Álgebra **21 de junio de 2017**
Recuperación **3h horas**

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas

- Escribe aquí los parciales que recuperas:
- Los alumnos que recuperan el primer parcial deberán responder a las cuestiones 1,2,3,4 y 5.
- Los alumnos que recuperan el segundo parcial deberán responder a las cuestiones 6,7,8 y 9.
- Los alumnos que recuperan los dos parciales deberán responder a las cuestiones 1,3, 4(a), 5(a), 5(b), 6, 7(a), 7(b), 8(a), 8(b) y 9.

Cuestión 1 (3 pt) Resuelve, usando el método de eliminación de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 2 & a+1 & -a+1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Escalonamos la matriz ampliada del sistema utilizando el algoritmo de Gauss:

$$[A \mid 0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 2 & a+1 & -a+1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{4,1}(-2)]{E_{3,1}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & a & -a & 0 \\ 0 & -a+1 & -a+1 & 2a & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_{4,2}(a-1)]{E_{3,2}(-a)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+a^2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4,3}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Observemos que $-a-a^2$ se anula si $a=0$ o $a=-1$. Distinguiremos tres casos:

- $a=0$. En este caso, la última matriz es $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, luego el sistema es compatible indeterminado y su solución general es $x_1=0$, $x_2=-\alpha$, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$.

- $a=-1$. En este caso, la última matriz es $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ y el sistema es compatible indeterminado.
  Aplicando el método de sustitución regresiva obtenemos que la solución general es $x_1=-\alpha$, $x_2=-\alpha+\beta$, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$.

- $a\neq 0$ y $a\neq -1$. En este caso, dividiendo la tercera fila por $-a-a^2$, obtenemos una forma escalonada principal de la matriz del sistema $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Aplicando el método de sustitución regresiva obtenemos que la solución general es $x_1 = a\alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = 0$.

Cuestión 2 (1 pt) A una matriz A de tamaño 2×3 le hacemos sucesivamente las siguientes operaciones elementales hasta obtener su forma escalonada reducida R:

- en primer lugar a la fila 2 de A le sumamos la fila 1 multiplicada por -3,
- a continuación, multiplicamos la fila 2 de la matriz resultante por $1/2$,
- por último, a la fila 1 le sumamos la fila 2 multiplicada por 4.

Calcula una matriz T tal que $T \cdot A = R$.

$$T = E_{1,2}(4) \cdot E_2(1/2) \cdot E_{2,1}(-3) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Cuestión 3 (2 pt) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Calcula A^2 y comprueba que $A^2 - 2A - 4I = 0$.

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$A^3 - 2A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Calcula la inversa de la matriz A.

Podemos calcular la inversa de A calculando la forma escalonada reducida de la matriz $[A \mid I]$ mediante operaciones elementales:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2(1/4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $A^{-1} = \frac{1}{4}(A - 2I) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$.

También podemos calcular A^{-1} utilizando la igualdad del apartado anterior. Como $A^2 - 2A - 4I = 0$ se tiene que $\frac{1}{4}(A^2 - 2A) = I$ y, por tanto, $A \cdot \frac{1}{4}(A - 2I) = I$. De aquí se deduce que

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A - 2I) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Escribe A como producto de matrices elementales.

Las operaciones elementales que hemos realizado a la matriz A para obtener I pueden interpretarse como un proceso de multiplicación (a izquierda) por matrices elementales:

$$E_{1,2}(-2) \cdot E_2(1/4) \cdot E_{1,2} \cdot A = I.$$

Por tanto:

$$A = (E_{1,2}(-2) \cdot E_2(1/4) \cdot E_{1,2})^{-1} = E_{1,2}^{-1} \cdot E_2(4) \cdot E_{1,2}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuestión 4 (1,5 pt) (a) Calcula una descomposición LU de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ e indica los pasos que realizas para calcular L y U. Escalonamos la matriz hasta obtener una matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

De aquí se deduce que $E_{3,2}(-4) \cdot E_{1,2} \cdot A = U$.

Luego $L = \left(E_{3,2}(-4) \cdot E_{1,2}\right)^{-1} = (E_{1,2})^{-1} \cdot (E_{3,2}(-4))^{-1} = E_{1,2} \cdot E_{3,2}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) ¿Es A invertible? Justifica la respuesta. A no es invertible porque tiene rango 2 (para ser invertible tendría que tener rango 3) o, equivalentemente, porque U no es invertible (ya que tiene elementos nulos en su diagonal).

Cuestión 5 (2.5 pt) (a) (1 pt) Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que A^2 es igual a la matriz nula. Probar que, si I denota la matriz identidad de orden n, entonces $I - A$ es una matriz invertible, siendo $I + A$ su inversa.

Como $(I - A)(I + A) = I^2 + IA - AI - A^2 = I + A - A - O = I$, se tiene que $I - A$ es una matriz invertible y, además, $I + A$ es su inversa.

(b) (1 pt) Dada una matriz A tal que A^tA es invertible, definimos la matriz $B = A(A^tA)^{-1}A^t$. Demuestra que $B^t = B$ y que $B^2 = B$.

$$\begin{aligned} B^t &= (A(A^tA)^{-1}A^t)^t = (A^t)^t[(A^tA)^{-1}]^tA^t = A[(A^tA)^t]^{-1}A^t = A[A^t(A^t)^t]^{-1}A^t \\ &= A[A^tA]^{-1}A^t = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (A(A^tA)^{-1}A^t)(A(A^tA)^{-1}A^t) = A(A^tA)^{-1}(A^tA)(A^tA)^{-1}A^t \\ &= AI(A^tA)^{-1}A^t = A(A^tA)^{-1}A^t = B. \end{aligned}$$

(c) (0.5 pt) Un sistema homogéneo con 3 ecuaciones y 4 incógnitas es (marca la opción correcta):

☐ compatible determinado ☒ compatible indeterminado ☐ incompatible

Cuestión 6 (3 pt) En $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$H = \langle (1,0,-1,1), (0,1,1,0), (1,1,0,1) \rangle,$$
$$T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t - x = 0\}.$$

a) Obtén una base de H y una base de T.

Pera construir una base de H, escalonamos la matriz cuyas filas son los vectores traspuestos de su sistema generador:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como esta matriz es escalonada, sus filas no nulas constituyen una base de H: $\{(1,0,-1,1), (0,1,1,0)\}$.

Para encontrar una base de T, resolvemos el sistema de ecuación $-x + t = 0$. Así, obtenemos la base $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ para T.

b) Determina ecuaciones implícitas de H.

Para calcular ecuaciones de H, obtendremos las condiciones sobre un vector (x, y, z, t) para que sea combinación lineal de los vectores de un sistema generador de H. Será más sencillo hacerlo con la base calculada. La condición equivale a que el sistema que tenga la siguiente matriz ampliada sea compatible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(1)E_{4,1}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & -x+t \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x-y+z \\ 0 & 0 & -x+t \end{bmatrix}$$

El sistema será compatible si y sólo si $x-y+z=0$ y $-x+t=0$. Estas serán las ecuaciones de H. Dicho de otro modo, $H = \text{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) Calcula una base de $H \cap T$.

Observemos que $H \cap T$ está formado por los vectores que satisfacen, simultáneamente, las ecuaciones de H y las de T, es decir,

$$H \cap T = \text{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente, la ecuacion de T es una de las ecuaciones con las que hemos descrito H. Por tanto, $H \cap T = H$ y ya conocemos una base, $\{(1,0,-1,1),(0,1,1,0)\}$.

d) Es $H \cup T$ un subespacio vectorial? Razona la respuesta.

Como $H \cup T = T$, en este caso es evidente que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Cuestión 7 (2 pt) La matriz canónica de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) (0.75 pt) Calcula la imagen $f(1,1,-1)$ y el núcleo de f. ¿Es f inyectiva?

$$f(1,1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $\text{Nuc}(f) = \text{Nuc}(A)$, una base del núcleo de A se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes es A:

$$\text{Nuc}(f) = \text{Nuc}(A) = \text{Nuc}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,3,2) \rangle.$$

Como el núcleo de f es no nulo, f no es inyectiva.

(b) (0.75 pt) Calcula el rango de A y utilízalo para justificar si la aplicación f es suprayectiva.

Las dos primeras filas de A son no proporcionales, la tercera fila es suma de las dos primeras, y la última fila es nula. Por tanto, el rango de A es 2. Otra forma de calcular el rango consiste en calcular una forma escalonada de la matriz y contar el número de filas no nulas de esta forma escalonada.

Como $\dim\ \text{Im}(f) = \text{rang}(A) = 2$, se tiene que $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$ y, por tanto, f no es suprayectiva.

(c) (0.5 pt) Calcula una base de la imagen de f.

$\mathrm{Im}(f)$ coincide con el subespacio columna de A. Por tanto, es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por las columnas de A. Se ha visto en el apartado anterior que la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ es dos. Luego bastará considerar dos columnas linealmente independientes de A para obtener la base deseada. Por ejemplo:

$$\{(1,2,3,0),(-1,0,-1,0)\}.$$

Cuestión 8 (2.5 pt) (a) (0.5 pt) Calcula, sin multiplicar las matrices, el determinante de

$$A = E_{1,2}E_{2,3}E_{3,2}(-2)E_3(1/24)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$|A| = |E_{1,2}|\cdot|E_{2,3}|\cdot|E_{3,2}(-2)|\cdot|E_3(1/24)|\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot\frac{1}{24}\cdot 24 = 1.$$

(b) (0.5 pt) Prueba que si la matriz Q es ortogonal, entonces $\det Q = \pm 1$.

Como Q es ortogonal, $QQ^t = I$. Por tanto, $\det Q \cdot \det Q^t = \det I = 1$ (puesto que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de determinantes), es decir, $(\det Q)^2 = 1$ (puesto que Q y Q^t tienen el mismo determinante). Luego $\det Q = \pm 1$.

(c) (1 pt) Calcula las coordenadas del vector (a,a,a) respecto de la base $\{(1,0,0),(1,-1,0),(-1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para cualquier $a \in \mathbb{R}^3$.

Si llamamos $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ a las coordenadas de (a,a,a) respecto de esa base,

$$(a,a,a) = \alpha_1\cdot(1,0,0)+\alpha_2\cdot(1,-1,0)+\alpha_3\cdot(-1,0,1).$$

Igualando componente a componente obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 = a\\ -\alpha_2 = a\\ \alpha_3 = a\end{array}\right. \qquad \text{cuya solución es } \alpha_1 = 3a,\ \alpha_2 = -a,\ \alpha_3 = a.$$

Luego las coordenadas del vector (a,a,a) respecto de la base del enunciado son $(3a,-a,a)$.

(d) (0.5 pt) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V y sean $\vec{v},\vec{w}_1,\vec{w}_2$ tres vectores de V tales que $\vec{w}_1 \in W$, $\vec{w}_2 \in W^\perp$ y $\vec{v} = \vec{w}_1+\vec{w}_2$. Determina las proyecciones ortogonales sobre W de los tres vectores.

Como $V = W \oplus W^\perp$, todo vector de V se expresa de forma única como suma de un vector de W y otro de $W^\perp$, siendo el primer sumando su proyección ortogonal sobre W. Por tanto:

- La proyección ortogonal de $\vec{v}$ es $\vec{w}_1$.
- La proyección ortogonal de $\vec{w}_1$ es $\vec{w}_1$ por que $\vec{w}_1$ se expresa como $\vec{w}_1+\vec{0}$ (obviamente $\vec{0}\in W^\perp$).

– La proyección ortogonal de $\vec{w}_2$ es $\vec{0}$ por que $\vec{w}_2$ se expresa como $\vec{0}+\vec{w}_2$ (obviamente $\vec{0}\in W$).

Cuestión 9 (2.5 pt) (a) Justifica si la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

es diagonalizable y, si lo es, diagonalízala.

La matriz es diagonalizable puesto que es simétrica. El polinomio característico de la matriz es:

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)\det\begin{bmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-2).$$

Por tanto, los valores propios de la matriz son $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ y $\lambda_3=2$.

Otra forma de razonar que A es diagonalizable es diciendo que es de orden 3 y posee 3 valores propios distintos.

Calculemos bases de los subespacios propios:

$$\operatorname{Nuc}(A-\lambda_1 I)=\operatorname{Nuc}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\langle(-1,0,1)\rangle.$$

$$\operatorname{Nuc}(A-\lambda_2 I)=\operatorname{Nuc}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\langle(0,1,0)\rangle.$$

$$\operatorname{Nuc}(A-\lambda_3 I)=\operatorname{Nuc}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\langle(1,0,1)\rangle.$$

A partir de todos estos datos concluimos que $A=PDP^{-1}$, siendo

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

(b) Estudia para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz

$$B=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&1&a\\-1&0&-a\end{bmatrix}$$

(a) Calculamos primero el polinomio característico de A:

$$p_B(\lambda)=|B-\lambda I|=(a-\lambda)(1-\lambda)(-a-\lambda).$$

El conjunto de valores propios de B es, por tanto, $\{1,a,-a\}$. Distinguimos 4 casos:

- Caso 1: $a \neq 1$, $a \neq -1$ y $a \neq 0$. En este caso B (matriz 3×3) tiene 3 valores propios distintos, con lo cual es diagonalizable.
- Caso 2: $a = 1$. En este caso B tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 1$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$) y $\lambda_2 = -1$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$). Vemos ya que la primera condición del teorema de caracterización de matrices diagonalizables ($\alpha_1 + \alpha_2 = 3$) se satisface. Calculemos ahora las multiplicidades geométricas de los valores propios, es decir, las dimensiones de sus subespacios propios. d_1 (resp., d_2) denotará la multiplicidad geométrica de λ_1 (resp., λ_2).

  Como $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1$, se tiene que $d_2 = 1 = \alpha_2$. Así pues, las multiplicidades geométrica y algebraica de λ_2 coinciden.

  $$d_1 = \dim(\mathrm{Nuc}(B - \lambda_1 I)) = 3 - \mathrm{rang}(B - \lambda_1 I) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

  Como d_1 no coincide con α_1, se concluye que B no es diagonalizable en este caso.
- Caso 3: $a = -1$. En este caso se tienen 2 valores propios: $\lambda_1 = 1$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$) y $\lambda_2 = -1$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$). La primera condición del teorema de caracterización de matrices diagonalizables se satisface: $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$.

  Usando la misma notación que antes se tiene que, como $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1$, entonces $d_2 = 1 = \alpha_2$ y, así, las multiplicidades geométrica y algebraica de λ_2 coinciden.

  $$d_1 = \dim(\mathrm{Nuc}(B - \lambda_1 I)) = 3 - \mathrm{rang}(B - \lambda_1 I) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

  Luego $d_1 = 1 \neq \alpha_1$ y B no es diagonalizable en este caso.
- Caso 4: $a = 0$. En este caso se tienen 2 valores propios: $\lambda_1 = 0$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$) y $\lambda_2 = 1$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$). La primera condición del teorema de caracterización de matrices diagonalizables se satisface: $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$.

  Usando la misma notación que antes se tiene que, como $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1$, entonces $d_2 = 1 = \alpha_2$ y, así, las multiplicidades geométrica y algebraica de λ_2 coinciden.

  $$d_1 = \dim(\mathrm{Nuc}(B - \lambda_1 I)) = 3 - \mathrm{rang}(B - \lambda_1 I) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

  Luego $d_1 = 1 \neq \alpha_1$ y B no es diagonalizable en este caso.