

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

ALG - Test Bloc 2 (Pràctiques P4 a P7)

1. Considera la matriu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

a)_(1p) Calcula amb *Scilab* la inversa, A^{-1} de dues maneres i verifica que trobes el mateix resultat.

b)_(1p) Resol l'equació matricial

$$A \cdot X \cdot A^t = A + B$$

on $B = A \cdot A^t$.

c)_(1p) A partir de la descomposició *LU* de A que *Scilab* te proporciona, resol el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ on $\vec{b} = (-1, 2, 0, 3)$ i verifica que el resultat que trobes és correcte.

a)

```
->A=[-2 4 2 2;8 -2 1 2;-4 2 1 4;-2 1 4 4]
```

```
A =
```

```
- 2. 4. 2. 2.
```

```
8. - 2. 1. 2.
```

```
- 4. 2. 1. 4.
```

```
- 2. 1. 4. 4.
```

```
->rank(A)
```

```
ans =
```

```
4.
```

```
->inv(A)
```

```
ans =
```

```
0.0913978 0.1129032 - 0.0376344 - 0.0645161
```

```
0.3118280 0.0322581 - 0.0107527 - 0.1612903
```

```
0.0430108 - 0.0645161 - 0.3118280 0.3225806
```

```
- 0.0752688 0.1129032 0.2956989 - 0.0645161
```

```
->rref([A,eye(4,4)])
```

```
ans =
```

```
1. 0. 0. 0. 0.0913978 0.1129032 - 0.0376344 - 0.0645161
```

```
0. 1. 0. 0. 0.3118280 0.0322581 - 0.0107527 - 0.1612903
```

```
0. 0. 1. 0. 0.0430108 - 0.0645161 - 0.3118280 0.3225806
```

```
0. 0. 0. 1. - 0.0752688 0.1129032 0.2956989 - 0.0645161
```

```
->inversA=ans(:,5:8)
```

```
inversA =
```

```
0.0913978 0.1129032 - 0.0376344 - 0.0645161
```

```
0.3118280 0.0322581 - 0.0107527 - 0.1612903
```

```
0.0430108 - 0.0645161 - 0.3118280 0.3225806
```

```
- 0.0752688 0.1129032 0.2956989 - 0.0645161
```

b) Com A és invertible, multiplicant a l'esquerra per A^{-1} i a la dreta per $(A^{-1})^t$, l'equació equival a

$$X = (A^{-1})^t + I$$

i, en *Scilab*,

```
X=inv(A)'+eye(4,4)
X =
1.0913978 0.3118280 0.0430108 - 0.0752688
0.1129032 1.0322581 - 0.0645161 0.1129032
- 0.0376344 - 0.0107527 0.6881720 0.2956989
- 0.0645161 - 0.1612903 0.3225806 0.9354839
```

Podem comprovar el resultat:

```
->B=A*A'
B =
28. - 18. 26. 24.
- 18. 73. - 27. - 6.
26. - 27. 37. 30.
24. - 6. 30. 37.
->clean(A*X*A'-A-B)
```

```
ans =
0. 0. 0. 0.
0. 0. 0. 0.
0. 0. 0. 0.
0. 0. 0. 0.
```

c)

Si $A = LU$, el sistema $Ax = b$ serà equivalent a

$$L(Ux) = b$$

i si anomenem $Ux = y$ resoldrem amb *Scilab*

$$Ly = b$$

i, a continuació,

$$Ux = y$$

obtenint la solució demanada:

```
->[L U]=lu(A)
U =
8. - 2. 1. 2.
0. 3.5 2.25 2.5
0. 0. 3.9285714 4.1428571
0. 0. 0. 3.3818182
L =
- 0.25 1. 0. 0.
1. 0. 0. 0.
- 0.5 0.2857143 0.2181818 1.
- 0.25 0.1428571 1. 0.
->b=[-1;2;0;3]
b =
- 1.
2.
0.
3.
```

```

->y=L\b
y =
2.
- 0.5
3.5714286
0.3636364
->x=U\y
x =
- 0.0591398
- 0.7311828
0.7956989
0.1075269
Comprovació:
->clean(A*x-b)
ans =
0.
0.
0.
0.

```

2. a)_(1p) Calcula la projecció ortogonal de $\vec{x} = (1, -1, 2)$ sobre la recta $w = \langle (1, 2, -1) \rangle$.

b)_(1p) Converteix el conjunt de vectors

$$\vec{u} = (-3, -2, 1, 0), \quad \vec{v} = (0, 0, 0, -1), \quad \vec{w} = (-1, 3, 3, 0)$$

en un sistema ortonormal i troba un vector unitari de la forma $\vec{x} = (a, b, c, 0)$, ortogonal als tres anteriors.

c)_(1p) Calcula la projecció ortogonal de $\vec{x} = (1, -1, 2)$ sobre el subespai $W = \langle (1, 2, -1), (1, 1, -2) \rangle$.

d)_(1p) Troba el subespai ortogonal, W^\perp , del subespai de **c)** i verifica (de dues maneres) que la projecció calculada, $Proj_W(\vec{x})$, es troba efectivament en W .

a)

El vector unitari, q , en la direcció del generador de la recta serà

```

->w=[1;2;-1];
->q=w/norm(w)
q =
0.4082483
0.8164966
- 0.4082483

```

i tenint en compte la fórmula de la projecció sobre una recta,

```

x=[1;-1;2];
->proj_x=(q'*x)*q
proj_x =
- 0.5
- 1.
0.5

```

Comprovació:

```

>clean((x-proj_x)'*q)
ans =
0.

```

b)

A la vista dels resultats:

```
u=[-3;-2;1;0];
```

```
->v=[0;0;0;-1];
```

```
->w=[-1;3;3;0];
```

```
->u'*v
```

```
ans =
```

```
0.
```

```
->u'*w
```

```
ans =
```

```
0.
```

```
->v'*w
```

```
ans =
```

```
0,
```

el sistema es ortogonal i, a més a més, v és unitari, així que farem unitaris u i w dividint per les seues

normes:

```
->u=u/norm(u)
```

```
u =
```

```
- 0.8017837
```

```
- 0.5345225
```

```
0.2672612
```

```
0.
```

```
->w=w/norm(w)
```

```
w =
```

```
- 0.2294157
```

```
0.6882472
```

```
0.6882472
```

```
0.
```

Ara plantejarem el sistema que fa que el nou vector, x siga ortogonal als tres anteriors (en la forma inicial, més senzilla):

$$-3a - 2b + c = 0$$

$$-a + 3b + 3c = 0$$

Resoldrem amb *Scilab* i cercarem una solució no nul·la:

```
>A=[-3 -2 1;-1 3 3]
```

```
A =
```

```
- 3. - 2. 1.
```

```
- 1. 3. 3.
```

```
->b=[0;0]
```

```
b =
```

```
0.
```

```
0.
```

```
>rref([A b])
```

```
ans =
```

```
1. 0. - 0.8181818 0.
```

```
0. 1. 0.7272727 0.
```

i d'ací,

```
->x=[ans(:,3):-1;0]
```

```
x =
```

```
- 0.8181818
```

```
0.7272727
```

```
- 1.
```

```
0.
```

```
->x=x/norm(x)
```

```
x =
```

```
- 0.5518254
```

```
0.4905115
```

```
- 0.6744533
```

```
0.
```

i ja tenim x unitari, i, com pots comprovar explícitament, ortogonal a u , v i a w .

c)

Farem servir les fórmules per a la projecció sobre un subespai. Ara la matriu $M(S)$ serà la formada pels vectors (columna) generadors de W .

En *Scilab*,

```
->u=[1;2;-1];
```

```
->v=[1;1;-2];
```

```
->M=[u v]
```

```
M =
```

```
1. 1.
```

```
2. 1.
```

```
- 1. - 2.
```

```
->x=[1;-1;2]
```

```
x =
```

```
1.
```

```
- 1.
```

```
2.
```

```
->proj_x=M*inv(M'*M)*M'*x
```

```
proj_x =
```

```
- 0.6363636
```

```
- 0.4545455
```

```
1.4545455
```

L'apartat següent ens servirà de comprovació.

d)

Una forma de verificar que la projecció es troba en W és veure que el rang de la matriu de W ampliada amb $proj_x$ és dos:

```
->A=[M proj_x]
```

```
A =
```

```
1. 1. - 0.6363636
```

```
2. 1. - 0.4545455
```

```
- 1. - 2. 1.4545455
```

```
->rank(A)
```

```
ans =
```

```
2.
```

Una forma alternativa és obtenir W^\perp (de matriu el nucli de $M(s)^t$) i veure que $proj_x$ és ortogonal a aquest espai:

```
->ort_W=kernel(M')
```

```
ort_W =
```

```
0.9045340
```

```
- 0.3015113
```

```
0.3015113
```

```
->clean(proj_x'*ort_W)
```

```
ans =
```

```
0.
```

3. a)_(1.5p) Troba amb *Scilab* la solució per mínims quadrats per al sistema $Ax = b$, construint les equacions normals i calculant l'error d'aproximació, on

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & -6 & 4 \\ 7 & -6 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- b)_(1.5p) Troba l'equació $y = \alpha + \beta x$ de la recta de mínims quadrats per als punts

$$P_1 = (1, -1), \quad P_2 = (3, 0), \quad P_3 = (6, 0), \quad P_4 = (-1, 4)$$

i calcula l'error residual.

- a) Construirem, en primer lloc, les equacions normals:

```
[6 -4 4;8 -6 4;7 -6 2;-3 2 -2; 4 -4 2]
```

```
A =
```

```
6. - 4. 4.
```

```
8. - 6. 4.
```

```
7. - 6. 2.
```

```
- 3. 2. - 2.
```

```
4. - 4. 2.
```

```
->b=[-2;0;1;1;2]
```

```
b =
```

```
- 2.
```

```
0.
```

```
1.
```

```
1.
```

```
2.
```

```
->AM=A'*A
```

```
AM =
```

```
174. - 136. 84.
```

```
- 136. 108. - 64.
```

```
84. - 64. 44.
```

```
->bM=A'*b
```

```
bM =
```

```
0.
```

```
- 4.
```

```
- 4.
```

I ara resolldrem el sistema per a trobar el vector solució per mínims quadrats:

```
->xM=AM\bM
```

```
xM =
```

```
- 1.7647059
```

```
- 2.2941176
```

```
- 0.0588235
```

Finalment, l'error residual serà:

```
->norm(A*xM-b)
```

```
ans =
```

```
0.7669650
```

b)

A partir de les dades construirem la matriu de disseny:

```
->X=[1 1;1 3;1 6; 1 -1]
```

```
X =
```

```
1. 1.
```

```
1. 3.
```

```
1. 6.
```

```
1. - 1.
```

i el vector observació

```
->y=[-1;0;0;4]
```

```
y =
```

```
- 1.
```

```
0.
```

```
0.
```

```
4.
```

i resolldrem per mínims quadrats:

```
->XM=X'*X
```

```
XM =
```

```
4. 9.
```

```
9. 47.
```

```
->yM=X'*y
```

```
yM =
```

```
3.
```

```
- 5.
```

```
->solM=XM\yM
```

```
solM =
```

```
1.7383178
```

```
- 0.4392523
```

Finalment, el vector error residual vindrà donat per:

```
>y-X*solM
```

```
ans =
```

```
- 2.2990654
```

```
- 0.4205607
```

```
0.8971963
```

```
1.822429
```

de norma,

```
->norm(ans)
```

```
ans =
```

```
3.0965763
```