Tema 1: Resolució de sistemes d'equacions lineals mitjançant operacions elementals. Matrius escalonades.

Bloc 1: Operacions amb vectors i matrius

Definicions

Un vector n-dimensional $\vec{u}$ és una expressió del tipus

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

on $u_1, u_2, \ldots, u_n$ són nombres reals (o complexos), anomenats components del vector.
Per comoditat, aquest vector es pot representar com

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

El conjunt de tots els vectors n-dimensionals reals (respectivament, complexos) es representa com $\mathbb{R}^n$ (respectivament, $\mathbb{C}^n$).
El vector zero, $\vec{0}$, és el que té tots els components nuls:
$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Operacions amb vectors

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ són dos vectors en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$, la suma de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és el vector

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

La diferència entre $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ és

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$$

Si λ és un escalar i $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vector, llavors, el producte del escalar λ pel vector $\vec{u}$ és el vector

$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$$

Exemples

- Per a sumar dos vectors el que farem serà sumar-los component a component:

$$\begin{aligned}(2,-1,3,0)+(-1,1,4,1) &= (2-1,-1+1,3+4,0+1)\\ &= (1,0,7,1)\end{aligned}$$

- Per a restar dos vectors el que farem serà restar-los component a component:

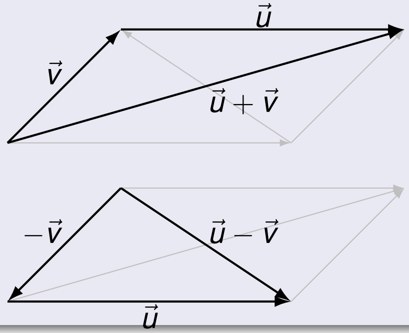
$$\begin{aligned}(2,-1,3,0)-(-1,1,4,1) &= (2-(-1),-1-1,3-4,0-1)\\ &= (3,-2,-1,-1)\end{aligned}$$

- Per a multiplicar un vector per un escalar, multiplicarem cada component per eixe escalar:

$$\begin{aligned}-3(2,-1,3,0) &= ((-3)2,(-3)(-1),(-3)3,(-3)0)\\ &= (-6,3,-9,0)\end{aligned}$$

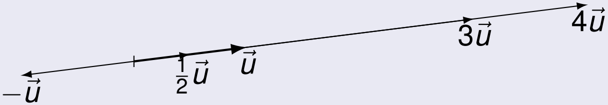
Suma i diferència de dos vectors

Representació gràfica



Producte d'un escalar per un vector

Representació gràfica



Producte de diversos escalars per un vector

Combinacions lineals

Definició

Donats diversos vectors (fila o columna) $v_1, v_2, \ldots, v_m$ en $\mathbb{R}^n$ (o en $\mathbb{C}^n$), s'anomena combinació lineal d'ells a qualsevol vector de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_m v_m,$$

amb $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ són escalars (reals o complexos).

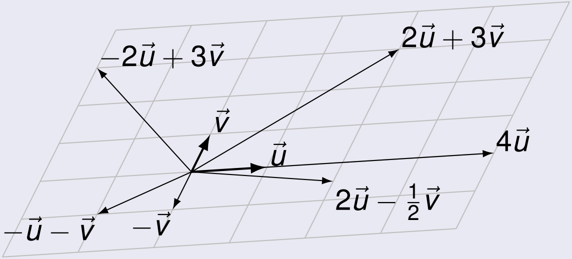
Exemple:

$$(0, 7, 10) = 2(3, 2, -1) + 3(-2, 1, 4)$$

Per tant $(0, 7, 10)$ és combinació lineal de $(3, 2, -1)$ i de $(-2, 1, 4)$.

Combinacions lineals

Representació gràfica



Diverses combinacions lineals dels dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

Producte escalar

Definició

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ són dos vectors en $\mathbb{R}^n$, el producte escalar de $\vec{u}$ per $\vec{v}$ és el nombre real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

El producte escalar de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ es calcula multiplicant-los component a component i sumant tots aquests productes. Per exemple,

$$\begin{aligned} (2, -1, 3, 0) \cdot (-1, 1, 4, 1) &= \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 &= \quad -2 - 1 + 12 + 0 = 9 \end{aligned}$$

Fixeu-vos bé que el producte *escalar* de dos vectors és un escalar (no un vector)

Aplicacions geomètriques del producte escalar

Norma d'un vector

La *norma* (o *longitud*) del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ és el nombre

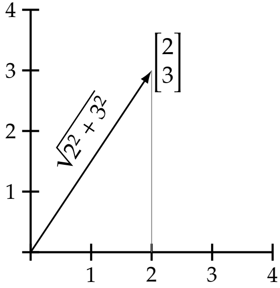
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \tag{1}$$

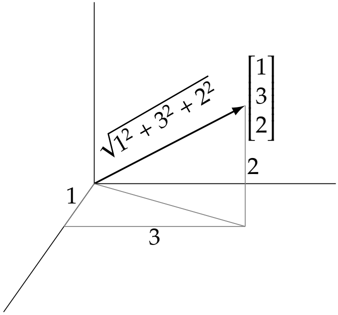
Per exemple:

$$\|(2,3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$\|(1,3,2)\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}$$

Representació gràfica



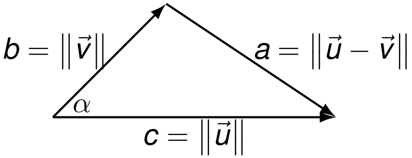


Aplicacions geomètriques del producte escalar

Angle entre dos vectors

Si $\vec{u} \neq 0$ i $\vec{v} \neq 0$ són vectors de $\mathbb{R}^n$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|}$$



Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ són ortogonals si el producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ és igual a zero (i, per tant són *perpendiculars*).

1. Càlcul vectorial

2. Càlcul matricial

Definició

Una matriu d'ordre $m \times n$ és un conjunt de $m \cdot n$ nombres (reals o complexos) distribuïts en m files i n columnes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Els nombres a_{ij} són les entrades o elements de la matriu.
El conjunt de totes les matrius $m \times n$ amb entrades reals (respectivament, complexes) es representa per $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. (respectivament $M_{m \times n}(\mathbb{C})$).

Les matrius solen representar-se de forma abreujada per (a_{ij}) o amb lletres majúscules A, B, etc.

Tipus de matrius

- Matriu quadrada d'ordre n: si $m = n$.
  Exemple:
  $$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$
- Matriu fila (o vector fila): si $m = 1$.
  Exemple:
  $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
- Matriu columna (o vector columna): si $n = 1$.
  Exemple:
  $$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tipus de matrius

- Matriu nul·la: és aquella que té tots els seus elements iguals a zero. Es representa usualment per 0.
- Matriu identitat: si és quadrada, tots els elements de la seua diagonal principal (és a dir, els elements a_{ii}) són iguals a 1 i la resta són nuls. La matriu identitat d'ordre n es denota per I_n (o també per I, si no hi ha confusió respecte al seu ordre). Exemple:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suma de matrius

Definició

Donades dos matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ del mateix ordre $m \times n$ es defineix la matriu suma d'ambdues de la següent manera:

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

La suma de matrius és una llei de composició interna en el conjunt $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, és a dir, una aplicació

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Propietats de la suma de matrius

1. Associativa:
   $(A+B)+C = A+(B+C) \quad \forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. Commutativa: $A+B = B+A \quad \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
3. Existència de element neutre (la matriu nul·la):
   $A+0 = A \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. Existència de element simètric:
   $A+(-A) = 0 \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, on $-A := (-a_{ij})$ (la matriu oposada de A).

Producte d'una matriu per un escalar

Definició

Si $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ i α és un escalar (és a dir $\alpha\in\mathbb{R}$) definim la matriu αA de la següent manera:

$$\alpha A := \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{11} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemple:

$$2\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 12 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propietats del producte escalar-matriu

El producte d'un escalar per una matriu és una llei de composició externa

$$\mathbb{R} \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

que satisfà les següents propietats:

1. $(\alpha(\beta A)) = (\alpha\beta)A \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$ i $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. $1A = A \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Producte de matrius

Definició

Siguen dos vectors fila i columna

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

d'ordres respectius $1 \times n$ i $n \times 1$. Es defineix el producte AB com el **nombre real** (matriu 1×1) donat pel producte escalar d'aquestos vectors:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n.$$

NOTACIÓ: Donada una matriu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, denotarem per A_{i*} a la i-èsima fila de A, i per A_{*j} a la seua j-èsima columna.

Producte de matrius

Definició

Siga A una matriu $m \times k$ i B una matriu $k \times n$. Es defineix la matriu producte $AB = (c_{ij})$ com aquella de dimensions $m \times n$ tal que $c_{ij} = A_{i*}B_{*j}$, és a dir , aquella que el seu element (i, j) és el resultat de multiplicar la i-èsima fila de A per la j-èsima columna de B. Per tant:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Propietats del producte de matrius

Sempre que els productes de matrius tinguen sentit:

1. Associativa: $(AB)C = A(BC)$.
2. Distributiva per la esquerra: $A(B + C) = AB + AC$.
3. Distributiva per la dreta: $(A + B)C = AC + BC$.
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
5. $AI = A$, $IA = A$.
6. $A0 = 0$, $0A = 0$.

Atenció!

- El producte de matrius NO és commutatiu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- El producte de dos matrius no nul·les pot ser la matriu nul·la:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriu $\times$ vector (columna)

Hi ha dos formes de «veure» el producte d'una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ per un vector $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$:

- Forma 1(ja mencionada): El resultat és un altre vector de m components tal que i-èsim component és el resultat de multiplicar la i-èsima fila de A pel vector v.
- Forma 2: El resultat és una combinació lineal dels vectors columna de A (amb coeficients els components de v).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ 1\cdot 5 + 2\cdot 0 + 4\cdot 4 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vector fila $\times$ matriu

De manera anàloga, hi ha també 2 formes de «veure» el producte d'un vector fila v de m components per una matriu A d'ordre $m \times n$:

- Forma 1 (ja mencionada): El resultat és un vector fila de n components de manera que l'i-èsim component és el producte de v per la i-èsima columna de A.
- Forma 2: El resultat és una combinació lineal dels vectors fila de A (amb coeficients els components de v).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$