**DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)**

**AMA - Primer parcial** **24-11-2014** **Duració: 2 horas**

---

**Nom:** **Grup:**

---

**1.**(2.p) a) Escriu en forma binomial el nombre complex:

$$z = \frac{2ai}{1+i}, \quad a \in \mathbb{R}$$

b) Per a quin/quins valors de $a$ tindrem $z \in \mathbb{R}$?

c) Quin valor/valors haurà de tenir $a$ per a que $z$ es trobe sobre la bisectriu del primer quadrant?

d) Quin valor/valors haurà de tenir $a$ per a que $z$ es trobe sobre la bisectriu del tercer quadrant?

---

**a)** Multipliquem numerador i denominador pel complex conjugat del denominador i simplifiquem:

$$z = \frac{2ai}{1+i} = \frac{2ai(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2ai - 2ai^2}{1^2 - i^2} = \frac{2ai + 2a}{1+1} = \frac{2ai + 2a}{2} = a + ai$$

**b)** Per a que $z \in \mathbb{R}$ la seua part imàginaria ha de ser 0, per tant $a = 0$ i $z = 0$

**c)** En aquest cas, $z$ es troba en la bisectriu del primer-tercer quadrant ja que part real i imaginària són iguals. Per a que $z$ es trobe en la bisectriu del primer quadrant és necessari que $a$ siga positiu.

**d)** Per a que es trobe en la bisectriu del tercer quadrant és necesari que $a$ siga negatiu.

---

**2.** (1.5p) Troba el domini de la funció:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\log(3 - |x-2|)}$$

---

Per a resoldre aquest exercici hem de tenir en compte que:

a) En el numerador de la funció tenim una arrel cúbica, definida per a qualsevol valor real.

b) En el denominador tenim un logaritme, definida per a arguments positius, així que exigirem que $3 - |x-2| > 0$.

c) D'altra banda, aquest logaritme està en el denominador així que exclourem del domini els punts on $\log(3 - |x-2|) = 0$.

A partir de les condicions b) i c),

**b)**

$$(3-|x-2|) > 0 \leftrightarrow 3 > |x-2| \leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \leftrightarrow -3+2 < x < 3+2 \leftrightarrow -1 < x < 5 \leftrightarrow x \in ]-1, 5[.$$

**c)** Ara anem a trobar els punts on el logaritme s'anul.la per tal d'excloure'ls del domini:

$$\log(3 - |x-2|) = 0 \leftrightarrow 3 - |x-2| = 1 \leftrightarrow 2 = |x-2| \leftrightarrow \{2 = x-2 \;\; ó \;\; -2 = x-2\} \leftrightarrow \{x = 4 \;\; ó \;\; x = 0\}$$

En conseqüència, la solució final es la solució de l'apartat b) excloent aquests punts

$$x \in ]-1,0[ \cup ]0,4[ \cup ]4,5[$$

---

**3.** (1.5p) A partir de l'estudi de la derivada de la funció $f(x) = x{\cdot}e^{(2-\frac{3}{x})}$ determina les regions de creixement i decreixement així com els punts en els que pren màxims i/o mínims relatius.

---

La funció està definida $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ja que en $x = 0$ es fa nul el denominador de l'exponencial. Ara calcularem la derivada en el domini:

$$e^{(2-\frac{3}{x})} + x \cdot e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (-3)(-1) \cdot x^{-2} = e^{(2-\frac{3}{x})} + 3 \cdot \frac{x}{x^2} \cdot e^{(2-\frac{3}{x})} = e^{(2-\frac{3}{x})}(1 + \frac{3}{x})$$

igualem a zero i resolem:

$$e^{(2-\frac{3}{x})}(1 + \frac{3}{x}) = 0 \ \leftrightarrow \ (1 + \frac{3}{x}) = 0 \ \leftrightarrow \ 1 = -\frac{3}{x} \ \leftrightarrow \ x = -3$$

de manera que el possible màxim o mínim local es trobarà en $x = -3$.
Calcularem la derivada segona (aquest apartat es pot resoldre també estudiant el signe de la derivada primera). Fent ús de la fórmula de la derivada del producte de dues funcions:

$$e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (1 + \frac{3}{x})(-3)(-1)x^{-2} + e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (3)(-1)x^{-2} = e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (\frac{3}{x^2} + \frac{9}{x^3} - \frac{3}{x^2}) = e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot \frac{9}{x^3}$$

I com

$$e^{(2+1)} \cdot \frac{9}{-27} = \frac{-1}{3} \cdot e^3$$

la derivada segona té signe negatiu en $x = -3$, de manera que en $x = -3$ tenim un màxim local.

Com en $x = 0$ tenim un punt de discontinuïtat, pot canviar la tendència de la funció. Veurem el signe de la derivada primera en el interval $]0, +\infty[$. Si considerem un punt qualsevol, per exemple $x = 1$, es veu que $f'$ és positiva, i la funció creixent en $]0, +\infty[$.

En resum, la funció és creixent en $]-\infty, -3[$, té un màxim local en $x = -3$, és decreixent en $]-3, 0[$, el punt $x = 0$ no pertany al domini i també és creixent en $]0, +\infty[$.

---

**4.** (2 p) Calcula el valor exacte de

$$\int_{-1}^{(\pi^2-1)} \sin(\sqrt{x+1})dx$$

---

Fent el canvi de variable $t^2 = x + 1$ i tenint en compte que:

$$2tdt = dx$$

i que els nous valors del s límits d'integració són:
per a $x = -1 \ \rightarrow \ t = 0$ i
per a $x = \pi^2 - 1 \ \rightarrow \ t = \sqrt{\pi^2 - 1 + 1} = \pi$,
susbtituint en la integral:

$$\int_{-1}^{(\pi^2-1)} \sin(\sqrt{x+1})dx = 2\int_0^{\pi} t \cdot \sin(t)dt$$

Aquesta integral es pot fer per parts prenent:
$u = t$ i $\sin(t)dt = dv$ ,
de manera que $du = dt$ i $v = \int \sin(t)dt = -\cos(t)$.
Fent servir la fórmula corresponent,

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$2\int_0^{\pi} t\cdot\sin(t)dt = 2\left[t\cdot(-\cos(t))\right]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\cos(t)dt = 2\left[-t\cdot\cos(t)\right]_0^{\pi}+2\left[\sin(t)\right]_0^{\pi} = 2((-\pi\cdot\cos(\pi)-0)+2\cdot(\sin(\pi)-\sin(0)) = 2\pi$$

on s'ha tingut en compte que: $\cos(\pi) = -1,\ \sin(0) = 0$, i $\sin(\pi) = 0$

---

**5.** (1.5p) **a**) Aproxima, mitjançant la regla de Simpson, el valor de la integral següent dividint l'interval d'integració en 4 parts iguals.

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

(1.5p) **b**) Quin seria el mínim nombre de subdivisions necessàries per a que l'error comés fent ús de la fórmula de trapezis fos menor que $10^{-4}$?

---

**a**) La fórmula se Simpson és:

$$S_nf=\frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{k=0}^{n/2-1}f(a+(2k+1)h)+2\sum_{k=1}^{n/2-1}f(a+2kh)+f(b)\right)$$

en el nostre cas $n = 4$, $a = 0$, $b = 1$ i $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, i els punts de la partició, que marquen els subintervals són :

$$P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

Substituint en la fórmula queda:

$$S_4f=\frac{1}{12}\left(e^{0^2}+4\cdot(e^{(\frac{1}{4})^2}+e^{(\frac{3}{4})^2})+2\cdot(e^{(\frac{1}{2})^2})+e^{1^2}\right) = 1.4637107604...$$

**b**) L'error comés amb la fórmula de trapezis és:

$$E_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2\ ;\ \text{amb}\ \ M_2 \ge \max_{[a,b]}|f''(x)|$$

Calculem ara la segona derivada de $f(x) = e^{x^2}$ :

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2}+2x\cdot 2xe^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^2+1)$$

L'exponencial $e^{x^2}$ és una funció creixent i $2x^2+1$ és creixent en l'interval d'integració $]0, 1[$. Així, la segona derivada prendrà el màxim en l'extrem superior de l'interval:

$$M2 = f"(1) = 6e$$

Sustituint en la fórmula de l'error obtindrem:

$$E_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 = \frac{(1)^3}{12n^2}6e < 10^{-4}$$

I aïllant el valor de n:

$$\frac{1}{2n^2}\cdot e < 10^{-4}\ \leftrightarrow\ \frac{1}{2}\cdot e\cdot 10^4 < n^2\ \leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\cdot e\cdot 10^4} < n\ \leftrightarrow \sqrt{\frac{10^4}{2}\cdot e} < n$$

$$\leftrightarrow 116.582 < n\ \leftrightarrow\ 117 \le n$$