UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Funciones discriminantes

Jorge Civera
Alfons Juan
Albert Sanchis

DSIC
Departamento de Sistemas
Informáticos y Computación

Objetivos formativos

- Aplicar funciones discriminantes
- Calcular la frontera de decisión entre dos clases
- Identificar el tipo de frontera de decisión
- Calcular las regiones de decisión de un clasificador
- Obtener e identificar clasificadores equivalentes

Índice

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

1. Introducción

Un ***clasificador*** es una función definida como: $x \in \mathbb{R}^D$

$\max_c \boxed{g_c(x)} = 11.7$

$$c(x) = \arg\max_{c} \boxed{g_c(x)}$$

$x \to \boxed{g_{spam}(x)} = 11.7$

$x \to \boxed{g_{nospam}(x)} = -3.5$

$c(x) = spam$

donde para cada clase c se define su función discriminante g_c.

El grado de pertenencia del objeto $\boldsymbol{x}$ a la clase c es $g_c(\boldsymbol{x})$.

$c(\boldsymbol{x})$ es la clase a la que el objeto $\boldsymbol{x}$ pertenece en mayor grado.

Introducción

Ejemplo: Un clasificador en 3 clases para $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^t \in [0, 1]^2$:

4

x_1	x_2	$g_1(\boldsymbol{x})$	$g_2(\boldsymbol{x})$	$g_3(\boldsymbol{x})$	$c(\boldsymbol{x})$
0	0	1.0	0.0	0.0	1
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
1	0	0.25	0.5	0.25	2
1	1	0.01	0.01	0.98	3

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

distr. prob. a posteriori

El clasificador de Bayes se obtiene como $\boxed{g_c(x) = p(c \mid x)}$:

$$\boxed{c(x) = \arg\max_{c} \; p(c \mid x)}$$

2. Clasificadores lineales

Un ***clasificador lineal*** se define en términos de f.d. lineales:

$x \in \mathbb{R}^D$

$$g_c(\boldsymbol{x}) = \boxed{\sum_{d=1}^{D} w_{cd} \boxed{x_d}} + w_{c0} = \boxed{\boldsymbol{w}_c^t \boldsymbol{x}} + w_{c0}$$

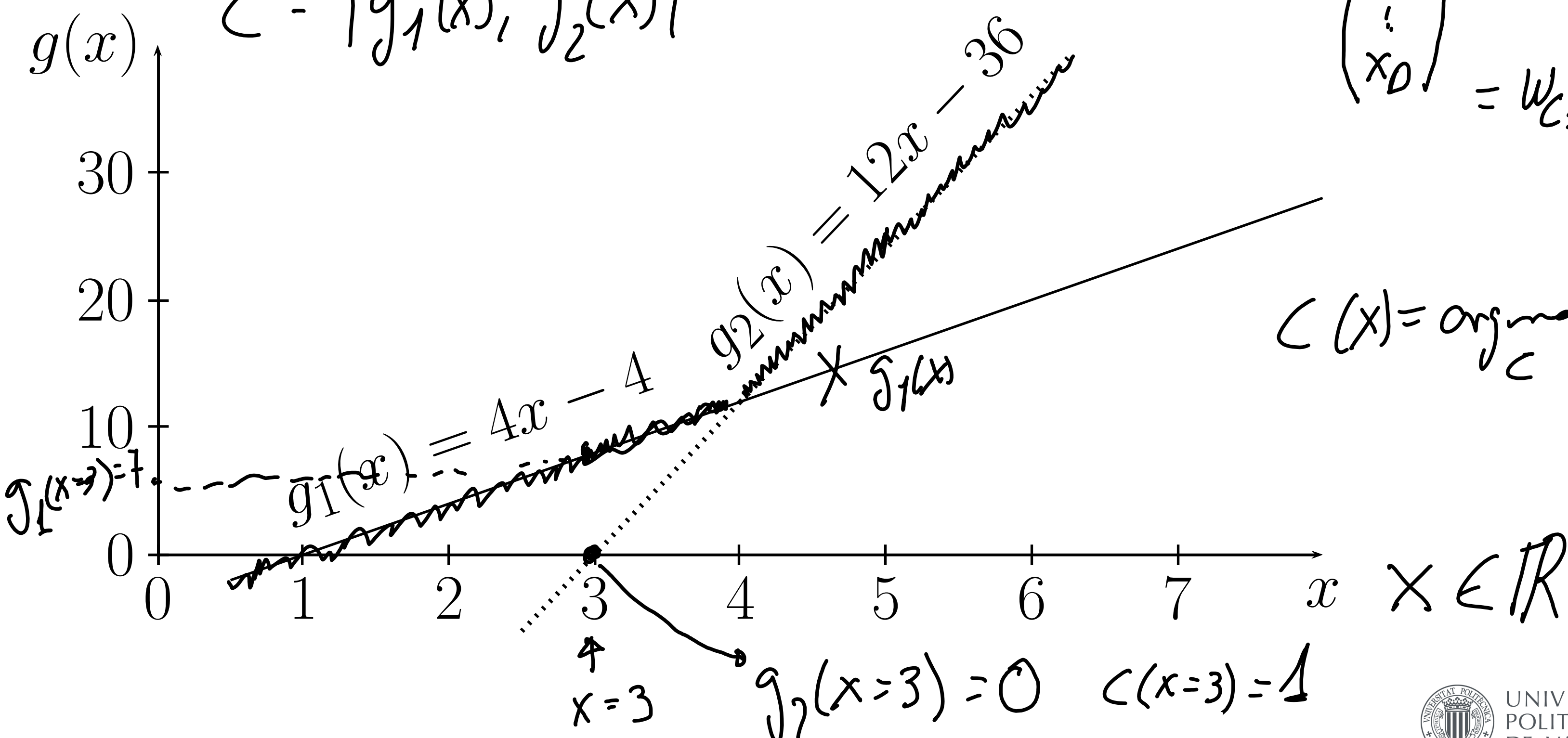
donde $\boldsymbol{w}_c$ es el vector de pesos de la clase c y w_{c0}, el peso umbral.

Ejemplo: Un clasificador lineal en 2 clases

$(w_{c1} \dots w_{cD})^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \end{pmatrix} = w_c^t \cdot x =$

$= w_{c1} \cdot x_1 + \dots + w_{cD} \cdot x_D$

$C = \{g_1(x), g_2(x)\}$



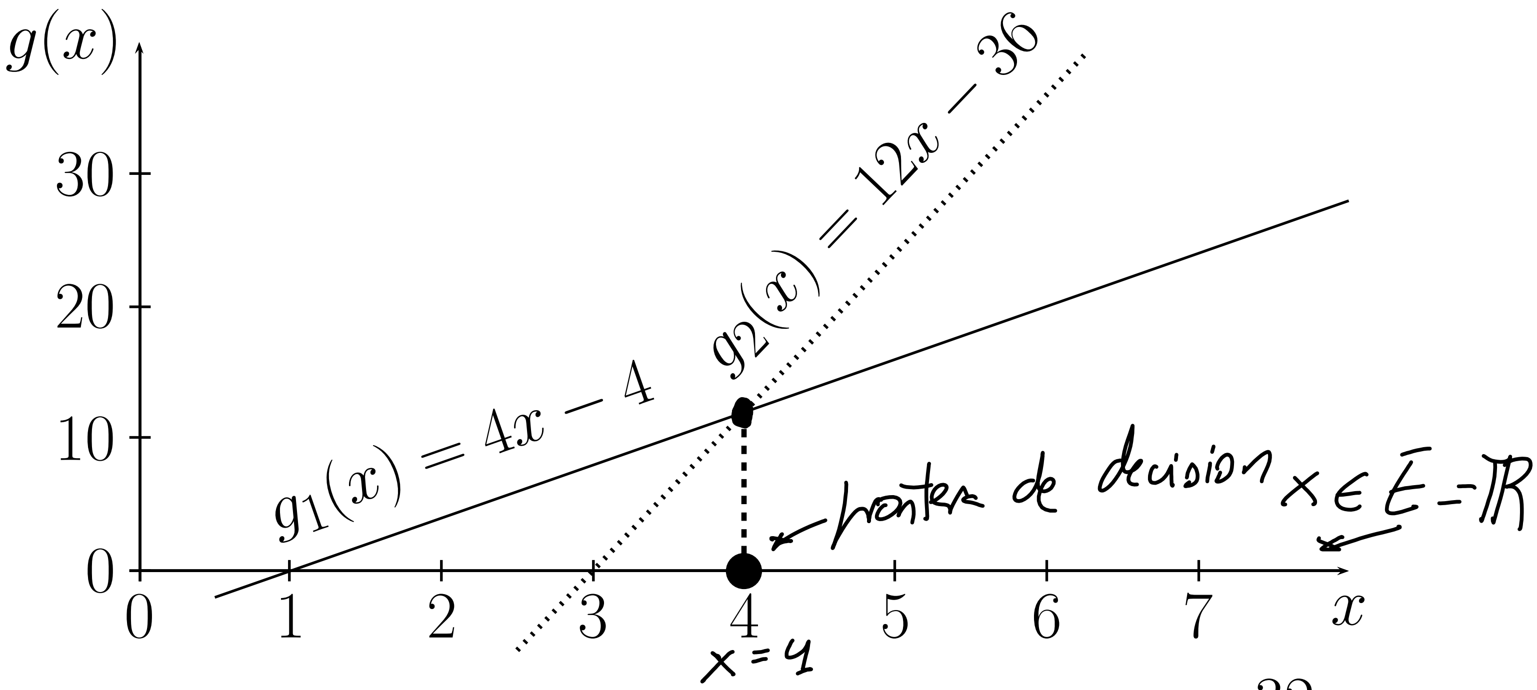
$c(x) = \arg\max_c g_c(x)$

$g_2(x=3) = 0 \quad c(x=3) = 1$

3. Fronteras de decisión

La ***frontera de decisión*** entre dos clases i, j es el lugar geométrico de los puntos $\mathbf{x} \in E$ donde se cumple:

$$\boxed{g_i(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x})} \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq C$$

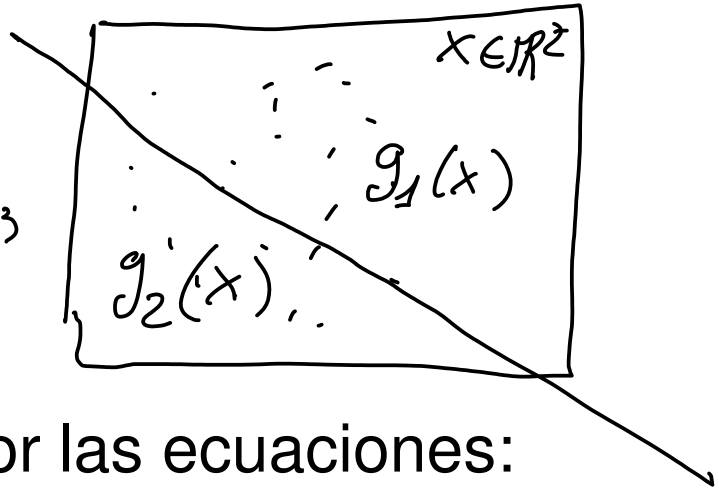


$$\boxed{g_1(x) = g_2(x)} \to \underline{4x - 4} = \underline{12x - 36} \to x = \frac{32}{8} = 4$$

Fronteras de decisión

La ***frontera de decisión*** entre dos clases i, j con $\mathbf{x} \in E$ es:

- Un punto, si $E \equiv \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$
- Una línea (ej. *rectas*), si $E \equiv \mathbb{R}^2$ $x \in \mathbb{R}^2$
- Una superficie (ej. *planos*), si $E \equiv \mathbb{R}^3$ $x \in \mathbb{R}^3$



En general son *hipersuperficies* definidas por las ecuaciones:

$x \in \mathbb{R}^D$

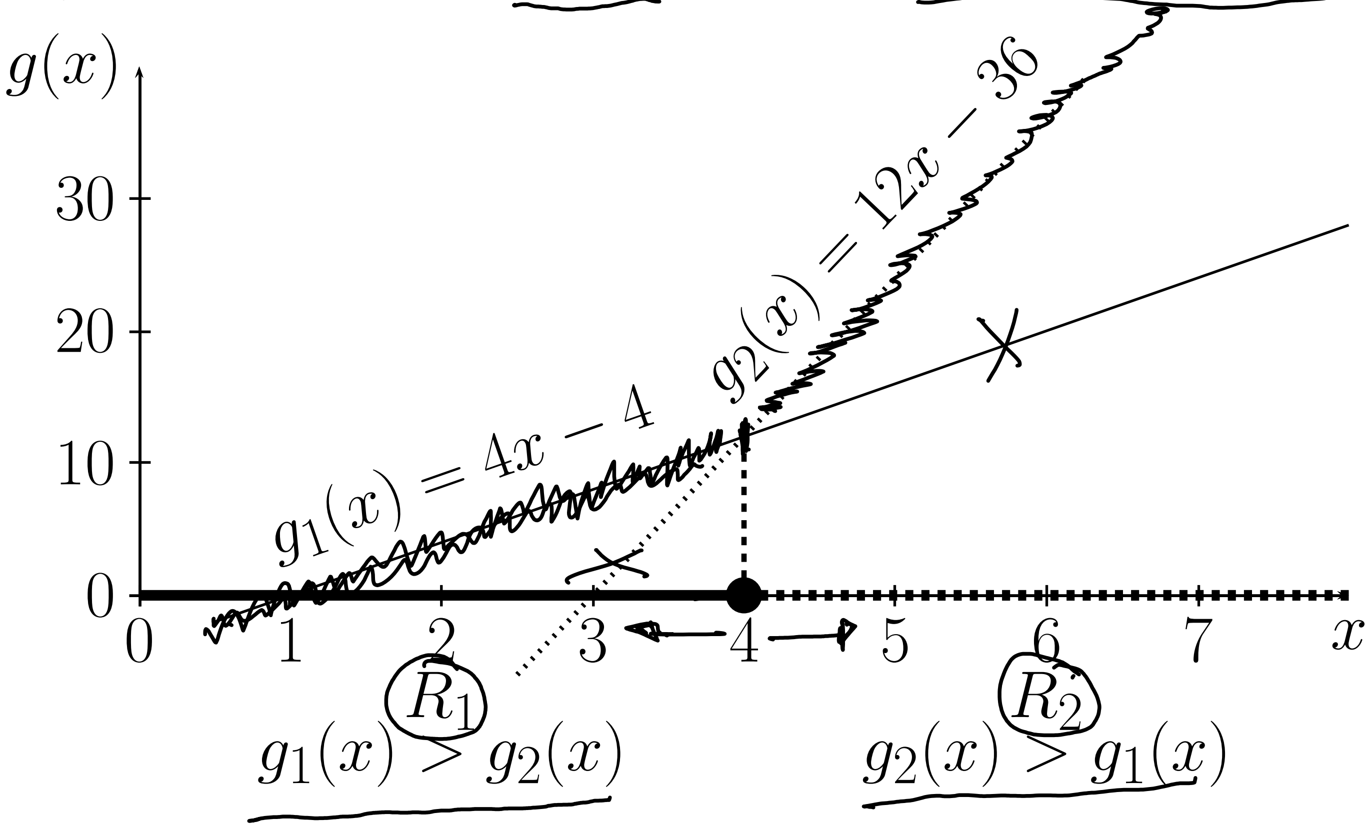
$$\boxed{g_i(\mathbf{x}) - g_j(\mathbf{x}) = 0} \quad i \neq j, \;\; 1 \leq i, j \leq C$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

4. Regiones de decisión

Un clasificador en C clases divide el espacio de representación de x en C ***regiones de decisión***, $R_1, \ldots, R_C$:

$$R_j = \{\mathbf{x} \in E : \quad g_j(\mathbf{x}) > g_i(\mathbf{x}) \quad i \neq j,\ 1 \leq i \leq C\}$$



$G = g_1(x), g_2(x)$

$x=4$

$R_1 \quad R_2$

5. Clasificadores equivalentes

$G' = -1 \cdot G$

$x=4$

$R_2 \quad R_1$

Dos ***clasificadores*** $\boxed{(g_1, \ldots, g_C)}$ y $\boxed{(g'_1, \ldots, g'_C)}$ son ***equivalentes*** si definen las mismas fronteras y regiones de decisión, es decir:

$$g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}) \Leftrightarrow g'_i(\mathbf{x}) > g'_j(\mathbf{x}) \qquad \forall j \neq i, \quad \forall \mathbf{x} \in E$$

¿Cómo obtener clasificadores equivalentes? $C = \{\ldots\ g_i(x) \ldots\}$

$$\boxed{g'_i(\mathbf{x})} = a \cdot g_i(\mathbf{x}) + b \qquad \text{con } a > 0 \qquad 1 \leq i \leq C$$

$$g'_i(\mathbf{x}) = ln\, g_i(\mathbf{x}) \qquad \text{con } g_i(\mathbf{x}) > 0 \qquad 1 \leq i \leq C$$

Lo logaritmo neperiano, $\log_b$

Dado (g_1, g_2) de la traspa anterior, un clasificador equivalente sería:

$G = \{g_1(x) = 4x - 4,\ g_2(x) = 12x - 36\}$

$\boxed{g'_1(x) = x - 1}$ y $\boxed{g'_2(x) = 3x - 9} \rightarrow \boxed{x = \frac{8}{2} = 4}$

$g'_1(x) = \frac{1}{4} \cdot (4x-4) + 0 =$

donde $\boxed{a = \frac{1}{4}}$ y $\boxed{b = 0.}$ $\quad G' = \{\frac{1}{4} \cdot g_1(x) + 0, \frac{1}{4} g_2(x) + 0\}$

$g_2(x) = \frac{1}{4}(12x-36) + 0 =$

6. Conclusiones

Hemos visto:

- La aplicación de funciones discriminantes
- El cálculo de sus fronteras y regiones de decisión asociadas
- La obtención de clasificadores equivalentes