# Autómatas Finitos

U.D. Computación

DSIC - UPV

2017-18

# Índex

# Autómata Finito Determinista (*AFD*)

## Autómata Finito Determinista (*AFD*)

Un Autómata Finito Determinista (*AFD*) es una 5-tupla de la siguiente forma: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, siendo:

- $Q$ un conjunto finito de estados
- $\Sigma$ un conjunto finito de símbolos llamado *alfabeto*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ una función parcial llamada *función de transición*
- $q_0 \in Q$ el *estado inicial*
- $F \subseteq Q$ el *conjunto de estados finales*.

Cuando la función de transición es total se dice que el autómata está *completamente especificado* o es *completo*.

# Representación: tabla de transiciones



$|Q|$ filas y $|\Sigma|$ columnas. $(i, j)$ es el estado $\delta(q_i, a_j)$ donde $q_i$ es el $i$-ésimo elemento de $Q$ y $a_j$ el $j$-ésimo de $\Sigma$.

## Ejemplo

Sea $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1\})$ con la siguiente definición de $\delta$:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = q_0 & \delta(q_1, a) = q_2 & \delta(q_2, a) = q_2 \\ \delta(q_0, b) = q_1 & \delta(q_1, b) = q_1 & \delta(q_2, b) = q_2 \end{array}$$

La tabla de transiciones correspondiente es:

| | **a** | **b** |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_0$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $q_2$ | $q_1$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_2$ |

# Representación: diagrama de transiciones

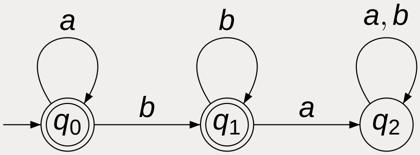


Es un grafo dirigido tal que:

- El número de nodos del grafo es $|Q|$, de forma que a cada nodo le corresponde un estado que lo etiqueta.
- $\forall q_i, q_j \in Q, \forall a_k \in \Sigma$, si $\delta(q_i, a_k) = q_j$ entonces el grafo posee un arco del nodo $q_i$ al $q_j$ etiquetado con el símbolo $a_k$.
- Se señala el estado inicial con una flecha corta entrante en el nodo correspondiente.
- Se marcan los nodos correspondientes a estados finales con un doble círculo.

## Ejemplo

El diagrama de transiciones correspondiente al ejemplo anterior se muestra en la siguiente figura.



# Extensión de la función de transición a cadenas



Definimos la función $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ como sigue:
$\forall q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$
- $\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$

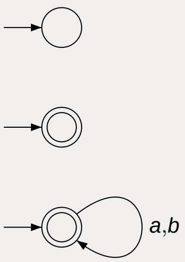
Como $\hat{\delta}(q, a) = \hat{\delta}(q, \lambda a) = \delta(\hat{\delta}(q, \lambda), a) = \delta(q, a)$, a partir de ahora, por comodidad escribiremos $\delta$ en lugar de $\hat{\delta}$.

## Lenguaje aceptado por un *AFD*

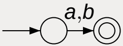
- Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un *AFD*, y sea $x \in \Sigma^*$. Se dice que la cadena $x$ es aceptada por el *AFD A* cuando $\delta(q_0, x) \in F$.
- Se define el *lenguaje aceptado* por el *AFD A* como:

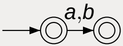
$$L(A) = \{x \in \Sigma^* | \delta(q_0, x) \in F\}$$

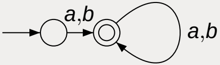
## Ejemplos de *AFD*

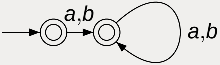


## Ejemplos de *AFD*

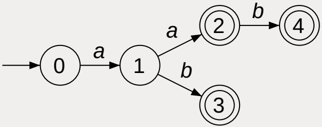


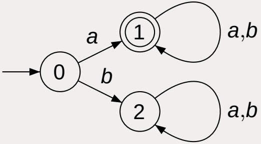



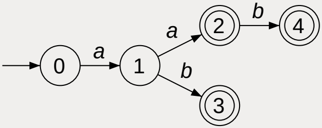



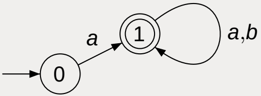
## Ejemplos de *AFD*



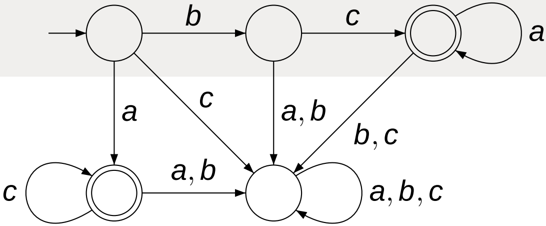



## Ejemplos de *AFD*

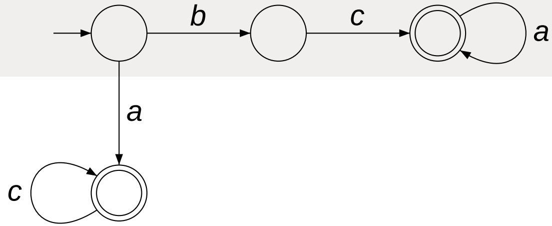


## Ejemplos de *AFD*



## Ejemplos de *AFD*



# Autómata Finito no Determinista (*AFN*)

## Autómata Finito no Determinista (*AFN*)

Un Automata Finito No Determinista (*AFN*) es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, siendo:

- $Q$, $\Sigma$, $q_0 \in Q$, y $F \subseteq Q$ el mismo conjunto de estados, alfabeto de entrada, estado inicial y conjunto de estados finales de la definición del AFD
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ la *función de transición*, definida también como una función parcial.

# Representación

## Ejemplo

Sea $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\})$ donde la función de transición viene definida por:

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\} & \delta(q_1, a) = \emptyset & \delta(q_2, a) = \emptyset \\
\delta(q_0, b) = \{q_1, q_2\} & \delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\} & \delta(q_2, b) = \emptyset \\
\delta(q_0, c) = \{q_2\} & \delta(q_1, c) = \{q_2\} & \delta(q_2, c) = \{q_2\}
\end{array}
$$

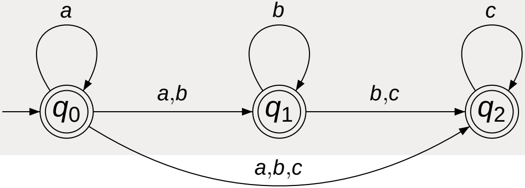
La correspondiente tabla de transiciones es:

| | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_1$ | $\emptyset$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ |

# Representación

## Ejemplo

El diagrama de transiciones es:



# Extensión de la función de transición a cadenas

Definimos la función $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ como sigue:
$\forall q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$ :

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)$

Como $\hat{\delta}(q, a) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,\lambda)} \delta(p, a) = \bigcup_{p \in \{q\}} \delta(p, a) = \delta(q, a)$, a partir de ahora escribiremos $\delta$ en lugar de $\hat{\delta}$.

## Lenguaje aceptado por un *AFN*

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un *AFN*, se define el *lenguaje aceptado* por el AFN $A$ como

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* | \delta(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

# Ejemplo de análisis no determinista

Vamos a calcular el resultado de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* del ejemplo anterior representándolo en forma de grafo multietapa.

# Ejemplo de análisis no determinista



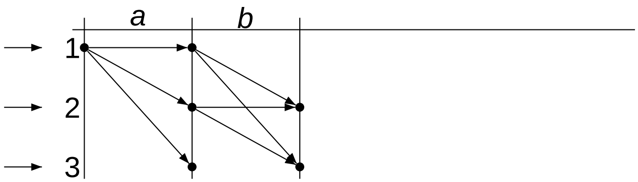
Vamos a calcular el resultado de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* del ejemplo anterior representándolo en forma de grafo multietapa.

# Ejemplo de análisis no determinista

Vamos a calcular el resultado de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* del ejemplo anterior representándolo en forma de grafo multietapa.

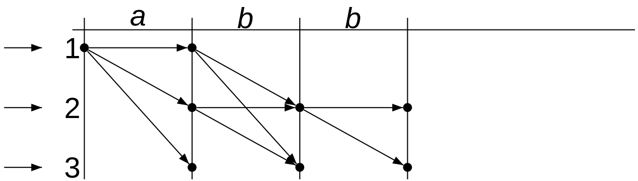
# Ejemplo de análisis no determinista

Vamos a calcular el resultado de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* del ejemplo anterior representándolo en forma de grafo multietapa.



# Ejemplo de análisis no determinista

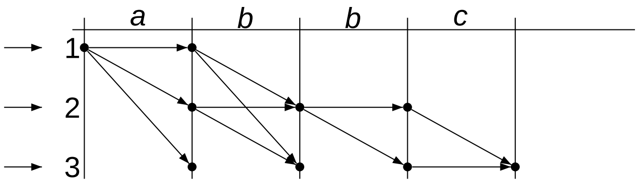
Vamos a calcular el resultado de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* del ejemplo anterior representándolo en forma de grafo multietapa.



# Ejemplo de análisis no determinista



Vamos a calcular el resultado de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* del ejemplo anterior representándolo en forma de grafo multietapa.



# Equivalencia entre *AFD* y *AFN*



- Todo *AFD* es un *AFN*, ya que se puede entender como un caso particular.
- La forma de obtener un *AFD* equivalente a un determinado *AFN* consiste en hacer que los estados del *AFD* se correspondan con conjuntos de estados del *AFN*, y hacer que la función de transición del *AFD* simule el cambio de conjuntos de estados que se produce en el *AFN* para un mismo símbolo de entrada.

# Equivalencia entre *AFD* y *AFN*



- Extensión de la función de transición a conjuntos de estados, $\delta' : 2^Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$:
  $\forall P \subseteq Q \quad \delta'(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$
- Extensión de la función de transición a conjuntos de estados y cadenas, $\delta'' : 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$:
  - $\forall P \subseteq Q \quad \delta''(P, \lambda) = P$
  - $\forall P \subseteq Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma \quad \delta''(P, xa) = \delta'(\delta''(P, x), a)$

# Equivalencia entre *AFD* y *AFN*

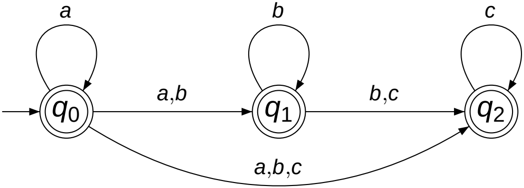
## Equivalencia entre *AFD* y *AFN*

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un *AFN* tal que $L = L(A)$.
Definimos un *AFD* $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ de forma que:

- $Q' = 2^Q, q_0' = \{q_0\}$,
- $F' = \{q' \in Q' | q' \cap F \neq \emptyset\}$,
- se define la función de transición $\delta'$ como la extensión de la función de transición $\delta$ a conjuntos de estados.

El autómata $A'$ que se define es un *AFD*, ya que el perfil de su función de transición es $\delta' : Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$.

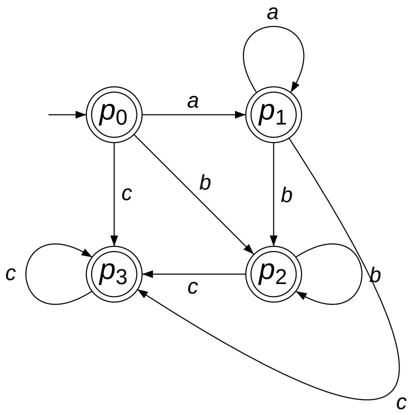
# Ejemplo




| | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|
| $\{q_0\}$ | $\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $\{q_1, q_2\}$ | $\emptyset$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $\{q_2\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ |

# Ejemplo





# Autómata Finito con transiciones vacías (*AF* $\lambda$)

## Autómata Finito con transiciones vacías (*AF* $\lambda$)

Un Autómata Finito con transiciones vacías (*AF* $\lambda$) es una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, siendo:

- $Q$, $\Sigma$, $q_0 \in Q$, y $F \subseteq Q$ el mismo conjunto de estados, alfabeto de entrada, estado inicial y conjunto de estados finales de la definición del AFD
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$ la *función de transición*, definida también como una función parcial.

# Representación

## Ejemplo

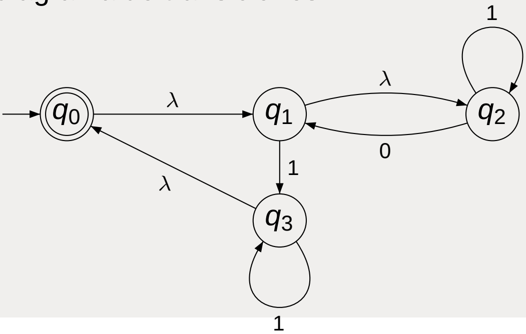
Sea $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ donde la función de transición viene definida por:

| | **0** | **1** | $\lambda$ |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_1\}$ |
| $q_1$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_2$ | $\{q_1\}$ | $\{q_2\}$ | $\emptyset$ |
| $q_3$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ | $\{q_0\}$ |

# Representación

## Ejemplo

El diagrama de transiciones:



# Extensión de la función de transición a cadenas



## Concepto de $\lambda$-clausura

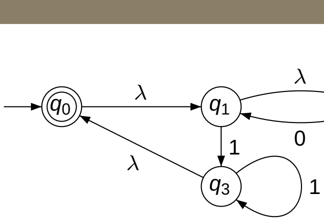
- Sea $q \in Q, \lambda - clausura(q) = \{q\} \cup \{q' | q'$ es accesible desde $q$ a través de caminos etiquetados con $\lambda\}$.
- Sea $P \subseteq Q, \lambda - clausura(P) = \bigcup_{p \in P} \lambda - clausura(p)$.

## Extensión a cadenas

$\forall q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$:

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = \lambda - clausura(q)$
- $\hat{\delta}(q, xa) = \lambda - clausura\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\right)$

# Ejemplo




## $\lambda -$ *clausuras*

- $\lambda - clausura(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\lambda - clausura(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- $\lambda - clausura(q_2) = \{q_2\}$
- $\lambda - clausura(q_3) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

# Ejemplo

## Cálculo de $\hat{\delta}(q_0, 01)$

$\hat{\delta}(q_0, 01) = \lambda - clausura(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, 0)} \delta(p, 1))$ (1)

$\hat{\delta}(q_0, 0) = \lambda - clausura(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, \lambda)} \delta(p, 0))$ (2)

$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \lambda - clausura(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$.

Sustituyendo en (2):

$\hat{\delta}(q_0, 0) = \lambda - clausura(\bigcup_{p \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta(p, 0)) = \lambda - clausura(\emptyset \cup \emptyset \cup \{q_1\}) = \lambda - clausura(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$.

Sustituyendo en (1):

$\hat{\delta}(q_0, 01) = \lambda - clausura(\bigcup_{p \in \{q_1, q_2\}} \delta(p, 1)) = \lambda - clausura(\{q_2\} \cup \{q_3\}) = \lambda - clausura(\{q_2, q_3\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$.

En un *AF* $\lambda$, $\hat{\hat{\delta}}(q, a)$ no es necesariamente igual que $\delta(q, a)$ y $\hat{\hat{\delta}}(q, \lambda)$ no es necesariamente igual que $\delta(q, \lambda)$.
Es necesario distinguir entre $\delta$ y $\hat{\hat{\delta}}$.

### Lenguaje aceptado por un *AF* $\lambda$

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un *AF* $\lambda$, se define el *lenguaje aceptado* por el *AF* $\lambda$ $A$ como

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* | \hat{\hat{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}.$$

# Equivalencia entre *AFN* y $AF\lambda$

Todo *AFN* se puede interpretar como un $AF\lambda$ para el que se cumple que $\forall q \in Q \quad \lambda-clausura(q) = \{q\}$.

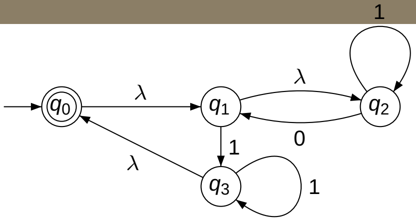
## Equivalencia entre *AFN* y $AF\lambda$

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un $AF\lambda$. Definimos un *AFN* $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$ donde:

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{si} \quad \lambda-clausura(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ F & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La función $\delta'$ se define como:
$\forall q \in Q, a \in \Sigma \quad \delta'(q,a) = \hat{\delta}(q,a)$.

# Ejemplo




## $\lambda -$ *clausuras*

- $\lambda - \textit{clausura}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\lambda - \textit{clausura}(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- $\lambda - \textit{clausura}(q_2) = \{q_2\}$
- $\lambda - \textit{clausura}(q_3) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

# Ejemplo



| | **0** | **1** |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ |
| $q_1$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ |
| $q_2$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_3$ | $\{q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ |

El conjunto de estados finales $F = \{q_0\}$ ya contiene el estado inicial, entonces $F' = F$.