DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Segundo parcial 09-01-2012 Duración: 2h

---

1. $(0.5p)$ Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones

$$a_n = \log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n) \quad \text{y} \quad b_n = \sqrt{n}$$

Para comparar los órdenes de magnitud tenemos que calcular el limite del cociente

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{\log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n)}{\sqrt{n}} = \text{(Stolz)} \\
&= \lim \frac{(\log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n) + \log(n+1)) - (\log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n))}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \\
&= \lim \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\log(n+1)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)} = \\
&= \lim \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\log(n+1) = +\infty
\end{aligned}$$

por lo que a_n tiene mayor orden de magnitud que b_n.

---

2. $(1p)$ Resuelve la recurrencia lineal completa de segundo orden definida mediante

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 4 \cdot 3^{n-1} \\ a_1 = 3, \quad a_2 = -1 \end{cases}$$

La ecuación característica asociada a la recurrencia es

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

que tiene una raíz real doble $r = 1$.

La recurrencia corresponde al segundo caso y la solución general puede escribirse en la forma

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot n$$

Por otro lado, una solución particular de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n = A \cdot 3^n$$

de donde

$$A \cdot 3^{n+2} = 2A \cdot 3^{n+1} - A \cdot 3^n + 4 \cdot 3^{n-1} \implies 9A = 6A - A + \frac{4}{3} \implies A = \frac{1}{3}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia completa puede escribirse como

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot n + 3^{n-1}$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{lclcl}
\text{para } n = 1 \ ; & a_1 & = & C_1 + C_2 + 1 & = & 3 \\
\text{para } n = 2 \ ; & a_2 & = & C_1 + 2C_2 + 3 & = & -1
\end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 8$ y $C_2 = -6$. De aquí:

$$a_n = 8 - 6 \cdot n + 3^{n-1}$$

3. Considera la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{5^n}$

a) $_{(0.3p)}$ Calcula su suma exacta.

b) $_{(0.5p)}$ Usando la cota de error asociada al teorema de Leibniz, obtén el valor de N necesario para que la suma parcial s_N proporcione, al menos, dos decimales correctos y calcula esa suma parcial.

c) $_{(0.4p)}$ Integra término a término la serie de potencias $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ y súmala donde converja para obtener $\int f(x)dx$. A continuación, deriva para hallar $f(x)$ explícitamente. A partir de esta expresión, deduce el valor de la suma de la serie.

---

a) Es una serie aritmético-geométrica de razón $r = \dfrac{-1}{5}$. Aplicando la fórmula correspondiente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{5^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)^n = -\left(\frac{1\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)^1}{1-\left(\frac{-1}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{-1}{5}\right)^{1+1}}{\left(1-\left(\frac{-1}{5}\right)\right)^2}\right) = -\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{36} = 0.13\hat{8}$$

b) La serie cumple las condiciones del criterio de Leibniz. Aplicando la cota correspondiente, para obtener la precisión pedida, necesitamos

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{N+1}{5^{(N+1)}} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5^{N+1}}{N+1} > 1000 \quad \Leftrightarrow \quad N \geq 5$$

y obtendremos la aproximación

$$s_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{5^n} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} = 0.1392$$

c) Integrando término a término la serie de potencias y sumando la serie resultante (geométrica de razón x),

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} \Rightarrow \int f(x)dx = \sum_{n\geq 1} x^n + C \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x}{1-x} + C \quad , \quad |x| < 1$$

Derivando la última expresión

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1$$

Por último, observa que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{5^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\cdot f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(1-\left(-\frac{1}{5}\right)\right)^2} = \frac{5}{36}$$

---

4. $_{(0.3p)}$ Sabiendo que

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \quad , \quad |x| < 1$$

aproxima $\log\left(\dfrac{4}{5}\right)$ utilizando el polinomio de McLaurin de grado 3. Acota el error cometido en la aproximación. ¿Podrías aproximar $\log\left(\dfrac{1}{5}\right)$ utilizando el mismo razonamiento? Justifica tu respuesta.

A partir del desarrollo en serie de potencias

$$\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \cdots \quad , \quad |x| < 1$$

observamos que el polinomio de McLaurin de grado 3 para la función $f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$ es

$$P_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Puesto que $\log\left(\dfrac{4}{5}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right)$, la aproximación pedida vendrá dada por

$$\log\left(\frac{4}{5}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx P_3\left(-\frac{1}{4}\right) = -0.2239583333...$$

Teniendo en cuenta que $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ representa la suma exacta de la serie alternada, tipo Leibniz,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n}$$

la aproximación que proporciona el polinomio de McLaurin de grado 3 en $-\frac{1}{4}$ coincide precisamente con la suma parcial s_3. La cota de error correspondiente será, por tanto,

$$|s - s_3| \leq a_4 = \frac{1}{4 \cdot 4^4} = 0.0009765625... < 10^{-3}$$

que garantiza, al menos, dos decimales correctos. En efecto, observa que

$$\left|\log\left(\frac{4}{5}\right) - P_3\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = 0.0008147820191... < 0.0009765625...$$

Por último, puesto que $\log\left(\dfrac{1}{5}\right) = f\left(-4\right)$ y -4 no está en el intervalo de convergencia de la serie de potencias, no es posible aproximar $\log\left(\dfrac{1}{5}\right)$ usando el polinomio de McLaurin de $f(x)$. De hecho,

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{5}\right) &= -1.609437912... \\ P_3(-4) &= -17.33333333... \end{aligned}$$