Qüestió 1 (1.5 pt)

Determineu si són correctes o no els raonaments següents. En cas que ho siguen, proveu-los per inferència; si no ho són, justifiqueu perquè:

(a) **P1:** $P \wedge T$
P2: $P \to Q$
P3: $Q \to R \wedge S$
P4: $\rceil R \vee \rceil T \vee U$
C: U

(b) **P1:** $P \to Q$
P2: $\rceil P$
C: $\rceil Q$

Solució:

(a) Aquest raonament és correcte:

P1:	$P \wedge T$	
P2:	$P \to Q$	
P3:	$Q \to R \wedge S$	
P4:	$\rceil R \vee \rceil T \vee U$	
P5:	P	Simplificació(1)
P6:	T	Simplificació(1)
P7:	Q	*Modus ponens*(2,5)
P8:	$R \wedge S$	*Modus ponens*(3,7)
P9:	R	Simplificació(8)
P10:	$R \wedge T$	Llei de la unió(9,6)
P11:	$\rceil(\rceil R \vee \rceil T)$	Llei de De Morgan(10)
C:	U	*Modus tollendo ponens*(4,11)

(b) Aquest raonament no és correcte. La taula de veritat de $\big((P \to Q) \wedge \rceil P\big) \to \rceil Q$ conté la fila següent:

P	Q	$P \to Q$	$\rceil P$	$(P \to Q) \wedge \rceil P$	$\rceil Q$	$\big((P \to Q) \wedge \rceil P\big) \to \rceil Q$
0	1	1	1	1	0	0

Així que aquesta forma proposicional no és una tautologia.

També ho podem justificar amb un exemple: suposem que Pep va al cinema sempre que plou i tots els diumenges (encara que no ploga). Llavors, un diumenge que no plou, les premisses

P1: «si plou llavors Pep va al cinema»

P2: «no plou»

són certes. Però la conclusió

C: «Pep no va al cinema»

és falsa.

Qüestió 2 (2 pt) (a) Representeu formalment les expressions següents en l'univers de les persones:

(i) «No tots els executius viatgen amb avió»
(ii) «Ningú que viatja amb avión viatja amb autobús»
(iii) «Els executius que viatgen amb avió viatgen amb tren»
(iv) «Hi ha persones que no són executius i viatgen amb avió i amb autobús».

Solució: Farem servir els predicats següents:

$P(x)$: x és executiu $\qquad Q(x)$: x viatja amb avió
$R(x)$: x viatja amb autobús $\qquad S(x)$: x viatja amb tren

Llavors, aquestes expressions es poden formalizar com

(i) $\rceil \forall x \, \big(P(x) \to Q(x)\big)$
(ii) $\rceil \exists x \, \big(Q(x) \wedge R(x)\big)$
(iii) $\forall x \, \big(P(x) \wedge Q(x) \to S(x)\big)$
(iv) $\exists x \, \big(\rceil P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)\big)$

(b) Demostreu que a partir de les premisses següents s'obté la conclusió donada.

P1: $\forall x \quad (P(x) \to Q(x) \vee R(x))$
P2: $\rceil \exists x \quad (R(x) \wedge S(x))$
P3: $\forall x \quad (T(x) \to P(x) \wedge \rceil Q(x))$
P4: $T(j)$
C: $P(j) \wedge \rceil S(j)$

Solució:

P1:	$\forall x \quad (P(x) \to Q(x) \vee R(x))$	
P2:	$\rceil \exists x \quad (R(x) \wedge S(x))$	
P3:	$\forall x \quad (T(x) \to P(x) \wedge \rceil Q(x))$	
P4:	$T(j)$	
P5:	$P(j) \to Q(j) \vee R(j)$	Especificació universal(1)
P6:	$\forall x \quad \rceil \big(R(x) \wedge S(x)\big)$	Negació del quantificador(2)
P7:	$\rceil \big(R(j) \wedge S(j)\big)$	Especificació universal(6)
P8:	$T(j) \to P(j) \wedge \rceil Q(j)$	Especificació universal(3)
P9:	$P(j) \wedge \rceil Q(j)$	*Modus ponens*(8,4)
P10:	$P(j)$	Simplificació(9)
P11:	$\rceil Q(j)$	Simplificació(9)
P12:	$Q(j) \vee R(j)$	*Modus ponens*(5,10)
P13:	$R(j)$	*Modus tollendo ponens*(12,11)
P14:	$\rceil R(j) \vee \rceil S(j)$	Llei de De Morgan(7)
P15:	$\rceil S(j)$	*Modus tollendo ponens*(14,13)
C:	$P(j) \wedge \rceil S(j)$	Llei de la unió(10,15)

Qüestió 3 (1.5 pt) (a) Simplifiqueu la forma proposicional següent, indicant a cada pas la tautologia que feu servir.

$$\rceil (p \wedge (p \to q)) \to q$$

Solució:

$$\begin{aligned}
\rceil\big(p \wedge (p \to q)\big) \to q &\equiv \big(p \wedge (p \to q)\big) \vee q && \text{(Condicional-disjunció i involutiva)}\\
&\equiv \big(p \wedge (\rceil p \vee q)\big) \vee q && \text{(Condicional-disjunció)}\\
&\equiv \big((p \wedge \rceil p) \vee (p \wedge q)\big) \vee q && \text{(Distributiva)}\\
&\equiv \big(\phi \vee (p \wedge q)\big) \vee q && \text{(Complementarietat)}\\
&\equiv (p \wedge q) \vee q && \text{(ϕ és el neutre de la disjunció)}\\
&\equiv q && \text{(Simplificativa)}
\end{aligned}$$

(b) Indiqueu per quins valors de veritat de les proposicions p, q i r és certa la proposició

$$\rceil (p \to q) \wedge \rceil r$$

Solució: Perquè una conjunció $P \wedge Q$ siga certa, ho han de ser les dues proposicions P i Q. En el nostre cas, cal que siguen certes $\rceil (p \to q)$ i $\rceil r$; així que han de ser *falses* $p \to q$ i r. Però, perquè siga falsa $p \to q$, p ha de ser vertadera i q falsa.

En definitiva, els únics valors de veritat pels quals aquesta expressió és certa són $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$.[1]

Qüestió 4 (1 pt) Proveu, per inducció, que es verifica que:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solució: En primer lloc, hem de provar que aquesta fórmula és correcta quan $n = 1$:

Si $n = 1$, el costat esquerre de la igualtat és $\frac{1}{2}$; i, el dret, $2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Així que la propietat és certa.

[1] Això significa que la forma proposicional $\rceil (p \to q) \wedge \rceil r$ és equivalent a $p \wedge \rceil q \wedge \rceil r$.

A continuació, cal provar que, si la propietat es compleix per a $n = k$ llavors, també es compleix per a $n = k+1$. És a dir, que, suposant que $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$ hem de deduir $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$

La suma

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

és igual a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{(k+2)2}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2k+4}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}} \\
&= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

I això és el que havíem de provar.

Qüestió 5 (2 pt) (a) Siga $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{5x-2}{x-2}$. És f una aplicació? És injectiva, suprajectiva i/o bijectiva? Justifiqueu les respostes.

Solució: És una aplicació, perquè qualsevol nombre real distint de 2 té una imatge única. Per esbrinar si és injectiva, hem de veure si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \frac{5x-2}{x-2} = \frac{5y-2}{y-2} \\
&\Rightarrow (5x-2)(y-2) = (5y-2)(x-2) \Leftrightarrow 5xy - 10x - 2y + 4 = 5yx - 10y - 2x + 4 \\
&\Leftrightarrow y = x
\end{aligned}$$

Així que f és una aplicació injectiva. Per estudiar si és suprajectiva, hem de veure si un nombre real arbitrari y té una antiimatge: si $x \neq 2$ és la antiimatge de y, tindrem

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5x-2}{x-2} = y \Leftrightarrow 5x - 2 = y(x-2) \Leftrightarrow 5x - 2 = xy - 2y \Leftrightarrow (5-y)x = 2 - 2y \Rightarrow x = \frac{2-2y}{5-y}$$

Observem que, si $y = 5$ llavors no existeix cap antiimatge de y. En conseqüència, f no és suprajectiva (ni bijectiva, atés que, per ser-ho hauria de ser injectiva i suprajectiva).

(b) Siga G la correspondència de $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ en $B = \{1, 4, 6, 9\}$ definida per

$$G = \left\{(x, y) \in A \times B : \frac{y}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$$

(i) Descriviu el graf d'aquesta correspondència per extensió

(ii) És G una aplicació?

(iii) Calculeu $\operatorname{dom} G$ i $\operatorname{Im} G$

(iv) Calculeu $G \circ G^{-1}$

Solució:

(i) $G = \{(1, 1), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9), (4, 4)\}$

(ii) No és una aplicació, perquè hi ha elements de A que tenen diverses imatges (o perquè n'hi ha un que no en té cap).

(iii) $\operatorname{dom} G = \{1, 2, 3, 4\}$, $\operatorname{Im} G = \{1, 4, 6, 9\}$

(iv) Per calcular $G \circ G^{-1}$, observem que 1 pertany a l'antiimatge de tots els elements de B, i que la imatge de 1 és B. Per tant, $G \circ G^{-1}(y) = B$ per a qualsevol $y \in B$. Així que el graf de $G \circ G^{-1}$ és el producte cartesià $B \times B$.

Qüestió 6 (2 pt) (a) Donats tres conjunts A, B i C determineu si són vertaderes o falses les afirmacions següents. En cas que ho siguen, demostreu-les; en cas que no, mostreu-ne un contraexemple.

(i) $A \setminus (A \setminus B) \subseteq B$

(ii) $A \setminus B = \emptyset \Rightarrow A = B$

(ii) $A \subseteq ((B \setminus C)^c \setminus A)^c$

Solució:

(i) És cert, perquè
$A \setminus (A \setminus B) = A \cap (A \setminus B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B \subset B$

(ii) Fals. Si A és un subconjunt de B, però no és B, llavors, $A \setminus B = \emptyset$.
Per exemple, si $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$, llavors $A \setminus B = \emptyset$ i $A \neq B$.

(ii) Cert: $((B \setminus C)^c \setminus A)^c = ((B \setminus C)^c \cap A^c)^c = (B \setminus C) \cup A \supset A$

(b) Dins el conjunt dels nombres naturals, considerem el conjunt $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Trobeu, si és possible, un recobriment de A que no siga partició de A.

(ii) Trobeu, si és possible, una partició de A que no siga recobriment de A.

Justifiqueu les respostes.

Solució:

(i) La família de conjunts $\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$ és un recobriment, perquè $A \subset \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\}$, però no és una partició, perquè $\{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} \neq \emptyset$

(ii) Això no és possible, perquè les particions sempre són recobriments.