Álgebra **25 de marzo de 2019**
Primer parcial **2 horas**

APELLIDOS:	**GRUPO:**
NOMBRE:	

Cuestión 1 (2 pt) Determina el número de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales (usando el método de Gauss) en función de los valores de los parámetros a y b.

$$x + 3z = a$$

$$2x + y = 0$$

$$4x + by = 0$$

Calcula el conjunto de soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible (usando el método de Gauss). Justifica las respuestas.

Solución. Efectuando operaciones elementales a la matriz ampliada del sistema obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & b & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & -6 & -2a \\ 0 & b & -12 & -4a \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & -6 & -2a \\ 0 & 0 & 6b-12 & -4a+2ab \end{array}\right]$$

Distinguimos, así, los siguientes casos:

(1) $b \neq 2$. En este caso, los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada son ambos iguales a 3, que es el número de incógnitas del sistema. Aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Resolviendo, por sustitución regresiva, el sistema

$$x + 3z = a$$

$$y - 6z = -2a$$

$$(-12 + 6b)z = -4a + 2ab$$

se obtiene la solución

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}a \end{bmatrix}.$$

(2) $b = 2$. En este caso la matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & -6 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Independientemente del valor de a, los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son ambos iguales a 2, que es menor que el número de incógnitas. Por tanto, aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado. Por sustitución regresiva se obtiene el siguiente conjunto de soluciones:

$$\{(a - 3\lambda, -2a + 6\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Cuestión 2 (1 pt) Calcula la forma escalonada reducida de la matriz ampliada de un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas cuyo conjunto de soluciones es

$$\{(1, 0, 2, 0) + \alpha(0, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, -2, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Solución. La matriz requerida es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Cuestión 3 (1 pt) Sea A la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Calcula **explícitamente** la matriz X tal que $X \cdot A^t - 2A = I$.

Solución. Veamos primero que la matriz A es invertible calculando la forma escalonada reducida de la matriz:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Efectuando las operaciones elementales pertinentes se obtiene que el rango de A es 2 (con lo cual se trata de una matriz invertible) y que la mencionada forma escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right].$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como A es invertible, A^t también lo es, y su inversa es:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sumando $2A$ a ambos miembros de la ecuación del enunciado se obtiene:

$$X \cdot A^t = I + 2A.$$

Multiplicando ahora los dos miembros pot $(A^t)^{-1}$ (por la derecha):

$$X = (I + 2A)(A^t)^{-1}.$$

Por tanto:

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/2 \\ -2/3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cuestión 4 (1.5 pt) Calcula (explícitamente) una matriz T tal que $T \cdot M = R$, donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y R es la forma escalonada reducida de M. ¿Es T invertible? ¿Por qué?

Solución. Efectuando operaciones elementales a la matriz M obtenemos:

$$M \xrightarrow{\text{(fila 2)}-2\text{(fila 1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}\text{(fila 2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(fila 1)}-3\text{(fila 2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R.$$

Interpretando este proceso usando productos por matrices elementales:

$$E_{1,2}(-3) \cdot E_2(-1/5) \cdot E_{2,1}(-2) \cdot M = R.$$

Por tanto:

$$T = E_{1,2}(-2) \cdot E_2(-1/5) \cdot E_{2,1}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}.$$

Cuestión 5 (2.5 pt) Considera la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Responde a las siguientes cuestiones **justificando las respuestas** y **sin usar determinantes**:

(a) Calcula los valores de a para los cuales la matriz A es invertible. **Justifica la respuesta**.

(b) Para los valores de a obtenidos en (a): calcula A^{-1} y escribe las matrices A^{-1} y A como producto de matrices elementales. (Las matrices elementales deben ser escritas explícitamente).

(c) Calcula A^n para cualquier número natural n.

Solución.

(a) Observemos que el rango de A es distinto de 2 si y sólo si $a \neq 0$. Como una matriz cuadrada es invertible si y sólo si su rango es máximo, concluimos que A es invertible si y sólo si $a \neq 0$.

(b) Consideremos cualquier número real $a \neq 0$. Apliquemos el método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de la matriz A:

$$[A \;\; I] = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a}(\text{fila } 1);\ \frac{1}{a}(\text{fila } 2)} \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{fila } 1) - \frac{1}{a}(\text{fila } 2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/a & -1/a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/a \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/a^2 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}.$$

Interpretando, en el proceso anterior, las operaciones elementales como productos por matrices elementales:

$$E_{1,2}(-1/a) \cdot E_2(1/a) \cdot E_1(1/a) \cdot [A \;\; I] = [I \;\; A].$$

Luego

$$A^{-1} = E_{1,2}(-1/a) \cdot E_2(1/a) \cdot E_1(1/a) = \begin{bmatrix} 1 & -1/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente:

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_{1,2}(-1/a) \cdot E_2(1/a) \cdot E_1(1/a))^{-1} = E_1(1/a)^{-1} \cdot E_2(1/a)^{-1} \cdot E_{1,2}(-1/a)^{-1} =$$

$$E_1(a) \cdot E_2(a) \cdot E_{1,2}(1/a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Obsérvese que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, "parece" que $A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probémoslo por inducción sobre n:

- Si $n = 1$ la igualdad es evidente.
- Supongamos la igualdad cierta para k (es decir, $A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}$) y probémosla para $k+1$:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Cuestión 6 (2 pt) (a) Escribe el conjunto de valores del parámetro a que hacen que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sea escalonada, escalonada principal y escalonada reducida, respectivamente.

escalonada	escalonada principal	escalonada reducida

(b) Demuestra que, si A es una matriz cuadrada tal que $A^3 = 0$, entonces $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$, donde I denota la matriz identidad.

(c) ¿Es cierto que el producto de dos matrices simétricas del mismo orden es una matriz simétrica? Si es cierto, pruébalo; si es falso, proporciona un contraejemplo.

(d) Calcula el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que la matriz $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Solución.

(a)

escalonada	escalonada principal	escalonada reducida
$\mathbb{R}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$

(b) La conclusión se deduce de la siguiente cadena de igualdades:

$$(I-A)\cdot(I+A+A^2)=(I-A)+(A-A^2)+(A^2-A^3)=I-A^3=I.$$

(c) No es cierto, en general. Un posible contraejemplo viene dado por las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Háganse los cálculos y obsérvese que $A\cdot B$ no es simétrica.

(d) La matriz es ortogonal para todos los puntos (x,y) del plano tales que $x^2+y^2=1$, es decir, para los puntos de la circunferencia centrada en el origen y de radio 1.