$

b) Comprobamos en primer lugar que $\sum_{i=1}^5 \deg^+(v_i) = \sum_{i=1}^5 \deg^-(v_i) = 8$

Dibujamos un grafo con esas listas de grados :



3. Justifica teóricamente si los siguientes grafos son eulerianos o si tienen algún camino euleriano abierto. En caso afirmativo, encuentra dichos caminos.



a) Es un grafo débilmente conexo y además se cumple que :

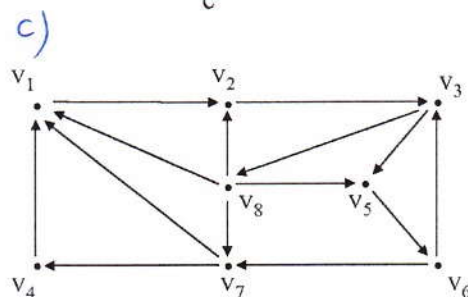
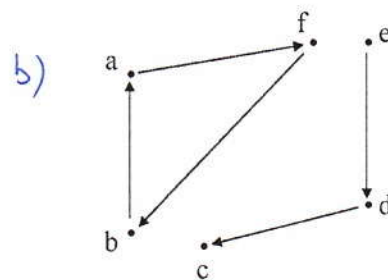
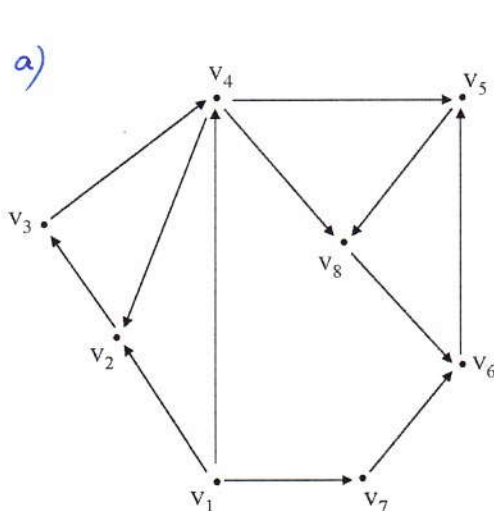
$$\deg^+(a) = \deg^-(a) = 2, \deg^+(b) = \deg^-(b) = 1, \deg^+(e) = \deg^-(e) = 1,$$

$$\deg^+(c) = \deg^-(c) + 1 \text{ y } \deg^+(d) = \deg^-(d) - 1. \text{ Por tanto,}$$

tiene un camino euleriano abierto desde c hasta d.

CAMINO EULERIANO ABIERTO : $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow d$

4. Calcula las componentes débilmente conexas y fuertemente conexas de cada uno de los siguientes grafos



- a) Es débilmente conexo, su única componente débilmente conexa es $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$
 No es fuertemente conexo, tiene 4 componentes fuertemente conexas : $CF_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $CF_2 = \{v_1\}$, $CF_3 = \{v_5, v_6, v_8\}$ y $CF_4 = \{v_7\}$
- b) No es débilmente conexo, tiene 2 componentes débilmente conexas : $CD_1 = \{a, b, f\}$ $CD_2 = \{c, d, e\}$
 No es fuertemente conexo tiene 4 comp. fuertemente conexas.
 $CF_1 = \{a, b, f\}$, $CF_2 = \{c\}$, $CF_3 = \{d\}$ y $CF_4 = \{e\}$
- c) Es débilmente conexo y fuertemente conexo, por tanto
 $CF = CD = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$