

Exercicis

Exercici 1

Considerant las cadenes següents sobre $\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned}x &= 00011 \\y &= 011000 \\z &= 01010\end{aligned}$$

obtenir el resultat de les operacions següents:

$$Pref(x), Suf(y), Seg(z), Pref(Pref(x)), Pref(Suf(z))$$

Solució:

$$\begin{aligned}Pref(x) &= \{\lambda, 0, 00, 000, 0001, 00011\} \\Suf(y) &= \{\lambda, 0, 00, 000, 1000, 11000, 011000\} \\Seg(z) &= \{\lambda, 0, 1, 01, 10, 010, 101, 0101, 1010, 01010\} \\Pref(Pref(x)) &= Pref(x) \\Pref(Suf(z)) &= Seg(z)\end{aligned}$$

Exercici 2

Considerant els llenguatges següents sobre $\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned}L_1 &= \{0, 01, 001\} \\L_2 &= \{\lambda, 01, 0011\} \\L_3 &= \{0x : x \in \{0, 1\}^*\} \\L_4 &= \{x0 : x \in \{0, 1\}^*\} \\L_5 &= \{x \in \{0, 1\}^* : |x|_0 = |x|_1\}\end{aligned}$$

- (a) Enumereu les primeres 10 cadenes en ordre canònic (lexicogràfic) de L_3

Solució:

$$\{0, 00, 01, 000, 001, 010, 011, 0000, 0001, 0010\}$$

- (b) Enumereu les primeres 10 cadenes en ordre canònic (lexicogràfic) de L_4

Solució:

$$\{0, 00, 10, 000, 010, 100, 110, 0000, 0010, 0100\}$$

- (c) Enumereu les primeres 10 cadenes en ordre canònic (lexicogràfic) de L_5

Solució:

$$\{\lambda, 01, 10, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 000111\}$$
Exercici 3

Considerant els llenguatges definits en l'Exercici ??, obteniu una descripció per als llenguatges resultat de les operacions següents:

- (a) $L_1 \cup L_2, L_1 \cup L_3, L_2 \cup L_3, L_3 \cup L_4$

Solució:

$$L_1 \cup L_2 = \{\lambda, 0, 01, 001, 0011\}$$

$$L_1 \cup L_3 = L_3$$

$$L_2 \cup L_3 = \{x \in \{0, 1\}^* : 1 \notin \text{Pref}(x)\} = L_3 \cup \{\lambda\}$$

$$L_3 \cup L_4 = \{x \in \{0, 1\}^* : 0 \in \text{Pref}(x) \cup \text{Suf}(x)\}$$

- (b) $L_1 \cap L_2, L_1 \cap L_3, L_1 \cap L_4, L_2 \cap L_4, L_3 \cap L_4$

Solució:

$$L_1 \cap L_2 = \{01\}$$

$$L_1 \cap L_3 = L_1$$

$$L_1 \cap L_4 = \{0\}$$

$$L_2 \cap L_4 = \emptyset$$

$$L_3 \cap L_4 = \{x \in \{0, 1\}^* : 0 \in \text{Pref}(x) \cap \text{Suf}(x)\} = \{0\} \cup \{0x0 : x \in \{0, 1\}^*\}$$

- (c) $\overline{L_3}, \overline{L_5}$

Solució:

$$\overline{L_3} = \{x \in \{0, 1\}^* : 0 \notin \text{Pref}(x)\} = \{\lambda\} \cup \{1x : x \in \{0, 1\}^*\}$$

$$\overline{L_5} = \{x \in \{0, 1\}^* : |x|_0 \neq |x|_1\}$$

- (d) $L_1 - L_2, L_2 - L_3, L_2 - L_4, L_3 - L_4$

Solució:

$$L_1 - L_2 = \{0, 001\}$$

$$L_2 - L_3 = \{\lambda\}$$

$$L_2 - L_4 = L_2$$

$$L_3 - L_4 = \{0x1 : x \in \{0, 1\}^*\}$$

(e) $L_1 \triangle L_2, L_1 \triangle L_3, L_3 \triangle L_4$

Solució:

$$L_1 \triangle L_2 = \{\lambda, 0, 001, 0011\}$$

$$L_1 \triangle L_3 = L_3 - L_1 = \{0x : x \in \{0, 1\}^*\} - \{0, 01, 001\}$$

$$L_3 \triangle L_4 = \{0x1, 1x0 : x \in \{0, 1\}^*\} = \{axb : x \in \{0, 1\}^* \wedge a, b \in \{0, 1\}, a \neq b\}$$

(f) $L_1 L_2, L_4 L_3, L_2 L_3, L_3 L_4, L_1^2, L_5^2, L_2^3, L_3^5$

Solució:

$$L_1 L_2 = \{0, 01, 001, 0101, 00011, 00101, 010011, 0010011\}$$

$$L_4 L_3 = \{x \in \{0, 1\}^* : 00 \in \text{Seg}(x)\}$$

$$L_2 L_3 = L_3$$

$$L_3 L_4 = \{0x0 : x \in \{0, 1\}^*\}$$

$$L_1^2 = \{00, 001, 010, 0001, 0010, 0101, 00101, 01001, 001001\}$$

$$L_5^2 = L_5$$

$$L_2^3 = \left\{ \begin{array}{l} \lambda, 01, 0011, 0101, 001101, 010011, 010101, 00110011, \\ 00110101, 01001101, 01010011, 0011001101, 0011010011, \\ 0100110011, 001100110011 \end{array} \right\}$$

$$L_3^5 = \{x \in \{0, 1\}^* : 0 \in \text{Pref}(x) \wedge |x|_0 \geq 5\}$$

(g) $L_1^*, L_4^*, L_1^+, L_3^+, L_5^*$

Solució:

$$L_1^* = \{x \in \{0, 1\}^* : 1 \notin \text{Pref}(x) \wedge 11 \notin \text{Seg}(x)\} \quad (*)$$

$$L_4^* = L_4 \cup \{\lambda\}$$

$$L_1^+ = \{x \in \{0, 1\}^* : 0 \in \text{Pref}(x) \wedge 11 \notin \text{Seg}(x)\} \quad (*)$$

$$L_3^+ = L_3$$

$$L_5^* = L_5$$

(h) L_2^R, L_3^R, L_5^R

Solució:

$$L_2^R = \{\lambda, 10, 1100\}$$

$$L_3^R = L_4$$

$$L_5^R = L_5$$

(i) $\text{Pref}(L_1), \text{Pref}(L_4), \text{Pref}(L_3), \text{Seg}(L_1), \text{Seg}(L_4), \text{Suf}(L_2)$

Solució:

$$Pref(L_1) = \{\lambda, 0, 00, 01, 001\}$$

$$Pref(L_4) = \{0, 1\}^*$$

$$Pref(L_3) = L_3 \cup \{\lambda\}$$

$$Seg(L_1) = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 001\}$$

$$Seg(L_4) = \{0, 1\}^*$$

$$Suf(L_2) = \{\lambda, 1, 01, 11, 011, 0011\}$$

$$(j) \ 0^{-1}L_1, 0^{-1}L_2, 0^{-1}L_3, 0^{-1}L_4, 1^{-1}L_1, 1^{-1}L_3, 1^{-1}L_4, (01)^{-1}L_1$$

Solució:

$$0^{-1}L_1 = \{\lambda, 1, 01\}$$

$$0^{-1}L_2 = \{1, 011\}$$

$$0^{-1}L_3 = \{0, 1\}^*$$

$$0^{-1}L_4 = L_4 \cup \{\lambda\} \quad (*)$$

$$1^{-1}L_1 = \emptyset$$

$$1^{-1}L_3 = \emptyset$$

$$1^{-1}L_4 = L_4 \quad (*)$$

$$(01)^{-1}L_1 = \{\lambda\}$$

$$(k) \ (01)^{-1}L_3, (01)^{-1}L_4$$

Els llenguatges L_3 i L_4 es poden expressar com:

$$L_3 = \{0\}\{0, 1\}^*$$

$$L_4 = \{0, 1\}^*\{0\}$$

Nota: Utilitzeu les propietats del quocient per la dreta

Solució:

$$\begin{aligned} (01)^{-1}L_3 &= 1^{-1}(0^{-1}L_3) = 1^{-1}(0^{-1}\{0\}\{0, 1\}^*) = 1^{-1}((0^{-1}\{0\})\{0, 1\}^*) = \\ &= 1^{-1}\{\lambda\}\{0, 1\}^* = 1^{-1}\{0, 1\}^* = (1^{-1}\{0, 1\})\{0, 1\}^* = \{\lambda\}\{0, 1\}^* \\ &= \{0, 1\}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (01)^{-1}L_4 &= 1^{-1}(0^{-1}L_4) = 1^{-1}(0^{-1}\{0, 1\}^*\{0\}) = 1^{-1}((0^{-1}\{0, 1\}^*)\{0\} \cup (0^{-1}\{0\})) = \\ &= 1^{-1}((0^{-1}\{0, 1\})\{0, 1\}^*\{0\} \cup \{\lambda\}) = 1^{-1}(\{\lambda\}\{0, 1\}^*\{0\} \cup \{\lambda\}) = \\ &= (1^{-1}\{0, 1\}^*\{0\}) \cup (1^{-1}\{\lambda\}) = (1^{-1}\{0, 1\})\{0, 1\}^*\{0\} \cup \emptyset = \\ &= \{\lambda\}\{0, 1\}^*\{0\} = L_4 \end{aligned}$$

Exercici 4

Considerant els llenguatges de l'Exercici ?? i els homomorfismes següents:

$$\begin{array}{lll}
h : \{0, 1\} \rightarrow \{a, b, c\}^* & g : \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1\}^* & f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}^* \\
\begin{cases} h(0) = a \\ h(1) = bc \end{cases} & \begin{cases} g(a) = 01 \\ g(b) = 10 \\ g(c) = \lambda \end{cases} & \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 011 \end{cases}
\end{array}$$

obteniu una descripció per als llenguatges resultat de les operacions següents

(a) $h(L_1), h(L_2), h(L_3), h(L_4)$

Solució:

$$\begin{aligned}
h(L_1) &= \{a, abc, aabc\} \\
h(L_2) &= \{\lambda, abc, aabcbc\} \\
h(L_3) &= \{ax : x \in \{a, bc\}^*\} \\
h(L_4) &= \{xa : x \in \{a, bc\}^*\}
\end{aligned}$$

(b) $g^{-1}(L_1), g^{-1}(L_2), g^{-1}(L_3), g^{-1}(L_4)$

Solució:

$$\begin{aligned}
g^{-1}(L_1) &= \{c^i a c^j, i, j \geq 0\} \\
g^{-1}(L_2) &= \{c^i a c^j, i, j \geq 0\} \cup \{c\}^* \\
g^{-1}(L_3) &= \{c^i a x : x \in \{a, b, c\}^*, i \geq 0\} \\
g^{-1}(L_4) &= \{x a c^i : x \in \{a, b, c\}^*, i \geq 0\}
\end{aligned}$$

(c) $f(L_1), f(L_2), f(L_3), f^{-1}(L_1), f^{-1}(L_2), f^{-1}(L_3), f^{-1}(L_4)$

Solució:

$$\begin{aligned}
f(L_1) &= \{0, 0011, 00011\} \\
f(L_2) &= \{\lambda, 0011, 00011011\} \\
f(L_3) &= \{0x : x \in \{0, 011\}^*\} \\
f^{-1}(L_1) &= \{0\} \\
f^{-1}(L_2) &= \{\lambda, 01\} \\
f^{-1}(L_3) &= \{0, 1\}^+ & (*) \\
f^{-1}(L_4) &= L_4 & (*)
\end{aligned}$$