Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 6
Robert Fuster

Exercici 6.1. *Trobeu els espais nuls de les matrius següents*

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Es tracta de resoldre el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$. Aplicant l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

obtenim la forma esglaonada reduïda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

és a dir, $x_1 = 2x_3, x_2 = 0$, de manera que la solució és $x_1 = 2\alpha, x_2 = 0, x_3 = \alpha$ i

$$\operatorname{Nul}\mathsf{A} = \{\alpha(2,0,1) : \alpha \in \mathbb{K}\}$$

(b) La forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

és

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

així que $\operatorname{Nul}\mathsf{B} = \{\alpha(0,1,0) : \alpha \in \mathbb{K}\}$

(c) La forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

és

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

així que $\operatorname{Nul}\mathsf{C} = \{\alpha_1(-1,1,1,0) + \alpha_2(-1,0,0,1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$

(d) La forma esglaonada reduïda de la matriu D és

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(noteu que, com que el sistema lineal que hem de resoldre és homogeni, no és necessari incloure el vector de termes independents, que serà sempre zero —abans i després d'esglaonar).

Així que l'espai nul és Nul $\mathsf{D} = \{\alpha_1(0,1,0) + \alpha_2(0,0,1) : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$

(e) Nul $\mathsf{E} = \mathbb{K}^4$

(f) La forma esglaonada reduïda de la matriu F és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Així que l'espai nul és Nul $\mathsf{F} = \{\vec{0}\}$

Exercici 6.2. *(a) Resoleu el sistema homogeni*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Trobeu l'espai nul de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Trobeu el conjunt de tots els vectors que són ortogonals als dos vectors del conjunt

$$A = \{(3, 4, 1, 3), (0, 1, \text{-}2, 0)\}$$

(a) La forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

així que la solució general d'aquest sistema lineal és $\vec{x} = \alpha_1(-3, 2, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 0, 1)$.

(b) En conseqüència, l'espai nul és el conjunt

$$\{\alpha_1(-3, 2, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 0, 1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

(c) El conjunt dels vectors ortogonals als elements de A és el mateix conjunt de l'apartat anterior.

Exercici 6.3. *Considerem la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *i el vector* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determineu l'espai nul de A.

(b) Comproveu que $\vec{x}_p = (1, 0, 0, 1)$ *és una solució particular del sistema lineal* $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Sense fer cap més càlcul, determineu la solució general del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

(a) L'espai nul és el conjunt de totes les solucions del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$. La matriu ampliada d'aquest sistema és

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

i la forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

així que l'espai nul de A és el conjunt

$$\{\alpha_1(-3, 2, 1, 0) + \alpha_2(-1, 0, 0, 1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

(b) Comprovem que $\mathsf{A}\vec{x}_p = \vec{b}$:

$$\mathsf{A}\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

(c) La solució general del sistema és la suma d'una solució particular qualsevol més l'espai nul de la matriu A:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \operatorname{Nul}\mathsf{A} = (1,0,0,1) + \alpha_1(-3,2,1,0) + \alpha_2(-1,0,0,1)$$

Exercici 6.4. ***(Una matriu inversa)***

(a) Resoleu l'equació

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Siguen $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ les dues columnes de la solució de l'apartat anterior. Proveu que el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

és compatible determinat i que la solució és $\vec{x} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2$.

(c) Resoleu els sistemes lineals següents:

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. La forma esglaonada reduïda de la matriu $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ és $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$, així que las solució és $\mathsf{X} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
2. Com que rang $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$ qualsevol sistema amb aquesta matriu de coeficients és compatible determinat. A més a més,
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2) = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\vec{x}_1 + b\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\vec{x}_2 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$
3. Les solucions són aquestes:
$$\text{(a)}\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \vec{x} = -2\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Exercici 6.5. *(Matrius estocàstiques i vectors estacionaris)*

Un vector $\vec{u}$ és estocàstic *si totes les seues coordenades són no negatives i sumen* 1*; per exemple, $\vec{u}_0 = (0{,}20, 0{,}45, 0{,}35)$ és estocàstic. Una matriu quadrada $n \times n$, A, és* estocàstica *si totes columnes són vectors estocàstics; per exemple, la matriu*

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}73 \end{bmatrix}$$

és estocàstica.
(a) Proveu que el vector producte d'una matriu estocàstica per un vector estocàstic també és estocàstic. Un vector $\vec{u}$ és estacionari *per a la matriu A si $\mathsf{A}\vec{u} = \vec{u}$. (b) Proveu que, si la matriu A és estocàstica, llavors hi ha vectors estacionaris distints del vector zero. (c) Trobeu tots els vectors estacionaris de la matriu M. (d) Trobeu un vector estacionari estocàstic de la matriu M.*

La matriu M d'aquest exercici és la matriu de transició de la cadena de Màrkov que vam introduir a la lliçó 1, i el vector que obtingueu al darrer apartat representa la distribució de la població a llarg termini en aquell problema.

(a) Si A i $\vec{u}$ són estocàstics i $\vec{v} = \mathsf{A}\vec{u}$, llavors és clar que les entrades de $\vec{v}$ són totes no negatives; a més a més, la suma de totes les entrades de $\vec{v}$ és $(1, 1, \ldots, 1)\vec{v}$, és a dir,

$$(1, 1, \ldots, 1)\vec{v} = (1, 1, \ldots, 1)\mathsf{A}\vec{u} = (1, 1, \ldots, 1)\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{bmatrix}\vec{u} = (1, 1, \ldots, 1)\vec{u} = 1$$

(b) Els vectors estacionaris són les solucions del sistema d'equacions $\mathsf{A}\vec{u} = \vec{u}$, que es pot escriure també com $(\mathsf{A} - \mathrm{I})\vec{u} = 0$; això vol dir que els vectors estacionaris són els elements de l'espai nul $\mathrm{Nul}(\mathsf{A} - \mathrm{I})$.

I, com que la matriu A és estocàstica, resulta que els elements de cada columna de la matriu $\mathsf{A} - \mathrm{I}$ sumen zero. Per tant, el rang de $\mathsf{A} - \mathrm{I}$ és menor que n, així que l'espai nul conté vectors distints de zero.

(c) Es tracta de trobar l'espai nul $\mathrm{Nul}(\mathsf{M} - \mathrm{I})$, és a dir, de resoldre el sistema la matriu ampliada del qual és

$$\begin{bmatrix} 0{,}85 - 1 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0 \\ 0{,}10 & 0{,}75 - 1 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}73 - 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0 \\ 0{,}10 & -0{,}25 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & -0{,}27 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda d'aquesta matriu és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2{,}33333\ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}53333\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

així que els vectors estacionaris són tots els de la forma $\alpha(2{,}33333\ldots, 1{,}53333\ldots, 1)$. Més precisament, els de la forma $\alpha(7/3, 23/15, 1)$

(d) Com que $7/3 + 23/15 + 1 = 73/15$, podem elegir $\alpha = 15/73$ per a obtenir un vector estocàstic,

$$\vec{u} = \frac{15}{73}\left(\frac{7}{3}, \frac{23}{15}, 1\right) \approx (0{,}4794521,\ 0{,}3150685,\ 0{,}2054795)$$