ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Problemes proposats: RESOLUCIÓ DE RECURRÈNCIES

1. Resol, directament, la recurrència lineal corresponent per a calcular la forma explícita de la successió definida per
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{3} \quad , \quad n \geq 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

2. Resol el problema de les torres d'Hanoi: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$, a partir de l'equació característica corresponent i verifica que trobes el mateix resultat que per resolució directa.

3. Resol la recurrència lineal (no homogènia) de primer ordre: $a_{n+1} = a_n + 3n$, a partir de l'equació característica. Comprova que trobes el mateix resultat que per resolució directa.

4. Resol la recurrència lineal (no homogènia) de segon ordre: $a_{n+2} = 2a_n + 3$, a partir de l'equació característica.

5. Considera la successió definida per
$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 3 \end{cases}$$
   a) Troba el valor de a_5

   b) Resol la recurrència corresponent i troba una expressió explícita per a a_n

6. Resol la recurrència lineal homogènia de segon ordre definida per
$$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad , \quad \text{amb} \quad a_1 = -6 \quad \text{i} \quad a_2 = 20.$$

7. a) Troba la solució general de la recurrència lineal homogènia de segon ordre definida mitjançant
$$a_{n+1} = \frac{a_{n+2} + 9a_n}{6}$$
   b) Determina els valors de les constants per a $a_1 = -3$ i $a_2 = 9$.

8. Considera la successió definida per
$$\begin{cases} a_{n+2} = -a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n \\ a_1 = 1 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$
   a) Troba el valor de a_5

   b) Resol la recurrència per a expressar a_n en forma explícita.

   c) Calcula el límit de la successió $\{a_n\}$

9. Determina la solució general de la recurrència de segon orden definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \\ a_1 = 4 \quad , \quad a_2 = 20 \end{cases}$$

10. Determina la solució general de la recurrència de segon ordre definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_n \\ a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4 \end{cases}$$

11. Determina la forma explícita de la succesió definida mitjançant

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

12. Considera la succesió recurrent definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a) Resol la recurrència i expressa a_n explícitament.

b) Compara els ordres de magnitud de $\{a_n\}$ i de $\{b_n\} = \{\log(n)\}$. Justifica la teua resposta.

c) Torna a resoldre els apartats a) i b) considerant el problema no homogeni, amb segon membre 2^n.

13. Considera la successió definida per

$$\begin{cases} 2a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a) Escriu els cinc primers termes de la successió.

b) Troba l'expressió explícita de a_n resolent la recurrència corresponent.

c) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $6n$.

14. Determina la solució particular de la recurrència de segon ordre definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1 \end{cases}$$

15. Considera la recurrència lineal homogènia de segon ordre:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0$$

a) Resol-la a partir de l'equació característica

b) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $t_n = 2$

c) Troba la solució particular de la recurrència lineal no homogènia (apartat b) amb $a_1 = a_2 = 1$

d) Determina el ordre de magnitud de la solució obtinguda en el apartat anterior.

16. Considera la recurrència lineal homogènia de segon ordre:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \ , \text{ amb } a_1 = 2 \ , \ a_2 = 8$$

a) Resol-la a partir de l'equació característica

b) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $t_n = n - n^2$

c) Troba la solució particular de la recurrència lineal no homogènia (apartat b) amb $a_1 = 2$, $a_2 = 8$

d) Determina el ordre de magnitud de la solució obtinguda en el apartat anterior.

17. Ens regalen tres segells i decidim començar una col·lecció. L'any següent la incrementem en tres segells més. Si cada any comprem un nombre de segells igual al doble de què comprem l'any anterior, ¿ al cap de quants anys haurem superat el milió de segells?

18. Considera a_n com el nombre d'instruccions d'un determinat algorisme que treballa sobre n dades d'entrada. El problema que genera l'algorisme es resol mitjançant dues instruccions per a una única entrada. Si existeixen $n + 1$ dades, el problema es redueix a altre amb n dades, després d'executar n^2 instruccions. Si es coneix que la complexitat de l'algorsme és cúbica; és a dir, que $a_n \in \Theta(n^3)$, troba una expressió explícita per a a_n sense fer-ne ús del mètode de l'equació característica.

19. Troba les solucions generales de les recurrències d'ordre superior a dos:

a) $t_{n+3} = t_{n+2} + 2t_{n+1} - 2t_n$ (homogènia)

b) $t_{n+4} = 4t_{n+3} + 3t_{n+2} + 4t_{n+1} - 4t_n$ (homogènia)

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Exercicis addicionals: RESOLUCIÓ DE RECURRÈNCIES

1. La recurrència donada per: $a_n = 3a_{n/2} + n$, $a_1 = 1$, apareix en aplicar un algorisme conegut como "dividir per a vèncer"

   a) Considera el canvi de variable $n = 2^k$ per tal de reduir el problema a una recurrència lineal (no homogènia) de primer ordre

   b) Resol el problema de forma directa, sense fer-ne ús de l'equació característica

   c) Resol ara el problema a partir de l'equació característica corresponent. Verifica que els dos resultats coincideixen.

2. Considera la recurrència lineal homogènia de segon ordre:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$$

   a) Resol-la a partir de l'equació característica

   b) Resol el mateix problema no homogeni, amb segon membre $t_n = 3^n$.

   c) Troba la solució particular de la recurrència lineal no homogènia (apartat b) amb $a_1 = a_2 = 1$

*3. Troba les solucions generales de les recurrències d'ordre superior a dos:

   a) $t_{n+3} = t_{n+2} + 2t_{n+1} - 2t_n + 2^n$ (no homogènia).

   b) $t_{n+4} - 4t_{n+3} - 3t_{n+2} - 4t_{n+1} + 4t_n = 3n^2 - 5$ (no homogènia).

4. Amb els valors inicials $a_1 = a > 0$ i $a_2 = b > a$, prova que la successió $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ és convergent i que el seu límit és $\frac{1}{3}(a + b)$.

*5. Suposem que disposem en una reserva natural d'una població composta per depredadors i preses. Ambdues poblacions van a reproduir-se i els primers es van a alimentar dels segons. Si d_n i p_n simbolitzen les poblacions respectives de depredadors i de preses després de n anys, en la reserva es verifica la llei de recurrència

$$\begin{cases} d_{n+1} = \alpha \cdot d_n + \beta \cdot p_n \\ p_{n+1} = \mu \cdot p_n - \delta \cdot d_n \end{cases} \quad \alpha > 0 \ , \ \beta > 0 \ , \ \mu > 0 \ , \ \delta > 0$$

   a) Comprova que les poblacions considerades satisfan les recurrències de segon ordre

$$\begin{aligned} d_{n+2} - (\alpha + \mu)\, d_{n+1} + (\alpha\mu + \beta\delta)\, d_n &= 0 \\ p_{n+2} - (\alpha + \mu)\, p_{n+1} + (\alpha\mu + \beta\delta)\, p_n &= 0 \end{aligned}$$

   b) Per als valors $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{4}{3}$, $\delta = \frac{1}{3}$ resol l'equació i verifica que ambdues successions convergeixen.

   c) Per a valors inicials de $p_0 = 300$ i $d_0 = 30$, quin és el valor límit en què s'estabilitzaria cada una de les dues poblacions?

   d) Per als valors $\alpha = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{1}{8}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{3}$ comprova que les dues poblacions s'extingiran, independentment dels valors inicials que tinguen.