Àlgebra **31 de maig de 2019**
Segon parcial **2 hores**

En totes les qüestions s'han de justificar les respostes; no es permet l'ús de calculadora

COGNOMS:	**GRUP:**
NOM:	

Qüestió 1 (3,5 pt) Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$

$$T = \langle (1,1,3,1),(0,2,0,0),(1,3,3,1) \rangle,$$
$$H = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z+t=0, x+y+z-t=0\}.$$

a) Calculeu una base de T i la dimensió de T.

b) Calculeu un sistema d'equacions implícites de T.

c) Calculeu una base de H i la dimensió de H.

d) Calculeu una base de $H \cap T$.

e) Calculeu la dimensió del subespai $T+H$.

f) Calculeu una base de $T^\perp$ (el complement ortogonal de T).

g) És $H+T$ suma directa? Per què?

h) Pertany a T el vector $(1,1,-2,0)$? I a H?

Solució:

a) Per trobar una base de T, esglaonem la matriu que té com a files els tres vectors del sistema generador de T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2}(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La base de T obtinguda serà $\{(1,0,3,1),(0,1,0,0)\}$. Hem aplicat l'Algorisme de Gauss-Jordan per a obtindre una base de T més senzilla (encara que no és necessari). La dimensió de T és 2.

b) Per trobar les equacions implícites de T, imposarem la condició de que que un vector (x,y,z,t) pertanya a l'embolcall lineal de la base de T, és a dir, que el sistema que té com a matriu ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & 0 & z \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix}$$

siga compatible. Esglaonant aquesta matriu ens queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & -3x+z \\ 0 & 0 & -x+t \end{bmatrix},$$

d'on les equacions de T són $-3x+z=0$, $-x+t=0$.

c) Per trobar una base de H hem de resoldre el sistema format per les equacions de H:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2}(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que té com a solució general $\langle (1,0,-1,0),(0,1,-1,0) \rangle$. El conjunt $\{(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\}$ és una base de H. La dimensió de H és 2.

d) Els elements de $H \cap T$ satisfan les equacions de H i les de T. Per tant, són solució del sistema

$$\begin{aligned} -x \qquad\qquad + t &= 0 \\ -3x \qquad + z \qquad &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \\ x + y + z - t &= 0 \end{aligned}$$

i esglaonant la seua matriu ampliada ens queda

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{41}(1)]{\substack{E_{21}(-3)\\ E_{31}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{42}(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

La solució és $\{(0,0,0,0)\}$ i, per tant, $H \cap T = \{(0,0,0,0)\}$.

e) Per calcular la dimensió de $T + H$ podem aplicar la fórmula de Grassman:

$$\dim(T + H) = \dim(T) + \dim(H) - \dim(T \cap H) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Per tant $T + H = \mathbb{R}^4$.

f) El complement ortogonal de T és el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ que són ortogonals a tots els vectors de T o, equivalentment, que són ortogonals als vectors de la base de T que hem obtingut abans. Per tant, $(x, y, z, t) \in T^{\perp}$ si i només si és solució del següent sistema d'equacions:

$$x + 3z + t = 0$$

$$y = 0$$

Resolent el sistema, obtenim el conjunt de solucions

$$\{(-3\alpha - \beta, 0, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Per tant, una base de $T^{\perp}$ és:

$$\{(-3, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}.$$

g) $T + H$ és suma directa perquè $T \cap H = \{\vec{0}\}$.

h) El vector $(1, 1, -2, 0)$ no pertany a T perquè no satisfà les equacions implícites de T. Sí que pertany al subespai H perquè satisfà les seues equacions.

Qüestió 2 (3 pt) Considerem la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & a & a \\ 2 & 0 & 2a \end{bmatrix}.$$

a) Per a quins valors de a és A diagonalitzable?

b) Per a $a = 2$ calculeu, si és possible, matrius P i D tals que $A = PDP^{-1}$.

Solució:

a) Calculem el polinomi característic de A:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & a-\lambda & a \\ 2 & 0 & 2a-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(a-\lambda)(2a-\lambda).$$

El conjunt dels valors propis de A és: $\{2, a, 2a\}$. Si $a \notin \{0, 1, 2\}$ aleshores A té 3 valors propis (reals) diferents i, per tant, és diagonalitzable. Estudiem els casos restants.

(1) $a = 0$. En este cas el conjunt de valors propis és $\{\lambda_1 := 2, \lambda_2 := 0\}$. Si α_i denota la multiplicitat algebraica de λ_i (per a $i = 1, 2$), aleshores $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = 2$. Si d_i denota $\dim \mathrm{Nuc}(A - \lambda_i I)$ (per a $i = 1, 2$) aleshores $d_1 = 1$ perquè $1 \leq d_1 \leq \alpha_1 = 1$. Calculem d_2:

$$d_2 = 3 - \mathrm{rang}(A - \lambda_2 I) = 3 - \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 = \alpha_2.$$

Com $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ i $d_i = \alpha_i$ (per a $i = 1, 2$) aleshores A és diagonalitzable.

(2) $a = 1$. En este cas el conjunt de valors propis és $\{\lambda_1 := 2, \lambda_2 := 1\}$. Amb la mateixa notació d'abans: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ i $d_2 = 1$ (perquè $1 \leq d_2 \leq \alpha_2$. Calculem d_1:

$$d_1 = 3 - \mathrm{rang}(A - \lambda_1 I) = 3 - \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \alpha_1.$$

Per tant, A no és diagonalitzable.

(3) $a = 2$. En este cas els valors propis són $\lambda_1 = 2$ (doble) i $\lambda_2 = 4$ (simple). Utilitzant la mateixa notació d'abans, com $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1$ es té que $d_2 = 1$. Calculem d_1:

$$d_1 = 3 - \mathrm{rang}(A - \lambda_1 I) = 3 - \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2 = \alpha_1.$$

Com $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ i $d_i = \alpha_i$ per a $i = 1, 2$, la matriu A és diagonalitzable en este cas.

b) Com que A és diagonalitzable quan $a = 2$, podem trobar les matrius demanades. Per una part,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per trobar la matriu P, trobarem bases dels subespais propis.

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(A - 2I) &= \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

Per tant, una base del subespai propi associat amb el valor propi 2 és $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. Hem de calcular una base del subespai propi associat amb el valor propi 4.

$$\mathrm{Nuc}(A - 4I) = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Nuc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

D'aquesta manera, $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Qüestió 3 (1,5 pt) Considerem el següent conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, -1)\}.$$

a) Demostreu que $\mathcal{B}$ és una base de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculeu la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ (és a dir, $M_{\mathcal{BC}}$), on $\mathcal{C}$ denota la base canònica de $\mathbb{R}^4$.

c) Calculeu les coordenades del vector $(1, 1, 1, 0)$ respecte de la base B.

Solució:

a) Com el cardinal de B és 4 (que coincideix amb la dimensió de $\mathbb{R}^4$), per a provar que B és una base de $\mathbb{R}^4$ és suficient veure que és linealment independent. Una manera de fer-ho és esglaonar la matriu que té, com a files, els transposats dels vectors de B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Com es tracta ja d'una matriu esglaonada, podem concloure que el seu rang és 4 i, per tant, B es un conjunt linealment independent.

b) La matriu de canvi de base $M_{\mathcal{BC}}$ és la matriu que té, com a columnes, els vectors de coordenades dels vectors de $\mathcal{B}$ respecte de la base canónica. Per tant:

$$M_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Una manera de resoldre l'exercici és escrivint el vector $(1,1,1,0)$ com a combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}$ (amb coeficients indeterminats)

$$(1,1,1,0) = c_1(1,2,1,0) + c_2(0,1,0,-1) + c_3 = (0,0,1,0) + c_4(0,0,0,-1)$$

i resoldre el sistema d'equacions que resulta d'igualar les components dels vectors que apareixen en els dos membres de la igualtat.

Una altra manera és calcular la matriu de canvi de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, que és $M_{\mathcal{BC}}^{-1}$, i efectuar el producte

$$M_{\mathcal{BC}}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per qualsevol dels dos métodes obtenim que el vector de coordenades demanat és

$$(1,-1,0,1).$$

Qüestió 4 (2 pt) a) Calculeu una matriu quadrada d'ordre 2 que tinga, com a subespais propis, els següents: $\langle(1,-1)\rangle$ i $\langle(0,1)\rangle$.

b) Siga A una matriu quadrada d'ordre 10 tal que $\det(A) = 2$. Siga B la matriu obtinguda a partir de A efectuant, en l'ordre indicat, les següents operacions: multipliquem la tercera fila per 5, i permutem les files setena i vuitena. Calculeu $\det((B^t)^{-1})$.

c) Calculeu la projecció ortogonal del vector $(-1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespai generat pels vectors $(1,1,1)$ i $(0,0,1)$.

d) Si A és una matriu 100×50 de rang 25 calculeu les dimensions dels subespais $F(A)$, $C(A)$, $F(A)^\perp$ i $C(A)^\perp$, on $F(A)$ denota el subespai fila i $C(A)$ el subespai columna (de A).

Solució:

a) Considerem la matriu $A = PDP^{-1}$ on

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

És a dir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per construcció, A és una matriu diagonalitzable amb valors propis 1 i 2. Com es pot comprovar, $A(1,-1) = (1,-1)$ i $A(0,1) = 2(0,1)$. Per tant, $(1,-1)$ i $(0,1)$ generen, respectivament, els subespais propis associats als valors propis 1 i 2.

b) Com B s'ha calculat a partir de A efectuant una permutació de files i una operació elemental de tipus 2 (producte d'una fila per 5), es té que

$$\det(B) = -5\det(A) = -10.$$

Per altra banda:

$$\det((B^t)^{-1}) = \det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = \frac{-1}{10}.$$

c) Com $(-1, 1, 0)$ és ortogonal als dos vectors $(1, 1, 1)$ i $(0, 0, 1)$, la projecció ortogonal demanada és $(0, 0, 0)$.

d) $\dim(F(A)) = \dim(C(A)) = \text{rang}(A) = 25$, $\dim(F(A)^{\perp}) = 50 - 25 = 25$, $\dim(C(A)^{\perp}) = 100 - 25 = 75$.