Anàlisi Matemàtica

UT2 - Funcions reals de variable real

Contingut

Conceptes generals
- Domini i rang
- Funcions injectives. Funció inversa
- Funcions creixents, decreixent i acotades
- Funcions parelles, senars i periòdiques

Repàs de Funcions Elementals
- Polinòmiques i racionals
- Irracionals
- Exponencials i logarítmiques
- Trigonomètriques i inverses

Derivabilitat de funcions
- Concepte de derivada
- Funcions derivables. Càlcul de derivades
- Propietats geomètriques d'una funció a partir de la derivada

Objectius

Generalitats sobre funcions (1S)
- Recordar els conceptes bàsics: domini, rang, etc.
- Determinar si una función és o no acotada, monòtona, parella, senar,…
- Reconéixer simetries i periodicitat

Funcions elementals (1S)
- Fer un ús correcte de les propietats bàsiques de les funcions
- Traçar i reconéixer la seua representació gràfica aproximada

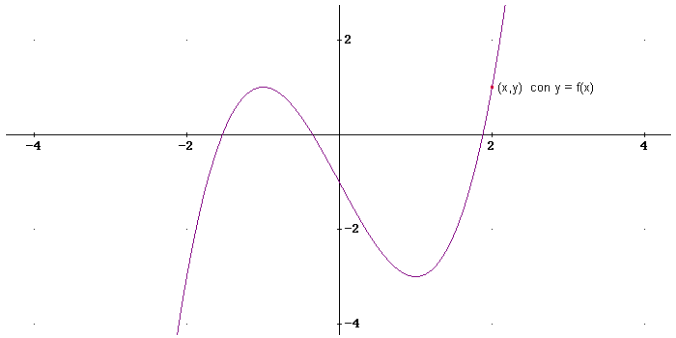
Derivades (1S)
- Recordar el concepte de derivada i la seua relació amb la recta tangent
- Calcular derivades en casos senzills
- Localitzar extrems relatius i determinar intervals de creixement

Conceptes generals

$$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ \quad x \qquad\;\; y \end{array} \qquad \text{Es una funció si } f(x) \text{ és únic (quan existeix)}$$

$$Domini \equiv D(f) = \{\, x\in\mathbb{R} \;\mid\; f(x) \text{ existeix} \,\}$$

$$Rang \equiv f(D) = R(f)$$

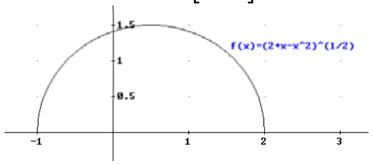


Exercici: Obtenir el domini de $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$

$x\in D(f)$ si existeix $f(x)$. En aquest cas, serà necessari que $\underbrace{2+x-x^2\geq 0}_{x^2-x-2\leq 0}$

La funció $y=x^2-x-2$ és una paràbola amb les branques cap a dalt i s'anul.la en $x_1=-1$, $x_2=2$. Així, $x^2-x-2\leq 0$ per a $x\in[-1,2]$

$D(f)=[-1,2]$



Exercici: Trobar el domini de $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

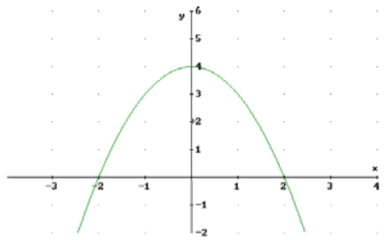
Ara serà necessari que $\underbrace{-x\geq 0}_{x\leq 0}$ i que $\underbrace{2x-1>0}_{x>\frac{1}{2}}$, simultàniament

$$D(f)=\left]-\infty,0\right]\cap\left]\frac{1}{2},+\infty\right[=\varnothing$$

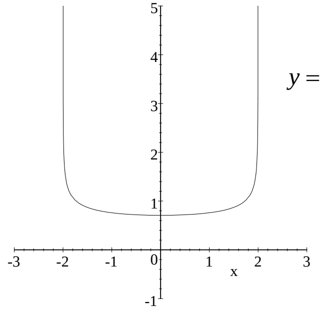
La funció no existeix!

Exercici: Obtenir el domini de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2+x)(2-x)}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$

$$x\in D(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\overbrace{(2+x)(2-x)}^{4-x^2}\geq 0\\ \sqrt[4]{(2+x)(2-x)}\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in[-2,2]\\ x\neq 2\,,\,x\neq -2\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\in\left]-2,2\right[$$



$y=4-x^2$



$y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$

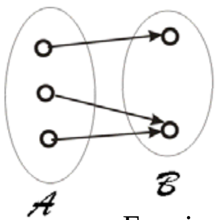
Funció inversa

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\quad x\mapsto y \qquad f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\qquad f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\quad y\mapsto x$$

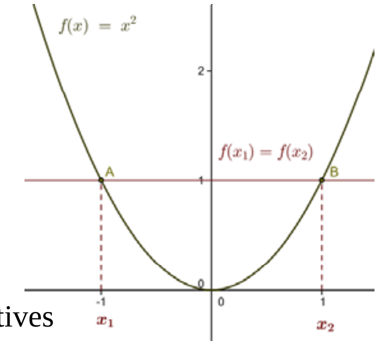
f^{-1} és una funció si f és injectiva

f és injectiva si per a $x_1,x_2\in D(f)$ amb $x_1\neq x_2\quad\Rightarrow\quad f(x_1)\neq f(x_2)$

$D(f^{-1})=R(f)$, $R(f^{-1})=D(f)$



Funcions **no** injectives



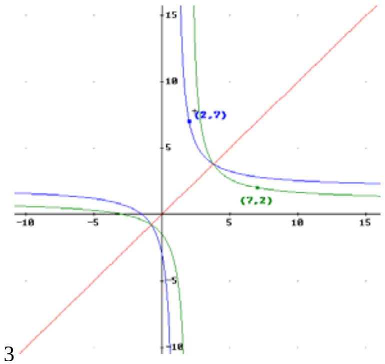
Exemples: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ té inversa i $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}=R(f^{-1})$; $D(f^{-1})=\mathbb{R}-\{2\}=R(f)$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}=y$$
$$\Downarrow$$
$$y\cdot(x-1)=2x+3$$
$$xy-y=2x+3$$
$$xy-2x=y+3$$
$$x(y-2)=y+3$$
$$x=\frac{y+3}{y-2}$$
$$\Downarrow$$

f injectiva i $f^{-1}(y)=\dfrac{y+3}{y-2}$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$



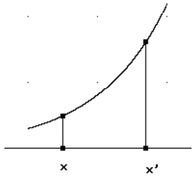
f no injectiva

(*inversa local*)

$$f(x)=x^2=y$$
$$|x|=\sqrt{y}$$
$$\Downarrow\ (x\geq 0)$$
$$x=\sqrt{y}=f^{-1}(y)$$

Les gràfiques d'una funció i de la seua inversa són simètriques respecte de la bisectriu del primer i tercer quadrant.

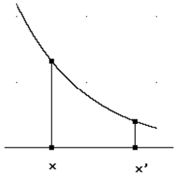
Funció creixent:



f *creixent* $\Leftrightarrow \left[\; x < x' \Rightarrow f(x) \le f(x') \;\right]$

f *estrictament creixent* $\Leftrightarrow \left[\; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \;\right]$

Funció decreixent:



f *decreixent* $\Leftrightarrow \left[\; x < x' \Rightarrow f(x) \ge f(x') \;\right]$

f *estrictament decreixent* $\Leftrightarrow \left[\; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \;\right]$

Funció monòtona: Funció creixent o decreixent

Nota: Les funcions constants són, al mateix temps, creixents i decreixents
Nota: Si f és estrictament creixent/decreixent, aleshores f és injectiva

Exercici: Verificar que $f(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ és estrictament decreixent en $[0,9]$.
Trobar la funció inversa f^{-1} sobre eixe interval

$D(f) =]-\infty, 9]$

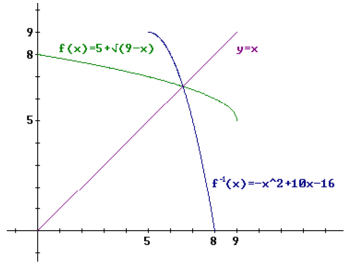
$$0 \le x_1 < x_2 \le 9 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 9 - x_1 > 9 - x_2 \Rightarrow \sqrt{9-x_1} > \sqrt{9-x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

f és estrictament decreixent en tot el seu domini; en particular en $[0,9]$

(Veurem després que si f és derivable, $f' > 0\,(<0) \Rightarrow f$ és estrictament creixent (decreixent)
Fent ús del resultat podriem haver comprovat que $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}} < 0$ per a $x \in]-\infty, 9[$)

$$f : \underbrace{[0,9]}_{x} \to \underbrace{[5,8]}_{5+\sqrt{9-x}} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : \underbrace{[5,8]}_{x} \to \underbrace{[0,9]}_{-x^2+10x-16}$$

$$f(x) = 5 + \sqrt{9-x} = y$$
$$x = 9 - (y-5)^2$$
$$x = -y^2 + 10y - 16 = f^{-1}(y)$$
$$f^{-1}(x) = -x^2 + 10x - 16$$



Funció acotada superiorment:

f *acotada superiorment* (en I) per K $\Leftrightarrow \left[\; f(x) \le K,\ \forall x \in I \;\right]$

(K és *cota superior* de f)

Funció acotada inferiorment:

f *acotada inferiorment* (en I) per L $\Leftrightarrow \left[\; f(x) \ge L,\ \forall x \in I \;\right]$

(L és *cota inferior* de f)

Funció acotada:

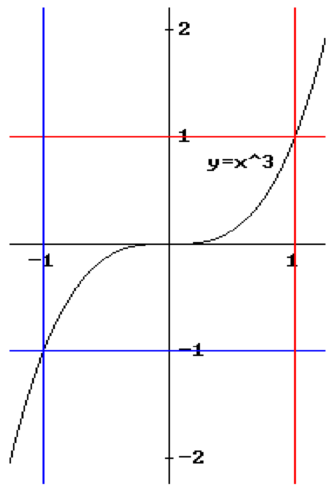
f *acotada* (en I) $\Leftrightarrow \left[\; |f(x)| \le K,\ \forall x \in I \;\right] \Leftrightarrow \left[-K \le f(x) \le K\right]$

(K és cota superior de f ; $-K$ és cota inferior de f)

Exercici: Si $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$, troba el seu domini, valors màx i mín.
Verifica que la funció representa una semicircumferència.

$$y = \sqrt{2 + x - x^2} \Leftrightarrow y^2 + (x - 0.5)^2 = (1.5)^2 \Leftrightarrow d\big((x,y),(0.5,0)\big) = 1.5$$

- Acotada superiorment en $[-1,1]$ i en $]-\infty,-1]$
- No acotada superiorment en $[1,+\infty[$
- Acotada inferiorment en $[-1,1]$ i en $[1,+\infty[$
- No acotada inferiorment en $]-\infty,-1]$
- Acotada en $[-1,1]$
- No acotada en $]-\infty,-1]$ ni en $[1,+\infty[$



Funció parella: $f(-x) = f(x)$ per a $x \in D(f)$

Són simètriques respecte de l'eix OY

$f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow f(x)$ és parella

Són parelles, per exemple: x^2 , $x^6 - x^2$, $\dfrac{x^3+x}{x^5+x}$, $|x|$

Funció senar: $f(-x) = -f(x)$ per a $x \in D(f)$

Són simètriques respecte de l'origen de coordenades

$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x)$ és senar

Són senars, per exemple: x , $x^3 - x$, $\dfrac{x^4+1}{x^3+x}$, $\log\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)$

No són parelles ni senars : $\sqrt{1+x-x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$, $(x+1)^{2/3} + |x-1|$

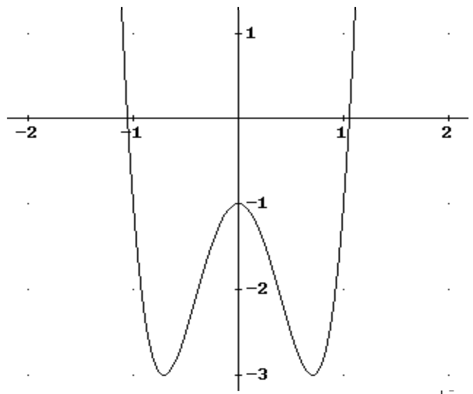
Funció periòdica: $f(x) = f(x+T)$ per a algun valor de T

(T és el periode, el menor possible)

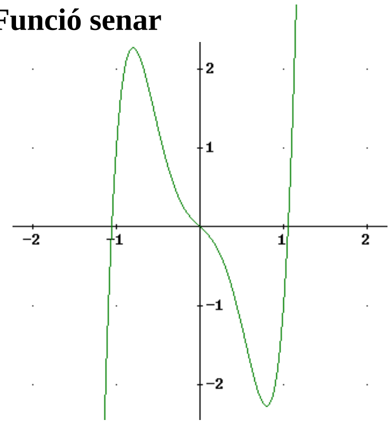
Són periòdiques: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $7\sin(3x) - 5\cos(2x)$

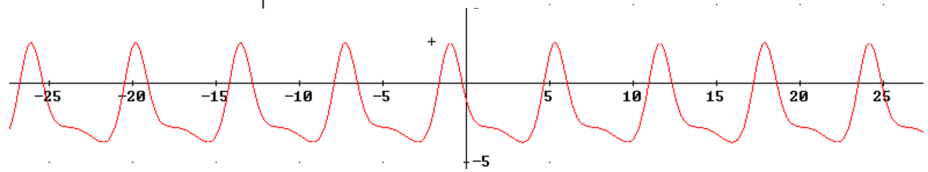
No són periòdiques: $\sin(\sqrt{x})$, x^2 , e^{-x}

Funció parella



Funció senar

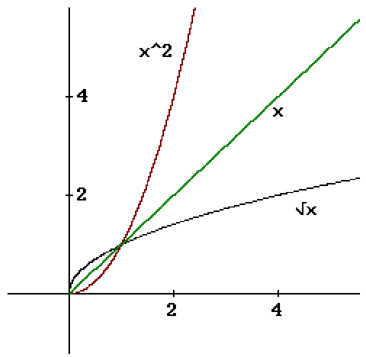


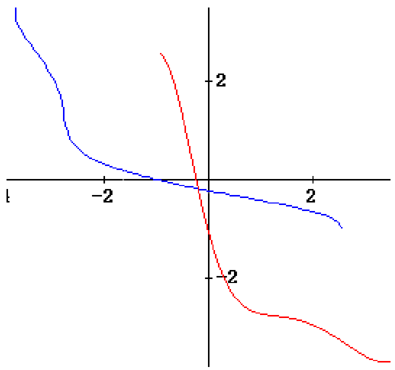


Funció periòdica

Altres simetries:

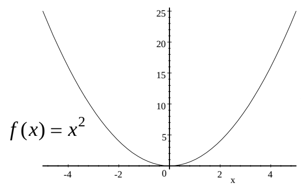
Una funció i la seua inversa són simètriques respecte de la bisectriu $y = x$



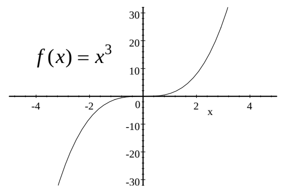


Repàs de funcions elementals

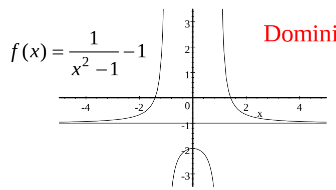
Polinòmiques: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i : 0,1,\ldots,n$



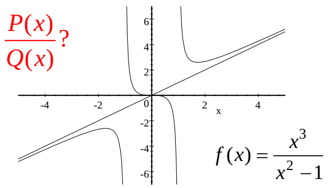
$D(f) = \mathbb{R}$



Racionals (quocient de funcions polinòmiques)**:**



Domini de $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$?



Asímptota horitzontal : $y = -1$

Asímptotes verticals : $x = \pm 1$

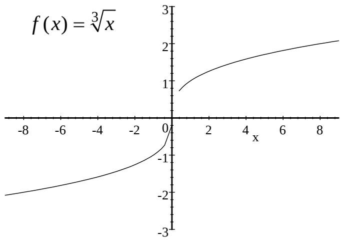
Asímptota obliqua : $y = x$

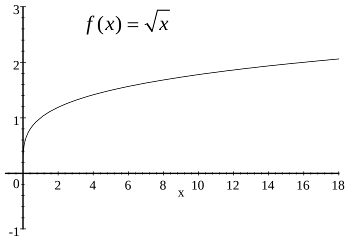
Asímptotes verticals : $x = \pm 1$

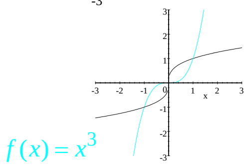
Irracionals (arrels): $f(x)=\sqrt[m]{x}$, $m\in\mathbb{N}$

$$D(f)=\begin{cases}\mathbb{R}^+\cup\{0\} & \text{si } m \text{ és parell}\\ \mathbb{R} & \text{si } m \text{ és senar}\end{cases}$$

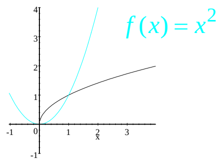
Domini de $F(x)=\sqrt[m]{f(x)}$?



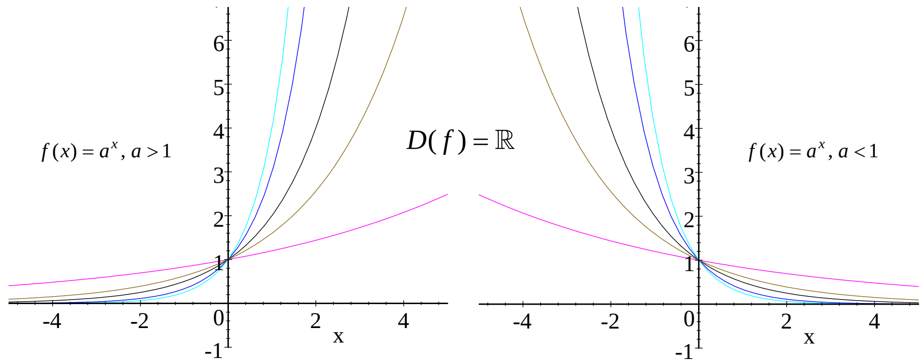




Inverses



Exponencials: $f(x)=a^x$, $a>0$



$D(f)=\mathbb{R}$

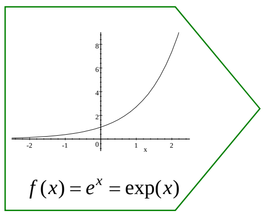
$a^x>0$, $a^0=1$

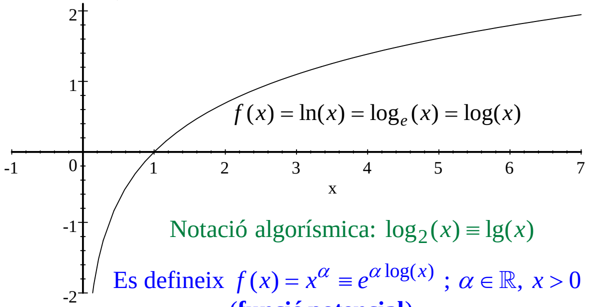
$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, $a^x/a^y=a^{x-y}$

$(a^x)^y=a^{x\cdot y}$

Logarítmiques (inverses d'exponencials): $f(x)=\log_a(x)$, $a>0$

$\left(y=\log_a(x)\ \Leftrightarrow\ x=a^y\right)$ $\qquad D(f)=\mathbb{R}^+$





Notació algorísmica: $\log_2(x)\equiv\lg(x)$

Es defineix $f(x)=x^{\alpha}\equiv e^{\alpha\log(x)}$; $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>0$ **(funció potencial)**

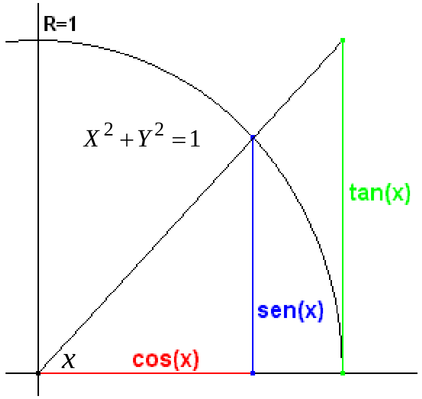
$\log_a(1)=0$, $\log(e)=1$

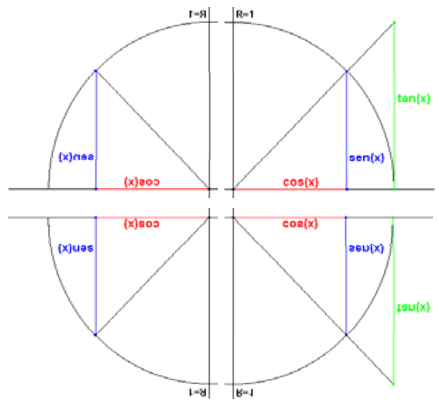
$\log_a(x\cdot y)=\log_a(x)+\log_a(y)$, $\log_a(x/y)=\log_a(x)-\log_a(y)$

$\log_a(x^y)=y\log_a(x)$, $\log(e^k)=k$

$x^{\log_a(y)}=y^{\log_a(x)}$, $\log_a(x)=\dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}=\dfrac{1}{\log_b(a)}\cdot\log_b(x)=k\cdot\log_b(x)$

Trigonomètriques: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (x en radians)





$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

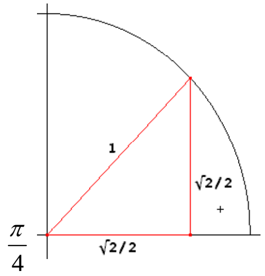
x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	0
π/2	1	0	?

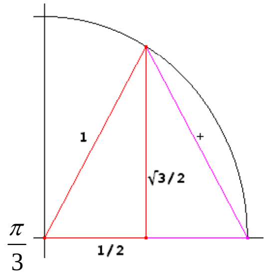
$\underbrace{\sin(-x)=-\sin(x)}_{\text{senar}}$, $\underbrace{\cos(-x)=\cos(x)}_{\text{parella}}$

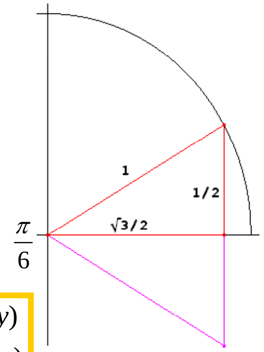
$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$, $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$

$\sin(x+\pi)=-\sin(x)$, $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$

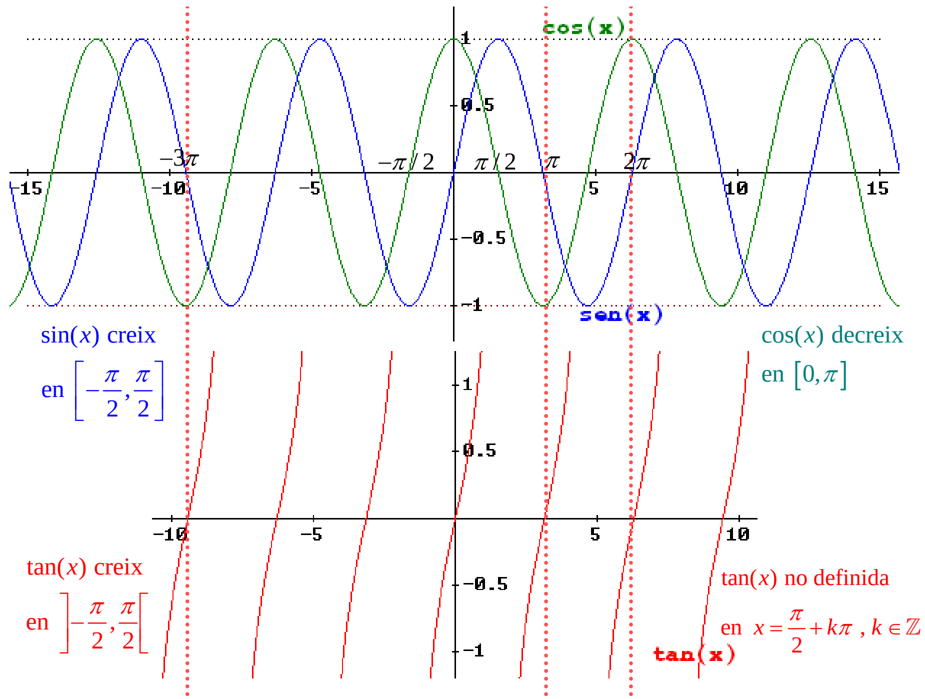
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?



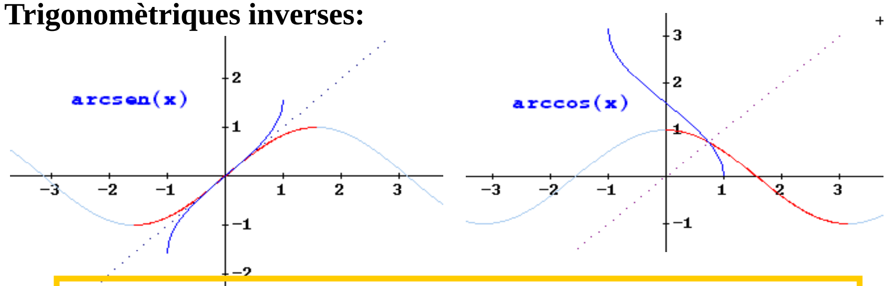




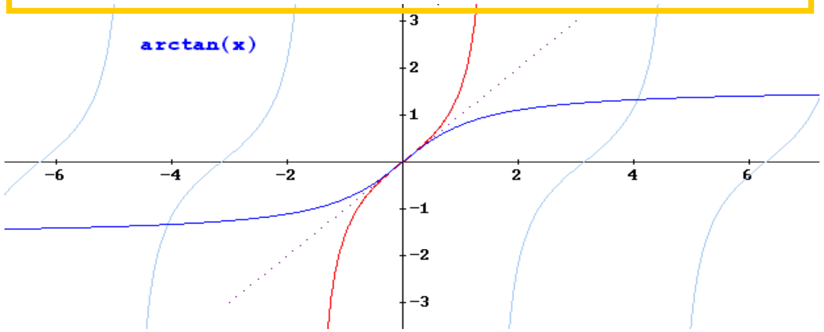
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$



Trigonomètriques inverses:



$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \ , \quad \arccos : [-1,1] \to [0, \pi] \ , \quad \arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$



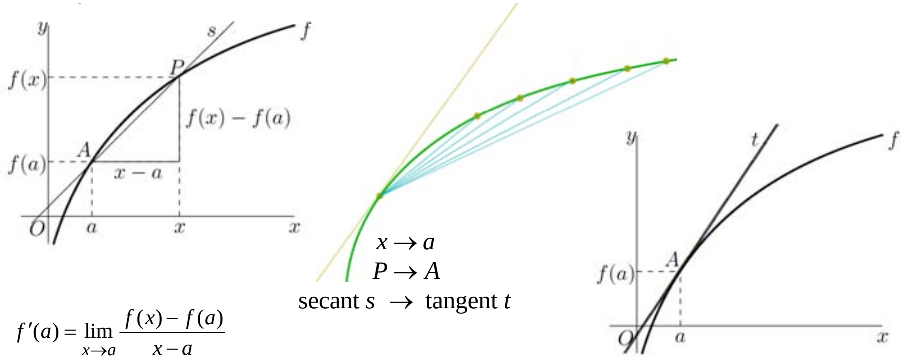
Derivabilitat de funcions

Derivada en un punt

La derivada de $f(x)$ en a es defineix com: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Es el valor del pendent de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $(a, f(a))$

(el límit dels pendents de les rectes secants)



Funcions derivables

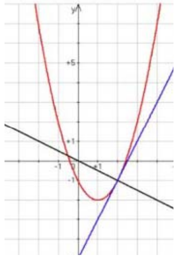
f és derivable en $x_0 \in]a,b[$ si existeix $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

f és derivable en l'interval $]a,b[$ si és derivable en tots els seus punts

Funció derivada de f és la funció definida per $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$

Tota funció derivable és contínua

Recta tangent i recta normal



La recta tangent passa per $(a, f(a))$ amb pendent $f'(a)$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

La recta normal passa per $(a, f(a))$ amb pendent $\dfrac{-1}{f'(a)}$

$$y = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$$

Derivades de funcions elementals

$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$	
$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \log(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \log(a)}$
$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$	$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \log(a)$
$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$	
$f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Regles de derivació

$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f(x) = \log(x) + 3\arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2+8} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{(3x^2-5)(x^2+8) - (x^3-5x)(2x)}{(x^2+8)^2}$$

$$h(x) = x^3 \cdot \sqrt{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{\sin(x)} + \frac{x^3}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos(x)$$

Caracterització de creixement i decreixement

$f'(x) > 0$ per a $x \in]a,b[\Rightarrow f$ estrictament creixent en $]a,b[$

$f'(x) < 0$ per a $x \in]a,b[\Rightarrow f$ estrictament decreixent en $]a,b[$

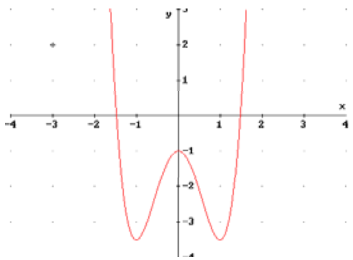
Localització d'extrems relatius

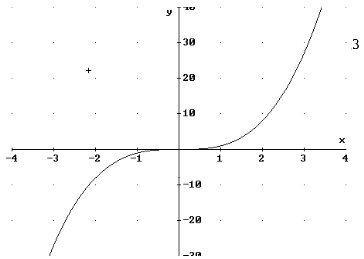
Si f pren un extrem relatiu en $x = a$, aleshores $f'(a) = 0$

(La recta tangent és horitzontal en $x = a$)

Els possibles extrems relatius es troben resolent $f'(x) = 0$

No totes les solucions de $f'(x) = 0$ són extrems relatius (punts d'inflexió)





Concavitat i convexitat

f és còncava on la seua gràfica està per dalt de la tangent

f és convexa on la seu gràfica està per baix de la tangent

Caracterizació de concavitat i convexitat

$f''(x) > 0$ per a $x \in \left]a,b\right[\Rightarrow f$ còncava en $\left]a,b\right[$ $\left(f' \text{ creixent}\right)$

$f''(x) < 0$ per a $x \in \left]a,b\right[\Rightarrow f$ convexa en $\left]a,b\right[$ $\left(f' \text{ decreixent}\right)$

La funció canvia de còncava a convexa en els punts d'inflexió

Els possibles punts de inflexió es troben resolent $f''(x) = 0$

No totes les solucions de $f''(x) = 0$ són punts d'inflexió.