DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Segundo parcial **13-01-2014** **Duración: 2 horas**

---

1. (0.5p) Compara el orden de magnitud de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \sqrt{n} \quad y \quad b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Para comparar los órdenes de magnitud tenemos que calcular el límite del cociente

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sqrt{n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \textit{(Stolz)}$$

$$\lim \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}) - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}})} =$$

$$\lim \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}}} =$$

$$\lim \frac{n+1-n}{\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}}} = \lim \frac{1}{\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}}} = \lim \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

como $n \gg 1$ podemos despreciar 1 frente a n,

$$\lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Este último paso también se puede resolver dividiendo numerador y denominador entre $\sqrt{n}$.

---

2. (1p) Resuelve la recurrencia

$$a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n$$

con las condiciones iniciales

$$a_1 = -1 \ y \ a_2 = 7$$

¿Qué orden de magnitud tiene a_n?

La ecuación característica asociada a la recurrencia es:

$$x^2 + 0x - 1 = 0,$$

que tiene dos raíces reales distintas $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Por tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$a_n^h = C_1 \cdot (1)^n + C_2 \cdot (-1)^n = C_1 + C_2 \cdot (-1)^n.$$

Por otro lado, una solución particular de la recurrencia completa será:

$$U_n^p = K \cdot 3^n.$$

Sustituyéndola en la ecuación completa podemos obtener el valor de K:

$$K \cdot 3^{n+2} = K \cdot 3^n + 8 \cdot 3^n,$$

dividiendo entre 3^n en ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$K \cdot 3^2 = K + 8,$$

por lo que $K = 1$. Con esto la solución de la ecuación completa nos queda:

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot (-1)^n + 3^n.$$

Ahora utilizamos las condiciones de contorno para encontrar el valor de las constantes C_1 y C_2:

$$\textit{para n=1} \ \Rightarrow \ a_1 = C_1 + C_2 \cdot (-1)^1 + 3^1 = -1 \ \Rightarrow C_1 - C_2 + 3 = -1,$$

$$\textit{para n=2} \ \Rightarrow \ a_2 = C_1 + C_2 \cdot (-1)^2 + 3^2 = 7 \ \Rightarrow C_1 + C_2 + 9 = 7.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos: $C_1 = -3$ y $C_2 = 1$ con lo que la solución es:

$$a_n = -3 + (-1)^n + 3^n.$$

Como $3 \ll 3^n$ y $(-1)^n \ll 3^n$ podemos concluir que $a_n \approx 3^n$.

---

3. a)$_{(0.3\text{p})}$ Calcula la suma exacta de la serie:

$$S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-3)^{n+1}}{2 \cdot 5^{2n-1}}.$$

b)$_{(0.5\text{p})}$ Aproxima el valor de $sin(1)$ con precisión de 10^{-5} a partir de la expresión:

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

---

a) Vamos a utilizar la fórmula de la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n \geq p} r^p = \frac{r^p}{1-r} \ \ si \ |r| < 1.$$

Por lo tanto tenemos que hacer operaciones dentro del sumatorio para poder aplicar la fórmula anterior:

$$S = \sum_{n \geq 1} \frac{(-3)^{n+1}}{2 \cdot 5^{2n-1}} = \frac{(-3)^1}{2 \cdot 5^{-1}} \sum_{n \geq 1} \frac{(-3)^n}{(5^2)^n} = \frac{-3 \cdot 5}{2} \cdot \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-3}{25} \right)^n = \frac{-15}{2} \cdot \left(\frac{\frac{-3}{25}}{1 - (\frac{-3}{25})} \right) = \frac{45}{56}.$$

b) La serie:

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para $x = 1$ es una serie alternada del tipo:

$$\sin(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!},$$

por lo que podemos utilizar el criterio de Leibniz para calcular el número de términos que tenemos que utilizar para aproximar la suma con un error menor que 10^{-5}. Como sabemos, el error cometido esta acotado por el valor absoluto del primer término que se ha despreciado:

$$E_N < |A_{N+1}| = \frac{1}{(2(N+1)+1)!},$$

para aproximar la suma bastaría con hallar un N tal que:

$$\frac{1}{(2N+3)!} < 10^{-5},$$

sustituimos N=1, 2, 3... hasta que logramos que la fórmula sea cierta:
para $N = 1 \Rightarrow \frac{1}{(2N+3)!} = 0.00833$,
para $N = 2 \Rightarrow \frac{1}{(2N+3)!} = 0.000198413$,
y para $N = 3 \Rightarrow \frac{1}{(2N+3)!} = 2.75573 \cdot 10^{-6}$, por lo que N=3 es la solución que estamos buscando, por tanto:

$$\sin(1) \simeq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 0.84147.$$

---

4. Sea

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{2n-1}}$$

a)$_{(0.4p)}$ Calcula la derivada $f'(x)$ de la serie anterior y súmala donde converja.

b)$_{(0.3p)}$ Integra el resultado anterior (calculando el valor adecuado de la constante de integración) y halla una expresión explícita para $f(x)$.

---

a) La derivada de la serie es:

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{2n-1}}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)\cdot 2^{2n-1}} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2^{-1}} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2^2)^n} = 2 \cdot \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

Aplicando la fórmula de la serie geométrica al sumatorio para $|x| < 4$ (radio de convergencia de la serie geométrica):

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\right) = \frac{8}{4-x}.$$

b) Ahora calculamos la integral del resultado anterior:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{8}{4-x}dx = 8 \cdot \int \frac{1}{4-x}dx = -8 \cdot \log(4-x) + C.$$

Para calcular el valor de la constante podemos utilizar que:

$$f(0) = \sum_{n\geq 0} \frac{0^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{2n-1}} = 0,$$

por lo tanto;

$$f(0) = -8 \cdot \log(4-0) + C = 0;\ C = 8 \cdot \log(4),$$

finalmente, sustituyendo y simplificando:

$$f(x) = -8 \cdot \log(4-x) + 8 \cdot \log(4) = 8 \cdot (\log(4) - \log(4-x)) = 8 \cdot \log\left(\frac{4}{4-x}\right)$$

.