Problemes del tema 4: Espais Vectorials

1. Verifica, en cadascun dels casos següents, si el vector $\vec{w}$ és una combinació lineal dels vectors $\vec{a} = (1, -2, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, 3, -4, 1)$, $\vec{c} = (2, -3, 1, 1)$. Quan siga possible troba una combinació lineal.

   a) $\vec{w} = (0, 2, -1, 6)$ *b)* $\vec{w} = (0, -1, 3, 0)$ *c)* $\vec{w} = (3, 1, -5, 6)$

2. Determina si són lliures o lligats els següents sistemes de vectors. En cas de que siguen lliures completa, si és necessari, fins a obtenir una base del espai vectorial corresponent.

   a) $\{(1, 1, 0, 0),\ (1, 0, 1, 0),\ (1, 0, 0, 1),\ (0, 1, -1, 0)\}$
   b) $\{(2, 3, -1, 5),\ (6, 1, 1, 3),\ (0, 2, -1, 3),\ (4, -2, 2, -2)\}$
   c) $\{(a, 1, 1),\ (1, 1, a),\ (3, 1, 1)\}$, $a \in \mathbb{R}$
   d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

3. Siga $B = \{(1, -1, 0), (2, -3, 0), (0, 1, 1)\}$.
   (a) Demostra que B és una base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determina les coordenades del vector (a, b, c) respecte de la base B.
   (c) Calcula les coordenades del vector $(2, 0, 3)$ respecte de B.
   (d) Si $(-2, 1, 1)$ són les coordenades d'un vector respecte de la base B, determina aquest vector.

4. Indica quins dels següents subconjunts són subespais vectorials i quins no. Justifica la teua resposta:

   $H_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\}$
   $H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \geq 0\}$
   $H_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ x - z = 1\}$
   $H_4 = \{(2y + z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

5. Calcula una base per a cadascun dels subespais següents:

   a) $H_1 = \{(x, y, 0) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$
   b) $H_2 = \{(x, y, z, t) :\ x = 2z,\ y = -t\}$
   c) $H_3 = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0\}$
   d) $H_4 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0, x - z = 0, y + z = 0\}$

6. Per a cadascun dels subespais següents determina, si és possible, un sistema generador amb menys vectors:

   a) $H = \langle (1, -2, -2),\ (1, -1, -2),\ (1, 0, -1),\ (1, -3, -3) \rangle$
   b) $F = \langle (1, 2, 3),\ (1, -1, 1),\ (4, 2, 1),\ (1, 5, 1) \rangle$
   c) $G = \langle (2, -1, 4),\ (4, -2, 8),\ (-2, -1, 4) \rangle$

7. Demostra que els sistemes de vectors

$$S_1 = \{(1,6,4),\ (2,4,-1),\ (-1,2,5)\} \quad \text{i} \quad S_2 = \{(1,-2,-5),\ (0,8,9)\}$$

són equivalents.

8. Calcula les equacions de H, una base de T i una base del subespai vectorial $H \cap T$, si $H = \langle (1,3,0,0), (0,0,-2,1), (1,3,-2,1) \rangle$ i $T = \{(x,y,z,t) : 3x - y - 2z - 4t = 0\}$. És $H \cup T$ un subespai vectorial?

9. (a) Calcula les equacions implícites dels subespais següents:
   1) $M = \langle (1,0,2,3), (0,1,2,2), (-1,0,-1,1) \rangle$
   2) $N = \langle (1,0,2,3), (-3,1,2,2), (-1,1,6,8) \rangle$

   (b) Calcula una base del subespai $M \cap N$.

   (c) Determina el valor del paràmetre b perquè el subespai $H = \langle (1,0,b,7) \rangle$ estiga contingut en $M \cap N$.

10. Considera els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$ següents:

$$E = \{(x,0,0,0) : x \in \mathbb{R}\},\ F = \{(0,y,z,0) : y \in \mathbb{R},\ z = 0\},\ G = \{(x,y,z,0) : x,y \in \mathbb{R},\ z = 0\}$$

   a) Són $E \cup F$, $E \cup G$ i $F \cup G$ subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$?

   b) Calcula $E + F$. És una suma directa?

11. *a*) Determina si els vectors $(2,-2,0,0)$ i $(0,6,1,1)$ pertanyen al espai columna de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   b) Determina una base del espai fila, del espai columna i del nucli de les matrius A i A^t.

   c) Obtín el complement ortogonal de $F(A)$.

12. Calcula els complements ortogonals, en el espai vectorial corresponent en cada cas, dels subespais vectorials del problema 5.

13. Calcula la projecció ortogonal del vector $(1,0,0)$ sobre el subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per la equació implícita $x + y = 0$.