Tema 4: Espais Vectorials

Bloc 2: Matriu associada a un conjunt de vectors. Operacions elementals sobre vectors. Aplicacions

1 Matriu associada a un conjunt de vectors

2 Operacions elementals sobre vectors
- Dependència lineal
- Càlcul de bases de $\langle S \rangle$
- Completació de bases

Matriu associada a un conjunt de vectors

Definició

Siga V un espai vectorial de dimensió m, $\mathcal{B}$ una base de V i siga $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ un conjunt (ordenat) de vectors de V. Anomenarem matriu associada a S respecte de la base $\mathcal{B}$ a la matriu $\mathrm{M}(S; \mathcal{B})$ d'ordre $m \times n$ tal que que seua columna j-èssima és el vector de coordenades de $\vec{v}_j$ respecte de la base $\mathcal{B}$.

Si V és $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) i la base $\mathcal{B}$ considerada és la canònica, aleshores denotarem aquesta matriu simplement per $\mathrm{M}(S)$ (sense fer referència a la base).

Matriu associada a un conjunt de vectors

Exemple

En $\mathbb{R}^2$ considerem la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ i el conjunt $S = \{(2,0),(3,1),(5,-5)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Aleshores els vectors de coordenades dels vectors de S respecte de la base $\mathcal{B}$ són, respectivament, $(1,1),(2,1)$ i $(0,5)$. La matriu associada a S respecte de $\mathcal{B}$ és la següent:

$$\mathrm{M}(S;\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

En canvi, respecte a la base canònica, la matriu associada a S és:

$$\mathrm{M}(S) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriu associada a un conjunt de vectors

Propietat

Un conjunt de vectors $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ és linealment independent si i només si, per a qualsevol base $\mathcal{B}$:

$$\text{rg}(\text{M}(S; \mathcal{B})) = n = \text{nombre de vectors de } S$$

Exemple

El conjunt de vectors

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

és linealment independent, ja que sobre la base canònica $\mathcal{B}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, la seua matriu associada té rang 3:

$$\text{M}(S; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Matriu associada a un conjunt de vectors

2. Operacions elementals sobre vectors
   - Dependència lineal
   - Càlcul de bases de $\langle S \rangle$
   - Completació de bases

Operacions elementals sobre vectors

Siga V un espai vectorial.

Definició

Dos conjunts de vectors $S, T \subseteq V$ direm que són equivalents si generen el mateix subespai, és a dir $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.

Definició

Donat un conjunt (ordenat) de vectors $S = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \} \subseteq V$ direm que realitzem una operació elemental sobre S si efectuem una de les següents accions:

- Intercanviem dos vectors de S (tipus 1)
- Mulipliquem un dels vectors de S per un escalar no nul (tipus 2)
- Afegim a un dels vectors de S un múltiple d'un altre vector de S (tipus 3)

Operacions elementals sobre vectors

Propietat 1

Siga S' el conjunt que resulta de realitzar una operació elemental a un conjunt de vectors $S = \{\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m \,\}$. Alehores:

- S i S' són conjunts equivalents.
- S és linealment independent si i només si S' ho és.

En altres paraules, les operacions elementals preserven l'embolcall lineal i la dependència (o independència) lineal.

“Sistemes escalonats” de vectors

Definició

Fixada una base $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \}$ de V, direm que un conjunt de vectors $S = \{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m \}$ formen un sistema escalonat (respecte de $\mathcal{B}$) si la matriu que té com a files les coordenades dels vectors de S respecte de la base $\mathcal{B}$ en un cert ordre (és a dir, $\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t$) és escalonada.
Si V és $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) i la base $\mathcal{B}$ considerada és la canònica, direm simplement que S és un sistema escalonat.

Sistemes escalonats i dependència lineal

Exemple:
El conjunt de vectors $S = \{(1,2,3,4),(0,0,-3,4),(0,0,0,2)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ és un sistema escalonat, ja que la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

és escalonada. Per a comprovar que és linealment independent, considerem una relació de dependència lineal arbitraria

$$\lambda_1(1,2,3,4) + \lambda_2(0,0,-3,4) + \lambda_3(0,0,0,2) = (0,0,0,0).$$

El sistema d'equacions (amb incògnites λ_1, λ_2 i λ_3) resultant d'igualar component a component és el següent:

$$\left.\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & = & 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

que clarament té solució única:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Sistemes escalonats i dependència lineal

Propietat

Siga $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ un conjunt de vectors d'un espai vectorial V escalonat respecte d'una certa base $\mathcal{B}$. Aleshores, S és linealment independent si i només si cap dels vectors $\vec{v}_i$ és el vector $\vec{0}$.

Sistemes escalonats de vectors: dependència lineal

Exemple: Siga $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \}$ una base qualsevol d'un espai vectorial V de dimensió 4 i siga el conjunt $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ donat per:

$$\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_2 = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4$$

$$\vec{u}_3 = 4\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Com que la matriu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

és escalonada, S és un "sistema escalonat" i com S no conté al vector $\vec{0}$, sabem que S és linealment independent.

Estudi de la dependència lineal

Como tot conjunt de vectors es pot transformar en un "sistema escalonat" mitjançant operacions elementals i el sistema resultant és equivalent al inicial (per la Propietat 1), el procès per a esbrinar si un conjunt de vector és lliure o lligat serà el següent:

Procés per a determinar la dependència lineal

1. Construir la matriu $\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t$ escrivint, per files, les coordenades dels vectors de S respecte d'una certa base $\mathcal{B}$.
2. Escalonar $\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t$.
3. Si la matriu escalonada obtinguda no té cap fila nul·la aleshores S és linealment independent; en cas contrari S és lligat.

Estudi de la dependència lineal

Exemple (1):
Siga el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ donat per

$$S = \{\vec{u}_1 = (1,3,2,4), \vec{u}_2 = (2,9,3,0), \vec{u}_3 = (3,2,0,-2), \vec{u}_4 = (4,15,7,8)\}.$$

Per a esbrinar si S és lliure o lligat, construirem la matriu que té, com a vectors fila, les coordenades dels vectors de S, és a dir, la matriu $\mathrm{M}(S)^t$. Escalonant aquesta matriu obtindrem un sistema escalonat de vectors:

$$\mathrm{M}(S)^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 15 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -25 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com que la matriu escalonada del final té una fila nul·la, podem dir que el sistema S és lligat.

Estudi de la dependència lineal

Exemple (2):
En el mateix exemple, si reproduïm les operacions elementals per files que hem realitzat podem obtindre una relació de dependència lineal no trivial entre els vectors de S. En efecte, en el primer pas hem fet:

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1, \quad \vec{u}_2' = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1, \quad \vec{u}_3' = \vec{u}_3 - 3\vec{u}_1, \quad \vec{u}_4' = \vec{u}_4 - 4\vec{u}_1.$$

Les files de l'última matriu corresponen als vectors següents:

$$\vec{u}_1'' = \vec{u}_1' = \vec{u}_1$$

$$\vec{u}_2'' = \vec{u}_2' = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$$

$$\vec{u}_3'' = 3\vec{u}_3' + 7\vec{u}_2' = -23\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$$

$$\vec{u}_4'' = \vec{u}_4' - \vec{u}_2' = -2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_4$$

Com l'última fila de la matriu escalonada es nul·la, tenim $\vec{u}_4'' = \vec{0}$ i podem deduir una relació de dependència lineal no trivial entre els vectors de S:

$$-2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_4 = \vec{0}.$$

Estudi de la dependència lineal

Exemple (3):
Hi ha una altra manera de deduir esta relació de dependència lineal: escalonem la matriu ampliada:

$$[\mathrm{M}(S)^t|I].$$

Aquesta matriu es transformarà en una matriu $[C|T]$, on C és una forma escalonada de $\mathrm{M}(S)^t$. Les files de T que es corresponen amb files nul·les de C ens donaran els coeficients de relacions de dependència lineal entre els vectors fila de $\mathrm{M}(S)^t$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 15 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & -98 & -23 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

S'obté per tant:

$$-2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_4 = \vec{0}.$$

Un altre exemple

Siga el conjunt de vectors de $\mathbb{R}_3[x]$ donat per

$$S = \{\vec{p} = x^3+3x^2+4x+1, \vec{q} = 2x^3+6x^2+8x+2, \vec{r} = 2x^3+5x^2+7x+2\}.$$

Volem averiguar si S és un conjunt de vectors linealment dependent o independent
Si apliquem la definició, hem de considerar una combinació lineal nl·lla dels vectors de S:

$$\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r} = \vec{0}$$

i hem de comprovar si tots els coeficients α, β, γ són zero (el sistema és lliure) o si hi ha cap distint de zero (el sistema és lligat).
Igualant els coeficients dels polinomis, obtindriem un sistema de 4 equacions amb 3 incògnites que resulta ser compatible indeterminat, per tant S és lliure

Un altre exemple

Mètode alternatiu per al estudi de la dependència lineal

$S = \{\vec{p} = x^3 + 3x^2 + 4x + 1, \vec{q} = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 2, \vec{r} = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 2\}$

Si considerem la base $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ les coordenadas dels vectors de S respecte de $\mathcal{B}$ són:

$$S = \{\vec{p} = (1,3,4,1)_{\mathcal{B}}, \vec{q} = (2,6,8,2)_{\mathcal{B}}, \vec{r} = (2,5,7,2)_{\mathcal{B}}\}.$$

Per a estudiar la dependència lineal de S:

- Escribim la matriu que té com a files les coordenadas dels vectors de S i la escalonem utilizant el mètode de Gauss:

$$M(S;\mathcal{B})^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Obtenim al final un sistema S' que, expressat en coordenades respecte de la base $\mathcal{B}$, es: $S' = \{(1,3,4,1), (0,1,1,0), (0,0,0,0)\}$. Com S' s'ha obtingut a partir de S mitjançant operacions elementals, S i S' són equivalents y tenen el mateix caràcter (lliure o lligat). Como S' conté al vector nul és lligat i, per tant S també ho es.

Càlcul de bases de $\langle S \rangle$

Per la Propietat 1, les operacions elementals produeixen conjunts de vectors equivalents. Per tant, l'embolcall lineal d'un conjunt S coincideix amb l'embolcall lineal dels vectors corresponents a la matriu escalonada obtinguda. Així s'obté el següent resultat:

Propietat 2

Siga $\mathcal{B}$ una base de V i S un conjunt finit de vectors de V. Aleshores la dimensió de l'embolcall lineal de S, $\langle S \rangle$, coincideix amb el rang de la matriu $\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t$:

$$\dim\langle S \rangle = \mathrm{rg}(\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t)$$

(Recordem que les files de $\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t$ són les coordenades dels vectors de S respecte de la base $\mathcal{B}$.)

Càlcul de bases de $\langle S \rangle$

Procés per a calcular una base de $\langle S \rangle$

1. Construir la matriu $\mathrm{M}(S; \mathcal{B})^t$ escrivint, per files, les coordenades dels vectors de S respecte d'una certa base $\mathcal{B}$.
2. Escalonar $\mathrm{M}(S; \mathcal{B})^t$.
3. El conjunt de vectors corresponents a les files no nul·les de la matriu escalonada és una base de $\langle S \rangle$.

Nota: També és una base de $\langle S \rangle$ el conjunt de vectors de S tals que les seues files en $\mathrm{M}(S; \mathcal{B})^t$ es corresponen amb files no nul·les de la matriu escalonada, tenint en compte les possibes permutacions.

Càlcul de bases de $\langle S \rangle$

Exemple:
Considerem el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ de l'exemple anterior:

$$S = \{\vec{u}_1 = (1,3,2,4), \vec{u}_2 = (2,9,3,0), \vec{u}_3 = (3,2,0,-2), \vec{u}_4 = (4,15,7,8)\}.$$

Anem a calcular una base de $\langle S \rangle$.
Escalonem la matriu $\mathrm{M}(S)^t$:

$$\mathrm{M}(S)^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 15 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -25 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Així:

$$\langle S \rangle = \langle (1,3,2,4), (0,3,-1,-8), (0,0,-25,-98) \rangle.$$

Per tant, el conjunt

$$S' = \{(1,3,2,4), (0,3,-1,-8), (0,0,-25,-98)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

és una base de $\langle S \rangle$, ja que:

- és linealment independent (és un conjunt escalonat que no contè a $\vec{0}$),
- és sistema generador del subespai vectorial $\langle S \rangle$.

Obtenció d'una base de $\langle S \rangle$: Exemple

Considerem de nou el conjunt de vectors de $\mathbb{R}_3[x]$:

$S = \{\vec{p} = x^3 + 3x^2 + 4x + 1, \vec{q} = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 2, \vec{r} = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 2\}$

i la base $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$:

- Haviem construit la matriu $\mathrm{M}(S; \mathcal{B})^t$ i la haviem escalonat:

$$\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- El conjunt de vectors obtingut eliminat les files nul·les

$$S' = \{(1,3,4,1), (0,1,1,0)\}$$

és equivalent a S, i així S' és un sistema generador de $\langle S \rangle$.

- Al ser S' un "sistema escalonat" de vectors no nuls és linealment independent y, per tant, una base de $\langle S \rangle$. Així, una base de $\langle S \rangle$ és la formada pels polinomis:

$$\{x^3 + 3x^2 + 4x + 1, x^2 + x\}$$

i $\dim\langle S \rangle = 2 = \mathrm{rg}\,\mathrm{M}(S;\mathcal{B})^t$.

Completació de bases

Sabem que si V és un espai vectorial amb dim $V = n$, qualsevol conjunt S amb $m \leq n$ vectors que siga lliure, pot completar-se fins obtindre una base de V.
El procediment per a completar un conjunt de vectors S linealment independent fins a obtindre una base consisteix en el següent:

Procés de completació

1. Construir la matriu $\mathrm{M}(S; \mathcal{B})^t$ escrivint, per files, les coordenades dels vectors de S respecte d'una certa base $\mathcal{B}$.
2. Escalonar $\mathrm{M}(S; \mathcal{B})^t$.
3. Afegir files a la matriu escalonada adequades per a que la nova matriu siga també escalonada i amb totes les files no nul·les.
4. Afegint al conjunt de vectors inicial les noves files de la matriu final s'obtè una base de l'espai vectorial.

Completació de bases

Exemple:
Considerem el següent conjunt de vectors de $\mathbb{R}^5$:

$$S = \{(1,0,3,0,1),(0,2,3,1,-1),(-1,3,5,0,0)\}.$$

Comprovem que S és lliure utilitzant operacions elementals amb vectors:

$$\mathrm{M}(S)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Com el conjunt escalonat de vectors final no conté el vector zero, S és lliure. Com $\dim \mathbb{R}^5 = 5$ i $\mathrm{cd}(S) = 3$, necessitem afegir a S dos vectors més que siguen linealment independents amb els altres. Per exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Així

$$S' = S \cup \{0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}.$$

és una base de $\mathbb{R}^5$ que conté a S.