DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Examen Final **25-01-2017** **Duración: 3 horas**

PRIMER PARCIAL

---

1. (2p) Resuelve la siguiente desigualdad:

$$|2 - |x-1|| \geq 3$$

Utilizamos $|x| \geq b \ \leftrightarrow \ (x \leq -b) \vee (x \geq b)$, esto hace que la solución de este ejercicio la tengamos que encontrar como la unión de dos conjuntos:

$$(2 - |x-1| \leq -3) \ \vee \ (2 - |x-1| \geq 3)$$

vamos a resolverlo

a)

$$2 - |x-1| \geq 3 \ \leftrightarrow \ -|x-1| \geq 1$$

esto no ocurre nunca, porque un número negativo, un valor absoluto con un signo menos delante, nunca puede ser mayor o igual que 1.

b)

$$2 - |x-1| \leq -3 \ \leftrightarrow \ -|x-1| \leq -5 \leftrightarrow \ |x-1| \geq 5 \leftrightarrow \ (-5 \leq x-1) \vee (x-1 \geq 5)$$

b.1)

$$(x-1) \leq -5 \leftrightarrow \ x \leq -4 \leftrightarrow \ x \in]-\infty, -4[$$

b.2)

$$(x-1) \geq 5 \leftrightarrow \ x \geq 6 \leftrightarrow \ x \in [6, +\infty[$$

Entonces la solución es:

$$x \in]-\infty, -4[\ \cup \ [6, +\infty[$$

---

2. (3p) A partir del estudio de la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}$, determina las regiones de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

La función $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}$ es el producto de una raíz cuadrada y una exponenecial. En el caso de la exponencial, el dominio va a ser todos los reales, pero la raíz cuadrada sí que nos impone condiciones. El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

Por otro lado su derivada

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}(-2x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x^2} = \left(-2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^{-x^2} = \left(\frac{1-4x^2}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^{-x^2}$$

está definida en $]0, +\infty[$. El signo de f' coincidirá con el de $1-4x^2$, al ser el denominador de f' y la exponencial siempre positivas. Así, teniendo en cuenta que $1-4x^2$ es una parábola con las ramas hacia abajo que se anula en $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$, tenemos un posible extremo relativo en $x_2 = \frac{1}{2}$, ya que $x_1 = -\frac{1}{2} \notin D(f)$ y, además,

$$1 - 4x^2 > 0 \ \leftrightarrow \ x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

$$1 - 4x^2 < 0 \ \leftrightarrow \ x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\bigcup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$$

Como la función f sólo está definida en $[0, +\infty[$, podemos concluir que f es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, es estrictamente decreciente en $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ y alcanza un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$. También puedes utilizar el signo de la derivada segunda para justificar ésto último.

---

3. (3p) Calcula el valor del área encerrada por la función $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$, el eje OX y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$.

El signo de la función $\frac{\log x}{x^2}$ viene dado por el signo de $\log x$. Como $\log x < 0$ $x \in]0,1]$ tendremos

$$Area = \int_{1/2}^{2} \left| \frac{\log x}{x^2} \right| dx = -\int_{1/2}^{1} \frac{\log x}{x^2} dx + \int_{1}^{2} \frac{\log x}{x^2} dx$$

Ahora vamos a calcular el valor de la integral indefinida y luego utilizaremos la regla de Barrow para hallar el área. Esta integral se puede hacer utilizando diversos métodos como cambio de variables o por partes. Nosotros vamos a utilizar el método de integración por partes:

$u = \log x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$

$dv = \frac{1}{x^2} dx \quad \rightarrow \quad v = \int dv = \int x^{-2} dx = \frac{-1}{x}$

Ahora utilizamos la fórmula de integración por partes:

$$\int u\ dv \ = \ u\ v \ - \int v\ du$$

$$\int \frac{\log x}{x^2} dx = -\frac{\log x}{x} \ - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x} dx =$$

$$= -\frac{\log x}{x} \ - \ \frac{1}{x}$$

Aplicamos la fórmula obtenida y la regla de Barrow para obtener el valor del área

$$Area = \left. \frac{\log x}{x} \ + \ \frac{1}{x} \right]_{(1/2)}^{1} + \left. \left(-\frac{\log x}{x} \ - \ \frac{1}{x} \right) \right]_{1}^{2} =$$

$$= \frac{\log 1}{1} \ + \ \frac{1}{1} - \frac{\log(1/2)}{(1/2)} \ - \ \frac{1}{(1/2)} - \frac{\log 2}{2} \ - \ \frac{1}{2} + \frac{\log 1}{1} \ + \ \frac{1}{1} =$$

$$= -1 + \log 4 + \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2} = -\frac{1}{2} + 2\log 2 - \frac{\log 2}{2} = -\frac{1}{2} + 3\frac{\log 2}{2} \simeq 0.539721\ u.a.$$

---

4. a)$_{(2p)}$ Aproxima la integral

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}\ dx$$

utilizando el método de los trapecios con $n = 5$. Acota el error cometido en la aproximación sabiendo que $M_2 = 3$.

b)$_{(1p)}$ Determina el valor mínimo de n necesario para aproximar la integral del apartado a) mediante la fórmula de Simpson de forma que se garantice un error menor que el del apartado anterior, sabiendo que $M_4 = 8$.

---

a) Utilizamos la fórmula de los trapecios:

$$T_n f = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b) \right)\ con\ h = \frac{b-a}{n}.$$

en nuestro caso $n = 5$,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0.5}{5} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

Entonces la partición P para el intervalo $[0.5, 1]$ es:

$$P = \{0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 1\},$$

y

$$T_5 = \frac{1}{20}\left(\sqrt{0.5} \cdot e^{-(0.5^2)} + \left(\sqrt{0.6} \cdot e^{-(0.6^2)} + \sqrt{0.7} \cdot e^{-(0.7^2)} + \sqrt{0.8} \cdot e^{-(0.8^2)} + \sqrt{0.9} \cdot e^{-(0.9^2)} \right) + \sqrt{1} \cdot e^{-(1^2)} \right) \simeq 0.240592$$

Aplicando la fórmula del error de los trapecios,

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \; ; \; M_2 \geq \max_{[a,b]} |f''| \, .$$

En nuestro caso $M_2 = 3$:

$$E_4 \leq \frac{(1-0.5)^3 \cdot 3}{12 \cdot 5^2} = \frac{1}{800} = 0.00125$$

que garantiza al menos un decimal correcto
b) El error cometido al aplicar el método de Simpson viene acotado por la fórmula:

$$\text{Cota de error: } E_n \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \; ; \; M_4 \geq \max_{[a,b]} \left| f^{(iv)} \right| ,$$

en este caso queremos encontrar el valor de n que hace que el método de Simpson garantice un error menor que 0.00125, ademas sabemos que $M_4 = 8$, entonces:

$$E_n < \frac{(1-0.5)^5}{180n^4} \cdot 8 < \frac{1}{800} \quad \leftrightarrow \quad \frac{(0.5)^5 \cdot 800}{180} \cdot 8 < n^4 \leftrightarrow \quad \frac{800}{720} < n^4 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \quad \sqrt[4]{\frac{10}{9}} < n \quad \leftrightarrow 1.02669 < n$$

Como $n > 1.02669$ y además tiene que ser entero y par, obtenemos que $n \geq 2$.

SEGUNDO PARCIAL

---

1. (2p) Compara el orden de magnitud de las siguientes sucesiones. Justifica tus respuestas.

$$\begin{cases} a_n &= 1+2+3+...+n \, , \\ b_n &= (n+1)+(n+2)+(n+3)+...+2n. \end{cases}$$

Para comparar el orden de magnitud de ambas sucesiones vamos a calcular el límite del cociente de ambas sucesiones

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1+2+3+...+n}{(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(n+n)} = (Stolz) =$$

$$\lim \frac{\overbrace{(1+2+3+...+n+(n+1))}^{a_{n+1}} - \overbrace{(1+2+3+...+n)}^{a_n}}{\underbrace{((n+2)+(n+3)+...+(2(n+1))}_{b_{n+1}} - \underbrace{((n+1)+(n+2)+...+(2n))}_{b_n}} =$$

$$= \lim \frac{n+1}{((2n+1)+(2n+2))-(n+1)} = \lim \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}$$

Este límite también se puede resolver utilizando la fórmula de la suma de los n primeros números naturales. A la vista del resultado anterior podemos concluir que $a_n \approx b_n$.

---

2. (3p) Resuelve la recurrencia:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2^{n-1}, \\ a_1 = -1 \quad , \quad a_2 = 5. \end{cases}$$

Primero resolvemos la ecuación característica asociada a la recurrencia homogénea:

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

que tiene una raíz doble $x = -1$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea anterior es:

$$a_n^h = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n = C_1 + n \cdot C_2.$$

Seguidamente calculamos una solución particular de la recurrencia no homogénea, que será de la forma:

$$a_n^p = K \cdot 2^n.$$

Sustituyéndola en la ecuación completa podemos obtener el valor de la constante K:

$$\underbrace{K \cdot 2^{n+2}}_{a^p_{n+2}} - 2 \cdot \underbrace{(K \cdot 2^{n+1})}_{a^p_{n+1}} + \underbrace{(K \cdot 2^{n})}_{a^p_{n}} = 2^{n-1}$$

hacemos operaciones y simplificamos dividiendo entre 2^n

$$K \cdot 2^2 - 2 \cdot K \cdot 2^1 + K = 2^{-1} \leftrightarrow \; K = 2^{-1}$$

Entonces la solución de la ecuación completa es:

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot n + \frac{1}{2} \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot n + 2^{n-1}$$

Ahora utilizamos las condiciones de contorno para encontrar el valor de las constantes C_1 y C_2:

$$\textit{para n=1} \;\rightarrow\; a_1 = C_1 + C_2 \cdot 1 + 2^0 = -1 \Rightarrow C_1 + C_2 = -2,$$

$$\textit{para n=2} \;\rightarrow\; a_2 = C_1 + C_2 \cdot 2 + 2^1 = 5 \Rightarrow C_1 + 2 \cdot C_2 = 3.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos: $C_1 = -7$ y $C_2 = 5$, entonces la solución es:

$$a_n = -7 + 5n + 2^{n-1}$$

---

3. Sea la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{2n+1}}$$

a)$_{(2p)}$ Aproxima $f(-1)$ con una precisión de 10^{-6}. Justifica tu respuesta.

b)$_{(1p)}$ Deriva la serie de potencias anterior y calcula su suma donde converja.

c)$_{(1p)}$ Integra el resultado anterior para encontrar $f(x)$ explícitamente.

d)$_{(1p)}$ Calcula el valor exacto de $f(-1)$ utilizando el resultado anterior y compara con el resultado del apartado a).

---

a)

$$f(-1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{2n+1}}$$

es una serie alternada, vamos a comprobar si se le puede aplicar el criterio de Leibniz:

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 5^{2n+1}} = 0$$

- La sucesión de valores absolutos es una sucesión decreciente ya que:

$$(n+1) \cdot 5^{2n+1} < (n+2) \cdot 5^{2(n+1)+1} \;\rightarrow\; \frac{1}{(n+1) \cdot 5^{2n+1}} > \frac{1}{(n+2) \cdot 5^{2(n+1)+1}} \;\rightarrow\; |a_n| > |a_{n+1}|$$

Le podemos aplicar el criterio de Leibniz para series alternadas. El error asociado a la aproximación

$$S_N \simeq \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{2n+1}}$$

viene acotado por

$$E_N \leq \frac{1}{(N+2) \cdot 5^{2(N+1)+1}} = \frac{1}{(N+2) \cdot 5^{2N+3}}$$

Entonces tenemos que encontrar N tal que:

$$\frac{1}{(N+2) \cdot 5^{2N+3}} \leq 10^{-6}$$

Dándole valores a N obtenemos

- Para $N=1$, $E_1 = \frac{1}{9375} \simeq 0.000106667 > 10^{-6}$
- Para $N=2$, $E_2 = \frac{1}{312500} \simeq 3.2 \cdot 10^{-6} > 10^{-6}$
- Para $N=3$, $E_3 = \frac{1}{9765625} \simeq 1.24 \cdot 10^{-7} \leq 10^{-6}$

y

$$f(-1) \simeq \frac{-1}{1 \cdot 5^1} + \frac{1}{2 \cdot 5^3} + \frac{-1}{3 \cdot 5^5} + \frac{1}{4 \cdot 5^7} = -\frac{183847}{937500} \simeq -0.1961034667$$

b) Vamos a derivar la serie término a término

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 5^{2n+1}}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{2n+1}}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)\cdot 5^{2n+1}} \frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)\cdot 5^{2n+1}} \cdot (n+1)x^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^{2n+1}} \cdot x^n = \frac{1}{5^1} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^{2n}} \cdot x^n = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(5^2)^n} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{25}\right)^n$$

Ahora sumamos la serie geométrica obtenida

$$\frac{1}{5} \cdot \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{25}\right)^n = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{x}{25}\right)}\right) = \frac{5}{25-x} \text{ si } \left|\frac{x}{25}\right| < 1, \\ \text{divergente si } \left|\frac{x}{25}\right| \geq 1. \end{cases}$$

c) Si integramos el resultado anterior:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{2n+1}} = \int f'(x)dx = \int \frac{5}{25-x} dx = -5\log(25-x) + C$$

Para calcular el valor de la constante podemos utilizar que $f(0) = 0$, entonces:

$$f(0) = 0 = -5\log(25) + C \ \leftrightarrow C = 5\log(25)$$

y

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{2n+1}} = -5\log(25-x) + 5\log 25 = 5\log\frac{25}{25-x}$$

d)

$$f(-1) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{2n+1}} = 5\log\frac{25}{26} \simeq -0.19610357$$

resultado que confirma la precisión encontrada en a) y que proporciona al menos 5 decimales exactos.