Considerad la aplicación

$$f: \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x}$$

a) Probad que f es biyectiva

b) Calculad f^{-1}. ¿Es aplicación?

c) Calculad la función $f\circ f$

a) - Veamos que f es inyectiva. Hemos de probar:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

Veámoslo:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a}{1+a} = \frac{2b}{1+b} \Rightarrow 2a(1+b) = 2b(1+a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a + \cancel{2ab} = 2b + \cancel{2ba} \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b.$$

- Veamos que f es sobreyectiva. Hemos de probar:

$$\forall b \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad \exists x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \text{ tal que } f(x) = b$$

Veámoslo:

$$f(x) = b \Rightarrow \frac{2x}{1+x} = b \Rightarrow 2x = b(1+x) \Rightarrow 2x = bx + b$$

$$\Rightarrow 2x - bx = b \Rightarrow x(2-b) = b \underset{b\neq 2}{\Rightarrow} x = \frac{b}{2-b}$$

Así, cada $b \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ tiene como antiimagen $\frac{b}{2-b}$

b) Como f es biyectiva, f^{-1} es aplicación y se cumple:

$$f(x) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = x \Leftrightarrow f^{-1}(b) = \frac{b}{2-b}$$

Luego:

$$f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

está definida por: $$f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$$

c) Calculemos $f\circ f$:

$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2x}{1+x}\right) = \frac{2\left(\frac{2x}{1+x}\right)}{1 + \left(\frac{2x}{1+x}\right)}$$

$$\Rightarrow (f\circ f)(x) = \frac{\frac{4x}{\cancel{1+x}}}{\frac{(1+x)+2x}{\cancel{1+x}}} = \frac{4x}{1+3x}$$

Observad que $f\circ f$ será aplicación si nos restringimos a $\mathbb{R}\setminus\{\frac{-1}{3}\}$

$$f\circ f: \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{3}\right\} \to \mathbb{R} \qquad (f\circ f)(x) = \frac{4x}{1+3x}$$