Tema 5: Diagonalització

Valors i vectors propis

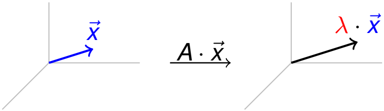
Donada una matriu quadrada A de grandària $n \times n$, la multiplicació a esquerra per la matriu A és una aplicació de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ què transforma cada vector $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ en el vector $A \cdot \vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ (dedicarem el pròxim tema a aquest tipus de tranformacions). Si el vector $A \cdot \vec{x}$ és un múltiple del vector original $\vec{x}$, llavors direm que $\vec{x}$ és un vector propi de A:

Definició

Siga A una matriu de grandària $n \times n$. Un vector no nul $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ es diu que és un vector propi de A associat al nombre real λ si es compleix que:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}.$$

En aquest cas, al nombre real λ l'anomenem valor propi de A.



Donada qualsevol matriu A, existeixen sempre vectors propis de A?, existeix una base de $\mathbb{R}^n$ formada per vectors d'aquest tipus?

Exemple 1

Comprova que el vector $(0, 1, 2)$ és un vector propi de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associat al valor propi $\lambda = 1$.

Solució:

Segons la definició de valor i vector propi, hem de comprovar que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{cert!}$$

Exemple 2

Considera la matriu

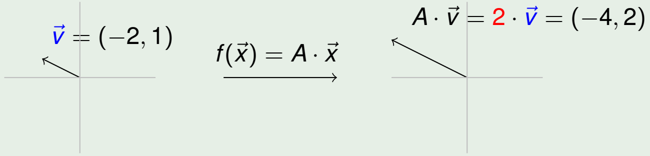
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Indica si els vectors $\vec{v} = (-2, 1)$ i $\vec{u} = (1, 1)$ són vectors propis de A.

<u>Solució</u>:
Si $\vec{v}$ és vector propi de A deu verificar-se que $A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$ per a un cert valor λ.
Calculem $A \cdot \vec{v}$:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{v}$$

Es pot observar que $A \cdot \vec{v}$ és igual a $2 \cdot \vec{v}$. Per tant, el vector $\vec{v}$ és un vector propi de A associat al valor propi 2. Gràficament el vector $\vec{v}$ es transforma, mitjançant l'aplicació $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, en un múltiple d'ell mateix: el vector $2 \cdot \vec{v}$.

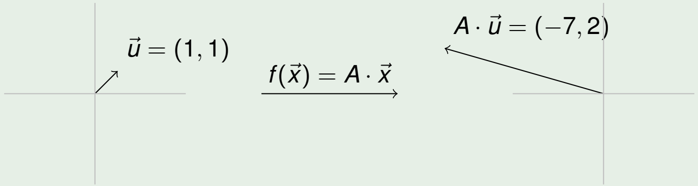


Exemple 2 (continuació)

Verifiquem ara si $\vec{u} = (1,1)$ és vector propi de A:

$$A \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Òbviament, el vector $A \cdot \vec{u} = (-7,2)$ no és múltiple del vector $\vec{u} = (1,1)$ pel que el vector $\vec{u}$ <u>no</u> és un vector propi associat a la matriu A.



Càlcul dels vectors propis d'una matriu

Si λ és un valor propi d'una matriu quadrada A de grandària $n \times n$ i $\vec{x}$ és un vector propi associat al valor propi λ llavors es compleix:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \iff A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

(on I és la matriu identitat de grandària $n \times n$)

Per tant, si λ és un valor propi, per a trobar els seus vectors propis associats haurem de resoldre el sistema lineal homogeni:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Les solucions no nul·les d'aquest sistema, si existeixen, seran tots els vectors propis associats al valor propi λ.

Definició

Siga λ un valor propi d'una matriu quadrada A de grandària $n \times n$. Es diu **subespai propi** de A associat a λ al subespai vectorial:

$$S_\lambda(A) = Nuc(A - \lambda \cdot I) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}\}.$$

Per tant, els vectors propis d'una matriu A associats al valor propi λ són els vectors <u>no nuls</u> de $S_\lambda(A)$.

Càlcul dels valors propis d'una matriu

Si un nombre real λ és un valor propi de A llavors el sistema $(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ha de tenir almenys una solució diferent de la nul·la, és a dir, ha de ser necessàriament compatible indeterminat ja que el sistema és homogeni. Per tant, la matriu de coeficients d'aqueix sistema (que és quadrada) no pot ser invertible, és a dir, ha de complir-se que

$$|A - \lambda \cdot I| = 0.$$

Definició

Es diu **polinomi característic** d'una matriu quadrada A al polinomi

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Els valors propis d'una matriu A son les arrels reals del polinomi característic de A, és a dir les solucions reals de l'equació:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = 0.$$

Multiplicitat algebraica

Definició

Es diu **multiplicitat algebraica** d'una arrel d'un polinomi al nombre de vegades que apareix aquest nombre com a arrel del polinomi.
En particular, la **multiplicitat algebraica d'un valor propi** λ serà la seua multiplicitat com a arrel del polinomi característic.

Exemple 3

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. El seu polinomi característic és:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2$$

Per tant A té un únic valor propi, $\lambda = 3$, amb multiplicitat algebraica 2.

Valors i vectors propis

Nota: Existeixen matrius que no tenen cap valor propi.

Exemple 4

Si considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, el seu polinomi característic és:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Aquest polinomi no té arrels reals, per la qual cosa la matriu A no té valors propis.

RESUM: Càlcul de valors i vectors propis

Valors propis

λ és un valor propi de A $\iff$ $p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = 0$

La **multiplicitat algebraica** de λ serà la seua multiplicitat com a arrel del polinomi característic.

Vectors propis

$\vec{v}$ és un vector propi de A associat al valor propi λ $\iff$

- $\vec{v} \neq \vec{0}$ i
- $\underbrace{\vec{v} \in S_\lambda(A) = Nuc(A - \lambda \cdot I)}_{\vec{v} \text{ és solució de } (A-\lambda \cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}}$

Quan estiga clar la matriu amb la qual estem treballant, escriurem simplement S_λ en comptes de $S_\lambda(A)$. A la dimensió d'aquest subespai l'anomenem **multiplicitat geomètrica** de λ.

Exemple 5

Calcula els valors i vectors propis de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució:

Primer calculem el polinomi característic de la matriu A per a trobar els valors propis de A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)\cdot(1-\lambda) = -(1-\lambda)^2 \cdot (1+\lambda).$$

Per tant, els valors propis de la matriu A són:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda = 1 \quad \text{(amb multiplicitat algebraica 2)} \\ \lambda = -1 \quad \text{(amb multiplicitat algebraica 1)} \end{array}}$$

Exemple 5 (continuació)

Calcularem a continuació els vectors propis de A. Recordem que els vectors propis de A associats a cada valor propi λ són els vectors no nuls de $S_\lambda(A) = Nuc(A - \lambda \cdot I)$, és a dir, les solucions no nul·les del sistema homogeni $(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

- Així, per a $\boxed{\lambda = 1}$ resoldrem el sistema $(A - 1 \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$:

$$(A - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 3x - 2y + z = 0 \\ -2x = 0 \end{array} \right.$$

Les seues solucions són de la forma $(x, y, z) = \alpha(0, \frac{1}{2}, 1)$. Per tant, el subespai propi de A associat a $\lambda = 1$ és:

$$\boxed{S_1(A) = Nuc(A - I) = \left\langle \left(0, \tfrac{1}{2}, 1\right) \right\rangle = \langle (0, 1, 2) \rangle}$$

i els vectors propis de A associats al valor propi $\lambda = 1$ seran tots els vectors d'aquest subespai (excepte el nul).

Exemple 5 (continuació)

- Per a trobar els vectors propis de A associats a l'altre valor propi $\boxed{\lambda = -1}$ haurem de resoldre el sistema $(A - (-1)\cdot I)\cdot \vec{x} = \vec{0}$:

$$(A+I)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x &= 0 \\ 3x + z &= 0 \\ -2x + 2z &= 0 \end{aligned} \right.$$

En resoldre-ho obtenim $(x, y, z) = \alpha(0, 1, 0)$. Per tant el subespai propi de A associat al valor propi $\lambda = -1$ és:

$$\boxed{S_{-1}(A) = Nuc(A + I) = \langle (0, 1, 0) \rangle}$$

i els vectors propis de A associats al valor propi $\lambda = -1$ seran tots els vectors d'aquest subespai (excepte el nul).

Atenció!! Les operacions elementals no conserven valors i vectors propis. És a dir, no es poden fer operacions elementals abans de calcular valors i vectors propis! Per exemple:

- Les matrius
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
són equivalents (per files), però A no té valors propis, mentre que B té com a valor propi -1 (doble).

- Les matrius equivalents (per files):
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
tenen els mateixos valors propis, però vectors propis diferents: tots els vectors no nuls de $\mathbb{R}^2$ són vectors propis de A, mentre que només els vectors de $\langle (1,0) \rangle$ són vectors propis de B.

- Les matrius
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
són equivalents, però A té els valors propis 1 i 2, mentre que B té com a valor propi només el 1 (amb multiplicitat algebraica 2).

Propietats

Siga A una matriu quadrada, llavors:

1. Un vector propi de A està associat a un únic valor propi. En particular, si λ i α són dos valors propis diferents de A llavors $S_\lambda(A) \cap S_\alpha(A) = \{\vec{0}\}$.
2. Vectors propis associats a valors propis diferents són linealment independents.
3. Si λ és un valor propi de A amb multiplicitat algebraica m llavors

$$1 \leq \underbrace{dim(S_\lambda(A))}_{\text{mult. geométrica de } \lambda} \leq m.$$

4. A i A^T tenen els mateixos valors propis (encara que, en general, no tenen els mateixos vectors propis).
5. Si A és una matriu triangular (superior o inferior) llavors els seus valors propis són els elements de la diagonal principal.
6. Si λ és un valor propi de A llavors λ^k és un valor propi de A^k, per a qualsevol nombre natural k.

1. Valors i vectors propis
2. **Diagonalització**
3. Aplicacions

Matrius semblants

Definició

Sean A i B dues matrius quadrades de grandària $n \times n$. Es diu que A i B són **semblants** si existeix una matriu invertible P tal que

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1} \qquad \text{(o equivalentment } A \cdot P = P \cdot B\text{)}$$

La semblança entre dues matrius fa que aquestes siguen bastant "semblants" (realment, veurem en el pròxim tema, que les matrius associades a una transformació lineal respecte a bases diferents són semblants).

Propietats

Sean A i B dues matrius semblants. Llavors:

1. $|A| = |B|$.
2. $rang(A) = rang(B)$.
3. A i B tenen el mateix polinomi característic i, per tant, els mateixos valors propis amb les mateixes multiplicitats.
4. $\vec{v}$ és un vector propi de A associat al valor propi λ si i només si $P^{-1}\vec{v}$ és un vector propi de B associat al valor propi λ.

Diagonalització

En aquest apartat estudiarem condicions perquè una matriu A siga semblant a una matriu diagonal D, que és el que cridarem *diagonalització*.

Definició

Una matriu quadrada A de grandària $n \times n$ es diu que és **diagonalitzable** si és semblant a una matriu diagonal, és a dir, si existeix una matriu invertible P de grandària $n \times n$ tal que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad \text{amb } D \text{ una matriu diagonal.}$$

Primer criteri de diagonalització

Una matriu quadrada A de grandària $n \times n$ és diagonalitzable si i només si existeix una base de $\mathbb{R}^n$ formada per vectors propis de A.

A més, si A és diagonalitzable i $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r$ són bases dels subespais propis de A, llavors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ és una base de $\mathbb{R}^n$ formada per vectors propis de A.

Diagonalització

Segon criteri de diagonalització

Una matriu quadrada A de grandària $n \times n$ és diagonalitzable si i només si es compleixen les següents condicions:

1. el polinomi característic de A té totes les seues arrels reals, i
2. per a cada valor propi λ de la matriu A, la multiplicitat algebraica de λ coincideix amb la seua multiplicitat geomètrica, és a dir, amb la dimensió del subespai propi $S_\lambda(A) = Nuc(A - \lambda \cdot I)$.

Exemple

La matriu A de l'Exemple 5 no és diagonalitzable lloc que, la multiplicitat algebraica del valor propi $\lambda = 1$ és 2 però la dimensió del subespai propi $S_1(A)$ és 1.

Diagonalització

Notes

Siga A una matriu quadrada de grandària $n \times n$.

- Si λ és un valor propi de multiplicitat algebraica 1 (valor propi *simple*), llavors $dim(S_\lambda(A)) = 1$ (per la Propietat 3 de valors propis). Per tant la propietat 2 del segon criteri de diagonalització només és necessari comprovar-la per als valors propis que no són simples.
- Si A té n valors propis diferents llavors A és diagonalitzable.
- En general, $\boxed{dim(S_\lambda(A)) = dim(Nuc(A-\lambda I) = n - rang(A-\lambda I)}$

  Per tant, per a conèixer la dimensió de $S_\lambda(A)$ bastarà amb calcular $n - rang(A - \lambda I)$ sense necessitat de resoldre completament el sistema $(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Procés de diagonalització de matrius

Tenint en compte el segon criteri de diagonalització i les propietats vistes anteriorment, el procés que hem de seguir per a saber si una matriu quadrada A d'ordre n és diagonalitzable és el següent:

1. Determinem les arrels del polinomi característic de A (i les seues multiplicitats algebraiques).
2. Si alguna arrel del polinomi característic no és real, llavors A no és diagonalitzable. Si totes són reals (seran els valors propis de A), passem a calcular les seues multiplicitats geomètriques.
3. Si tots els valors propis són diferents (arrels simples), llavors A és diagonalitzable.
4. Si existeixen valors propis λ amb multiplicitat algebraica major que 1, llavors per a cadascun d'ells calculem la seua multiplicitat geomètrica, és a dir, $dim(S_\lambda(A)) = dim(Nuc(A - \lambda I)) = n - rang(A - \lambda I)$ i veiem si coincideix amb la multiplicitat algebraica de λ.
5. Si per a algun valor propi la multiplicitat algebraica i la multiplicitat geomètrica no coincideixen, llavors la matriu no és diagonalitzable. En cas contrari A és diagonalitzable.

Càlcul de P i D per a una matriu diagonalitzable

Si A és una matriu diagonalitzable llavors $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, on

- D és una matriu diagonal la diagonal principal de la qual està formada pels valors propis de A (que apareixeran repetits tantes vegades com la seua multiplicitat algebraica),
- P és una matriu les columnes de la qual són els vectors propis de les bases dels subespais propis de A (ordenats d'acord amb l'ordenació dels valors propis en D).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\vec{v}_1} & \cdots & \boxed{\vec{v}_n} \end{pmatrix}}_{P}$$

IMPORTANT: L'ordre de les columnes de P depèn de l'ordre de col·locació dels valors propis en D, és a dir, si el primer valor propi que col·loquem en la matriu D és λ_1, la primera columna de la matriu P haurà de ser un vector propi associat al valor propi λ_1 i així successivament.

Exemple 6

Comprova que la següent matriu és diagonalitzable i calcula dues matrius P i D que satisfacen la igualtat $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Solució</u>:
Primer calculem el polinomi característic de la matriu A per a trobar els valors propis de A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \cdot ((1-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 2) = (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda) = -\lambda \cdot (\lambda - 3)^2.$$

Per tant, els valors propis de la matriu A són:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda = 0 & \text{(amb multiplicitat algebraica 1)} \\ \lambda = 3 & \text{(amb multiplicitat algebraica 2)} \end{array}}$$

Exemple 6 (continuació)

A continuació, trobarem els vectors propis associats a aquestos dos valors propis.

- Per a trobar els vectors propis de A associats al valor propi $\boxed{\lambda = 0}$ hem de calcular $S_0(A) = Nuc(A - 0 \cdot I) = Nuc(A)$. Després hem de resoldre el sistema homogeni:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Les solucions d'aquest sistema són de la forma $(x, y, z) = \alpha \cdot (-1, 0, 1)$. Per tant $\boxed{S_0(A) = \langle(-1, 0, 1)\rangle}$ i, per tant, $dim(S_0(A)) = 1$.

- Ara calculem el subespai propi associat al valor propi $\boxed{\lambda = 3}$, és a dir, $S_3(A) = Nuc(A - 3 \cdot I)$. Després hem de resoldre el sistema:

$$(A - 3 \cdot I) \cdot \vec{x} = 0$$

Exemple 6 (continuació)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Òbviament el rang d'aquesta matriu és 1, amb la qual cosa ja sabem que

$$dim(S_3(A)) = 3 - rang(A - 3I) = 3 - 1 = 2.$$

Si a més resolem el sistema, obtenim que les solucions són de la forma

$$(x, y, z) = \alpha \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right) + \beta \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right).$$

Per tant, $\boxed{\begin{array}{c} S_3(A) = \langle (\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1) \rangle = \\ \langle (1, 2, 0), (1, 0, 2) \rangle \end{array}}$

Com totes les arrels del polinomi característic de A son reals i les multiplicitats algebraiques dels seus valors propis coincideixen amb les dimensions dels subespais propis associats concloem que A és diagonalitzable (pel segon criteri de diagonalització).

Exemple 6 (continuació)

Com A és diagonalitzable, sabem que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \text{ on}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(una matriu diagonal formada pels valors propis de la matriu A)

$$\text{i} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(una matriu que té per primera columna el vector de la base de $S_0(A)$ i per segona i tercera columnes els dos vectors de la base de $S_3(A)$).

A més, com la matriu A és diagonalitzable, sabem que aquestos tres vectors formen una base de $\mathbb{R}^3$ (Per tant P té rang màxim i per tant és una matriu invertible).

Càlcul de les potències d'una matriu diagonalitzable

Calcular manualment una potència d'una matriu quadrada pot ser molt tediós ja que implica realitzar nombroses operacions. No obstant açò, en el cas de les matrius diagonalitzables aquest càlcul és relativament senzill:

Suposem que la matriu A és diagonalitzable, és a dir, existeix una matriu diagonal D i una matriu invertible P tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ i siga k un nombre natural . Llavors:

$$A^k = (P \cdot D \cdot P^{-1})^k = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot \ldots \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$

$$= P \cdot D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I} \cdot D \cdot P^{-1} \cdot \ldots \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^k \cdot P^{-1}.$$

Per tant, hem de $\boxed{A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}}$

Aquest últim càlcul és bastant senzill ja que si D és la matriu diagonal donada per

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ aleshores } D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Exemple

Calcula A^7 on A és la matriu de l'exemple 6.

<u>Solució</u>:
Hem comprovat abans que la matriu A de l'exemple 6 és diagonalitzable, per tant, sabem que $A^7 = P \cdot D^7 \cdot P^{-1}$. Hem de calcular P^{-1} (per exemple escalonant la matriu $(P \mid I)$ fins a arribar a la matriu $(I \mid P^{-1})$):

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$A^7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0^7 & 0 & 0 \\ 0 & 3^7 & 0 \\ 0 & 0 & 3^7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2187 & 0 \\ 0 & 0 & 2187 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2187 & 2187 \\ 0 & 4374 & 0 \\ 0 & 0 & 4374 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 729 & 729 & 729 \\ 0 & 2187 & 0 \\ 1458 & -729 & 1458 \end{pmatrix}$$