Minimització d'autòmats i operacions sobre els llenguatges regulars

U.D. Computació

DSIC - UPV

Index

Operacions de tancament

Un conjunt C és tancat respecte d'una operació $\cdot$ si i només si per a qualsevol parell d'elements $x, y \in C$, $x \cdot y \in C$.

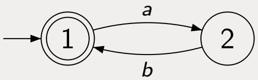
Exemple:

Siga $C = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ és finit }\}$, aleshores la unió i la intersecció són operacions de tancament per a C, mentre que l'operació complementari no ho és.

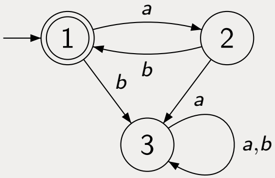
Operacions de tancament

Per a estudiar les operacions de tancament, treballarem sobre els autòmats següents:

AFD A_1 no complet, $L(A_1) = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$.

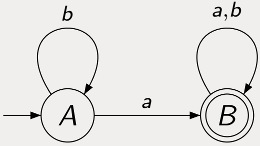


AFD A_2 complet, $L(A_2) = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$.



Operacions de tancament

AFD A_3 complet, $L(A_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a > 0\}$.



Intersecció

Els llenguatges regulars són tancats respecte d'intersecció.

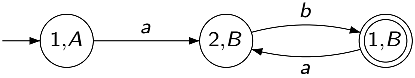
Siguen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, aleshores existeixen dos AFDs A_1, A_2 tals que $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$, on $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i), i = 1, 2$.
Construïm $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ on:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = [q_1, q_2]$
- $F = F_1 \times F_2$
- $\delta([p_1, p_2], a) = [\delta_1(p_1, a), \delta_2(p_2, a)]$,
  $p_1 \in Q_1, \quad p_2 \in Q_2, \quad a \in \Sigma$

$$L(A') = L_1 \cap L_2$$

Intersecció

AFD per a $L(A_1) \cap L(A_3)$.



Unió

Els llenguatges regulars són tancats respect d'unió.

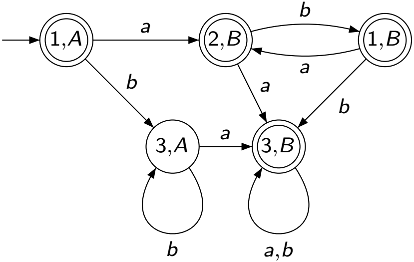
Siguen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, aleshores existeixen dos AFDs complets A_1, A_2 tals que $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$, on $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i), i = 1, 2.$
Construïm $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ on:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = [q_1, q_2]$
- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$
- $\delta([p_1, p_2], a) = [\delta_1(p_1, a), \delta_2(p_2, a)],$
  $p_1 \in Q_1, \quad p_2 \in Q_2, \quad a \in \Sigma$

$$L(A') = L_1 \cup L_2$$

Unió

AFD per a $L(A_2) \cup L(A_3)$.



Complementació i Diferència

Els llenguatges regulars són tancats respecte de complementació.

Siga $L \in \mathcal{L}_3$, aleshores existeix un AFD complet A tal que $L = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Definim l'autòmat $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q\text{-}F)$.

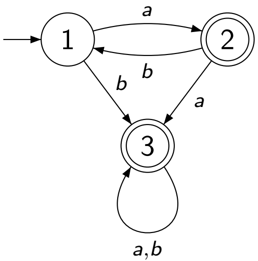
$$L(A') = \overline{L}$$

Els llenguatges regulars són tancats respecte de diferència.

Siguen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, noteu que $L_1\text{-}L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$.

Complementació

AFD per a $\overline{L(A_2)}$.



Revers

Els llenguatges regulars són tancats respecte de revers.

Siga $L \in \mathcal{L}_3$, aleshores existeix un autòmat (AFλ, en el cas més general) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ tal que $L(A) = L$.

Si la talla del conjunt d'estats finals de A és major que 1, es pot modificar l'autòmat per a que tinga un únic estat final.

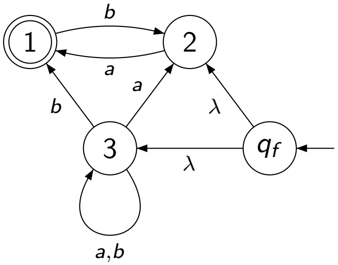
Construïm $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_f, \{q_0\})$ on:

$q \in \delta'(p, a) \leftrightarrow p \in \delta(q, a), \quad a \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \quad p, q \in Q.$

$$L(A') = L^r$$

Revers

Autòmat per a $(\overline{L(A_2)})^r$.



Concatenació

Els llenguatges regulars són tancats respecte de concatenació.

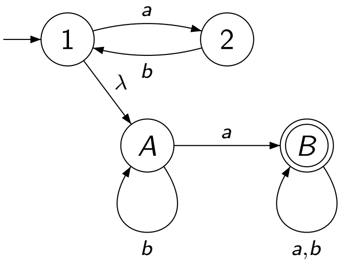
Siguen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, aleshores existeixen dos autòmats A_1, A_2 tals que $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$, on $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i), (i = 1, 2)$ i tals que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.
Construïm $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_1, F_2)$ on:

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- $\delta' = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta''$ on $q_2 \in \delta''(p, \lambda)$, $\forall p \in F_1$

$$L(A') = L_1 \cdot L_2$$

Concatenació

Autòmat per a $L(A_1) \cdot L(A_3)$.



Clausura

Els llenguatges regulars són tancats respecte de clausura.

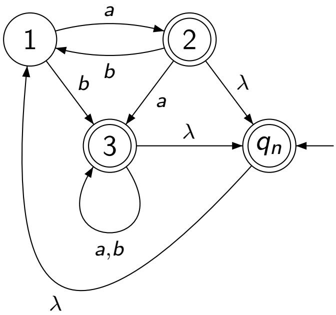
Siga $L \in \mathcal{L}_3$, aleshores existeix un autòmat A tal que $L = L(A)$, on $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Construïm $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_n, F')$ on:

- $Q' = Q \cup \{q_n\}$, $q_n \notin Q$
- $F' = F \cup \{q_n\}$
- $\delta'(p, a) = \delta(p, a)$, $\forall p \in Q$, $\forall a \in \Sigma$
- $q_n \in \delta'(p, \lambda)$, $\forall p \in F$
- $\delta'(q_n, \lambda) = \{q_0\}$

$$L(A') = L^*$$

Clausura

Autòmat per a $(\overline{L(A_2)})^*$.



Homomorfisme Invers

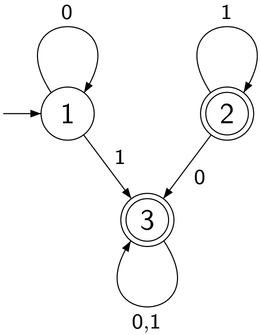
Els llenguatges regulars són tancats respecte d'homomorfisme invers.

Siga $h : \Sigma \rightarrow \Delta^*$ un homomorfisme i $L \subseteq \Delta^*, L \in \mathcal{L}_3$.
Aleshores existeix un AFD A tal que $L = L(A)$,
$A = (Q, \Delta, \delta, q_0, F)$.
Construïm $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ on:
$\delta'(p, a) = \delta(p, h(a))$, $\forall p \in Q$, $\forall a \in \Sigma$

$$L(A') = h^{-1}(L)$$

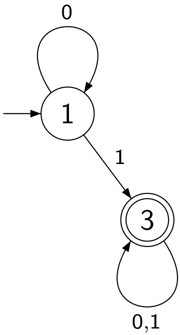
Homomorfisme Invers

Siga $h : \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}^*$ un homomorfisme tal que $h(0) = ab$, $h(1) = ba$. L'autòmat per a $h^{-1}(\overline{L(A_2)})$ és:



Homomorfisme Invers

Siga $h : \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}^*$ un homomorfisme tal que $h(0) = ab$, $h(1) = ba$. L'autòmat per a $h^{-1}(\overline{L(A_2)})$ és:



Quocient (per la dreta) d'un llenguatge per una cadena

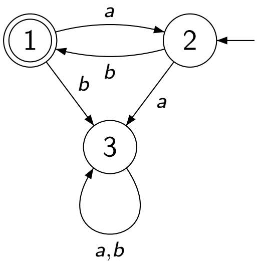
Els llenguatges regulars són tancats respecte del quocient per una cadena.

Siga $u \in \Sigma^*$ i $L \in \mathcal{L}_3$, aleshores existeix un AFD complet A tal que $L = L(A)$ i on $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Construïm $A' = (Q, \Sigma, \delta, \delta(q_0, u), F)$ on:

$$L(A') = u^{-1}L$$

Quocient (per la dreta) d'un llenguatge per una cadena

$\Sigma = \{a, b\}$, $u = aba$. Autòmat per a $u^{-1}L(A_2)$.



Minimització d'AFDs

Un AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ és accessible si per a tot $q \in Q$ existeix una cadena $x \in \Sigma^*$ tal que $\delta(q_0, x) = q$

Relació d'indistingibilitat en Q

Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD complet i accessible. Definim la relació d'indistingibilitat $\sim$ en Q com:

$$\forall q, q' \in Q : (q \sim q' \leftrightarrow \forall x \in \Sigma^* \ (\delta(q, x) \in F \leftrightarrow \delta(q', x) \in F))$$

Minimització d'AFDs

Autòmat quocient

Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD complet i accessible y siga la relació d'indistingibilitat $\sim$.
Es defineix l'autòmat quocient $A/\sim = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ com:

- $Q' = \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$
- $q_0' = [q_0]_\sim$
- $F' = \{[q] \mid q \in F\}$
- $\delta'([q]_\sim, a) = [\delta(q, a)]_\sim$

Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD complet i accessible i siga la relació d'indistingibilitat $\sim$.
L'autòmat $A/\sim$ és el AFD mínim que accepta $L(A)$.

Minimització d'AFDs

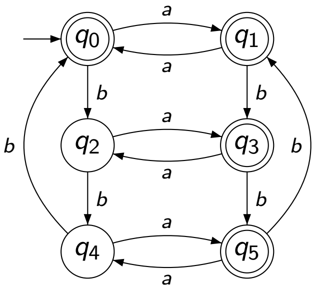
- Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD complet i accessible i siga un enter $k \geq 0$.
  Es defineix la relació de k-indistingibilitat $\sim_k$ com:
  $$\forall q, q' \in Q : (q \sim_k q' \leftrightarrow \\ \forall x \in \Sigma^*, |x| \leq k, (\delta(q,x) \in F \leftrightarrow \delta(q',x) \in F))$$
- Es compleix que:
  - per a qualsevol $k \geq 0, p \sim_{k+1} q \rightarrow p \sim_k q$
  - per a qualsevol $k \geq 0, p \sim q \rightarrow p \sim_k q$
  - per a qualsevol $k \geq 0$,
    $p \sim_{k+1} q \leftrightarrow p \sim_k q \wedge \forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \sim_k \delta(q,a)$

Minimització d'AFDs

Algorisme de minimització d'AFD:

- 1. $\pi_0 = \{Q - F, F\}$
- 2. Obtenir π_{k+1} a partir de π_k de la manera següent: $B(p, \pi_{k+1}) == B(q, \pi_{k+1})$ sii
  - $B(p, \pi_k) == B(q, \pi_k)$
  - i $\forall a \in \Sigma, B(\delta(p, a), \pi_k) == B(\delta(q, a), \pi_k)$
- 3. Si π_{k+1} és distinta de π_k anar a 2

Exemple de minimització 1.



Minimització d'AFDs

π_0 :

		a	b
B_0	q_0	B_0	B_1
	q_1	B_0	B_0
	q_3	B_1	B_0
	q_5	B_1	B_0
B_1	q_2	B_0	B_1
	q_4	B_0	B_0

Minimització d'AFDs

π_1 :

		a	b
B_0	q_0	B_1	B_3
$B1$	q_1	B_0	B_2
$B2$	q_3	B_3	B_2
	q_5	B_4	B_1
B_3	q_2	B_2	B_4
B_4	q_4	B_2	B_0

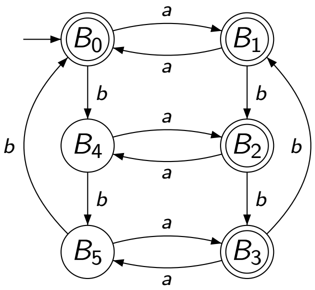
Minimització d'AFDs

π_2 :

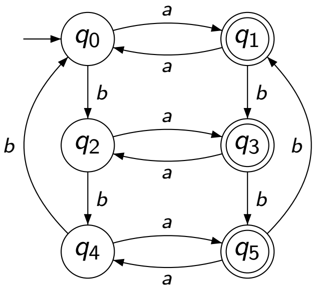
		a	b
B_0	q_0	B_1	B_4
$B1$	q_1	B_0	B_2
$B2$	q_3	B_4	B_3
$B3$	q_5	B_5	B_1
B_4	q_2	B_2	B_5
B_5	q_4	B_3	B_0

Minimització d'AFDs

$\pi_3 = \pi_2$



Exemple de minimització 2.



Minimització d'AFDs

π_0 :

		a	b
B_0	q_1	B_1	B_0
	q_3	B_1	B_0
	q_5	B_1	B_0
B_1	q_0	B_0	B_1
	q_2	B_0	B_1
	q_4	B_0	B_1

Minimització d'AFDs

$\pi_1 = \pi_0$