Análisis Matemático

UT5 - Series Numéricas

AMA

Contenido

Conceptos generales

- Sumas parciales. Convergencia y divergencia
- La serie armónica. Generalización

Series numéricas de suma exacta

- Geométricas (sumas finitas e infinitas)
- Telescópicas y reducibles a telescópicas

Criterios de Convergencia

- Condición del resto
- Criterio de Leibniz para series alternadas

Obtención de algunas sumas aproximadas

Objetivos

Conceptos generales (Una sesión)

- Identificar la sucesión de sumas parciales asociada a una serie
- Distinguir entre series convergentes y divergentes

Series numéricas de suma exacta (Una sesión)

- Hallar la suma parcial de geométricas
- Sumar series geométricas o telescópicas

Obtención de sumas aproximadas (Una sesión)

- Conocer el criterio de Leibniz para series alternadas
- Aproximar la suma de algunas series

Conceptos generales

Problema: Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} + a_{101} + \cdots = ¿? \qquad (\text{suma de } \textbf{todos} \text{ los términos})$$

La solución no es evidente: $s = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ¿?$

$$s = (1+(-1)) + (1+(-1)) + (1+(-1)) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$$s = 1 + ((-1)+1) + ((-1)+1) + ((-1)+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

$$s - 1 = (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots = -s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}$$

asociatividad, conmutatividad, etc... no son (en general) válidas

- ¿Cuándo podemos sumar?
- ¿Cómo sumamos cuando se puede?

$1 + 2 + 3 + \cdots = ?$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = ?$

Sumas parciales. Convergencia y divergencia:

A partir de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definimos la de *sumas parciales*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Recurrentemente, $\begin{cases} s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \\ s_1 = a_1 \end{cases}$

Se define la *serie numérica de término general* a_n por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n\geq 1} a_n = \lim s_n = \sum a_n \text{ (notación simplificada)}$$

La serie converge/diverge cuando lo hace la sucesión $\{s_n\}$

La serie suma $s = \lim s_n$ (cuando existe s y es real)

Casos de divergencia interesantes: $\sum a_n = \pm\infty$, según sea $s_n \to \pm\infty$

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$

$\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ (divergente)

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ es divergente (oscilante, no hablamos de suma)

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots$

$\{s_n\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\} = \{n^2\}$ (divergente a $+\infty$)

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)$ diverge a $+\infty$ (podemos decir que suma $+\infty$)

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$

$\{s_n\} = \{0, 0, 0, 0, 0, \ldots\} = \{0\}$ (converge a 0)

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ converge y su suma es 0

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots$

$$s_1 = \log\left(\frac{2}{1}\right) = \log(2) \ , \ s_2 = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\right) = \log(3) \ , \ \ldots$$

$$s_n = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ diverge a $+\infty$

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$

$$\{s_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \to 1$$

La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge y su suma es 1

Propiedades:

- $\displaystyle\sum_{n\geq p} a_n$ tiene el mismo caracter que $\displaystyle\sum_{n\geq p} a_n$ (aunque diferente suma)
- $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n \quad ; \quad \sum (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \left(\sum a_n\right) \ , \ \alpha \neq 0$
- En series convergentes podemos agrupar términos (paréntesis, no reordenar)
- $\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente

Serie armónica (divergente)

$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \qquad \begin{cases} a_1=1\\ a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_n \text{ es creciente } \left(s_{n+1}-s_n=\frac{1}{n+1}>0\right) \\ s_n \text{ no está acotada superiormente}\end{array}\right\} \Rightarrow \{s_n\}\to+\infty \Rightarrow \sum_{n\ge1}\frac{1}{n} \text{ diverge (a } +\infty)$$

Justificación: (tema anterior) $\lim\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log(n)}=1 \Rightarrow s_n\approx\log(n) \Rightarrow \{s_n\}\to+\infty$

Serie armónica generalizada

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{\alpha}}\begin{cases}\text{diverge si } \alpha\le 1\\ \text{converge si } \alpha>1\end{cases}$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{\sqrt[7]{n^4}}=\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{4/7}}\ ;\ \alpha=\frac{4}{7}<1\ ;\ \text{divergente}$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}=\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{7/4}}\ ;\ \alpha=\frac{7}{4}>1\ ;\ \text{convergente}$$

Series numéricas de suma exacta

Sumaremos (en forma exacta) dos tipos de series

(Además de las que sean reducibles a ellas aplicando propiedades generales)

- Geométricas: $\sum_{n\ge p}a_n$ cuando $\{a_n\}$ es una progresión geométrica

  Estudiaremos $\sum_{n\ge p}r^n=r^p+r^{p+1}+\cdots+r^{p+k}+\cdots=r^p\cdot\left(1+r+r^2+\cdots+r^k+\cdots\right)$

- Telescópicas: $\sum_{n\ge p}a_n$ si podemos expresar a_n como $a_n=\pm(b_{n+1}-b_n)$

Serie geométrica: $\sum_{n\ge p}r^n=r^p+r^{p+1}+r^{p+2}+\cdots+r^{p+k}+\cdots\quad (r=\text{razón})$

$$s_n=r^p+r^{p+1}+r^{p+2}+\cdots+r^{p+n-1}$$
$$r\cdot s_n=r^{p+1}+r^{p+2}+r^{p+3}+\cdots+r^{p+n}$$

Restando, $\left.\begin{array}{l} s_n-r\cdot s_n=r^p-r^{p+n}\\ (1-r)\cdot s_n=r^p-r^{p+n}\end{array}\right\}\Rightarrow s_n=\begin{cases}\dfrac{r^p-r^{p+n}}{1-r}, \text{ si } r\ne1\\ n, \text{ si } r=1\end{cases}$

Tomando límites, $\lim s_n=s=\dfrac{r^p}{1-r}$ si y sólo si $|r|<1$

En consecuencia,

La serie converge si y sólo si $|r|<1$ y $s=\dfrac{r^p}{1-r}$

Ejemplo: $\sum_{n\ge3}\dfrac{6^n}{2\cdot5^{n+1}}=\dfrac{1}{10}\sum_{n\ge3}\left(\dfrac{6}{5}\right)^n$, geométrica con $r=\dfrac{6}{5}>1$ (diverge)

Ejemplo: $\sum_{n\ge2}\dfrac{(-2)^{n+1}}{5\cdot3^{n-1}}=-\dfrac{6}{5}\sum_{n\ge2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$, geométrica con $r=-\dfrac{2}{3}$ (converge)

$$s=-\frac{6}{5}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{8}{25}$$

Ejemplo: $\sum_{n\ge3}\dfrac{2^{3n+1}}{5\cdot3^{2n-1}}=\dfrac{6}{5}\sum_{n\ge3}\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^n$, geométrica con $r=\dfrac{8}{9}$ (converge)

$$s=\frac{6}{5}\cdot\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^3}{1-\frac{8}{9}}=\frac{1024}{135}$$

Ejercicio: Clasificar (y sumar, en su caso) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot(\alpha+1)^n}{6^{n+1}}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$

Podemos reescribir la serie en la forma $\frac{1}{6}\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{(\alpha+1)}{6}\right)^n$

En consecuencia, es geométrica de razón $r=-\frac{(\alpha+1)}{6}$

De aquí, la serie converge si y sólo si $\frac{|\alpha+1|}{6}<1\Leftrightarrow\ \alpha\in\left]-7,5\right[$ y suma

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot(\alpha+1)^n}{6^{n+1}}=\frac{1}{6}\left(\frac{-\frac{(\alpha+1)}{6}}{1+\frac{(\alpha+1)}{6}}\right)=-\frac{(\alpha+1)}{6(\alpha+7)}$$

Ejemplo: Curva de Koch (copo de nieve)

Series Telescópicas: $\sum_{n\geq p}a_n$ con $a_n=b_{n+1}-b_n$ ó $a_n=b_n-b_{n+1}$

$$s_n=a_p+a_{p+1}+\cdots+a_n=\pm(b_{n+1}-b_p)$$
$$s=\lim s_n=\pm\lim(b_{n+1}-b_p)$$

Ejemplo: $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ converge y suma $\frac{1}{2}$

$$s_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$
$$\{s_n\}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right\}\to\frac{1}{2}=s$$

Ejemplo: $\sum_{n\geq 4}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ converge y suma $\frac{1}{5}$

$$\{s_n\}=\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{n+2}\right\}\to\frac{1}{5}=s$$

Series reducibles a Telescópicas

Algunas series del tipo $\sum_{n\geq p}\frac{P(n)}{Q(n)}$ con $grad(Q(n))\geq grad(P(n))+2$

se transforman en telescópicas, previa descomposición en fracciones simples

Ejemplo: $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{4n^2-1}\right)$ converge y suma 2

$$\frac{4}{4n^2-1}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{4}{4n^2-1}=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)$$

$$s_n=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)=2-\frac{2}{2n+1}$$

$$\{s_n\}=\left\{2-\frac{2}{2n+1}\right\}\to 2=s$$

Criterios de convergencia

1) Condición del resto: $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow\ \lim a_n=0$

$\lim a_n\neq 0\ \Rightarrow\ \sum a_n$ divergente. La serie $\sum\frac{3^n}{2^n+1}$ diverge ya que $\lim\frac{3^n}{2^n+1}=+\infty$

$\lim a_n=0\ \not\Rightarrow\ \sum a_n$ convergente. $\left\{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}\to 0$ y $\sum_{n\geq 1}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=+\infty$ (diverge)

$\lim a_n=0\ \not\Rightarrow\ \sum a_n$ divergente. $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}\to 0$ y $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$ (converge)

2) Series armónicas: $\sum_{n\geq p}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases}\text{diverge si } \alpha\leq 1\\ \text{converge si } \alpha>1\end{cases}$

3) Geométricas: $\sum_{n\geq p}r^n\begin{cases}\text{converge si } |r|<1\\ \text{diverge si } |r|\geq 1\end{cases}$

4) Criterio de Leibniz para series alternadas:

Las *series alternadas* son de la forma $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$ o $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$; $a_n > 0$

Es decir, $(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots)$ o $(-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + \cdots)$

Que además son el mismo caso pues $\sum(-1)^{n+1}a_n = -\sum(-1)^n a_n$

Criterio de Leibniz

$$\{a_n\} \text{ decrece y tiende a cero } \Rightarrow \sum(-1)^{n+1}\cdot a_n \text{ converge}$$

$$\text{y además, } 0 < s_2 < s_4 < s_6 < s_8 < \cdots < s < \cdots < s_7 < s_5 < s_3 < s_1$$

Ejemplo

$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge $\left(\text{alternada ; } a_n = \frac{1}{n} \to 0 \text{ y decrece}\right)$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge $\left(\text{alternada ; } a_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ y decrece}\right)$

$\sum \frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{2n+5}$ converge $\left(\text{alternada ; } a_n = \frac{\sqrt{n}}{2n+5} \to 0 \text{ y decrece}\right)$

Obtención de sumas aproximadas

Si $\sum_{n\geq 1} A_n$ converge y su suma es $s = \underbrace{A_1 + A_2 + \cdots + A_N}_{s_N} + \underbrace{A_{N+1} + \cdots}_{s-s_N \text{ (cola)}}$

Aproximación : $s \cong s_N$ (para N suficientemente grande)

Cota de error :

$$E_N = |s - s_N| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} A_n - \sum_{n=1}^{N} A_n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} A_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |A_n| \leq ¿?$$

Caso 1:

$A_n = (-1)^{n+1}a_n$ en las condiciones de Leibniz $\quad E_N \leq a_{N+1}$

Caso 2:

$|A_n| \leq c\cdot K^n,\ K < 1$ (geométrica convergente) $\quad E_N \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} c\cdot K^n = \frac{c\cdot K^{N+1}}{1-K}$

Ejemplo:

Aproximar $s = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ con dos decimales exactos, al menos

La serie es alternada, con $A_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{N+1} < 10^{-3} \Rightarrow N \geq 1000$$

$$s \cong s_{1000} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1000} = 0.\underline{69}264743\ldots$$

$s = \log(2) =$
$= 0.69314718\ldots$

Ejemplo:

Aproximar $s = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}$ con tres decimales exactos, al menos

La serie es alternada, con $A_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)2^{N+1}} < 10^{-4} \Rightarrow N \geq 9$$

$$s \cong s_9 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{9\cdot 2^9} = 0.\underline{405}5323\ldots$$

$s = \log(3/2) =$
$= 0.4054651081\ldots$

Ejemplo: Aproximar $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(2n+1)5^n}$ mediante s_4 y con seis decimales exactos

$$|A_n| = \frac{n}{(2n+1)5^n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow \quad E_N = |s - s_N| < \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{8\cdot 5^N}$$

- $E_4 < \frac{1}{8\cdot 5^4} = 0.0002 \Rightarrow \quad s \cong s_4 = \sum_{n=1}^{4}\frac{n}{(2n+1)5^n} = 0.\underline{086}8\ldots$ (tres decimales exactos)
- $E_N < \frac{1}{8\cdot 5^N} < 10^{-7} \Rightarrow n \geq 9$ y $\quad s \cong s_9 = \sum_{n=1}^{9}\frac{n}{(2n+1)5^n} = 0.\underline{086988}76\ldots$

Ejemplo: Aproximar $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ con cinco decimales exactos, al menos

$$E_N = \cdots = \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \cdots\right) < \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \cdots\right) < \frac{2}{(N+1)!}$$

$$E_N < \frac{2}{(N+1)!} < 10^{-6} \Rightarrow n \geq 9 \text{ y } s \cong s_9 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 1.\underline{71828}1525\ldots$$

$s = e - 1 = 1.\underline{718281}828\ldots$