DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Examen Final 25-01-2011 Duración prevista: 3h

PRIMER PARCIAL

---

1. $(0.3p)$ Escribe el número complejo $z = \dfrac{\sqrt{2}}{i}$ en forma binómica y en forma polar. Calcula z^3.

2. $(0.4p)$ Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\log(4 - x^2)}$.

3. $(0.4p)$ Halla el vector normal a la superficie $z^2 \cdot e^{x+2y} = 9$ en el punto $P = (2, -1, 3)$.

4. $(0.4p)$ Calcula la recta tangente a la curva $\gamma(t) = \left[\sqrt{1-t}\ ,\ \ t^2\ ,\ \ \dfrac{t-2}{t+1}\right]$ en el punto correspondiente a $t_0 = 0$.

---

1. Observa que

$$z = \frac{\sqrt{2}}{i} = \frac{-\sqrt{2}i}{-i^2} = -\sqrt{2}i$$

en forma binómica. Se trata de un número imaginario puro, con $|z| = \sqrt{2}$ y $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{2}$, por lo que en forma polar queda

$$z = \sqrt{2}_{\frac{3\pi}{2}}$$

Además, utilizando la fórmula de De Moivre,

$$z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3_{\frac{9\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}i$$

Alternativamente, trabajando con la forma binómica,

$$z^3 = \left(-\sqrt{2}i\right)^3 = \left(-\sqrt{2}\right)^3 \cdot i^3 = \left(-2\sqrt{2}\right) \cdot (-i) = 2\sqrt{2}i$$

2. El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}\ /\ \ \log\left(4 - x^2\right) \neq 0 \quad , \quad 4 - x^2 > 0\right\}$$

Por un lado, tenemos que

$$\log\left(4 - x^2\right) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ 4 - x^2 \neq 1 \ \Leftrightarrow\ x^2 \neq 3 \ \Leftrightarrow x \neq \sqrt{3} \ \text{ ó } \ x \neq -\sqrt{3}$$

y, por otra parte,

$$4 - x^2 > 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 < 4 \ \Leftrightarrow\ |x| < 2 \ \Leftrightarrow\ x \in\ ]-2, 2[$$

En resumen,

$$D(f) = \ ]-2, 2[- \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$$

3. Observa que puedes escribir

$$F(x,y,z) = z^2 \cdot e^{x+2y} - 9$$

de donde,

$$\nabla F(x,y,z) = \left(\ z^2 \cdot e^{x+2y} \ , \ 2z^2 \cdot e^{x+2y} \ , \ 2z \cdot e^{x+2y} \ \right) \quad \Rightarrow \quad \nabla F\,(2,-1,3) = (\ 9 \ , \ 18 \ , \ 6\ ) \equiv (\ 3 \ , \ 6 \ , \ 2\ )$$

El vector normal a la superficie en $P = (2,-1,3)$ es el vector gradiente $\nabla F(2,-1,3) = (\ 3 \ , \ 6 \ , \ 2\ )$.

4. Dado que $P = \gamma\,(0) = [\ 1 \ , \ 0 \ , \ \ -2\ ]$ y

$$\gamma'\,(t) = \left[-\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \ , \ 2t \ , \ \frac{3}{(t+1)^2} \right] \ \Rightarrow \ \gamma'\,(0) = \left[\ -\frac{1}{2} \ , \ 0 \ , \ 3 \ \right]$$

la ecuación de la recta tangente, $RT \equiv \gamma\,(0) + t \cdot \gamma'\,(0)$, será

$$RT \equiv [\ 1 \ , \ 0 \ , \ \ -2\ ] + t \left[\ -\frac{1}{2} \ , \ 0 \ , \ 3 \ \right] \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

o, de forma equivalente,

$$RT \equiv \left[\ 1 - \frac{t}{2} \ , \ 0 \ , \ \ -2 + 3t \ \right] \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

SEGUNDO PARCIAL

---

1. $_{(0.2p)}$Calcula $\lim_n \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^n$.

2. a)$_{(0.2p)}$ Obtén la solución general de la recurrencia lineal homogénea de segundo orden definida mediante

$$a_{n+2} = 4a_n$$

b)$_{(0.2p)}$ Determina los valores de las constantes para que $a_1 = -1$ y $a_2 = 1$.

c)$_{(0.2p)}$ Encuentra el valor de las constantes A y B para que $a_n = An + B$ sea una solución particular de la recurrencia

$$a_{n+2} - 4a_n = 3n$$

3. a)$_{(0.2p)}$ Estudia el carácter de las series numéricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

b) $_{(0.2p)}$ Calcula el valor exacto de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+3}}{5^{n-1}}$.

c) $_{(0.3p)}$ Usando la cota de error asociada al teorema de Leibniz, obtén el valor de N necesario para que la suma parcial s_N proporcione, al menos, dos decimales correctos para la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$. Efectúa la aproximación.

---

1. El límite pedido es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando, pues, la fórmula de Euler,

$$\lim_n \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^n = e^{\lim_n \left(n\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right)\right)} = e^{\lim_n \left(\frac{-2n}{n^2+1}\right)} = e^0 = 1$$

2. a) La recurrencia puede expresarse también en la forma

$$a_{n+2} - 4a_n = 0$$

por lo que la ecuación característica será $r^2 - 4 = 0$ que tiene por soluciones (reales y distintas), $r = 2$ y $r = -2$.

La recurrencia corresponde pues al caso 1 y su solución general puede escribirse en la forma:

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-2)^n$$

b) Planteando las condiciones iniciales encontraremos las constantes. Así,

$$\begin{array}{llcccc} \text{para } n = 1 & ; & a_1 & = & 2C_1 - 2C_2 & = & -1 \\ \text{para } n = 2 & ; & a_2 & = & 4C_1 + 4C_2 & = & 1 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = -\frac{1}{8}$ y $C_2 = \frac{3}{8}$. De aquí,

$$a_n = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 2^n + \frac{3}{8} \cdot (-2)^n$$

c) Si $a_n = An + B$ es una solución particular de

$$a_{n+2} - 4a_n = 3n$$

sustituyendo $a_n = An + B$ y $a_{n+2} = A(n+2) + B$ en la recurrencia, se verifica

$$A(n+2) + B - 4An - 4B = 3n \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} -3A = 3 \\ 2A - 3B = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad A = -1 \ , \ B = -\frac{2}{3}$$

Por tanto,

$$a_n = -n - \frac{2}{3}$$

3. a) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

diverge, por ser una armónica generalizada, con $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

es una serie alternada, tipo Leibniz, siendo la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ decreciente y con límite 0. Por tanto, por el criterio de Leibniz, converge.

b) Podemos calcular su suma exacta por tratarse de una serie geométrica de razón $r = \dfrac{2}{5}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+3}}{5^{n-1}} = 40 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 40 \cdot \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{1 - \frac{2}{5}} = 40 \cdot \frac{\frac{4}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{32}{3}$$

c) La serie cumple las condiciones del teorema de Leibniz. Aplicando la cota de error correspondiente,

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1) \cdot 3^{N+1}} < 10^{-3} \Leftrightarrow (N+1) \cdot 3^{N+1} > 1000 \Leftrightarrow N \geq 4,$$

por lo que s_4 es la primera suma parcial que nos proporcionaría dos decimales exactos. La suma parcial será

$$s_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} = 0.287037037...$$

TERCER PARCIAL

---

1. $_{(0.5p)}$Calcula el valor exacto de la integral $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log(x)+1}{x\cdot\log(x)}dx$. Utiliza, si lo crees necesario, un cambio de variable adecuado.

2. a)$_{(0.5p)}$ Aproxima el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+4}dx$ mediante la regla de Simpson con $n=4$.

b)$_{(0.2p)}$ Acota el error cometido en la aproximación anterior sabiendo que $M_4 = 22$. ¿Cuántos decimales correctos asegura la aproximación?

c)$_{(0.3p)}$ Teniendo en cuenta que $M_2 = 3$, determina el número de subdivisiones a realizar en el intervalo $[0,1]$ para aproximar la integral mediante la fórmula de Trapecios con la misma precisión.

---

1. La integral es inmediata ya que el numerador es la derivada del denominador. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{\log(x)+1}{x\cdot\log(x)}dx &= \log(x\cdot\log(x))]_e^{e^2} = \log\left(e^2\cdot\log(e^2)\right) - \log(e\cdot\log(e)) = \log\left(2e^2\right) - \log(e) = \\ &= \log(2) + \log\left(e^2\right) - 1 = \log(2) + 1\end{aligned}$$

También se puede descomponer como suma de dos inmediatas

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{\log(x)+1}{x\cdot\log(x)}dx &= \int_e^{e^2} \frac{\log(x)}{x\cdot\log(x)}dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x\cdot\log(x)}dx = \\ &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx + \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\log(x)}dx = \log(x)]_e^{e^2} + \log(\log(x))]_e^{e^2} = \\ &= \log\left(e^2\right) - \log(e) + \log\left(\log(e^2)\right) - \log(\log(e)) = \\ &= 2 - 1 + \log(2) - \log(1) = 1 + \log(2)\end{aligned}$$

Alternativamente, utilizando el cambio de variable,

$$t = \log(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$$

la integral queda

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{\log(x)+1}{x\cdot\log(x)}dx &= \int_1^2 \frac{t+1}{t}dt = \int_1^2 dt + \int_1^2 \frac{1}{t}dt = t]_1^2 + \log(t)]_1^2 = \\ &= (2-1) + (\log(2) - \log(1)) = 1 + \log(2)\end{aligned}$$

2. a) Para la aproximación pedida consideramos $h = \frac{1}{4}$ y la partición $P = \left\{ 0 \ , \ \frac{1}{4} \ , \ \frac{2}{4} \ , \ \frac{3}{4} \ , \ 1 \right\}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+4}dx \simeq S_4 = \frac{\frac{1}{4}}{3}\cdot\left(\frac{\sin(0)}{4} + 4\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{4}+4} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{3}{4}+4}\right) + 2\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{2}+4}\right) + \frac{\sin(\pi)}{1+4}\right) = \\ &= \frac{1}{12}\left(0 + 4\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{17}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{19}{4}}\right) + 2\cdot\frac{1}{\frac{9}{2}} + 0\right) = \frac{1}{12}\left(8\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{17} + \frac{\sqrt{2}}{19}\right) + \frac{4}{9}\right) = \\ &= 0.1421179209...\end{aligned}$$

b) La cota de error correspondiente a la aproximación por Simpson vendrá dada por

$$E_4 = |I - S_4| \leq \frac{(1-0)^5}{180 \cdot 4^4} \cdot 22 = \frac{11}{23040} = 0.0004774... < 10^{-3}$$

que garantiza, al menos, dos decimales exactos.

c) La cota de error correspondiente a la aproximación por Trapecios vendrá dada por

$$E_n = |I - T_n| \leq \frac{(1-0)^3}{12 \cdot n^2} \cdot 3 = \frac{1}{4 \cdot n^2}$$

Para conseguir dos decimales, bastaría hallar n tal que

$$\frac{1}{4 \cdot n^2} < 10^{-3} \Leftrightarrow n^2 > 250$$

lo que se consigue si $n \geq 16$.