DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Segundo parcial 12-01-2016 Duración: 2 horas

---

1. (2p) Utiliza el criterio de Stolz para ordenar las siguientes sucesiones según su magnitud. Justifica tus respuestas.

$$\begin{aligned} a_n &= n + 2^n, \\ b_n &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2n}, \\ c_n &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n. \end{aligned}$$

Para comparar el orden de magnitud de dos sucesiones tenemos que calcular el límite del cociente de ambas sucesiones. Podemos tomarlas en el orden que queramos:

$$\text{lím}\, \frac{a_n}{c_n} = \text{lím}\, \frac{n + 2^n}{1 + 2 + 2^2 + 2^4 \ldots + 2^n} = \textit{(Stolz)} =$$

$$\text{lím}\, \frac{\overbrace{\left(n + 1 + 2^{n+1}\right)}^{a_{n+1}} - \overbrace{\left(n + 2^n\right)}^{a_n}}{\underbrace{\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^{n+1}\right)}_{c_{n+1}} - \underbrace{\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^n\right)}_{c_n}} =$$

$$\text{lím}\, \frac{1 + 2^{n+1} - 2^n}{2^{n+1}} = \text{lím}\, \frac{1 + 2^n(2-1)}{2^{n+1}} = \text{lím}\, \frac{1 + 2^n}{2^{n+1}} =$$

Ahora podemos acabarlo teniendo en cuenta que $1 \ll 2^n$ en el numerador o bien dividiendo numerador y denominador entre 2^n y tomando el límite cuando $n \to \infty$:

$$\text{lím}\, \frac{\overset{0}{\cancel{\frac{1}{2^n}}} + \frac{2^n}{2^n}}{\frac{2^{n+1}}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

como el límite es una constante, significa que $a_n \approx c_n$. Solo nos falta comparar b_n con una de las dos sucesiones anteriores:

$$\text{lím}\, \frac{b_n}{c_n} = \text{lím}\, \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^{2n}}{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n} = \textit{(Stolz)} =$$

$$\text{lím}\, \frac{\overbrace{\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2(n+1)}\right)}^{b_{n+1}} - \overbrace{\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2n}\right)}^{b_n}}{\underbrace{\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n+1}\right)}_{c_{n+1}} - \underbrace{\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n\right)}_{c_n}} =$$

$$\text{lím}\, \frac{2^{2n+1} + 2^{2n+2}}{2^{n+1}} = \text{lím}\, \frac{(2 \cdot 4^n) + (4 \cdot 4^n)}{2 \cdot 2^n} = \text{lím} \left(\frac{4}{2}\right)^n \cdot \frac{6}{2} = 3 \cdot \text{lím} \left(\frac{4}{2}\right)^n = \infty$$

por lo tanto el resultado final es:

$$b_n \gg c_n \approx a_n$$

---

2. (3p) Considera la recurrencia:

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 6n - 1$$

a) (1p) Halla la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación anterior.

b) (1p) Determina una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $U_n^p = K \cdot n$.

c) (1p) Encuentra la solución de la recurrencia completa utilizando los resultados de los dos apartados anteriores y las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} a_1 = -6, \\ a_2 = -7. \end{cases}$$

---

a) La ecuación característica asociada a la recurrencia es:

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

que tiene dos raíces reales distintas $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$. Por tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$a_n^h = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 3^n.$$

b) Por otro lado, utilizando la solución particular de la recurrencia completa propuesta en el ejercicio:

$$U_n^p = K \cdot n$$

sustituyéndola en la ecuación completa podemos obtener el valor de K:

$$K \cdot (n+2) - K \cdot (n+1) - 6K \cdot n = 6n - 1,$$

multiplicando y simplificando obtenemos:

$$K - 6K \cdot n = 6n - 1$$

por lo que igualando los coeficientes del mismo grado en n obtenemos:

$$\begin{cases} K = -1, \text{ para el término independiente } (n^0), \\ -6K = 6 \text{ para el término lineal } (n^1). \end{cases}$$

con esto $K = -1$ y $U_n^p = -n$ es una solución particular de la ecuación completa.

c) La solución general de la ecuación completa es:

$$a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 3^n - n.$$

Ahora utilizamos las condiciones de iniciales para encontrar el valor de las constantes C_1 y C_2:

$$\textit{para n=1} \Rightarrow a_1 = C_1 \cdot (-2)^1 + C_2 \cdot 3^1 - 1 = -6 \Rightarrow -2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2 - 1 = -6,$$

$$\textit{para n=2} \Rightarrow a_2 = C_1 \cdot (-2)^2 + C_2 \cdot 3^2 - 2 = -7 \Rightarrow 4 \cdot C_1 + 9 \cdot C_2 - 2 = -7.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos: $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$ con lo que la solución es:

$$a_n = (-2)^n - 3^n - n$$

---

3. (2p) Calcula la suma de la serie :

$$\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)$$

Para calcular lar suma de esta serie vamos a calcular la suma parcial s_N y luego tomaramos el límite $N \to \infty$:

$$s_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)}_{a_3} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}_{a_4} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)}_{a_5} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)}_{a_6} \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{(-1)^{N-2}}{2}\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N-5}\right)}_{a_{N-3}} + \underbrace{\frac{(-1)^{N-1}}{2}\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N-4}\right)}_{a_{N-2}} + \underbrace{\frac{(-1)^{N}}{2}\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N-3}\right)}_{a_{N-1}}$$

$$+ \underbrace{\frac{(-1)^{N+1}}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N-2}\right)}_{a_N} = \frac{1}{2}\left[\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{1}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)\dots + \right.$$

$$+(-1)^{N-2}\left(\cancel{\frac{1}{N-3}}-\cancel{\frac{1}{N-5}}\right) + (-1)^{N-1}\left(\cancel{\frac{1}{N-2}}-\cancel{\frac{1}{N-4}}\right) + (-1)^{N}\left(\frac{1}{N-1}-\cancel{\frac{1}{N-3}}\right)$$

$$\left. +(-1)^{N+1}\left(\frac{1}{N}-\cancel{\frac{1}{N-1}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+(-1)^N\left(\frac{1}{N-1}\right)+(-1)^{N+1}\left(\frac{1}{N}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+(-1)^N\left(\frac{1}{N-1}\right)+(-1)^{N+1}\left(\frac{1}{N}\right)\right]$$

Tomando el límite $N \to \infty$:

$$s = \lim s_N = \lim \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+(-1)^N\left(\frac{1}{N-1}\right)+(-1)^{N+1}\left(\frac{1}{N}\right)\right] = -\frac{1}{4}$$

---

4. a)(1p) Determina dónde converge la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot x^{n-1}$$

y súmala donde converja.

b) (1p) Integra el resultado anterior y obtén el desarollo en serie de $\log(1+3x)$.

c) (1p) Utilizando el resultado anterior aproxima $\log(\frac{5}{4})$ con una precisión de 10^{-3}.

---

a)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot x^{n-1} = x^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-3 \cdot x)^n =$$

es la serie geométrica de razón $r = -3x$. Utilizamos la fórmula $\sum_{n=p}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{r^p}{1-r} \text{ si } |r| < 1, \\ \\ \text{divergente si } |r| \geq 1. \end{cases}$

$$= \begin{cases} x^{-1} \cdot \left(\frac{(-3x)^1}{1-(-3x)}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{-3x}{1+3x} = \frac{-3}{1+3x} \text{ si } |3x| < 1, \\ \\ \text{divergente si } |3x| \geq 1. \end{cases}$$

b) Integrando el resultado anterior para $|x| < \frac{1}{3}$:

$$\int f(x)dx = \int \frac{-3}{1+3x}dx = -3\int \frac{1}{1+3x}dx = -\log(1+3x)$$

Si no ves la integral anterior como inmediata prueba a hacer el cambio de variable $t = 1+3x$. Por otro lado:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot \int x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3 \cdot x)^n}{n}$$

Igualando los dos resultados y añadiendo una constante porque las integrales son indefinidas:

$$-\log(1+3x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3 \cdot x)^n}{n} + C$$

para calcular el valor de la constante podemos utilizar que para $x = 0$, $\log(1) = 0$:

$$-\log(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3 \cdot 0)^n}{n} + C = 0 + C \rightarrow C = 0$$

luego:

$$\log(1+3x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3 \cdot x)^n}{n}$$

c) Para obtener el $\log\left(\frac{5}{4}\right)$ primero tenemos que saber el valor de x para el que tenemos que aplicar el resultado anterior:

$$1 + 3x = \frac{5}{4} \leftrightarrow x = \frac{\frac{5}{4} - 1}{3} = \frac{1}{12}$$

Como $x = \frac{1}{12} < \frac{1}{3}$ podemos utilizar la fórmula del resultado anterior.

$$\log\left(\frac{5}{4}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-3 \cdot \frac{1}{12}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n \cdot n}$$

Es una serie alternada, podemos comprobar que $\lim |A_n| = 0$, por lo que podemos aplicar el criterio de Leibniz para calcular el número de términos que necesitamos para la aproximación que queremos hacer. Sabemos que en estos casos el error esta acotado por el valor absoluto del primer termino despreciado en la aproximación. Supongamos que hacemos la suma hasta N, entonces:

$$E_N \leq |A_{N+1}| = \frac{1}{4^{N+1} \cdot (N+1)} < 10^{-3}$$

Como no podemos despejar el valor de N vamos a darle valores a N:

- Para $n = 1$, $E_1 = \frac{1}{32} = 0.03 > 10^{-3}$
- Para $n = 2$, $E_2 = \frac{1}{192} = 0.005 > 10^{-3}$
- Para $n = 3$, $E_3 = \frac{1}{1024} = 0.0009 < 10^{-3}$

Necesitamos tres términos:

$$\log\left(\frac{5}{4}\right) \simeq \sum_{n=1}^{3}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n \cdot n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2 \cdot 2} + \frac{1}{4^3 \cdot 3} = \frac{43}{129} \simeq 0.2239$$

por tanto:

$$\log\left(\frac{5}{4}\right) \simeq 0.224 \pm 10^{-3}$$