ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Problemes proposats: CONCEPTES GENERALS I CÀLCUL DE LÍMITS

1. Per a les successions $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ definides mitjançant

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \quad , \quad \begin{cases} c_n = 4n + c_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

   determina els valors de a_2, a_4, b_1, b_4, c_3 i c_5.

2. A partir de les subsuccessions dels termes parixes i imparells de la successió $a_n = [(-1)^n + 1]\cos(n\pi)$, dedueix si $\{a_n\}$ és convergent o divergent.

3. Calcula els límits de les successions:
   a) $\frac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}$
   b) $\frac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7}$
   c) $\sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n+4}}$
   d) $\sqrt{2n^2+3} - \sqrt{n^2-n}$
   e) $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+3}$
   f) $\sqrt{n^2+n} - n$
   g) $\frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} + 2\cdot 10^{2n-1}}$
   h) $\frac{2\cdot 3^{n+1} - 3\cdot 4^{n-1}}{3^n + 2^{2n}}$

4. Troba els límits de les successions que segueixen. La fórmula de Euler pot ajudar-te:
   a) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$
   b) $\left(\frac{1+3n}{5+3n}\right)^{\frac{n^2}{4n-2}}$
   c) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$

5. Fent ús del criteri de Stolz, troba els límits de les successions:
   a) $\frac{1+4+\cdots+n^2}{5+8+\cdots+(n^2+4)}$
   b) $\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)^n$
   c) $\frac{1+2+\cdots+n+(n+1)\cdots+2n}{n^2}$

6. Compara els ordres de magnitud de les successions:
   a) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ i $b_n = log(n)$

b) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ i $b_n = \sqrt{n}$

c) $a_n = \sqrt{n}$ i $b_n = log(n)$

d) $a_n = 2^n$ i $b_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$

e) $a_n = n^2 + \log(n)$ i $b_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

f) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ i $b_n = n^2$

g) $a_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ i $b_n = n^3$

h) $a_n = n!$ i $b_n = 1! + 2! + \cdots + n!$

7. Ordena, segons la seua magnitud i justificant el resultat, les successions: $\sqrt{n}$, n, $\log(n)$, n^2, e^n, n^3 i $n!$. Tria les que tinguen el mateix ordre de magnitud que cada una de les que segueixen:

   a) $n^2 + \sqrt{n+1}$

   b) $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

   c) $\frac{\sqrt{n^7} - \sqrt{n^3+1}}{5 + 2\sqrt{n}}$

   *d) $\log\left(n^5 + e^{2n}\right)$

8. Ordena, de menor a major magnitud, les tres successions

$$3\sqrt{n^5 + n} - n^2 \quad , \quad \log(n) \quad , \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ ... \ + \frac{1}{n}$$

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Exercicis addicionals: CONCEPTES GENERALS I CÀLCUL DE LÍMITS

1. Calcula el terme general de les successions:

   a) $-1\ ,\ +2\ ,\ -3\ ,\ +4\ ,\ -5\ ,\ +6\ ,\ ...$
   b) $\frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{4}{27}\ ,\ \frac{5}{81}\ ,\ ...$
   c) Una progressió aritmètica de diferència d i primer terme $a_1 = a$
   d) Una progressió geomètrica de raó r i primer terme $a_1 = a$. Calcula també $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

2. Verifica, a partir de las definicions corresponents, que:

   a) La successió $a_n = \frac{10-n^2}{n+2}$ és decreixent i està acotada superiormente por 3
   b) La successió $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ decreix i, a més a més, $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$
   c) La successió que satisfà $a_{n+1} = 4a_n$ és creixent només si $a_1 > 0$. En quin cas és acotada?
   d) La successió $a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n}{n+7}$ amb $a_1 = 7$ és decreixent i acotada.

3. Verifica que $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ és estrictament creixent i està acotada superiorment.

4. Estudia el creixement/decreixement i si són o no acotades les successions:

   a) $\begin{cases} 2a_{n+1} = 2 + a_n \\ a_1 = 0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} a_{n+2} = n + a_{n+1} \\ a_1 = 10 \end{cases}$

*5. Determina el valor del límit de la successió $\sqrt{n^2+n-1} - nx$, segons els valors de $x \in \mathbb{R}$.

6. Troba els valors dels paràmetres α i β tals que:

   a) $\lim_n \left(\frac{1-\alpha n^2}{3n^2-2}\right)^{1-\beta n^2} = \sqrt{e}$
   b) $\lim_n \left(\frac{n+\alpha}{n+2}\right)^{\alpha n+\beta} = \lim_n \left(\frac{n+\beta}{n+2}\right)^{2n+\alpha}$

7. Compara els ordres de magnitud de les successions

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ ...\ + \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad \text{i} \quad b_n = \log(n)$$

8. Aplica logaritmes i el criteri de Stolz per trobar els límits de les successions:

   a) $\sqrt[n]{n}$
   b) $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$

*9. Definim la successió de punts $\{P_n\}$ a partr de $P_0 = (0,0)$ de manera que P_1 es troba al nord de P_0 i a una distància de 1, P_2 es troba a l'oest de P_1 i a una distància de $\frac{1}{2}$, P_3 és al nord de P_2 i a una distància de $\frac{1}{4}$, P_4 és a l'oest de P_3 i a una distància de $\frac{1}{8}$, i així successivament. Determina les coordenades del punt P_n i el límit de la successió. (Sol: $P_n \to \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$)

*10. Per als valors $a = 1 + \sqrt{2}$ i $b = 1 - \sqrt{2}$, definim la successió de terme general $a_n = a^n - b^n$. Calcula el límit de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

11. Comprova si les successions recurrents que segueixen són creixents/decreixents o acotades:

 a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{3+2a_n}{4}$
 b) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{2b_n}$

 A més a més, troba les seues expressions explícites respectives i, a partir d'eixes expressions calcula el límit de cada successió.

*12. Verifica que les successions recurrents que segueixen són divergents a $+\infty$:

 a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$
 b) $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n + 3n$

 Trobar explícitament el terme general en cada cas és resoldre una recurrència lineal de primer ordre.

*13. Considera la successió de Fibonacci

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad a_1 = a_2 = 1$$

 y defineix a partir d'ella $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Troba la relació entre b_{n+1} i b_n i, conegut que $\{b_n\}$ és convergent, calcula el seu límit.