EJERCICIOS DE REPASO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 4

1. Un laboratorio afirma que un medicamento causa efectos secundarios en 5 de cada 100 pacientes. Si hay un grupo de 10 personas tomando este medicamento:

a) ¿Cuál es la probabilidad de sufran efectos secundarios al menos dos de ellos?

X=nº de personas que sufren efectos secundarios en un grupo de 10
X seguirá una distribución Binomial de parámetros n=10 y p=0,05.

$P(X\geq 2)=1-P(X\leq 1)=1-P(B(10{,}0{,}05)\leq 1)=1-\binom{10}{0}0{,}05^{0}0{,}95^{10}-\binom{10}{1}0{,}05^{1}0{,}95^{9}=$

$=1-0{,}9139=0{,}0861\Rightarrow 8{,}61\%$

b) ¿Y la probabilidad de que no sufra efectos secundarios ninguno?

$P(X=0)=P(B(10{,}0{,}05)=0)=\binom{10}{0}0{,}05^{0}0{,}95^{10}=0{,}5987\Rightarrow 59{,}87\%$

2. El número medio de libros relacionados con la asignatura Estadística que presta en un día una biblioteca de informática de una determinada universidad es constante e igual a 4.

a) ¿Cuál será la probabilidad de que en esta biblioteca hoy se presten exactamente 4 libros relacionados con Estadística?

X=nº de libros relacionados con la asignatura Estadística prestados diariamente
X sigue distribución de Poisson de parámetro $\lambda=4$

$P(X=4)=P(\text{Poisson}(\lambda=4)=4)=e^{-4}\frac{4^4}{4!}=0{,}1954\Rightarrow 19{,}54\%$

b) ¿Y la probabilidad de que en este mes de septiembre se presten como máximo 120 libros relacionados con Estadística en la misma biblioteca?

El mes de septiembre tiene 30 días. Sea Y el número de libros prestados en dicho mes. Por ser la suma de variables de Poisson que se suponen independientes, Y seguirá también distribución de Poisson de parámetro $\lambda_Y=4 \times 30=120$. Como la media es mucho mayor que 9, Y se puede aproximar a la distribución normal, de la forma:

$P(Y\leq 120)\approx P(N(0,1)<\frac{120.5-120}{\sqrt{120}})=P(N(0,1)<0{,}04)=1-P(N(0,1)>0{,}04)=$
$=1-0{,}4840=0{,}516\Rightarrow 51{,}6\%$

3. El número de descargas de un archivo de la asignatura Estadística que está colgado en la plataforma PoliformaT sigue una media de 25 descargas por semana.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana haya más de 10 descargas de dicho archivo?

X = nº de descargas semanales del archivo
$X \approx$ Poisson ($\lambda = 25$)
$P(X > 10) = 1 – P(X \leq 10) = 1 – 0{,}0005 = 0{,}9995$ (mirando en el ábaco)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana haya 20 descargas del archivo?

$P(X = 20) = e^{-25} \cdot 25^{20} / 20! = 0{,}0519$

c) Si consideramos 4 semanas, ¿cuál es la probabilidad de que en 2 de ellas hayan más de 10 descargas del archivo?

Y = nº de semanas de las 4 consideradas en las que hay más de 10 descargas del archivo
$Y \approx$ Binomial ($n = 4$, $p = 0{,}9995$)
$P(Y = 2) = \binom{4}{2} 0{,}9995^2 \cdot 0{,}0005^2 = 0{,}0000014985$

4. En un departamento en el que se producen dispositivos MP4 se quiere realizar un plan de inspección para comprobar la calidad de dichos dispositivos. Para ello, de cada lote se extraen *N* unidades aleatoriamente y se rechaza el lote si se encuentra más de un MP4 defectuoso.

¿Cuál debe ser el mínimo valor de *N* para que la probabilidad de aceptar un lote con una proporción de dispositivos defectuosos mayor que 10% sea menor del 2%?

SOLUCIÓN:

Mirando en el ábaco de Poisson para un valor de la ordenada < 0,02, lambda toma el valor >6, aproximadamente.
Así, $N > 6/0{,}10 = 60$. Como mínimo $N=61$

5. En un sistema, la vida de un determinado virus informático sigue una distribución exponencial con mediana 60 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho virus permanezca en el sistema más de 70 horas?

X = tiempo de vida de un determinado virus informático
$X \approx$ Exp (α)

Mediana = 60 h $\rightarrow$ P(X > 60) = 0,5 $\rightarrow$ $e^{-\alpha\cdot 60} = 0,5$ $\rightarrow$ $-\alpha \cdot 60 = \ln 0,5$
$\rightarrow$ $\alpha = -(\ln 0,5)/60$ $\rightarrow$ $\alpha = 0,01155$

Así:
$P(X > 70) = e^{-0,01155 \cdot 70} = 0,4455$

b) Si sabemos que el virus ya está residente en el sistema 50 horas, ¿cuál es la probabilidad de que supere las 60 horas?

Como la distribución exponencial no tiene memoria:
$P(X > 60 \mid X > 50) = P(X > 10) = e^{-0,01155 \cdot 10} = 0,8909$

6. La duración de un determinado componente electrónico sigue una distribución exponencial de media 100 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un determinado componente tenga una duración superior a 120 horas?

Variable X= duración de un componente
$m=100=1/\alpha$
$P(X>120)=e^{-120/100}=0,3012$

b) Tenemos un dispositivo que dispone de 10 componentes de este tipo. El dispositivo está montado de manera que comienza a funcionar un componente hasta que se estropea y en ese preciso instante se pone a funcionar automáticamente el siguiente componente, y así sucesivamente hasta que se estropean los diez, en este momento el dispositivo deja de funcionar.¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que el dispositivo dure más de 1700 horas?

v.a. X_i = {duración del componente i (horas)} ~ EXP(α)

$m = E(X_i) = \frac{1}{\alpha} = 100 \text{ h}$ $\qquad$ $\sigma^2(X_i) = \frac{1}{\alpha^2} = 100^2 \text{ h}^2$

v.a. Y = {duración de 10 componentes (horas)} ~ **?** *(*)*
(*) Por el Teorema Central del Límite: la suma de suficientes v.a. INDEPENDIENTES tiende a distribuirse siguiendo el modelo NORMAL.

$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \quad X_i$ independiente de $X_j \ \forall i \neq j$

$m_Y = E(Y) = 10 \times 100 = 1000 \text{ h}$ La media de una suma de v.a. es la suma de sus medias

$\sigma^2(Y) = 10 \times 100^2 = 10^5 \text{ h}^2$ La varianza de una suma de v.a. INDEPENDIENTES es la suma de sus varianzas.

Por tanto:
v.a. Y = {duración de 10 componentes (horas)} ~ $N(m=10^3, \sigma^2=10^5)$

$$\boxed{P(Y > 1700)} = P\left(N(0,1) > \frac{1700 - 10^3}{\sqrt{10^5}}\right) = P(N(0,1) > 2,21) = 0,0136 \cong \boxed{0,014}$$

7. El tiempo de grabación de fichero fluctúa uniformemente entre 5 y 11 minutos. Disponemos de un tiempo máximo de grabación de 2 horas y media. Si consideramos la grabación consecutiva de 20 ficheros de este tipo, ¿qué porcentaje de las veces surgirán problemas por superar el tiempo máximo de grabación?

X = tiempo en minutos de grabación de un fichero
$X \approx$ Uniforme (5,11), por lo que $E(X) = 8$ min y $\sigma^2(X) = (11-5)^2 / 12 = 3$ min^2
Sea Y = tiempo en minutos de grabación consecutiva de 20 ficheros
$Y = X_1 + ... + X_{20}$
$E(Y) = 20 \cdot 8 = 160$ min y $\sigma^2(Y)= 20 \cdot 3 = 60$ min^2
$Y \approx N$ ($m = 160$, $\sigma^2 = 60$),
El tiempo máximo de grabación son 2 h y media, es decir, 150 minutos, por lo que nos piden $P(Y > 150)$
$P(Y > 150) = P(N(0,1) > (150 - 160) / \sqrt{60}\ ) = P(N(0,1) > -1,29) = 1–P(N(0,1) < -1,29)=$
$= 1 – 0,0985 = 0,9015$

8. La velocidad del viento en una zona con molinos de viento para la producción de energía, se distribuye normalmente con media 50 km/h y desviación típica 15 km/h.

La velocidad máxima del viento, soportada por los motores generadores de electricidad, conectados a las aspas de los molinos, fluctúa normalmente con media 70 km/h y desviación típica de 5km/h.
A la vista de estos datos. ¿Cuál es la probabilidad de que el motor no soporte la velocidad del viento, y si no se desengancha previamente de las aspas, se queme?

SOLUCIÓN:

V = {Velocidad del viento}
S = {Velocidad máxima del viento soportada por el motor generador de electricidad}
$V \sim N(50, 15)$
$S \sim N(70, 5)$

El motor se quema si: $V > S$
Sea $R = V – S$ por lo tanto se quemará cuando $R> 0$
R ~ N(50-70=-20, sqrt(15^2+5^2)=15,81)
$P (R > 0) = P(Z > (0 – (-20))/15,81) = P(Z>1.27) = 0,1020$

9. Un PC tiene una CPU que soporta una temperatura operativa máxima[1] (TM) que fluctúa normalmente con media 70ºC y σ = 1ºC. Se sabe que la temperatura operativa óptima[2] (TO) también sigue una distribución normal con σ = 2ºC
Calcular la TO media de modo que, trabajando el PC 24 h al día durante largos periodos de tiempo, la probabilidad de superar la TM sea inferior al 1%.

NOTA:
[1] Temperatura máxima a la que puede trabajar la CPU sin producir daños en el sistema.
[2] Temperatura de trabajo de la CPU (incluidos o no disipadores, ventiladores u otros componentes).

SOLUCIÓN:

Variables aletorias.:
TM = {temperatura operativa máxima (ºC)} ~ Normal (m_{TM} = 70ºC, σ_{TM} = 1ºC)
TO = {temperatura operativa óptima (ºC)} ~ Normal (m_{TM} = **?** ºC, σ_{TM} = 2ºC)

P(TO > TM) < 0,01 → Si TO > TM → (TO – TM > 0) ó (TM – TO < 0)

Variable aleatoria D = {Diferencia temperaturas: TO - TM (ºC)} ~ **?** *(*)*
(*) La suma de v.a. normales es otra v.a. Normal

$m_D = m_{TO} - 70$ *(**)*

TO y TM se suponen independientes →

$$\sigma_D^2 = \sigma_{TM}^2 + \sigma_{TO}^2 = 1^2 + 2^2 = 5\ ^{o}C \quad (***)$$

(**) La media de una resta de v.a. es la resta de sus medias
(***)La varianza de una resta de v.a. INDEPENDIENTES es la suma de sus varianzas.

D = {Diferencia temperaturas: TO - TM (ºC)} ~Normal(media=m_{TO}-70, varianza=5ºC)

P(D>0)= $P(N(0,1) > \frac{0-(m_{TO}-70)}{\sqrt{5}})$ <0,01⇒ $\frac{70-m_{TO}}{\sqrt{5}}$ >2,33⇒m_{TO}<64,79

Tabla Normal

10. Un montacargas se utiliza para transportar paquetes cuyo peso fluctúa normalmente con media 200 Kg. Se sabe que el 30,5 % de los paquetes supera los 210 Kg.
¿Qué probabilidad existe de que al tomar un paquete al azar su peso no supere los 195Kg?

SOLUCIÓN:

P(peso > 210)=0,305 ⇒ P(N(0,1)> $\frac{210-200}{\sigma}$)=0,305 ⇒ $\frac{10}{\sigma}$=0,51⇒ σ=19,6

P(peso < 195)=P(N(0,1)< $\frac{195-200}{19,6}$) = P(N(0,1)<-0,25)=0,4013

11. Calcular aproximadamente la probabilidad de sacar más de 80 puntos al lanzar 20 dados.

SOLUCIÓN:

Sea X_i el número de puntos al lanzar el dado i. Se tiene:

$E(X_i)=1(1/6)+2(1/6)+\ldots+6(1/6)=3{,}5$

$\sigma^2(X_i)=(1-3{,}5)^2(1/6)+(2-3{,}5)^2(1/6)+\ldots+(6-3{,}5)^2(1/6)=2{,}92$

Total puntos $Y=X_1+\ldots+X_{20} \Rightarrow Y\approx$Normal $m_y=20\text{x}3{,}5=70$ y $\sigma_Y=\sqrt{20\text{x}2{,}92}=7{,}64$

$$P(Y>80)\approx P(N(70,7{,}64)>80{,}5)=P(N(0,1)>\frac{80{,}5-70}{7{,}64})=P(N(0,1)>1{,}37)=0{,}0853$$