Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 11
Robert Fuster

Exercici 11.1. *Feu servir la definició de base per a determinar si els conjunts següents són o no bases de l'espai* $\mathbb{R}^2$.

(a) $B_1 = \{(0,-4),(1,0)\}$ (b) $B_2 = \{(1,-1),(-2,2)\}$ (c) $B_3 = \{(1,-1),(2,1),(1,1)\}$

(a) Qualsevol vector (a,b) de $\mathbb{R}^2$ es pot escriure com $(a,b) = -\frac{b}{4}(0,-4) + a(1,0)$, així que aquest conjunt genera $\mathbb{R}^2$. A més, és linealment independent, perquè

$$\alpha_1(0,-4) + \alpha_2(1,0) = (0,0) \iff (\alpha_2, -4\alpha_1) = (0,0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

així que, B_1 és base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Aquest conjunt no és linealment independent, perquè $2(1,-1)+(-2,2) = (0,0)$, així que no és base.

(c) B_3 genera $\mathbb{R}^2$, però tampoc no és linealment independent (ni base), perquè

$$-(1,-1) + 2(2,1) - 3(1,1) = (0,0)$$

Exercici 11.2. *Justifiqueu si els conjunts següents són o no linealment independents, generadors o bases de* $\mathbb{R}^3$.

(a) $S_1 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ (b) $S_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(2,5,5)\}$
(c) $S_3 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1),(2,5,5)\}$ (d) $S_4 = \{(1,1,1),(2,5,5)\}$

(a) S_1 és base de $\mathbb{R}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_1} = 3$.

(b) S_2 no és generador, ni independent, ni tampoc base de $\mathbb{R}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_2} = 2$.

(c) S_3 és generador, però no independent ni base de $\mathbb{R}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_3} = 3$.

(d) S_4 és independent, però no generador ni base de $\mathbb{R}^3$, perquè $\operatorname{rang} \mathsf{M}_{S_4} = 2$.

Exercici 11.3. *Vertader o fals (justifiqueu la resposta):*
(a) Si S és un conjunt de tres vectors en $\mathbb{R}^4$ *llavors S és linealment independent.*
(b) Si S és un conjunt de cinc vectors en $\mathbb{R}^4$ *llavors S és linealment dependent.*
(c) Si S és un conjunt de tres vectors en $\mathbb{R}^4$ *llavors S no és generador.*
(d) Si S és un conjunt de cinc vectors en $\mathbb{R}^4$ *llavors S és generador.*
(e) Si S és un conjunt de quatre vectors en $\mathbb{R}^4$ *llavors S és base.*
(f) Si S és un conjunt linealment independent de quatre vectors en $\mathbb{R}^4$ *llavors S és base.*
(g) Si S és un conjunt de quatre vectors en $\mathbb{R}^4$ *i S genera* $\mathbb{R}^4$*, llavors S és base.*

(a) Fals. Per exemple, $S = \{(1,1,1,1),(2,2,2,2),(3,3,3,3)\}$ no és linealment independent.

(b) Vertader: una matriu 4×5 no pot tenir rang 5 (en $\mathbb{R}^5$ no pot haver-hi més de quatre vectors en un conjunt linealment independent).

(c) Vertader: una matriu 4×3 no pot tenir rang 4 (en $\mathbb{R}^4$ no pot haver-hi menys de quatre vectors en un conjunt generador).

(d) Fals. Per exemple, $S = \{(1,1,1,0),(1,2,3,0),(0,1,1,0),(-2,3,3,0),(0,0,1,0)\}$ no és generador.

(e) Fals. Per exemple, $S = \{(1,1,1,0),(1,2,3,0),(0,1,1,0),(-2,3,3,0)\}$ no és base de $\mathbb{R}^4$.

(f) Cert. Si S és linealment independent i té quatre vectors, llavors $\operatorname{rang} M_S = 4$ i, llavors S és base de $\mathbb{R}^4$.

(g) Cert. Si S és generador i té quatre vectors, llavors $\operatorname{rang} M_S = 4$ i, en conseqüència, S és base de $\mathbb{R}^4$.

Exercici 11.4. *(a) Proveu que els conjunts $B_1 = \{(1,1),(-1,2)\}$ i $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ són bases de $\mathbb{R}^2$. (b) Calculeu els vectors de coordenades ($\vec{u}_{B_1}$ i $\vec{u}_{B_2}$) del vector $\vec{u} = (1,7)$ respecte a cada una d'aquestes bases. (c) Trobeu el vector $\vec{v}$ sabent que les coordenades d'aquest vector respecte a la base B_1 són $\vec{v}_{B_1} = (2,2)$.*

(a) Aquests dos conjunts són bases de $\mathbb{R}^2$ perquè

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = 2$$

(b) Hem d'expressar el vector $\vec{u}$ com a combinació lineal dels vectors de B_1 i dels de B_2, és a dir, resoldre els sistemes lineals

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\ 7\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\ 7\end{bmatrix}$$

Per a fer-ho trobarem les formes esglaonades reduïdes de les matrius ampliades respectives:

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 7\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 6\end{array}\right]$$

Per tant, les coordenades són aquestes:

$$\vec{u}_{B_1} = (3,2) \qquad \vec{u}_{B_2} = (1,6)$$

(c) Si $\vec{v}_{B_1} = (2,2)$ llavors

$$\vec{v} = 2(1,1) + 2(-1,2) = (0,6)$$

Exercici 11.5. *Trobeu les matrius de canvi de base* $\mathsf{M}_{B_1B_2}$ *i* $\mathsf{M}_{B_2B_1}$ *on* B_1 *i* B_2 *són les bases de* $\mathbb{R}^2$ *de l'exercici anterior.*

La matriu $\mathsf{M}_{B_1B_2} = \mathsf{M}_{B_2}^{-1}\mathsf{M}_{B_1}$ la podem obtenir cercant la forma esglaonada reduïda de la matriu $\left[\mathsf{M}_{B_2} \mid \mathsf{M}_{B_1}\right]$:

$$\left[\mathsf{M}_{B_2} \mid \mathsf{M}_{B_1}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

així que $\mathsf{M}_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

La matriu $\mathsf{M}_{B_2B_1}$ podríem obtenir-la de la mateixa manera, però també invertint $\mathsf{M}_{B_1B_2}$:

$$\left[\mathsf{M}_{B_1B_2} \mid \mathrm{I}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(1/3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(1/3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

així que $\mathsf{M}_{B_2B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

Exercici 11.6. *Calculeu les coordenades del vector* $\vec{u} = (1, 2, -1, -2)$ *respecte a la base*

$$B = \left\{ \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,1), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \frac{1}{2}(1,1,1,1) \right\}$$

A l'exercici 9.5.Matrius ortogonalsExercici.2.9.5 hem vist que la matriu que té per columnes els vectors de B és ortogonal. Per tant, B és una base ortonormal, així que

$$\vec{u}_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$