Pràctiques de Matemàtica Discreta

Activitats de les sessions 3 i 4

25 de octubre de 2015

Exercici 1. Determina les components connexes del graf donat per la següent matriu de adjacència:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució:

Etiquetarem els vèrtexs del graf mitjançant v_1, v_2, v_3, v_4 i v_5 (seguint el mateix ordre que en la matriu de adjacència). Representant el graf observarem que té dues components connexes. Una d'elles té, com a conjunt de vèrtexs, $\{v_1, v_2, v_3\}$, i com a conjunt d'arestes totes les incidents amb aquests vèrtexs. L'altra component connexa té, com a conjunt de vèrtexs, $\{v_4, v_5\}$; les seues arestes són les incidents amb aquests vèrtexs.

Exercici 2.

1. Per a quins valors de n és cert que el graf K_n és un graf eulerià? Troba un camí eulerià tancat en el graf K_5.
2. Determina si K_n pot tenir un camí eulerià obert en cas de no ser eulerià.

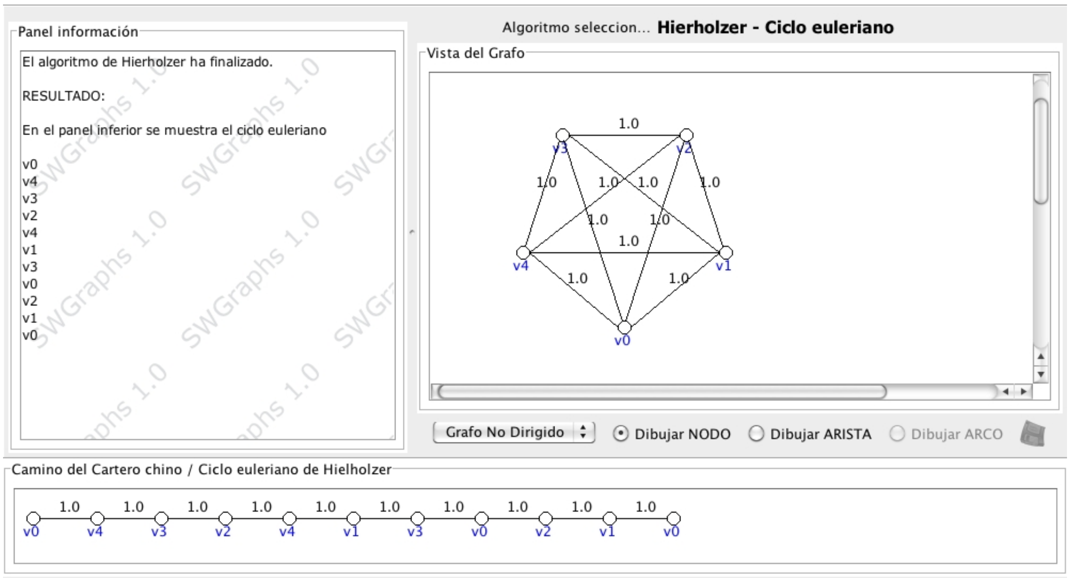
Solució:

1. Aplicant el Teorema d'Euler, K_n serà eulerià si i només si és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell.

   - K_n sempre és connex, independentment del valor de n.
   - Tots els vèrtexs de K_n tenen, com a grau, $n - 1$.

   Per tant: K_n és un graf eulerià si i només si n és imparell.

   Podem trobar un camí eulerià tancat en K_5 usant l'algorisme de Hierholzer:



2. Pel Teorema d'Euler, K_n té un camí eulerià obert si i només si existeixen exactament 2 vèrtexs de grau imparell. Com el grau de tots els vèrtexs és el mateix, açò obliga al fet que $n = 2$. Per tant, l'únic graf complet que té un camí eulerià obert és K_2.

Exercici 3. Cada vegada que algú es disposa a visitar certa mansió històrica, rep una còpia del plànol de la casa (figura 1). És possible visitar cada habitació de la casa passant per cada porta només una vegada?

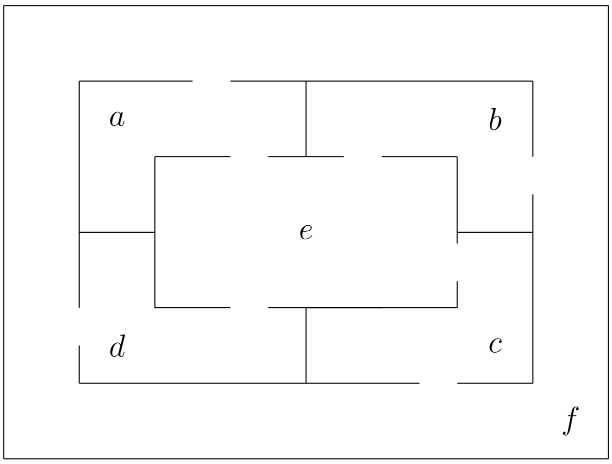
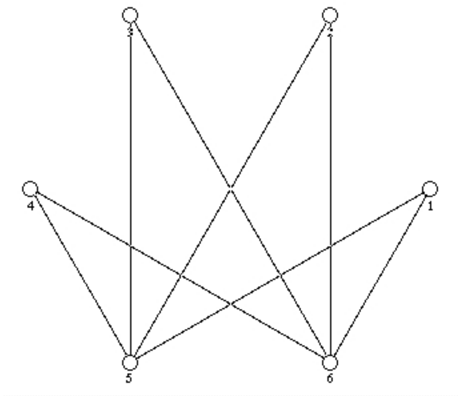


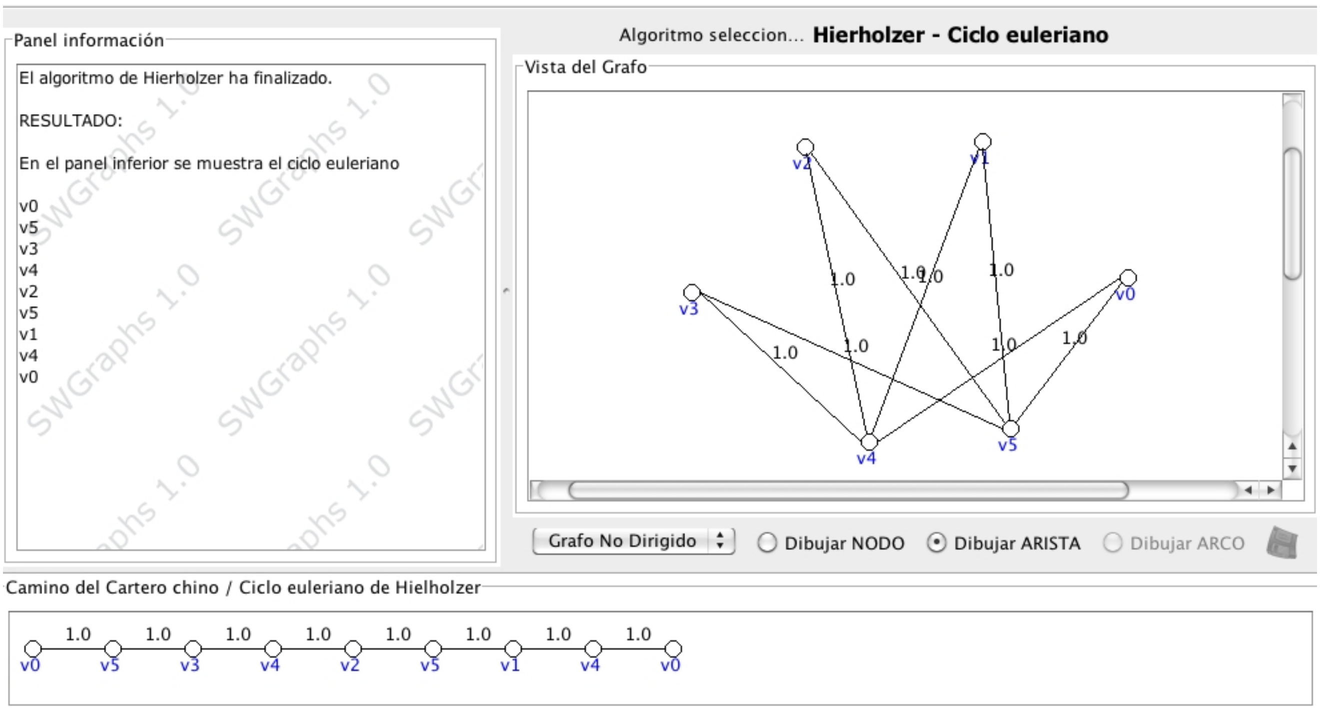
Figura 1: Plànol d'una mansió històrica (problema 3)

Solució:

Podem representar la situació mitjançant un graf els vèrtexs del qual es corresponen amb les habitacions, i les arestes del qual es corresponen amb les portes. El nostre problema es reformula de la següent manera: té aquest graf un camí Eulerià? Representem primer el graf:



Ja veiem que el graf és connex. A més, ja veiem que tots els vèrtexs tenen grau parell. Aplicant el Teorema d'Euler el graf és Eulerià. Per a obtenir un camí Eulerià tancat podem aplicar l'algorisme de Hierholzer:



Exercici 4. (*) En el graf de la figura 2 s'han representat les 8 parades d'un autobús que realitza una ruta escolar i les diferents connexions entre elles. És possible recórrer tots els carrers una sola vegada tornant al punt de partida, encara que es passe més d'una vegada per alguna parada?

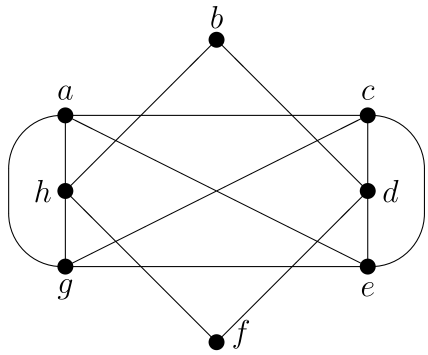
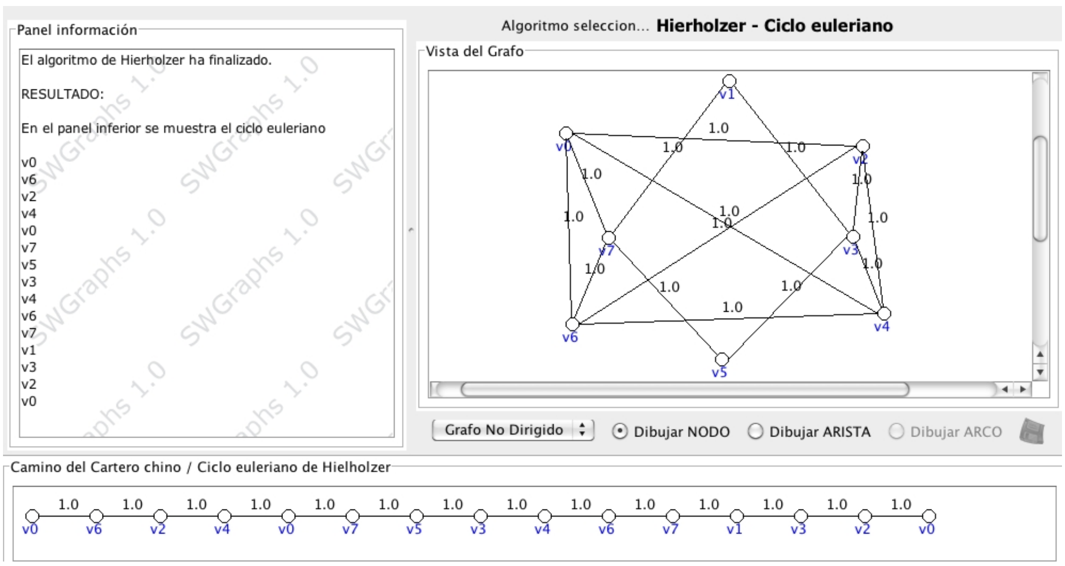


Figura 2: Ruta de l'autobús escolar (problema 4)

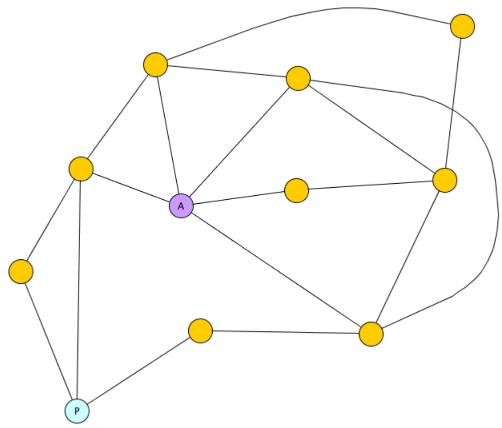
Solució:

El problema es reformula de la següent manera: és eulerià el graf de la figura? La resposta és afirmativa com a conseqüència del Teorema d'Euler, ja que és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. Si volem obtenir un camí Eulerià, podem aplicar l'algorisme de Hierholzer:



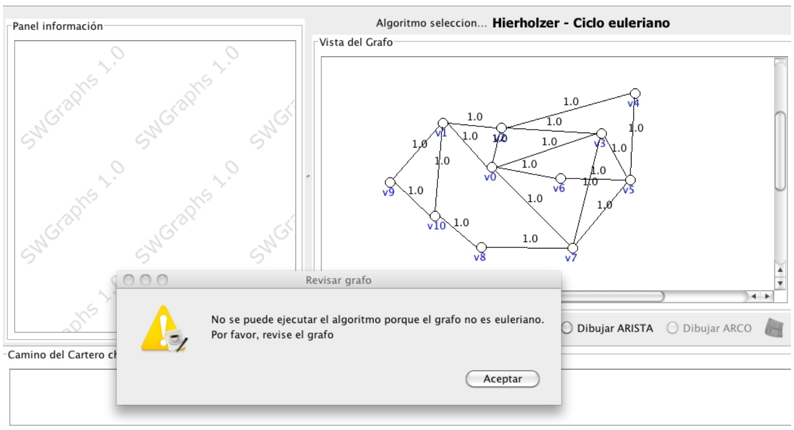
Exercici 5. (*) Durant les festes patronals en la ciutat X es va a celebrar una cursa popular infantil. En el següent gràfic es representen els carrers per les quals s'ha decidit que passe la carrera. Els carrers són estrets i no gaire llargues, per la qual cosa, per a evitar trobades, és convenient que els corredors passen només una vegada per cadascuna. La carrera haurà de partir de l'Ajuntament (A) i acabar en el parc municipal (P). Serà possible realitzar la carrera

en les condicions exigides? Modelitza el problema usant conceptes de Teoria de Grafs i, en el cas en què la resposta siga afirmativa, calcula el traçat de la carrera usant l'algorisme adequat. (Pots usar el programa *SWGraphs*).

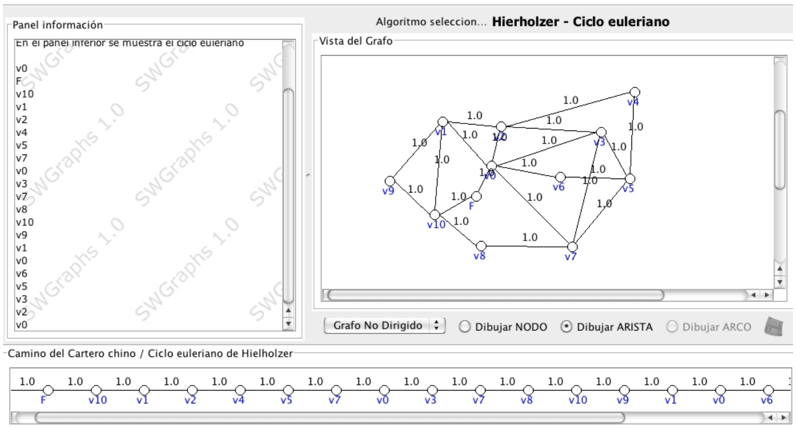


Solució:

Ens estan preguntant si el graf de la figura posseeix un camí Eulerià. Veiem que el graf és connex i que, a més, tots els seus vèrtexs tenen grau parell excepte dos d'ells (els corresponents a l'Ajuntament i al parc municipal). Per tant, aplicant el segon enunciat del Teorema d'Euler, existeix un camí Eulerià obert els extrems del qual han de ser, necessàriament, els dos vèrtexs de grau imparell. Per tant la resposta a la pregunta és afirmativa. Per a calcular un camí Eulerià podem utilitzar l'algorisme de Hierholzer. Anem a aplicar aquest algorisme usant *SWGraphs*:



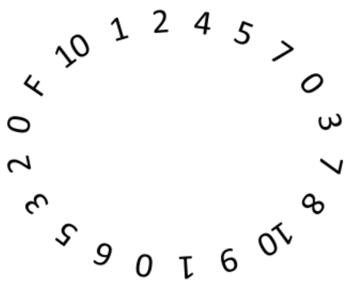
L'Ajuntament està representat mitjançant el vèrtex v_0 i el parc municipal mitjançant el vèrtex v_{10}. Ens dóna un missatge d'error perquè el programa només aplica l'algorisme de Hierholzer sobre grafs Eulerians (és a dir, per a obtenir camins Eulerians tancats), i el nostre no ho és. Podem solucionar açò molt fàcilment introduint un vèrtex fictici (que hem denotat per F) entre els dos vèrtexs de grau imparell (v_0 i v_{10}) i dues arestes fictícies que ho uneixen amb v_0 i v_{10}. D'aquesta manera aconseguim un nou graf que sí que és Eulerià (lloc que ara tots els vèrtexs tenen grau parell). Apliquem sobre ell l'algorisme de Hierholzer:



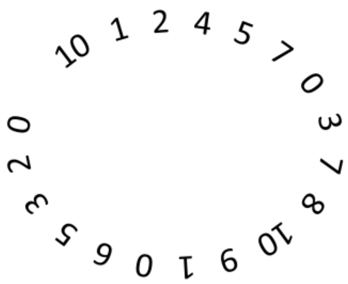
El programa ens retorna el següent camí:

$$v_0 \; F \; v_{10} \; v_1 \; v_2 \; v_4 \; v_5 \; v_7 \; v_0 \; v_3 \; v_7 \; v_8 \; v_{10} \; v_9 \; v_1 \; v_0 \; v_6 \; v_5 \; v_3 \; v_2 \; v_0$$

ja que és un camí tancat, és millor veure-ho en forma "circular":



Eliminem ara el vèrtex ficitici (F), conjuntament amb les arestes que ho uneixen a v_0 i v_{10} :



Queda clar ara que un possible camí Eulerià entre v_0 i v_{10} és el següent:

$$v_0 \; v_2 \; v_3 \; v_5 \; v_6 \; v_0 \; v_1 \; v_9 \; v_{10} \; v_8 \; v_7 \; v_3 \; v_0 \; v_7 \; v_5 \; v_4 \; v_2 \; v_1 \; v_{10}.$$