Pràctiques d'Àlgebra

Solució de les activitats de la Pràctica 5

Activitat 1. *Donada la matriu* $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcula la matriu A^2.
b) Sense fer cap càlcul, determina quina és la inversa de la matriu A.

a) Introduïm la matriu A i calculem A^2 :

```
-->A=[-2 4 2 1;4 2 1 -2;2 1 -2 4;1 -2 4 2];

-->A^2
 ans  =
    25.    0.     0.     0.
    0.     25.    0.     0.
    0.     0.     25.    0.
    0.     0.     0.     25.
```

b) Com es pot observar, s'ha obtingut que $A \cdot A = 25I$, sent I la identitat d'orde 4. Així, $A \cdot (\frac{1}{25}A) = I$. Per tant, $A^{-1} = \frac{1}{25}A$.

Activitat 2. *Calcula de dues formes distintes les inverses de les següents matrius. Si algun dels resultats que has obtingut no és correcte explica per què.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Introduïm la matriu A i calculem la inversa amb la instrucció **inv** :

```
-->A=[1 -1 2;-1 2 -1;2 -3 1];

-->inv(A)
 ans  =
    0.5    2.5    1.5
    0.5    1.5    0.5
    0.5  - 0.5  - 0.5
```

Aquesta matriu és la inversa de A.

Ara calcularem la inversa de A obtenint l'escalonada reduïda de la matriu $[A\ I]$

```
-->rref([A eye(3,3)])
 ans  =
    1.    0.    0.    0.5    2.5    1.5
    0.    1.    0.    0.5    1.5    0.5
    0.    0.    1.    0.5  - 0.5  - 0.5
```

Com s'ha obtingut que la reduïda de A és la identitat, la inversa de A ve donada per les tres últimes columnes del resultat, que coincideix exactament amb la matriu A^{-1} calculada abans.

Introduïm la matriu B i utilitzem la instrucció **inv** :

```
-->B=[2 1 0 1;1 1 1 2; 2 1 3 1;4 3 5 5];

-->inv(B)
       !--error 19
Problema, és singular.
```

Aquest missatge[1] indica que la matriu B és singular, és a dir, no té inversa. En efecte, podem comprovar que B no té rang 4:

```
-->rank(B)
 ans  =
    3.
```

Vegem que succeiria si utilitzàrem **rref**:

```
-->rref([B eye(4,4)])
 ans  =
    1.     0.     0.   - 1.     0.6666667    0.     0.8333333  - 0.5
    0.     1.     0.     3.   - 0.3333333    0.   - 1.6666667    1.
    0.     0.     1.     0.   - 0.3333333    0.     0.3333333    0.
    0.     0.     0.     0.     0.           1.     0.5         - 0.5
```

El bloc format per les 4 primeres columnes d'aquesta matriu és la forma escalonada reduïda de B, que no és la identitat, per tant B no és invertible. Observeu que aquest resultat també ens indica que el rang de B és 3.

Introduïm la matriu C i utilitzem la instrucció **inv** :

```
-->C=[2 4 6;8 10 12;14 16 18];

-->inv(C)
Avís:
la matriu és gairebé singular o està mal escalada. rcond =    0.0000D+00

 ans  =
 10^15 *
   - 2.2517998    4.5035996  - 2.2517998
     4.5035996  - 9.0071993    4.5035996
  - 2.2517998    4.5035996  - 2.2517998
```

Aquest missatge ens indica que la matriu pot no ser invertible. Per a veure si el resultat que ens ha proporcionat és correcte multipliquem C per la dita matriu

```
-->C*ans
 ans  =
    2.     0.    2.
    8.     0.    0.
    16.    0.    8.
```

Com la matriu obtinguda no és la identitat, el resultat de **inv** és incorrecte. Calculant el rang de C es té que

```
->rank(C)
 ans  =
    2.
```

pel que podem concloure que C no és invertible.

Vegem amb rref que obtindríem:

[1] Pots triar l'idioma en què Scilab et donarà els missatges.

```
->rref([C eye(3,3)])
 ans  =
    1.    0.  - 1.    0.  - 1.3333333    0.8333333
    0.    1.    2.    0.    1.1666667  - 0.6666667
    0.    0.    0.    1.  - 2.                  1.
```

Com el bloc format per les tres primeres columnes no és la identitat podem tornar a concloure que C no és invertible.

Activitat 3. *Donada la matriu* $$D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcula la matriu T tal que $TD = R$ sent R la forma escalonada reduïda de D.
b) Resol l'equació matricial $TX + X = DD^t$.

a) Per a obtindre la matriu T calcularem la forma escalonada reduïda de la matriu $[D\ I]$ sent I la identitat d'ordre 4 :

```
-->D=[7 1 2;4 2 1;0 1 -2;0 4 2];

-->R=rref([D eye(4,4)])
R  =
    1.    0.    0.    0.    0.25  - 1.388D-17  - 0.125
    0.    1.    0.    0.    0.      0.2          0.2
    0.    0.    1.    0.    0.    - 0.4          0.1
    0.    0.    0.    1.  - 1.75    0.6          0.475
```

Aquest resultat ens indica que la reduïda de D és la matriu formada per les tres primeres columnes de R i que la matriu T és la matriu formada per les quatre últimes columnes de R. És a dir,

```
-->T=R(:,4:7)
 T  =
    0.    0.25   - 1.388D-17  - 0.125
    0.    0.        0.2            0.2
    0.    0.      - 0.4            0.1
    1.  - 1.75     0.6           0.475
```

Podem "netejar" T perquè arredonisca l'element pròxim a zero:

```
-->T=clean(T)
 T  =
    0.    0.25    0.    - 0.125
    0.    0.      0.2     0.2
    0.    0.    - 0.4     0.1
    1.  - 1.75    0.6     0.475
```

b) $TX + X = DD^t \iff (T + I)X = DD^t$. Així, si la matriu $(T + I)$ és invertible, podrem aïllar X. Advertència: Com D és una matriu 4×3, DD^t és 4×4; com T és 4×4, la matriu identitat de $T + I$ és 4×4; finalment, perquè $(T + I)X$ puga donar una matriu 4×4, DD^t, es conclou que X ha de ser també 4×4. Comprovem que $(T + I)$ és invertible veient que el seu rang és màxim:

```
-->rank(T+eye(4,4))
 ans  =
    4.
```

Així, $X = (T+I)^{-1}DD^t$, que ho calculem amb Scilab:

```
-->X=inv(T+eye(4,4))*D*D'
 X  =
    47.840909    28.568182  - 3.0681818    8.4090909
    30.909091    19.181818  - 1.1818182    7.0909091
  - 7.0909091  - 1.8181818    8.8181818  - 2.9090909
    12.545455    10.909091  - 2.9090909    17.454545
```

Activitat 4. *Donada la matriu* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 13 & 4 \end{bmatrix}$

a) Calcula (a mà) una descomposició LU de A.
b) Resol (a mà) el sistema següent utilitzant la descomposició LU que has obtingut en l'apartat anterior

$$\begin{aligned} -x+3y+2z &= 2 \\ x-y-z &= -2 \\ -3x+13y+4z &= -2 \end{aligned}$$

c) Calcula amb Scilab la descomposició LU de la matriu A. Si no és la mateixa que has obtingut en l'apartat a), explica per què.
d) Calcula la inversa de A i el seu determinant utilitzant la factorització LU que has obtingut en l'apartat anterior. Comprova que ix el mateix resultat que utilitzant les instruccions inv(A) i det(A), respectivament.

a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = U$$

Interpretant matricialment aquest procés es té que $E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1)A = U$. Aïllant A obtenim que $A = (E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1))^{-1}U$. Per tant,

$$L = (E_{32}(-2)E_{31}(-3)E_{21}(1))^{-1} = E_{21}(1)^{-1}E_{31}(-3)^{-1}E_{32}(-2)^{-1} = E_{21}(-1)E_{31}(3)E_{32}(2) =$$

$$= E_{21}(-1)E_{31}(3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}(-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) En primer lloc resolem per substitució progressiva el sistema $L\vec{y} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La solució d'aquest sistema és:

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -2 + y_1 = 0, \quad y_3 = -2 - 3y_1 - 2y_2 = -2 - 6 = -8.$$

És a dir, $\vec{y} = (2, 0, -8)$.

Ara resolem per substitució progressiva el sistema $U\vec{x} = \vec{y}$. Aquesta solució serà la solució del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$z = -8/-4 = 2, \quad y = -z/2 = -2/2 = -1, \quad x = -2 + 3y + 2z = -2 - 3 + 4 = -1.$$

c)

```
-->A=[-1 3 2;1 -1 -1;-3 13 4];

-->[L,U]=lu(A)
 U  =
  - 3.    13.          4.
    0.    3.3333333   0.3333333
    0.    0.          0.8
 L  =
    0.3333333  - 0.4    1.
  - 0.3333333    1.      0.
    1.           0.      0.
```

La descomposició LU de A que proporciona Scilab no és la mateixa que l'obtinguda en l'apartat a). Això és degut al fet que Scilab utilitza pivotació parcial per a calcular la matriu U: permuta files per obtindre el major pivot. Això ha provocat que la matriu L proporcionada per Scilabno siga triangular inferior (encara que ho seria permutant les files 1 i 3) i, per això, tampoc la matriu U proporcionada per Scilabcoincideix amb la calculada a mà.

d) Atés que $A = LU$, es té que $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ i $det(A) = det(L)det(U)$. Ho comprovem:

```
-->inv(U)*inv(L)
 ans  =
    1.125    1.75  - 0.125
  - 0.125    0.25    0.125
    1.25     0.5   - 0.25

-->inv(A)
 ans  =
    1.125    1.75  - 0.125
  - 0.125    0.25    0.125
    1.25     0.5   - 0.25

-->det(L)*det(U)
 ans  =
    8.

-->det(A)
 ans  =
    8.
```

Observa que, per ser U triangular, el seu determinant coincideix amb el producte de les entrades diagonals. Com $E_{13} * L$ és triangular i, a més, les seues entrades diagonals són tot uns, $\det(E_{13} * L) = 1 = \det(E_{13}) \det(L) = (-1) \det(L)$, per tant $\det(L) = -1$. Ho comprovem:

```
-->det(U)
 ans  =
```

```
  - 8.

-->U(1,1)*U(2,2)*U(3,3)
 ans  =
  - 8.

-->det(L)
 ans  =
  - 1.
```

Observa que aquest resultat també era vàlid per a les matrius L i U obtingudes a má:

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \det(U) = (-1)\cdot 2 \cdot (-4) = 8, \quad \det(L) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

i, per tant, $\det(A) = 8 \cdot 1 = 8$