Ejercicios Tema 3

Percepción

Curso 2021/2022

1. Sea un problema de clasificación en dos clases A y B con muestras:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   Se sugiere realizar una proyección lineal de las muestras con $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   - ¿Crees que esta proyección es adecuada para este problema?
   - ¿Podrías sugerir una proyección lineal mejor?

2. Sea $W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

   - Calcular los valores y vectores propios
   - Sea $\mathbf{x} = (1\ 0\ 3)^t$, proyecta a un espacio $k = 2$ empleando una matriz de proyección formada por los dos vectores propios de mayor valor propio asociado

3. Dadas N muestras $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N\}$, $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^D$, $W \in \mathbb{R}^{D\times k}$ la matriz con los k primeros vectores propios de $\Sigma_{\mathbf{x}}$ y sea $\mathbf{y}_n = W^t(\mathbf{x}_n - \overline{\mathbf{x}})$ la proyección de $\mathbf{x}_n$ en el espacio definido por dichos vectores propios (PCA). Demuestra que $\Sigma_{\mathbf{y}}$ es diagonal. O dicho de otra forma, si calculáramos la matriz de covarianzas de las mismas N muestras una vez proyectadas, esta matriz de covarianzas sería diagonal. O sea, esto implicaría que PCA *decorrela* los datos.

4. Se dispone de un conjunto de muestras en $\mathbb{R}^2$ clasificadas en dos clases:

n	1	2	3	4
x_1	2	-1	1	-2
x_2	2	1	-1	-2
c	0	1	1	0

   Por otra parte se ha calculado una proyección alternativa (LDA), obteniéndose el siguiente vector de proyección:

	$\mathrm{W_{alt}}$	
w_1	1	0

   Se pide:

   a) Calcula los vectores de proyección PCA del conjunto de muestras y represéntalos gráficamente
   b) Representa gráficamente la proyección de las muestras mediante PCA a $\mathbb{R}$
   c) Representa gráficamente la proyección de las muestras mediante la proyección alternativa a $\mathbb{R}$
   d) ¿Qué proyección (PCA o la alternativa) consideras más adecuada para minimizar el error de clasificación con un clasificador lineal?

5. Se tiene el siguiente conjunto de datos para dos clases en $\mathbb{R}^5$:

Muestra						Clase
x_1	4	1	-1	1	0	A
x_2	2	-1	1	0	1	A
x_3	4	5	-2	3	-1	A
x_4	-2	2	-3	-1	-2	B
x_5	2	-7	5	2	-3	B

Se ha empleado PCA para hallar los valores y vectores propios correspondientes, que se muestran en la siguiente tabla redondeados a dos decimales:

w_1	0,00	0,82	$-0{,}56$	$-0{,}03$	0,12	23,64
w_2	0,83	0,15	0,23	0,45	0,18	6,85
w_3	0,13	$-0{,}14$	0,00	$-0{,}52$	0,84	2,06
w_4	$-0{,}48$	0,41	0,64	0,30	0,32	0,25
w_5	$-0{,}25$	$-0{,}35$	$-0{,}47$	0,66	0,39	0,00

Se pide:

a) Calcular la proyección PCA a $\mathbb{R}^2$ de las muestras dadas.

b) Si se quiere emplear un clasificador lineal, ¿bastaría con la proyección PCA propuesta o sería necesario aplicar otra proyección? Razona la respuesta.

6. Se tiene el siguiente conjunto de datos en $\mathbb{R}^5$ para tres clases distintas:

	Muestra					Clase
x_1	1	-1	-5	1	3	1
x_2	-1	0	3	0	-2	1
x_3	3	1	5	1	3	2
x_4	2	2	2	-1	-2	2
x_5	-4	-2	-3	1	-3	3
x_6	-1	0	4	-2	4	3

Se ha realizado el proceso para obtener proyecciones con PCA, dando el siguiente conjunto de vectores y valores propios (redondeados a dos decimales):

	$\mathrm{W}_{\mathrm{PCA}}$					λ
w_1	0,35	0,33	$-0{,}78$	0,01	$-0{,}40$	102,77
w_2	0,25	$-0{,}07$	$-0{,}35$	$-0{,}36$	0,83	49,92
w_3	0,83	$-0{,}43$	0,24	0,25	$-0{,}08$	22,76
w_4	$-0{,}13$	0,08	$-0{,}20$	0,90	0,35	6,02
w_5	0,32	0,83	0,42	0,01	0,15	0,00

Se pide:

a) Si se quiere que el error de reconstrucción con PCA sea menor que 5, ¿a qué dimensión mínima habría que proyectar? ¿Y si sólo se requiriera un error de reconstrucción de 10?

b) Realizar la proyección de las muestras $x_1, \ldots, x_6$ mediante PCA a $\mathbb{R}^2$

c) Representar gráficamente la proyección.

7. Se dispone de un conjunto de muestras en $\mathbb{R}^3$ clasificadas en cuatro clases:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	4	4	-2	2	-2	2	-4	-4
x_2	4	4	2	-2	2	-2	-4	-4
x_3	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
c	A	B	D	A	C	B	D	C

Por otra parte se ha calculado otra proyección, obteniéndose los siguientes vectores de proyección:

	W_{alt}		
w_1	0	0	1
w_2	1	0	0

Se pide:

a) Calcula los vectores de proyección PCA del conjunto de muestras.

b) Calcula la proyección de las muestras mediante PCA a $\mathbb{R}^2$.

c) Calcula la proyección de las muestras mediante la otra proyección dada a $\mathbb{R}^2$.

d) ¿Qué proyección (PCA o la otra) consideras más adecuada para minimizar el error de clasificación?

8. Dada una representación de las muestras en dos dimensiones, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, se obtiene a partir de la matriz de covarianzas los siguientes eigenvectores y eigenvalores:

$$\lambda_1 = -0{,}56155,\ \mathbf{w}_1 = [0{,}61541 \quad -0{,}78821]$$
$$\lambda_2 = 3{,}56155,\ \mathbf{w}_2 = [-0{,}78821 \quad -0{,}61541]$$

Sea la media de las muestras $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) La proyección a una dimensión con menor error de reconstrucción

b) El error de reconstrucción de dicha proyección

c) La proyección a dos dimensiones

d) El error de reconstrucción de dicha proyección a dos dimensiones

9. Se dispone del siguiente conjunto de datos sobre $\mathbb{R}^5$ para un problema de tres clases:

	Muestra					Clase
x_1	1	1	1	1	1	1
x_2	2	1	-1	0	1	1
x_3	-1	2	-1	1	0	2
x_4	1	-1	1	2	-1	2
x_5	0	-1	-1	0	1	3
x_6	0	1	-2	2	1	3

Se han realizado los procesos para obtener la proyección PCA al espacio $\mathbb{R}^2$, dando los siguientes resultados:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad W_{pca} = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Obtener la proyección de los datos mediante el uso de PCA

b) Realizar una representación gráfica de la proyección

10. Obtenida la siguiente matriz de proyección en un problema de dos clases:

$$\mathrm{W}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) ¿Esta matriz de proyección proviene de realizar PCA? Razona la respuesta

b) Obtener la proyección de los siguientes puntos
$\mathbf{x}_1 = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, -2, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (-1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{x}_4 = (-1, 2, 2, -2)$

c) Clasificar los puntos en el espacio proyectado mediante las siguientes funciones discriminantes:

$$g_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_A\mathbf{x} \quad \text{con:} \quad \mathbf{w}_A = (1, 2, 1) \qquad \text{*Notación compacta}$$
$$g_B(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_B\mathbf{x} \qquad\qquad \mathbf{w}_B = (1, -1, -1)$$

11. Se desea clasificar imágenes de 4×4 píxeles representadas mediante representación directa con un vector de 16 dimensiones, recorriendo fila a fila. Las imágenes pertenecen a dos clases, clase 1 (aspas) y clase 2 (cuadrados). Las representación original es proyectada a 4 dimensiones mediante PCA, y en el espacio de 4 dimensiones se aplican funciones discriminantes lineales.

    Los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza de los datos son los siguientes:

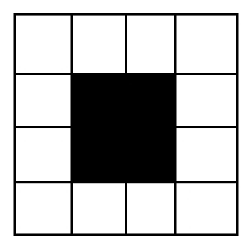
    $\lambda = [1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$

```
W = 0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0
    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0
    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    1
    0    0    0    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
```

    Los eigenvalores estan en el vector λ y los eigenvectores asociados son las columnas de W. Las funciones discriminantes lineales son:

    $g_1(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_1\mathbf{x} + b_1$, con $\mathbf{w}_1 = [1, 0, 0, 1]$ y $b_1 = 0$

    $g_2(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_2\mathbf{x} + b_2$, con $\mathbf{w}_2 = [0, 1, 1, 0]$ y $b_2 = 1$

    a) Proyecta la imagen adyacente a 4 dimensiones con el menor error de reconstrucción posible (Blanco=0, Negro=1)

    b) Clasifica el vector obtenido de acuerdo a las funciones discriminantes

12. Sean un problema de clasificación en dos clases donde las muestras se representan en un espacio vectorial de 2 dimensiones, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se dispone de un clasificador basado en FDL's:

$$g_A(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 + 1$$
$$g_B(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - 1$$

    a) Calcula la frontera de decisión

    b) Clasifica la muestra $\mathbf{y} = (2, 0)$

    c) Suponiendo que el espacio de representación original es $\mathbb{R}^4$ y las muestras son proyectadas a $\mathbb{R}^2$ mediante la matriz de proyección W:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    Clasifica la muestra $\mathbf{y}' = (1, 0, 1, 1)$

13. Sean las siguientes 6 muestras en un espacio $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

asumiendo que los valores y vectores propios de la matriz de covarianza de los datos son:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Los vectores propios en la matriz B son vectores columna.

a) Calcula la proyección PCA para todas las muestras de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2$

b) Dado que conocemos las etiquetas de clase de las muestras $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \in A$ y $\{\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6\} \in B$, calcula el error de clasificación del siguiente clasificador lineal para las muestras proyectadas en $\mathbb{R}^2$:

$$g_A(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 1$$
$$g_B(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 - 1$$

14. Dada la siguiente matriz de proyección:

$$\text{W}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y las siguientes muestras etiquetadas $X = \{(\mathbf{x}_1, A), (\mathbf{x}_2, A), (\mathbf{x}_3, B), (\mathbf{x}_4, B)\}$ se pide obtener el error de clasificación en el espacio proyectado al emplear las siguientes funciones discriminantes lineales:

$g_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_A \mathbf{x}$

$g_B(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_B \mathbf{x}$

donde:

$\mathbf{x}_1 = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, -2, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (-1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{x}_4 = (-1, 2, 2, -2)$ y

$\mathbf{w}_A = (1, 2, 1)$, $\mathbf{w}_B = (1, -1, -1)$

15. Sean las siguientes 12 muestras en un espacio $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

siendo los valores y vectores propios de la matrix de covarianza de los datos:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0625 \\ 0{,}25 \\ 0{,}667 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcula la proyección PCA para todas las muestras de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2$

b) Dado que conocemos las etiquetas de clase de las muestras ($\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}\} \in A$ y $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9\} \in B$), calcula el error de clasificación del siguiente clasificador lineal para las muestras proyectadas:

$$g_A(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 1$$
$$g_B(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$$

Solución

1. No, $W = (1 \quad 0)^t$
2. $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ $\quad w_1 = (0\ 1\ 2)^t$, $w_2 = (1\ 0\ 0)^t$, $w_3 = (0\ 2\ -1)^t$ $\quad \mathbf{x}' = (6\ 1)^t$
3.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathbf{y}} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})^t \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(W^t(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}W^t(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})\right)\left(W^t(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}W^t(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}})\right)^t \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}W^t\left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_j\right)\left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_j\right)^t W \\
&= W^t\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_j\right)\left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_j\right)^t\right) W = W^t\Sigma_{\mathbf{x}}W
\end{aligned}$$

   Entonces, $\Sigma_{\mathbf{y}} = W^t\Sigma_{\mathbf{x}}W$ y al ser W ortonormal, $\rightarrow$ $\boxed{\Sigma_{\mathbf{x}}W = W\Sigma_{\mathbf{y}}}$

   Por lo tanto, $\Sigma_{\mathbf{y}}$ es la matriz diagonal que contiene los valores propios de la matriz de covarianzas de las muestras en el espacio original.

4. (Examen Recuperación Junio 2017)

   a) Para calcular los vectores de proyección PCA primero es necesario obtener la matriz de covarianzas de los datos. En este caso, como $\bar{\mathbf{x}} = (0\ 0)^t$, la matriz de covarianzas es:

$$\Sigma = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

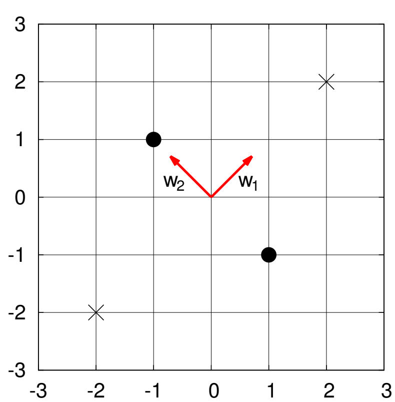
   Calculamos los valores propios de la matriz de covarianzas

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \text{donde} \qquad \lambda_1 = 4 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1$$

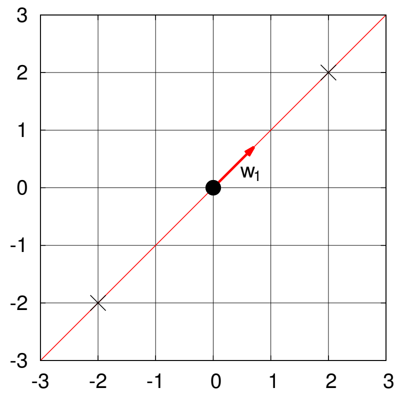
   Los vectores propios asociados son

$$\lambda_1 = 4 \quad \rightarrow \quad w_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t$$

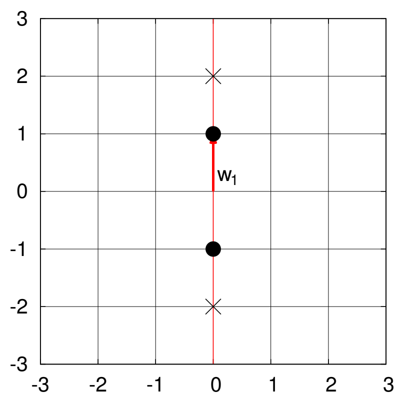
$$\lambda_2 = 1 \quad \rightarrow \quad w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t$$



b) Proyectamos sobre el vector propio de mayor valor propio asociado



c) Proyectamos sobre el único vector alternativo



d) En este caso no hay una proyección que se pueda considerar más adecuada que la otra, porque cualquier clasificador lineal erraría en una muestra como mínimo; en ambos casos es necesaria una frontera de decisión cuadrática para separar ambas clases

5. (Examen Marzo 2018)

a) En primer lugar se calcula la media ($\bar{\mathbf{x}} = (2, 0, 0, 1, -1)$) y se resta a cada una de las muestras:

Muestra						Clase
$x_1 - \bar{\mathbf{x}}$	2	1	-1	0	1	A
$x_2 - \bar{\mathbf{x}}$	0	-1	1	-1	2	A
$x_3 - \bar{\mathbf{x}}$	2	5	-2	2	0	A
$x_4 - \bar{\mathbf{x}}$	-4	2	-3	-2	-1	B
$x_5 - \bar{\mathbf{x}}$	0	-7	5	1	-2	B

La matriz de proyección se define por los dos primeros vectores propios:

$$W^t = \begin{pmatrix} 0{,}00 & 0{,}82 & -0{,}56 & -0{,}03 & 0{,}12 \\ 0{,}83 & 0{,}15 & 0{,}23 & 0{,}45 & 0{,}18 \end{pmatrix}$$

Aplicando la proyección:

Muestra		
$W^t \cdot (x_1 - \bar{\mathbf{x}})$	1,50	1,76
$W^t \cdot (x_2 - \bar{\mathbf{x}})$	$-1{,}11$	$-0{,}01$
$W^t \cdot (x_3 - \bar{\mathbf{x}})$	5,16	2,85
$W^t \cdot (x_4 - \bar{\mathbf{x}})$	3,26	$-4{,}79$
$W^t \cdot (x_5 - \bar{\mathbf{x}})$	$-8{,}81$	0,19

b) No sería necesario otra proyección; si tomamos la proyección PCA, se puede definir una frontera de decisión lineal entre ambas clases empleando, por ejemplo, $x_1 + x_2 = -1{,}5$ como frontera; de esta forma, aquellas muestras cuyas componentes sumen más de -1.5 quedan para la clase A y las que suman menos quedan para la clase B.

6. (Examen Abril 2017)

a) Para un error de reconstrucción menor que 5 sólo podría dejarse fuera el último vector propio (con valor propio de 0, que sería el error de reconstrucción), con lo que se debería proyectar a $k = 4$; para error menor que 10, se podría dejar también fuera el penúltimo vector propio (con valor propio 6.02, así que el error de reconstrucción total sería de $0 + 6.02 = 6.02$), con lo que se podría proyectar a $k = 3$

b) En primer lugar hay que calcular la media y sustraerla a las muestras:

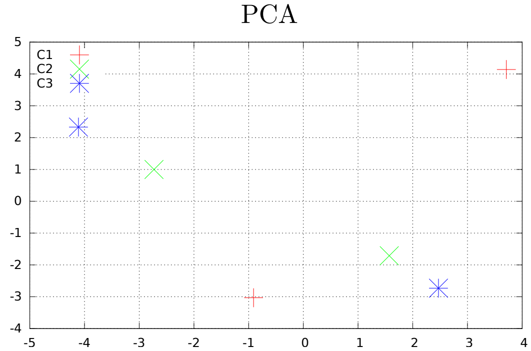
m	0	0	1	0	0,5	
	Muestra					Clase
$x_1 - m$	1	-1	-6	1	2,5	1
$x_2 - m$	-1	0	2	0	$-2{,}5$	1
$x_3 - m$	3	1	4	1	2,5	2
$x_4 - m$	2	2	1	-1	$-2{,}5$	2
$x_5 - m$	-4	-2	-4	1	$-3{,}5$	3
$x_6 - m$	-1	0	3	-2	3,5	3

El resultado de la proyección sería:

x'_1	3,71	4,14
x'_2	$-0{,}91$	$-3{,}03$
x'_3	$-2{,}73$	1,00
x'_4	1,57	$-1{,}71$
x'_5	2,47	$-2{,}73$
x'_6	$-4{,}11$	2,33

c) La representación gráfica sería:

PCA



7. (Examen Recuperación Junio 2018)

a) Para calcular los vectores de proyección PCA primero es necesario obtener la matriz de covarianzas de los datos. En este caso, como $\bar{\mathbf{x}} = (0\ 0\ 0)^t$, la matriz de covarianzas es:

$$\Sigma = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 2 & -2 & 2 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 & -2 & 2 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & -4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de la matriz de covarianzas

$$\left| \begin{pmatrix} 10-\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \qquad \text{donde} \qquad \lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 1.$$

Los vectores propios asociados son

$$\lambda_1 = 16 \quad \rightarrow \quad w_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$\lambda_2 = 4 \quad \rightarrow \quad w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$\lambda_3 = 1 \quad \rightarrow \quad w_3 = (0 \quad 0 \quad 1)^t .$$

b) Proyectamos sobre los dos vectores propios de mayor valor propio asociado

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	$4\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	0	0	0	0	-$4\sqrt{2}$	-$4\sqrt{2}$
x_2	0	0	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	0	0
c	A	B	D	A	C	B	D	C

c) Proyectamos sobre los dos vectores de la otra proyección

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
x_2	4	4	-2	2	-2	2	-4	-4
c	A	B	D	A	C	B	D	C

d) A diferencia de la proyección PCA que asigna al mismo punto datos de diferentes clases, la otra proyección separa los datos de diferentes clases, y por tanto es más adecuada.

8. (Examen Recuperación Junio 2016)

a) Para obtener el menor error de reconstrucción se escoge el eigenvector de mayor eigenvalor asociado y se proyecta como $W * (\mathbf{x} - \mu)$, es decir, $\mathbf{w}_2(\mathbf{x} - \mu) = -0{,}78821$. Por lo tanto la proyección a una dimensión es $x' = -0{,}78821$

b) La reconstrucción se calcula como $\mu + W^T * (W * (\mathbf{x} - \mu))$. En este caso, $\mu + \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2(\mathbf{x} - \mu)$, por lo que $\hat{\mathbf{x}} = [1{,}62128 \;\; 0{,}48507]^T$ y el error sería $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^2 = 0{,}37873$.

c) Para la proyección a dos dimensiones se conforma la matriz de proyección W con los eigenvectores en columnas y se multiplica su traspuesta por $(\mathbf{x} - \mu)$. Es decir, se hace $W = (\mathbf{w}_2 \;\; \mathbf{w}_1)$ y se calcula $W^T(\mathbf{x} - \mu)$. Por lo tanto la proyección a dos dimensiones es $\mathbf{x}' = (-0{,}78821 \;\; 0{,}61541)^T$

d) La reconstrucción se calcula como $\mu + W^T * (W * (\mathbf{x} - \mu))$, por lo que $\hat{\mathbf{x}} = [2{,}0 \;\; 0{,}0]^T$ exactamente igual a $\mathbf{x}$ como era de esperar, error de reconstrucción 0,0

9. (Examen Abril 2016)

a)

Primer paso: restar $\overline{\mathbf{x}}$:

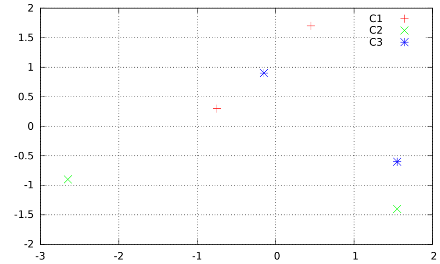
	Muestra					Clase
$x_1 - \overline{\mathbf{x}}$	0,5	0,5	1,5	0	0,5	1
$x_2 - \overline{\mathbf{x}}$	1,5	0,5	$-0{,}5$	-1	0,5	1
$x_3 - \overline{\mathbf{x}}$	$-1{,}5$	1,5	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	2
$x_4 - \overline{\mathbf{x}}$	0,5	$-1{,}5$	1,5	1	$-1{,}5$	2
$x_5 - \overline{\mathbf{x}}$	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	-1	0,5	3
$x_6 - \overline{\mathbf{x}}$	$-0{,}5$	0,5	$-1{,}5$	1	0,5	3

Segundo paso: proyección

	Muestra		Clase
$(x_1 - \overline{\mathbf{x}})W_{pca}$	$-0{,}75$	0,3	1
$(x_2 - \overline{\mathbf{x}})W_{pca}$	0,45	1,7	1
$(x_3 - \overline{\mathbf{x}})W_{pca}$	1,55	$-1{,}4$	2
$(x_4 - \overline{\mathbf{x}})W_{pca}$	$-2{,}65$	$-0{,}9$	2
$(x_5 - \overline{\mathbf{x}})W_{pca}$	$-0{,}15$	0,9	3
$(x_6 - \overline{\mathbf{x}})W_{pca}$	1,55	$-0{,}6$	3

PCA

b)



10. (Examen Recuperación Junio 2015)

    a) No, no son ortonormales (ni ortogonales)

    b) Proyectar:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= W\mathbf{x}_1 = (2,1) \\ \mathbf{x}'_2 &= W\mathbf{x}_2 = (3,2) \\ \mathbf{x}'_3 &= W\mathbf{x}_3 = (-1,1) \\ \mathbf{x}'_4 &= W\mathbf{x}_4 = (-2,1) \end{aligned}$$

    c) Clasificar: Para clasificar hay que emplear la notación compacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= (1,2,1) \\ \mathbf{x}'_2 &= (1,3,2) \\ \mathbf{x}'_3 &= (1,-1,1) \\ \mathbf{x}'_4 &= (1,-2,1) \end{aligned}$$

    Y aplicar las funciones discriminantes de cada clase:

$$\begin{array}{rcl} g_A(\mathbf{x}'_1) = 6 & g_B(\mathbf{x}'_1) = -2 & \text{Clase } A \\ g_A(\mathbf{x}'_2) = 9 & g_B(\mathbf{x}'_2) = -4 & \text{Clase } A \\ g_A(\mathbf{x}'_3) = 0 & g_B(\mathbf{x}'_3) = 1 & \text{Clase } B \\ g_A(\mathbf{x}'_4) = -2 & g_B(\mathbf{x}'_4) = 2 & \text{Clase } B \end{array}$$

11. (Examen Marzo 2015)

    a) Proyectar con las cuatro últimas columnas de W. La representación directa sería $x = [0,0,0,0,\ 0,1,1,0,\ 0,1,1,0,\ 0,0,0,0]$, y la proyección $x' = [0,1,1,0]$

    b) $g_1(x') = 0$ y $g_2(x') = 3$, se clasificaría en la clase 2 (cuadrado)

12. (Examen Recuperación Junio 2014)

    a) La recta: $2x_1 + x_2 + 1 = x_1 - x_2 - 1; x_1 + 2x_2 + 2 = 0;$

    b) $g_A(\mathbf{y}) = 5; g_B(\mathbf{y}) = 1; \rightarrow$ Clase A

    c) Al proyectar $\mathbf{y}'$ nos queda $\mathbf{y} = (2,0)$ igual que el apartado anterior, clase A

13. (Examen Abril 2014)

    a) Las muestras dan un vector media $\mu = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$, de forma que los vectores a proyectar serán $\mathbf{x}_i - \mu$, es decir:

$$\mathbf{x}_1 - \mu = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_2 - \mu = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_3 - \mu = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_4 - \mu = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_5 - \mu = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \ \mathbf{x}_6 - \mu = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{13}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

    Proyectamos las muestras utilizando los dos vectores propios asociados a los dos valores propios de mayor magnitud

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    Esto se reduce a quedarnos con la tercera y segunda componentes de cada una de las muestras:

$$\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'_3 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'_4 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

b) Calculamos para cada muestra la función discriminante de cada clase, etiqueta de clase estimada y comparamos con la etiqueta real para ver si se ha producido un error de clasificación:

Muestra	$g_A(\mathbf{x})$	$g_B(\mathbf{x})$	Estimada	Real	Error
$\mathbf{x}'_1$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	A	A	No
$\mathbf{x}'_2$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	A	A	No
$\mathbf{x}'_3$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	B	A	Sí
$\mathbf{x}'_4$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	B	B	No
$\mathbf{x}'_5$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	B	B	No
$\mathbf{x}'_6$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	A	B	Sí

En total se producen 2 errores de clasificación

14. (Examen Recuperación Junio 2013)

La proyección resultaría:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= W\mathbf{x}_1 = (3,2) \\ \mathbf{x}'_2 &= W\mathbf{x}_2 = (4,1) \\ \mathbf{x}'_3 &= W\mathbf{x}_3 = (-2,-2) \\ \mathbf{x}'_4 &= W\mathbf{x}_4 = (-3,-3) \end{aligned}$$

Para clasificar hay que emplear la notación compacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= (1,3,2) \\ \mathbf{x}'_2 &= (1,4,1) \\ \mathbf{x}'_3 &= (1,-2,-2) \\ \mathbf{x}'_4 &= (1,-3,-3) \end{aligned}$$

Y aplicar las funciones discriminantes de cada clase:

$$\begin{array}{rrl} g_A(\mathbf{x}'_1) = 9 & g_B(\mathbf{x}'_1) = -4 & OK \\ g_A(\mathbf{x}'_2) = 10 & g_B(\mathbf{x}'_2) = -4 & OK \\ g_A(\mathbf{x}'_3) = -5 & g_B(\mathbf{x}'_3) = 5 & OK \\ g_A(\mathbf{x}'_4) = -8 & g_B(\mathbf{x}'_4) = 7 & OK \end{array}$$

Por lo tanto se consigue un 0 % de error.

15. (Examen Marzo 2013)

a) Proyectamos las muestras utilizando los vectores propios asociados a los valores propios de mayor magnitud

$$W' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto se reduce a quedarnos con la tercera y cuarta componente de cada una de las muestras restándoles previamente la media $\bar{\mathbf{x}}^t = [0, 0{,}25, 0{,}5, 1]$:

$$\mathbf{x}'_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_9 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \; \mathbf{x}'_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

b) Calculamos para cada muestra la función discriminante de cada clase, etiqueta de clase estimada y comparamos con la etiqueta real para ver si se ha producido un error de clasificación:

Muestra	$g_A(\mathbf{x})$	$g_B(\mathbf{x})$	Estimada	Real	Error
$\mathbf{x}'_0$	0.5	-1.5	A	A	No
$\mathbf{x}'_1$	1.5	-0.5	A	B	Sí
$\mathbf{x}'_2$	-0.5	-0.5	?	B	?
$\mathbf{x}'_3$	0.5	0.5	?	B	?
$\mathbf{x}'_4$	0.5	-1.5	A	A	No
$\mathbf{x}'_5$	1.5	-0.5	A	B	Sí
$\mathbf{x}'_6$	-0.5	-0.5	?	A	?
$\mathbf{x}'_7$	0.5	0.5	?	A	?
$\mathbf{x}'_8$	2.5	0.5	A	A	No
$\mathbf{x}'_9$	1.5	1.5	?	B	?
$\mathbf{x}'_{10}$	1.5	1.5	?	A	?
$\mathbf{x}'_{11}$	2.5	0.5	A	A	No

En total se producen 2 errores de clasificación y 6 empates.