DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Examen Final   20-01-2020   Duración prevista: 3h

PRIMER PARCIAL

---

1. a)$_{(1p)}$ Resuelve la ecuación $|\,x-1| = |\,2x+1| - 1$.

b)$_{(1p)}$ Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\log(2x-3)}{\sqrt{1-|\,x-2\,|}}$.

---

a) Consideramos los tres casos:

$$\begin{array}{llll} \text{Si } x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[& \Rightarrow & -x+1 = -2x-1-1 & \Rightarrow \quad x=-3 \\ \text{Si } x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right[& \Rightarrow & -x+1 = 2x+1-1 & \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{3} \\ \text{Si } x \in [1, +\infty\,[& \Rightarrow & x-1 = 2x+1-1 & \Rightarrow \quad x=-1 \end{array}$$

Como $x=-1 \notin [1,+\infty\,[$, las soluciones de la ecuación serán $x=-3$ y $x=\dfrac{1}{3}$.

b) El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \;\; / \;\; 2x-3>0 \quad \wedge \quad 1-|\,x-2\,|>0 \,\}$$

Por un lado, tenemos que

$$2x-3>0 \;\Leftrightarrow\; x>\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x \in \left]\,\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

y, por otra parte,

$$\begin{array}{lllll} 1-|\,x-2\,|>0 & \Leftrightarrow & |\,x-2\,|<1 & \Leftrightarrow & -1<x-2<1 \quad \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow & 1<x<3 & \Leftrightarrow & x \in \,]1,3[\end{array}$$

Por tanto,

$$D(f) = \left]\,\frac{3}{2}, +\infty\right[\cap \,]\,1,3[\,= \left]\,\frac{3}{2}, 3\right[$$

---

2. $_{(3p)}$ Halla el dominio de $f(x) = \dfrac{e^{x^2-1}}{2x-1}$. A partir del estudio de su derivada, determina máximos y mínimos relativos así como las regiones de crecimiento y decrecimiento.

El dominio de la función $f(x)$ será $\mathbb{R} \sim \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ por ser un cociente entre una exponencial y un polinomio que se anula en $x=\dfrac{1}{2}$ (asíntota vertical). Por otro lado, el signo de su derivada

$$f'(x) = \frac{(2x-1)\,2xe^{x^2-1} - 2e^{x^2-1}}{(2x-1)^2} = \frac{2e^{x^2-1}\left(2x^2-x-1\right)}{(2x-1)^2}$$

coincidirá con el del polinomio $2x^2-x-1$, al ser la exponencial y el denominador siempre positivos. Así, teniendo en cuenta que $2x^2-x-1$ es una parábola con las ramas hacia arriba que se anula en $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ y $x_2 = 1$, tenemos dos posibles extremos relativos. Además,

$$2x^2-x-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\;\cup\;]\,1, +\infty[$$

$$2x^2-x-1<0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$$

y podemos concluir que f es estrictamente creciente en $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\; \cup \;]\,1, +\infty[$, es estrictamente decreciente en $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left] \dfrac{1}{2}, 1\right[$ y alcanza un máximo relativo en $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, de coordenadas $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{e^{-3/4}}{2}\right)$, y un mínimo relativo en $x_2 = 1$, de coordenadas $(1, 1)$. También puedes utilizar el signo de la derivada segunda para justificarlo.

---

3. $_{(2p)}$ Calcula el área encerrada por la gráfica de $f(x) = x \cdot \cos(x)$ y el eje de abscisas, sobre el intervalo $[0, \pi]$.

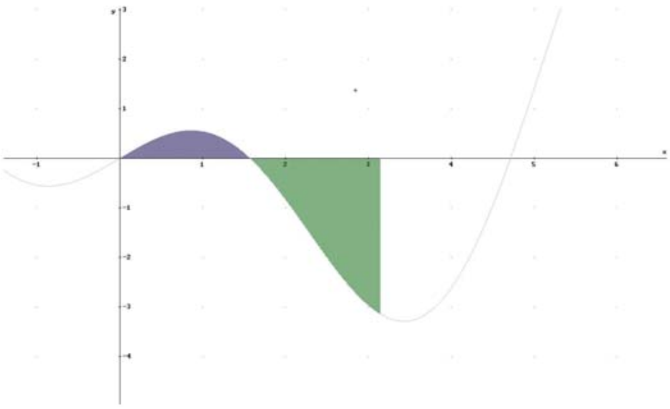
El área pedida vendrá dada por

$$A = \int_0^{\pi} |\; x \cdot \cos(x)| \; dx$$

Observa que

$$\begin{array}{lcl} \cos(x) \geq 0 \text{ si } \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \Rightarrow & f(x) \geq 0 \; \text{ si } \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos(x) \leq 0 \text{ si } \; x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \Rightarrow & f(x) \leq 0 \; \text{ si } \; x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{array}$$

tal y como se muestra en la figura



Por tanto,

$$A = \int_0^{\pi} |\; x \cdot \cos(x)| \; dx = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) \; dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \cdot \cos(x) \; dx$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos(x) \; dx \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc} u = x & ; & du = dx \\ dv = \cos(x)\; dx & ; & v = \sin(x) \end{array} \right) = \\ &= \quad x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \; dx \; = \; x \cdot \sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

de donde

$$A = [\; x \cdot \sin(x) + \cos(x) \;]_0^{\pi/2} - [\; x \cdot \sin(x) + \cos(x) \;]_{\pi/2}^{\pi} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \; - \left(-1 - \frac{\pi}{2}\right) = \pi \text{ u.l.}$$

---

4. **a)**$_{(1p)}$ Halla el valor exacto de la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} \; dx$.

b)$_{(1p)}$ Aproxima la integral anterior mediante la regla de Simpson con $n = 4$. Sabiendo que $M_4 = 7$, acota el error cometido.

c)$_{(1p)}$ Encuentra el valor de n necesario para aproximar la integral del apartado a) mediante la regla de Simpson con un error menor que 10^{-9}.

---

a) Se trata de una integral inmediata ya que la derivada del exponente de la exponencial es $\dfrac{1}{x^2}$. Por tanto,

$$\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx \ = \int_1^2 e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \ \left[\ e^{-1/x} \right]_1^2 = \ e^{-1/2} - e^{-1} = \frac{\sqrt{e}-1}{e} = 0.2386512\ldots$$

También puede resolverse mediante el cambio de variable $t = -\dfrac{1}{x}$:

$$\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx \ = \left(\begin{array}{c} t = -\dfrac{1}{x} \\ \\ dt = \dfrac{1}{x^2} dx \\ \\ x \in [1,\ 2] \Leftrightarrow t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \end{array} \right) = \int_{-1}^{-1/2} e^t \ dt = [\ e^t\ ]_{-1}^{-1/2} = \ e^{-1/2} - e^{-1} = \frac{\sqrt{e}-1}{e}$$

b) Puesto que $n = 4$, para hallar la aproximación tomamos $h = \dfrac{1}{4}$ y la partición

$$P = \left\{ \ 1 \ , 1 + \frac{1}{4} \ , 1 + \frac{1}{2} \ , 1 + \ \frac{3}{4} \ , \ 2 \ \right\} = \left\{ \ 1 \ , \frac{5}{4} \ , \frac{3}{2} \ , \ \frac{7}{4} \ , \ 2 \ \right\}$$

La aproximación mediante la regla de Simpson vendrá dada por

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx \ \simeq \ S_4(f) \ \ &= \ \frac{\frac{1}{4}}{3} \left(e^{-1} + 4 \cdot \frac{4^2 \cdot e^{-4/5}}{5^2} + 2 \cdot \frac{2^2 \cdot e^{-2/3}}{3^2} + \ 4 \cdot \frac{4^2 \cdot e^{-4/7}}{7^2} + \frac{e^{-1/2}}{2^2} \right) = \\ &= \ 0.2386463369\ldots \end{aligned}$$

La cota de error de Simpson quedará

$$\left| \int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} \ dx \ - \ S_4(f) \right| \leq \frac{7 \cdot (1-0)^5}{180 \cdot 4^4} = 0.000151\ldots < 5 \cdot 10^{-4}$$

que garantiza, al menos, tres decimales exactos.

c) Teniendo en cuenta, de nuevo, la cota de error de Simpson

$$\left| \int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} \ dx \ - \ S_n(f) \right| \leq \frac{7 \cdot (1-0)^5}{180 \cdot n^4}$$

bastará hallar n (par) que verifique la desigualdad

$$\frac{7}{180 \cdot n^4} < 10^{-9}$$

de la que se deduce $n \geq 80$.

SEGUNDO PARCIAL

---

1. Calcula los siguientes límites:

$$\textbf{a)}_{(1p)} \lim_n \frac{e + 2e^{1/2} + 3e^{1/3} + ... + n\ e^{1/n}}{n^2} \qquad , \qquad \textbf{b)}_{(1p)} \lim_n \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n$$

---

a) Aplicando el criterio de Stolz-cociente

$$\lim_n \frac{e + 2e^{1/2} + 3e^{1/3} + ... + n\ e^{1/n}}{n^2} = (\text{Stolz}) =$$

$$= \lim_n \frac{\left(e + 2e^{1/2} + 3e^{1/3} + ... + n\ e^{1/n} + (n+1)\, e^{1/(n+1)}\right) - \left(e + 2e^{1/2} + 3e^{1/3} + ... + n\ e^{1/n}\right)}{(n+1)^2 - n^2} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)\, e^{1/(n+1)}}{(2n+1)} = \lim_n \left[\frac{(n+1)}{(2n+1)} e^{1/(n+1)}\right] = \frac{1}{2}$$

b) Observa, multiplicando y dividiendo por el conjugado, que

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) &= \lim_n \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)} = \lim_n \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \\
&= \lim_n \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + \frac{n}{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_n \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

---

2. a)$_{(1.5p)}$ Resuelve la recurrencia homogénea:

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4 \end{cases}$$

b)$_{(1.5p)}$ Halla A, B y C para que $a_n^p = A \cdot 4^n + Bn + C$ sea solución particular de la recurrencia:

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 25 \cdot 4^n + 8n$$

---

a) La ecuación característica asociada a la recurrencia es

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

que tiene una raíz real doble $r = -1$. Por tanto, la solución general de la recurrencia homogénea puede escribirse en la forma

$$a_n^H = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot n \cdot (-1)^n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{lcccc}
\text{para } n = 1 \ ; & a_1 & = & -C_1 - C_2 & = & 2 \\
\text{para } n = 2 \ ; & a_2 & = & C_1 + 2C_2 & = & 4
\end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = -8$ y $C_2 = 6$. De aquí:

$$a_n = -8 \cdot (-1)^n + 6n \cdot (-1)^n$$

b) Si $a_n^p = A\cdot 4^n + Bn + C$ es solución particular de la recurrencia, al sustituir en la recurrencia

$$\begin{aligned} a_n^p &= A\cdot 4^n + Bn + C \\ a_{n+1}^p &= A\cdot 4^{n+1} + B(n+1) + C \\ a_{n+2}^p &= A\cdot 4^{n+2} + B(n+2) + C \end{aligned}$$

se tendrá

$$\begin{aligned} A\cdot 4^{n+2} + B(n+2) + C + 2\left[A\cdot 4^{n+1} + B(n+1) + C\ \right] + A\cdot 4^n + Bn + C &= 25\cdot 4^n + 8n \quad \Leftrightarrow \\ 16A\cdot 4^n + Bn + 2B + C + 8A\cdot 4^n + 2Bn + 2B + 2C + A\cdot 4^n + Bn + C &= 25\cdot 4^n + 8n \quad \Leftrightarrow \\ 25A\cdot 4^n + 4Bn + 4B + 4C &= 25\cdot 4^n + 8n \end{aligned}$$

e igualando coeficientes,

$$25A = 1\ ,\ 4B = 8\ ,\ 4B + 4C = 0$$

De donde,

$$A = 1\ ,\quad B = 2\ \text{ y }\ C = -2.$$

---

3. a)$_{(1p)}$ Calcula la suma exacta de la serie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1+(-2)^{n-1}}{4^{2n+1}}$.

b)$_{(0.5p)}$ Demuestra que la sucesión de término general $a_n = \dfrac{n}{3^n}$ es decreciente.

c)$_{(1p)}$ Aplica el criterio de Leibniz para aproximar la suma de la serie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3^n}$ con error menor que 10^{-3}.

---

a) La serie puede expresarse como suma de dos geométricas de razones $\dfrac{1}{16}$ y $-\dfrac{1}{8}$, respectivamente, y por tanto, convergentes. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \frac{1+(-2)^{n-1}}{4^{2n+1}} &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^{2n+1}} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^{n-1}}{4^{2n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{16^n} - \frac{1}{8}\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{8}\right)^n = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{11}{360} \end{aligned}$$

a) La sucesión de término general $a_n = \dfrac{n}{3^n}$ es decreciente ya que

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{3^n} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{3n-(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{2n-1}{3^{n+1}} > 0,\ \forall n \ \Rightarrow\ a_n > a_{n+1}\ ,\ \forall n$$

c) Se trata de una serie alternada del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ que verifica las hipótesis del criterio de Leibniz:

$$a_n = \frac{n}{3^n} > 0$$

$$\lim_n \frac{n}{3^n} \underset{\text{S-C}}{=} \lim_n \frac{(n+1)-n}{3^{n+1}-3^n} = \lim_n \frac{1}{3^n(3-1)} = 0$$

y (a_n) es una sucesión decreciente, como hemos probado en b). Aplicando la cota de error correspondiente,

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{N+1}{3^{N+1}} < 10^{-3} \ \Leftrightarrow\ \frac{3^{N+1}}{N+1} > 1000 \ \Leftrightarrow\ N \geq 8$$

por lo que la aproximación pedida será

$$s_8 = \sum_{n=1}^{8} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3^n} = \frac{1}{3^1} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} - \frac{6}{3^6} + \frac{7}{3^7} - \frac{8}{3^8} = 0.18716659\ldots$$

4. a)$_{(1p)}$ Dada la función definida como serie de potencias $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$, calcula el valor exacto de $\int_0^1 f(x)dx$.

b)$_{(1.5p)}$ Deriva la función $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ para obtener la serie de potencias correspondiente a $f'(x)$ y úsala para hallar $f'(\frac{1}{2})$. ¿Cuál es el valor de $f^{(15)}(0)$?

---

a) Integrando término a término la serie de potencias y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]_0^1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

por lo que la integral pedida coincide con la suma exacta de una serie numérica, que podemos expresar como telescópica previa descomposición en fracciones simples. En efecto,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \quad \Rightarrow \quad (A+B)n + A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1,\ B = -1$$

De donde

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

b) Derivando término a término la serie de potencias

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)\cdot x^{2n-2}}{(2n-1)} = \sum_{n\geq 1} x^{2n-2} = \sum_{n\geq 1} \left(x^2\right)^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \left(x^2\right)^n$$

Se trata de una serie geométrica, de razón $r = x^2$ y primer sumando 1. Por tanto,

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} \left(x^2\right)^n = \frac{1}{(1-x^2)}$$

para los valores de x tales que

$$\left|x^2\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x|^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| < 1 \Leftrightarrow\; x \in\,]-1, 1[$$

En particular,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{4})} = \frac{4}{3}$$

Teniendo en cuenta que

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots$$

podemos observar que el coeficiente de x^{15} en la serie de potencias es $\frac{1}{15}$. Como el desarrollo en serie de potencias es único y las sumas parciales son los polinomios de McLaurin, el coeficiente de x^{15} en el desarrollo tiene que coincidir con $\frac{f^{(15)}(0)}{15!}$ y, por tanto,

$$\frac{f^{(15)}(0)}{15!} = \frac{1}{15} \quad \Rightarrow \quad f^{(15)}(0) = \frac{15!}{15} \quad \Rightarrow \quad f^{(15)}(0) = 14!$$