Primer Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(1½ puntos)**

Dados los lenguajes:

$$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ 01 \notin Seg(x)\}$$
$$L_2 = \{x0 \ : \ x \in \{0,1\}^*\},$$

describa los lenguajes obtenidos como resultado de realizar las siguientes operaciones:

(a) $0^{-1}L_1$.

Solución:

$0^{-1}L_1 = \{0\}^*$.

(b) L_2^2.

Solución:

$L_2^2 = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ 0 \in Suf(x) \wedge |x|_0 \geq 2\}$.

(c) L_2^*.

Solución:

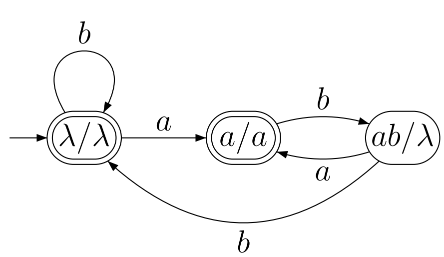
$L_2^* = L_2 \cup \{\lambda\}$.

Ejercicio 2 **(3 puntos)**

Proporcione un AFD para cada uno de los siguientes lenguajes:

(a) $L = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ ab \notin Suf(x) \wedge aa \notin Seg(x)\}$.

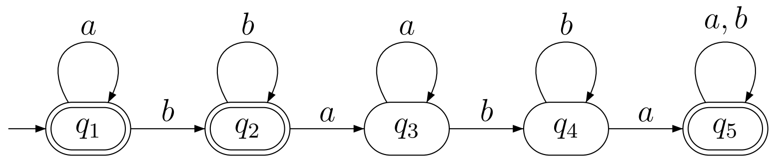
Solución:



Nombramos cada estado con el sufijo de las palabras que lo alcanzan y la parte del segmento aa que puede conducir a encontrarlo.

(b) El lenguaje $L \subseteq \{a, b\}^*$ que contiene las palabras que no contienen el segmento ba o que contienen más de un segmento ba.

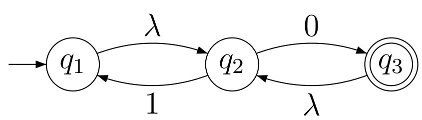
Solución:



Nótese que alcanzar el estado q_3 implica haber encontrado el primer segmento ba, siendo necesario llegar al estado q_5 para encontrar el segundo. A partir de encontrar el segundo segmento la condición de aceptación ya se ha cumplido independientemente del sufijo de la palabra que quede por procesar.

Ejercicio 3 **(1½ puntos)**

Enumere las 10 primeras palabras en orden canónico y describa el lenguaje aceptado por el siguiente autómata:



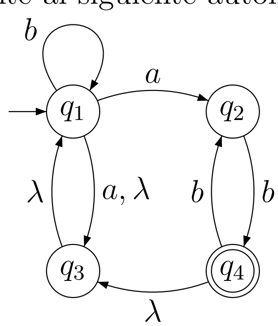
Solución:

$0, 00, 10, 000, 010, 100, 110, 0000, 0010, 0100$

$L = \{x0 \;:\; x \in \{0, 1\}^*\}$

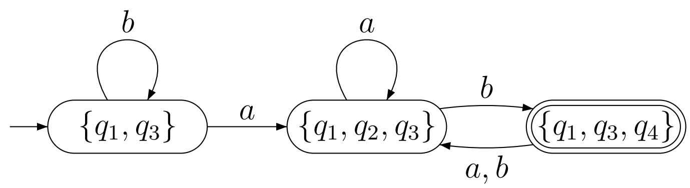
Ejercicio 4 **(2 puntos)**

Obtener un AFD equivalente al siguiente autómata:

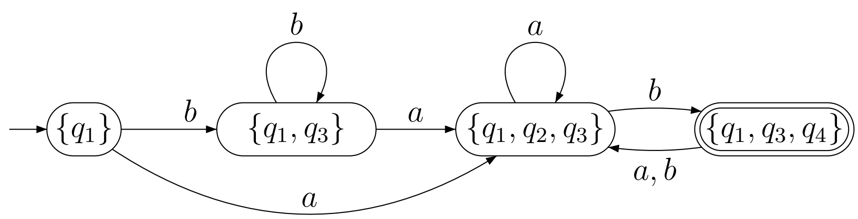


Solución:

Aplicando los algoritmos vistos en clase, se obtiene el siguiente autómata:



o este otro si se obtiene como paso intermedio un AFN equivalente al AFλ del ejercicio:



Ejercicio 5 **(2 puntos)**

Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas o no.

(a) Dados dos lenguajes $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, Si $L_1 \subseteq L_2$, entonces $L_1^r \subseteq L_2^r$.

Solución:

La afirmación es cierta.

Si $L_1 \subseteq L_2$, entonces puede encontrarse un lenguaje X tal que $L_2 = L_1 \cup X$. De donde se obtiene:

$$L_2^r = (L_1 \cup X)^r$$
$$L_2^r = L_1^r \cup X^r$$

y por lo tanto $L_1^r \subseteq L_2^r$.

(b) Si $L^r \subseteq L$, entonces $L^r = L$.

Solución:

La afirmación es cierta.

Teniendo en cuenta el apartado anterior y aplicandolo a la premisa de la afirmación, se tiene que:

$$L^r \subseteq L \;\Rightarrow (L^r)^r \subseteq L^r \;\Rightarrow L \subseteq L^r \;\Rightarrow$$

Dado que $L^r \subseteq L$ y $L \subseteq L^r$ se cumple que $L = L^r$.

Segundo Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(1½ puntos)**

Determine si el lenguaje $L = \{x \in \{a, b, c\}^* \ : \ |x|_b \leq 2 \vee |x|_a = |x|_c\}$ es o no regular.

Solución:

Sea el lenguaje infinito $C = \{bbba^n \ : \ n \geq 1\}$, y considerese un par cualesquiera de palabras de C distintas $u = bbba^i$ y $v = bbba^j$ $(i \neq j)$.

Independientemente de las palabras escogidas, existe una palabra $w = c^i$, tal que $uw = bbba^i c^i$ pertenece al lenguaje L y donde $vw = bbba^j c^i$ no pertenece a L (es importante considerar al menos tres símbolos b porque en caso de no hacerlo ambas palabras uw y vw pertenecerían al lenguaje).

Por lo tanto, en un posible autómata finito para L, las palabras u y v deberían alcanzar estados distintos. Dado que la elección de las palabras es indistinta y que el tamaño de C es infinito, no es posible que el autómata para el lenguaje tenga un número finito de estados, por lo que el lenguaje no es regular.

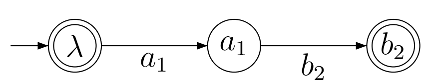
De forma equivalente, por el mismo argumento, cada una de las palabras de C pertenece a una clase distinta de la relación R_L, por lo que esta relación no es de índice finito, llegando a la misma conclusión de que L no es regular.

Ejercicio 2 **(2 puntos)**

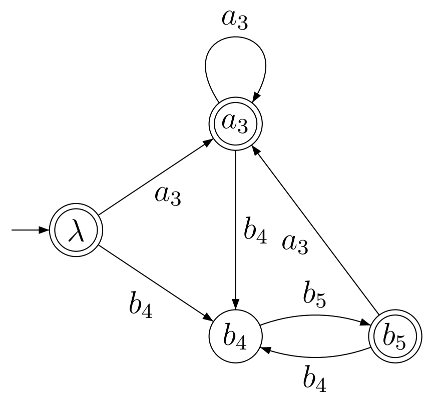
Obtenga los autómatas de posición y follow para la expresión $\alpha = (ab + \lambda)(a + bb)^*$. Muestre autómatas locales estandar de subexpresiones para ilustrar el proceso de construcción.

Solución:

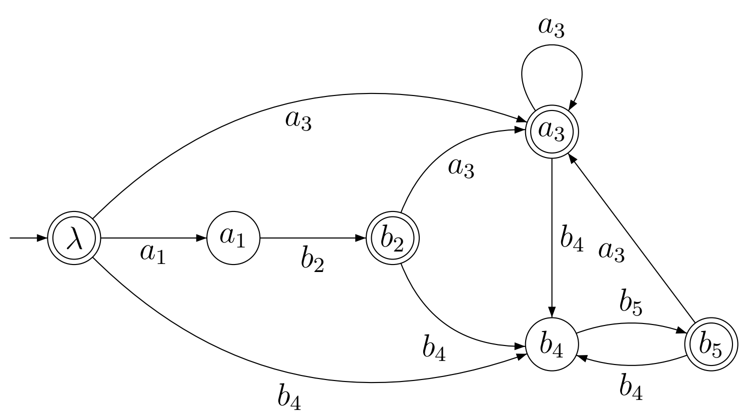
Considerando la expresión linearizada $\overline{\alpha} = (a_1b_2 + \lambda)(a_3 + b_4b_5)^*$, el autómata local estandar para la subexpresión $a_1b_2 + \lambda$ es el siguiente:



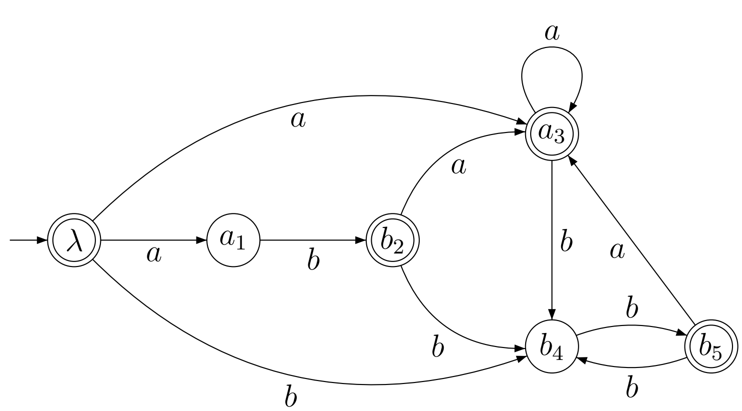
y el autómata local estandar para la subexpresión $(a_3 + b_4b_5)^*$ es el siguiente:



y el autómata local estandar de que acepta $L(\overline{r})$ es:



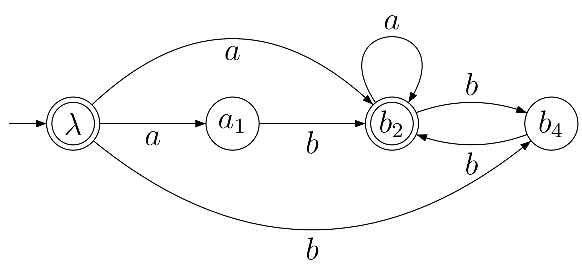
y el autómata de posición para α:



La relación $follow$ para este autómata se resume en la siguiente tabla:

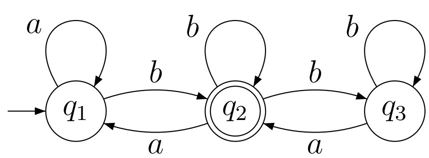
	$\in F$	$sucesores$
λ	T	$\{a_1, a_3b_4\}$
a_1	F	$\{b_2\}$
b_2	T	$\{a_3, b_4\}$
a_3	T	$\{a_3, b_4\}$
b_4	F	$\{b_5\}$
b_5	T	$\{a_3, b_4\}$

con lo que el autómata follow es el siguiente:



Ejercicio 3 **(1½ puntos)**

Utilice el método visto en clase para analizar el siguiente autómata y obtener una expresión regular que describa el lenguaje aceptado por él.



Solución:

El sistema de ecuaciones en expresiones regulares asociado al autómata es:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 \\ X_2 = aX_1 + bX_2 + bX_3 + \lambda \\ X_3 = aX_2 + bX_3 \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en la segunda ecuación se obtiene que:

$$X_3 = b^*aX_2,$$

sustituyendo en la segunda ecuación el valor de X_3 obtenemos:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 \\ X_2 = aX_1 + bX_2 + bb^*aX_2 + \lambda = aX_1 + (b + bb^*a)X_2 + \lambda \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en la segunda ecuación se obtiene que:

$$X_2 = (b + bb^*a)^*(aX_1 + \lambda),$$

con lo que sustituyendo en la ecuación de X_1 se obtiene:

$$X_1 = aX_1 + b(b + bb^*a)^*aX_1 + b(b + bb^*a)^* = (a + b(b + bb^*a)^*a)X_1 + b(b + bb^*a)^*$$

y aplicando por última vez el lema de Arden se obtiene:

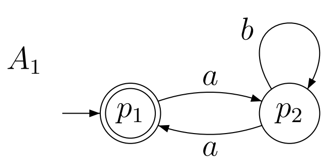
$$X_1 = (a + b(b + bb^*a)^*a)^*b(b + bb^*a)^*.$$

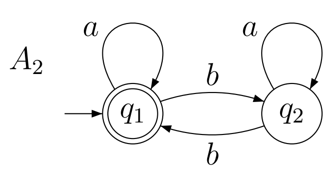
El análisis puede reducirse teniendo en cuenta la relación entre la primera y segunda ecuaciones, que permite obtener el sistema:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 \\ X_2 = X_1 + bX_3 + \lambda \\ X_3 = aX_2 + bX_3 \end{cases}$$

Ejercicio 4 **(2 puntos)**

Dados los autómatas y el homomorfismo:



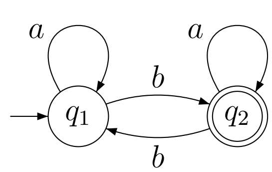


$$\begin{cases} h(0) = aba \\ h(1) = bb \end{cases}$$

obtenga un AFD que acepte el lenguaje $(000)^{-1}(h^{-1}(L(A_1) \cup \overline{L(A_2)}))$.

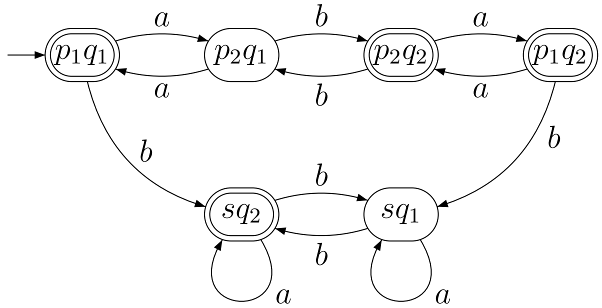
Solución:

Obtenemos primero el complementario del segundo autómata, que al ser completo produce:

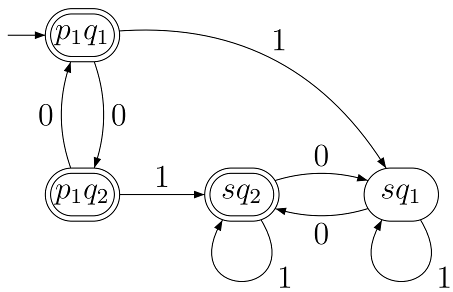


Para obtener un AFD que identifique la unión de los lenguajes es necesario completar el primer autómata con un estado sumidero s. El autómata para el lenguaje $L(A_1) \cup$

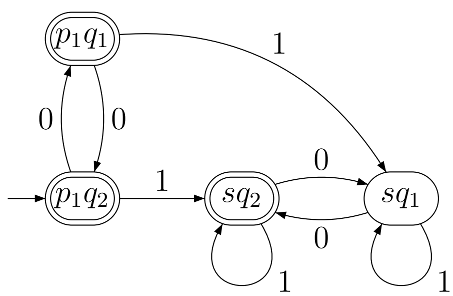
$\overline{L(A_2)}$ es:



a partir de este autómata aplicamos la construcción para el homomorfismo inverso obteniendo:



y finalmente aplicamos la construcción para el cociente, obteniendo la solución al ejercicio:



Ejercicio 5 **(1½ puntos)**

Dado $\Sigma = \{a, b\}$, la operación P sobre lenguajes se define como aquella que borra los dos primeros símbolos de las palabras con sufijo aa, no modificando el resto de palabras del lenguaje.

Determine si P es una operación de cierre para la clase de los lenguajes regulares.

Ejemplo: Dado $L = \{\lambda, aa, bab, bbaa\}$, según la definición, $P(L) = \{\lambda, bab, aa\}$.

Solución:

Denotamos con $L_{aa} = (a+b)^*aa$, el lenguaje (regular) de palabras con sufijo aa. Con esto, la operación P puede describirse como composición de operaciones:

$$\begin{aligned} P(L_1) = (aa)^{-1}(L \cap L_{aa}) \quad &\cup \\ (ab)^{-1}(L \cap L_{aa}) \quad &\cup \\ (ba)^{-1}(L \cap L_{aa}) \quad &\cup \\ (bb)^{-1}(L \cap L_{aa}) \quad &\cup \\ (L \cap \overline{L_{aa}}) \quad & \end{aligned}$$

por lo que, al considerar exclusivamente lenguajes regulares y al ser todas las operaciones utilizadas de cierre en la clase de los lenguajes regulares, la operación P también lo es.

Ejercicio 6 **(1½ puntos)**

Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

> Dados cualesquiera lenguajes $L_1 \in \mathcal{L}_3$ y $L_2 \notin \mathcal{L}_3$ tales que $L_2 \subseteq L_1$, siempre se cumple que $L_1 - L_2 \notin \mathcal{L}_3$.

Solución:

La afirmación es cierta.

Tenemos en cuenta que $L_2 \subseteq L_1$. Para reducir la notación consideremos $L_3 = L_1 - L_2$. Puesto que $L_2 \subseteq L_1$, se tiene que $L_2 = L_1 - L_3$.

Si L_3 fuera regular, entonces, al ser la diferencia de lenguajes una operación cerrada en la clase de los lenguajes regulares, L_2 también sería regular, lo que de acuerdo con el enunciado es una contradicción, por lo tanto, independientemente de los lenguajes L_1 y L_2, se cumple qu $L_3 = L_1 - L_2$ no es regular.