DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)
AMA - Primer parcial 14-11-2016 Solució

---

1. (2p) Calcula el domini de la funció

$$f(x) = \sqrt{x+2} \cdot \log(|x-3|-2).$$

El domini d'aquesta funció ve donat pels nombres que compleixen:

a) $x + 2 \geq 0$, domini de l'arrel quadrada

b) $(|x-3|-2) > 0$, domini del logaritme.

Anem a calcular-los:

a)

$$x + 2 \geq 0 \;\leftrightarrow\; x \geq -2 \;\leftrightarrow\; x \in [-2, \infty[$$

b)

$$(|x-3|-2) > 0 \;\leftrightarrow\; |x-3| > 2 \;\leftrightarrow\; (x-3 < -2) \,\vee\, (x-3 > 2) \;\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\; x < 1 \,\vee\, x > 5 \;\leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\, \cup \,]5, +\infty[$$

S'han de complir alhora les condicions **a)** i **b)**. Per tant hem de fer la intersecció de tots dos conjunts:

$$Dom(f) = [-2, \infty[\,\cap\, (\,]-\infty, 1[\, \cup \,]5, +\infty[\,) = [-2, 1[\, \cup \,]5, +\infty[$$

---

2. (2p) A partir de l'estudi de la seua derivada, determina les regions de creixement i decreixement així com els punts en els quals aconsegueix màxims i/o mínims relatius de la funció

$$f(x) = \frac{e^{2x-1}}{x+1}.$$

Per estudiar les regions de creixement i decreixement, a més de màxims i mínims, hem d'estudiar les possibles discontinuïtats de la funció. L'única discontinuïtat es dóna quan s'anul.la el denominador, això és, en $x = -1$.

Anem a calcular la derivada de la funció:

$$f'(x) = \frac{e^{2x-1} \cdot 2 \cdot (x+1) \;-\; 1 \cdot e^{2x-1}}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x-1} \cdot (2x+1)}{(x+1)^2}$$

Aquesta derivada només es fa nul.la quan $2x + 1 = 0 \;\leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}$.

Per endevinar si $x = -\frac{1}{2}$ és un màxim, mínim o punt d'inflexió, tenim dues opcions: estudiar el signe de la derivada segona en el punt o estudiar el signe de la derivada primera a banda i banda d'aquest mateix punt.

Analitzant la derivada segona:

$$f''(x) = \frac{(e^{2x-1}\cdot 2\cdot(2x+1) + e^{2x-1}\cdot 2)\cdot(x+1)^2 - 2(x+1)\cdot e^{2x-1}\cdot(2x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(e^{-2}\cdot 2\cdot 0 + e^{-2}\cdot 2)\cdot \frac{1}{2}^2 - 2\frac{1}{2}\cdot e^{-2}\cdot 0}{(1/2)^4} = \frac{8}{e^2} > 0$$

Per tant $f(x)$ té un mínim relatiu en $x = -\frac{1}{2}$. Podem calcular també la coordenada y d'aquest mínim:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{e^2}$$

Sense calcular la derivada segona podem estudiar el creiximent/decreiximent i concloure que el punt és un mínim mirant el signe de la derivada primera als intervals: $]-\infty,-1[$, $]-1,-1/2[$ i $]-1/2,+\infty[$, prenent un punt de cada interval, per exemple -2, $-3/4$ i 0 respectivament:

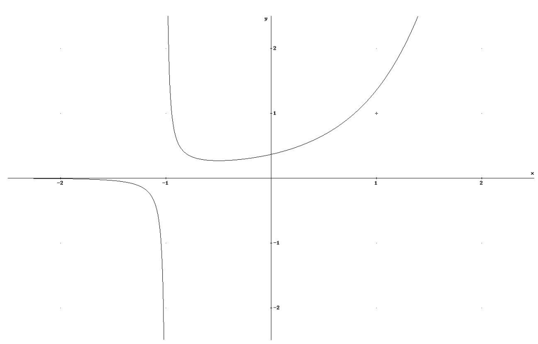
$$f'(-2) = \frac{e^{2(-2)-1}\cdot(-2+1)}{(-2+1)^2} = -\frac{3}{e^5} < 0$$

$$f'(-3/4) = \frac{e^{-5/2}\cdot(-1/2)}{(1/4)^2} = -\frac{8}{e^{5/2}} < 0$$

$$f'(0) = \frac{e^{-1}\cdot(1)}{(1)^2} = \frac{1}{e} > 0$$

Per tant la funció és decreixent als dos primers intervals i creixent al tercer. (I $x = -1/2$ dona un mínim relatiu perquè passa de decreixent a creixent.)

Si fem una gràfica de la funció ho podem comprovar:



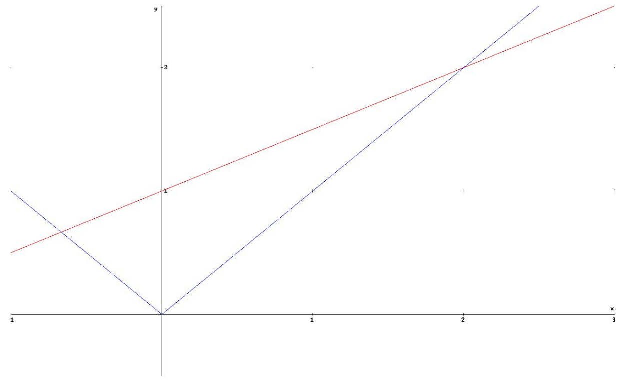
---

3. (2p) Calcula l'àrea tancada entre les corbes $\quad y_1 = |x| \quad$ i $\quad y_2 = \frac{x}{2}+1$.

Suggeriment: un esbós de les gràfiques d'ambdues funcions pot ser molt útil.

Per trobar la intersecció de les dues funcions, $y_1 = y_2$, hem de resoldre dos equacions, una a cada regió del plànol: a) per a $x \geq 0$: $x = \frac{x}{2}+1$; b) per a $x < 0$: $-x = \frac{x}{2}+1$

En el cas a): $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = 1$ que és $x = 2$ i en el cas b) $x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} = -1$ és $x = -2/3$. És a dir, les funcions es tallen en els punts $(-2/3, 2/3)$ i $(2,2)$.



La gràfica del recinte retallat per les dues funcions és un triangle del que podem indicar els seus vèrtexs: $(-2/3, 2/3)$, $(0,0)$ i $(2,2)$ o les seues aristes: per dalt la recta y_2 que passa pels 2 punts d'intersecció (i que és la hipotenusa del triangle) i per baix la V irregular de la funció y_1, de l'origen cap a cadascun dels punts d'intersecció (i que són els catets del triangle).

En qualsevol cas, podem utilitzar la integral de Rieman per a calcular l'àrea tancada entre les dues funcions sabent que y_2 delimita la figura per a dalt i y_1 per a baix. De totes maneres, com no ens interessa escriure un valor absolut dins d'una integral, partirem l'area com en a) i b). Per tant:

$$A = \int_{-\frac{2}{3}}^{0} \left(\left(\frac{x}{2}+1\right) - (-x) \right) \, dx + \int_{0}^{2} \left(\left(\frac{x}{2}+1\right) - x \quad \right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{2}{3}}^{0} \left(\frac{3x}{2} + 1 \quad \right) dx + \int_{0}^{2} \left(\frac{-x}{2} + 1 \quad \right) dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} + x \right) \Bigg]_{-\frac{2}{3}}^{0} + \left(\frac{-x^2}{4} + x \right) \Bigg]_{0}^{2} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} u.a.$$

---

4. (2p) Calcula el valor exacte de la integral

$$\int_0^{\log 4} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} \, dx.$$

Suggeriment: pots utilitzar el canvi de variable $t = 1 + \sqrt{e^x}$.

Fem el canvi de variable suggerit i calculem totes les expresions, dx i els extrems de l'interval:

$$t = 1 + \sqrt{e^x} \to t - 1 = \sqrt{e^x} \to e^x = (t-1)^2$$

Derivant l'última expressió, podem concloure que $e^x dx = 2(t-1)dt$. Substituint els valors de x en l'expressió inicial de t obtenim els nous extrems: $x = 0 \to t = 1 + \sqrt{e^0} = 2$; $x = \log 4 \to t = 1 + \sqrt{e^{\log 4}} = 1 + \sqrt{4} = 3$. Substituint en la integral:

$$\int_0^{\log 4} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} dx = \int_2^3 2\frac{(t-1)dt}{t} = 2 \int_2^3 \frac{t-1}{t} dt = 2 \int_2^3 (1 - \frac{1}{t}) dt$$

$$= 2(t - \log t)]_2^3 = 2\left(1 - \log\left(\frac{3}{2}\right)\right) \cong 2 \cdot 0.594535 = 1.18907$$

---

5. (2p) a) Troba el nombre mínim de subdivisions necessari per calcular el valor aproximat de la integral

$$\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

amb un error menor que 10^{-4} utilitzant la fórmula de Simpson.

b) Calcula el valor aproximat de la integral utilitzant el nombre de subintervals obtingut.

---

a) La fòrmula de la cota d'error en l'aproximació de Simpson és:

$$E_n = \left|\int_a^b f - S_n\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \;; \quad \text{on} \quad M_4 \ge \max_{[a,b]} \left|f^{(iv)}\right|$$

per tant hem de trobar M_4. Per a això necessitem calcular la derivada quarta de $f(x) = 1 - x^{-1}$:

$$f'(x) = x^{-2},\; f''(x) = -2x^{-3},\; f'''(x) = 6x^{-4},\; f^{(iv)}(x) = -24x^{-5}.$$

La funció $|f^{(iv)}(x)| = |-24x^{-5}|$ és decreixent en l'interval $[2, 3]$, per tant una cota superior d'aquesta funció ve donada pel valor de la funció en $x = 2$: $M_4 = |f^{(iv)}(2)| = 24 \cdot 2^{-5} = 3/4$.

Substituint M_4 en la fórmula de l'error,

$$E_n \le \frac{(3-2)^5}{180n^4}\frac{3}{4}$$

hem de trobar n per garantir que $E_n < 10^{-4}$:

$$\frac{1}{240n^4} \le 10^{-4} \;\leftrightarrow\; \frac{10^4}{240} \le n^4 \leftrightarrow n \ge \sqrt[4]{\frac{10^4}{240}} = \frac{10}{\sqrt[4]{240}} \cong 2.81$$

Com necessitem un nombre enter i parell major que 2.81, concloem que $n = 4$.

b) Ara aplicarem la fórmula de Simpson per a $f(x) = 1 - 1/x$, l'interval $[2, 3]$ i prenent $n = 4$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{4} = 0.25$$

La partició de l'interval queda: $P = \{2,\ 2.25,\ 2.5,\ 2.75,\ 3\}$ i el valor aproximat de la integral serà:

$$S_4 = \frac{0.25}{3}\left(f(2) + 4f(2.25) + 2f(2.5) + 4f(2.75) + f(3)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left((1 - \frac{1}{2}) + 4\left(1 - \frac{1}{2.25}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{2.5}\right) + 4\left(1 - \frac{1}{2.75}\right) + (1 - \frac{1}{3})\right) \approx 0.5945$$

Pots observar que la integral que has calculat en l'exercici quatre és just el doble d'aquesta integral. Comparant llavors tots dos resultats s'observa que l'aproximació està dins de la precisió demanada.