ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT3 - Problemas propuestos: MANIPULACIÓN Y CÁLCULO EXACTO DE INTEGRALES

1. Calcula las primitivas que siguen, reducibles a inmediatas:

   a) $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ b) $\int \frac{2+3\cos(x)}{\sin^2(x)}dx$ c) $\int \frac{1+\log(x)}{3+x\log(x)}dx$ d) $\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx$

2. Calcula las primitivas que siguen mediante integración por partes:

   a) $\int x\log(x)dx$ b) $\int \arcsin(x)dx$ c) $\int e^x \sin(x)dx$ d) $\int \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

3. Calcula las primitivas que siguen a partir de cambios de variable adecuados:

   a) $\int x\sqrt{x-5}dx$ b) $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$ c) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

4. Calcula las integrales de Riemann que siguen, aplicando la regla de Barrow. Ten en cuenta los métodos de integración por partes o sustitución o una combinación de ellos.

   a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ b) $\int_0^2 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ c) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx$, $k \in \mathbb{Z}$

   d) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x(x+4)}dx$ e) $\int_0^1 \arctan(x)dx$ f) $\int_0^2 x^2e^{-x}dx$

   g) $\int_0^{\pi} e^x\cos(x)dx$ h) $\int_0^{\log(5)} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ i) $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)dx$

   j) $\int_2^{\pi} \cos\left(\sqrt{x-2}\right)dx$ k) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ l) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

5. a) Calcula el área encerrada por la gráfica de $y = x^2 + x - 2$ y el eje OX, sobre el intervalo $[-3, 2]$

   b) Calcula el área que limitan las funciones $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ y $g(x) = \frac{x-1}{8x}$ en el primer cuadrante.

ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA) UT3- Ejercicios adicionales: MANIPULACIÓN Y CÁLCULO EXACTO DE INTEGRALES

1. Utiliza la monotonía del operador integral para:

   a) Acotar la integral $\int_2^5 \frac{f(x)}{x^4} dx$ si f es continua y $x^2 \leq f(x) \leq x^3$ para $x \in [2,5]$

   b) Justificar que $\left|\int_0^\pi e^{-x} \cos(x^2) dx\right| \leq 1 - e^{-\pi}$

   c) Sin resolver ninguna integral, acotar $\left|\int_0^\pi \frac{e^{-x} sen(x)}{x^2+1} dx\right|$

   d) Mejorar el resultado de c) calculando sólo $\int_0^\pi \frac{dx}{x^2+1}$.

2. Calcula los valores de $L(f,P)$ y $U(f,P)$ para la función $f(x) = \frac{3-x}{3^x}$ y la partición $P = \{1,2,4,7\}$.

*3. Considera la función $f(x) = x^2$ y la partición, P_n, que divide el intervalo $[0,1]$ en n partes iguales

   a) Calcula los valores de $L(f,P_n)$ y $U(f,P_n)$ teniendo en cuenta que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}(2n+1)\,n\,(n+1)$

   b) Determina los límites de $L(f,P_n)$ y $U(f,P_n)$ cuando $n \to \infty$

   c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^1 x^2 dx$? ¿Por qué?

4. Calcula las integrales de Riemann que siguen, aplicando la regla de Barrow. Ten en cuenta que tendrás que descomponer el integrando en fracciones simples (en el caso del apartado b) tendrás que aplicar primero un cambio de variable):

   a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$ b) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ c) $\int_{e-1}^{e+1} \frac{x^2+1}{x^4-x^2} dx$

*5. Calcula $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ con dos cambios de variable distintos y comprueba que obtienes lo mismo.

*6. a) Si f es una función impar, integrable Riemann en $[-b,b]$, verifica que $\int_{-b}^b f(x)dx = 0$

   b) ¿Qué puedes decir si f es par?

*7. a) Teniendo en cuenta el problema anterior, calcula $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ después de efectuar el cambio de variable $x = 3\cos(t)$

   b) Deduce del apartado anterior el valor del área de una circunferencia de radio 3.

*8. a) Obtén el valor del área del recinto limitado entre las curvas $x^2 = 2py$ e $y\left(x^2+p^2\right) = p^3$, $p > 0$

   b) Encuentra el valor del área encerrada entre $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$ e $y_2 = |x|$.

   c) Calcula el área de la región comprendida entre las gráficas de $sen(x)$ y de $\cos(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$.

*9. Calcula, para todos los posibles valores de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el valor de $\int_{-\alpha}^{\alpha} |\alpha - |x| + x| \ dx$.

*10. Calcula las primitivas de las funciones secante y cosecante:

$$\int \sec(x)dx = \int \frac{dx}{\cos(x)} \quad \text{y} \quad \int \csc(x)dx = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

*11. a) Calcula $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \ dx$

b) Aplicando algún cambio de variable a la integral del apartado anterior, calcula

$$\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \ dx \quad , \quad \int_{\pi}^{\pi/2} \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ dx \quad , \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x) \ dx$$

*12. Utilizando un cambio de variable similar al del problema 8, calcula $\int_0^a x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$.

*13. a) Calcula el valor del área encerrada entre $y_1 = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + \frac{1}{2}$ e $y_2 = |x|$

b) Encuentra el valor de $k > 0$ de manera que la curva $y = ksen(x)$ divida en dos partes de la misma área el recinto determinado por $y = \cos(x)$ y los ejes coordenados, en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

14. La tasa de variación de una población de conejos satisface, para t en años,

$$P'(t) = \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 17} = \frac{-25\,(t-4)}{(t-4)^2 + 1}$$

a) ¿Cuando es máxima la población de conejos?

b) Si la población inicial es de 50 conejos ¿cuál es el máximo número de conejos esperable?

c) ¿Se extinguirán los conejos? ¿Cuándo?