Tema 4: Espais Vectorials

Bloc 1: Conceptes bàsics sobre espais vectorials

1. **Espai vectorial**
2. Dependència e independència lineal
3. Sistemes generadors i bases
   - Matrius de canvi de base
4. Subespais vectoriales

Definició d'espai vectorial

Direm que un conjunt no buit V és un espai vectorial real (o complex) si:
(1) En V hi ha definida una operació interna, que denotarem per $+$:

$$\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$$

verificant les següents propietats:

(s1) Propietat commutativa: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.

(s2) Propietat associativa: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$.

(s3) Element neutre: Existeix un element $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in V$.

(s4) Element oposat: $\forall \vec{x} \in V$ existeix un element $-\vec{x} \in V$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

(2) En V hi ha definida una operació externa amb escalars en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$):

$$\vec{u} \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}(\text{ o } \mathbb{C}) \Rightarrow \lambda \vec{u} \in V$$

verificant les següents propietats:

(m1) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$.

(m2) $(\lambda + \beta)\vec{x} = \lambda \vec{x} + \beta \vec{x}, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall \vec{x} \in V$.

(m3) $(\lambda\beta)\vec{x} = \lambda(\beta\vec{x}), \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall \vec{x} \in V$.

(m4) $1\,\vec{x} = \vec{x}, \ \forall \vec{x} \in V$.

Notacions i exemples

Notació

Usualment els elements de V s'anomenen vectors i els elements de $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) escalars. La operació externa s'anomena producte per escalars.

Exemples

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \ \forall i\}$ és un espai vectorial real amb les operacions suma i producte per un escalar usuals.
- $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C} \ \ \forall i\}$ és un espai vectorial complex amb les operacions suma i producte per un escalar usuals.
- El conjunt de totes les matrius $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (o $M_{m\times n}(\mathbb{C})$) és un espai vectorial real (complex) amb les operacions: suma de matrius i producte escalar-matriu.

Més exemples

- Exemple: El conjunt $\mathbb{R}[x]$ dels polinomis en una indeterminada amb coeficients reals és un espai vectorial amb la suma usual de polinomis i el producte usual d'un polinomi per una constant.
- Exemple: Donat un enter positiu n, el conjunt dels polinomis de $\mathbb{R}[x]$ de grau $\leq n$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

que denotarem per $\mathbb{R}_n[x]$, és també un espai vectorial amb les mateixes operacions.

Propietats immediates

Propietats

Siga V un espai vectorial. Per a qualsevol parella d'escalars α i β i qualsevol parella de vectors $\vec{u}, \vec{v} \in V$ es verifiquen les següents propietats:

1. $0\vec{u} = \vec{0}$.
2. $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.
3. Si $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, aleshores $\alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$.
4. $-(\alpha\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u})$.
5. Si $\alpha\vec{u} = \beta\vec{u}$ i $\vec{u} \neq \vec{0}$, aleshores $\alpha = \beta$.
6. Si $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$ i $\alpha \neq 0$, aleshores $\vec{u} = \vec{v}$.

Combinació lineal

La següent definició és una extensió, a un espai vectorial abstracte, del concepte de combinació lineal que s'ha vist per a vectors de $\mathbb{R}^n$.

Definició

Siga V un espai vectorial i siga S un subconjunt de V. Direm que un vector $\vec{u}$ és combinació lineal dels vectors de S si existeixen vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de S tals que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n,$$

on $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ són escalars (anomenats coeficients de la combinació lineal).

Exemple: Si en $\mathbb{R}^4$ considerem el subconjunt de vectors $S = \{\vec{x} = (1, 0, -1, 3), \vec{y} = (0, 2, -4, 5)\}$ aleshores el vector $\vec{u} = (2, -2, 2, 1)$ és combinació lineal dels vectors de S ja que

$$(2, -2, 2, 1) = 2\,\vec{x} - \vec{y}\,.$$

Exemples

Exemple

El vector $\vec{0}$ és combinació lineal de qualsevol conjunt de vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ ja que

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n.$$

Exemple

Siga el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ següent:
$S = \{\vec{v}_1 = (1,3,4,-2), \vec{v}_2 = (0,-2,4,1), \vec{v}_3 = (1,1,1,1)\}$. El vector $\vec{w} = (-1,1,9,-6)$ és una combinació lineal dels vectors en S perquè

$$\vec{w} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3.$$

Els coeficients són $2, 1$ i -3.

Exemples

Exemple

Considerem l'espai vectorial de les matrius 2×2 sobre $\mathbb{C}$ i el conjunt de vectors

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 3 & 2+5i \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3i \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1-5i & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

El vector $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1-4i & 8 \\ -3+3i & -1+2i \end{bmatrix}$ és una combinació lineal dels vectors d'aquest conjunt perquè

$$\vec{w} = i\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \vec{v}_3.$$

Els coeficients són i, 0 i 1.

Exemple

En $\mathbb{R}[x]$ considerem els vectors $\{\vec{p} = 2 + x - 3x^3, \vec{q} = -1 + x^4\}$. El vector $\vec{r} = 4 + x - 3x^3 - 2x^4$ es combinació lineal de $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ja que $\vec{r} = \vec{p} - 2\vec{q}$. Els coeficients són 1 i -2.

Per saber si un vector v és combinació lineal dels vectors $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ podem fer el següent:

1. Construir una matriu A les columnes de la qual siguen els vectors $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
2. Si el sistema $A \cdot x = v$ és compatible, el vector v es combinació lineal dels vectors $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y al resoldre el sistema obtindrem els coeficients de la combinació lineal.
3. Si el sistema $A \cdot x = v$ és incompatible, aleshores el vector v no és combinació lineal de eixos vectors.

Dependència e independència lineal de vectors

Definició

Direm que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ és un conjunt linealment independent (o lliure) o que els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ són linealment independents si, donada una combinació lineal nul·la

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0},$$

necessariament s'ha de cumplir que tots els escalars λ_i són iguals a zero.

En cas contrari, és a dir, si podem obtenir la igualtat anterior amb algún $\lambda_i \neq 0$, direm que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ és un conjunt de vectors linealment dependent (o lligat) o que els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ són linealment dependents.

Dependència e independència lineal de vectors

Exemple

Si un conjunt de vectors S contè al vector zero $\vec{0}$ aleshores és lligat (linealment dependent).

Exemple

Un conjunt format per un únic vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ és lliure (linealment independent).

Dependència e independència lineal de vectors

Exemple

Entre els vectors del conjunt
$S = \{\vec{v}_1 = (1,2,-1), \vec{v}_2 = (1,0,1), \vec{v}_3 = (1,5,-4), \vec{v}_4 = (0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
hi ha la següent relació de dependència lineal:

$$5\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4 = \vec{0}.$$

Per tant es tracta d'un conjunt linealment dependent.
Observem que esta relació no trivial permet expressar qualsevol dels vectors amb coeficient $\lambda_i \neq 0$ com a combinació lineal dels altres:

- aïllant $\vec{v}_1$ tenim:
$$\vec{v}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_2 + \frac{2}{5}\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4,$$
- aïllant $\vec{v}_2$:
$$\vec{v}_2 = \frac{5}{3}\vec{v}_1 - \frac{2}{3}\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4,$$
- i aïllant $\vec{v}_3$:
$$\vec{v}_3 = \frac{5}{2}\vec{v}_1 - \frac{3}{2}\vec{v}_2 + 0\vec{v}_4.$$

Dependència e independència lineal de vectors

Propietat

Siga S un conjunt de vectors d'un espai vectorial V que té, almenys, dos elements. Les següents condicions són equivalents:

(a) S és linealment dependent.

(b) Almenys un dels vectors de S es pot expressar com a combinació lineal de la resta de vectors de S.

Exemple: dependéncia e independència lineal

El conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ donat per
$S = \{(1,0,1,2),(1,1,0,0),(1,1,1,1)\}$ és linealment independent.

Comprovació: L'objectiu és provar que l'única relació de dependència lineal entre els vectors de S és la trivial. Considerem:

$$\lambda_1(1,0,1,2) + \lambda_2(1,1,0,0) + \lambda_3(1,1,1,1) = (0,0,0,0), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Esta igualtat equival a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Així els coeficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ són les solucions del sistema d'equacions lineals homogeni $A\vec{\lambda} = \vec{0}$, on A és la matriu que té als vectors de S com a vectors columna. Aquest sistema resulta ser compatible determinat: l'única solució és

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

i, per tant, el conjunt S és linealment independent.

Llavors, per saber si un conjunt de vectors $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és un sistema lliure podem fer el següent:

1. Construir una matriu A les columnes de la qual siguen els vectors $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
2. Si el sistema homogeni la matriu de coeficients del qual és A és compatible determinat, el conjunt de vectors és un sistema lliure.
3. Si, per contra, aquest sistema homogeni és compatible indeterminat, aleshores el conjunt de vectors es un sistema lligat.

Sistema generador

Definició

Direm que un subconjunt S d'un espai vectorial V és un sistema generador de V, o que S genera V, si tot vector de V és combinació lineal de vectors en S; o, equivalentment, V és el conjunt de totes les combinacions lineals que es poden formar amb vectors de S.

Un espai vectorial V que admet un sistema generador finit es dirà que és de dimensió finita.

Els espais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, o $\mathbb{R}_n[x]$ són de dimensió finita, mentre que el espai dels polinomis $\mathbb{R}[x]$ no.

A partir d'ara

$$\boxed{\text{tots els espais vectorials considerats seran de dimensió finita.}}$$

Sistema generador

Exemple

Qualsevol vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es pot expressar de la següent forma:

$$\vec{x} = x_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots x_n(0, 0, \ldots, 0, 1).$$

és a dir, és combinació lineal dels vectors del conjunt $S_1 = \{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$. Així, S_1 és un sistema generador de $\mathbb{R}^n$, que és de dimensió finita.

Base de un espai vectorial

Definició

Un conjunt (finit) de vectors $\mathcal{B}$ d'un espai vectorial V és una base de E si és linealment independent i, a més , és un sistema generador de V.

Exemple 1: $\mathcal{B} = \{ (\overbrace{1, 0, \ldots, 0}^{n}), (\overbrace{0, 1, \ldots, 0}^{n}), \ldots, (\overbrace{0, 0, \ldots, 1}^{n}) \}$ és una base de $\mathbb{R}^n$, anomenada base canònica.

Exemple 2: El conjunt $\{ 1, x, x^2, \ldots, x^n \}$ és una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Pregunta natural:

$$\boxed{\text{Tot espai vectorial té una base?}}$$

Base d'un espai vectorial

Exemple 3: El conjunt $\mathcal{B} = (1,1,0),(1,0,2),(0,1,-1)$ és una base de $\mathbb{R}^3$, ja que si $\vec{v} = (a,b,c)$ és un vector qualsevol i expressem:

$$\vec{v} = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,2) + \lambda_3(0,1,-1)$$

aleshores s'obté el sistema d'equacions

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Com que aquest sistema és compatible determinat (el rang de la matriu de coeficients és 3) deduïm:

- $\mathcal{B}$ és un sistema generador de $\mathbb{R}^3$,
- $\mathcal{B}$ és un conjunt lliure (es pot comprovar considerant $\vec{v} = (0,0,0)$).

Per tant $\mathcal{B}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.

Base d'un espai vectorial

Propietat

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ és un sistema generador de V i un dels vectors $\vec{v}_i$ és combinació lineal dels vectors restants, aleshores el conjunt que s'obté eliminant $\vec{v}_i$:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n\}$$

és també un sistema generador de V.

Aplicant successivament esta propietat obtindrem un sistema generador minimal, que és lliure. Així:

Propietat

Tot sistema generador d'un espai vectorial V conté una base.

Coordenades d'un vector respecte d'una base

Quántes expressions admet un vector de V com a combinació lineal dels vectors d'una base?

Propietat-definició

Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ és una base de V aleshores qualsevol vector $\vec{x}$ de V s'expressa *de forma única* com a combinació lineal dels vectors d'aquesta base.

Els coeficients únics $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tals que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$$

s'anomenen coordenades del vector $\vec{v}$ respecte a la base $\mathcal{B}$.
Notació: $\vec{v} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$.

Coordenades d'un vector respecte d'una base

Exemple 1: Si considerem la base canónica

$$\mathcal{B} = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$$

les coordenades d'un vector $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ respecte d'aquesta base són precisament les components $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemple 2: Com hem comprovat abans el conjunt $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,2),(0,1,-1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. Per calcular les coordenades d'un vector $\vec{v} = (a, b, c)$ respecte de la base $\mathcal{B}$ plantegem

$$\vec{v} = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,2) + \lambda_3(0,1,-1)$$

Resolent el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

obtenim les coordenades de $\vec{v}$ respecte de la base $\mathcal{B}$.

Dimensió d'un espai vectorial

Propietat

Si $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ és una base de V i $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ és un conjunt de vectors amb $m > n$ aleshores S és lligat.

Conseqüència

Todas les bases d'un espai vectorial V tenen el mateix nombre d'elements.

Definició

S'anomena dimensió d'un espai vectorial V ($\dim V$) al nombre d'elements de qualsevol base de V.

Teorema (completació d'una base)

Siga $S = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \}$ un conjunt de vectors de V linealment independent. Entonces existeixen vectors $\vec{u}_{k+1}, \ldots, \vec{u}_n$ tals que

$$\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}, \ldots, \vec{u}_n \}$$

és una base de E.

Teorema (caracterització de bases)

Siga V un espai vectorial de dimensió n i siga $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \}$ un conjunt formado per n vectors. Són equivalents:

- $\mathcal{B}$ és una base de V.
- $\mathcal{B}$ és linealment independent.
- $\mathcal{B}$ és un sistema generador de V.

Matriu de canvi de base

Siguen

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} \;\; i \;\; \mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

dues bases d'un espai vectorial no trivial V. Suposem que els vectors de coordenades d'un vector

$$\vec{x} \in V$$

respecte d'aquestes bases són, respectivament:

$$\vec{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{i} \quad \vec{x}_{\mathcal{B}'} = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Quina relació hi ha entre els dos vectors de coordenades? Es pot calcular un d'ells a partir de l'altre?.

Matriu de canvi de base

Suposem conegudes les coordenades dels vectors de la base $\mathcal{B}'$ respecte de la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{v}_j = p_{1j}\vec{u}_1 + p_{2j}\vec{u}_2 + \cdots + p_{nj}\vec{u}_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Per tant:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{x}_{\mathcal{B}} = (x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + \cdots + x'_n\vec{v}_n)_{\mathcal{B}} = x'_1(\vec{v}_1)_{\mathcal{B}} + x'_2(\vec{v}_2)_{\mathcal{B}} + \cdots + x'_n(\vec{v}_n)_{\mathcal{B}}$$

$$= x'_1 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} + x'_2 \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x'_n \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

La matriu

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

s'anomena matriu de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Matriu de canvi de base

Així, el vector de coordenades d'un vector respecte de la base $\mathcal{B}$ es pot calcular a partir del de coordenades respecte de $\mathcal{B}'$ multiplicant per la matriu de canvi de base $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, es a dir:

Canvi de base

$$\vec{x}_{\mathcal{B}} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \vec{x}_{\mathcal{B}'} .$$

De la mateixa manera podem construir la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, $\mathrm{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. En aquest cas, es cumpleix:

Propietat

Les matrius de canvi de base

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \text{ i } \mathrm{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

són invertibles i una és la inversa de l'altra.

Matriu de canvi de base: Exemple

Exemple:

Considerem les bases de $\mathbb{R}^2$ següents:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(5,-1)\},\ \mathcal{B}_2 = \{(0,3),(2,5)\}.$$

Per a obtindre $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ hem de calcular els vectors de coordenades de cada vector de $\mathcal{B}_1$ respecte de la base $\mathcal{B}_2$ i posar-los en columnes. Així hem de resoldre dos sistemes d'equacions lineals amb la mateixa matriu de coeficients:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

Podem resoldre els dos sistemes simultàniament:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 5\\ 3 & 5 & 1 & -1\end{array}\right] \sim\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & -9/2\\ 0 & 1 & 1/2 & 5/2\end{array}\right].$$

Els vectors de coordenades que busquem són

$$(1,1)_{\mathcal{B}_2} = (-1/2, 1/2) \quad \text{i} \quad (5,-1)_{\mathcal{B}_2} = (-9/2, 5/2)$$

i la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ és

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}-1/2 & -9/2\\ 1/2 & 5/2\end{bmatrix}.$$

Matriu de canvi de base: Exemple

Exemple:
El vector de coordenades d'un cert vector $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ respecte de la base $\mathcal{B}_1$ de l'exercici anterior és

$$(-3, 5).$$

Utilitzant la matriu de canvi de base anterior, calcularem les coordenades de $\vec{u}$ respecte de la base $\mathcal{B}_2$:

$$\vec{u}_{\mathcal{B}_2} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\vec{u}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -9/2 \\ 1/2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Nota: La matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ es pot obtindre de forma anàloga, o bé calculant la matriu inversa de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_2} = \mathrm{M}^{-1}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1/2 & -9/2 \\ 1/2 & 5/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 9/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Subespais vectorials

Definició

Un subconjunt no buit E d'un espai vectorial V es diu que és un subespai vectorial de V si és un espai vectorial amb les operacions induïdes per les de V.

Caracterització de subespais vectorials

Un subconjunt E d'un espai vectorial V és un subespai vectorial de V si i només si es satisfan les següents condicions:

(a) E és tancat respecte a la suma: $\vec{a} + \vec{b} \in E \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in E$.

(b) E és tancat respecte al producte per un escalar: $\alpha\vec{a} \in E$ per a qualsevol vector $\vec{a}$ de E i per a qualsevol escalar α.

En particular: $\vec{0} \in E$.

Subespais vectorials

Exemple

Donat un espai vectorial V, l'espai vectorial trivial $\{\vec{0}\}$ i V són subespais vectorials de V anomenats subespais impropis. Els altres subespais vectorials de V es diu que són propis.

Exemples

- Qualsevol recta de $\mathbb{R}^2$ que passe per $(0,0)$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.
- Si n és qualsevol nombre enter ≥ 0 aleshores el conjunt de polinomis de grau menor o igual que n, $\mathbb{R}_n[x]$, és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathbb{R}[x]$.

Embolcall lineal

Propietat-Definició

Siga S un conjunt de vectors de V i denotem per $\langle S\rangle$ al conjunt de totes les combinacions lineals de vectors de S. Aleshores $\langle S\rangle$ és un subespai vectorial de V, que anomenarem embolcall lineal de S o subespai vectorial generat per S.

NOTA: $\langle S\rangle$ es el menor subespai vectorial de V que conté a S: $S \subseteq \langle S\rangle$.

ATENCIÖ!!! Si $S \neq \{\vec{0}\}$, aleshores $S \neq \langle S\rangle$.

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$$

$$\langle S\rangle = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Dimensió de subespais vectorials

Propietat

Siguen U_1 i U_2 dos subespais vectorials d'un espai vectorial V tals que $U_1 \subseteq U_2$. Aleshores:

(a) $\dim(U_1) \leq \dim(U_2)$.

(b) $\dim(U_1) = \dim(U_2)$ si i només si $U_1 = U_2$.

Exemples:

- Tots els subespais propis de $\mathbb{R}^2$ tenen dimensió 1, és a dir, són rectes que passen per l'origen de coordenades.
- Tots els subespais propis de $\mathbb{R}^3$ tenen dimensió 1 (rectes que passen per l'origen de coordenades) ó 2 (plans que passen per l'origen de coordenades).