UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# Razonamiento probabilístico: variables continuas y regla de Bayes

Alfons Juan
Albert Sanchis
Jorge Civera

DSIC
Departamento de Sistemas Informáticos y Computación

# Objetivos formativos

- Representar el conocimiento con variables continuas
- Inferir conocimiento a partir de variables continuas y el teorema de Bayes
- Aplicar la regla de Bayes en general y, en particular, en el caso del reconocimiento de formas y aprendizaje automático

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

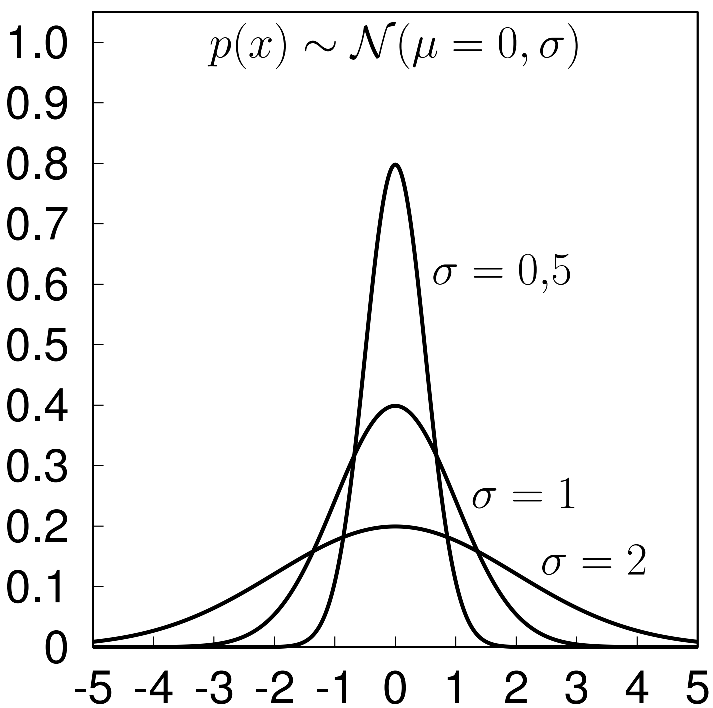
# Índice

# 1. Variables continuas

El conocimiento suele expresarse mediante ***variables continuas*** caracterizadas con funciones de ***densidad de probabilidad:***

$$p(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \qquad \text{y} \qquad \int p(x)\, dx = 1$$

**Ejemplo:** la distribución normal




$$p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} \right)$$

$$P(x \in [\mu \pm 2\sigma]) = 0{,}95$$



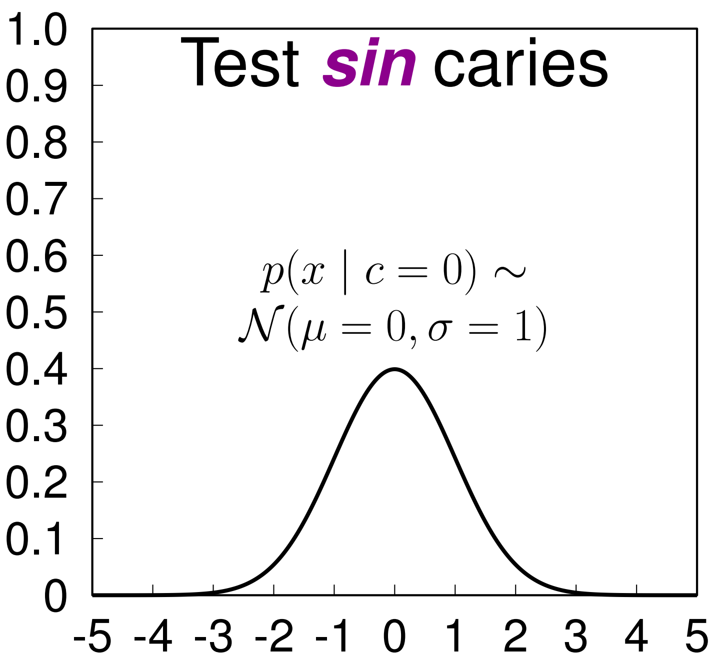
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

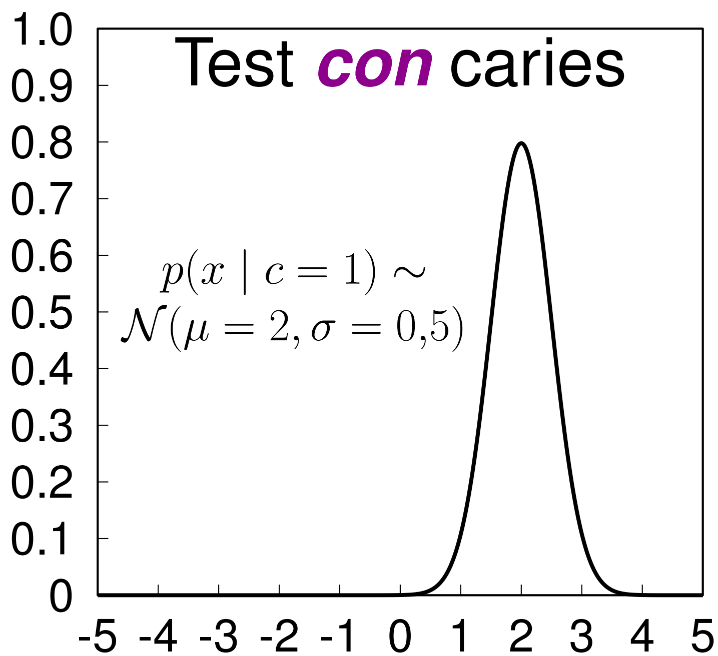
# 2. Teorema de Bayes en el caso continuo

En el caso continuo, el ***teorema de Bayes*** se expresa como:

$$\text{"}P(\text{efecto} \mid \text{causa})\text{"} = P(y \mid x) = P(y)\,\frac{p(x \mid y)}{p(x)}$$

**Ejemplo:** $x =$ test de saliva para el diagnóstico de caries




Si $P(c=1) = 0{,}34$ pero el test da $x = 2$, por Bayes tenemos:

$$P(c=1 \mid x=2) = P(c=1)\,\frac{p(x=2 \mid c=1)}{p(x=2)} = 0{,}340\,\frac{0{,}798}{0{,}307} = 0{,}884$$



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# 3. La regla de decisión de Bayes

La ***regla de decisión de Bayes*** predice el efecto que producirá una causa $x$ escogiendo, entre un conjunto de efectos posibles $\mathcal{C}$, uno de máxima ***probabilidad a posteriori*** (de observar la causa):

$$c^*(x) = \underset{c \in \mathcal{C}}{\arg\max}\; P(c \mid x)$$

***Probabilidad de error*** (efecto predicho distinto del producido):

$$P(\text{error} \mid x) = 1 - P(c^*(x) \mid x)$$

*Ninguna otra elección mejoraría esta probabilidad de error!*

**Ejemplo del diagnóstico de caries:**

$$c^*(x=2) = \arg\max_c \begin{pmatrix} P(c=0 \mid x=2) & = 0{,}116 \\ P(c=1 \mid x=2) & = 0{,}884 \end{pmatrix} = 1$$

# Regla de Bayes: otra versión

Por el teorema de Bayes, la regla de Bayes se reescribe como:

$$
\begin{aligned}
c^*(x) &= \arg\max_{c \in \mathcal{C}} \; P(c \mid x) \\
&= \arg\max_{c \in \mathcal{C}} \; P(c)\,\frac{p(x \mid c)}{p(x)} \\
&= \arg\max_{c \in \mathcal{C}} \; P(c)\,p(x \mid c)
\end{aligned}
$$

donde $P(c)$ es la ***probabilidad a priori*** del efecto $c$; y $p(x \mid c)$ es la ***densidad de probabilidad*** de que $x$ sea la causa del efecto $c$.

**Ejemplo del diagnóstico de caries:**

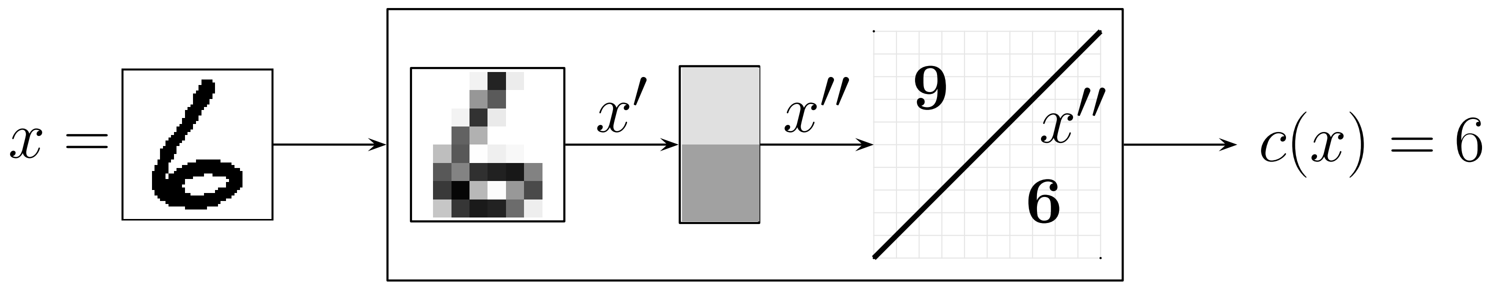
$$
c^*(x=2) = \arg\max_{c} \begin{pmatrix} P(c=0)\,p(x=2 \mid c=0) & = 0{,}036 \\ P(c=1)\,p(x=2 \mid c=1) & = 0{,}271 \end{pmatrix} = 1
$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# 4. Reconocimiento de Formas y Apr. Automático

El ***Reconocimiento de Formas*** y el ***Apr. Automático*** estudian sistemas capaces de aprender y predecir a partir de datos.

Un problema clásico es la construcción de clasificadores para objetos percibidos con sensores apropiados; p.e. un OCR de 6 o 9:




La aproximación convencional se basa en la regla de Bayes:

$$c^*(x) = \arg\max_{c \in \mathcal{C}} \; P(c \mid x) = \arg\max_{c \in \mathcal{C}} \; P(c)\, p(x \mid c)$$

donde $P(c \mid x)$, o $P(c)$ i $p(x \mid c)$, se aprenden a partir de ejemplos.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# 5. Conclusiones

- Hemos visto cómo emplear variables continuas para:
  - representar conocimiento
  - inferir nuevo conocimiento mediante el teorema de Bayes

- También hemos visto cómo aplicar la regla de Bayes para decidir / predecir con mínima probabilidad de error