Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 9
Robert Fuster

Exercici 9.1. *Proveu que, si* A *i* B *són matrius quadrades del mateix ordre i* A *és simètrica llavors, la matriu* $\mathsf{B}^t\mathsf{A}\mathsf{B}+\mathsf{A}$ *també és simètrica.*

$$\left(\mathsf{B}^t\mathsf{A}\mathsf{B}+\mathsf{A}\right)^t=\left(\mathsf{B}^t\mathsf{A}\mathsf{B}\right)^t+\mathsf{A}^t=\mathsf{B}^t\mathsf{A}^t(\mathsf{B}^t)^t+\mathsf{A}^t=\mathsf{B}^t\mathsf{A}\mathsf{B}+\mathsf{A}$$

Exercici 9.2. *Si la matriu* A *i* B*, del mateix ordre, són respectivament, simètrica i antisimètrica, què podem dir de* $\mathsf{AB}+\mathsf{BA}$ *i de* $\mathsf{AB}-\mathsf{BA}$*?*

$\mathsf{AB}+\mathsf{BA}$ és antisimètrica i $\mathsf{AB}-\mathsf{BA}$ simètrica, perquè

$$(\mathsf{AB}+\mathsf{BA})^t=\mathsf{B}^t\mathsf{A}^t+\mathsf{A}^t\mathsf{B}^t=-\mathsf{BA}+\mathsf{A}(-\mathsf{B})=-\mathsf{AB}-\mathsf{BA}$$
$$(\mathsf{AB}-\mathsf{BA})^t=\mathsf{B}^t\mathsf{A}^t-\mathsf{A}^t\mathsf{B}^t=-\mathsf{BA}-\mathsf{A}(-\mathsf{B})=-\mathsf{AB}+\mathsf{BA}=-(\mathsf{AB}-\mathsf{BA})$$

Exercici 9.3. *(a) Proveu que la matriu* AA^t *és una matriu simètrica (per a qualsevol matriu* A*, no necessàriament quadrada).*

(b) Donada la matriu $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&4\end{bmatrix}$ *calculeu* AA^t *i* $\mathsf{A}^t\mathsf{A}$ *i comproveu que són matrius simètriques distintes.*

(c) Si A *és una matriu quadrada, és cert que* $\mathsf{AA}^t=\mathsf{A}^t\mathsf{A}$*?*

(a)

$$\left(\mathsf{AA}^t\right)^t=\left(\mathsf{A}^t\right)^t\mathsf{A}^t=\mathsf{AA}^t$$

(b)

$$\mathsf{AA}^t=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1\\1&26\end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}^t\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-1&12\\-1&5&-4\\12&-4&16\end{bmatrix}$$

Es veu clarament que totes dues són simètriques (d'altra banda, això és el que hem demostrat en l'apartat anterior).

I és clar que són diferents. Si A és una matriu $m\times n$, llavors AA^t és una matriu $m\times m$, mentre que A^t és $n\times n$, així que perquè coincidisquen és necessari (però no suficient!) que A siga una matriu quadrada, com veurem en l'apartat següent.

(c) No necessàriament. Per exemple, si $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ tenim $\mathsf{AA}^t=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$, però $\mathsf{A}^t\mathsf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$.

Exercici 9.4. *Proveu que, si* A *és una matriu quadrada, llavors la matriu* $\mathsf{A}+\mathsf{A}^t$ *és una matriu simètrica i que la matriu* $\mathsf{A}-\mathsf{A}^t$ *és una matriu antisimètrica.*

Proveu que, per a qualsevol matriu A,

$$\mathsf{A} = \frac{\mathsf{A}+\mathsf{A}^t}{2} + \frac{\mathsf{A}-\mathsf{A}^t}{2}$$

(en conseqüència, qualsevol matriu quadrada és la suma d'una matriu simètrica i una antisimètrica).

$\mathsf{A}+\mathsf{A}^t$ és una matriu simètrica:

$$\left(\mathsf{A}+\mathsf{A}^t\right)^t = \mathsf{A}^t + \left(\mathsf{A}^t\right)^t = \mathsf{A}^t + \mathsf{A} = \mathsf{A}+\mathsf{A}^t$$

$\mathsf{A}-\mathsf{A}^t$ és una matriu antisimètrica:

$$\left(\mathsf{A}-\mathsf{A}^t\right)^t = \mathsf{A}^t - \left(\mathsf{A}^t\right)^t = \mathsf{A}^t - \mathsf{A} = -(\mathsf{A}-\mathsf{A}^t)$$

Finalment,

$$\frac{\mathsf{A}+\mathsf{A}^t}{2} + \frac{\mathsf{A}-\mathsf{A}^t}{2} = \frac{\mathsf{A}+\mathsf{A}^t+\mathsf{A}-\mathsf{A}^t}{2} = \frac{\mathsf{A}+\mathsf{A}}{2} = \mathsf{A}$$

Exercici 9.5. *Proveu que les matrius següents són ortogonals:*

$$\mathsf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}^t\mathsf{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\mathsf{P}^t\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\mathsf{B}^t\mathsf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

Exercici 9.6. *Proveu que les matrius de la forma*

$$\mathsf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha+\pi/2) \\ \sin\alpha & \sin(\alpha+\pi/2) \end{bmatrix}$$

són ortogonals i interpreteu aquest fet geomètricament.

Tenint en compte que $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha$ i $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$, la matriu la podem escriure com

$$\mathsf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

així que

$$\mathsf{A}_\alpha^t\mathsf{A}_\alpha = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^t \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\\ -\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

i la matriu és ortogonal.

Interpretació geomètrica: El vector $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ és unitari i fa un angle α amb l'eix d'abscisses. Anàlogament, $(\cos(\alpha+\pi/2), \sin(\alpha+\pi/2)$ és unitari i fa un angle $\alpha+\pi/2$ amb l'eix d'abscisses. Per tant, entre ells fan un angle recte.

Exercici 9.7. *Resoleu el sistema*

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0\\ -x_1-x_2+x_3+x_4 &= -6\\ x_1-x_2-x_3+x_4 &= -2\\ -x_1+x_2-x_3+x_4 &= 0 \end{aligned}$$

aprofitant el fet que la matriu B *de l'exercici anterior és ortogonal.*

El sistema, en forma matricial, és aquest:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}0\\ -6\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$$

Com que la matriu del sistema és la matriu B de l'exercici anterior multiplicada per 2, dividim entre 2 i obtindrem el sistema equivalent

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\vec{x} = \begin{bmatrix}0\\ -3\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

és a dir,

$$\mathsf{B}\vec{x} = (0, -3, -1, 0)$$

i com que la matriu B és ortogonal, la solució serà

$$\vec{x} = \mathsf{B}^t\begin{bmatrix}0\\ -3\\ -1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -3\\ -1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\ 4\\ -2\\ -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\\ -2\end{bmatrix}$$

Exercici 9.8. *Proveu que el producte de dues matrius ortogonals també és una matriu ortogonal.*

Suposem que Q_1 i Q_2 són ortogonals. Això vol dir que són quadrades i $\mathsf{Q}_1^t\mathsf{Q}_1 = \mathsf{Q}_2^t\mathsf{Q}_2 = \mathrm{I}$. Llavors,

$$(\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2)^t\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2 = \mathsf{Q}_2^t\mathsf{Q}_1^t\mathsf{Q}_1\mathsf{Q}_2 = \mathsf{Q}_2^t\mathrm{I}\mathsf{Q}_2 = \mathrm{I}$$

Exercici 9.9. *Una matriu permutació és la matriu que resulta de reordenar arbitràriament les files de la matriu identitat. Per exemple, les matrius*

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

són matrius permutació.
(a) Quantes matrius permutació d'ordre n hi ha?
(b) Totes les matrius permutació són elementals?
(c) Proveu que les matrius permutació són ortogonals.

(a) Es tracta de decidir de quantes maneres es pot ordenar un conjunt de n elements (les files de la matriu I). Per tant, la solució és $P_n = n!$.

(b) No. Les matrius elementals del tipus permutació són matrius permutació, però no totes aquestes són elementals; la diferència és que les matrius $\mathsf{E}_{i,j}$ només es canvia l'ordre de dues files. En realitat, qualsevol matriu permutació és el producte de diverses matrius elementals del tipus permutació.

(c) És evident que les columnes de les matrius permutació són vectors unitaris i, a més, si en multipliquem dues de diferents el producte escalar serà nul, perquè en multiplicar cada entrada, els uns no es troben en la mateixa posició.

Exercici 9.10. *Proveu que si* Q *és una matriu ortogonal, llavors*
1. *La norma del vector* $\mathsf{Q}\vec{u}$ *coincideix amb al norma de* $\vec{u}$.
2. *L'angle entre els vectors* $\mathsf{Q}\vec{u}$ *i* $\mathsf{Q}\vec{v}$ *és el mateix que el que hi ha entre* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$.

1. $$\|Qu\|^2 = (Qu)^t(Qu) = u^tQ^tQu = u^tu = \|u\|^2 \to \|Qu\| = \|u\|$$

2. Si α i β són, respectivament, els angles que hi ha entre $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i entre $\mathsf{Q}\vec{u}$ i $\mathsf{Q}\vec{v}$, llavors

$$\cos\beta = \frac{(Qu)^t(Qv)}{\|Qu\|\|Qv\|} = \frac{u^tQ^tQv}{\|u\|\|v\|} = \frac{u^tv}{\|u\|\|v\|} = \cos\alpha$$