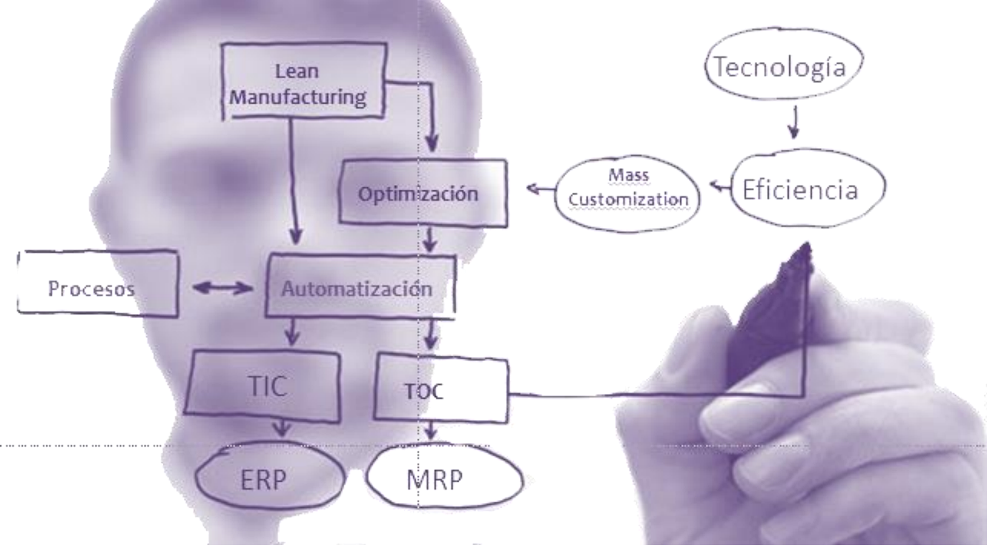


DEIOAC-UPV

4. FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Objetivos

Al finalizar el tema, deberás ser capaz de:

- **Plantear y formular modelos** de programación **lineal** y **entera** de diversos tipos (mezclas óptimas, localización y cubrimiento etc.).
- **Plantear** y **formular modelos lineales** con uso de **variables binarias**, bien como variables de decisión, o bien como variables auxiliares.
- Utilizar **lenguajes de especificación** para la formulación de modelos de gran tamaño.

CONTENIDOS

CONTENIDOS

4.1 Introducción

- Muchos de los problemas reales exigen soluciones con valores enteros, por lo tanto las variables de dicho problema deben ser definidas como variables enteras

Hipótesis	Programación Lineal	Programación Entera
H1: Divisibilidad	**SI**	**NO**
H2: No negatividad	**SI**	**SI**
H3: Linealidad	**SI**	**SI**
H4: Certidumbre	**SI**	**SI**

4.2 Modelización con variables binarias

- En optimización, aspiraremos a modelizar problemas mediante un modelo lineal ya que son más fáciles de resolver. Sin embargo, muchos problemas presentan situaciones en que la linealidad del modelo se hace muy difícil de mantener con un conjunto de variables continuas como única herramienta de modelización.

- Es así como surgen las variables binarias (aquellas que sólo pueden tomar los valores 0 y 1) como un artificio que nos permite expresar situaciones no lineales como lineales. Esta definición de variables es muy útil en la práctica y existen algoritmos para resolver este tipo de problemas basándose en las técnicas de programación lineal: Algoritmo de Bifurcación y Acotación (Branch & Bound)

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

4.2.1 Producción acotada

Consideremos la fabricación de un producto j (**xj**), el cual puede producirse o no, pero que en caso de producirse sólo puede hacerse en un nivel comprendido entre **Lj** y **Uj** *(OJO! Uj y Lj son constantes!)*. Para modelizar esta restricción, además del nivel de producción **xj**, definimos la siguiente variable binaria:

$\mathbf{y_j}=(0,1)$: 1 → Si se fabrica el producto j

0 → Si no se fabrica el producto j

Así, la restricción vendría dada por: $\mathbf{Lj \cdot y_j \leq xj \leq Uj \cdot y_j}$

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

4.2.2 Producción acotada inferiormente

Consideremos la fabricación de un producto j (**xj**), el cual puede producirse o no, pero que en caso de producirse sólo puede hacerse en un nivel de al menos **Lj** sin que exista una cota superior explícita. La táctica anterior no sirve por lo que además de la variable **yj** , inventamos un nuevo parámetro **Mj** que sirva como una cota superior:

y_j=(0,1) : 1 → Si se produce el producto j

0 → Si no se produce el producto j

Mj = Un número muy grande.

Así, la restricción vendría dada por: $Lj \cdot y_j \leq xj \leq Mj \cdot y_j$

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

4.2.3 Costes fijos

Consideremos el caso en que debemos decidir si realizar o no una actividad (**xj**) cuyo coste tiene tanto una componente fija (Kj) como una componente variable (Cj·**xj**), es decir el coste de realizar la actividad al nivel **xj** viene dado por:

Coste (xj): **0** si **xj** = 0

Kj + Cj·xj si **xj** > 0

Modelo no lineal

En este caso, nuevamente resulta de gran utilidad definir una variable binaria:

y_j=(0,1) : 1 → Si se realiza la actividad j

0 → Si no se realiza la actividad j

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

Así, la función de coste queda como:

$$\text{Coste } (xj) = Kj \cdot yj + Cj \cdot xj$$

Sin embargo, hasta el momento nada impide al modelo adoptar soluciones del tipo **yj = 0** y **xj ≠0**, situación que evitamos imponiendo la siguiente restricción:

$$xj \leq Mj \cdot yj \qquad \text{con } Mj \text{ muy grande}$$

Observación: Existen otras formulaciones alternativas como por ejemplo: Coste (xj) = Kj· yj + Cj· xj· yj , pero **son NO lineales** !!!

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

4.2.4 Variables que toman un conjunto de valores

Consideremos ahora la situación en que una variable **xj** sólo puede tomar ciertos valores bien definidos: **xj** ∈ **{a1, a2, ..., an}.** En este caso, debemos definir:

$\mathbf{y}_{ij}=(0,1)$:   1 → Si **xj** = ai

0 → Si **xj** ≠ ai

Además, xj vendrá dada por:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot y_{ij}$$

Dado que xj sólo puede tomar un valor en el conjunto, debemos definir la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

4.2.5 Restricciones excluyentes (una u otra)

Examinaremos esta situación a través de un ejemplo:

Consideremos que existen 2 restricciones de las cuales se requiere que sólo una de ellas sea satisfecha:

$3x1 + 2x2 \leq 18$

ó

$5x1 + 4x2 \leq 16$

Esta restricción no está en formato de programación matemática pues en él se asume que deben cumplirse **TODAS** las restricciones.

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

y=(0,1) : 0 → Si la restricción (1) es la que se cumple

1 → Si la restricción (2) es la que se cumple

M muy grande

Entonces:

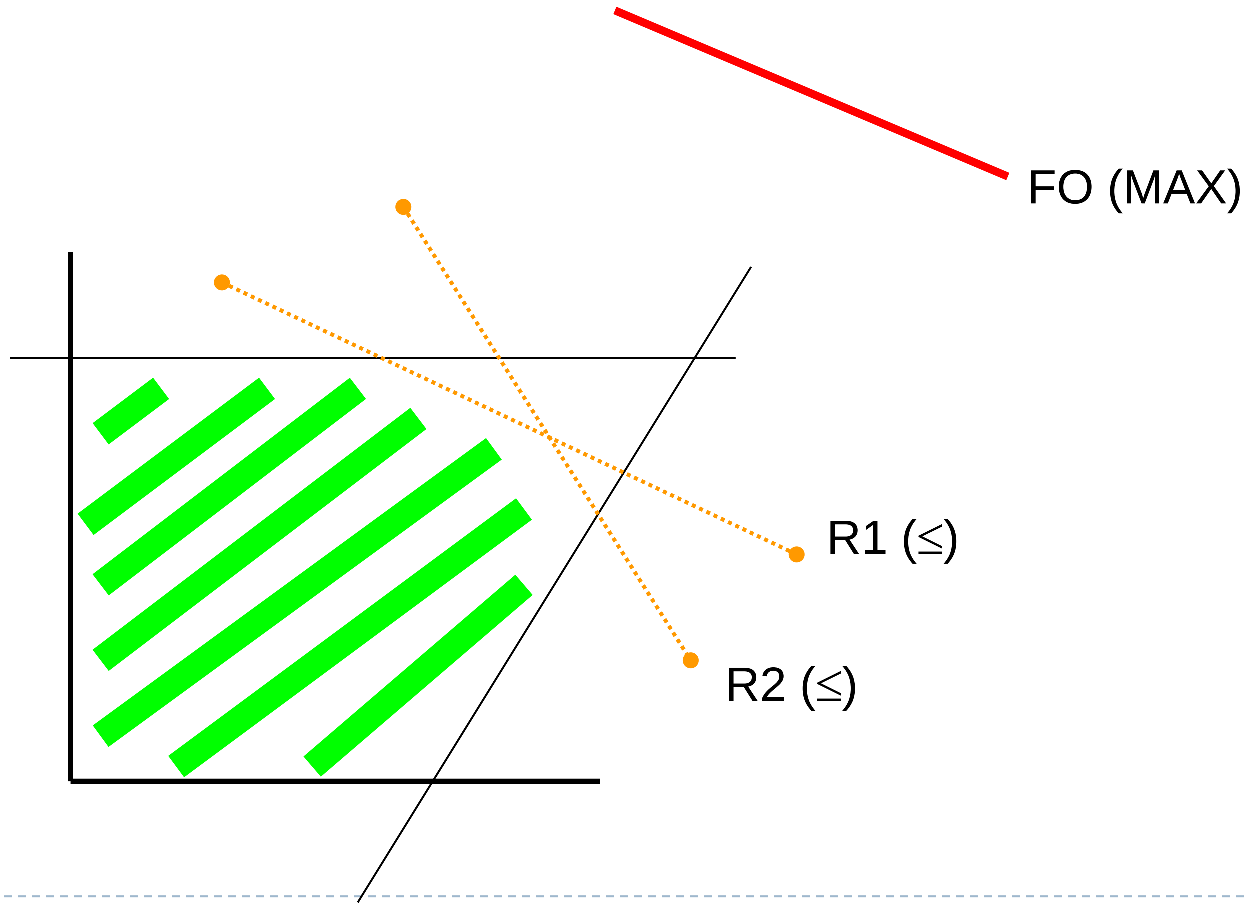
$$(R1)\ 3x1 + 2x2 \leq 18 + M \cdot \mathbf{y}$$

$$(R2)\ 5x1 + 4x2 \leq 16 + M \cdot (1 - \mathbf{y})$$

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

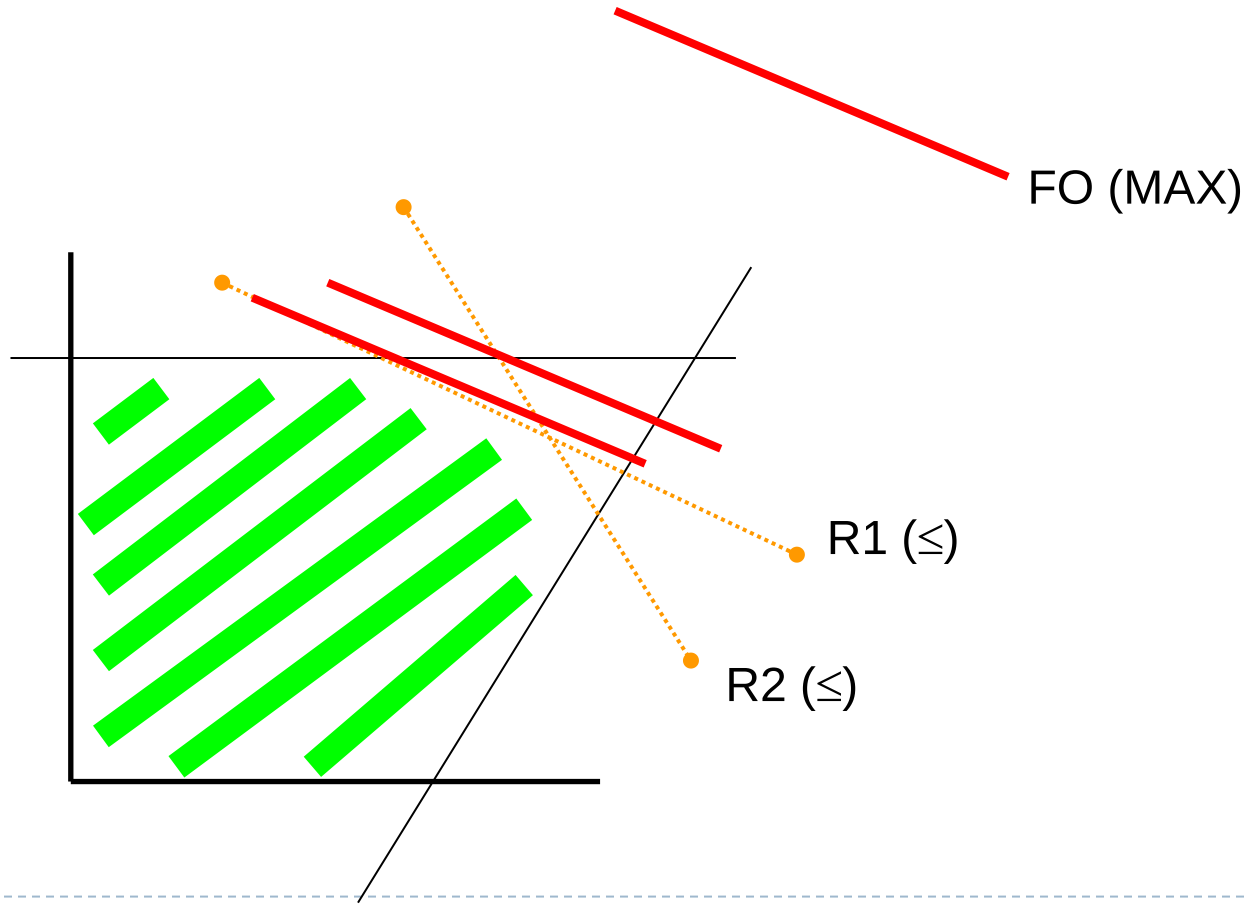
4.2.5 Restricciones excluyentes (una u otra)



4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

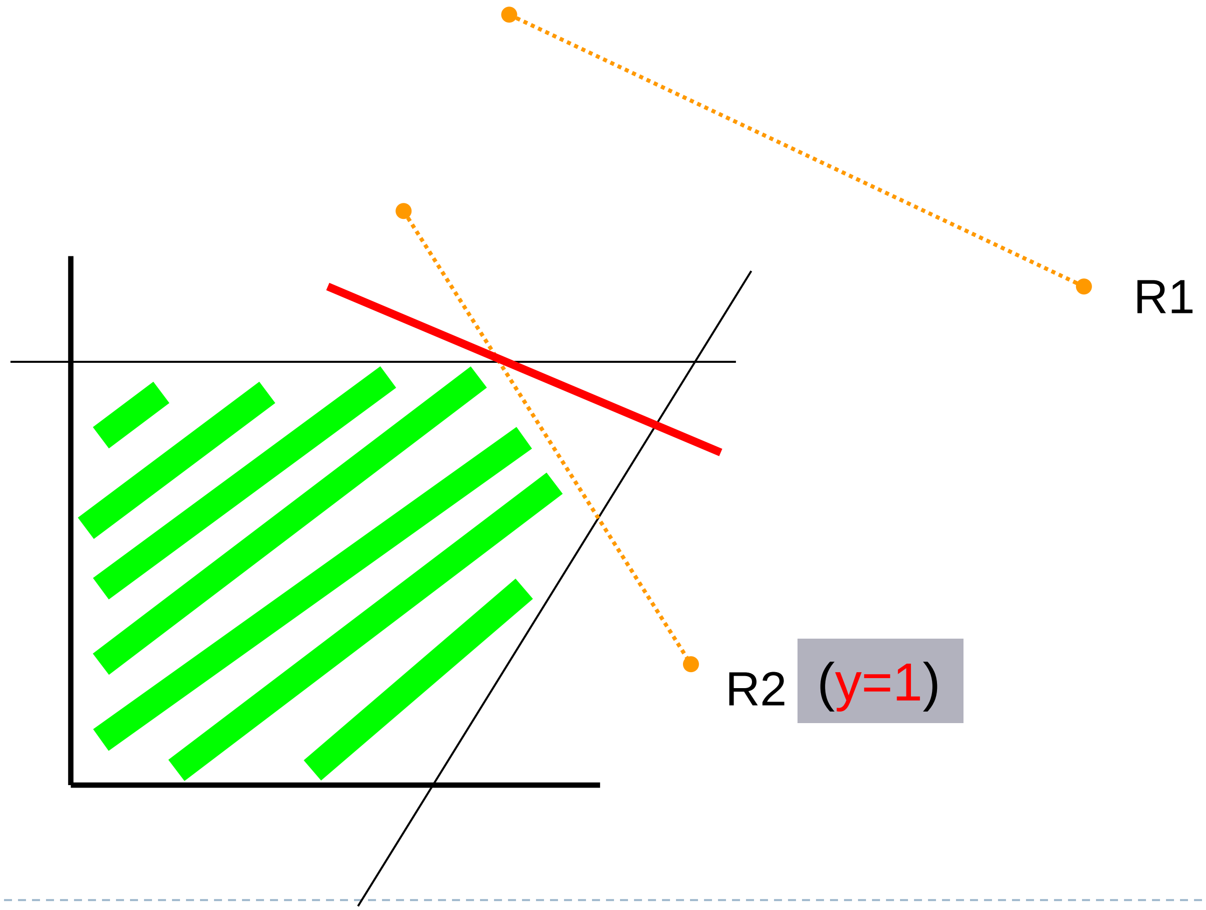
4.2.5 Restricciones excluyentes (una u otra)



4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

4.2.5 Restricciones excluyentes (una u otra)



4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

<u>Cuando se desea seleccionar entre más de dos restricciones:</u>

$f_1(X_1,X_2,\dots,X_n) \le b_1$

$f_2(X_1,X_2,\dots,X_n) \le b_2$

… … …

$f_m(X_1,X_2,\dots,X_n) \le b_m$

Queremos exigir que:

Se deben cumplir sólo k restricciones

Las restricciones se reformulan como:

$f_1(X_1,X_2,\dots,X_n) \le b_1 + \mathbf{M}\, \mathbf{y_1}$

$f_2(X_1,X_2,\dots,X_n) \le b_2 + \mathbf{M}\, \mathbf{y_2}$

… …

$f_m(X_1,X_2,\dots,X_n) \le b_m + \mathbf{M}\, \mathbf{y_m}$

Y además:

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j = m - k$$

4.2 Modelización con variables binarias

Situaciones frecuentes que pueden modelarse con variables binarias:

4.2.6 Varios segundos miembros de una restricción

En algunos problemas puede ser necesario plantear:

$$\mathbf{f\,(X_1, X_2, \ldots X_n) \leq d_1,\ o\ d_2, \ldots\ o\ d_N}$$

Su modelización sería la siguiente:

$$f(x_1, \ldots, x_N) \leq \sum_{i=1}^{N} d_i \cdot y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1 \quad donde\ \ y_i\ es\ una\ \mathrm{var}\ iable\ (0{,}1)$$

4.3.2 Un problema de mezclas (I)

Un problema de elaboración de cerveza

Supongamos que se desea producir un tipo de cerveza caracterizado por un contenido en alcohol del 3,1 %, así como por otras cualidades técnicas que se recogen en el cuadro, a base de 4 tipos estándar de cerveza cuyo stock se supone ilimitado y de una cierta proporción de agua, aunque ésta no es absolutamente necesaria.

Características de los distintos componentes

		Componentes				
		Agua	Cervezas			
Características	Requerimientos	1	2	3	4	5
% alcohol	3,1	0	2,5	3,7	4,5	5,8
Densidad	1,034-1,040	1	1,030	1,043	1,050	1,064
Color uni. EBC	8-10	0	11	9	8	7
Isomulina mgr/Hlitro	20-25	0	30	20	28	30
Coste u.m./Hl		0	44	50	64	90

4.3.2 Un problema de mezclas (I)

A efectos de no diversificar la producción y motivado por políticas de compra se **limita a dos el número máximo de tipos estándar de cerveza que han de integrar la mezcla**.

En el caso de que el componente número 5 entre a formar parte de la mezcla se precisa la instalación de una maquinaria especial cuyo coste de instalación asciende a 5000 u.m.. La producción de la mezcla ha de ser de 100 Hl.

Formula un modelo que permita determinar qué tipos estándar de cerveza y agua y en qué cantidades se necesita que integren la mezcla para **minimizar el coste total** de los componentes, en la producción de 100 Hectolitros de cerveza.

4.3.2 Un problema de mezclas (I)

- Y si la condición fuera incluir AL MENOS 2 tipos de cerveza en la mezcla?

4.3.1 Un problema de mezclas (II)

Un problema con costes lineales por tramos

En una fundición se desea producir al mínimo coste 1000 Kg de una aleación especial con las características químicas de un máximo del 3 % de hierro, del 5 % de cobre, del 2 % de manganeso, del 1,5 % de magnesio, de un mínimo del 75 % de aluminio y entre el 12,5 y 15 % de silicio.

Para ello se dispone de 5 tipos de chatarra, subproductos de la misma fundición y de dos metales como el aluminio y el silicio que es preciso comprar. En la siguiente tabla se recogen las características técnicas y comerciales (precio de coste unitario y disponibilidad máxima) de estos siete componentes, de tal forma que hay un límite máximo de disponibilidad en los 5 subproductos, exigiéndose además un consumo mínimo de 200 Kg. en el subproducto 3 y de 50 Kg en el subproducto 4.

4.3.1 Un problema de mezclas (II)

Características técnicas y comerciales de los distintos componentes

Componente	Características técnicas						Características comerciales	
	Fe	Cu	Mn	Mg	Al	Si	Coste unitario por Kg.	Disponi-bilidad máxima en Kg.
Subprod.1	0,15	0,03	0,02	0,02	0,70	0,02	0,03	100
Subprod.2	0,04	0,05	0,04	0,03	0,75	0,06	0,08	1250
Subprod.3	0,02	0,08	0,01	-	0,80	0,08	0,17	400
Subprod.4	0,04	0,02	0,02	-	0,75	0,12	0,12	350
Subprod.5	0,02	0,06	0,02	0,01	0,80	0,02	0,15	750
Aluminio	0,01	0,01	-	-	0,97	0,01	0,21 (0,13)	ilimitad
Silicio	0,03	-	-	-	-	0,97	0,38	ilimitad

4.3.1 Un problema de mezclas (II)

a) Plantea un modelo que permita determinar las cantidades de cada uno de los componentes a incorporar a la mezcla para **minimizar su coste**.

b) En la compra de aluminio el precio unitario es de 0,21 u.m. si el número de Kg no es superior a 100, siendo de 0,13 u.m. para la cantidad que sobrepase los 100 kg. Modifica el modelo matemático de modo que se contemple esta situación.

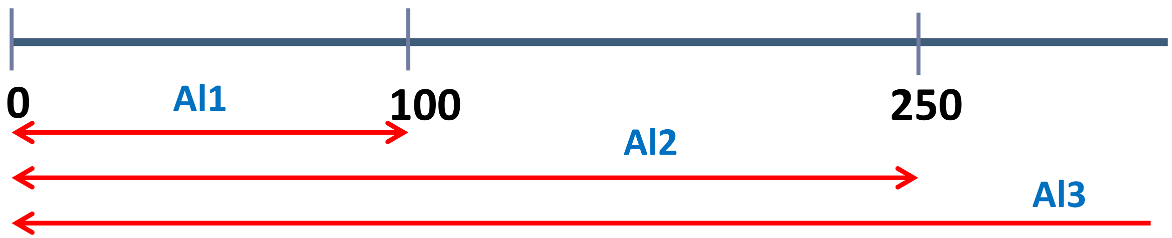
c) Si el precio de 0,21 u.m. por Kg debe aplicarse a una compra de hasta 100 Kg. mientras que el precio del Kg. será 0.13 u.m. si se sobrepasa esta cantidad. ¿Cómo se reflejaría esta situación?.

Realiza la siguiente modificación a las condiciones de los apartado b) y c):

Se consideran **3 tramos en los costes del aluminio**:

b)

c)



4.3.3 Un problema de producción con costes fijos

(*) **Elaboración de un producto químico industrial.** Una pequeña empresa fabrica un determinado producto químico industrial y lo comercializa en cuatro formatos distintos. En la tabla siguiente se detalla qué cantidad de materia prima y de mano de obra requiere cada lote de cada uno de estos formatos.

	Formato 1	Formato 2	Formato 3	Formato 4
Materia prima (litros/lote)	10	10	20	20
Mano de obra (horas/lote)	5	4	3	1

Se dispone de un máximo de 2.000 litros de materia prima y de 500 horas de mano de obra, cada semana.

Los beneficios netos por ventas son los siguientes: 50, 60, 90 y 70 euros por cada lote de los formatos 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Se supone que se puede vender todo lo que se fabrica.

Además, producir el formato 1 comporta un ingreso extra semanal de 1.000 euros, en concepto de subvenciones autonómicas (se trata de una cantidad FIJA por el hecho de producir ese formato, independientemente de la cantidad producida). En cambio, producir el formato 2 conlleva un COSTE FIJO semanal de 2.000 euros, necesarios para acondicionar la línea de producción (de nuevo, se trata de un coste en el que se incurriría semanalmente por el hecho de producir el formato 2, independientemente de la cantidad producida).

(*) Este enunciado pertenece al material docente de Vicent Giner- DEIOAC.UPV

4.3.3 Un problema de producción con costes fijos

a) Formula un modelo LINEAL que ayude a la empresa a determinar cuál es el plan de producción que permitiría maximizar sus beneficios (ingresos – costes), respetando todas las condiciones enunciadas. Puede considerarse que los lotes de este producto son indivisibles.

Modifica el modelo planteado en el apartado (a) para que contemple las siguientes condiciones adicionales, <u>sin que el modelo deje de ser lineal</u>.

b) En el caso de producir el formato 3 (cualquier cantidad), deberá producirse también alguna cantidad del formato 4.

c) Para cualquier formato que se decida producir, la mínima cantidad deberá ser 10 lotes semanales.

d) En el caso de producir más de 20 lotes del formato 3, deberán producirse como mucho 15 lotes del formato 1, semanalmente.

4.3.4 Un problema de distribución comercial

Una empresa tiene **cuatro centros de producción** en Lugo, Bilbao, Barcelona y Valencia. Estas fábricas tienen una capacidad máxima de 40, 20, 40 y 30 unidades respectivamente en la producción del artículo que comercializan. Además, es necesario cubrir una producción mínima de 10 unidades en la fábrica de Lugo y de 15 en la de Bilbao, pero ésta última sólo en el caso de que se decida utilizar. Asimismo, se debe decidir la utilización o no de la fábrica de Valencia, que precisa una inversión de 150 u.m. en el caso afirmativo.

La empresa dispone de **dos centros de consumo**, localizados en Valladolid y Madrid con una capacidad máxima de recepción de 50 y 100 unidades respectivamente, siendo necesario cubrir la demanda de 70 unidades en el centro de Madrid y de 20 en Valladolid. La fábrica de Barcelona sólo puede enviar el producto a un único centro de destino.

4.3.4 Un problema de distribución comercial

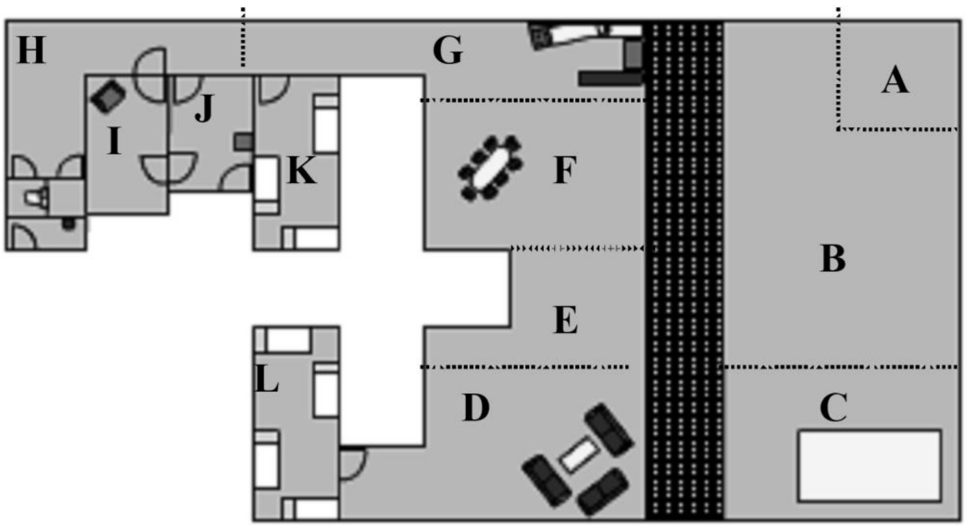
Costes de transporte unitarios

ORIGEN	DESTINO	
	VALLADOLID	MADRID
LUGO	30	55
BILBAO	30	35
BARCELONA	45	50
VALENCIA	40	35

Formula un modelo para determinar la cantidad de producto a transportar desde cada centro de origen a cada centro de consumo de forma que se **minimicen los costes totales de la empresa**.

4.3.5 Un problema de cubrimiento

La cadena de televisión TVSAT está preparando un nuevo programa de TV. El programa consiste en que los espectadores pueden ver a través de sus televisores todo lo que hacen los concursantes, "encerrados" durante tres meses en una casa. Los técnicos del programa han dividido la casa en 12 sectores, que han sido nombrados con letras (A ... L) y que se muestran en la siguiente figura:



4.3.5 Un problema de cubrimiento

Además se han establecido una serie de puntos estratégicos en los que sería posible situar una cámara móvil por control remoto. Estos puntos han sido numerados del 1 al 13 y en la siguiente tabla se muestra el sector o sectores que quedarían cubiertos si la cámara se instalase en ese punto y el coste de instalar dicha cámara (coste de la cámara más el coste de instalación):

Cámara	Coste (euros)	Sectores cubiertos
1	350	A, G
2	350	B, C
3	350	C, D
4	400	A, B, E
5	450	B, E, F
6	300	G, F
7	300	G, H
8	300	H, I
9	250	H, J
10	225	G, K
11	225	D, L
12	175	K
13	225	I, J

4.3.5 Un problema de cubrimiento

Por motivos técnicos, las cámaras 2 y 5 son incompatibles entre sí. Además, si se instala la cámara 6, necesariamente se debe instalar también la cámara 7.

Plantea un modelo matemático que permita decidir a los responsables del programa la instalación de **mínimo coste** que permita visualizar cualquiera de los sectores de la casa.

4.3.6 Un problema de secuenciación de tripulaciones aéreas

Una compañía aérea necesita asignar sus tripulaciones para cubrir todos sus vuelos programados. En particular, desea asignar tres tripulaciones, con base en Valencia, a los vuelos indicados en la siguiente tabla:

	Secuencia factible de vuelos							
Vuelo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Valencia a Madrid	1		1			1		
Valencia a Mallorca				1			1	1
Valencia a Lanzarote		1			1			
Madrid a Alicante			2			2		
Madrid a Valencia	2				3			5
Alicante a Mallorca			3	3				
Alicante a Lanzarote						3	3	3
Mallorca a Valencia			4	4				
Mallorca a Alicante				2			2	2
Lanzarote a Valencia		2				4	4	
Lanzarote a Madrid					2			4
Coste	1	3	5	6	4	5	7	7

4.3.6 Un problema de secuenciación de tripulaciones aéreas

- En dicha tabla, las columnas numeradas de la 1 a la 8 muestran ocho secuencias factibles de vuelo para una tripulación, siendo necesario elegir tres de esas secuencias (una por tripulación) de tal manera que se cubran la totalidad de vuelos programados (se permite tener más de una tripulación en un vuelo; en tal caso los miembros de la tripulación adicional volarán como pasajeros percibiendo su vuelo como si estuvieran trabajando). Los números que aparecen en las casillas indican a su vez el orden de los vuelos. En la última fila aparece el coste de asignar una tripulación dada a una secuencia de vuelos específica.

- Si el objetivo de la compañía consiste en minimizar el coste total de asignar las tres tripulaciones cubriendo la totalidad de vuelos, plantear el correspondiente modelo de programación lineal que permita reflejar la situación a la que se enfrenta dicha compañía aérea.

4.3.6 Un problema de secuenciación de tripulaciones aéreas

COMENTARIOS:

- Las secuencias factibles de vuelos son equivalentes a las alternativas de corte en un problema de corte de materias primas.
- Se trata entonces de determinar cuáles de las secuencias que se escogen de modo que todos los vuelos estén cubiertos.
- Adicionalmente, en este caso y a diferencia de lo que ocurría en el problema de corte de materias primas que se vio en modelización lineal, se desea limitar a 3 el número de secuencias utilizadas (o lo que es equivalente, el número de tripulaciones utilizadas para garantizar el cubrimiento de todos los vuelos).

4.3.6 Un problema de secuenciación de tripulaciones aéreas

- Variables decisión: Xi (0,1); i=1,..,13

  Xi = 1: La secuencia de vuelos i se asigna a la tripulación

  Xi = 0: en caso contrario

- Función Objetivo:

  Min X1 + 3X2 + 5X3 + 6X4 + 4X5 + 5X6 + 7X7 + 7X8

- Restricciones:
  - Todos los VUELOS deben quedar cubiertos:

    VLC-MAD: X1 + X3 + X6 ≥ 1

    VLC-MALL: X4 + X7 + X8 ≥ 1

    VLC-LAN: X2 + X5 ≥ 1

    … … …

    LAN-MAD: X5 +X8 ≥ 1
  - Se asignarán 3 tripulaciones: $\sum_{i=1}^{8} x_i$=3

4.4 Lenguajes de Modelización

FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA DE GRAN ESCALA:

Los modelos de programación matemática pueden ser de diferentes tamaños. Aunque algunos pueden incluir un pequeño conjunto de restricciones funcionales, en la práctica los modelos requieren cientos y hasta miles de restricciones. El número de variables decisión es incluso mayor que el de restricciones y ocasionalmente puede ser de cientos de miles. La formulación de modelos de tal dimensión resulta inabordable aun cuando los parámetros puedan tomarse desde hoja de cálculo. Es imprescindible utilizar un **lenguaje de modelización**.

4.4 Lenguajes de Modelización

- Los lenguajes de modelización son sistemas software específicamente diseñados para la formulación eficiente de modelos de programación matemática de gran tamaño. Se trata de lenguajes *"no procedurales"* sino lenguajes de especificación de modo que cuando introducimos un problema sólo podemos expresar lo que queremos, pero no cómo hacerlo, él se ocupa de cómo hacerlo. Con estos lenguajes expresamos nuestro problema de una forma sencilla, muy parecida a la escritura matemática habitual.
- Los modelos de gran tamaño aunque implican miles de restricciones funcionales, éstas son habitualmente de un número relativamente pequeño de tipos y las restricciones del mismo tipo siguen el mismo patrón. Por tanto utilizando largos bloques de datos desde hojas de cálculo o desde bases de datos, el lenguaje de modelización formulará todas las restricciones del mismo tipo trabajando simultáneamente con las variables de cada tipo.

4.4 Lenguajes de Modelización

Además de la formulación eficiente de modelos de gran tamaño, los lenguajes de modelización permiten agilizar otras tareas relacionadas con la modelización tales como:

- Acceso de datos
- Transformación de datos en parámetros del modelo
- Modificación del modelo cuando sea necesario
- Análisis de la solución
- Generar informes así como documentos sobre el contenido del modelo.

4.4 Lenguajes de Modelización

En las últimas décadas se han desarrollado varios lenguajes de modelización, entre los que se encuentran:

- AMPL
- MPL
- GAMS
- LINGO

4.4 Lenguajes de Modelización

- **LINGO** es un lenguaje de modelización diseñado particularmente para la formulación y resolución de una amplia variedad de problemas de optimización incluyendo programación lineal, programación entera y programación no lineal.
- **LINGO** tiene incorporada una librería con funciones matemáticas, estadísticas y financieras que nos permiten expresar fórmulas complejas de una manera clara y sencilla. Podemos representar nuestros datos dentro del programa en forma natural como una lista, pero LINGO también puede leer los datos desde ficheros externos o desde hojas de cálculo.

A continuación introduciremos los principios básicos del lenguaje de modelización LINGO. Utilizaremos para ello un ejemplo de planificación de la producción. En primer lugar formularemos el modelo algebraicamente según la sintaxis de LINGO y esta formulación nos servirá de apoyo para introducir los conceptos básicos de modelización con el lenguaje LINGO.

4.4 Lenguajes de Modelización

La empresa PRODUCTSA desea determinar la combinación de productos a fabricar semanalmente. Cada unidad de producto requiere una determinada cantidad de tiempo de producción en tres máquinas. Cada máquina tiene un número de horas de producción disponibles por semana y cada producto tiene su beneficio asociado.

En la siguiente tabla se recogen los datos anteriormente mencionados.

	TIEMPO DE PRODUCCIÓN POR UNIDAD (hrs)				Disponibilidad semanal (hrs)
	PRODUCTO				
MAQUINA	P1	P2	P3	P4	
Alisadora	1.7	2.1	1.4	2.4	28
Cortadora	1.1	2.5	1.7	2.6	34
Soldadora	1.6	1.3	1.6	0.8	21
Beneficio unitario	26	35	25	37	

El objetivo a considerar es determinar cuál es la cantidad a producir de cada producto de modo que se maximice el beneficio sin sobrepasar la capacidad de producción de cada máquina.

4.4 Lenguajes de Modelización

Algebráicamente el modelo anterior queda formulado de la siguiente forma:

Sea: xj = unidades fabricadas del producto Pj

cj = beneficio por unidad del producto Pj

*aij = tiempo de producción en la **máquina i** por unidad del **producto Pj***

*bi = tiempo de producción disponible por semana en la **máquina i***

La función objetivo a considerar será:

Maximize $$\sum_{j=1}^{4} c_j x_j$$

y las restricciones: $$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j \leq b_i$$ *for i=1, 2, 3;*

4.4 Lenguajes de Modelización

En general, un programa LINGO está formado por tres partes o secciones:

1. Sección **SETS**, que especifica los sets o conjuntos de objetos del modelo y sus atributos. Puede entenderse como la descripción de las estructuras de datos del problema.
2. Sección **DATA** que incluye tanto los datos a utilizar como la forma de obtenerlos.
3. Una sección que incluye el propio **modelo matemático**.

Opcionalmente, antes del modelo matemático, se puede incluir la sección **INIT**. Esta sección sirve para introducir valores aproximados de los atributos. Esto puede ayudar a LINGO en el cálculo de los valores que buscamos, ya que, en general LINGO sólo proporciona óptimos locales (programación no lineal).

4.4 Lenguajes de Modelización

Como ya se ha comentado, la potencia de los lenguajes de modelización se encuentra en que en un número reducido de líneas se pueden expresar una gran cantidad de restricciones. La clave de esta propiedad se encuentra en el concepto de **conjunto**.

Los **conjuntos** (***SETS***) son simplemente grupos de objetos relacionados. Un conjunto puede ser, por ejemplo, una lista de productos, tareas o almacenes.

Cada elemento del conjunto puede tener una o más características asociadas a él; las llamamos **atributos**. Estos atributos pueden ser datos o pueden ser variables. LINGO reconoce dos tipos de conjuntos:

- **Conjunto primitivo** es el que está compuesto por objetos que no pueden reducirse más. *Por ejemplo,* un conjunto de 5 almacenes o un conjunto de 200 alumnos.
- **Conjunto derivado** es el que se puede construir a partir de conjuntos primitivos. *Por ejemplo*, el conjunto formado por las rutas entre cinco fábricas y diez ciudades es un conjunto derivado de los conjuntos de *fábricas* y *ciudades* que son dos conjuntos primitivos. También pueden construirse conjuntos derivados usando otros conjuntos derivados.

4.4 Lenguajes de Modelización

La sección SETS se utiliza para definir conjuntos. Esta sección empieza con **SETS:** y acaba con **ENDSETS**. Entre estas dos palabras se definen los conjuntos que se van a utilizar.

Definimos un conjunto mediante su nombre, sus miembros y sus atributos. La sintaxis es:

SETS:
nombre: atributos;
ENDSETS

```
SETS:
 Maquina /alisadora, cortadora, soldadora/ : HrsDisponibles;
 Producto /P1, P2, P3, P4/ : Beneficio, UProducidas;
ENDSETS
```

Los miembros de un SET se pueden enumerar separados por comas (“,”), o utilizando rangos (por ejemplo 1..8). Los atributos (características que nos interesan de estos conjuntos), si los hubiera, también se separan mediante comas. La definición de un set acaba en “;”

4.4 Lenguajes de Modelización

Otra información clave en el ejemplo es el número de horas de producción que cada unidad de producto utiliza en cada una de las máquinas. Este número puede considerarse con un atributo para los miembros del SET de todas las combinaciones de máquina y producto. Dado que este *SET* se deriva de los dos sets anteriores, se hace referencia al mismo como un **SET *derivado***. Se definirá del siguiente modo:

MaPr(Maquina, Producto): HrsProdUtilizadas;

- Las variables asociadas a conjuntos, es decir, los atributos, deben declararse antes de ser usadas.
- Los conjuntos derivados deben declararse después de los correspondientes conjuntos primitivos.

4.4 Lenguajes de Modelización

Utilizando el lenguaje de especificación **LINGO**, el modelo resultante es el siguiente:

```
!Ejemplo de Planificación de la producción;

SETS:
        Maquina / alisadora, cortadora, soldadora /: HrsDisponibles;
        Producto / P1, P2, P3, P4/: Beneficio, UProducidas;
        MaPr(Maquina, Producto): HrsProdUtilizadas;
ENDSETS
```

4.4 Lenguajes de Modelización

En general, un programa LINGO está formado por tres partes o secciones:

1. Sección **SETS**, que especifica los sets o conjuntos de objetos del modelo y sus atributos. Puede entenderse como la descripción de las estructuras de datos del problema.
2. **Sección DATA que incluye tanto los datos a utilizar como la forma de obtenerlos.**
3. Una sección que incluye el propio **modelo matemático**.

4.4 Lenguajes de Modelización

La sección DATA nos sirve para introducir valores a miembros de los sets y a los atributos. Esta sección empieza con **DATA:** y acaba con **ENDDATA**. La sintaxis es:

```
DATA:
Set = lista de valores;
atributo = lista de valores ;
ENDDATA
```

```
DATA:
HrsDisponibles = 28 34 21;
Beneficio =26 35 25 37;
HrsProdUtilizadas=1.7 2.1 1.4 2.4 !alisadora;
                  1.1 2.5 1.7 2.6 !cortadora;
                  1.6 1.3 1.6 0.8; !soldadora;
ENDDATA
```

Los valores se separan por comas o por espacios en blanco. Es preferible separarlos por comas porque cuando no queramos introducir un valor podemos dejar un hueco en blanco entre comas. Si queremos no explicitar un dato hasta el momento de ejecutar el programa podemos poner el signo “?” en su lugar; en ese momento LINGO nos preguntará por el correspondiente valor.

4.4 Lenguajes de Modelización

Utilizando el lenguaje de especificación **LINGO**, el modelo resultante es el siguiente:

```
!Ejemplo de Planificación de la producción;

SETS:
        Maquina / alisadora, cortadora, soldadora /: HrsDisponibles;
        Producto / P1, P2, P3, P4/: Beneficio, UProducidas;
        MaPr(Maquina, Producto): HrsProdUtilizadas;
ENDSETS
DATA:
        HrsDisponibles = 28 34 21;
        Beneficio =26 35 25 37;
        HrsProdUtilizadas=      1.7 2.1 1.4 2.4 !alisadora;
                                2.5 1.7 2.6 !cortadora;
                                1.3 1.6 0.8; !soldadora;
ENDDATA
```

4.4 Lenguajes de Modelización

En general, un programa LINGO está formado por tres partes o secciones:

1. Sección **SETS**, que especifica los sets o conjuntos de objetos del modelo y sus atributos. Puede entenderse como la descripción de las estructuras de datos del problema.
2. Sección **DATA** que incluye tanto los datos a utilizar como la forma de obtenerlos.
3. **Una sección que incluye el propio modelo matemático.**

4.4 Lenguajes de Modelización

Para **especificar el modelo matemático** asociado al problema se utilizan **funciones** que permiten aplicar operaciones a los miembros de un set:

function(**set** | condition: **expresion**);

La parte "| condición" es optativa y sirve para restringir el "**set**".

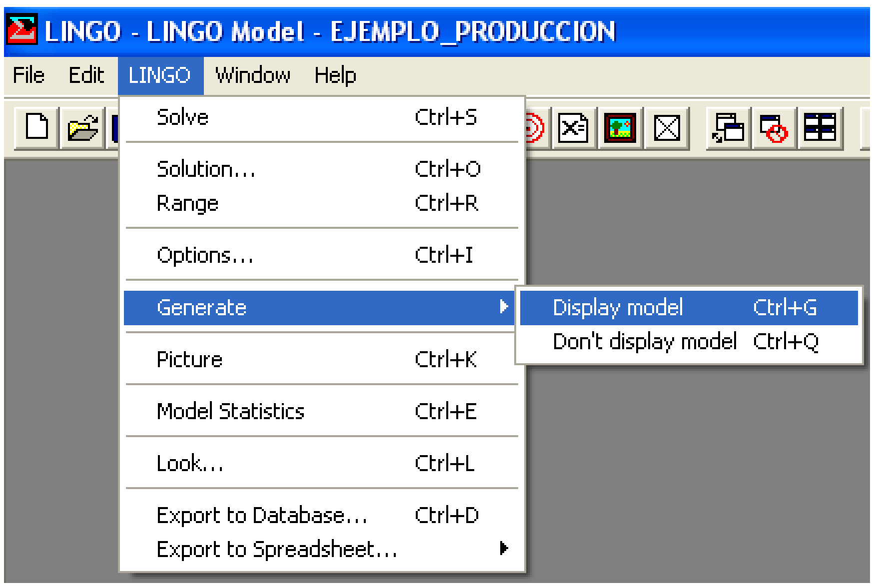
@SUM(set: expresion) Devuelve la suma de la expresión especificada sobre **set**.

@SUM (Producto(j): Beneficio(j)* UProducidas(j))

Esta función suma la expresión que aparece a continuación del símbolo "**:**" sobre todos los miembros del set que aparece antes de "**:**". Por tanto, esta función @SUM proporcionaría el valor correspondiente a la función objetivo.

4.4 Lenguajes de Modelización

@SUM (Producto(j): Beneficio(j)* UProducidas(j))



26 UPRODUCIDAS(P1) +
35 UPRODUCIDAS(P2) +
25 UPRODUCIDAS(P3) +
37 UPRODUCIDAS(P4)

4.4 Lenguajes de Modelización

@FOR(set : constraint) Genera restricciones independientes para cada elemento del conjunto **set.**

```
@FOR(Maquina(i):
[Capacidad]@SUM(Producto(j):HrsProdUtilizadas(i,j)*UProducidas(j))
                                        <= HrsDisponibles(i););
```

```
CAPACIDAD( ALISADORA)]  1.7 UPRODUCIDAS( P1) + 2.1 UPRODUCIDAS( P2)
    + 1.4 UPRODUCIDAS( P3) + 2.4 UPRODUCIDAS( P4) <=   28

CAPACIDAD( CORTADORA)]  1.1 UPRODUCIDAS( P1) + 2.5 UPRODUCIDAS( P2)
    + 1.7 UPRODUCIDAS( P3) + 2.6 UPRODUCIDAS( P4) <=   34

CAPACIDAD( SOLDADORA)]  1.6 UPRODUCIDAS( P1) + 1.3 UPRODUCIDAS( P2)
    + 1.6 UPRODUCIDAS( P3) + .8 UPRODUCIDAS( P4) <=   21
```

4.4 Lenguajes de Modelización

Utilizando el lenguaje de especificación **LINGO**, el modelo resultante es el siguiente:

```
!Ejemplo de Planificación de la producción;

SETS:
        Maquina / alisadora, cortadora, soldadora /: HrsDisponibles;
        Producto / P1, P2, P3, P4/: Beneficio, UProducidas;
        MaPr(Maquina, Producto): HrsProdUtilizadas;
ENDSETS
DATA:
        HrsDisponibles = 28 34 21;
        Beneficio =26 35 25 37;
        HrsProdUtilizadas=      1.7 2.1 1.4 2.4 !alisadora;
                                2.5 1.7 2.6 !cortadora;
                                1.3 1.6 0.8; !soldadora;
ENDDATA
```

4.4 Lenguajes de Modelización

Utilizando el lenguaje de especificación **LINGO**, el modelo resultante es el siguiente:

!Maximizar el beneficio total;

MAX=@SUM(Producto(j):Beneficio(j)*UProducidas(j));

!Para cada máquina, las horas utilizadas deben ser <= horas disponibles;

@FOR(Maquina(i):

[Capacidad]**@SUM(Producto(j):HrsProdUtilizadas(i,j)*UProducidas(j))**

<= HrsDisponibles(i););

4.4 Lenguajes de Modelización

LINGO - LINGO Model - EJEMPLO_PRODUCCION2

File Edit LINGO Window Help

LINGO Model - EJEMPLO_PRODUCCION2

```
!Ejemplo de Planificación de la producción;
!Definición de Sets primitivos;
SETS:
Maquina /alisadora, cortadora, soldadora/: HrsDisponibles;
Producto /P1, P2, P3, P4/: Beneficio, UProducidas;
!Definición de Sets Derivados;
MaPr(Maquina, Producto): HrsProdUtilizadas;
ENDSETS
DATA:
!Horas disponibles de cada máquina;
HrsDisponibles = 28 34 21;
!Beneficio unitario;
Beneficio =26 35 25 37;
!Horas de máquina necesarias por unidad de producto;
HrsProdUtilizadas= 1.7 2.1 1.4 2.4 !alisadora;
                   1.1  2.5 1.7 2.6 !cortadora;
                   1.6  1.3 1.6 0.8; !soldadora;
ENDDATA
!Maximizar el beneficio total;
MAX=@SUM(Producto(j):Beneficio(j)*UProducidas(j));
!Para cada máquina, las horas deben ser <= horas disponibles;
@FOR(Maquina(i):
[Capacidad]@SUM(Producto(j):HrsProdUtilizadas(i,j)*UProducidas(j))
                        <= HrsDisponibles(i);
     );
```

4.4 Lenguajes de Modelización

MAX 26 UPRODUCIDAS(P1) + 35 UPRODUCIDAS(P2) + 25 UPRODUCIDAS(P3) + 37 UPRODUCIDAS(P4)

SUBJECT TO

CAPACIDAD(ALISADORA)] 1.7 UPRODUCIDAS(P1) + 2.1 UPRODUCIDAS(P2)

+ 1.4 UPRODUCIDAS(P3) + 2.4 UPRODUCIDAS(P4) <= 28

CAPACIDAD(CORTADORA)] 1.1 UPRODUCIDAS(P1) + 2.5 UPRODUCIDAS(P2)

+ 1.7 UPRODUCIDAS(P3) + 2.6 UPRODUCIDAS(P4) <= 34

CAPACIDAD(SOLDADORA)] 1.6 UPRODUCIDAS(P1) + 1.3 UPRODUCIDAS(P2)

+ 1.6 UPRODUCIDAS(P3) + .8 UPRODUCIDAS(P4) <= 21

END

4.4 Lenguajes de Modelización

Solution Report - EJEMPLO_PRODUCCION2

```
 Global optimal solution found at step:              6
 Objective value:                             475.0000

                        Variable           Value        Reduced Cost
       HRSDISPONIBLES( ALISADORA)       28.00000           0.0000000
       HRSDISPONIBLES( CORTADORA)       34.00000           0.0000000
       HRSDISPONIBLES( SOLDADORA)       21.00000           0.0000000
                BENEFICIO( P1)          26.00000           0.0000000
                BENEFICIO( P2)          35.00000           0.0000000
                BENEFICIO( P3)          25.00000           0.0000000
                BENEFICIO( P4)          37.00000           0.0000000
              UPRODUCIDAS( P1)         0.0000000            3.577921
              UPRODUCIDAS( P2)          10.00000           0.0000000
              UPRODUCIDAS( P3)          5.000000           0.0000000
              UPRODUCIDAS( P4)         0.0000000            1.441558
    HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,       1.700000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,       2.100000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,       1.400000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,       2.400000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,       1.100000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,       2.500000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,       1.700000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,       2.600000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,       1.600000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,       1.300000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,       1.600000           0.0000000
    HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,      0.8000000           0.0000000

                             Row    Slack or Surplus      Dual Price
                               1        475.0000            1.000000
            CAPACIDAD( ALISADORA)      0.0000000            15.25974
            CAPACIDAD( CORTADORA)      0.5000000           0.0000000
            CAPACIDAD( SOLDADORA)      0.0000000            2.272727
```

OPERADORES LÓGICOS Y FUNCIONES MATEMÁTICAS EN LINGO:

#NOT# : Es un operador unitario, niega el valor lógico de su argumento.

#AND# : Devuelve el valor TRUE sólo si sus dos argumentos son TRUE, en otro caso devuelve el valor FALSE.

#OR# : Devuelve el valor FALSE sólo si sus dos argumentos son FALSE, en otro caso devuelve el valor TRUE.

#EQ# : Devuelve TRUE si sus dos operandos son iguales y FALSE en caso contrario.

#NE# : Devuelve TRUE si sus dos operandos no son iguales y FALSE si lo son.

#GT# : Devuelve TRUE si el operando izquierdo es mayor que el derecho, y FALSE en caso contrario.

#GE# : Devuelve TRUE si el operando izquierdo es mayor o igual que el derecho, y FALSE en caso contrario.

#LT# : Devuelve TRUE si el operando izquierdo es menor que el derecho, y FALSE en caso contrario.

#LE# : Devuelve TRUE si el operando izquierdo es menor o igual que el derecho, y FALSE en caso contrario

4.4 Lenguajes de Modelización

Otras funciones en LINGO:

@MAX (set: expresion);

Devuelve el valor máximo de **expresion** tomado sobre **set**.

@MIN (set: expresion);

Devuelve el valor mínimo de **expresion** tomado sobre **set**.

@ABS(X); Devuelve el valor absoluto de X.

@SMAX(lista); Devuelve el máximo de un conjunto de valores.

@SMIN(lista); Devuelve el mínimo de un conjunto de valores.

4.4 Lenguajes de Modelización

IMPORTACIÓN Y EXPORTACIÓN DE DATOS A HOJA DE CALCULO CON LINGO:

- El ejemplo que acabamos de ver es auto-contenido ya que todos los datos estaban incorporados en la formulación de LINGO. Sin embargo en la práctica es frecuente que los datos se encuentren almacenados en otra fuente (habitualmente Hoja de Cálculo) desde la cual necesitan incorporarse al modelo.
- Para responder a esta cuestión, LINGO dispone del comando **@OLE()**, para cargar o almacenar datos desde o a una hoja de cálculo.

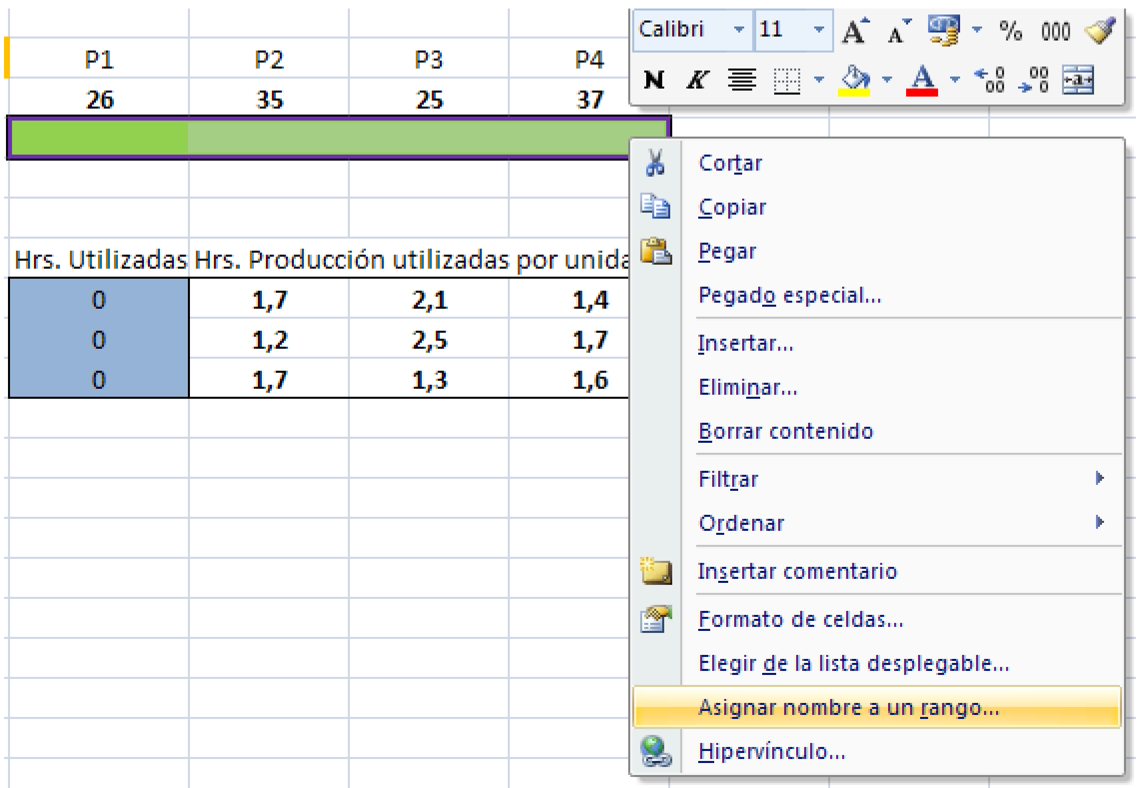
HrsProdUtilizadas fx 1,7

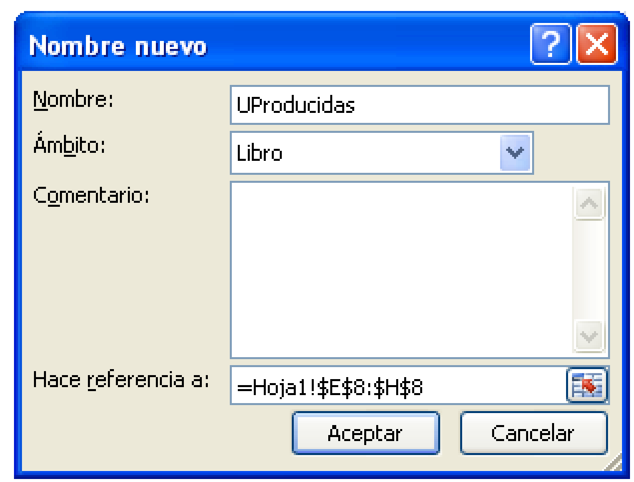
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**EJEMPLO PLANIFICACION DE LA PRODUCCION**									
4										
5										
6	BENEFICIO				P1	P2	P3	P4		
7		Beneficio/unidad:			**26**	**35**	**25**	**37**		
8		Unidades a Producir:								
9										
10										
11	MAQUINA		HrsDisponibles		Hrs. Utilizadas	Hrs. Producción utilizadas por unidad de producto				
12	ALISADORA		**28**	>=		**1,7**	**2,1**	**1,4**	**2,4**	
13	CORTADORA		**34**	>=		**1,2**	**2,5**	**1,7**	**2,6**	
14	SOLDADORA		**21**	>=		**1,7**	**1,3**	**1,6**	**0,8**	
15										

4.4 Lenguajes de Modelización

IMPORTACIÓN Y EXPORTACIÓN DE DATOS A HOJA DE CALCULO CON LINGO:

Un paso previo para poder utilizar de forma efectiva la función **@OLE()** es la asignación de los **nombres apropiados** a los rangos de datos correspondientes





4.4 Lenguajes de Modelización

IMPORTACIÓN Y EXPORTACIÓN DE DATOS A HOJA DE CALCULO CON LINGO:

Fichero disponible en la dirección **C :\Lingo\EjemploProduccion.xls**:

DATA:

!Se incorporan los datos al modelo… ;

Maquina=@OLE('**C:\Lingo\EjemploProduccion.xls** ');

HrsDisponibles=@OLE('**C:\Lingo\EjemploProduccion.xls** ');

Producto=@OLE('**C:\Lingo\EjemploProduccion.xls** ');

Beneficio=@OLE('**C:\Lingo\EjemploProduccion.xls** ');

HrsProdUtilizadas=@OLE('**C:\Lingo\EjemploProduccion.xls**');

!Se guarda la solución en EXCEL;

@OLE('**C:\Lingo\EjemploProduccion.xls**')=UProducidas;

ENDDATA

4.4 Lenguajes de Modelización

IMPORTACIÓN Y EXPORTACIÓN DE DATOS A HOJA DE CALCULO CON LINGO:

Por supuesto la solución tras resolver el modelo que toma los datos desde Excel es la misma que se obtuvo inicialmente:

Solution Report - EJEMPLO_PRODUCCION

```
    Transfer Method:          OLE BASED
    Workbook:                 C:\MisDocumentos\EjemploProduccion1.xlsx
    Ranges Specified:                  1
        UPRODUCIDAS
    Ranges Found:                      1
    Range Size Mismatches:             0
    Values Transferred:                4


                         Variable           Value        Reduced Cost
     HRSDISPONIBLES( ALISADORA)           28.00000           0.000000
     HRSDISPONIBLES( CORTADORA)           34.00000           0.000000
     HRSDISPONIBLES( SOLDADORA)           21.00000           0.000000
                  BENEFICIO( P1)          26.00000           0.000000
                  BENEFICIO( P2)          35.00000           0.000000
                  BENEFICIO( P3)          25.00000           0.000000
                  BENEFICIO( P4)          37.00000           0.000000
                UPRODUCIDAS( P1)          0.000000           3.805195
                UPRODUCIDAS( P2)          10.00000           0.000000
                UPRODUCIDAS( P3)          5.000000           0.000000
                UPRODUCIDAS( P4)          0.000000           1.441558
  HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,           1.700000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,           2.100000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,           1.400000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( ALISADORA,           2.400000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,           1.200000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,           2.500000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,           1.700000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( CORTADORA,           2.600000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,           1.700000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,           1.300000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,           1.600000           0.000000
  HRSPRODUTILIZADAS( SOLDADORA,          0.8000000           0.000000
```

4.4 Lenguajes de Modelización

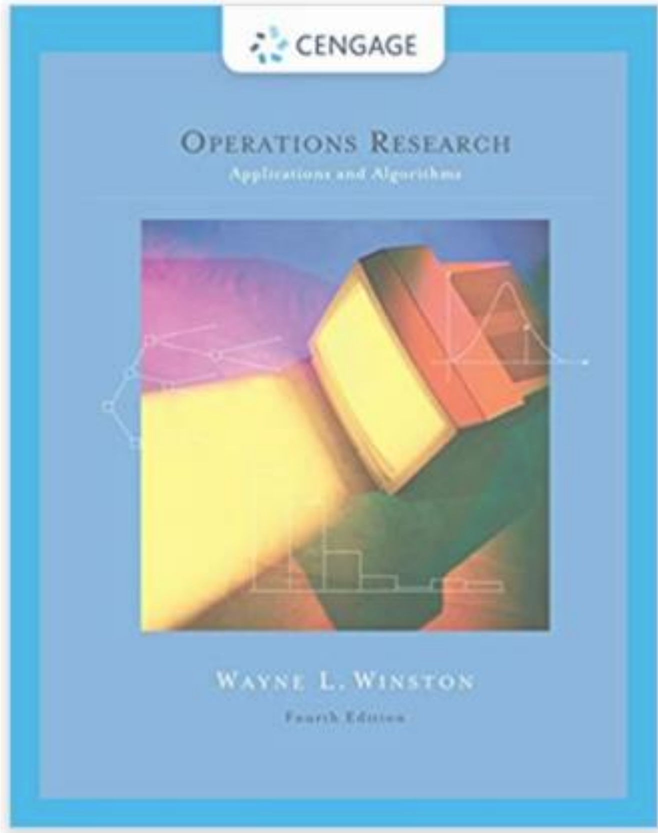
IMPORTACIÓN Y EXPORTACIÓN DE DATOS A HOJA DE CALCULO CON LINGO:

Que a su vez transfiere los valores óptimos de las variables a Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	**EJEMPLO PLANIFICACION DE LA PRODUCCION**								
4									
5									
6	BENEFICIO			475	P1	P2	P3	P4	
7		Beneficio/unidad:			**26**	**35**	**25**	**37**	
8		Unidades a Producir:			0	10	5	0	
9									
10									
11	MAQUINA		HrsDisponibles		Hrs. Utilizadas	Hrs. Producción utilizadas por unidad de producto			
12	ALISADORA		**28**	>=	28	**1,7**	**2,1**	**1,4**	**2,4**
13	CORTADORA		**34**	>=	33,5	**1,2**	**2,5**	**1,7**	**2,6**
14	SOLDADORA		**21**	>=	21	**1,7**	**1,3**	**1,6**	**0,8**
15									

Material complementario…

Winston, W., Operations Research: Applications and Algorithms, 4th edition



Chapter 9: Integer Programming

9.1 Introduction to Integer Programming

9.2 Formulating Integer Programming Problems

Material complementario…

Winston,W., Investigación de Operaciones: Aplicaciones y algoritmos, 4ª edición

Capítulo 9: Programación entera

9.1 Introducción a la programación entera

9.2 Planteamiento de problemas de programación entera