DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Examen Final **26-01-2016** **Duración: 3 horas**

PRIMER PARCIAL

---

1. (2p) Resuelve la siguiente desigualdad:

$$|7-|x||<5$$

Utilizamos $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$, entonces:

$$|7-|x||<5 \Leftrightarrow -5<7-|x|<5 \Leftrightarrow -5-7<-|x|<5-7 \Leftrightarrow -12<-|x|<-2 \Leftrightarrow 2<|x|<12,$$

en el último paso de las fórmulas anteriores hemos utilizado que al multiplicar una desigualdad por (-1) cambian los signos y el sentido de la desigualdad. Ahora podemos razonar sobre lo que significa el último resultado anterior.

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0 & x \in \;]2,12[, \\ \text{si } x < 0 & x \in \;]-12,-2[. \end{cases}$$

Entonces:

$$x \in]-12,-2[\; \cup \;]2,12[.$$

Otra forma de llegar a este mismo resultado es resolver por separado $2<|x|$ y $|x|<12$. La solución final viene dada por la intersección de las soluciones obtenidas resolviendo cada una de las dos desigualdades anteriores.

---

2. a)(3p) Calcula el dominio de la función $f(x)=\log(1-x^2)$ y a partir del estudio de la derivada de dicha función determina las regiones de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

Primero: Tenemos que utilizar que $Dom(\log(x))=]0,+\infty[$, por lo tanto:

$$Dom(\log(1-x^2))=\{ \; x\in\mathbb{R} \;\; | \; (1-x^2)>0 \;\; \}$$

Vamos a resolver $(1-x^2)>0$

$$(1-x^2)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1>x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x<1$$

entonces

$$Dom(\log(1-x^2))=]-1,1[$$

Segundo: Calculamos la derivada de la función:

$$f\,'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$$

los candidatos a máximos y mínimos vienen dados por los puntos donde se anula la derivada primera.

$$\frac{-2x}{1-x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

Podemos acabar el ejercicio utilizando la derivada segunda de la función, o bien estudiando el signo de la derivada primera en los intervalos $]-1,0[$ y $]0,1[$. Vamos a utilizar el método de la derivada segunda:

$$f\,''(x)=\frac{-2\cdot(1-x^2)-(-2x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2\cdot(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$f\,''(0)<0$, por lo tanto en $x=0$ la función tiene un máximo, eso además implica que para $x \in]-1,0[$ la función es creciente y para $x \in]0,1[$ la función es decreciente.

---

3. a)$_{(1p)}$ Calcula el valor exacto de la integral:

$$\int_8^9 x\cdot\sqrt{9-x}\;dx.$$

b)$_{(1p)}$ Calcula el valor exacto de la integral:

$$\int_1^e x\cdot\log x\;dx.$$

---

a)

$$\int_8^9 x\cdot\sqrt{9-x}\;dx$$

Para resolver esta integral podemos hacer el cambio de variable $t=9-x$, entonces

$$dx=-dt,\quad x=9-t\;\; y\;\; \left\{\begin{array}{lccc} \text{para} & x=8 & \to & t=1, \\ \text{para} & x=9 & \to & t=0. \end{array}\right.$$

Vamos a sustitirlo todo en la integral:

$$\int_8^9 x\cdot\sqrt{9-x}\;dx=\int_1^0 (9-t)\cdot\sqrt{t}\;(-dt)=-\int_1^0 (9-t)\cdot t^{1/2}\;dt=\int_0^1 (9\cdot t^{1/2}-t^{3/2})\cdot dt=$$

$$=9\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}-\left.\frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_0^1=9\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{28}{5}$$

.

b)

$$\int_1^e x\cdot\log x\;dx$$

Esta segunda integral se puede hacer por partes, utilizando la fórmula:

$$\int_a^b u\cdot dv=u\cdot v]_a^b-\int_a^b v\cdot du=u\cdot v]_a^b-\int_a^b v\cdot du$$

$$tomando\;\left\{\begin{array}{rccl} u= & \log x & \to & du=\frac{1}{x}, \\ dv= & x\cdot dx & \to & v=\int dv=\int x\cdot dx=\frac{x^2}{2}. \end{array}\right.$$

Sutituyéndolo todo en la fórmula:

$$\int_1^e x\cdot\log x\;dx=\log x\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot dx=\overbrace{\log e}^{=1}\cdot\frac{e^2}{2}-\overbrace{\log 1}^{=0}\cdot\frac{1^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right]_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1^2}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

---

4. a)$_{(1p)}$ Aproxima la integral

$$\int_{-2}^2\sqrt{9-x^2}\;dx$$

utilizando el método de los trapecios con $n=4$.

b)$_{(1p)}$ Utiliza la fórmula del método de los trapecios para acotar el error cometido en el apartado anterior sabiendo que $M_2=1$.

c)$_{(1p)}$ Determina el valor mínimo de n necesario para aproximar la integral del apartado a) mediante la fórmula de Simpson de forma que se garantice un error menor que 10^{-4}, sabiendo que $M_4=3$.

---

a) La fórmula de trapecios nos permite aproximar la integral: $\int_a^b f(x)dx$ por:

$$T_nf=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b)\right)\;;\,con\;h=\frac{b-a}{n}$$

En este caso $n = 4$, por tanto $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-2)}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Caculamos primero la partición del intervalo $[-2, 2]$:

$$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

ahora ya podemos aplicar la fórmula de los trapecios:

$$T_4 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9-(-2)^2} + 2\cdot\left(\sqrt{9-(-1)^2} + \sqrt{9-0^2} + \sqrt{9-1^2}\right) + \sqrt{9-2^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 2\cdot\left(\sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{8}\right) + \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} + 3 + 4\cdot\sqrt{2} \simeq 10.8929$$

b) El error cometido al aplicar la fórmula de los trapecios viene acotado por la fórmula:

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \ ; \ M_2 \geq \max_{[a,b]}|f''|\,.$$

En este caso $n = 4$ y $M_2 = 1$, por lo tanto:

$$E_4 \leq \frac{(2-(-2))^3}{12\cdot 4^2}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

c) El error cometido al aplicar el método de Simpson viene acotado por la fórmula:

$$\text{Cota de error: } E_n \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4 \ ; \ M_4 \geq \max_{[a,b]}\left|f^{(iv)}\right|,$$

en este caso queremos encontrar el valor de n que hace que el método de Simpson garantice un error menor que 10^{-4}, ademas sabemos que $M_4 = 3$, entonces:

$$E_n \leq \frac{(2-(-2))^5}{180n^4}\cdot 3 < 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4^5}{180n^4}\cdot 3 < 10^{-4} \Leftrightarrow \quad \frac{256}{15\cdot n^4} < 10^{-4} \Leftrightarrow \quad \frac{256}{15}\cdot 10^4 < n^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{40}{\sqrt[4]{15}} < n \quad \Leftrightarrow 20.3 < n$$

Como $n > 20.3$ y además tiene que ser entero y par, obtenemos que $n \geq 22$.

SEGUNDO PARCIAL

---

1. (2p) Utiliza el criterio de Stolz para ordenar las siguiente sucesiones según su orden de magnitud. Justifica tus respuestas.

$$\begin{cases} a_n & = & \text{n} + \log n, \\ b_n & = & \log 1 + \log 2 + \log 3 + ... + \log(2n). \end{cases}$$

Primero vamos a calcular el límite del cociente de ambas sucesiones

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n + \log n}{\log 1 + \log 2 + \log 3 + ... + \log(2n)} = Stolz =$$

$$= \lim \frac{\overbrace{((n+1) + \log(n+1))}^{a_{n+1}} - \overbrace{(n + \log n)}^{a_n}}{\underbrace{(\log 1 + \log 2 + \log 3 + ... + \log(2(n+1)))}_{b_{n+1}} - \underbrace{(\log 1 + \log 2 + \log 3 + ... + \log(2n))}_{b_n}} =$$

$$= \lim \frac{1 + \log(n+1) - \log n}{\log(2n+1) + \log(2n+2)} = \lim \frac{1 + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(4n^2 + 6n + 2)} =$$

Ahora podemos despreciar 1 frente a n en el logaritmo del numerador y $6n + 2$ frente a $4n^2$ en el logaritmo de denominador con lo que el límite anterior queda:

$$= \lim \frac{1 + \cancelto{0}{\log 1}}{\log(4n^2)} = \lim \frac{1}{\log(4n^2)} = 0,$$

por lo tanto $a_n \ll b_n$.

---

2. a)$_{(2.5p)}$ Resuelve la recurrencia:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4 \cdot a_n - 5 \cdot 3^n, \\ a_1 = -5 \quad , \quad a_2 = 3. \end{cases}$$

b)$_{(0.5p)}$ ¿Cuánto vale a_{10}?

---

a)Primero: Vamos a resolver la recurencia homogénea. $a_{n+2} - 4 \cdot a_n = 0$. Para ello escribimos la ecuación característica asociada a la recurrencia homogénea y la resolvemos:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Tenemos dos raices reales distintas, entonces la solución general de la recurrencia homogénea es:

$$a_n^h = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 2^n$$

Segundo: Vamos a encontrar una solución particular de la recurrencia no homogénea. Buscamos una solución particular de la forma:

$$a_n^p = k \cdot 3^n$$

entonces:

$$a_{n+2}^p = k \cdot 3^{n+2}$$

sustituimos a_{n+2} y a_n en la recurrencia no homogénea para obtener el valor de k:

$$k \cdot 3^{n+2} = 4 \cdot k \cdot 3^n - 5 \cdot 3^n$$

dividimos entre 3^n en ambos lados de la igualdad:

$$k \cdot 3^2 = 4 \cdot k - 5 \quad \Leftrightarrow k = -1.$$

Entonces la solución de la recurrencia no homogénea tiene la forma:

$$a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 2^n - 3^n.$$

Finalmente: Podemos encontrar los valores de las constantes C_1 y C_2 utilizando las condiciones iniciales:

$$\textit{para n=1} \;\Rightarrow\; a_1 = C_1 \cdot (-2)^1 + C_2 \cdot 2^1 - 3^1 = -5 \;\Rightarrow -2 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 = -2,$$
$$\textit{para n=2} \;\Rightarrow\; a_2 = C_1 \cdot (-2)^2 + C_2 \cdot 2^2 - 3^2 = 3 \;\Rightarrow 4 \cdot C_1 + 4 \cdot C_2 = 12.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos $C_1 = 2$ y $C_2 = 1$ con lo que la solución es:

$$a_n = 2 \cdot (-2)^n + 2^n - 3^n = (-1)^n \cdot 2^{n+1} + 2^n - 3^n$$

b) El término a_{10} lo podemos calcular utilizando la fórmula anterior para $n = 10$

$$a_{10} = (-1)^{10} \cdot 2^{11} + 2^{10} - 3^{10} = -55977$$

---

3. $_{(2p)}$ Aproxima la serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{1}{n!}$$

con un error menor que 10^{-4}.

Es una serie alternada. Podemos comprobar que la sucesión de términos $|A_n|$ es decreciente y que $\lim |A_n| = 0$, por lo que podemos aplicar el criterio de Leibniz para calcular el número de términos que necesitamos para la aproximación que queremos hacer. Sabemos que en estos casos el error está acotado por el valor absoluto del primer término despreciado en la aproximación. Supongamos que hacemos la suma hasta N, entonces:

$$E_N \leq |A_{N+1}| = \frac{1}{3^{N+1}} \cdot \frac{1}{(N+1)!} < 10^{-4}$$

Como no podemos despejar el valor de N vamos a darle valores a N:

- Para $N = 1$, $E_1 \leq |A_2| = \frac{1}{18} \simeq 0.05 > 10^{-4}$

- Para $N=2$, $E_2 \leq |A_3| = \frac{1}{162} \simeq 0.006 > 10^{-4}$
- Para $N=3$, $E_3 \leq |A_4| = \frac{1}{1944} \simeq 0.0005 > 10^{-4}$
- Para $N=4$, $E_4 \leq |A_5| = \frac{1}{29160} \simeq 0.00003 < 10^{-4}$

Necesitamos cuatro términos:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{162} - \frac{1}{1944} = \frac{551}{1944} \simeq 0.283436,$$

---

4. a)$_{(1.5\text{p})}$ Suma la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (2\ x)^n$$

donde converja.

b)$_{(1.5\text{p})}$ Halla $f\ '(x)$ en forma de serie de potencias y en forma explícita.

---

a)Esta serie de potencias es una serie geométrica de razón $r = 2x$. Utilizamos la fórmula de la suma para las series geométricas:

$$\sum_{n=p}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{r^p}{1-r} \text{ si } |r| < 1, \\ \text{divergente si } |r| \geq 1. \end{cases}$$

En nuestro caso:

$$\sum_{n\geq 0} (2\ x)^n = \begin{cases} \frac{1}{1-(2x)} \text{ si } |x| < \frac{1}{2}, \\ \text{divergente si } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b)Ahora tenemos que calcular la derivada en el caso de $|x| < 1/2$, que es donde hemos calculado la suma explícitamente:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0} (2\ x)^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-(2x)}\right)$$

Vamos a calcular la derivada del primer miembro de la igualdad primero. Nos puede resultar más facil calcular la derivada de este sumatorio si desarrollamos el sumatorio escribiendo varios términos y luego calculamos su derivada directamente término a término:

$$\sum_{n\geq 0} (2\ x)^n = \sum_{n\geq 0} 2^n\ x^n = 1 + 2x + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + ... + 2^k \cdot x^k + ...$$

tomando derivada:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{d}{dx}\left(2^n\ x^n\right) = 0 + 2 + 2 \cdot 2^2 \cdot x^1 + 3 \cdot 2^3 \cdot x^2 + ... + k \cdot 2^k \cdot x^{k-1} + ... = \sum_{n\geq 1} n \cdot 2^n \cdot x^{n-1}.$$

Vamos ahora con la derivada del segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-(2x)}\right) = \frac{2}{(1-(2x))^2}$$

juntamos ambos resultados y obtenemos el resultado pedido:

$$\sum_{n\geq 1} n \cdot 2^n \cdot x^{n-1} = \frac{2}{(1-(2x))^2}$$