Computabilidad y Complejidad

Boletín de Ejercicios 2 -- Soluciones (Funciones Recursivas Primitivas)

01. Para cada $k \geq 0$, sea la función $cte_k(n) = k$ para cada $n \geq 0$. Demuestre que estas funciones son recursivas primitivas.

Utilizando fundamentalmente el operador de recursión primitiva podemos definir, para cada $k \geq 0$, la función cte_k como

$$cte_k(0) = s^k(c()) = k$$
$$cte_k(s(n)) = p_{1,2}(cte_k(n),n)$$

02. Sea $Proy_0$ la familia de las funciones de proyección con selector 0, esto es,

$$Proy_0 = \{p_{0,k} \ / \ k \geq 1\}.$$

Demuestre que cada función de $Proy_0$ puede definirse como recursiva primitiva sin utilizar ninguna función de $Proy_0$.

Sea una función de proyección $p_{0,k}$. Esta función puede ser también definida en las condiciones especificadas mediante

$$p_{0,k}(n_1,\ldots,n_k) = cte_0(p_{1,k}(n_1,\ldots,n_k))$$

03. Sea $g(i,n_1,\ldots,n_m)$ una función recursiva primitiva. Demuestre que la función

$$f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = \sum_{j \leq i \leq k} g(i,n_1,\ldots,n_m)$$

también lo es. (Nótese que cuando $k < j$, se tiene que $f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = 0$.)

Resolveremos esta cuestión de tres modos diferentes.

$$\text{I. } f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = igual(j,k) \bullet g(j,n_1,\ldots,n_m) + menor(j,k) \bullet sg(j) \bullet \left(\sum_{0 \leq i \leq k} g(i,n_1,\ldots,n_m) \ \underline{\bullet} \ \sum_{0 \leq i \leq pred(j)} g(i,n_1,\ldots,n_m)\right) + menor(j,k) \bullet cosg(j) \bullet \sum_{0 \leq i \leq k} g(i,n_1,\ldots,n_m)$$

$\mathtt{II.}$ Sea la función $\mathtt{maig}$ ($\mathit{mayor\ o\ igual}$) definida como

$$\mathtt{maig}(n,m) =$$

- $1,\ \text{si } n \geq m$
- $0,\ \text{en otro caso}$

Esta función es recursiva primitiva (véase el boletín de ejercicios de autoevaluación).

$$f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = f'(k,j,n_1,\ldots,n_m)$$

$$f'(k,j,n_1,\ldots,n_m) = \sum_{0 \leq i \leq k} h(i,j,n_1,\ldots,n_m)$$

$$h(i,j,n_1,\ldots,n_m) = g(i,n_1,\ldots,n_m) \bullet \mathtt{maig}(i,j)$$

Nótese que la funciones f, f' y h son, a partir de su definición, recursivas primitivas.

$\mathtt{III.}$ $$f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = \mathtt{maig}(k,j) \bullet \hat{h}(k \dot{-} j,j,n_1,\ldots,n_m)$$

$$\hat{h}(r,j,n_1,\ldots,n_m) = \sum_{0 \leq i \leq r} \breve{g}(i,j,n_1,\ldots,n_m)$$

$$\breve{g}(i,j,n_1,\ldots,n_m) = g(i+j,n_1,\ldots,n_m)$$

Nótese que la funciones f, $\hat{h}$ y $\breve{g}$ son, a partir de su definición, recursivas primitivas.

04. Sea $g(i,n_1,\ldots,n_m)$ una función recursiva primitiva. Demuestre que la función

$$f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = \prod_{j \leq i \leq k} g(i,n_1,\ldots,n_m)$$

también lo es. (Nótese que cuando $k < j$, se tiene que $f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = 1$.)

A partir del apartado $\mathtt{III}$ del ejercicio anterior directamente definimos

$$f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = \mathtt{maig}(k,j) \bullet \prod_{0 \leq i \leq k \dot{-} j} g(i+j,n_1,\ldots,n_m) + \mathtt{menor}(k,j)$$

05. Sea $\text{máx}(n,m)$ la función que obtiene el máximo entre n y m. Sea

$$g\colon N \longrightarrow N$$

una función recursiva primitiva. Se define la función

$$\text{máx}.g\colon N \longrightarrow N,$$

de modo que $\text{máx.g}(n) = \text{máx}\{g(i) \ / \ i \in \{0,\ldots,n\}\}$.

Sabiendo que la función máx es recursiva primitiva (véase el boletín de ejercicios de autoevaluación) demuestre que también lo es la función máx.g.

$$\text{máx.g}(0) = s^{g(0)}(c()) = g(0)$$
$$\text{máx.g}(s(n)) = \text{máx}(s(n),\text{máx.g}(n))$$

06. Diremos que las funciones recursivas primitivas $g_i(n_1,\ldots,n_m)$, $i=1,\ldots,k$, son compatibles si y sólo si

$$\sum_{1 \le i \le k} g_i(n_1,\ldots,n_m) = 1, \ \forall n_1,\ldots,n_m$$

Sean para $i=1,\ldots,k$, las funciones recursivas primitivas $h_i(n_1,\ldots,n_m)$ y las funciones recursivas primitivas compatibles $g_i(n_1,\ldots,n_m)$. Demuestre que la función

$f(n_1,\ldots,n_m) =$

- $h_1(n_1,\ldots,n_m)$, si $g_1(n_1,\ldots,n_m) = 1$
- . . . .
- $h_k(n_1,\ldots,n_m)$, si $g_k(n_1,\ldots,n_m) = 1$

es recursiva primitiva.

$$f(n_1,\ldots,n_m) = \sum_{1 \le i \le k} g_i(n_1,\ldots,n_m) \bullet h_i(n_1,\ldots,n_m)$$