

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT3 - Problemes proposats: MANIPULACIÓ I CÀLCUL D'INTEGRALS

1. Calcula les primitives que segueixen, reductibles a immediates:

a) $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ b) $\int \frac{2+3\cos(x)}{\sin^2(x)} dx$ c) $\int \frac{1+\log(x)}{3+x\log(x)} dx$ d) $\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx$

2. Calcula les primitives que segueixen per integració per parts:

a) $\int x \log(x) dx$ b) $\int \arcsin(x) dx$ c) $\int e^x \sin(x) dx$ d) $\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$

3. Calcula les primitives que segueixen a partir de canvis de variable convenients:

a) $\int x\sqrt{x-5} dx$ b) $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$ c) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

4. Calcula les integrals de Riemann que segueixen, aplicant la regla de Barrow. Es tindran en compte els mètodes d'integració per parts, substitució (canvi de variable) o una combinació d'ells.

a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ b) $\int_0^2 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ c) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x(x+4)} dx$ e) $\int_0^1 \arctan(x) dx$ f) $\int_0^2 x^2 e^{-x} dx$

g) $\int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx$ h) $\int_0^{\log(5)} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$ i) $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) dx$

j) $\int_2^{\pi} \cos(\sqrt{x-2}) dx$ k) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ l) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

5. a) Calcula l'àrea tancada per la gràfica de $y = x^2 + x - 2$ i l'eix OX , sobre l'interval $[-3, 2]$
b) Calcula l'àrea que limiten les funcions $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ i $g(x) = \frac{x-1}{8x}$ en el primer quadrant.

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT3 - Exercicis addicionals: MANIPULACIÓ I CàLCUL D'INTEGRALS

1. Utilitza la monotonia de l'operador integral per a:

- a) Acotar la integral $\int_2^5 \frac{f(x)}{x^4} dx$ si f és continua i $x^2 \leq f(x) \leq x^3$ per a $x \in [2, 5]$
- b) Justificar que $\left| \int_0^\pi e^{-x} \cos(x^2) dx \right| \leq 1 - e^{-\pi}$
- c) Acotar, sense resoldre ninguna integral, $\left| \int_0^\pi \frac{e^{-x} \sin(x)}{x^2+1} dx \right|$
- d) Millorar el resultat de c) calculant $\int_0^\pi \frac{dx}{x^2+1}$.

2. Calcula els valors de $L(f, P)$ i $U(f, P)$ per a la funció $f(x) = \frac{3-x}{3^x}$ i la partició $P = \{1, 2, 4, 7\}$.

*3. Considera la funció $f(x) = x^2$ i la partició, P_n , que divideix l'interval $[0, 1]$ en n parts iguals

- a) Calcula els valors de $L(f, P_n)$ i $U(f, P_n)$ tenint en compte que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} (2n+1)n(n+1)$
- b) Determina els límits de $L(f, P_n)$ i $U(f, P_n)$ quan $n \rightarrow \infty$
- c) Quin és el valor de $\int_0^1 x^2 dx$? Per què?

4. Calcula les integrals de Riemann que segueixen, aplicant la regla de Barrow. Hauràs de descomposar l'integrand en fraccions simples i es tindrà en compte el mètode de substitució (canvi de variable) en b) :

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$ b) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ c) $\int_{e-1}^{e+1} \frac{x^2+1}{x^4-x^2} dx$

5. Calcula $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ amb dos canvis de variable distints i verifica que trobes el mateix resultat.

*6. a) Si f és una funció senar, integrable Riemann en $[-b, b]$, verifica que $\int_{-b}^b f(x) dx = 0$

b) Què pots dir si f és parella?

*7. a) Tenint en compte el problema anterior, calcula $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ després d'aplicar el canvi de variable $x = 3 \cos(t)$

b) Dedueix de l'apartat anterior el valor de l'àrea d'una circumferència de radi 3.

*8. a) Troba el valor de l'àrea del recinte limitat entre les corbes $x^2 = 2py$ i $y(x^2 + p^2) = p^3$, $p > 0$

b) Troba el valor de l'àrea tancada entre $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$ i $y_2 = |x|$

c) Calcula l'àrea de la regió limitada entre les gràfiques de $\sin(x)$ i de $\cos(x)$ en l'interval $[0, \pi]$

*9. Calcula, per a tots els possibles valors de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el valor de $\int_{-\alpha}^{\alpha} |\alpha - |x| + x| \, dx$.

*10. Calcula les primitives de les funcions secant i cosecant:

$$\int \sec(x) dx = \int \frac{dx}{\cos(x)} \quad \text{i} \quad \int \csc(x) dx = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

*11. a) Calcula $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \, dx$

b) Aplicant algun canvi de variable a la integral de l'apartat anterior, calcula

$$\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad , \quad \int_{\pi}^{\pi/2} \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx \quad , \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x) dx$$

*12. Mitjançant un canvi de variable similar al canvi del problema 8, calcula $\int_0^a x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$.

*13. a) Calcula el valor de l'àrea tancada entre $y_1 = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} + \frac{1}{2}$ i $y_2 = |x|$

b) Troba el valor de $k > 0$ de manera que la corba $y = k \sin(x)$ dividisca en dues parts de la mateixa àrea el recinte determinat per $y = \cos(x)$ i els eixos coordenats, en l'interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

*14. La taxa de variació d'una població de conills satisfà, per a t en anys,

$$P'(t) = \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 17} = \frac{-25(t - 4)}{(t - 4)^2 + 1}$$

a) En quin moment és màxima la població de conills?

b) Si la població inicial és de 50 conills quin és el màxim nombre de conills esperable?

c) S'extingiran els conills? Quan?