Tema 1: Resolució de sistemes d'equacions lineals mitjançant operacions elementals. Matrius escalonades.

Bloc 3: Resolució de sistemes d'equacions lineals

Interpretació matricial

Tots els algorismes que consisteixen en l'aplicació successiva de diverses operacions elementals tenen una interpretació matricial, com a producte de matrius

Interpretació matricial

Si la matriu B s'obté a partir de A premultiplicant-hi les matrius elementals $E_1, E_2, \ldots, E_k$, és a dir, si

$$E_1 E_2 \ldots E_k A = B$$

llavors anomenant T al producte $E_1 E_2 \ldots E_k$ és clar que

$$TA = B.$$

Exemple: Interpretació matricial

Per exemple, si calculem la forma escalonada reduïda de la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(1/2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2(-1/4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/4 \end{bmatrix} = R$$

aleshores, si

$$T = E_2(-1/4)E_{1,2}(1/2)E_{2,1}(-2)$$

(en aqueix ordre!) tindrem $TA = R$.

Interpretació matricial

Aquesta matriu T tal que TA $=$ R, podem calcular-la simultàniament amb R si fem sobre la matriu identitat les mateixes operacions que hem fet sobre A.

Càlcul de la matriu de pas T

Construïm la matriu ampliada

$$\left[\mathrm{A} \mid \mathrm{I}\right]$$

i hi apliquem les operacions elementals que transformen A en R obtindrem R i T simultàniament.

$$\left[\mathrm{A} \mid \mathrm{I}\right] \xrightarrow{\mathrm{E}_1} \xrightarrow{\mathrm{E}_2} \dots \xrightarrow{\mathrm{E}_k} \left[\mathrm{TA} \mid \mathrm{TI}\right] = \left[\mathrm{R} \mid \mathrm{T}\right]$$

Exemple: Interpretació matricial

En el nostre exemple:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{1,2}(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2}(-1/4)} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right] = [T \mid R]$$

i per tant:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/4 \end{bmatrix}}_{R}$$

Mètode de Gauss amb pivotació parcial

En teoria, la combinació de l'algorisme de Gauss amb el de substitució regressiva ens proporciona la solució exacta de qualsevol sistema lineal.

Ara bé, quan el sistema es resol utilitzant un ordinador es poden produir alguns errors d'arrodoniment en els càlculs o en l'emmagatzemament de les variables.

Aquests errors es transmeten als càlculs posteriors i de vegades un petit error en un càlcul intermedi pot acabar produint un error inadmissible en el resultat final.

Exemple: pivotació parcial

Considerem el següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} 0{,}0001x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Apliquem el mètode de Gauss a la matriu ampliada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 10\,000 & 10\,000 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 10\,000 & 10\,000 \\ 0 & -9\,999 & -9\,998 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 10\,000 & 10\,000 \\ 0 & 1 & 0{,}9999 \end{bmatrix}$$

Hem arredonit els resultats a quatre xifres decimals. El sistema té la forma

$$\begin{aligned} x &= 10\,000 - 10\,000y \\ y &= 0{,}9999 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 10\,000 - 9\,999 = 1 \\ y &= 0{,}9999 \end{aligned}$$

Si en fer la substitució regressiva arredoníssem $y = 1$, obtindríem que $x = 0$. Per tant, un error d'una deumil·lèsima en una variable provoca un error d'una unitat en l'altra.

Exemple: pivotació parcial

Per evitar aquest tipus de problemes, hi ha una variant de l'algorisme d'eliminació, coneguda com eliminació amb pivotació parcial, que consisteix a triar com a pivot en el pas 1 aquell element de la columna que tinga major valor absolut. En el nostre exemple faríem:

$$\begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0{,}0001 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0{,}9999 & 0{,}9998 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}9999 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 - y \\ y &= 0{,}9999 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 - 0{,}9999 = 1{,}0001 \\ y &= 0{,}9999 \end{aligned}$$

En aquest cas, si arredonim $y = 1$, obtenim $x = 1$.

Resolució de sistemes simultanis

A vegades hem de resoldre diversos sistemes lineals amb la mateixa la matriu de coeficients però que difereixen en els termes independents.

L'algorisme de Gauss-Jordan permet resoldre'ls simultàniament de la següent manera:

- Es construeix una matriu ampliada amb tots els coeficients dels sistemes i tots els segons membres
- es calcula la forma escalonada reduïda d'aquesta matriu, i
- es discuteix la compatibilitat i es resol cada sistema.

Exemple: Resolució de sistemes simultanis

$$\begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y&=0 \\ x-y&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=1 \end{aligned}$$

Considerem la matriu

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La seua forma escalonada reduïda és

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

Així, tots els sistemes son compatibles determinats i les seues solucions són, respectivament, $(1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$ i $(1, 0)$.

Considerem els següents sistemes lineals:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= -5 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 9 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Construïm la matriu ampliada

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & -5 & 9 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right]$$

Aplicant-hi l'algorisme de Gauss-Jordan.obtenim la forma escalonada reduïda

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Les solucions dels tres sistemes són

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definicions

Anomenem espai nul o nucli d'una matriu A al conjunt de solucions del sistema homogeni $Ax = 0$. Es denota $NulA$ o $KerA$.

$$NulA = \{x : Ax = 0\}$$

Siga A una matriu. Si s és una solució particular del sistema de equacions $Ax = b$, aleshores

$$s + NulA$$

és el conjunt de solucions del sistema $Ax = b$. Es a dir, es pot demostrar que qualsevol solució del sistema $Ax = b$ es pot escriure com la suma d'una solució particular més una solució del sistema homogeni associat $Ax = 0$.

Exemple.

Donat el sistema de equacions $x + 2y + 3z = 4$ (sistema complet), és senzill comprovar que les seues solucions són de la forma:

$$(x, y, z) = \underbrace{(4, 0, 0)}_{\substack{\text{una solució} \\ \text{del sistema} \\ \text{complet}}} + \underbrace{\alpha(-2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1)}_{\substack{\text{totes les solucions del} \\ \text{sistema homogeni associat}}}$$

Exemple.

Considerem el següent sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ -2x + y = -3 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Obtenim que les solucions en forma paramètrica són

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Així, el conjunt de solucions del sistema és:

$$\{(2 + \alpha, 1 + 2\alpha, \alpha) : \alpha \in R\} =$$

$$(2, 1, 0) + \{\alpha(1, 2, 1) : \alpha \in R\}$$

Expressió vectorial d'un sistema de equacions lineals

Donat un sistema de m equacions amb n incògnites $A\vec{x} = \vec{b}$, aquest es pot escriure com

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

A aquesta expressió l'anomenarem *expressió vectorial del sistema*. Observeu que:

El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ és compatible (té solució) si i només si el vector $\vec{b}$ de termes independents és combinació lineal dels vectors columna de la matriu A.