Primer Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(2 puntos)**

Dados el siguiente lenguaje y homomorfismo:

$$L = \{ba, aba\} \qquad \begin{cases} h(a) = a \\ h(b) = b \\ h(c) = a \end{cases}$$

(a) Describa el lenguaje $h^{-1}(L)$.

Solución:
$h^{-1}(L) = \{ba, bc, aba, abc, cba, cbc\}$

(b) Describa el lenguaje $h(L)$.

Solución:
$h(L) = L$

(c) Describa el lenguaje $a^{-1}L$.

Solución:
$a^{-1}L = \{ba\}$.

(d) Describa el lenguaje L^2.

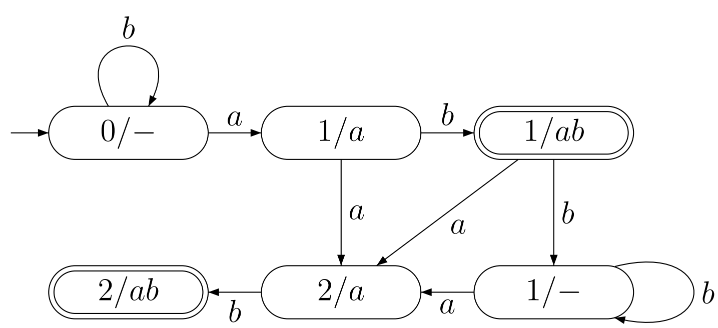
Solución:
$L^2 = \{baba, ababa, baaba, abaaba\}$

Ejercicio 2 **(3 puntos)**

Proporcione un AFD para el lenguaje:

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \ : \ |x|_a \leq 2 \wedge ab \in Suf(x)\}$$

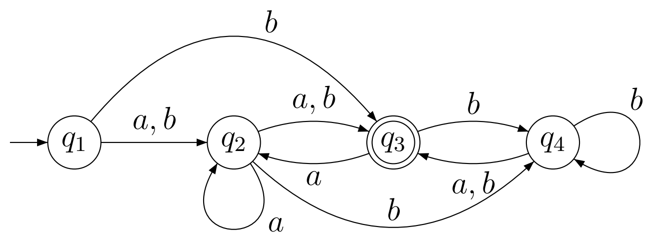
Solución:



Nombramos cada estado con información acerca del número de símbolos a analizados y el sufijo que permitiría comprobar la condición de pertenencia al lenguaje.

Ejercicio 3 **(3 puntos)**

Obtener un AFD equivalente al siguiente autómata:



Solución:

Aplicando el algoritmos visto en clase, se obtiene el siguiente autómata:

		a	b
$\rightarrow$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$
	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4\}$
$\leftarrow$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4\}$
$\leftarrow$	$\{3,4\}$	$\{2,3\}$	$\{3,4\}$

Ejercicio 4 **(2 puntos)**

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD tal que $|F| = 1$.

¿Es cierto que, si x y xy son palabras del lenguaje $L(A)$, entonces la palabra xyy también lo es?

Solución:

La afirmación es cierta. En la prueba denotaremos con q_f el único final del autómata.

Nótese que si $x \in L(A)$, entonces $\delta(q_0, x) = q_f$. Del mismo modo, como $xy \in L(A)$, entonces $\delta(q_0, xy) = q_f$.

Como x es un prefijo de xy cuyo análisis alcanza el estado q_f, de lo anterior se sigue que $\delta(q_f, y) = q_f$, por lo que puede verse un ciclo que puede repetirse indefinidamente. Así xyy es una palabra del lenguaje como lo son también cualquier palabra de la forma xy^n para un valor entero cualquiera n.

Segundo Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(1 punto)**

Enumere las siete primeras palabras en orden canónico del lenguaje representado por la expresión $(b + aa)^*(\lambda + b)(a + bb)^*$.

Solución:

$\lambda, a, b, aa, ba, bb, aaa$

Ejercicio 2 **(1 punto)**

Obtenga una expresión regular para denotar el lenguaje de palabras sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ tales que contienen al menos una a, una b y una c, y donde el primer símbolo b no aparece antes del primer símbolo a, ni el primer símbolo c antes del primer símbolo b.

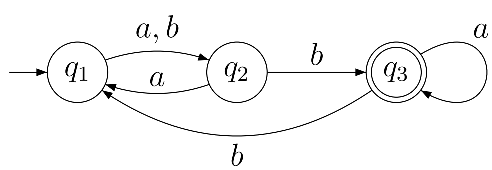
Ejemplo: Las palabras *aabbabc* y *aabaccba* son del lenguaje mientras que *aab*, *acb*, *bc* y *baacc* no lo son.

Solución:

$aa^*b(a + b)^*c(a + b + c)^*$

Ejercicio 3 **(3 puntos)**

Utilice el método visto en clase para analizar el siguiente autómata y obtener una expresión regular que describa el lenguaje aceptado por él.



Solución:

El sistema de ecuaciones en expresiones regulares asociado al autómata es:

$$\begin{cases} X_1 = (a + b)X_2 \\ X_2 = aX_1 + bX_3 \\ X_3 = aX_3 + bX_1 + \lambda \end{cases}$$

de donde, el lenguaje identificado por el autómata es el asociado al lenguaje por la derecha del estado inicial. Por lo que buscaremos obtener la expresión asociada a X_1.

Aplicando el Lema de Arden en la tercera ecuación se obtiene que:

$$X_3 = a^*(bX_1 + \lambda) = a^*bX_1 + a^*,$$

sustituyendo en el sistema el valor de X_3 obtenemos:

$$\begin{cases} X_1 = (a+b)X_2 \\ X_2 = aX_1 + ba^*bX_1 + ba^* = (a+ba^*b)X_1 + ba^* \end{cases}$$

volviendo a sustituir en el sistema el valor de X_2 obtenemos:

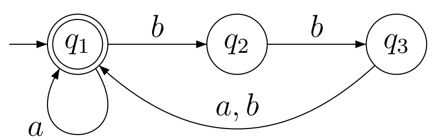
$$X_1 = (a+b)(a+ba^*b)X_1 + (a+b)ba^*$$

y aplicando el Lema de Arden en esta ecuación se obtiene:

$$X_1 = ((a+b)(a+ba^*b))^*(a+b)ba^*$$

Ejercicio 4 **(3 puntos)**

Dados el siguiente autómata y homomorfismo:

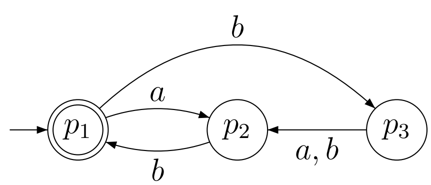


$$\begin{cases} h(a) = ab \\ h(b) = bb \end{cases}$$

obtenga un AFD que acepte el lenguaje $h^{-1}(L(A)) \cap L(A)$.

Solución:

Obtenemos primero un autómata para $h^{-1}(L(A))$.



no es necesario obtener autómatas completamente especificados para calcular la intersección. El autómata que se obtiene aplicando la construcción es el siguiente:

		a	b
$\leftrightarrows$	$< q_1, p_1 >$	$< q_1, p_2 >$	$< q_2, p_3 >$
	$< q_1, p_2 >$	$-$	$< q_2, p_1 >$
	$< q_2, p_3 >$	$-$	$< q_3, p_2 >$
	$< q_2, p_1 >$	$-$	$< q_3, p_3 >$
	$< q_3, p_2 >$	$-$	$< q_1, p_1 >$
	$< q_3, p_3 >$	$< q_1, p_2 >$	$< q_1, p_2 >$

Ejercicio 5 **(2 puntos)**

Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, se define la operación $P(x)$ como la que inserta en las palabras de longitud dos o más una a como segundo símbolo. Esta operación se extiende a lenguajes de forma natural como:

$$P(L) = \{P(x) \ : \ x \in L\}.$$

Si L es un lenguaje regular, ¿es $P(L)$ siempre un lenguaje regular?

Ejemplo: Dado $L = \{a, bab, bbaabba\}$, se obtiene $P(L) = \{a, baab, babaabba\}$.

Solución:

La operación es de cierre en la clase de los lenguajes regulares. Para la demostración consideraremos el lenguaje regular de palabras cuya longitud es mayor o igual a dos:

$$L2 = \{x \in \{a, b\}^* \ : \ |x| \geq 2\}$$

En efecto, la función puede definirse como el resultado de:

$$P(L) = (\{aa\}(a^{-1}(L \cap L2))) \cup (\{ba\}(b^{-1}(L \cap L2))) \cup (L \cap \{\lambda, a, b\})$$

Como la definición puede hacerse como composición, sobre lenguajes regulares, de operaciones que garantizan que el resultado es un lenguaje regular, se puede concluir que la operación $P(L)$ es cerrada en la clase de los lenguajes regulares.