Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 13
Robert Fuster

Exercici 13.1. *Trobeu (si és possible) bases dels quatre subespais associats a les matrius següents:*

$$\text{(a)}\quad \mathsf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \mathsf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \mathsf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Amb una sola operació elemental trobem una forma esglaonada de M_1:

$$\mathsf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Així que $\operatorname{rang} \mathsf{M}_1 = 3$. En conseqüència,

$$\begin{aligned} \operatorname{Col} \mathsf{M}_1 &= \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{Fil} \mathsf{M}_1 &= \langle (1,0,1,-1), (0,1,1,0), (1,0,1,1) \rangle \end{aligned}$$

i podem escollir les bases següents:

$$\begin{aligned} B_{\operatorname{Col} \mathsf{M}_1} &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \\ B_{\operatorname{Fil} \mathsf{M}_1} &= \{(1,0,1,-1), (0,1,1,0), (1,0,1,1)\} \end{aligned}$$

L'espai nul esquerre és $\operatorname{Nul} \mathsf{M}_1^t = \{\vec{0}\}$, que no té cap base. Finalment, per a trobar l'espai nul cal resoldre un sistema homogeni, la matriu de coeficents del qual és M_1, així que acabarem de calcular la forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu:

$$\mathsf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solcuió del sistema $\mathsf{M}_1\vec{x} = \vec{0}$ és $x_1 = -\alpha, x_23 = -\alpha, x_3 = \alpha, x_4 = 0$, així que

$$B_{\operatorname{Nul} M_1} = \{(-1,-1,1,0)\}$$

és una base de l'espai nul.

(b) La forma esglaonada reduïda de la matriu M_2 és

$$\mathsf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, obtenim immediatament les bases següents, per als espais columna, fila i nul:

$$\begin{aligned} B_{\operatorname{Col} \mathsf{M}_2} &= \{(1,0,1), (0,1,1)\} \\ B_{\operatorname{Fil} \mathsf{M}_2} &= \{(1,0,1,-1), (0,1,1,0)\} \\ B_{\operatorname{Nul} \mathsf{M}_2} &= \{(-1,-1,1,0), (1,0,0,1)\} \end{aligned}$$

Per a determinar l'espai nul esquerre calculem la foema esglaonada reduïda de M_2^t; és aquesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per tant, podem escollir aquesta base:

$$B_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_2^t} = \{(-1,-1,1)\}$$

(c) Notem que les tres darreres columnes de la matriu M_3 són combinacions lineals de la primera. En conseqüència, com a base de l'espai columna modem elegir

$$B_{\mathrm{Col}\,\mathsf{M}_3} = \{(1,2,-1)\}$$

Llavors, l'espai fila també té dimensió 1, així que podem triar qualsevol fila per a construir la base. Per exemple,

$$B_{\mathrm{Fil}\,\mathsf{M}_3} = \{(1,0,1,-1)\}$$

L'espai nul és l'espai solució de l'equació

$$x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

i aquesta n'és una base:

$$B_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_3} = \{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$$

Per últim, l'espai nul esquerre és la solució de l'equació

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

i aquesta n'és una base:

$$B_{\mathrm{Nul}\,\mathsf{M}_3^t} = \{(-2,1,0),(1,0,1)\}$$

Exercici 13.2. *La matriu A té 7 files i 5 columnes i el seu rang és 4. Quines són les dimensions dels quatre subespais associats a aquesta matriu?*

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Col}\,\mathsf{A} &= 4 \\ \dim \mathrm{Fil}\,\mathsf{A} &= 4 \\ \dim \mathrm{Nul}\,\mathsf{A} &= 1 \\ \dim \mathrm{Nul}\,\mathsf{A}^t &= 3 \end{aligned}$$

Exercici 13.3. *(a) Quina condició ha de complir la matriu $m \times n$ A perquè l'espai columna de A siga $\mathbb{R}^m$?*

(b) I perquè l'espai nul siga $\{\vec{0}\}$?

(c) Si A és una matriu $n \times n$ invertible, quins són els quatre subespais associats a A?

(a) Ha de ser $\operatorname{rang} \mathsf{A} = m$

(b) $\operatorname{rang} \mathsf{A} = n$

(c) $\operatorname{Col} \mathsf{A} = \operatorname{Fil} \mathsf{A} = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Nul} \mathsf{A} = \operatorname{Nul} \mathsf{A}^t = \{\vec{0}\}$

Exercici 13.4. *Donada la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Calculeu la forma esglaonada reduïda R *de la matriu* A*, la matriu* T *tal que* $\mathsf{R} = \mathsf{TA}$ *i la matriu inversa* $\mathsf{L} = \mathsf{T}^{-1}$ *(tot això requereix únicament una operació elemental).*

(b) Trobeu els quatre subespais deduïts de A*.*

(c) Quina relació hi ha entre l'espai columna de A *i les columnes de* L*? Per què?*

(d) Quina relació hi ha entre l'espai nul de A^t *i les files de* T*? Per què?*

(e) Sabent que

$$\mathsf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathsf{R}}$$

determineu bases dels quatre subespais associats a A *sense calcular explícitament la matriu* A*.*

(a)

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

Aquesta darrera és la forma esglaonada reduïda de A. Les matrius T i T^{-1} són

$$\mathsf{T} = \mathsf{E}_{3,1}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{L} = \mathsf{T}^{-1} = \mathsf{E}_{3,1}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} \operatorname{Col} \mathsf{A} &= \langle (1,0,2), (0,1,0) \rangle \\ \operatorname{Fil} \mathsf{A} &= \langle (1,0,-1,-2), (0,1,0,1) \rangle \\ \operatorname{Nul} \mathsf{A} &= \langle (1,0,1,0), (2,-1,0,1) \rangle \end{aligned}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu A^t es troba molt fàcilment:

$$\mathsf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Llavors

$$\operatorname{Nul} \mathsf{A}^t = \langle (-2,0,1) \rangle$$

(c) Anomenem $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ les columnes de L. Si eliminem les columnes lliures de A i R en

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 & \vec{l}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{R}$$

obtindrem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 & \vec{l}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 & \vec{l}_2 \end{bmatrix}$$

De manera que $\{\vec{l}_1, \vec{l}_2\}$ és una base de $\operatorname{Col}\mathsf{A}$. En general, *si* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = r$*, llavors les* r *primeres columnes de* T^{-1} *formen una base de* $\operatorname{Col}\mathsf{A}$.

(d) Un vector $\vec{x}$ és un element de l'espai nul esquerre si $\vec{x}\mathsf{A} = \mathsf{O}$. Com que $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$ i la darrera fila de R és nul·la, resulta que la darrera fila de T, multiplicada per A és nul·la:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, $(-2, 0, 1)$ és un element de $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^t$. En general, com que la dimensió de l'espai nul esquerre és el nombre de files nul·les de R, les files de T corresponents a aquestes són una base de l'espai nul esquerre. Així, podem trobar la base de l'espai nul esquerre sense esglaonar A^t: *Si* $\operatorname{rang}\mathsf{A} = r$*, llavors les* $m - r$ *darreres files de* T *formen una base de* $\operatorname{Nul}\mathsf{A}^t$.

(e) Com que el rang de A és 2, les dues primeres columnes de L són una base de $\operatorname{Col}\mathsf{A}$:

$$B_{\operatorname{Col}\mathsf{A}} = \{(1, 2, 5), (0, 1, 0)\}$$

La base de l'espai nul de A s'obté resolent el sistema $\mathsf{R}\vec{x} = \vec{0}$:

$$B_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}} = \{(1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)\}$$

Com a base de l'espai fila agafem les files no nul·les de R:

$$B_{\operatorname{Fil}\mathsf{A}} = \{(1, 0, -1, -2), (0, 1, 0, 1)\}$$

Finalment, com que el rang de A és 2, la dimensió de l'espai nul esquerre és $3 - 2 = 1$ i podem prendre com a base la darrera fila de $\mathsf{T} = \mathsf{L}^{-1}$. Com que

$$\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtenim aquesta base:

$$B_{\operatorname{Nul}\mathsf{A}^t} = \{(-5, 0, 1)\}$$

Exercici 13.5. *Trobeu els valors del paràmetre* λ *per als quals l'espai nul de la matriu* $\mathsf{A}_\lambda = \left[\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{smallmatrix}\right]$ *no és el subespai* $\{\vec{0}\}$.

El que ha de passar, perquè l'espai nul de A_λ no siga l'espai zero, és que el rang d'aquesta matriu no siga igual a 2. Calculem aquest rang:

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 2 - \frac{1}{2}(1-\lambda)^2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

(a la primera fila hi hem restat la segona multiplicada per $(1/2)(1-\lambda)$). La condició perquè aquest rang no siga 2 és

$$2-\frac{1}{2}(1-\lambda)^2=0$$

és a dir,

$$4-(1-\lambda)^2=0$$

Els valors que cerquem són aquests: $\lambda=-1$ o $\lambda=3$.

Exercici 13.6. *Trobeu l'ortogonal del conjunt $A=\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. Quina relació hi ha entre A i $(A^\perp)^\perp$?*

$A^\perp$ és el conjunt de solucions del sistema lineal

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{0}$$

és a dir,

$$A^\perp=\langle(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\rangle$$

Per a calcular $(A^\perp)^\perp$ haurem de resoldre un altre sistema lineal:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{0}$$

El que obtindrem és

$$(A^\perp)^\perp=\langle(1,0,1,0),(0,1,0,1)\rangle$$

així que $(A^\perp)^\perp=\langle A\rangle$

Exercici 13.7. *Quina condició s'ha de complir perquè $A=(A^\perp)^\perp$?*

En general, $A\subset(A^\perp)^\perp$. Perquè siguen iguals, A ha de ser un subespai vectorial.

Exercici 13.8. *Si F i G són dos subconjunts de $\mathbb{R}^n$ i $F\subset G$, quina relació hi ha entre $F^\perp$ i $G^\perp$?*

Observem que, si $\vec{u}\in G^\perp$, llavors $\vec{u}$ és ortogonal a tots els vectors de G; però com que $F\subset G$, llavors $\vec{u}$ també és ortogonal a tots els vectors de F. És a dir, que

$$\vec{u}\in G^\perp\Longrightarrow\vec{u}\in F^\perp$$

I hem provat que $G^\perp\subset F^\perp$

Exercici 13.9. *Quina relació hi ha entre els conjunt A i B, si $A^\perp=B^\perp$?*

Si $A^\perp=B^\perp$, llavors $(A^\perp)^\perp=(B^\perp)^\perp$ i, com que $(A^\perp)^\perp=\langle A\rangle$, obtindrem que $\langle A\rangle=\langle B\rangle$.

És fàcil veure que no té perquè ser $A=B$: si elegim dues bases diferents, A i B, del mateix subespai F, llavors $A^\perp=B^\perp=F^\perp$, però $A\neq B$.

Exercici 13.10. *Expresseu cadascun dels subespais següents com l'espai columna d'una matriu i com l'espai nul d'una altra matriu.*

(a) $F_1 = \langle(1,-1,2)\rangle$
(b) $F_2 = \langle(1,1,0),(-2,0,1)\rangle$
(c) $F_3 = \{(a, a+b, a+2b, -a) : a, b \in \mathbb{R}\}$
(d) $F_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) :\ x_1 + x_2 = 0, x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$

(a) Expressar F_1 com un espai columna és immediat: $F_1 = \mathrm{Col}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{A}$

L'ortogonal de F_1 és $\mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \langle(1,1,0)(-2,0,1)\rangle$ així que

$$F_1 = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $F_2 = \mathrm{Col}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$

L'ortogonal de F_2 és $\mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \langle(1/2,-1/2,1)\rangle$ així que

$$F_2 = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

o, de manera equivalent,

$$F_2 = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(els resultats dels dos primers apartats són curiosament simètrics; evidentment, això és perquè $F_1^{\perp} = F_2$)

(c) Un vector genèric de F_3 es pot escriure com

$$(a, a+b, a+2b, -a) = a(1,1,1,-1) + b(0,1,2,0)$$

de manera que

$$F_3 = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculem l'espai nul de la matriu transposada:

$$\mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \langle(1,-2,1,0),(1,0,0,1)\rangle$$

Llavors,

$$F_3 = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) F_4 és el conjunt de les solucions del sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

és a dir,

$$F_4 = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(i ja l'hem expressat com un espai nul).Resolent el sistema lineal homogeni, tenim

$$F_4 = \langle(-1,1,1,0),(-1,1,0,1)\rangle$$

així,

$$F_4 = \mathrm{Col}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 13.11. *Trobeu una base i les equacions de cadascun dels subespais de l'exercici anterior.*

(a)

$$\text{Base de } F_1 : \ \{(1,-1,2)\}$$
$$\text{Equacions de } F_1 : \ x_1 + x_2 = 0, \quad -2x_1 + x_3 = 0$$

(b)

$$\text{Base de } F_2 : \ \{(1,1,0),(-2,0,1)\}$$
$$\text{Equacions de } F_2 : \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

(c)

$$\text{Base de } F_3 : \ \{(1,1,1,-1),(0,1,2,0\}$$
$$\text{Equacions de } F_3 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_4 = 0$$

(d) Les equacions de F_4 ja les coneixem:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

i la base pot ser aquesta:

$$B_{F_4} = \{(-1,1,1,0),(-1,1,0,1)\}$$

Exercici 13.12. *Trobeu les equacions del subespai* $F = \langle(1,1,1,1),(0,1,1,0)\rangle$ *i una base del subespai* $G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : \ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$.

F és l'espai columna de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per trobar-ne les equacions, calculem una base de l'ortogonal de F:

$$F^{\perp} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle(-1,0,0,1),(0,-1,1,0)\rangle$$

així que

$$F = \text{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i les equacions de F són

$$-x_1 + x_4 = 0, \quad -x_2 + x_3 = 0$$

Alternativament, per trobar les equacions del subespai F, podem fer el raonament següent: si (x_1, x_2, x_3, x_4) és un vector de F, llavors rang $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{smallmatrix}\right] = 2$ (perquè la tercera columna és combinació lineal de les dues primeres). Esglaonant aquesta matriu, obtindrem

$$2 = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_4 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_4 \end{bmatrix}$$

Ara, perquè el rang de la darrera matriu siga 2, les dues files últimes han de ser nul·les, és a dir, el que s'ha de complir és

$$-x_2 + x_3 = 0, \quad -x_1 + x_4 = 0$$

Aquestes són les equacions de f.

Per a trobar una base de G, l'únic que hem de fer és resoldre l'equació $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$:

$$B_G = \{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$$