Razonamiento Probabilístico

Alfons Juan
Albert Sanchis
Jorge Civera

Departamento de Sistemas
Informáticos y Computación

Objetivos formativos

- Representar el conocimiento en términos probabilísticos
- Inferir nuevo conocimiento probabilístico mediante aplicación de las reglas suma y producto del cálculo de probabilidades
- Aplicar los conceptos de variables independientes, variable continua y teorema de Bayes a la representación e inferencia de conocimiento probabilístico

Índice

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

1. Introducción

Considérese la acción y pregunta siguientes:

$$A_t = \text{SALIR AL AEROPUERTO } t \text{ MINUTOS ANTES DEL VUELO}$$

¿ME PERMITE A_{90} LLEGAR A TIEMPO?

Es difícil decidir a partir de una respuesta del tipo:

A_{90} ME PERMITE LLEGAR A TIEMPO
SI NO HAY ATASCOS Y NO HAY PINCHAZOS Y . . .
MUCHAS OTRAS CONDICIONES DIFÍCILES DE GARANTIZAR

Es más fácil decidir a partir de una respuesta probabilística:

$$P(A_{90} \text{ ME PERMITE LLEGAR A TIEMPO}) = 0.9999$$

2. Representación probabilística

El conocimiento se representa mediante la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de interés.

Ejemplo del dentista: conocimiento para diagnosticar caries

Variables aleatorias de interés:

$$\begin{aligned} Dolor: &\quad D \in \{0,1\} \\ Caries: &\quad C \in \{0,1\} \\ Hueco: &\quad H \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Representación:

$$P(D = d, C = c, H = h)$$

d	c	h	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108
Suma:			1.000

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

3. Inferencia probabilística

A partir de la distribución conjunta podemos calcular la probabilidad de cualquier *suceso* (*proposición*) mediante aplicación de:

La regla suma:

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

La regla producto:

$$P(x, y) = P(x)\, P(y \mid x)$$

Inferencia probabilística: ejemplo del dentista

Probabilidad de observar caries y hueco (a la vez):

$$P(c = 1, h = 1) = \sum_{d=0,1} P(d, c = 1, h = 1) = 0.180$$

d	c	h	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108

Probabilidad de observar hueco:

$$P(h = 1) = \sum_{d=0,1} \sum_{c=0,1} P(d, c, h = 1) = 0.200$$

d	c	h	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108

Probabilidad de observar caries tras observar hueco:

$$P(c = 1 \mid h = 1) = \frac{P(c = 1, h = 1)}{P(h = 1)} = \frac{0.180}{0.200} = 0.900$$

4. Independencia

Decimos que x e y son ***independientes*** si:

$$P(x,y) = P(x)\,P(y) \quad \text{o} \quad P(x \mid y) = P(x) \quad \text{o} \quad P(y \mid x) = P(y)$$

La independencia de variables puede establecerse por conocimiento experto.

Ejemplo del dentista: $\quad Tiempo:\; T \in \{sol, nubes, lluvia, nieve\}$

$$P(t,d,c,h) = P(t)\,P(d,c,h)$$

Reducimos el número de probabilidades a almacenar:

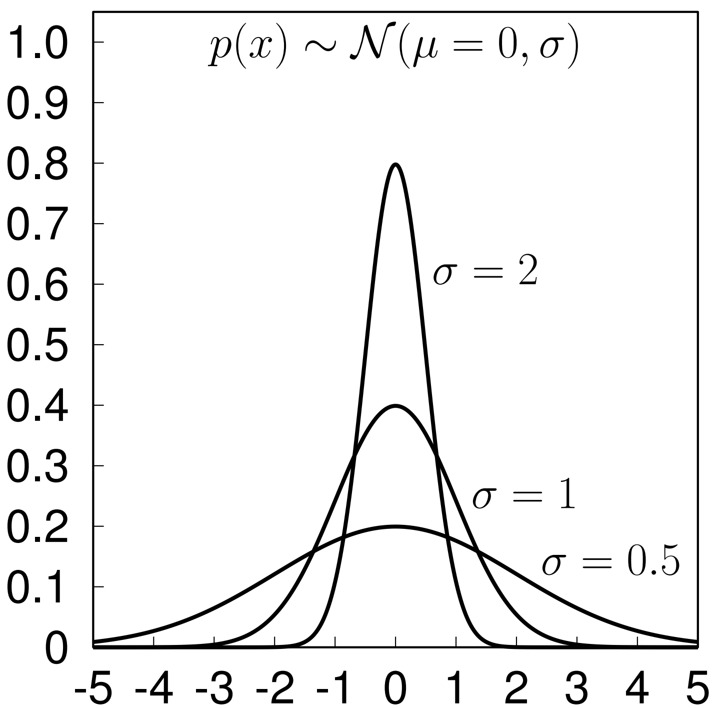
32 probabilidades vs $4+8$ probabilidades

5. Variables continuas

También se suelen emplear variables continuas caracterizadas mediante funciones de *densidad de probabilidad:*

$$p(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \qquad \text{y} \qquad \int p(x)\, dx = 1$$

Ejemplo: la distribución normal



$$p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right)$$

$$P(x \in [\mu \pm 2\sigma]) = 0.95$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

6. Teorema de Bayes

El *teorema de Bayes* permite actualizar nuestro conocimiento sobre una hipótesis y tras la observación de nueva evidencia x:

$$P(y \mid x) = P(y)\,\frac{p(x \mid y)}{p(x)}$$

Ejemplo del dentista: comprobemos la hipótesis $c = 1$

d	c	h	P
0	0	0	0.576
0	0	1	0.008
0	1	0	0.144
0	1	1	0.072
1	0	0	0.064
1	0	1	0.012
1	1	0	0.016
1	1	1	0.108

Probabilidad de observar caries:

$$P(c = 1) = \sum_{d=0,1} \sum_{h=0,1} P(d, c = 1, h) = 0.340$$

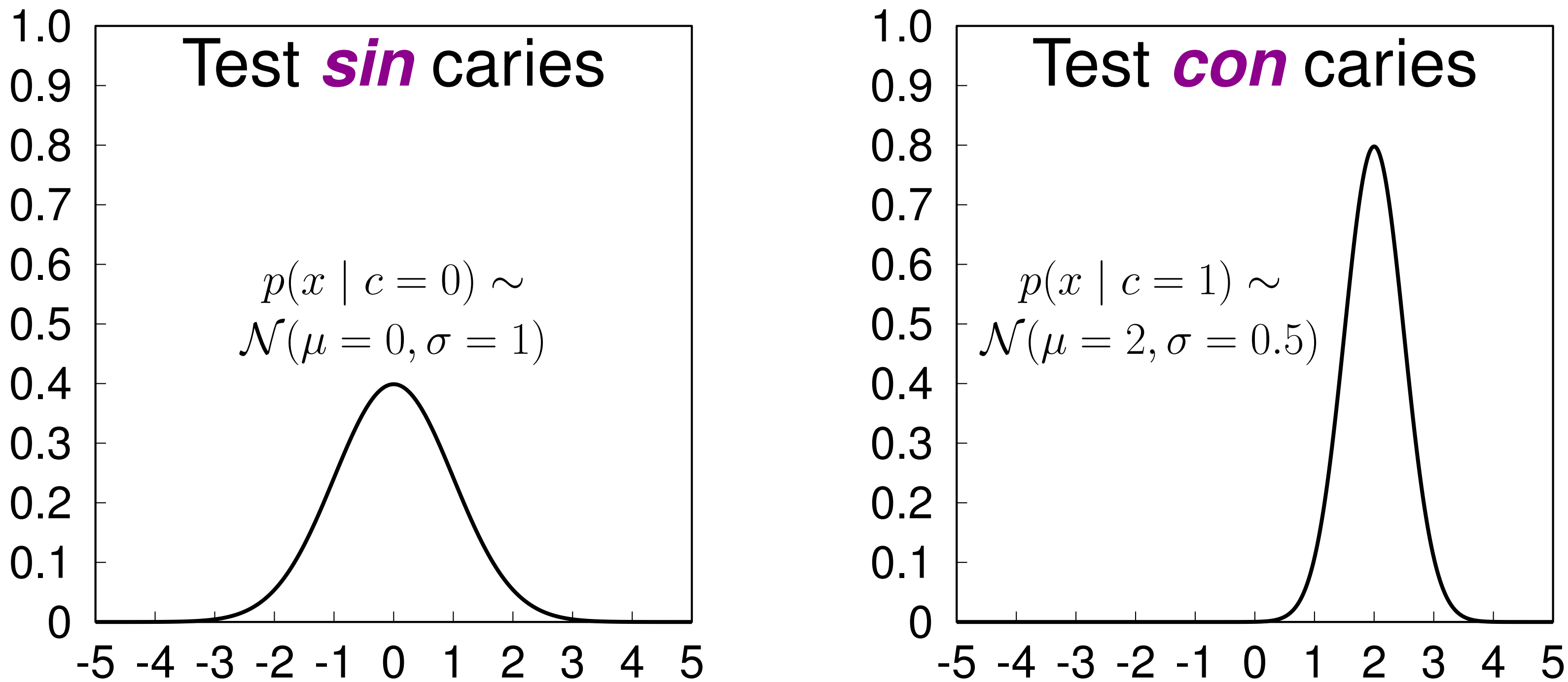
Anteriomente inferimos que, si se observa hueco:

$$P(c = 1 \mid h = 1) = 0.900$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Ejemplo del dentista (cont.):

Sea x una variable continua que mide el resultado de un test de saliva para el diagnóstico de caries. Se tiene:



Si realizamos el test y obtenemos $x=2$, por Bayes tenemos:

$$P(c=1 \mid x=2) = P(c=1)\,\frac{p(x=2 \mid c=1)}{p(x=2)} = 0.340\,\frac{0.798}{0.307} = 0.884$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA