**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)**

**AMA - Primer parcial** **14-11-2016** **Duración: 2 horas**

---

**Nombre:** **Grupo:**

---

**1.** (2p) Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \cdot \log(|x-3|-2)$$

---

El dominio de esta función vendrá dado por los números que cumplan:

**a)** $x+2 \geq 0$, dominio de la raíz cuadrada

**b)** $(|x-3|-2) > 0$, dominio del logaritmo.

Vamos a calcularlos:

**a)**

$$x+2 \geq 0 \ \leftrightarrow \ x \geq -2 \ \leftrightarrow \ x \in [-2, \infty[$$

**b)**

$$(|x-3|-2) > 0 \ \leftrightarrow \ |x-3| > 2 \ \leftrightarrow \ (x-3 < -2) \ \vee \ (x-3 > 2) \ \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \ \ x < 1 \ \vee \ x > 5 \ \leftrightarrow x \in ]-\infty, 1[ \ \cup \ ]5, +\infty[$$

Se tienen que cumplir a la vez las condiciones **a)** y **b)**. Por tanto tenemos que hacer la intersección de ambos conjuntos:

$$[-2, \infty[ \ \cap \ ( \ ]-\infty, 1[ \ \cup \ ]5, +\infty[ \ ) = [-2, 1[ \ \cup \ ]5, +\infty[$$

---

**2.** (2p) A partir del estudio de la derivada de la función

$$f(x) = \frac{e^{2x-1}}{x+1}$$

determina las regiones de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

---

Vamos a calcular la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{e^{2x-1} \cdot 2 \cdot (x+1) \ - \ 1 \cdot e^{2x-1}}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x-1} \cdot (2x+1)}{(x+1)^2}$$

Esta derivada sólo se hace cero cuando:

$$2x+1 = 0 \ \leftrightarrow \ x = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto $x = -\frac{1}{2}$ es un candidato a posible máximo, mínimo o punto de inflexión. Para averiguar en qué condiciones esta el punto $x = -\frac{1}{2}$ tenemos dos opciones:

a) podemos estudiar el valor de la derivada segunda de la función que estamos estudiando en el punto $x = -\frac{1}{2}$,

b) o podemos estudiar el signo de la derivada primera a ambos lados de ese mismo punto.

Vamos a optar por calcular la derivada segunda de la función que estamos estudiando:

$$f''(x) = \frac{(e^{2x-1} \cdot 2 \cdot (2x+1) + e^{2x-1} \cdot 2) \cdot (x+1)^2 - 2(x+1) \cdot e^{2x-1} \cdot (2x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(e^{2x-1} \cdot 2 \cdot (2x+1) + e^{2x-1} \cdot 2) \cdot (x+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x+1)} \cdot e^{2x-1} \cdot (2x+1)}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{2 \cdot e^{2x-1} \cdot (2x^2+2x+1)}{(x+1)^3}$$

Calculamos ahora el valor de la derivada segunda en $x = -\frac{1}{2}$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1} \cdot (2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1)}{(\left(-\frac{1}{2}\right) + 1)^3} = \frac{8}{e^2}$$

Es un valor positivo. Por lo tanto $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{2}$.

Calculamos ahora la coordenada $y$ de ese mínimo relativo:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{e^2}$$

Para estudiar las regiones de crecimiento y decrecimiento, además de máximos y mínimos, debemos estudiar las posibles discontinuidades de la función. Para ello estudiamos el dominio de la función. La única discontinuidad en esta función está cuando se anula el denominador, en $x = -1$.

Como en $x = -\frac{1}{2}$ tenemos un mínimo, en $x = -1$ una asíntota vertical ya sabemos que en $]-1, -\frac{1}{2}[$ la función es decreciente y en $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ creciente.

Nos falta por saber el comportamiento en $]-\infty, -1[$. Como la función es continua en ese intervalo y la derivada primera no tiene ningún cero en ese mismo intervalo, sólo tenemos que ver el signo de la derivada primera en un punto cualquiera de ese intervalo, por ejemplo en $x = -2$:

$$f'(-2) = \frac{e^{2(-2)-1} \cdot (-2+1)}{(-2+1)^2} = -\frac{3}{e^5}$$

el signo es negativo, por lo tanto $f(x)$ es decreciente en $]-\infty, -1[$.

Efectivamente, si hacemos un gráfico de la función lo podemos comprobar:

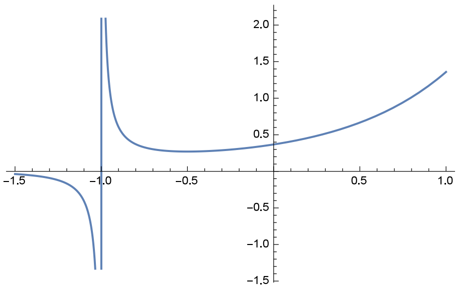


Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \frac{e^{2x-1}}{x+1}$.

---

**3.** (2p) Calcula el área encerrada entre las curvas $y = |x|$ e $y = \frac{x}{2} + 1$. *Sugerencia: un esbozo de las gráficas de ambas funciones puede ser muy útil*

---

Primero vamos a encontrar los posibles puntos de corte en ambas funciones, para ello podemos escribir la función $y = |x|$ como:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0, \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}$$

por lo que tenemos que resolver dos sistemas de ecuaciones, uno en cada región del plano:

a) Para $x \geq 0$

$$\begin{cases} y &= x, \\ y &= \frac{x}{2} + 1. \end{cases}$$

Resolvemos la coordenada $x$ igualando las coordenadas $y$:

$$x = \frac{x}{2} + 1 \leftrightarrow x = 2$$

Ahora obtenemos el valor de la coordenada $y$:

$$y = x = 2$$

Por lo tanto las dos rectas anteriores se cortan en el punto $(2, 2)$.

b) Para $x < 0$

$$\begin{cases} y &= -x, \\ y &= \frac{x}{2} + 1. \end{cases}$$

Resolvemos la coordenada $x$ igualando las coordenadas $y$:

$$-x = \frac{x}{2} + 1 \leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Ahora obtenemos el valor de la coordenada $y$:

$$y = -x = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto las dos rectas anteriores se cortan en el punto $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Finalmente podemos calcular los puntos de corte de la recta con los ejes cartesianos $y = \frac{x}{2} + 1$.

Para $x = 0$, $y = 1$ y para $y = 0$, $x = -2$. Por lo tanto la recta $y = \frac{x}{2} + 1$ corta a los ejes en los puntos $(0, 1)$ y $(-2, 0)$. Ya tenemos suficientes datos para hacer un esbozo de la gráfica:

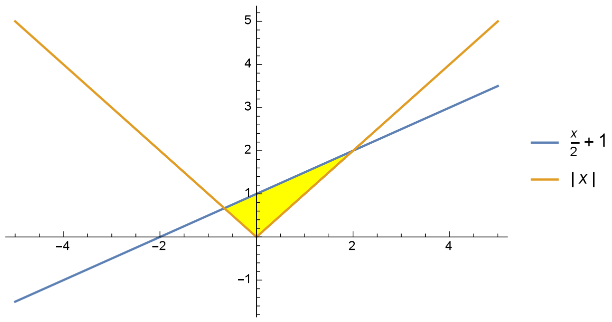


Figura 2: Gráfica de las funciones $y = |x|$ e $y = \frac{x}{2} + 1$.

A la vista del dibujo el área pedida es:

$$A = \int_{-\frac{2}{3}}^{0} \left( \left(\frac{x}{2} + 1\right) - (-x) \right) dx + \int_{0}^{2} \left( \left(\frac{x}{2} + 1\right) - x \right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{2}{3}}^{0} \left( \frac{3x}{2} + 1 \right) dx + \int_{0}^{2} \left( \frac{-x}{2} + 1 \right) dx =$$

$$= \left( \frac{3x^2}{4} + x \right) \Big]_{-\frac{2}{3}}^{0} + \left( \frac{-x^2}{4} + x \right) \Big]_{0}^{2} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} u.a.$$

---

**4.** (2p) Calcula el valor exacto de la integral:

$$\int_{0}^{\log 4} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x}} dx$$

*Sugerencia: puedes utilizar el cambio de variable* $t = 1 + \sqrt{e^x}$

---

Hacemos el cambio de variable de la sugerencia y calculamos $dx$ y $dt$:

$$t = 1 + e^{\frac{x}{2}},\ dt = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} dx,\ \textit{sustituyendo valores},\ dt = \frac{t-1}{2} dx,\ e^x = (t-1)^2$$

tenemos que calcular además los valores de los nuevos límites de integración:

Para $x = 0$, $t = 2$ y para $x = \log 4$, $t = 3$.

Sustituyendo en la integral:

$$\int_{0}^{\log 4} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x}} dx = \int_{2}^{3} 2 \frac{(t-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{t(t-1)}} dt = 2 \int_{2}^{3} (1 - \frac{1}{t}) dt$$

$$= 2(t - \log t)]_2^3 = 2 \left( 1 - \log \left( \frac{3}{2} \right) \right) \cong 2 \cdot 0.594535 = 1.18907$$

---

**5.** (2 p) a) Halla el número mínimo de subdivisiones necesario para calcular el valor aproximado de la integral

$$\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

con un error menor que $10^{-4}$ utilizando la fórmula de Simpson.

b) Calcula el valor aproximado de la integral utilizando el número de subintervalos obtenido.

---

Primero tendremos que usar la fórmula de la cota de error en la aproximación de Simpson:

$$E_n = \left| \int_a^b f - S_n f \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \ ; \ M_4 \geq \max_{[a,b]} \left| f^{(iv)} \right|$$

Vamos a calcular $M_4$. Para ello necesitamos calcular una cota superior del valor absoluto de la derivada cuarta de $f(x) = 1 - x^{-1}$ en el intervalo $[2, 3]$

$$f'(x) = x^{-2},\ f''(x) = -2x^{-3},\ f'''(x) = 6x^{-4},\ f^{(iv)}(x) = -24x^{-5},$$

La función $|f^{(iv)}(x)| = |-24x^{-5}|$ es decreciente en el intervalo [2,3], por lo tanto una cota superior de esta función viene dada por el valor de la función en $x = 2$

$$M_4 = |f^{(iv)}(x)| = 24 \cdot 2^{-5} = \frac{3}{4}$$

Ahora aplicamos la fórmula del error:

$$E_n \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 = \frac{(3-2)^5}{180n^4} \frac{3}{4} \leq 10^{-4}$$

Tenemos que despejar el valor de $n$:

$$\frac{1}{240n^4} \leq 10^{-4} \leftrightarrow \frac{10^4}{240} \leq n^4 \leftrightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{10^4}{240}} = \frac{10}{\sqrt[4]{240}} \cong 2.81$$

Como necesitamos un entero par que cumpla la condición anterior $n = 4$

**b)**Ahora aplicamos la fórmula de Simpsom para $n = 4$, donde $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{4} = 0.25$$

La partición del intervalo $[2, 3]$ queda:

$$P = \{2,\ 2.25,\ 2.5,\ 2.75,\ 3\}$$

$$S_4 f = \frac{h}{3} \left( f(a) + 4 \sum_{k=0}^{1} f(a + (2k+1)h) + 2 \sum_{k=1}^{1} f(a + 2kh) + f(b) \right) =$$

$$= \frac{0.25}{3} \left( \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 4 \left( \left(1 - \frac{1}{2.25}\right) + \left(1 - \frac{1}{2.75}\right) \right) \right.$$

$$\left. +2 \left(1 - \frac{1}{2.5}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \right) = 0.5945$$

Puedes observar que la integral que has calculado en el ejercicio cuatro es justo el doble de ésta integral. Si comparamos el resultado obtenido con el valor encontrado en el ejercicio anterior, podemos comprobar que el valor obtenido esta dentro de la precisión pedida.