Autòmats Finits

U.D. Computació

DSIC - UPV

Índex

Autòmat Finit Determinista (*AFD*)

Autòmat Finit Determinista (*AFD*)

Un Autòmat Finit Determinista (*AFD*) és una 5-tupla de la forma següent: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, on:

- Q és un conjunt finit d'estats
- Σ és un conjunt finit de símbols anomenat *alfabet*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ és una funció parcial anomenada *funció de transició*
- $q_0 \in Q$ és l'*estat inicial*
- $F \subseteq Q$ és el *conjunt d'estats finals*.

Quan la funció de transició és total direm que l'autòmat está *completament especificat* o és *complet*.

Representació: taula de transicions

$|Q|$ files i $|\Sigma|$ columnes. (i, j) és l'estat $\delta(q_i, a_j)$ on q_i és l'*i*-èssim element de Q i a_j el *j*-èssim de Σ.

Exemple

Siga $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1\})$ amb la definició de δ següent:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = q_0 & \delta(q_1, a) = q_2 & \delta(q_2, a) = q_2 \\ \delta(q_0, b) = q_1 & \delta(q_1, b) = q_1 & \delta(q_2, b) = q_2 \end{array}$$

La taula de transicions corresponent és:

	a	**b**
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_2

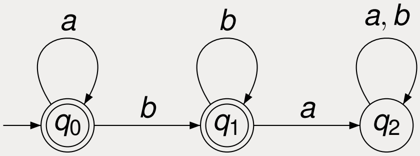
Representació: diagrama de transicions

És un graf dirigit tal que:

- El nombre de nodes del graf és $|Q|$, de forma que a cada node li correspon un estat que l'etiqueta.
- $\forall q_i, q_j \in Q, \forall a_k \in \Sigma$, si $\delta(q_i, a_k) = q_j$ aleshores el graf té un arc del node q_i al q_j etiquetat amb el símbol a_k.
- Se senyala l'estat inicial amb una fletxa curta que entra al node corresponent.
- Es marquen els nodes corresponents a estats finals amb un doble cercle.

Exemple

El diagrama de transicions corresponent a l'exemple anterior es mostra en la figura següent.



Extensió de la funció de transició a cadenes

Definim la funció $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ com segueix:
$\forall q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$
- $\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$

Com $\hat{\delta}(q, a) = \hat{\delta}(q, \lambda a) = \delta(\hat{\delta}(q, \lambda), a) = \delta(q, a)$, a partir d'ara, per comoditat escriurem δ en lloc de $\hat{\delta}$.

Llenguatge acceptat per un *AFD*

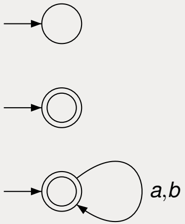
Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un *AFD*, i siga $x \in \Sigma^*$. Es diu que la cadena x és acceptada pel *AFD A* quan $\delta(q_0, x) \in F$.

Llenguatge acceptat per un *AFD*

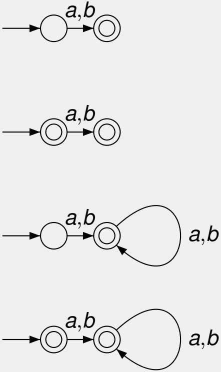
Es defineix el *llenguatge acceptat* pel *AFD A* com:

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* | \delta(q_0, x) \in F\}$$

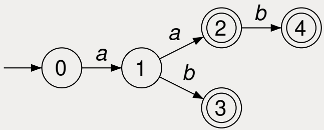
Exemples de *AFD*

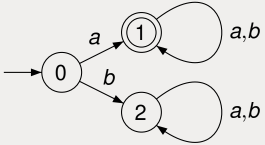


Exemples de *AFD*

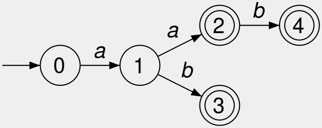


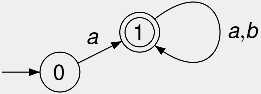
Exemples de *AFD*



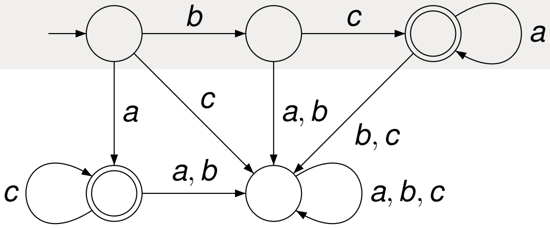


Exemples de *AFD*

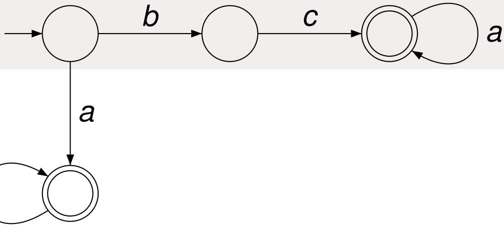




Exemples de *AFD*



Exemples de *AFD*



Autòmat Finit no Determinista (*AFN*)

Autòmat Finit no Determinista (*AFN*)

Un Autòmat Finit No Determinista (*AFN*) és una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, on:

- Q, Σ, $q_0 \in Q$, i $F \subseteq Q$ són el mateix conjunt d'estats, alfabet d'entrada, estat inicial i conjunt d'estats finals de la definició del AFD
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ és la *funció de transició*, definida també com una funció parcial.

Representació

Exemple

Siga $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\})$ on la funció de transició ve definida per:

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\} & \delta(q_1, a) = \emptyset & \delta(q_2, a) = \emptyset \\
\delta(q_0, b) = \{q_1, q_2\} & \delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\} & \delta(q_2, b) = \emptyset \\
\delta(q_0, c) = \{q_2\} & \delta(q_1, c) = \{q_2\} & \delta(q_2, c) = \{q_2\}
\end{array}
$$

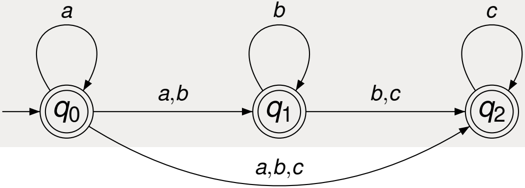
La corresponent taula de transicions és:

	a	**b**	**c**
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Representació

Exemple

El diagrama de transicions és:



Extensió de la funció de transicions a cadenes

Definim la funció $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ com segueix:
$\forall q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$:

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)$

Com $\hat{\delta}(q, a) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,\lambda)} \delta(p, a) = \bigcup_{p \in \{q\}} \delta(p, a) = \delta(q, a)$, a partir d'ara escriurem δ en loc de $\hat{\delta}$.

Llenguatge acceptat per un *AFN*

Llenguatge acceptat per un *AFN*

Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un *AFN*, es defineix el *llenguatge acceptat* pel AFN A com

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* | \delta(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}$$

Exemple d'análisi no determinista

Anem a calcular el resultat de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* de l'exemple anterior utilitzant un graf multietapa.

Exemple de análisi no determinista

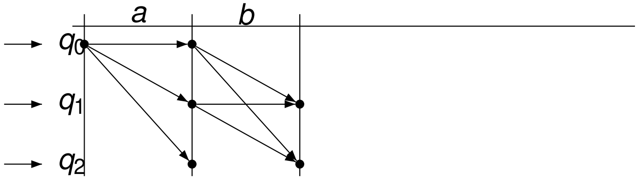
Anem a calcular el resultat de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* de l'exemple anterior utilitzant un graf multietapa.

Exemple de análisi no determinista

Anem a calcular el resultat de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* de l'exemple anterior utilitzant un graf multietapa.

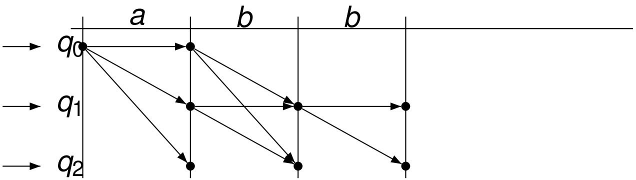
Exemple de análisi no determinista

Anem a calcular el resultat de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* de l'exemple anterior utilitzant un graf multietapa.



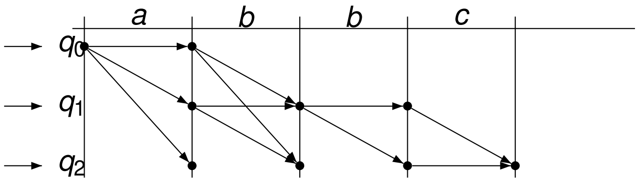
Exemple de análisi no determinista

Anem a calcular el resultat de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* de l'exemple anterior utilitzant un graf multietapa.



Exemple de análisi no determinista

Anem a calcular el resultat de $\delta(q_0, abbc)$ sobre el *AFN* de l'exemple anterior utilitzant un graf multietapa.



Equivalència entre *AFD* i *AFN*

- Tot *AFD* és un *AFN*, ja que es pot entendre com un cas particular.
- La forma d'obtenir un *AFD* equivalent a un determinat *AFN* consisteix a fer que els estats del *AFD* es corresponguen amb conjunts d'estats del *AFN*, i fer que la funció de transició del *AFD* simule el canvi de conjunts d'estats que es produeix en el *AFN* per a un mateix símbol d'entrada.

Equivalència entre *AFD* i *AFN*

- Extensió de la funció de transició a conjunts d'estats, $\delta' : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$:
  $\forall P \subseteq Q, a \in \Sigma \quad \delta'(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$
- Extensió de la funció de transició a conjunts d'estats i cadenes, $\delta'' : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$:
  - $\forall P \subseteq Q \quad \delta''(P, \lambda) = P$
  - $\forall P \subseteq Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma \quad \delta''(P, xa) = \delta'(\delta''(P, x), a)$

Equivalència entre *AFD* i *AFN*

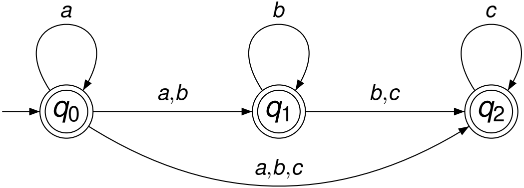
Equivalència entre *AFD* i *AFN*

Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un *AFN* tal que $L = L(A)$.
Definim un *AFD* $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ de forma que:

- $Q' = 2^Q, q_0' = \{q_0\}$,
- $F' = \{q' \in Q' | q' \cap F \neq \emptyset\}$,
- es defineix la funció de transició δ' com l'extensió de la funció de transició δ a conjunts d'estats.

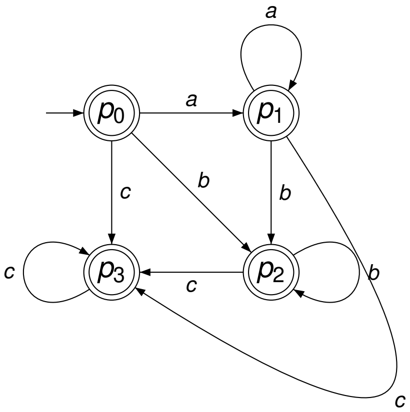
L'autòmat A' que es defineix és un *AFD*, ja que el perfil de la seua funció de transició és $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$.

Exemple



	a	**b**	**c**
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Exemple



Autòmata Finit amb transicions buides ($AF\lambda$)

Autòmata Finit amb transicions buides ($AF\lambda$)

Un Autòmata Finit amb transicions buides ($AF\lambda$) és una 5-tupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, on:

- Q, Σ, $q_0 \in Q$, i $F \subseteq Q$ són el mateix conjunt d'estats, alfabet d'entrada, estat inicial i conjunt d'estats finals de la definició del AFD
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$ la *funció de transicions*, definida també com una funció parcial.

Representació

Exemple

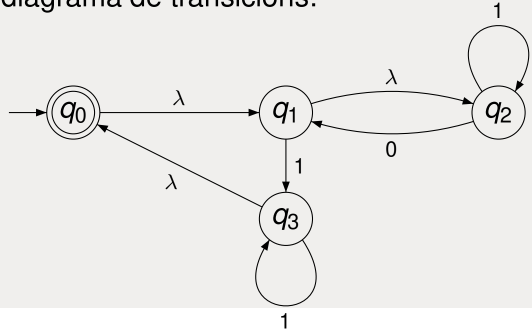
Siga $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ on la funció de transició ve definida per:

	0	**1**	λ
q_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_0\}$

Representació

Exemple

El diagrama de transicions:



Extensió de la funció de transicions a cadenes

Concepte de λ-clausura

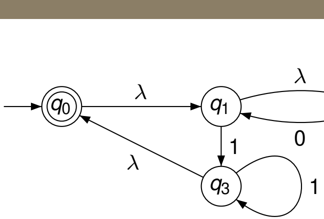
- Siga $q \in Q, \lambda - \mathit{clausura}(q) = \{q\} \cup \{q' | q'$ és accesible des de q a través de camins etiquetats amb $\lambda\}$.
- Siga $P \subseteq Q, \lambda - \mathit{clausura}(P) = \bigcup_{p \in P} \lambda - \mathit{clausura}(p)$.

Extensió a cadenes

$\forall q \in Q, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$:

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = \lambda - \mathit{clausura}(q)$
- $\hat{\delta}(q, xa) = \lambda - \mathit{clausura}\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a)\right)$

Exemple



$\lambda -$ *clausures*

- $\lambda - \textit{clausura}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\lambda - \textit{clausura}(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- $\lambda - \textit{clausura}(q_2) = \{q_2\}$
- $\lambda - \textit{clausura}(q_3) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Exemple

Càlcul de $\hat{\delta}(q_0, 01)$

$\hat{\delta}(q_0, 01) = \lambda - \textit{clausura}(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, 0)} \delta(p, 1))$ (1)

$\hat{\delta}(q_0, 0) = \lambda - \textit{clausura}(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, \lambda)} \delta(p, 0))$ (2)

$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \lambda - \textit{clausura}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$.

Substituint en (2):

$\hat{\delta}(q_0, 0) = \lambda - \textit{clausura}(\bigcup_{p \in \{q_0, q_1, q_2\}} \delta(p, 0)) =$
$\lambda - \textit{clausura}(\emptyset \cup \emptyset \cup \{q_1\}) = \lambda - \textit{clausura}(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$.

Substituint en (1):

$\hat{\delta}(q_0, 01) = \lambda - \textit{clausura}(\bigcup_{p \in \{q_1, q_2\}} \delta(p, 1)) =$
$\lambda - \textit{clausura}(\{q_2\} \cup \{q_3\}) = \lambda - \textit{clausura}(\{q_2, q_3\}) =$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$.

En un $AF\lambda$, $\hat{\delta}(q, a)$ no és necessàriament igual que $\delta(q, a)$ i $\hat{\delta}(q, \lambda)$ no és necessàriament igual que $\delta(q, \lambda)$.
És necessari distingir entre δ i $\hat{\delta}$.

Llenguatge acceptat per un $AF\lambda$

Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un $AF\lambda$, es defineix el *llenguatge acceptat* pel $AF\lambda$ A com

$$L(A) = \{x \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Equivalència entre *AFN* i $AF\lambda$

Tot *AFN* es pot interpretar com un $AF\lambda$ per al qual es compleix que $\forall q \in Q \quad \lambda - clausura(q) = \{q\}$.

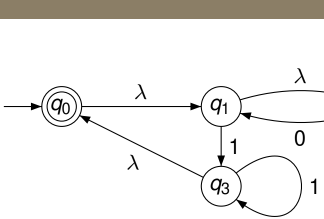
Equivalència entre *AFN* i $AF\lambda$

Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un $AF\lambda$. Definim un *AFN* $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$ on:

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{si} \quad \lambda - clausura(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ F & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

La funció δ' es defineix com:
$\forall q \in Q, a \in \Sigma \quad \delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$.

Exemple



$\lambda - $*clausures*

- $\lambda - clausura(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\lambda - clausura(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- $\lambda - clausura(q_2) = \{q_2\}$
- $\lambda - clausura(q_3) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Exemple

	0	**1**
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

El conjunt d'estats finals $F = \{q_0\}$ ja conté l'estat inicial, aleshores $F' = F$.