# Examen del bloque 2 de SIN (tipo A)

ETSINF, Universitat Politècnica de València, 14 de enero de 2020

**Apellidos:** ______________________ **Nombre:** ______________

**Grupo:** ☐ **3A** ☐ **3B** ☐ **3C** ☐ **3D** ☐ **3E** ☐ **3F** ☐ **3G** ☐ **4IA**

## Test (1,75 puntos)

Marca cada recuadro con una única opción. Puntuación: $\max(0, (\text{aciertos} - \text{errores}\,/\,3) \cdot 1{,}75\,/\,9)$.

1 $\boxed{D}$ Sea $\mathbf{x}$ un objeto a clasificar en una clase de $C$ posibles. Indica cuál de los siguientes clasificadores *no* es de error mínimo (o escoge la última opción si los tres son de error mínimo):

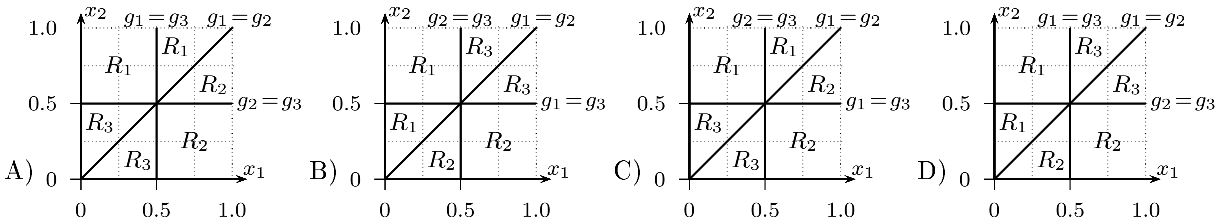
A) $c(\mathbf{x}) = \arg\max\limits_{c=1,\dots,C} \; p(c \mid \mathbf{x})^2$.

B) $c(\mathbf{x}) = \arg\max\limits_{c=1,\dots,C} \; \log p(\mathbf{x}, c)$.

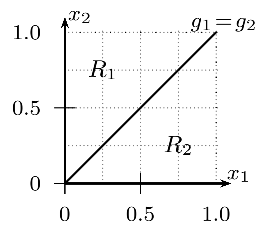
C) $c(\mathbf{x}) = \arg\max\limits_{c=1,\dots,C} \; \sqrt{p(\mathbf{x}, c)}\,/\,p(\mathbf{x})$.

D) Los tres clasificadores anteriores son de error mínimo.

2 $\boxed{C}$ Sea un clasificador en tres clases basado en las funciones discriminantes lineales bidimensionales de vectores de pesos: $\mathbf{w}_1 = (0,0,1)^t$, $\mathbf{w}_2 = (0,1,0)^t$ y $\mathbf{w}_3 = (0.5,0,0)^t$. Indica cuál de las figuras dadas a continuación es coherente con las fronteras y regiones de decisión que define dicho clasificador.




3 $\boxed{B}$ Dado el clasificador en dos clases definido por su frontera y regiones de decisión de la figura de la derecha, ¿cuál de los siguientes vectores de pesos *no* define un clasificador equivalente al dado?



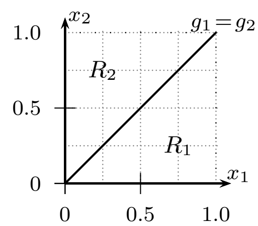

A) $\mathbf{w}_1 = (0,0,1)^t$ y $\mathbf{w}_2 = (0,1,0)^t$.

B) $\mathbf{w}_1 = (0,1,0)^t$ y $\mathbf{w}_2 = (0,0,1)^t$.

C) $\mathbf{w}_1 = (0,-1,0)^t$ y $\mathbf{w}_2 = (0,0,-1)^t$.

D) Todos los vectores de pesos anteriores definen clasificadores equivalentes.

4 $\boxed{D}$ Durante la aplicación del algoritmo Perceptrón ($\alpha = 1.0$ y $b = 0$) en un problema de clasificación en dos clases, se han obtenido los vectores de pesos $\mathbf{w}_1 = (-1,1,0)^t$ y $\mathbf{w}_2 = (1,0,1)^t$. Supón que el siguiente paso en la aplicación de Perceptrón consiste en procesar una cierta muestra de entrenamiento $\mathbf{x}$ de clase $c$. Indica cuál de las siguientes opciones daría como resultado un conjunto de pesos que define la frontera y regiones de decisión de la figura de la derecha.




A) $\mathbf{x} = (-1,1)^t$ y $c = 2$.

B) $\mathbf{x} = (0,0)^t$ y $c = 2$.

C) $\mathbf{x} = (-1,1)^t$ y $c = 1$

D) $\mathbf{x} = (0,0)^t$ y $c = 1$.

5 $\boxed{C}$ Sea un problema de clasificación en tres clases para objetos del tipo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t \in \{0,1\}^2$, con las distribuciones de probabilidad de la derecha. ¿Cuál es el error de Bayes, $\varepsilon^*$, en este problema?

| $\mathbf{x}$ | | $P(c \mid \mathbf{x})$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $c=1$ | $c=2$ | $c=3$ | $P(\mathbf{x})$ |
| 0 | 0 | 0.6 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
| 0 | 1 | 0.1 | 0.1 | 0.8 | 0.3 |
| 1 | 0 | 0.3 | 0.5 | 0.2 | 0.2 |
| 1 | 1 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 0.3 |

A) $\varepsilon^* < 0.2$.

B) $0.2 \le \varepsilon^* < 0.4$.

C) $0.4 \le \varepsilon^* < 0.7$. $\quad .2 \cdot .4 + .3 \cdot .2 + .2 \cdot .5 + .3 \cdot 2/3 = .44$

D) $0.7 \le \varepsilon^*$.

6 $\boxed{\text{D}}$ Se tiene un problema de clasificación para el cual se ha aprendido un clasificador. Asimismo, se tiene un conjunto de $M = 100$ muestras de test con el cual se ha estimado:

- La probabilidad de error del clasificador aprendido, $\hat{p} = 0.10 = 10\,\%$.
- Un intervalo de confianza al 95 % para dicha probabilidad de error, $\hat{I} = [0.04, 0.16] = [4\,\%, 16\,\%]$.

Se considera que la probabilidad de error estimada es razonable y que la misma no variará significativamente aunque usemos muchas más muestras de test. Ahora bien, el intervalo de confianza (al 95 %) estimado, $\hat{I} = 10\,\% \pm 6\,\%$, nos parece un poco amplio y nos preguntamos si es posible reducir su amplitud mediante el uso de más de $M = 100$ muestras de test. Además, si ello fuera posible, nos preguntamos si sería posible reducir dicha amplitud a la mitad o menos; esto es, tal que $\hat{I} = 10\,\% \pm \hat{R}$ con $\hat{R} \leq 3\,\%$. En relación con estas cuestiones, indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta.

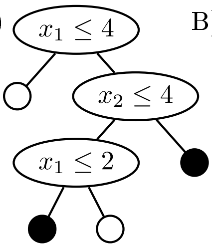
A) En general, no es posible reducir la amplitud de $\hat{I}$ pues $\hat{I}$ no depende significativamente de $M$.

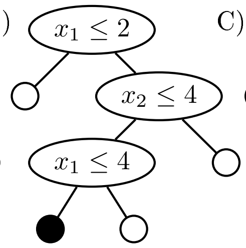
B) No es posible reducir la amplitud de $\hat{I}$ ya que hemos considerado que $\hat{p}$ no variará significativamente y, siendo así, la amplitud de $\hat{I}$ tampoco puede variar significativamente.

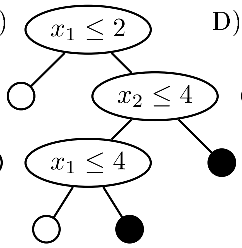
C) Sí es posible reducir la amplitud de $\hat{I}$, a la mitad o menos, si doblamos $M$ al menos ($M \geq 200$).

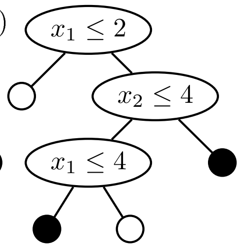
D) Sí es posible reducir la amplitud de $\hat{I}$, a la mitad o menos, si empleamos al menos cuatro veces más muestras de test aproximadamente ($M \geq 400$). $1.96 \cdot \sqrt{(0.1 \cdot 0.9)/M} \leq 0.03 \rightarrow M \geq 385$

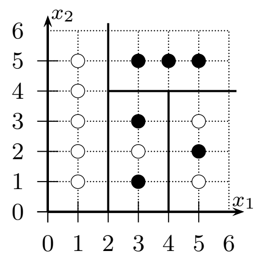
7 $\boxed{\text{D}}$ Dado el conjunto de muestras de 2 clases ($\circ$ y $\bullet$) de la figura de la derecha, ¿cuál de los siguientes árboles de clasificación es coherente con la partición representada?

A) 


B) 


C) 


D) 

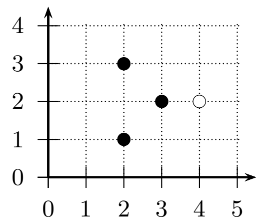

8 $\boxed{\text{B}}$ La figura a la derecha muestra una partición de 4 puntos bidimensionales en 2 clústers (representados mediante los símbolos $\bullet$ y $\circ$). La transferencia del punto $(3, 2)^t$ del cluster $\bullet$ al cluster $\circ$:

A) produce un incremento en la Suma de Errores Cuadráticos (SEC).

B) produce un decremento en la SEC. $\Delta J = 0.5 - 0.67335 = -0.17335$

C) no altera la SEC.

D) produce una SEC negativa.




9 $\boxed{\text{B}}$ En relación al cálculo de la probabilidad $P(y \mid M)$ con la que un modelo de Markov $M$ genera una cadena de símbolos $y$, indica qué afirmación es cierta:

A) La única forma de calcular $P(y \mid M)$ consiste en generar explícitamente todas las secuencias de estados, calcular la probabilidad de que cada secuencia de estados haya generado $y$ y posteriormente sumar todas las probabilidades obtenidas.

B) Una forma eficiente computacionalmente de calcular $P(y \mid M)$ consiste en aplicar el algoritmo *Forward*.

C) Una forma eficiente computacionalmente de calcular $P(y \mid M)$ consiste en aplicar el algoritmo de Viterbi.

D) La única forma de calcular $P(y \mid M)$ consiste en generar explícitamente todas las secuencias de estados mediante el algoritmo de Viterbi, calcular la probabilidad de que cada secuencia haya generado $y$ y sumar todas las probabilidades obtenidas.

## Problema (2 puntos)

Sea un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{1,\ 2,\ F\}$ y conjunto de símbolos $\Sigma = \{a, b\}$. Se pide:

a) (1 punto) Sean el vector de probabilidades iniciales ($\pi$), matriz de transición entre estados ($A$) y matriz de generación de símbolos ($B$):

| $\pi$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| | 0.6 | 0.4 |

| $A$ | 1 | 2 | $F$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.6 | 0.3 | 0.1 |
| 2 | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

| $B$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0.7 |
| 2 | 0.8 | 0.2 |

Realiza una traza del algoritmo de Viterbi para la cadena $y = aab$ obteniendo la mejor secuencia de estados.

b) (1 punto) Sean las tres cadenas de símbolos: $y_1 = bbaa$, $y_2 = abab$ y $y_3 = aabbb$. Al aplicar el algoritmo de Viterbi con un cierto modelo de Markov $M$, se obtienen, respectivamente, las siguientes secuencias óptimas de estados: $1122F$, $2121F$ y $22111F$. A partir de dichas cadenas y sus respectivas secuencias óptimas de estados, re-estima las probabilidades iniciales ($\pi$), de transición ($A$) y de emisión ($B$) de $M$ (del mismo modo que se hace en una iteración del algoritmo de re-estimación de Viterbi).

a) Traza del algoritmo de Viterbi para la cadena $y = aab$:

| $V$ | $a$ | $a$ | $b$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0.6 \cdot 0.3 = 0.18$ | $0.18 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 0.0324$<br>$0.32 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.0288$<br>$0.0324 > 0.028$ (de 1) | $0.0324 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.0136$<br>$0.1024 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.0215$<br>$0.0136 < 0.0215$ (de 2) | |
| 2 | $0.4 \cdot 0.8 = 0.32$ | $0.18 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.0432$<br>$0.32 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.1024$<br>$0.0432 < 0.1024$ (de 2) | $0.0324 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.0019$<br>$0.1024 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.0082$<br>$0.0019 < 0.0082$ (de 2) | |
| $F$ | – | – | – | $0.0215 \cdot 0.1 = 0.0022$<br>$0.0082 \cdot 0.3 = 0.0025$<br>$0.0022 < 0.0025$ (de 2) |

La secuencia óptima de estados es: 222F

b) La estimación de $\pi$, $A$ y $B$ para las cadenas de entrenamiento $y_1 = bbaa$, $y_1 = abab$ y $y_3 = aabbb$ es

$\pi$: El estado 1 se ha utilizado una vez como estado inicial y el estado 2 dos veces.

$A$:
- La transición 1-1 3 veces, la 1-2 2 veces, la 1-F dos veces
- La transición 2-1 3 veces, la 2-2 2 vez, la 2-F una vez

$B$:
- El símbolo $a$ se ha emitido 0 vez en el estado 1 y 6 veces en el estado 2
- El símbolo $b$ se ha emitido 7 veces del estado 1 y 0 veces del estado 2

Normalizando

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $\pi$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

| $A$ | 1 | 2 | $F$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{7}$ |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

| $B$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.0 | 1.0 |
| 2 | 1.0 | 0.0 |