DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Primer Parcial **14-11-2011** **Duración prevista: 2h**

---

1. (0.5p) Determina el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|5 - |x-2|| \leq 8$.

Observa que

$$|5 - |x-2|| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq 5 - |x-2| \leq 8 \Leftrightarrow -13 \leq -|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq |x-2| \leq 13$$

Ahora bien , la desigualdad

$$-3 \leq |x-2|$$

es siempre cierta, por la definición de valor absoluto. Respecto a la segunda,

$$|x-2| \leq 13 \Leftrightarrow -13 \leq x-2 \leq 13 \Leftrightarrow -11 \leq x \leq 15$$

En resumen, el conjunto pedido será

$$\mathbb{R} \cap [-11, 15] = [-11, 15]$$

---

2. (0.8p) Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. Demuestra si es par, impar o de ninguno de los dos tipos. A partir del estudio de su derivada, determina las regiones de crecimiento y decrecimiento.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ e^{2x} = 1 \ \right\} = \mathbb{R} \sim \{0\}$$

La función es impar, puesto que

$$f(-x) = \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} = \frac{\dfrac{1}{e^{2x}}+1}{\dfrac{1}{e^{2x}}-1} = \frac{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}{\dfrac{1-e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{e^{2x}+1}{1-e^{2x}} = -f(x)$$

Por otro lado, la derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right) - 2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2} = \frac{2e^{4x} - 2e^{2x} - 2e^{4x} - 2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2} = \frac{-4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2} < 0$$

al ser la exponencial siempre positiva. Por tanto, la función $f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R} \sim \{0\}$.

3. $_{(0.5\text{p})}$ Calcula $\nabla f(0,1,-2)$, siendo la función

$$f(x,y,z) = e^{xy^2} + \frac{z^2}{y}$$

Observa que

$$f_x = y^2 e^{xy^2} \quad , \quad f_y = 2xye^{xy^2} - \frac{z^2}{y^2} \quad , \quad f_z = \frac{2z}{y}$$

de donde

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y^2 e^{xy^2} \quad , \quad 2xye^{xy^2} - \frac{z^2}{y^2} \quad , \quad \frac{2z}{y} \right)$$

Por tanto,

$$\nabla f(0,1,-2) = (1\ ,-4\ ,\ -4)$$

4. **a)**$_{(0.5\text{p})}$ Calcula el valor exacto de $\displaystyle\int_1^5 x^2\ \log(x)dx$.

b)$_{(0.4\text{p})}$ Aproxima, mediante la regla de Simpson, el valor de la integral del apartado a) dividiendo el intervalo de integración en 4 partes iguales.

c)$_{(0.3\text{p})}$ Acota el error cometido en la aproximación anterior. Verifica la precisión que obtienes comparando con el resultado de a).

a) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_1^5 x^2 \log(x)\ dx &= \left(\begin{array}{ccc} u = \log(x) & ; & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx & ; & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right) = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \log(x) \right]_1^5 - \int_1^5 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \cdot \log(x) \right]_1^5 - \frac{1}{3} \int_1^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot \log(x) - \frac{1}{9}x^3 \right]_1^5 = \\ &= \frac{125}{3}\log(5) - \frac{125}{9} + \frac{1}{9} = \frac{125}{3}\log(5) - \frac{124}{9} = 53.28213524...\end{aligned}$$

b) Para la aproximación pedida, consideramos $h = \frac{4}{4} = 1$ y la partición

$$P = \{\ 1\ ,\ 1+1\ ,\ 1+2\ ,\ 1+3\ ,\ 5\ \} = \{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ \}$$

La regla de Simpson para esta partición queda

$$\begin{aligned}\int_1^5 x^2\ \log(x)dx &\simeq S_4 = \frac{1}{3}\left(\log(1) + 4\cdot(4\log(2) + 16\log(4)) + 2\cdot(9\log(3)) + 25\log(5)\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(16\log(2) + 64\log(4) + 18\log(3) + 25\log(5)\right) = \\ &= 53.27472100...\end{aligned}$$

c) Para hallar el error correspondiente necesitamos acotar, para $x \in [1,5]$, la derivada cuarta de $f(x) = x^2 \log(x)$

$$f'(x) = 2x\log(x) + x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 2\log(x) + 3 \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad f^{iv)}(x) = -\frac{2}{x^2}$$

de donde, para $x \in [1,5]$,

$$\left| f^{iv)}(x) \right| = \frac{2}{x^2} < 2 \quad \Rightarrow \quad M_4 = 2$$

y, en consecuencia,

$$ES_4 = \left| \int_1^5 x^2 \log(x)dx - S_4 \right| \leq \frac{(5-1)^5}{180\cdot 4^4}\cdot 2 = \frac{8}{180} = 0.04444444...$$

que no garantiza ninguna cifra decimal exacta (en realidad, una).

Notemos que la diferencia entre el valor exacto y el aproximado es, efectivamente, menor que la cota de error calculada

$$(53.28213524... - 53.27472100...) = 0.00741423\ldots < \frac{8}{180} = 0.04444444...$$