Matemática Discreta **20 de diciembre de 2020**
Segundo parcial **1:45 horas**

Apellidos:	**Grupo:**
Nombre:	

Cuestión 1 (2 pt) (a) Resuelve, si es posible, las siguientes ecuaciones en congruencias:

1) $64 \cdot x \equiv 32 \pmod{84}$, o, equivalentemente, $\overline{64} \cdot x = \overline{32}$ en $\mathbb{Z}_{84}$
2) $64 \cdot x \equiv 30 \pmod{84}$, o, equivalentemente, $\overline{64} \cdot x = \overline{30}$ en $\mathbb{Z}_{84}$

Solución:

1) La ecuación tiene soluciones, ya que el máximo común divisor de 64 y 84 es 4, y 4 también es divisor de 32. Por este motivo, podemos simplificarla dividiendo entre 4, con lo cual obtenemos la ecuación transformada $16x \equiv 8 \pmod{21}$.

   Comenzamos aplicando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 16 \\ \hline 5 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 5 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 1 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

   La solución de la ecuación es $x = (-1)^{n-1}P_{n-1}b \pmod{21}$, donde $n = 3$, $b = 8$ y P_{n-1} se obtiene aplicando el algoritmo siguiente:

k	0	1	2	3
q_k		1	3	5
P_k	1	1	$\boxed{4}$	21

   Por tanto la solución será

$$x = (-1)^{n-1}P_{n-1}b \pmod{21}$$
$$x = (-1)^2 \cdot 4 \cdot 8 \pmod{21}$$
$$x = 32 \pmod{21} = 11 \pmod{21}$$

   Las soluciones de la ecuación original serán entonces (sumando a la solución obtenida el módulo de la ecuación transformada, es decir, 21):

$$x \equiv 11 \pmod{84} \qquad x \equiv 32 \pmod{84} \qquad x \equiv 53 \pmod{84}$$
$$x \equiv 74 \pmod{84}$$

2) La segunda ecuación no tiene solución, puesto que como hemos calculado antes, el máximo común divisor de 64 y 84 es 4 que no es divisor de 30.

(b) Calcula, si es posible, $\bar{5}^{-1} - \bar{5} \cdot \bar{3}$ en $\mathbb{Z}_6$. Justifica tu respuesta.

Solución:

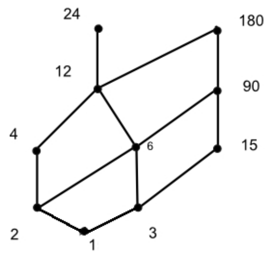
Para calcular $\bar{5}^{-1}$ hemos de resolver la ecuación $5x \equiv 1 \pmod{6}$. No es difícil comprobar, o bien probando con los elementos de $\mathbb{Z}_6$, o bien utilizando el algoritmo, que la solución de esta ecuación es $\bar{5}$. Por tanto

$$\bar{5}^{-1} - \bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{5} - \bar{5} \cdot \bar{3} = -\overline{10} = \bar{2}$$

en $\mathbb{Z}_6$.

Cuestión 2 (2.5 pt) (a) Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180\}$ con la relación de divisibilidad.

1) Dibuja el diagrama de Hasse de A con esta relación de orden.

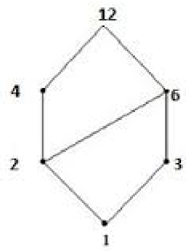


2) Calcula, si existen, el máximo, el mínimo, los elementos minimales y los maximales del conjunto A (si alguno no existe justifícalo).
Solución: Los elementos maximales de A son 24 y 180, y por tanto no existe el máximo y el único minimal es el 1 que coincide con el mínimo.

3) Dado el subconjunto $B = \{6, 12, 15, 90\}$, calcula las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo de B en A, si existen (si alguno no existe justifícalo).
Solución: La única cota superior de B en A es 180, por tanto el supremo de B en A es 180. Por otro lado, las cotas inferiores de B en A son $\{1, 3\}$, luego el ínfimo es 3.

(b) Consideremos el subconjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ del conjunto A del apartado anterior.

1) ¿Es C un retículo?
Solución: En primer lugar el diagrama de Hasse de C es:



Puesto que C coincide con los divisores de 12, sabemos que C es un retículo, lo que podemos observar también fácilmente en el diagrama de Hasse, puesto que para cada par de elementos de C, existe su supremo y su ínfimo.

2) ¿Es acotado?
Solución: C sí es acotado, su máximo es 12 y su mínimo es 1.

3) ¿Qué elementos tienen complementario? ¿Es un retículo de Boole?
Solución: Sabemos que el complementario de 1 es 12 y el complementario de 12 es 1. Por otro lado, puesto que $3 + 4 = sup_C\{3, 4\} = 12$ y $3 \cdot 4 = inf_C\{3, 4\} = 1$, se tiene que $\bar{3} = 4$ y $\bar{4} = 3$. Los elementos 2 y 6 no tienen complementario, por tanto C no es retículo de Boole.

Cuestión 3 (1.5 pt) En el conjunto $\mathbb{Z}_6$ de los enteros módulo 6 se define la relación R:

$$\overline{x}\, R\, \overline{y} \text{ si, y solo si, } \overline{x} = \overline{y} \text{ o } \overline{y} = \overline{5} \cdot \overline{x} + \overline{3}.$$

a) Escribe los pares de la relación R.
Solución:

$$R = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{4}), (\bar{5}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{5}, \bar{4})\}$$

b) ¿Es R una relación de equivalencia o una relación de orden? Justifica la respuesta.
Solución: Como es fácil observar, mirando los pares de la relación, se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, luego R es una relación binaria de equivalencia.

c) Si la relación R es una relación de equivalencia, calcula las clases de equivalencia y el conjunto cociente $\mathbb{Z}_6/R$, y si es una relación de orden dibuja el diagrama de Hasse correspondiente.
Solución: Calcularemos en primer lugar las clases de equivalencia de la relación.

$$[\bar{0}] = \{0, 3\} = [\bar{3}],\ [\bar{1}] = \{1, 2\} = [\bar{2}],\ [\bar{4}] = \{4, 5\} = [\bar{5}].$$

Por tanto $\mathbb{Z}_6/R = \{[\bar{0}],\ [\bar{1}],\ [\bar{4}]\}$.

Cuestión 4 (1.5 pt) (a) En el conjunto $A = \{a, b, c\}$ definimos la relación binaria siguiente:

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c)\}$$

¿Es transitiva? Justifica la respuesta.

Solución: La relación R no es transitiva, puesto que bRa y aRb, pero b no está relacionado con b.

(b) Escribe el grafo R de una relación de orden en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que verifique que $(6, 5) \in R$ y $(1, 5) \notin R$.

Solución: El grafo de una posible relación verificando las propiedades anteriores sería:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (6, 5)\}$$

(c) Se define en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, la relación aRb si y solo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b = ma$. Demuestra que dicha relación es antisimétrica. ¿Es también antisimétrica la misma relación definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros? Justifica tus respuestas.

Solución: Supongamos que $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \mid b$ y $b \mid a$. De aquí, existen $k \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{N}$ tales que $b = ka$ y $a = bs$. Por tanto sustituyendo obtenemos $b = ksb$ con $ks \in \mathbb{N}$. Luego $ks = 1$ y como tanto k como s son números naturales se tiene que $k = s = 1$. De aquí $a = b$ y la relación es antisimétrica. La misma relación considerada en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros no es una relación antisimétrica, porque por ejemplo $3 \mid -3$ y $-3 \mid 3$ con $3 \neq -3$.

Cuestión 5 (2.5 pt) (a) Sea A un álgebra de Boole y consideremos la función de orden tres sobre A que verifica $f(x, 0, z) = 0$ y $f(x, 1, z) = 1$. Calcula:

(i) La tabla de verdad de f.

Solución:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

(ii) Las formas canónicas disyuntiva y conjuntiva de f.

Solución: La forma canónica disyuntiva de f, es decir la expresión de f como suma de términos minimales es:

$$f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz.$$

Y la forma canónica conjuntiva, es decir la expresión de f como producto de términos maximales es:

$$f(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (x + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + z) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z}).$$

(iii) Simplifica la forma canónica disyuntiva obtenida en (ii) mediante propiedades del Álgebra de Boole, indicando en cada paso las propiedades utilizadas.

Solución:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z} + xyz & & \text{(Propiedad distributiva)} \\
&= \big(\bar{x}y(z + \bar{z}) + xy(\bar{z} + z)\big) & \text{(E. complementarios)} \\
&= \big(\bar{x}y \cdot 1 + xy \cdot 1\big) & \text{(E. neutro)} \\
&= \big(\bar{x}y + xy\big) & \text{(Prop. distributiva)} \\
&= (\bar{x} + x)y & \text{(E. complementarios)} \\
&= 1 \cdot y & \text{(E. neutro)} \\
&= y &
\end{aligned}$$

(b) Calcula la forma más simplificada de la siguiente función booleana mediante el método de Quine-McCluskey. Si hay más de una, escríbelas todas.

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz + xy\bar{z}$$

Solución:

Método de Quine:

Número de unos	**T. minimals**	**1a comparación**	**2a comparación**
0	000*	00-	No hay
1	001*	-01	
2	101* 110*	1-1 11-	
3	111*		

Simplificación: $f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z + xz + xy$.

Rejilla de McCluskey:

	0 0 0	0 0 1	1 0 1	1 1 0	1 1 1
0 0 –	$\boxed{\text{X}}$	X			
– 0 1		X	X		
1 – 1			X		X
1 1 –				$\boxed{\text{X}}$	X

Como en las columnas primera y cuarta hay una única marca, los implicantes primos $\bar{x}\bar{y}$ y xy son esenciales. Por otro lado, con estos dos implicantes primos, solamente nos quedaría un término minimal por cubrir, el $x\bar{y}z$. Para ello podemos utilizar o bien el implicante primo $\bar{y}z$, o bien el xz. Por tanto tenemos dos posibles simplificaciones:

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + xy + \bar{y}z$

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + xy + xz$

(c) Resuelve la siguiente ecuación en el Álgebra de Boole de cuatro elementos $A = \{0, 1, a, b\}$:

$$ax^3 + bx^2 + ax + b = 1$$

Solución: Por idempotencia podemos simplificar la ecuación hasta obtener la siguiente $ax + bx + b = 1$. Aplicando la propiedad distributiva obtenemos $(a + b)x + b = 1$. Teniendo en cuenta que estamos en el Álgebra de Boole de cuatro elementos, sabemos que a y b son complementarios, por tanto $a + b = 1$. Luego tenemos $x + b = 1$. Teniendo de nuevo en cuenta que estamos trabajando en el álgebra de Boole de cuatro elementos, los elementos que cumplen que su supremo con b es 1 son $x = a$ y $x = 1$. Por tanto estas serían las soluciones de la ecuación.