TEMA 5. PROGRAMACIÓN ENTERA (ALGORITMO DE BIFURCACIÓN Y ACOTACIÓN -B&B)

5.1 Explicar la principal ventaja e inconveniente de recorrer el árbol de soluciones según el criterio:

a) Nodo de creación más reciente (en profundidad)

b) Nodo con mejor valor de la función objetivo (en anchura)

5.2 Al aplicar el método «branch-and-bound» (en el que cada nodo se ramifica en dos subproblemas que tienen una restricción ≤ o ≥ más que el subproblema del que parten) para resolver un problema de optimización entera (pura) con variables x_1 y x_2 y función objetivo $z = 4x_1 - x_2$, se obtiene el árbol 1 (figura 1).

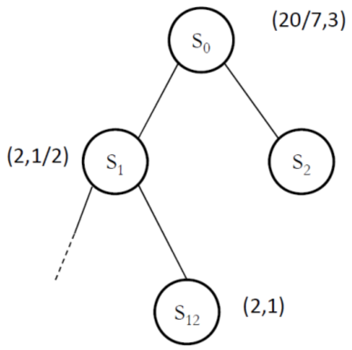


Figura 1. Árbol 1 del método B&B.

Al lado de los nodos S_0, S_1 y S_{12} se muestran las soluciones obtenidas al resolver la relajación lineal de los subproblemas correspondientes (S_2 no se ha resuelto aún). Por ejemplo, al resolver la relajación lineal para el subproblema S_1 se obtiene la solución $(x_1 = 2, x_2 = 1/2)$.

a)

a.1) La información proporcionada en el árbol 1 y la función objetivo dada permiten calcular la cota inferior de la función objetivo de la solución óptima entera. Para cada nodo de los que aparecen resueltos en el árbol de la figura 1, indica si se actualiza la cota inicial de $z^* = -\infty$ y cómo. [0,5 puntos]

a.2) El árbol 1 muestra una solución entera factible. ¿Se puede asegurar que sea óptima con la información dada hasta ahora? ¿Por qué? [0,5 puntos] a.3) Al seguir con la ramificación del subproblema S_1 se obtiene el árbol 2, mostrado en la figura 2 (véase la página siguiente), donde se indican las soluciones de las relajaciones lineales correspondientes a los subproblemas que se ven en el árbol. Actualiza la cota inferior de la solución óptima entera. ¿Puedes identificar ya una solución óptima para el problema, o habría que continuar explorando el árbol? ¿Por qué? [0,5 puntos]

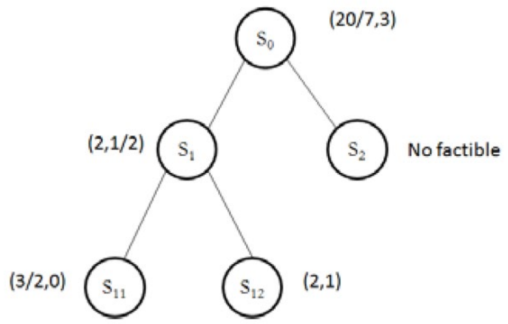


Figura 2. Árbol 2 del método B&B.

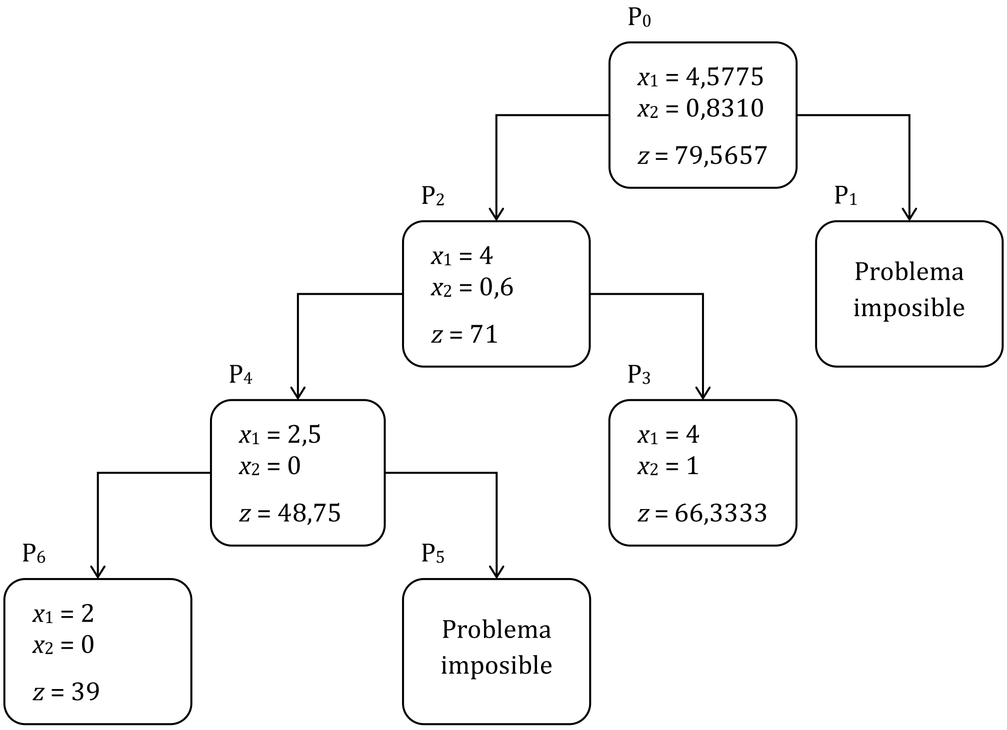
b)

Considera el árbol de la figura 2 y supongamos ahora que el orden de generación de los nodos ha sido el que se indica en su numeración (es decir: S_0, S_1, S_2, S_{11} y S_{12}). ¿Qué criterio se ha usado para generar el árbol de soluciones de la figura 2: «mejor cota», o «cota más reciente»? ¿Cómo habría cambiado el árbol (el orden de los nodos) en caso de haber aplicado el otro criterio? [0,5 puntos]

c)

En un problema de programación lineal entera resuelto mediante el algoritmo de bifurcación y acotación («branch-and-bound»), explica brevemente en qué casos un nodo del árbol no se ramifica (y, por lo tanto, no da lugar a dos nuevos nodos con sus correspondientes problemas). [0,5 puntos]

5.3 Se ha aplicado el algoritmo Branch-and-Bound para resolver un problema lineal de maximización con dos variables enteras. El árbol resultante es el siguiente (los nodos están numerados según el orden en que han sido resueltos):



a) Completa la información del árbol: indica qué cota o restricción representa cada rama, así como el valor que va tomando en cada nodo la cota inferior de la solución óptima entera.

b) De acuerdo con el algoritmo Branch-and-Bound, explica si hay en este árbol ramas que no deberían haberse generado y si, por otro lado, falta bifurcar algún nodo. Justifica adecuadamente tu respuesta.

c) Si el árbol está completo, explica cuál es la solución o soluciones óptimas del problema. Si no lo está, indica cuál es la mejor solución entera encontrada.

d) ¿Se corresponde el orden de generación de los nodos con alguna de las técnicas expuestas en la asignatura? Justifica tu respuesta.

e) Dibuja o explica cómo sería el árbol resultante de aplicar el algoritmo Branch-and-Bound en el caso de que al problema se le añadieran las restricciones $2 \leq x_1 \leq 4$ y $2x_2 \leq x_1$. Supón que se mantiene el criterio para recorrer el árbol visto en el apartado (d).

5.4 Dado el siguiente programa lineal:

MIN 2X1 + 3X2
s.a: [R1] X1 + X2 ≥ 3
[R2] X1 + 3X2 ≥ 6
X1, X2 ≥ 0 y enteras

Cuya solución óptima continua se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X1	3/2	-1/2	3/2
X2	-1/2	1/2	3/2
$c_B^t B^{-1}$	3/2	1/2	Z=15/2

Obtener la **solución óptima entera** aplicando el algoritmo de Bifurcación y Acotación. <u>Generar el árbol de soluciones mediante la técnica de la mejor cota y comienza acotando inferiormente (≥) la variable X1</u>.

5.5 Dado el siguiente programa lineal:

MAX Z= 4X1 + 4X2 + X3
s.a: 2X1 + X2 + X3 ≤ 4
X1 - X2 + 2X3 ≥ 4
X1, X2, ≥ 0 y enteras;
X3 ≥ 0

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
X2	2/3	-1/3	4/3
X3	1/3	1/3	8/3
$c_B^t B^{-1}$	3	-1	Z = 8

- Calcular la solución óptima entera aplicando el algoritmo de **Bifurcación y Acotación.** Recorrer el árbol de soluciones **en anchura** (técnica de la mejor cota). <u>En cada nodo empezar acotando inferiormente (≥) las variables</u>.

- Dibujar el árbol de soluciones e indicar en cada nodo el valor de las variables decisión y de la función objetivo en la solución correspondiente.

Soluciones Problemas Tema 5.

5.1

Técnica del nodo de creación más reciente:

- **Ventaja:** Requiere poca memoria.
- **Desventaja:** Es lento ya que la construcción del árbol de soluciones no va guiada por el valor de la función objetivo.

Técnica de la mejor cota:

- **Ventaja:** Es rápido ya que la construcción del árbol de soluciones va guiada por el valor de la función objetivo.
- **Desventaja:** Requiere mucha memoria

5.2

a)

a.1 S0: Solución no entera. NO acota Z.

S1: Solución no entera. NO acota Z.

S12: Solución entera. Se actualiza cota inferior. $Z12 = 4\times 2 - 1 =$ **7 → Z=7**

a.2 No se puede asegurar que sea la solución óptima porque, por ejemplo, el nodo no resuelto correspondiente a la ramificación de S0, es decir, S2 puede ofrecer soluciones enteras mejores que la del nodo S12.

a.3 Los nuevos nodos NO aportan nuevas cotas:

S2: Solución no factible. NO acota Z.

S11: Solución no entera con función objetivo $Z11 = 4 \times (3/2)\ 3 - 0 = 6$. NO acota Z.

La solución óptima es la correspondiente a S12, ya que el nodo S2 no se puede ramificar, ya que corresponde a un problema sin solución factible, y el nodo S11 corresponde a un problema con peor valor de la función objetivo que el valor de la función objetivo de la mejor solución entera encontrada hasta el momento (S12).

b)

Para generar el árbol de la figura 2 se ha utilizado el criterio de la «mejor cota», según el cual el siguiente nodo a bifurcar es el que tiene el mejor valor de la función objetivo continua.

En caso de haber aplicado el criterio de la «cota más reciente», el orden de los subproblemas habría sido S0, S1, S11 y a partir de S11 el proceso habría seguido por esta rama hasta llegar a una hoja del árbol de soluciones. El proceso habría seguido después hasta llegar a generar el problema S12 y, en último lugar, el S2.

c)

Un nodo no se ramifica si cumple alguna de las siguientes condiciones.

1. Si la solución del problema correspondiente a ese nodo es entera.

2. Si el valor de la función objetivo del problema correspondiente a ese nodo es peor que el valor dela función objetivo de la mejor solución entera hasta el momento.

3. Si el problema correspondiente al nodo no tiene solución factible.

5.3

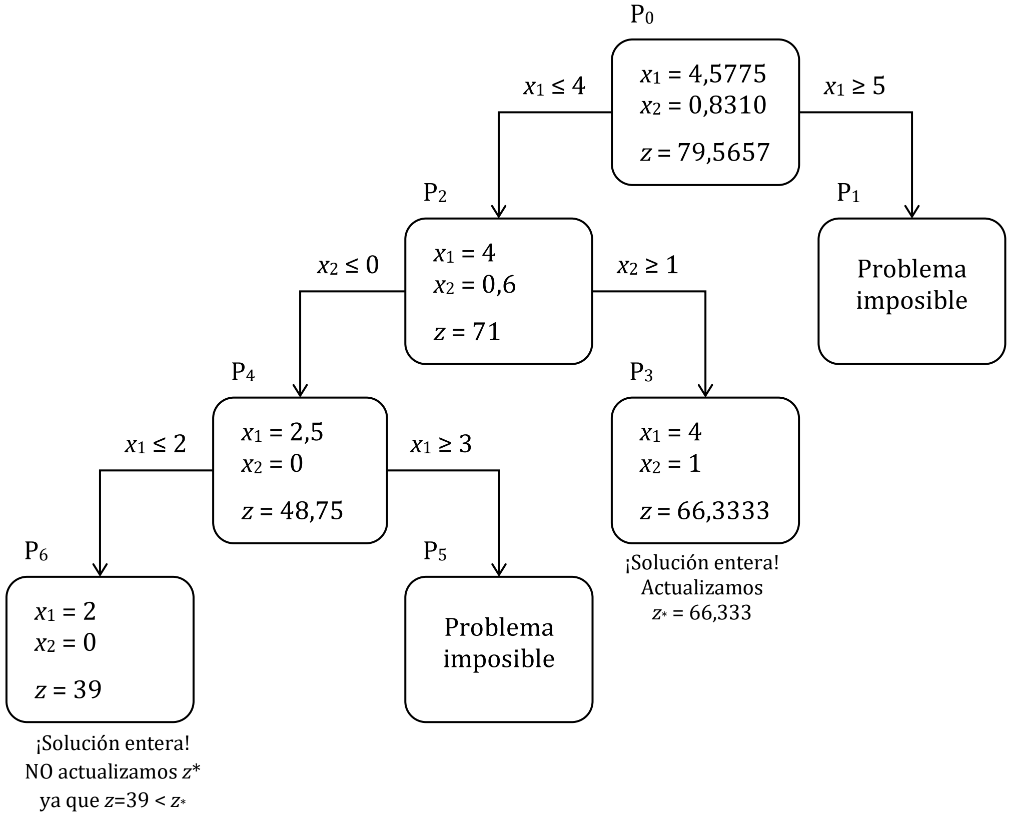
a)

Se pide completar la información del árbol, indicando las cotas en cada rama y las sucesivas actualizaciones de la cota inferior para la solución óptima entera.

En la primera bifurcación del árbol, tras la resolución del nodo raíz P0, la variable elegida para bifurcar ha sido x_1, y no x_2 (que también era "elegible"). Esto se deduce del hecho de que, en la resolución del nodo P2, es x_1 la que toma un valor entero (al bifurcar por una variable, dicha variable tomará en la solución de cada nodo "hijo" el valor de la cota añadida sobre ella).

La única actualización de la cota z_L para la solución óptima entera se produce en el nodo P3. La resolución de ese subproblema genera una solución entera al problema, con $z = 66{,}3333$. Por eso, a partir de ese momento se rechazará cualquier nodo que ofrezca una solución (entera o no) con z peor (inferior, en este caso) a $z^* = 66{,}3333$.

En la resolución del subproblema P6 se encuentra una nueva solución entera, que NO mejora la mejor (y única) solución entera encontrada hasta ese momento; por ello, no se actualiza el valor de z^*.


P0
x1 = 4,5775
x2 = 0,8310
z = 79,5657
x1 ≤ 4
x1 ≥ 5
P2
x1 = 4
x2 = 0,6
z = 71
P1
Problema imposible
x2 ≤ 0
x2 ≥ 1
P4
x1 = 2,5
x2 = 0
z = 48,75
P3
x1 = 4
x2 = 1
z = 66,3333
¡Solución entera! Actualizamos z* = 66,333
x1 ≤ 2
x1 ≥ 3
P6
x1 = 2
x2 = 0
z = 39
¡Solución entera! NO actualizamos z* ya que z=39 < z*
P5
Problema imposible

b)

Nos piden que validemos el árbol construido. Concretamente, se desea saber si falta bifurcar algún nodo y si, por otro lado, existen nodos que no deberían haber llegado a generarse.

El algoritmo Branch-and-Bound indica que debe saturarse un nodo cuando en él sucede una de las tres siguientes situaciones:

1. Se obtiene una solución entera.
2. El problema es imposible.
3. La solución obtenida NO es entera pero es PEOR (o no es mejor) que la mejor solución entera encontrada hasta el momento.

Según los criterios 1 y 2 enunciados, todos los nodos terminales del árbol están saturados de manera justificada: los nodos P3 y P6 presentan sendas soluciones enteras, mientras que los subproblemas P1 y P5 son imposibles. Esto quiere decir que NO hay ninguna rama pendiente de bifurcar; no falta bifurcar ningún nodo.

Sin embargo, según el criterio 3, el nodo P4 también debería haber sido saturado, ya que la solución obtenida en dicho nodo es peor que la mejor solución entera que se ha encontrado hasta ese momento ($z = 48{,}75 < z^* = 66{,}3333$, y estamos maximizando). Por tanto, dicho nodo NO debería haberse bifurcado. Es decir, "sobran" los nodos P5 y P6.

ATENCIÓN: Incluso si el árbol se ha generado siguiendo la estrategia de la "cota más reciente" (o "recorrer el árbol en profundidad"), el tercer criterio para cerrar un nodo ("la solución obtenida NO es entera pero es PEOR que la mejor solución entera encontrada hasta el momento") debe aplicarse cuando corresponda. Los tres motivos para cerrar un nodo expuestos se aplican siempre, independientemente de qué estrategia concreta se siga para recorrer el árbol ("cota más reciente", "mejor cota", etc.); son propios del algoritmo Branch-and-Bound en sí.

---

c)

El árbol está completo (incluso con nodos de más, según se ha visto en el apartado anterior), y la mejor solución entera encontrada tras explorar toda la región factible es la producida por el nodo P3, es decir:

Solución óptima entera: (x1* = 4 , x2* = 1) , z* = 66,3333.

Es la única solución óptima entera, ya que no hemos encontrado en la exploración ningún otro punto que proporcione el mismo valor para la función objetivo.

[×]

d)

Se pide deducir cuál de las dos estrategias estudiadas en la asignatura para recorrer el árbol es la que se ha utilizado en este ejercicio.

En este caso, el orden en que se han ido generando los nodos coincide tanto con el criterio de la "mejor cota" como con el de la "cota más reciente".

Coincide con el criterio de la "mejor corta" porque en cada iteración se ha tomado para ser bifurcado el nodo "abierto" con el mejor valor de z (en realidad, sólo hay un nodo "abierto" en cada paso) y se han generado y resuelto sus dos nodos "hijo".

Coincide también con el criterio de la "cota más reciente" porque se ha recorrido el árbol de manera "mecánica", profundizando siempre primero en la "rama" de la derecha o de "≥" hasta cerrarla, y siguiendo después por la última "rama" abierta pendiente de generar.

Es decir, en este caso ambas estrategias producen el mismo árbol.

En realidad, como en cada bifurcación uno de los dos nodos "hijo" acaba siendo "saturado", no hay ocasión de descartar ninguno de los dos criterios: el árbol construido es "compatible" con cualquiera de los dos.

[×]

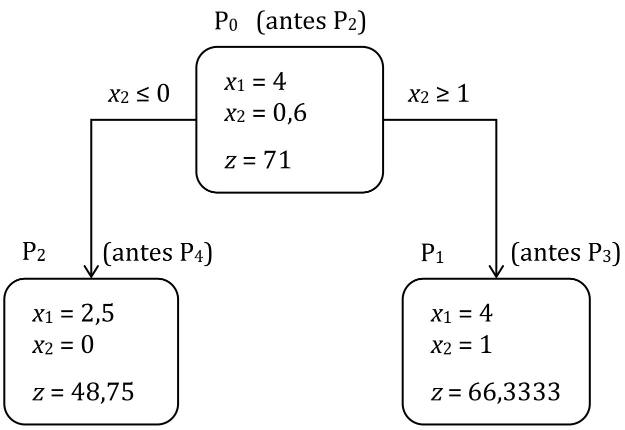
e)

Se añaden al problema las restricciones $2 \leq x1 \leq 4$ y $2x2 \leq x1$.

La restricción $x1 \leq 4$ directamente eliminaría los nodos P0 y P1, que son los únicos que incumplen por completo la nueva cota superior impuesta para x1. Es decir, al resolver el problema lineal asociado al problema entero, directamente se obtendría como nodo "raíz" el nodo P2 (dicho de otro modo: exigir $x1 \leq 4$ nos sitúa directamente en el nodo P2).

Las restricciones $x1 \geq 2$ y $2x2 \leq x1$ puede que "eliminen" soluciones de la región factible, pero NO influyen en el árbol ni en la solución final, ya que no afectan a las soluciones obtenidas en cada paso del algoritmo (las soluciones que se obtenían en cada nodo, a partir de P2, ya cumplen esas nuevas restricciones). Por tanto, en cada nodo a partir de P2 la solución se mantendrá igual, y ningún nodo será eliminado como resultado de añadir estas dos nuevas condiciones.

En resumen, si volvemos a aplicar el algoritmo para el problema con las nuevas restricciones, manteniendo el mismo orden para generar las ramas y eliminando también los nodos que, como resultado del apartado (b), sabemos que no deberían haberse generado, el árbol resultante sería el siguiente:



[×]

5.4

P0:

V.básicas	B^{-1}		X_B
X1	3/2	-1/2	3/2
X2	-1/2	1/2	3/2
$c_B^t\ B^{-1}$	3/2	1/2	**Z=15/2**

P0: X1=3/2; X2=3/2; Z=15/2 (Z*=+inf)

P1=P0(X1, X2, X3, X4) + X1≥ 2

X1 = 2 + l_1; necesitamos incrementar X1

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1}\, a_{X3} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}\, a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para incrementar el valor de X1 necesitamos αij<0, por tanto sólo nos sirve X3 → **JE=X3.** El pivote del cambio de base será -3/2
- B^{-1} de la nueva solución:

$$B_{P1}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X3, X2; VNB= X4, l_1

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t\, X_B = 4 + (0,3) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = 8$$

P1: (l_1, x2, x3, x4)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X3	-1	1/3	1/3
X2	0	1/3	4/3
$c_B^t\ B^{-1}$			**8**

P1: X1=2; X2=4/3; Z=8

Como utilizamos la técnica de la mejor cota, debemos volver a P0 y generar y resolver P2: P0 + X1≤ 1

P2 = P0 + X1≤ 1; X1=1-u1; u1 ≤ 1

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X3, X4.

- $Y_{X3} = B^{-1} a_{X3} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X1 necesitamos αij>0, por tanto sólo nos sirve X4 → **JE=X4.** El pivote del cambio de base será ½. Sale de la base la variable que alcanza la cota, X1 que será reemplazada en el modelo por u1
- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1}_{P2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X4, X2; VNB= X3, u_1

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = 2 + C_B^t X_B = 2 + (0,3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 < Z^*, \text{ actualizamos } Z^*=8$$

P1: (u1, x2, x3, x4)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X4	3	-1	1
X2	1	0	2
$c_B^t B^{-1}$			**8**

- Como la solución es entera esta es una hoja del árbol de soluciones. El único nodo que queda abierto es el de P1, pero como el valor de la función objetivo es igual al de la mejor cota, la solución actual (la de P2) es la solución óptima ya que a partir de P1 no es posible encontrar soluciones enteras con mejor valor de la función objetivo.

LA SOLUCIÓN ÓPTIMA ES LA OBTENIDA EN EL NODO P2:

X1 = 1; X2 = 2; Z = 8

5.5

P0:

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	2/3	-1/3	4/3
X3	1/3	1/3	8/3
$c_B^t\ B^{-1}$	3	-1	**Z=8**

P0: X1=0; X2=4/3; X3=8/3; Z=8 (Z*=-inf)

P1=P0 + X2≥ 2; X2 = 2 +1_{x2};

- A partir de su valor actual, necesitamos incrementar X2
- Como VNB en P0: X1, X4, X5, calculamos:

$Y_{X1} = B^{-1}\ a_{X1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}\ a_{X4} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}\ a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

Para incrementar el valor de X2 necesitamos $\alpha_{x2,j}<0$, como ninguna variable no básica es capaz de aumentar el valor de X2, el nodo actual NO TIENE SOLUCIÓN POSIBLE

Como utilizamos la técnica de la mejor cota, debemos volver a P0 y generar y resolver P2:P0 + X2≤1

P2 = P0 + X2≤ 1; X2=1-u_{x2}; u_{x2}≤ 1

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X2

VNB en P0: X1, X4, X5.

- $Y_{X1} = B^{-1}\ a_{X1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}\ a_{X4} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}\ a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X2 necesitamos $\alpha_{X2,j}>0$, por tanto nos sirven X1, X4 y X5. Escogeremos la variable que consigue el objetivo (decrementar X2) de la forma más eficiente posible. Para ello necesitamos calcular el Cj-Zjde cada una de ellas y escoger la que verifica:

Min { $|(c_j-z_j)/\ \alpha_{X2,j}|$, $\forall\ \alpha_{X2,j}< 0$ }

- $Z_{x1}= C_B^tB^{-1}a_{X1} = (3, -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =5 \rightarrow C_{x1} - Z_{x1}= 4-5 = -1$

- $Z_{x4} = C_B^t B^{-1} a_{X4} = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow C_{x4} - Z_{x4} = 0-3 = -3$
- $Z_{x5} = C_B^t B^{-1} a_{X5} = (3, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow C_{x5} - Z_{x5} = 0-1 = -1$

Entonces: Min {|(-1)/1|, |(-3)/2/3|, |(-1)/1/3|} =1 → **JE: X1**

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1}{}_{P2} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- Variables: VB= X1, X3; VNB= u_{X2}, X4,X5

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (4,1) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = 23/3$$

P2: (x1, u_{x2}, x3, x4, x5)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X1	2/3	-1/3	1/3
X3	-1/3	2/3	7/3
$c_B^t B^{-1}$	7/3	-2/3	**Z=23/3**

- Generamos los siguientes subproblemas bifurcando X1:

P3 = P2 (x1, u_{x2}, x3, x4, x5) + X1≥ 1; X1=1+l_{x1};

- A partir de su valor actual, necesitamos incrementar X1
- Como VNB en P2: u_{x2}, X4, X5, calculamos:

$Y_{u_{x2}} = B^{-1} a_{u_{x2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1} a_{X4} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1} a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

Para incrementar el valor de X1 necesitamos $\alpha_{X1,j}<0$, por tanto **JE: u_{x2}**

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1}_{P3} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + 4 + C_B^t X_B = 4 + 4 + (-4,1) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} = 7$$

P3: ($\mathbf{l_{x1}}$, $\mathbf{u_{x2}}$, x3, x4, x5)

V.básicas	B^{-1}		X_B
$\mathbf{u_{x2}}$	-2/3	1/3	2/3
X3	1/3	1/3	5/3
$c_B^t\, B^{-1}$	3	-1	**Z=7**

Como utilizamos la técnica de la mejor cota, debemos volver a P2 y generar y resolver P4:P2 + X1≤0

P4 = P2 + X1≤ 0; X1=0-$\mathbf{u_{x1}}$; $\mathbf{u_{x1}}$≤ 0

- A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1
- Como VNB en P2: $\mathbf{u_{x2}}$, X4, X5, calculamos:

$Y_{\mathbf{u}x2} = B^{-1}\, a_{\mathbf{u}x2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}\, a_{X4} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}\, a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

Para decrementar el valor de X1 necesitamos $\alpha_{X1,j}>0$, por tanto debemos escoger entre X4 y X5 la variable que es capaz de conseguirlo del modo más eficiente posible. Para ello necesitaremos en primer lugar calcular sus Cj-Zj:

- $Z_{x4} = C_B^t B^{-1} a_{X4} = (7/3, -2/3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 7/3 \rightarrow C_{x4} - Z_{x4} = 0 - 7/3 = -7/3$
- $Z_{x5} = C_B^t B^{-1} a_{X5} = (7/3, -2/3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2/3 \rightarrow C_{x5} - Z_{x5} = 0 - 2/3 = -2/3$

Entonces: Min {|(-7/3)/2/3|, |(-2/3)/1/3|} =2 →**JE: X5**

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1}{}_{P4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t\, X_B = 4 + (0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 > Z^* \rightarrow Z^*=7$$

- Como la solución es entera esta es una hoja del árbol de soluciones. El único nodo que queda abierto es el de P3, pero como el valor de la función objetivo es igual al de la mejor cota, la solución actual (la de P4) es la solución óptima ya que a partir de P3 no es posible encontrar soluciones enteras con mejor valor de la función objetivo.

LA SOLUCIÓN ÓPTIMA ES LA OBTENIDA EN EL NODO P4:
$X1 = 0$; $X2 = 1-u_{x2}=1$; $X3=3$; $Z = 7$

- El árbol de soluciones generado es el de la siguiente figura: