DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Examen Final 28-01-2013 Duración prevista: 3h

PRIMER PARCIAL

---

1. $_{(0.8p)}$ Encuentra el valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que el número complejo $z = \dfrac{xi-8}{2+i}$ sea imaginario puro. Para el valor obtenido calcula $|z|$.

Reescribimos z en forma binómica

$$\begin{aligned} z &= \frac{xi-8}{2+i} = \frac{(xi-8)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2xi - xi^2 - 16 + 8i}{2^2+1^2} = \\ &= \frac{2xi + x - 16 + 8i}{5} = \frac{x-16}{5} + \frac{2x+8}{5} i \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$z \text{ es imaginario puro } \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

debemos hallar $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{x-16}{5} = 0$$

de donde $x = 16$ y $z = 8i$. De ahí que $|z| = 8$.

---

2. $_{(0.8p)}$ Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-|x-2|}} + \sqrt{x-1}$.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 - |x-2| > 0 \quad , \quad x - 1 \geq 0\}$$

Por un lado, tenemos que

$$1 - |x-2| > 0 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in]1,3[$$

y, por otra parte,

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$$

En resumen,

$$D(f) =]1,3[\cap [1,+\infty[=]1,3[$$

---

3. a) $_{(0.4p)}$ Halla el valor exacto de $\displaystyle\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$.

b) $_{(0.6p)}$ Aproxima el valor de la integral anterior mediante la regla de Simpson con $n = 4$.

c) $_{(0.4p)}$ Utiliza la cota de error de Simpson para acotar el error correspondiente a la aproximación anterior. Verifica que el error cometido es compatible con la cota.

---

a)

$$\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \log(x) \Big]_1^2 = \frac{4}{2} - \log(2) - \left(\frac{1}{2} - \log(1)\right) = \frac{3}{2} - \log(2) \approx 0.8068528194...$$

b) En este caso, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{4}$, y la regla de Simpson para la partición correspondiente, queda

$$\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx \cong S_4 f = \frac{1}{12}\left[f(1) + 4\left(f\left(1+\frac{1}{4}\right) + f\left(1+\frac{3}{4}\right)\right) + 2f\left(1+\frac{1}{2}\right) + f(2)\right]$$

sustituyendo los valores correspondientes en $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$,

$$S_4 f = \frac{1}{12}\left[0 + 4\left(\frac{9}{20} + \frac{33}{28}\right) + 2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{2}\right] = 0.8067460317...$$

c) Teniendo en cuenta la cota de error asociada al método de Simpson

$$\left|\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx - S_4\left(f\right)\right| \leq \frac{M_4}{180 \cdot 4^4}$$

donde falta calcular M_4, cota de la derivada cuarta de $f(x)$ en el intervalo de integración. Dado que

$$f(x) = x - \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \Longrightarrow f''(x) = -\frac{2}{x^3} \Longrightarrow f'''(x) = \frac{6}{x^4} \Longrightarrow f^{(iv)}(x) = -\frac{24}{x^5}$$

se cumple

$$\left|f^{(iv)}(x)\right| = \left|-\frac{24}{x^5}\right| \leq 24$$

en el intervalo de integración $[1, 2]$, por lo que consideramos $M_4 = 24$. De aquí,

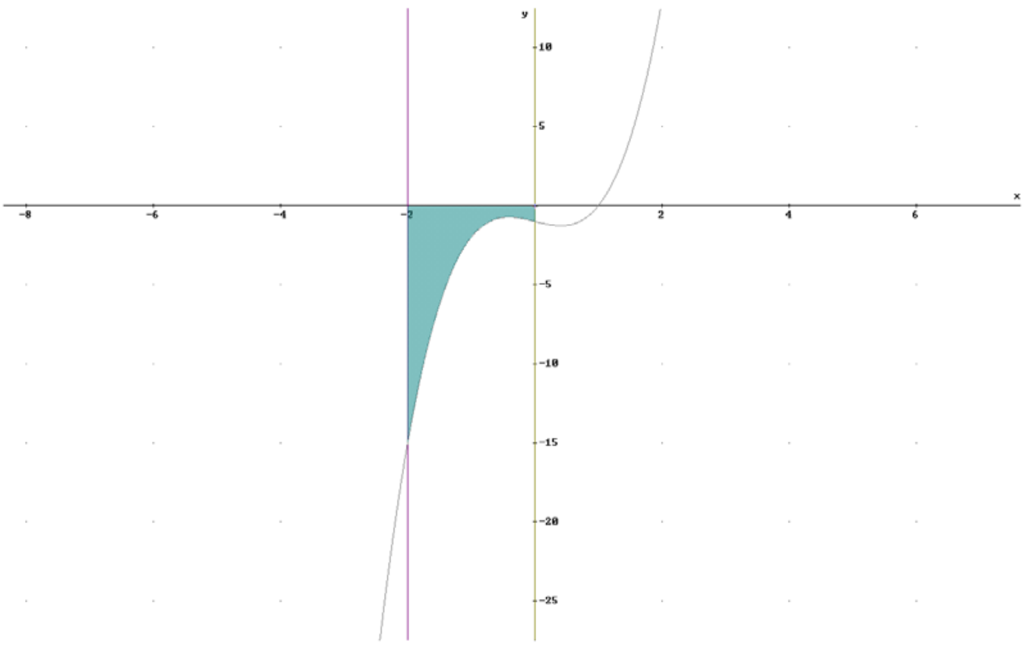
$$\left|\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx - S_4\left(f\right)\right| \leq \frac{M_4}{180 \cdot 4^4} = \frac{24}{180 \cdot 4^4} = 0.00052083...$$

En efecto, el error cometido es compatible con la cota,

$$\left|\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx - S_4\left(f\right)\right| = |0.8068528194... - 0.8067460317...| = 0.00010678769... < 0.00052083...$$

---

4. $_{(0.5p)}$**OPCIONAL (sube nota)** Determina el valor del área encerrada entre la gráfica de $f(x) = 2x^3 - x - 1$ y las rectas $x = -2$ y $x = 0$.



El área encerrada será

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} \left|2x^3 - x - 1\right| dx = \int_{-2}^{0} -\left(2x^3 - x - 1\right) dx = \left. -2\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{0} = \\ &= 0 - \left(-2\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right) = 8\ u^2 \end{aligned}$$

SEGUNDO PARCIAL

---

1. $_{(0.6p)}$ Compara los ordenes de magnitud de las sucesiones $a_n = \log(2n+1)$ y $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Usando el criterio de Stolz,

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_n}{b_n} &= \lim_n \frac{\log(2n+1)}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = \\
&= \lim_n \frac{\log(2n+3)-\log(2n+1)}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} = \\
&= \lim_n \frac{\log\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} = \lim_n \left[(n+1)\log\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right] = \lim_n \left[\log\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{(n+1)}\right] = \\
&= \log \lim_n \left[\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{(n+1)}\right] \underset{\text{EULER }(1^\infty)}{=} \log\left[e^{\lim_n\left((n+1)\left(\frac{2n+3}{2n+1}-1\right)\right)}\right] = \lim_n \left[(n+1)\left(\frac{2n+3}{2n+1}-1\right)\right] = \\
&= \lim_n \left[(n+1)\left(\frac{2}{2n+1}\right)\right] = \lim_n \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = 1
\end{aligned}$$

con lo que podemos concluir que las sucesiones tienen el mismo orden de magnitud: $a_n \approx b_n$.

---

2. a) $_{(1p)}$ Determina la solución de la recurrencia de segundo orden definida mediante

$$\begin{cases} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 2^n \\ a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 5 \end{cases}$$

b) $_{(0.2p)}$ Encuentra una sucesión exponencial del mismo orden de magnitud que a_n.

---

a) La ecuación característica asociada a la recurrencia es

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

que tiene dos raíces reales distintas $r_1 = 1$ y $r_2 = 3$.

La recurrencia corresponde al primer caso y la solución general de la homogénea puede escribirse en la forma

$$a_n^H = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 3^n = C_1 + C_2 \cdot 3^n$$

Una solución particular de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n^P = A \cdot 2^n$$

de donde

$$A \cdot 2^{n+2} - 4A \cdot 2^{n+1} + 3A \cdot 2^n = 2^n \implies 4A - 8A + 3A = 1 \implies A = -1$$

y una solución particular de la recurrencia completa será

$$a_n^P = -2^n$$

Por tanto, podemos concluir que la solución general de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n - 2^n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{llcccc}
\text{para } n=1 & ; \; a_1 & = & C_1 + 3C_2 - 2 & = & 1 \\
\text{para } n=2 & ; \; a_2 & = & C_1 + 9C_2 - 4 & = & 5
\end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. De aquí:

$$a_n = 3^n - 2^n$$

b) Observa que $a_n \approx 3^n$ ya que

$$\lim_n \frac{a_n}{3^n} = \lim_n \frac{3^n - 2^n}{3^n} = \lim_n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 1$$

---

3. Considera la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n}$$

a)$_{(0.6p)}$ Usa la cota de error asociada al criterio de Leibniz para aproximar el valor de la serie numérica

$$f(-1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\, 2^n}$$

con un error menor que 10^{-3}.

b)$_{(0.6p)}$ Encuentra una serie de potencias para $f'(x)$ y súmala donde converja . Halla $f'(1)$.

c)$_{(0.3p)}$ **OPCIONAL (sube nota)** Integra $f'(x)$ y halla una expresión explícita para $f(x)$.

d)$_{(0.2p)}$ **OPCIONAL (sube nota)** Calcula el valor exacto de $f(-1)$ y compara este resultado con la aproximación obtenida en a). ¿Cuántos decimales correctos proporciona la aproximación hallada en a)?

---

a) Observa que

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n}$$

es una serie alternada y verifica las condiciones del teorema de Leibniz. Para encontrar una aproximación con un error menor que 10^{-3} necesitamos

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+2)\, 2^{N+1}} < 10^{-3} \iff (N+2)\, 2^{N+1} > 1000 \iff N \geq 6.$$

Y tomando $N = 6$ obtenemos la aproximación

$$f(-1) \approx \sum_{n=1}^{6} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n} = \frac{1}{2 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{6 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} = \frac{211}{1120} = 0.18839...$$

b) Derivando $f(x)$ obtenemos una serie geométrica que podemos sumar.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1) \cdot x^n}{(n+1) \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{2 - x}$$

para los valores de x tales que

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \quad \iff \quad |x| < 2 \quad \iff \quad x \in \left]-2, 2\right[$$

Para $x = 1$ se tendrá

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2-1} = 1$$

c) Integrando $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{2-x} = -1 + \frac{2}{2-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x - 2 \cdot \log(2 - x) + C$$

y teniendo en cuenta que $f(0) = 0$,

$$f(0) = -2 \cdot \log(2 - 0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 2 \cdot \log(2)$$

de donde

$$f(x) = -x - 2 \cdot \log(2-x) + 2 \cdot \log(2) = -x + 2\log\left(\frac{2}{2-x}\right)$$

d) El valor exacto de $f(-1)$ es

$$f(-1) = 1 + 2\log\left(\frac{2}{2-(-1)}\right) = 1 + 2\log(2/3) = 0.1890697837...$$

resultado que confirma la precisión encontrada en a) y que proporciona dos decimales exactos. En efecto, se cumple

$$\left| f(-1) - \sum_{n=1}^{6} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n} \right| = 0.0006769266426... < 10^{-3}$$