UNIDAD DIDÁCTICA 3

CONCEPTOS BÁSICOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

OBJETIVO

Introducir los conceptos básicos de operaciones con sucesos, probabilidad (concepto y propiedades), probabilidad condicional e independencia de sucesos, teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Contenidos

1. Operaciones con sucesos
2. Probabilidad: concepto y propiedades
3. Probabilidad de la suma de sucesos
4. Probabilidad condicional
5. Teorema de la probabilidad total
6. Independencia de sucesos
7. Teorema de Bayes

Sucesos

Ejemplo 1:

Población = Todos los lanzamientos de un dado.

E= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Suceso: “obtener número par” **A** ={2, 4, 6}

A dicho suceso le corresponde en la población el subconjunto de todos los lanzamientos ,en los que el resultado sea un número par (pertenece a **A**).

Sucesos

Ejemplo 2:

Población = Todos los jóvenes españoles.

Variable aleatoria= ESTATURA (en cms)

E: Números reales positivos

Suceso: “ESTATURA > 180” **A** =(180,....)

A este suceso **A** le corresponde en la población el subconjunto de jóvenes con estatura superior a 180 cm.

Sucesos

- **Suceso seguro**: todo **E**. Se cumple en toda la población.

- **Suceso imposible**: **Φ**. No contiene ningún valor de **E**. Ningún elemento de la población lo cumple.

Operaciones con sucesos

- **Suma** o **unión** de dos sucesos:

$C = A + B$ o $C = A \cup B$

A **C** le corresponde en la población el subconjunto de elementos que cumplen **A** o **B**, o ambos.

Operaciones con sucesos

- **Producto** o **intersección** de dos sucesos:

  $C = A \cap B$

  o $C = A \cdot B \Rightarrow C = AB$

  C: le corresponde el subconjunto de la población que verifica **A** y **B**.

Si $A \cap B = \Phi \Rightarrow$ **A** y **B** son excluyentes.

Operaciones con sucesos

- **Suceso contrario o complementario a A:** asociado a los elementos en que no se presenta **A**.

  Suceso contrario de **A**: $\overline{A}$

Operaciones con sucesos

Ejemplo 3: En la población de jóvenes españoles

A: ESTATURA mayor que 175 cms

B: SEXO =“chicas”

a) Define con palabras los subconjuntos de individuos de la población asociados a:

A+B; AB; $\overline{A}.\overline{B}$; $\overline{A}+\overline{B}$

b) ¿Cuál es el suceso complementario de A + B? ¿Y el de A.B? (Leyes de Morgan)

Operaciones con sucesos

RESPUESTA:

a)

A+B

Chicos con ESTATURA > 175

Chicas con ESTATURA > 175

Chicas con ESTATURA ≤ 175

AB

Chicas con ESTATURA > 175

Operaciones con sucesos

RESPUESTA:

$\overline{A}.\overline{B}$

Chicos con ESTATURA ≤ 175

$\overline{A}+\overline{B}$

Chicas con ESTATURA ≤ 175

Chicos con ESTATURA ≤ 175

Chicos con ESTATURA > 175

Operaciones con sucesos

RESPUESTA:

b)¿Cuál es el suceso complementario de A+B? ¿Y el de AB? (leyes de Morgan)

$\overline{A+B}$

Chicos con ESTATURA ≤ 175 = $\overline{A}.\overline{B}$

$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

Chicas con ESTATURA ≤ 175

Chicos con ESTATURA ≤ 175

Chicos con ESTATURA > 175

Operaciones con sucesos

Ejemplo 4: Un dispositivo se fabrica a partir de dos componentes C_1 y C_2. Sean los sucesos:

C_1: la componente C_1 funciona más de 5000 horas sin fallar

C_2: la componente C_2 funciona más de 5000 horas sin fallar

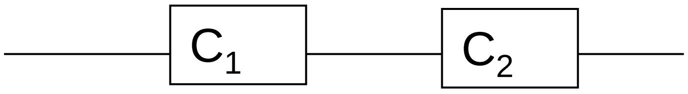
D: el dispositivo conjunto funciona más de 5000 horas sin fallar.

Operaciones con sucesos

Si las dos componentes C_1 y C_2 se conectan en serie (de forma que el dispositivo falla cuando lo hace una cualquiera de las dos componentes)

¿Qué relación existe entre el suceso D y los sucesos C_1 y C_2?

RESPUESTA:



$D = C_1 \cdot C_2$

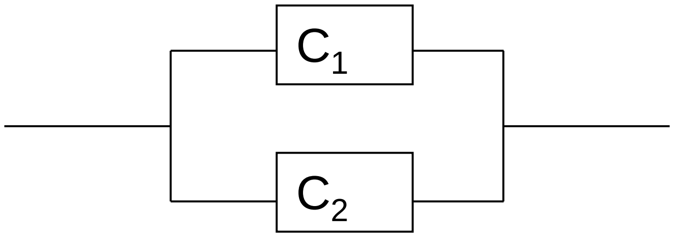
Operaciones con sucesos

Si C_1 y C_2 se conectan en paralelo (de forma que el dispositivo funciona mientras funcione al menos una cualquiera de las dos componentes)

¿Qué relación hay entre el suceso D y los sucesos C_1 y C_2?

RESPUESTA:

$D = C_1 + C_2$



Concepto de Probabilidad

Todo suceso tiene una **probabilidad:** **proporción de elementos de la población** que lo verifican.

Concepto de Probabilidad

En el ejemplo 1

probabilidad del suceso “resulta par”: proporción de veces que se obtiene un número par en la población de lanzamientos que se pueden realizar con el dado.

En el ejemplo 2

probabilidad del suceso “estatura > 175”: proporción de jóvenes en la población que tienen una estatura en ese rango.

Concepto de Probabilidad

Caso particular:

Si el conjunto de valores E que puede tomar una variable aleatoria, es finito (como en el caso del dado)

y además por razones de simetría, la probabilidad es la misma para cada uno de dichos valores (la proporción de elementos en la población para cada valor es la misma)

$$\Downarrow$$

Probabilidad de un suceso: cociente entre el número de valores asociados a dicho suceso y el número de valores de E.

Concepto de Probabilidad

EJERCICIO 1: *Si un dado es simétrico ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par al lanzarlo?*

RESPUESTA: ***3/6***

¿Por qué? A:"obtener número par"

A{2,4,6} 3 valores favorables al suceso

E{1,2,3,4,5,6} 6 valores posibles

Propiedades de la Probabilidad

La probabilidad de un suceso **A** : P(**A**)

1. P(**A**) $\geq$ 0 por ser una proporción.

2. P(**E**) =1

Propiedades de la Probabilidad

3. Si **A** y **B** son excluyentes

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

el número de elementos que verifican **A+B**, es la suma de los que presentan **A** más los que presentan **B**

Propiedades de la Probabilidad

4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

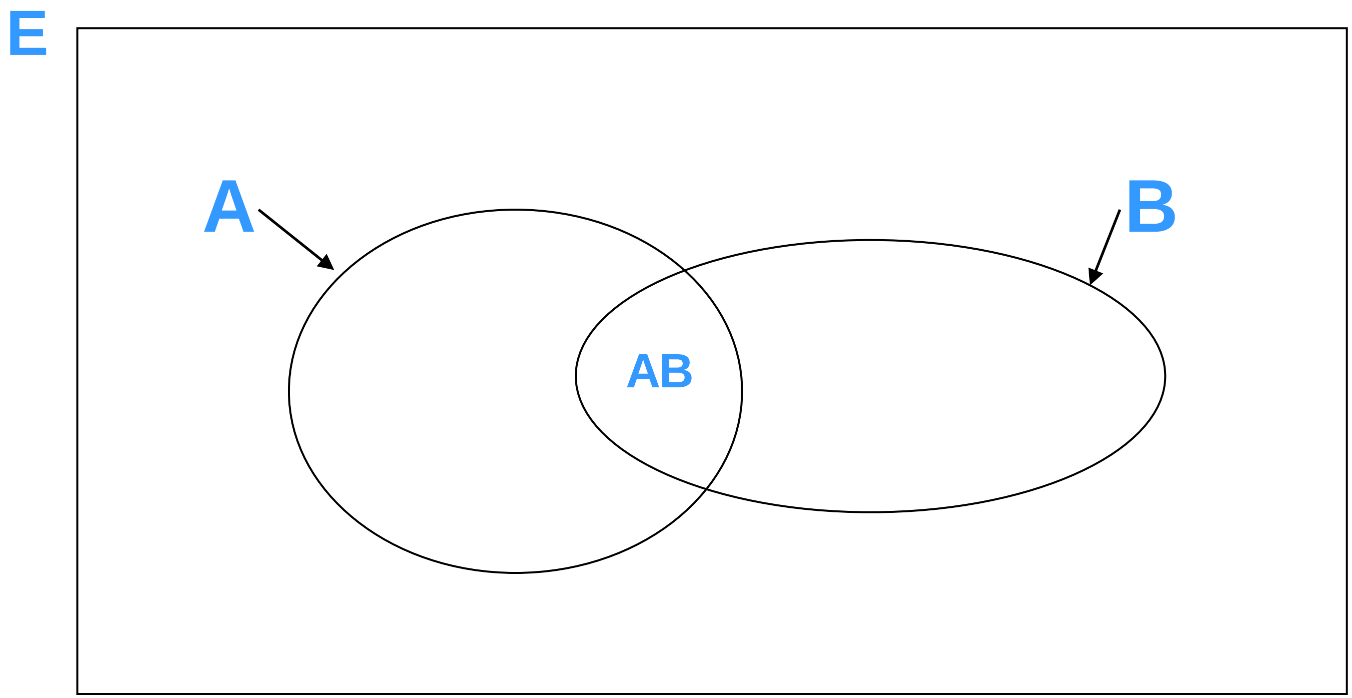
5. $P(A) \leq 1$

6. $P(\Phi)=0$

Probabilidad de la suma de sucesos

- Si **A** y **B** no son excluyentes

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Probabilidad de la suma de sucesos

EJERCICIO 2: *En el lanzamiento simultáneamente de dos dados simétricos.*

¿Cuánto vale la probabilidad del suceso A "en el primer dado se obtiene un 6" y la del suceso B "en el segundo dado se obtiene un 6"?

P(A)=1/6   P(B)=1/6

¿A y B son excluyentes?

No

¿Cuál es el suceso A+B?

A+B= "En al menos un dado sale 6"

¿Su probabilidad es mayor, menor o igual a 2/6?

Menor

¿Por qué?

Sumando 1/6+1/6 se incluye dos veces la intersección AB.

P(A+B)=1/6+1/6-1/36 < 2/6

Probabilidad de la suma de 3 sucesos

EJERCICIO 3:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$$
$$-P(BC)+P(ABC)$$

Probabilidad condicional

Dados **A** y **B**, donde P(**B**)>0,

Probabilidad de **A** condicionado a **B** :

la probabilidad de que se presente **A** en el subconjunto de la población que verifica **B**.

Se simboliza como P(**A**/**B**)

Probabilidad condicional

EJERCICIO 4: *¿cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado simétrico, salga un número mayor que 3 (suceso A) sabiendo que el número que ha salido ha sido par (suceso B)?*

RESPUESTA:

$A=\{4,5,6\}$ $B=\{2,4,6\}$

$P(A/B)=2/3$

Probabilidad condicional

$$P(A/B)$$

Se calcula como el cociente entre el número de individuos que verifican tanto **A** como **B** (o sea que verifican **AB**), dividido por el número de individuos que verifican **B**:

$$P(A/B)=P(AB)/P(B)$$

Probabilidad condicional

Probabilidad del suceso producto

De la definición de probabilidad condicional:

P(AB) = P(B) x P(A/B)

o también:

P(AB) = P(A) x P(B/A)

Probabilidad condicional

EJERCICIO 5:

Población:131 alumnos de la UPV

(datos curs8990.sf3)

Calcula en dicha población

a)Probabilidad del suceso CHICA?

b)Probabilidad del suceso PESO ≤ 55?

c)Probabilidad del suceso (PESO≤55)/CHICA

d)Probabilidad del suceso CHICA/(PESO≤55)

Probabilidad condicional

RESPUESTA:

	CHICA	CHICO	
PESO≤55	26	0	26
PESO>55	16	89	105
	42	89	131

P(CHICA)=42/131=0,3206

P(PESO≤55)=26/131=0,1985

P(PESO≤55/CHICA)=26/42=0,619

P(CHICA/PESO≤55)=26/26=1

Probabilidad del suceso producto

EJERCICIO 6:

Al seleccionar al azar un individuo de la población del ejercicio 5

¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica de peso ≤ 55 kgs?

P(chica y peso ≤55)=26/131=0,1985

¿Resulta igual al producto de la probabilidad de que sea chica por la probabilidad de que el peso sea ≤ 55?

NO

P(chica).P(peso≤55)=(42/131)(26/131)≠0,1985

Probabilidad del suceso producto

EJERCICIO 7:

Comprobar las dos expresiones de la probabilidad del suceso producto en el ejemplo manejado en el ejercicio 5.

$P(chica\ y\ peso \leq 55)=26/131=0{,}1985$

$P(chica\ y\ peso \leq 55)=$
$=P(peso \leq 55) x P(chica/(peso \leq 55))=$
$=(26/131)x(26/26)=26/131=0{,}1985$

$P(chica\ y\ peso \leq 55)=$
$P(chica) x P((peso \leq 55)/chica)=$
$(42/131)x(26/42)=26/131=0{,}1985$

Probabilidad condicional y del producto

EJERCICIO 8

Se detectó un virus en el sistema operativo de teléfonos móviles que afecta a aparatos de tres modelos distintos A, B y C.

Se han analizado los teléfonos móviles de los viajeros presentes en la sala de espera de la terminal de un aeropuerto, con los siguientes resultados:

El 50% de los teléfonos son del modelo A y el 30% del modelo B, y el resto del C.

EJERCICIO 8

- Del total de teléfonos analizados, un 20% son del modelo A y no están infectados.
- Un 40% de los teléfonos del modelo B ha contraído el virus.
- Un 1% de los teléfonos es del modelo C y no está infectado.

EJERCICIO 8

a) Si elegimos al azar un teléfono y resulta ser del modelo A, ¿qué probabilidad hay de que tenga el virus?

b) ¿Qué porcentaje de los teléfonos del modelo C analizados no está afectado por el virus?

EJERCICIO 8

RESPUESTA:

<u>SUCESOS</u>**:**

- A: el teléfono es del modelo A
- B: el teléfono es del modelo B
- C: el teléfono es del modelo C
- V: el teléfono está afectado por el virus (está infectado)

<u>PROBABILIDADES</u>**:**

$P(A)=0,5$ $P(B)=0,3$ $P(C)=1-0,5-0,3=0,2$

$P(A\cap\overline{V})=0,2$ $P(V/B)=0,4$ $P(C\cap\overline{V})=0,01$

EJERCICIO 8

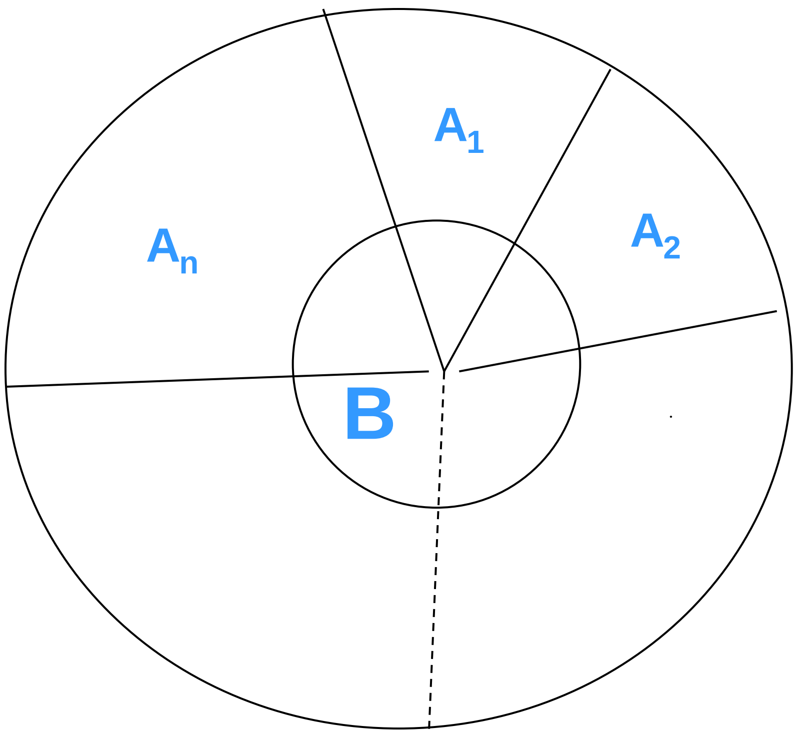
a) $P(V/A)=1-P(\overline{V}/A)=1-[P(A\cap\overline{V})/P(A)]=$

$=1-(0,2/0,5)=0,6$

b) $P(\overline{V}/C) = P(C \cap \overline{V})/P(C)=0,01/0,2=0,05$

Teorema de la probabilidad total

- Suceso **B** que se presenta asociado a cada uno de los n sucesos A_1, A_2,..., A_n excluyentes. $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$



Teorema de la probabilidad total

Se conocen $P(A_i)$ y $P(B/A_i)$

¿$P(B)$?

Como

$$B = A_1B + A_2B + \ldots + A_nB$$

$$\Downarrow$$

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+\ldots+P(A_nB)=$$

$$= P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(B/A_n)$$

Teorema de la probabilidad total

EJERCICIO 9:

En una fábrica se dispone de dos líneas para producir pantallas. En la primera hay un 1% de defectuosas. La segunda tiene el doble de capacidad productiva que la primera, y en ella hay un 2% de defectuosas.

a)¿A qué probabilidades condicionales corresponden los valores 1% y 2%?

b)¿Cuál es el porcentaje de pantallas defectuosas producidas en total?

Teorema de la probabilidad total

RESPUESTA:

a)

A_1: *pantalla procede de línea 1*

A_2: *pantalla procede de línea 2*

B: defectuosa

$1\% = P(B/A_1)$ *y* $2\% = P(B/A_2)$

Otros datos:

$P(A_1) = 1/3$ *y* $P(A_2) = 2/3$

b)

$P(B) = P(A_1).\ P(B/A_1) + P(A_2).\ P(B/A_2) =$

$= (1/3) \times 0{,}01 + (2/3) \times 0{,}02 = 0{,}017 \Rightarrow$ **1,7 %**

Teorema de la probabilidad total

EJERCICIO 10

Con los datos del ejercicio 8,

¿Qué probabilidad hay de que un teléfono tenga el virus?

RESPUESTA:

$$P(V)=P(V/A)P(A)+P(V/B)P(B)+P(V/C)P(C)=$$

$$=0{,}6\text{x}0{,}5+0{,}4\text{x}0{,}3+(1-0{,}05)\text{x}0{,}2=0{,}61$$

Independencia de sucesos

Dos sucesos **A** y **B** se dice que son independientes si:

1- $P(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = P(\mathbf{A})$

2- $P(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = P(\mathbf{A}/\overline{\mathbf{B}})$

3- $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = P(\mathbf{B})$

4- $P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = P(\mathbf{B}/\overline{\mathbf{A}})$

5- $P(\mathbf{AB}) = P(\mathbf{A})P(\mathbf{B})$

6- $P(\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}) = P(\overline{\mathbf{A}})P(\overline{\mathbf{B}})$

7- $P(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{B}) = P(\overline{\mathbf{A}})P(\mathbf{B})$

8- $P(\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}) = P(\mathbf{A})P(\overline{\mathbf{B}})$

Independencia de sucesos

EJERCICIO 11 :

En una baraja española (40 cartas, 10 de cada palo) sea el experimento aleatorio sacar una carta al azar y considérense los sucesos siguientes:

A = sacar un as

B = sacar un oro

Si se trata de adivinar si ha salido un as ¿sirve para algo saber que ha salido un oro? ¿por qué?

RESPUESTA:

No.

P(A) = P(sacar as) = 4/40 =0,1

P(A/B) = P(sacar as/ha salido un oro) = 1/10=0,1

Son dos sucesos independientes

Independencia de sucesos

EJERCICIO 12

Una empresa de venta por correo considera tres posibles errores al enviarse un pedido:

A: el artículo enviado no es el solicitado

B: el artículo se extravía

C: el artículo sufre desperfectos en el transporte

El suceso *A* es independiente de los sucesos *B* y *C.*

Los sucesos *B* y *C* son mutuamente excluyentes.

Las probabilidades de los sucesos individuales son $P(A)=0{,}02$, $P(B)=0{,}01$ y $P(C)=0{,}04$.

Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de estos errores para un pedido escogido al azar.

Independencia de sucesos

RESPUESTA:

SUCESOS Y PROBABILIDADES**:**

A: el artículo enviado no es el solicitado → $P(A) = 0{,}02$

B: el artículo se extravía → $P(B) = 0{,}01$

C: el artículo sufre desperf. en el transporte → $P(C) = 0{,}04$

[1] A independiente de B y C

[2] B y C mutuamente excluyentes

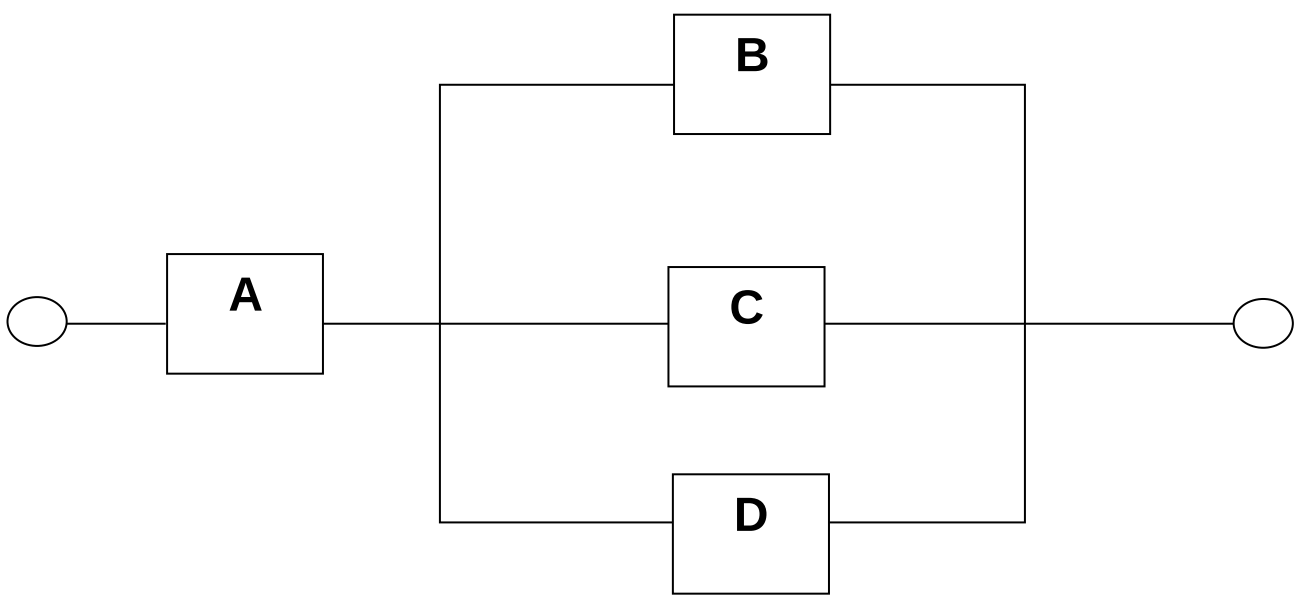
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)xP(B)^1 - P(A)xP(C)^1 - P(\Phi) + (0{,}02x0) = \underline{0{,}069}$

Independencia de sucesos

EJERCICIO 13

El dispositivo de la figura esta formado por 4 componentes (A, B, C, D) montados de la siguiente forma:



EJERCICIO 13

La fiabilidad de los componentes A es del 95% a las 1000 horas, y la de B, C y D del 80% a las 1000 horas.

¿Cuál es la fiabilidad del dispositivo a las 1000 horas?

EJERCICIO 13

SOLUCIÓN

<u>SUCESOS</u>**:**

- A: duración del componente A ≥ 1000 h
- B: duración del componente B ≥ 1000 h
- C: duración del componente C ≥ 1000 h
- D: duración del componente D ≥ 1000 h
- Disp: duración del dispositivo ≥ 1000 h
- Por la naturaleza de los elementos que intervienen en el problema sabemos que A, B, C y D son independientes.

EJERCICIO 13

PROBABILIDADES**:**

- Fiabilidad de A → P(A) = 0,95
- Fiabilidad de B → P(B) = 0,8
- Fiabilidad de C → P(C) = 0,8
- Fiabilidad de D → P(D) = 0,8
- Fiabilidad de Disp → P(Disp) ?

EJERCICIO 13

$$\mathrm{Disp} = A \cap \left(B \cup C \cup D\right)$$

$$P(\mathrm{Disp}) = P\left(A \cap \left(B \cup C \cup D\right)\right) = P(A) x P\left(B \cup C \cup D\right);$$

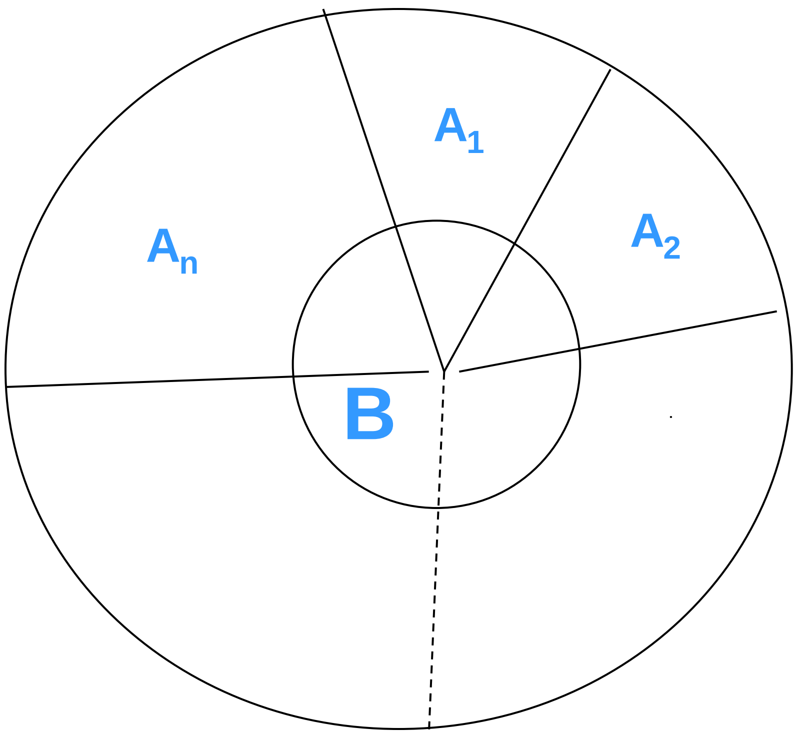
$$P\left(B \cup C \cup D\right) = 1 - P\left(\overline{B \cup C \cup D}\right) = 1 - P\left(\overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}\right) = 1 - P(\overline{B}) x P(\overline{C}) x P(\overline{D}) = 1 - [0,2]^3 = 0,992$$

$$\underline{\left|P(\mathrm{Disp})\right.} = P(A) x P\left(B \cup C \cup D\right) = 0,95 \text{ x } 0,992 = \underline{\left.0,9424\right|}$$

Teorema de Bayes

- Suceso **B** asociado a cada uno de los n sucesos **A_1**, **A_2**,..., **A_n** excluyentes.

E: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$



Teorema de Bayes

Se conocen $P(A_k)$ y $P(B/A_k)$

¿$P(A_k/B)$?

$$P(\mathbf{A}_k/\mathbf{B}) = \frac{P(\mathbf{A}_k\mathbf{B})}{P(\mathbf{B})} = \frac{P(\mathbf{A}_k)P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_k)}{P(\mathbf{B})}$$

Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(\mathbf{B})=P(\mathbf{A}_1)P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_1)+P(\mathbf{A}_2)P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_2)+\ldots+P(\mathbf{A}_n)P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_n)$

Sustituyendo esta expresión en el denominador anterior se obtiene el resultado conocido como **Teorema de Bayes**

$$P(\mathbf{A}_k/\mathbf{B}) = \frac{P(\mathbf{A}_k)P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(\mathbf{A}_i)P(\mathbf{B}/\mathbf{A}_i)}$$

Teorema de Bayes

Ejemplo:

En un proceso se fabrican circuitos en dos líneas distintas *(Estos son los dos sucesos* A_1 *y* A_2 *en los que se particiona toda la población de circuitos fabricados).* La primera línea tiene el doble de capacidad de producción que la segunda. El suceso B es que un circuito fabricado sea defectuosos.

La primera línea produce 0,5% de circuitos defectuosos. La segunda línea produce 0,3% de circuitos defectuosos.*(Estas son las probabilidades condicionales* $P(B/A_i)$*)*

Teorema de Bayes

EJERCICIO 14:

En el proceso se detecta un circuito defectuoso. ¿Cuánto vale la probabilidad de que proceda de la segunda línea?.

(O sea cuánto vale $P(A_2/B)$)

Calcula aplicando el Teorema de Bayes la probabilidad solicitada.

Teorema de Bayes

RESPUESTA:

Datos: $P(A_1)=2/3$ $P(A_2)=1/3$ $P(B/A_1)=0,005$ $P(B/A_2)=0,003$

Teorema de Bayes:

$$P(\mathbf{A_2}/\mathbf{B}) = \frac{P(\mathbf{A_2})P(\mathbf{B}/\mathbf{A_2})}{\sum_{i=1}^{2} P(\mathbf{A_i})P(\mathbf{B}/\mathbf{A_i})} \Rightarrow$$

$$P(\mathbf{A_2}/\mathbf{B}) = \frac{(1/3)x0,003}{(2/3)x0,005 + (1/3)x0,003} = 0,23$$

Ejercicios evaluación

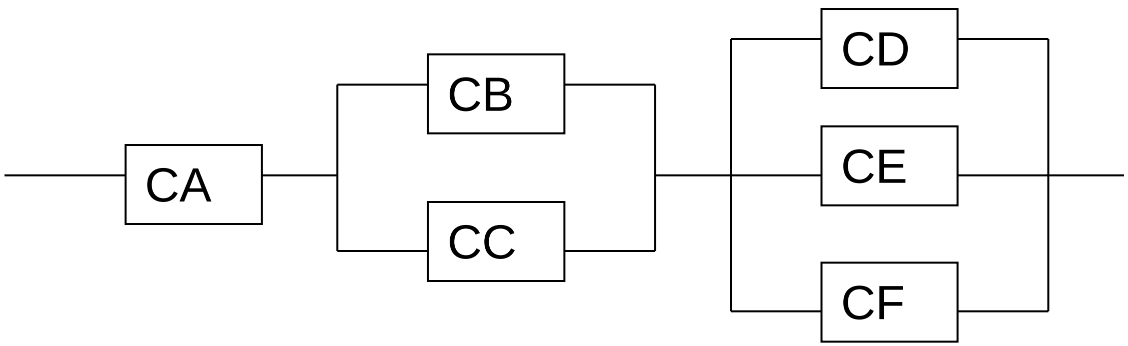
1.- En un proceso productivo se fabrican componentes electrónicos en tres líneas distintas. La primera línea produce el 35%, con un 0,1% de componentes defectuosos. La segunda línea fabrica el 40% con un 0,5% de componentes defectuosos. En la tercera línea hay un 0,7% de componentes defectuosos.

Si se extrae al azar un componente de la producción total ¿Cuánto vale la probabilidad de que sea defectuoso?

En un determinado instante, el proceso detecta un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho componente proceda de la primera línea?.

Ejercicios evaluación

2- El dispositivo de la figura esta formado por seis componentes (CA, CB, CC, CD, CE, CF) montados de la siguiente forma:



Ejercicios evaluación

Sean los sucesos:
A= [Componente CA funciona correctamente al menos 5000 horas]
B= [Componente CB funciona correctamente al menos 5000 horas]
C= [Componente CC funciona correctamente al menos 5000 horas]
D= [Componente CD funciona correctamente al menos 5000 horas]
E= [Componente CE funciona correctamente al menos 5000 horas]
F= [Componente CF funciona correctamente al menos 5000 horas]

a) Expresar el suceso DI= [Dispositivo sigue funcionando al cabo de 5000 horas] a partir de los sucesos A, B, C, D, E, F. ¿Sobre qué población esta definido dicho suceso?.

b) La fiabilidad de los componentes CA, CB y CC es del 95% a las 5000 horas, y la de CD, CE y CF del 80% a las 5000 horas. ¿Cuál es la fiabilidad del dispositivo a las 5000 horas (P(DI))?.