Examen d'àlgebra (recuperació dels parcials 1 i 2)
13 de juny de 2019
Part única (3 hores)

1*r*P	2*n*P

COGNOMS:	GRUP:
NOM:	

– Marqueu amb una X les caselles corresponents als parcials que recupereu.
– Els alumnes que recuperen el primer parcial hauran de respondre les qüestions 1, 2, 3 i 4.
– Els alumnes que recuperen el segon parcial hauran de respondre les qüestions 5, 6, 7 i 8.
– Els alumnes que recuperen els dos parcials hauran de respondre les qüestions 1, 2, 3, 5, 6 i 8.

Qüestió 1 (3 pt.) Siga la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2-a & a & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calculeu una forma esglaonada de A, **en funció del paràmetre** a, indicant les operacions elementals efectuades.

b) Calculeu el rang de A en funció del paràmetre a.

c) Si A es considera com la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, determineu el nombre de solucions en funció del paràmetre a i calculeu el conjunt de solucions en els casos compatibles.

Solució:

a)

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2-a & a & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-1),\, \mathsf{E}_{3,1}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix} = (*)$$

Si $a \notin \{0,1\}$ aleshores a i $a-1$ són els pivots de la segona i tercera fila, respectivament. Cal distingir, per tant, 3 casos:

- Cas 1: $a \notin \{0,1\}$. La matriu $(*)$ anterior és una forma esglaonada de la matriu inicial.
- Cas 2: $a = 0$:
$$(*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Cas 3: $a = 1$: $(*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és una forma esglaonada de A.

b) De l'apartat anterior es dedueix que el rang de A és 3 si $a \neq 1$, i 2 si $a = 1$.

c) Distingim 3 casos:

- Cas 1: $a \notin \{0,1\}$. Tant el rang de la matriu de coeficients del sistema com el de la matriu ampliada són iguals a 3 (que és el nombre d'incògnites). Per tant, aplicant el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema és compatible determinat i la seua solució és el vector $((2a-1)/a, 1/a, 0)$.
- Cas 2: $a = 0$. El rang de la matriu de coeficients és 2 i el de la matriu ampliada és 3. Pel Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema és incompatible.
- Cas 3: $a = 1$. El rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada són iguals a 2. Pel Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminat, i és equivalent al sistema
$$x = 1$$
$$y + z = 1.$$
El conjunt de solucions és, per tant: $\{(1, 1-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Qüestió 2 (3 pt.) Siga el sistema d'equacions lineals (amb 3 incògnites)

$$x + y + z = 4$$

$$x + (a-1)y + z = 4(a+1)$$

$$ax + 2y = b.$$

a) Resoleu el sistema pel mètode de Gauss, en funció dels paràmetres a i b.

b) Per a $a = 1$ calculeu la forma esglaonada reduïda R de la matriu de coeficients del sistema i una matriu T tal que $\mathsf{T}\ \mathsf{A} = \mathsf{R}$ (és suficient escriure T com a producte de matrius elementals).

c) **Justifiqueu** que T és una matriu invertible. Escriviu T^{-1} i T^{t} com a producte de matrius elementals.

Solució:

a) Esglaonem la matriu ampliada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & a-1 & 1 & 4a+4 \\ a & 2 & 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{E}_{3,1}(-a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 & 4a \\ 0 & 2-a & -a & b-4a \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 & 4a \\ 0 & 0 & -a & b \end{bmatrix}$$

Distingim tres casos:

- Cas 1: $a \notin \{0, 2\}$. En este cas, tant el rang de la matriu de coeficients com el de la matriu ampliada són iguals a 3 (nombre d'incògnites). Pel Teorema de Rouchë-Fröbenius, el sistema és compatible determinat. Per substitució regressiva es té que la solució és:

$$\left(4 - \frac{4a}{a-2} + \frac{b}{a}, \frac{4a}{a-2}, \frac{-b}{a}\right).$$

- Cas 2: $a = 0$. En este cas la matriu ampliada és equivalent per files a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

  Per tant, hem de distingir ací dos subcasos:

  - Subcas 2.1: $b \neq 0$. El rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada és 3. Per tant, pel Teorema de Rouchë-Fröbenius, el sistema és incompatible.
  - Subcas 2.2: $b = 0$. Tant el rang de la matriu ampliada con el de la matriu de coeficients són iguals a 2. Pel Teorema de Rouchë-Fröbenius, el sistema és compatible indeterminat. El conjunt de solucions és: $\{(4-\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- Cas 3: $a = 2$. Clarament el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada és 3. Per tant, el sistema es incompatible.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{E}_{3,1}(-1)} \left[\cdots\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3}(-1),\ E_{2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

Com

$$\mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_{1,3}(-1)\mathsf{E}_{3}(-1)E_{2}(-1)\mathsf{E}_{3,2}(1)\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{A} = \mathsf{R},$$

es té que:

$$\mathsf{T} = \mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_{1,3}(-1)\mathsf{E}_{3}(-1)E_{2}(-1)\mathsf{E}_{3,2}(1)\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1).$$

c) T és una matriu invertible perquè és producte de matrius elementals.

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^{-1} &= (\mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_{1,3}(-1)\mathsf{E}_3(-1)E_2(-1)\mathsf{E}_{3,2}(1)\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1))^{-1}\\ &= \mathsf{E}_{2,1}(-1)^{-1}\mathsf{E}_{3,1}(-1)^{-1}\mathsf{E}_{3,2}(1)^{-1}\mathsf{E}_2(-1)^{-1}\mathsf{E}_3(-1)^{-1}\mathsf{E}_{1,3}(-1)^{-1}\mathsf{E}_{1,2}(-1)^{-1}\\ &= \mathsf{E}_{2,1}(1)\mathsf{E}_{3,1}(1)\mathsf{E}_{3,2}(-1)\mathsf{E}_2(-1)\mathsf{E}_3(-1)\mathsf{E}_{1,3}(1)\mathsf{E}_{1,2}(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^{t} &= (\mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_{1,3}(-1)\mathsf{E}_3(-1)E_2(-1)\mathsf{E}_{3,2}(1)\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1))^{t}\\ &= \mathsf{E}_{2,1}(-1)^{t}\mathsf{E}_{3,1}(-1)^{t}\mathsf{E}_{3,2}(1)^{t}\mathsf{E}_2(-1)^{t}\mathsf{E}_3(-1)^{t}\mathsf{E}_{1,3}(-1)^{t}\mathsf{E}_{1,2}(-1)^{t}\\ &= \mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_{1,3}(-1)\mathsf{E}_{2,3}(1)\mathsf{E}_2(-1)\mathsf{E}_3(-1)\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\end{aligned}$$

Qüestió 3 (2 pt.) a) Donada una matriu quadrada arbitrària A, demostreu que $\mathsf{A}+\mathsf{A}^t$ és simètrica i $\mathsf{A}-\mathsf{A}^t$ és antisimètrica.

b) Si és possible, trobeu un conjunt de 6 vectors de $\mathbb{R}^5$ linealment independent. Si no és possible justifiqueu el motiu.

c) Donats

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ a+1 & -1 & -a \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} a+2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

calculeu el valor de a per a que el vector $\vec{s} = (0, 1, -1)$ siga solució del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

Solució:

a) Vegem que $\mathsf{A}+\mathsf{A}^t$ és simètrica:

$$(\mathsf{A}+\mathsf{A}^t)^t = \mathsf{A}^t + (\mathsf{A}^t)^t = \mathsf{A}^t + \mathsf{A} = \mathsf{A} + \mathsf{A}^t.$$

Vegem que $\mathsf{A}-\mathsf{A}^t$ és antisimètrica:

$$(\mathsf{A}-\mathsf{A}^t)^t = \mathsf{A}^t - (\mathsf{A}^t)^t = \mathsf{A}^t - \mathsf{A} = -(\mathsf{A}-\mathsf{A}^t).$$

b) No és possible perquè el cardinal màxim d'un conjunt de vectors linealment independent és igual a la dimensió de l'espai vectorial (que, en el cas de $\mathbb{R}^5$, és 5).

c) Com $\mathsf{A}\vec{s} = (1, a-1, -1)$, es té que

$$\mathsf{A}\vec{s} = \vec{b} \Leftrightarrow (1, a-1, -1) = (a+2, -2, -1) \Leftrightarrow a = -1.$$

Qüestió 4 (2 pt.) a) Escriviu un sistema de 3 equacions lineals amb 6 incògnites $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ tal que el vector $(a, 2a, b, b+5, c, c/7)$ siga una solució, per a tots els valors $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Sabent que Q és una matriu ortogonal, demostreu que l'única matriu X verificant la igualtat

$$\mathsf{Q}(\mathsf{X}+\mathsf{Q}^t-\mathsf{I})^t\mathsf{Q}^t = \mathsf{Q}$$

és la matriu identitat I.

Solució:

a)

$$2x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = -5, x_5 - 7x_6 = 0.$$

b) Observeu que, al ser Q ortogonal, $\mathsf{Q}^{-1} = \mathsf{Q}^t$. Per tant:

$$\mathsf{Q}(\mathsf{X}+\mathsf{Q}^t-\mathsf{I})^t\mathsf{Q}^t = \mathsf{Q} \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{X}+\mathsf{Q}^t-\mathsf{I})^t = \underbrace{\mathsf{Q}^t\mathsf{Q}}_{\mathsf{I}}\,\mathsf{Q} \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{X}+\mathsf{Q}^t-\mathsf{I})^t = \mathsf{Q} \;\Leftrightarrow\; \mathsf{X}+\mathsf{Q}^t-\mathsf{I} = \mathsf{Q}^t \;\Leftrightarrow\; \mathsf{X} = \mathsf{I}$$

Qüestió 5 (3 pt.) Es consideren els següents subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$H = \langle (1,0,-1,3),(0,1,1,-1),(3,1,-2,8)\rangle$$

$$T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 4x+z-t=0,\ x+z=0\}$$

a) Calculeu una base de H i la seua dimensió.

b) Calculeu una base de T i la seua dimensió.

c) Calculeu unes equacions implícites de H.

d) Calculeu una base de $H \cap T$

e) Determineu la dimensió de $H+T$. És directa aquesta suma?

Solució:

a) La matriu que té com a files els transposats dels generadors de H és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ i és equivalent per files a la matriu esglaonada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Per tant $\{(1,0,-1,3),(0,1,1,-1)\}$ és una base de H i $\dim(H)=2$.

b) El subespai T ve donat per dues equacions implícites. El conjunt de solucions del sistema d'equacions format per elles és $\{(\beta,\alpha,-\beta,3\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, és a dir:

$$T = \{\alpha(0,1,0,0)+\beta(1,0,-1,3) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,0,0),(1,0,-1,3)\rangle.$$

Com $\{(0,1,0,0),(1,0,-1,3)\}$ és linealment independent i sistema generador de T, és una base de T i $\dim(T)=2$.

c) $(x,y,z,t) \in H$ si i només si existeixen $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tals que $(x,y,z,t) = \alpha(1,0,-1,3)+\beta(0,1,1,-1)$, és a dir, si i només si el sistema d'equacions (amb incògnites α i β) amb matriu ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & -1 & t \end{bmatrix}$$

és compatible. Esglaonant aquesta matriu, obtenim la matriu equivalent per files

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & x-y+z \\ 0 & 0 & -3x+y+t \end{bmatrix}.$$

Veiem que el sistema anterior és compatible si i només si $2x-y+z=0$ i $-3x+y+t=0$ i, per tant:

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z=0 \quad \text{i} \quad -3x+y+t=0\}.$$

d) A partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors es pot deduir molt fàcilment que $H \cap T = \langle (1,0,-1,3)\rangle$ i, per tant, que $\{(1,0,-1,3)\}$ és una base de $H \cap T$: per una banda, com hem deduit que $H = \langle (1,0,-1,3),(0,1,1,-1)\rangle$ i $T = \langle (0,1,0,0),(1,0,-1,3)\rangle$, és clar que $\langle (1,0,-1,3)\rangle \subseteq H \cap T$; per alta banda, com $H \cap T \subseteq H$ i el vector $(0,1,1,-1)$ pertany a H però no pertany a T (perque no satisfà les equacions implícites de T), es té que la inclusió $H \cap T \subseteq H$ és estricta i, per tant, $\dim(H \cap T) = 1$, amb la qual cosa $H \cap T = \langle (1,0,-1,3)\rangle$.
També podem emprar el procediment habitual per calcular la intersecció de dos subespais: $H \cap T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z=0 \ \wedge\ -3x+y+t=0 \ \wedge\ 4x+z-t=0 \ \wedge\ x+z=0\}$. Resolent el sistema definit per les 4 equacions obtindrem una base de $H \cap T$. Esglaonant la matriu ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenim, així, el sistema equivalent

$$x - y + z = 0$$
$$-2y + 3z + t = 0$$
$$3z + t = 0.$$

El seu conjunt de solucions és: $\{(\alpha, 0, -\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0, -1, 3)\rangle$. Per tant $\{(1, 0, -1, 3)\}$ és una base de $H \cap T$ i $\dim(H \cap T) = 1$.

e) Per la fórmula de Grassman:

$$\dim(H + T) = \dim(H) + \dim(T) - \dim(H \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

La suma no és directa perquè $H \cap T \neq \{\vec{0}\}$.

Qüestió 6 (3 pt.) a) Siga la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} b & b^2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Determineu per a quins valors de b és A diagonalitzable.

b) Per a b=3, calculeu una matriu invertible P i una matriu diagonal D tal que $\mathsf{A} = \mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^{-1}$.

c) Per a b=3, i utilitzant **exclusivament** la resposta de l'apartat b), calculeu el determinant $\det(\mathsf{A}^n)$ per a tot nombre natural n. Calculeu també $\det\left(5(A^n)^t\right)$ per a $n \in \mathbb{N}$.

Solució:

a) Calculem el polinomi característic de la matriu:

$$p_{\mathsf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} b-\lambda & b^2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2).$$

El conjunt dels valors propis és, per tant, $\{b, 2, -2\}$. Distingim 3 casos:

- Cas 1: $b \notin \{-2, 2\}$. En aquest cas, la matriu (que és d'ordre 3) té 3 valors propis diferents i, per tant, és diagonalitzable.
- Cas 2: $b = 2$. En este cas la matriu té dos valors propis diferents: $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$. La multiplicitat algebraica de λ_1 (és a dir, la seua multiplicitat com arrel del polinomi característic) és $\alpha_1 = 2$. La multiplicitat algebraica de λ_2 es $\alpha_2 = 1$. Si, per a $i \in \{1, 2\}$, d_i denota la multiplicitat geomètrica de λ_i (és a dir, la dimensió de $\mathrm{Nuc}(\mathsf{A} - \lambda_i \mathsf{I})$, el subespai propi associat a λ_i) es té que $d_2 = 1$ per la desigualtat $1 \leq d_2 \leq \alpha_1 = 2$. Haurem de calcular d_1:

$$d_1 = \dim\ \mathrm{Nuc}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I}) = \dim\ \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \alpha_1.$$

  Per tant, la matriu no és diagonalitzable.
- Cas 2: $b = -2$. En este cas la matriu té també dos valors propis diferents: $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -2$. La multiplicitat algebraica de λ_1 és $\alpha_1 = 1$. La multiplicitat algebraica de λ_2 es $\alpha_2 = 2$. Es té que $d_1 = 1$ per la desigualtat $1 \leq d_1 \leq \alpha_1 = 2$. Haurem de calcular d_2:

$$d_2 = \dim\ \mathrm{Nuc}(\mathsf{A} - \lambda_2 \mathsf{I}) = \dim\ \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \alpha_2.$$

  Per tant, la matriu no és diagonalitzable.

b) El conjunt de valors propis quan $b = 3$ és $\{\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2\}$, amb $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Per tant $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calculem bases dels subespais propis:

$$\mathrm{Nuc}(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I}) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \mathrm{Nuc}\langle(1, 0, 0)\rangle, \quad \mathrm{Nuc}(\mathsf{A} - \lambda_2 \mathsf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \langle(-30, 3, 1)\rangle$$

$$\mathrm{Nuc}(\mathsf{A}-\lambda_3\mathsf{I}) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}5 & 9 & 3\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \langle(6,-5,5)\rangle$$

Per tant: $\mathsf{P} = \begin{bmatrix}1 & -30 & 6\\ 0 & 3 & -5\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$.

c) Com $\mathsf{A}^n = \mathsf{P}\mathsf{D}^n\mathsf{P}^{-1}$ es té que:

$$\det(\mathsf{A}^n) = \det(\mathsf{P})\det(\mathsf{D})^n\det(\mathsf{P}^{-1}) = \det(\mathsf{P})\det(\mathsf{D})^n\det(\mathsf{P})^{-1} = \det(\mathsf{D})^n = (-12)^n.$$

$$\det\left(5(A^n)^t\right) = 5^3\det\left((A^n)^t\right) = 5^3\det(\mathsf{A})^n = 125\cdot(-12)^n.$$

Qüestió 7 (2 pt.) a) Siga H el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat pel vector $(1,1,1,1)$. Calculeu equacions implícites i una base del complement ortogonal, $H^\perp$.

b) Calculeu la projecció ortogonal sobre H del vector $(2,-2,3,-3)$.

Solució:

a) Un vector (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ pertany a $H^\perp$ si i només si el seu producte escalar amb el generador de H és zero. Per tant $x+y+z+t=0$ és l'equació implícita de $H^\perp$. El conjunt de solucions d'aquesta equació és:

$$\{(-\alpha-\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\} =$$

$$\{\alpha(-1,1,0,0)+\beta(-1,0,1,0)+\gamma(-1,0,0,1) \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Per tant:

$$\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$$

és una base de $H^\perp$.

b) El vector $(2,-2,3,-3)$ pertany a $H^\perp$. Per tant la seua projecció ortogonal sobre H és $(0,0,0,0)$.

Qüestió 8 (2 pt.) a) Calculeu les coordenades del vector $(6,1,4)$ de $\mathbb{R}^3$ respecte de la base $B=\{(1,1,2),(1,-1,0),(3,0,1)\}$.

b) Sabem que les coordenades d'un vector $\vec{v}$ respecte de la base B de l'apartat anterior són $(1,-2,1)$. Calculeu el vector $\vec{v}$.

c) Siga A una matriu 6×3 tal que el sistema $\mathsf{A}\vec{x}=\vec{0}$ té una única solució. Calculeu les dimensions dels subespais $\mathrm{Fil}(\mathsf{A})$, $\mathrm{Col}(\mathsf{A})$, $\mathrm{Nuc}(\mathsf{A})$, $\mathrm{Fil}(\mathsf{A})^\perp$ i $\mathrm{Col}(\mathsf{A})^\perp$. Raoneu la resposta.

d) Si una matriu A de tamany $n\times n$ té, com a valor propi, al 0, és A una matriu invertible? Justifiqueu la resposta.

Solució:

a)

$$\begin{bmatrix}6\\1\\4\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},$$

amb la qual cosa $6=\alpha+\beta+3\gamma$, $\quad 1=\alpha-\beta \quad$ i $\quad 4=2\alpha+\gamma$. Resolent el sistema: $\alpha=5/4$, $\beta=1/4$ i $\gamma=3/2$. Per tant, les coordenades del vector de l'enunciat respecte de la base B són $(5/4,1/4,3/2)$.

b)

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}.$$

Nom i cognoms:
Grup:

c) Com el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ té solució única, el rang de A és 3. Per tant:

$$\dim\ \mathrm{Fil}(A) = \dim\ \mathrm{Col}(A) = \mathrm{rang}(A) = 3,$$

$$\dim\ \mathrm{Nuc}(A) = 3 - \mathrm{rang}(A) = 3 - 3 = 0,$$
$$\dim\ \mathrm{Fil}(A)^{\perp} = 3 - \dim\ \mathrm{Fil}(A) = 3 - 3 = 0.$$
$$\dim\ \mathrm{Col}(A)^{\perp} = 6 - \dim\ \mathrm{Col}(A) = 6 - 3 = 3.$$

d) Si 0 és un valor propi de A aleshores existeix un vector no nul $\vec{x}$ tal que $A\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}$. Per tant, el sistema d'equacions homogeni amb matriu de coeficients A té una solució diferent de $\vec{0}$. Aleshores el rang de la matriu A és menor que n (pel Teorema de Rouché Fröbenius) i concloem que A no és invertible.