

# Sistemas Inteligentes

## Cuestiones y ejercicios del bloque 2, tema 1

### Razonamiento probabilístico

Escola Tècnica Superior d'Informàtica  
Dep. de Sistemes Informàtics i Computació  
Universitat Politècnica de València

10 de noviembre de 2014

## 1. Cuestiones

- 1 B (Examen de SIN del 15 de enero de 2014; examen del bloque 2; cuestión 1)  
Dada la probabilidad conjunta de dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , la probabilidad condicional  $P(Y = y \mid X = x)$  se puede obtener mediante:

- A)  $P(y \mid x) = 1 / P(x, y)$
- B)  $P(y \mid x) = P(x, y) / \sum_{y'} P(x, y')$
- C)  $P(y \mid x) = \sum_{x'} P(x', y) / \sum_{y'} P(x, y')$
- D)  $P(y \mid x) = \sum_{x'} P(x', y) \cdot \sum_{y'} P(x, y')$

- 2 A (Examen de SIN del 15 de enero de 2014; examen del bloque 2; cuestión 2)  
En un problema de decisión binario ( $D = \{0, 1\}$ ), sea  $y$  un hecho o dato y  $d^*(y) = 0$  la decisión de mínimo error para ese  $y$ . Identifica cuál de las siguientes expresiones determina *incorrectamente* la mínima probabilidad de error para dicho  $y$ :

- A)  $P_*(\text{error} \mid Y = y) = 1 - P(D = 1 \mid Y = y)$
- B)  $P_*(\text{error} \mid Y = y) = 1 - P(D = 0 \mid Y = y)$
- C)  $P_*(\text{error} \mid Y = y) = P(D = 1 \mid Y = y)$
- D)  $P_*(\text{error} \mid Y = y) = 1 - \max_d P(D = d \mid Y = y)$

- 3 D (Examen de SIN del 15 de enero de 2014; examen del bloque 2; cuestión 3)  
En un problema de diagnóstico diferencial entre *Gripe* y *Resfriado*, se sabe que la incidencia relativa de la *Gripe* con respecto al *Resfriado* es del 30 % y se conocen las siguientes distribuciones de temperaturas corporales:

$t(^{\circ}\text{C})$	36	37	38	39	40
$P(T = t \mid D = \text{GRIPE})$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.35
$P(T = t \mid D = \text{RESFR})$	0.10	0.30	0.40	0.15	0.05

La probabilidad a posteriori de que un paciente con 38° de fiebre tenga *Gripe* es:

- A) mayor que 0.8
- B) menor que 0.1
- C) entre 0.3 y 0.6
- D) menor que la probabilidad de que con esa temperatura tenga *Resfriado*

- 4 B (Examen de SIN del 28 de enero de 2014; examen final; cuestión 2)  
En un problema de diagnóstico diferencial entre *Gripe* y *Resfriado*, se sabe que la incidencia relativa de la *Gripe* con respecto al *Resfriado* es del 30 % y se conocen las siguientes distribuciones de temperaturas corporales:

$t(^{\circ}\text{C})$	36	37	38	39	40
$P(T = t \mid D = \text{GRIPE})$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.35
$P(T = t \mid D = \text{RESFR})$	0.10	0.30	0.40	0.15	0.05

$$P(\text{GRIPE} \mid 37) = \frac{\frac{30}{130} \cdot 0.10}{\frac{30}{130} \cdot 0.10 + \frac{100}{130} \cdot 0.30} = \frac{1}{11}$$

El diagnóstico de mínimo riesgo de error para un paciente con 37° de fiebre es:

- A) *Gripe*
- B) *Resfriado*
- C) Hay un empate entre ambos diagnósticos
- D) Las probabilidades dadas son incorrectas ya que no suman 1; por tanto no es posible hacer un diagnóstico.

## 2. Problemas

1. (Examen de SIN del 26 de Noviembre de 2012; tiempo estimado: 25 minutos)

Para diseñar un sistema de diagnóstico diferencial entre Gripe y Resfriado, se han elaborado histogramas de valores de temperatura corporal en pacientes con estas enfermedades. A partir de estos histogramas se han obtenido las siguientes distribuciones de temperaturas:

$t(^{\circ}C)$	36	37	38	39	40
$P(T = t \mid D = \text{GRIPE})$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.35
$P(T = t \mid D = \text{RESFR})$	0.10	0.30	0.40	0.15	0.05

Sabiendo que la incidencia relativa de la gripe con respecto al resfriado es del 30 % (es decir,  $P(D = \text{GRIPE}) = 0.3$ ), determínese:

- La probabilidad a posteriori de que un paciente con 39 grados de fiebre tenga gripe.
- El diagnóstico más probable para ese paciente y la probabilidad de que ese diagnóstico sea erróneo.
- Las probabilidades de los diagnósticos GRIPE y RESFR  $\forall t \in \{36, 37, 38, 39, 40\}$ , así como el mínimo error global de diagnóstico ( $P_{\star}(\text{error})$ ) esperado para un sistema diseñado en base a las observaciones utilizadas.

### Solución

a)

$$P(D = \text{GRIPE}) = 0.3; \quad P(D = \text{RESFR}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(D = \text{GRIPE} \mid T = 39) = \frac{P(D = \text{GRIPE})P(T = 39 \mid D = \text{GRIPE})}{P(T = 39)}$$

$$P(T = 39) = P(D = \text{GRIPE})P(T = 39 \mid D = \text{GRIPE}) + P(D = \text{RESFR})P(T = 39 \mid D = \text{RESFR}) = 0.3 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.15 = 0.195$$

$$P(D = \text{GRIPE} \mid T = 39) = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.195} = 0.462$$

b)

$$P(D = \text{RESFR} \mid T = 39) = \frac{0.7 \cdot 0.15}{0.195} = 0.538$$

Diagnóstico más probable:

$$d^{\star}(T = 39) = \arg \max_{d \in \{\text{GRIPE}, \text{RESFR}\}} P(D = d \mid T = 39) = \text{RESFR}$$

Probabilidad de que RESFR sea un diagnóstico erróneo para  $t = 39$ :

$$P_{\star}(\text{error} \mid T = 39) = 1 - \max(P(D = \text{GRIPE} \mid T = 39), P(D = \text{RESFR} \mid T = 39)) = 1 - \max(0.462, 0.538) = 0.462$$

c) Repitiendo los cálculos anteriores para  $t \in \{36, 37, 38, 40\}$ :

$t(^{\circ}C)$	36	37	38	39	40
$P(T = t)$	0.085	0.240	0.340	0.195	0.140
$P(D = \text{GRIPE} \mid T = t)$	0.176	0.125	0.176	0.462	0.750
$P(D = \text{RESFR} \mid T = t)$	0.824	0.875	0.824	0.538	0.250
$P_{\star}(\text{error} \mid t)$	0.176	0.125	0.176	0.462	0.250

$$P_{\star}(\text{error}) = \sum_{t=36}^{40} P_{\star}(\text{error} \mid T = t)P(T = t) = 0.176 \cdot 0.085 + 0.125 \cdot 0.240 + 0.176 \cdot 0.340 + 0.462 \cdot 0.195 + 0.250 \cdot 0.140 = .230$$