TEMA 3.5. ALGORITMO DUAL + ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD (SIMPLEX REVISADO)

3.5.1 Dado el siguiente modelo lineal:

$$\begin{aligned} &\textbf{MAX } Z = 2X1 + X2 \\ &\textbf{s.a:}\quad [R1]\quad X1 + 2X2 \le 10 \\ &\qquad\quad [R2]\quad 3X1 + X2 \le 10 \\ &\qquad\quad [R3]\quad X1 + X2 \le 2 \\ &\qquad\qquad\qquad X1, X2 \ge 0 \end{aligned}$$

Cuya solución óptima se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	0	-1	8
X4	0	1	-3	4
X1	0	0	1	2
$c_B^t\, B^{-1}$	0	0	2	Z=4

Sabiendo que X3, X4 y X5 son las variables de holgura de las restricciones R1, R2 y R3 respectivamente,

a) A partir de la tabla de la solución óptima actual, **¿cuál es la solución óptima y el valor de la función objetivo en caso de que el bi de la restricción R2 decremente su valor en 5 unidades?**

b) A partir de la tabla de la solución óptima actual calcular el **intervalo de análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de X1.** Explicar el efecto sobre la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo de una variación de dicho coeficiente en el intervalo obtenido.

c) A partir de la tabla de la solución óptima actual, calcular el **intervalo de análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción 3 (b3) y el coste de oportunidad asociado.** ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis?

Soluciones Problemas Tema 3.5

3.5.1

a)

Cuando b2=5, el nuevo valor de las VB es el siguiente:

$$x_B{}^{*\prime} = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dado que la solución ha dejado de ser factible, es necesario aplicar el **algoritmo dual del simplex** para calcular la nueva solución óptima.

Las VNB en la solución óptima son X2 y X5, calculamos sus vectores **y**:

$$y_{x2} = B^{-1}a_{x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_{x5} = B^{-1}a_{x5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dado que la variable con valor negativo es X4, son candidatas a entrar las variables con $\forall ij<0$ en el segundo elemento del vector y. Dado que tanto x2, como x5 al entrar en la solución aumentarían el valor de x4, para elegir cuál lo consigue de la forma más eficiente, calcularemos el cociente:

$$\min \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \;\middle|\; y_{xk} < 0 \right.$$

$z_{x2}=(c^t_B\ B^{-1})\ a_{x1}=(0,0,2)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=2 \rightarrow c_{x2}-z_{x2}=1-2=-1$

$z_{x5}=(c^t_B\ B^{-1})\ a_{x5}=(0,0,2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2 \rightarrow c_{x5}-z_{x5}=0-2=-2$

entonces, min{1/2, 2/3}=1/2 $\rightarrow$**JE:x2**

- La nueva **solución óptima** es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
X3	1	1/2	-5/2	**15/2**
X2	0	-1/2	3/2	**1/2**
X1	0	1/2	-1/2	**3/2**
$c_B^t\ B^{-1}$				**Z=7/2**

b)

Análisis de sensibilidad de c1: Intervalo de variación de c1 en el que la solución actual sigue siendo óptima.

Como x1 es VB en la solución óptima, es necesario recalcular $c_B^t\ B^{-1}$ y los cj-zj $\forall$j VNB:

$c_B^t\ B^{-1}=(0,\ 0,\ c1)\ B^{-1} = (0,\ 0,\ c1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (0,\ 0,\ c1)$

$c_{x2} - z_{x2} = 1- (0,\ 0,\ c1)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \leq 0 \ \rightarrow 1\text{-}c1 \leq 0 \rightarrow c1 \geq 1$

$c_{x5} - z_{x5} = 0- (0,\ 0,\ c1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \leq 0 \ \rightarrow 0\text{-}c1 \leq 0 \rightarrow c1 \geq 0$

Conclusiones: Mientras c1 $\in [1, .. +\infty)$:

1. La solución óptima actual sigue siendo óptima
2. El valor de la función objetivo es: Z = 2 c1
3. En los límites, existen soluciones óptimas alternativas.

c)

Para realizar el análisis de sensibilidad de b3, calculamos en primer lugar el coste de oportunidad de la restricción y a continuación el intervalo en el que dicho coste de oportunidad y el plan de producción se mantienes constantes.

- Coste de oportunidad de la restricción 3:

  $c5\text{-}z5 = 0 - (0,\ 0,\ 2)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 0 - 2 = -2$

  Como se trata de una restricción $\leq$, el coste de oportunidad es favorable al criterio de la función objetivo. Por tanto C.O.=+2

- Intervalo en el que el coste de oportunidad y el plan de producción se mantienen constantes:

$x'^* = B^{-1}b' = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\10\\b3\end{pmatrix} \geq 0$

10 - b3 ≥ 0 → b3 ≤ 10

10 – 3 b3 ≥ 0 → b3 ≤ 10/3

b3 ≥ 0

Conclusiones: Mientras ***b3*** ∈ **[0,..10/3)**

- El coste de oportunidad es constante e igual a +2
- La solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo cambian ya que se trata de una restricción cuello de botella.
- La base óptima no cambia