DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Segundo parcial 11-01-2017 Duración: 2 horas

Nombre: Grupo:

---

1. (2p) Compara el orden de magnitud de las siguientes sucesiones:

$$\begin{aligned} a_n &= 1\cdot n \ +2\cdot n \ + \ 3\cdot n \ + \ 4\cdot n \ +\ldots + \ n\cdot n \\ b_n &= n^3+1 \end{aligned}$$

Para comparar el orden de magnitud de dos sucesiones, en general, tenemos que estudiar el valor del límite del cociente de ambas sucesiones cuando n tiende a infinito. Este ejercicio **lo puedes resolver utilizando el criterio de Stolz**. Aquí te presentamos un método alternativo, vamos a calcular el límite directamente sin utilizar el criterio de Stolz:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1\cdot n \ +2\cdot n \ + \ 3\cdot n \ + \ 4\cdot n \ +\ldots + \ n\cdot n}{n^3+1} = \lim \frac{n\cdot(1 \ + \ 2 \ + \ 3 \ + \ 4 \ +\ldots + \ n)}{n^3+1} =$$

Ahora puedes utilizar el resultado de la suma de los n primeros números naturales, o lo que es lo mismo, la suma de la progresión aritmética $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces

$$= \lim \frac{n\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)}{n^3+1} = \lim \frac{n^3+n^2}{2(n^3+1)} = \frac{1}{2}$$

Como consecuencia de este resultado las dos sucesiones tienen el mismo orden.

---

2. (1p) Sea la sucesión recurrente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& a_n+3n \quad \text{para } n\geq 1 \\ a_1 &=& 1 \end{array} \right.$$

Calcula a_2, a_3, a_4 y deduce una fórmula general para a_n sabiendo que su orden de magnitud es n^2.

$a_2 = a_1 + 3\cdot 1 = 1+3 = 4$
$a_3 = a_2 + 3\cdot 2 = a_1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = a_1 + 3\cdot(1+2) = 10$
$a_4 = a_3 + 3\cdot 3 = a_1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 = a_1 + 3\cdot(1+2+3) = 19$

Para calcular a_n vamos a estudiar la tendencia de la sucesión. Vamos a utilizar un resultado similar al del ejercicio anterior, es decir el valor de la suma de los $n-1$ primeros números naturales

$$a_n = a_{n-1}+3\cdot(n-1) = a_1+3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+3\cdot(n-1) = a_1+3\cdot(1+2+3+4+\ldots+(n-1)) = a_1+3\frac{n(n-1)}{2} = 1+3\frac{n(n-1)}{2}$$

Otra forma de resolver este ejercicio es proponer una solución del la forma $a_n = An^2+Bn+C$ y sustituirla en la ecuación de la recurrencia:

$$\overbrace{A(n+1)^2+B(n+1)+C}^{a_{n+1}} = \overbrace{An^2+Bn+C}^{a_n}+3n$$
$$An^2+2An+A+Bn+B = An^2+Bn+C+3n$$

agrupando

$$An^2+(2A+B)n+(A+B+C) = An^2+(B+3)n+C$$

ahora tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A &=& A & \text{para } n^2 \\ 2A+B &=& B+3 & \text{para } n \\ A+B+C &=& C & \text{del término constante} \end{array} \right.$$

Si observas el sistema anterior, aunque tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, la primera ecuación no aporta información por lo que la podemos eliminar y la variable C de la tercera ecuación se elimina de ambos lados de la ecuación por lo que el sistema se simplifica a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. De la segunda ecuación obtenemos $A = \frac{3}{2}$ y de la tercera $B = -A = -\frac{3}{2}$

Con todo esto tenemos que:

$$a_n = \frac{3}{2}(n^2 - n) \ + \ C$$

El valor de C lo podemos obtener utilizando $a_1 = 1$

$$a_1 = \frac{3}{2}(1 - 1) \ + \ C = 1 \ \leftrightarrow \ C = 1$$

entonces:

$$a_n = \frac{3}{2}(n^2 - n) \ + \ 1$$

Observa que esta solución coincide con la obtenida con el método anterior.

---

3. a) $_{(2p)}$ Resuelve la recurrencia:

$$\begin{cases} a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n + 2 \text{ para } n \geq 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \end{cases}$$

b)$_{(1p)}$ Encuentra el valor de k para que $a_n^p = k \cdot 3^n$ sea solución particular de la recurrencia:

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 3^n$$

---

a) Primero: resolvemos la ecuación de segundo grado asociada a la recurrencia homogénea:

$$x^2 - x - 2 = 0 \ \leftrightarrow \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Esto nos da dos raíces reales distintas $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. Por lo que la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$a_n^h = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n$$

Segundo: proponemos una solución particular para la ecuación completa de la forma $a_n^p = K$, entonces:

$$a_{n+1}^p = K$$

$$a_{n+2}^p = K$$

sustituyendo en la ecuación completa:

$$K = K + 2K + 2 \ \leftrightarrow \ K = -1$$

Finalmente: la solución general de la ecuación completa es:

$$a_n = a_n^h + a_n^p = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n - 1$$

Los valores de las constantes los obtenemos utilizando los valores de a_1 y a_2

$$\textit{para n=1} \ \Rightarrow \ a_1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot (-1)^1 - 1 = 1 \ \Rightarrow 2 \cdot C_1 - C_2 = 2,$$

$$\textit{para n=2} \ \Rightarrow \ a_2 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 \ \Rightarrow 4 \cdot C_1 + C_2 = 4.$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos $C_1 = 1$ y sustituyendo ese resultado en la segunda ecuación se obtiene $C_2 = 0$ con lo que la solución es:

$$a_n = 2^n - 1$$

b) Si $a_n^p = k \cdot 3^n$ es solución, entonces:

$$a_{n+1}^p = k \cdot 3^{n+1}$$

$$a_{n+2}^p = k \cdot 3^{n+2}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\overbrace{k \cdot 3^{n+2}}^{a_{n+2}} - \overbrace{k \cdot 3^{n+1}}^{a_{n+1}} - 2 \ \overbrace{k \cdot 3^n}^{a_n} = 3^n$$

dividiendo todo entre 3^n

$$k \cdot 3^2 - k \cdot 3^1 - 2 \ k \cdot 1 = 1$$

entonces $k = \frac{1}{4}$ y $a_n^p = \frac{1}{4} \cdot 3^n$ es una solución particular de la recurrencia.

---

4. Sea la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n\cdot 3^{2n-1}}$$

a)$_{(1p)}$ Aproxima $f(-1)$ con una precisión de 10^{-3}. Justifica tu respuesta.

b)$_{(1p)}$ Deriva la serie de potencias anterior y calcula su suma donde converja.

c)$_{(1p)}$ Integra el resultado anterior para encontrar $f(x)$ explícitamente.

d)$_{(1p)}$ Calcula el valor exacto de $f(-1)$ utilizando el resultado anterior y compara con el resultado del apartado a).

---

a)

$$f(-1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^{2n-1}}$$

es una serie alternada, vamos a comprobar si se le puede aplicar el criterio de Leibniz:

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\cdot 3^{2n-1}} = 0$$
- La sucesión de valores absolutos es una sucesión decreciente:

$$|a_{n+1}| - |a_n| = \frac{1}{(n+1)\cdot 3^{2(n+1)-1}} - \frac{1}{n\cdot 3^{2n-1}} = \frac{n}{n\cdot(n+1)\cdot 3^{2n+1}} - \frac{(n+1)3^2}{n(n+1)\cdot 3^{2n+1}} =$$

$$= \frac{n-(n+1)3^2}{(n+1)\cdot n\cdot 3^{2n+1}} = \frac{-8n-9}{(n+1)\cdot 3^{2n+1}}$$

este resultado es negativo $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo tanto la sucesión de valores absolutos es decreciente.

Le podemos aplicar el criterio de Leibniz para series alternadas. El error asociado a la aproximación

$$S_N \simeq \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^{2n-1}}$$

viene acotado por

$$E_N \leq \frac{1}{(N+1)\cdot 3^{2(N+1)-1}}$$

Entonces tenemos que encontrar N tal que:

$$\frac{1}{(N+1)\cdot 3^{2(N+1)-1}} \leq 10^{-3} \;\leftrightarrow\; \frac{1}{(N+1)\cdot 3^{2N+1}} \leq 10^{-3}$$

Dándole valores a N obtenemos

- Para $N=1$, $E_1 = \frac{1}{54} \simeq 0.018 > 10^{-3}$
- Para $N=2$, $E_2 = \frac{1}{729} \simeq 0.0014 > 10^{-3}$
- Para $N=3$, $E_3 = \frac{1}{8748} \simeq 0.00011 \leq 10^{-3}$

y

$$f(-1) \simeq \frac{-1}{1\cdot 3^1} + \frac{1}{2\cdot 3^3} + \frac{-1}{3\cdot 3^5} = -\frac{461}{1458} \simeq -0.316$$

b) Vamos a derivar la serie término a término

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n\cdot 3^{2n-1}}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n\cdot 3^{2n-1}}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\cdot 3^{2n-1}}\frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\cdot 3^{2n-1}}\cdot nx^{n-1} =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{2n-1}}\cdot x^{n-1} = 3^{-1}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{2n-2}}\cdot x^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n-1}}{(3^2)^{n-1}} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{9}\right)^n$$

Ahora sumamos la serie geométrica obtenida

$$\frac{1}{3}\cdot\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{9}\right)^n = \begin{cases} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x}{9}\right)}\right) = \frac{3}{9-x} \text{ si } \left|\frac{x}{9}\right| < 1, \\ \\ \text{divergente si } \left|\frac{x}{9}\right| \geq 1. \end{cases}$$

c) Si integramos el resultado anterior:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n\cdot 3^{2n-1}} = \int f'(x)dx = \int \frac{3}{9-x}dx = -3\log(9-x) + C$$

Para calcular el valor de la constante podemos utilizar que $f(0) = 0$, entonces:

$$f(0) = 0 = -3\log(9) + C \leftrightarrow C = 3\log(9)$$

y

$$f(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n\cdot 3^{2n-1}} = -3\log(9-x) + 3\log 9 = 3\log\frac{9}{9-x}$$

d)

$$f(-1) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n\cdot 3^{2n-1}} = 3\log\frac{9}{10} = -0.316082$$

resultado que confirma la precisión encontrada en a) y que proporciona al menos dos decimales exactos.