# Àlgebra
# Solucions dels exercicis del Capítol 6 (Lliçó 22)
**Robert Fuster**

**Exercici 22.1.** *Calculeu el determinant de la matriu* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Desenvolupant aquest determinant per la segona columna obtenim

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ara desenvolupem per la tercera columna

$$= -2 \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Per la primera columna

$$= -2 \cdot 3 \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

I per la segona

$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \det \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

**Exercici 22.2.** *Calculeu el determinant de la matriu* $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -11 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= -5 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -11 & -1 \end{bmatrix} = -5(-5 + 22) = -85$$

**Exercici 22.3.** *Discutiu el sistema i, si és possible, apliqueu la Regla de Cramer per a resoldre'l:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

La matriu de coeficients és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

i el determinant d'aquesta matriu

$$\det \mathsf{A} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1$$

Per tant, hi podem aplicar la Regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det \mathsf{A}(1)}{\det \mathsf{A}} = \det \begin{bmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$x_2 = \frac{\det \mathsf{A}(2)}{\det \mathsf{A}} = \det \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$x_3 = \frac{\det \mathsf{A}(3)}{\det \mathsf{A}} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

**Exercici 22.4.** *Discutiu el sistema i, en els casos determinats, apliqueu la Regla de Cramer per a resoldre'l:*

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + abx_2 + x_3 &= b \\ x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

La matriu ampliada és aquesta:

$$\left[\mathsf{A} \mid \mathsf{B}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right]$$

El determinant de $\mathsf{A}$ és

$$\det \mathsf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix} = b \det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$= b(a+2) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} = b(a+2) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} = b(a+2)(a-1)^2$$

Així que el rang de $\mathsf{A}$ és 3 sempre que $b \neq 0$, $a \neq 1$ i $a \neq -2$. En aquest cas, el sistema és determinat i s'hi pot aplicar la Regla de Cramer; per exemple,

$$x_1 = \frac{1}{b(a+2)(a-1)^2} \det \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix} = \frac{b}{b(a+2)(a-1)^2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a+2)(a-1)^2} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & 1-b \\ 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a+2)(a-1)^2}(a-b)(a-1) = \frac{a-b}{(a+2)(a-1)}$$

En els casos especials,

(a) Si $b = 0$ $\operatorname{rang} \mathsf{A} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ és 1 per a $a = 1$ i 2 en cas contrari. I el rang de la matriu ampliada, $\operatorname{rang} \mathsf{B} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$. El determinant d'aquesta matriu és $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-a & a-1 \end{bmatrix} = 2a$, així que

(a1) Si $b = 0$ i $a \neq 0$, $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 2$ i $\operatorname{rang} \mathsf{B} = 3$. El sistema és incompatible.

(a2) Si $b = 0$ i $a = 0$, $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 2$ i $\operatorname{rang} \mathsf{B} = 2$. El sistema és indeterminat. Substituint $b = 0$, $a = 0$ el sistema lineal és $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Com que les files 1a i 3a són independents podem suprimir la segona equació i tindrem $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és dir, $x_1 = 1$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1$ (no és necessària la Regla de Cramer, perquè les incògnites ja estan separades).

(b) Si $b \neq 0$ i $a = 1$, $\operatorname{rang} \mathsf{B} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$, però $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 1$ i el sistema és incompatible.

(c) Si $b \neq 0$ i $a = -2$, $\operatorname{rang} \mathsf{B} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & 0 \\ 1 & b & -2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 3$ i el rang de $\mathsf{A}$ és 2 (sistema incompatible).

**Exercici 22.5.** ***(Valors i vectors propis)***

*Trobeu els valors del paràmetre $\lambda$ per als quals la matriu*

$$\mathsf{A}_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

no *és invertible i calculeu l'espai nul de la matriu $\mathsf{A}_\lambda$ per a cadascun d'aquests valors.*

La matriu no serà invertible si $\det \mathsf{A}_\lambda = 0$, així que calculem aquest determinant:

$$\det \mathsf{A}_\lambda = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

Per tant, si $\lambda \in \{1, -1, 2\}$ la matriu $\mathsf{A}_\lambda$ no és invertible. En qualsevol altre cas si que ho és.

L'espai nul de $\mathsf{A}_1$ és el conjunt de solucions del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

així que la solució és

$$\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}_1 = \{\alpha(1,0,1) :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

De manera semblant s'obtenen els altres dos espais nuls:

$$\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}_{-1} = \{\alpha(1,1,0) :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathrm{Nul}\,\mathsf{A}_2 = \{\alpha(0,0,1) :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$