PROBLEMAS RESUELTOS

TEMA 3.1. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1 Una empresa dedicada a la comercialización de equipos informáticos vende tres productos A, B y C con un P.V.P. de 100, 150 y 200 Euros, respectivamente. Dichos productos tienen unos costes de 90, 140 y 195 Euros, respectivamente. Existen restricciones de mínima y máxima venta así como de espacio de almacén y capacidad de transporte tal y como se muestra en el siguiente modelo lineal donde se busca maximizar el beneficio semanal (P.V.P.-Coste):

```
MAX= (100-90)*A + (150-140)*B + (200-195)*C;
[ALMACEN]  4*A + 6*B + 10*C <= 10000;
[TRANSPORTE] A + B + C <= 1400;
[Ventas_min_A] A >=425;           [ Ventas_max_A] A <=500;
[Ventas_min_B] B >=150;           [Ventas_max_B] B <=200;
[Ventas_min_C] C >=450;           [Ventas_max_C] C <= 800;
```

Tras resolver el modelo, los informes proporcionados por LINGO son los siguientes:

```
 Global optimal solution found.
 Objective value:                              10400.00

                         Variable           Value        Reduced Cost
                                A        500.0000            0.000000
                                B        200.0000            0.000000
                                C        680.0000            0.000000

                              Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                1        10400.00            1.000000
                          ALMACEN        0.000000           0.5000000
                       TRANSPORTE        20.00000            0.000000
                     VENTAS_MIN_A        75.00000            0.000000
                     VENTAS_MAX_A        0.000000            8.000000
                     VENTAS_MIN_B        50.00000            0.000000
                     VENTAS_MAX_B        0.000000            7.000000
                     VENTAS_MIN_C        230.0000            0.000000
                     VENTAS_MAX_C        120.0000            0.000000
```

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                              Objective Coefficient Ranges:

                                Current        Allowable        Allowable
                  Variable    Coefficient       Increase         Decrease
                         A       10.00000       INFINITY         8.000000
                         B       10.00000       INFINITY         7.000000
                         C       5.000000       11.66667         5.000000

                                 Righthand Side Ranges:

                                Current        Allowable        Allowable
                       Row          RHS         Increase         Decrease
                   ALMACEN     10000.00         200.0000         2300.000
                TRANSPORTE     1400.000         INFINITY         20.00000
               VENTAS_MIN_A    425.0000         75.00000         INFINITY
               VENTAS_MAX_A    500.0000         33.33333         75.00000
               VENTAS_MIN_B    150.0000         50.00000         INFINITY
               VENTAS_MAX_B    200.0000         50.00000         50.00000
               VENTAS_MIN_C    450.0000         230.0000         INFINITY
               VENTAS_MAX_C    800.0000         INFINITY         120.0000
```

Basándote en dichos informes, responde detalladamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el beneficio semanal máximo para la empresa? ¿Cuál es el plan óptimo de ventas? ¿Cuáles son los cuellos de botella del sistema? Ordénalos según su importancia. Justifica las respuestas.

b) Existe una propuesta de ampliación del almacén de modo que pasaría a tener un espacio disponible de 12.000 m^2. Sabiendo que el coste de dicha ampliación sería de 90 Euros semanal ¿recomendarías esta ampliación?

c) Tienes que emitir un informe sobre la rentabilidad de los tres productos de acuerdo a sus ventas mínimas y máximas semanales, indica qué cotas modificarías y cómo (aumentar o disminuir) para mejorar el beneficio semanal. Justifica la respuesta.

d) El director de ventas está analizando la posibilidad de comprar las unidades del producto C a otro proveedor lo cual disminuiría el coste de cada unidad en 5 Euros, ¿cómo afectaría a la solución óptima actual? Calcular el nuevo valor de la función objetivo y de las variables.

e) El mismo director de ventas está interesado en conocer ahora el intervalo dentro del cual puede variar el **coste** del producto A sin que el plan óptimo de ventas cambie. Calcula dicho intervalo.

3.2 A continuación se presenta el modelo de programación lineal planteado para planificar la producción en una empresa de embotellado de vinos que comercializa cuatro tipos de vino diferentes. El objetivo consiste en maximizar los beneficios y existen dos tipos de restricciones, las de capacidad de las embotelladoras y las de demanda de los productos. Las variables indican la cantidad a producir de cada tipo de vino, medidas en hectolitros.

```
MAX=255*X1+270*X2+235*X3+300*X4;

[MAQ1] 25*X1+30*X2+25*X3+30*X4<=4600;
[MAQ2] 10*X1+8*X2+8*X3+8*X4<=1500;
[MAQ3] 18*X1+20*X2+17*X3+19*X4<=3800;

[DEM__MAX_VINO1] X1<=60;
[DEM_MIN_VINO2] X2>=20;          [DEM_MAX_VINO2] X2<=30;
[DEM_MIN_VINO3] X3>= 56;         [DEM_MAX_VINO3] X3<=65;
[DEM_MAX_VINO4] X4<=35;
```

Tras resolver el modelo con LINGO se obtiene el siguiente informe:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          44798.00
                              Variable        Value        Reduced Cost
                                    X1     59.60000            0.000000
                                    X2     22.00000            0.000000
                                    X3     56.00000            0.000000
                                    X4     35.00000            0.000000

                                   Row   Slack or Surplus      Dual Price
                                     1     44798.00            1.000000
                                  MAQ1     0.000000            6.600000
                                  MAQ2     0.000000            9.000000
                                  MAQ3     670.2000            0.000000
                        DEM__MAX_VINO1    0.4000000            0.000000
                         DEM_MIN_VINO2     2.000000            0.000000
                         DEM_MAX_VINO2     8.000000            0.000000
                         DEM_MIN_VINO3     0.000000           -2.000000
                         DEM_MAX_VINO3     9.000000            0.000000
                         DEM_MAX_VINO4     0.000000            30.00000
```

```
Ranges in which the basis is unchanged:

                                  Objective Coefficient Ranges:

                              Current        Allowable        Allowable
              Variable      Coefficient      Increase         Decrease
                    X1       255.0000        82.50000         5.000000
                    X2       270.0000        30.00000         4.000000
                    X3       235.0000        2.000000         INFINITY
                    X4       300.0000        INFINITY         30.00000
```

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
MAQ1	4600.000	80.00000	5.000000
MAQ2	1500.000	1.333333	32.00000
MAQ3	3800.000	INFINITY	670.2000
DEM__MAX_VINO1	60.00000	INFINITY	0.4000000
DEM_MIN_VINO2	20.00000	2.000000	INFINITY
DEM_MAX_VINO2	30.00000	INFINITY	8.000000
DEM_MIN_VINO3	56.00000	4.000000	1.000000
DEM_MAX_VINO3	65.00000	INFINITY	9.000000
DEM_MAX_VINO4	35.00000	2.000000	8.000000

Responde a las siguientes cuestiones justificando en cada caso detalladamente la respuesta:

a) ¿Existen soluciones óptimas alternativas?

b) ¿Cómo varía el beneficio al incrementar la demanda mínima del producto 3? ¿Y al incrementar su demanda máxima?

c) ¿Cuál sería la nueva S.O y el beneficio si se decrementase la capacidad de la máquina 1 en 4 unidades? y si se incrementa la capacidad de la máquina 3 en 10 unidades?

d) ¿Cuál sería la S.O. y el beneficio total obtenido si el beneficio del producto 4 se duplicase?

3.3 En una empresa azulejera se ha desarrollado un modelo de programación lineal para obtener una **planificación de la producción semanal** en la fábrica. Se consideran 4 tipos distintos de azulejos y una serie de restricciones que se comentan a continuación. La empresa dispone de 4 hornos que trabajan las 24 horas del día, 6 días por semana. De igual manera en la empresa existen dos turnos rotatorios de 7 horas durante 6 días a la semana con 5 trabajadores por turno. Los costes de producción semanal no pueden sobrepasar un presupuesto de 325.000 €. De igual manera, la nueva normativa Europea de emisiones limita a 3 Kg. por semana la cantidad de metales pesados que se permite emitir a la atmósfera. Todos estos datos se recogen en la siguiente tabla:

Recurso	Productos				Disponibilidad
	Azulejo 1	Azulejo 2	Azulejo 3	Azulejo 4	
Horno	0,85 min/m^2	0,95 min/m^2	1,1 min/m^2	1,3 min/m^2	4 hornos 24 horas/día 6 días/semana
Personal	0,24 min/m^2	0,26 min/m^2	0,28 min/m^2	0,3 min/m^2	2 turnos 7 horas/turno 6 días/semana 5 trabajadores/turno
Presupuesto	8 €/m^2	9,25 €/m^2	10 €/m^2	14 €/m^2	325.000 €/semana
Emisiones	0,09 grs./m^2	0,06 grs./m^2	0,1 grs./m^2	0,08 grs./m^2	3 Kg./semana

El precio de venta al público para los 4 tipos de azulejos es de 12, 13, 15 y 18 €/m^2 respectivamente. Por motivos técnicos es necesario producir por semana al menos 12000, 8.000, 12.000 m^2 de los azulejos 1, 2 y 3 respectivamente y como máximo 15.000 m^2 de azulejo 1 y 10.000 m^2 de azulejo 2.

El modelo de LINGO que permite maximizar el beneficio semanal obtenido y los resultados del mismo son los siguientes:

```
!Variables: Xi: m² de azulejo que se producen a la semana, donde
i=(1,…,4);
[FO] MAX= 4*X1 + 3.75*X2 + 5*X3 + 4*X4;
! Restricciones;
[HORNO]       0.85*X1 + 0.95*X2 +  1.1* X3 +  1.3* X4 <=  34560;
[PERSONAL]    0.24*X1 + 0.26*X2 +  0.28*X3 +  0.3* X4 <=  25200;
[PRESUPUESTO] 8*   X1 + 9.25*X2 + 10*   X3 + 14*   X4 <= 325000;
[EMISIONES]   0.09*X1 + 0.06*X2 +  0.1* X3 +  0.08*X4 <=   3000;
[DEM_MIN_1] X1 >= 12000;
[DEM_MAX_1] X1 <= 15000;
[DEM_MIN_2] X2 >= 8000;
[DEM_MAX_2] X2 <= 10000;
[DEM_MIN_3] X3 >= 12000;
[DEM_MAX_3] X3 <= 600000;


Global optimal solution found.
 Objective value:                              151500.0

                             Variable           Value        Reduced Cost
                                   X1        12000.00            0.000000
                                   X2        10000.00            0.000000
                                   X3        13200.00            0.000000
                                   X4        0.000000            0.000000

                                  Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                   FO        151500.0            1.000000
                                HORNO        340.0000            0.000000
                             PERSONAL        16024.00            0.000000
                          PRESUPUESTO        4500.000            0.000000
                            EMISIONES        0.000000            50.00000
                            DEM_MIN_1        0.000000          -0.5000000
                            DEM_MAX_1        3000.000            0.000000
                            DEM_MIN_2        2000.000            0.000000
                            DEM_MAX_2        0.000000           0.7500000
                            DEM_MIN_3        1200.000            0.000000
                            DEM_MAX_3        586800.0            0.000000
```

Basándote en este informe, responde detalladamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Existe algún plan de producción donde se fabriquen m² de X4 y se obtenga el mismo beneficio? Justifica tu respuesta.
b) Se está considerando la posibilidad de aumentar el máximo número de m² que la fábrica es capaz de producir de azulejo 1 o de azulejo 2. Suponiendo que el coste de la ampliación es el mismo en cada caso, ¿cuál de las dos alternativas resultaría más rentable? Justifica tu respuesta.
c) Ante el excedente de personal que existe actualmente en la empresa, te han encargado realizar un expediente de regulación de empleo. Los turnos siempre

deben tener el mismo número de trabajadores. Con todo esto, ¿de cuántos trabajadores se puede prescindir en cada turno manteniendo la solución óptima actual? Justifica tu respuesta.

d) Una empresa de ingenierías nos ofrece un filtro que es capaz de recuperar un 1% de los metales pesados que se emiten a la atmósfera cada semana. Además, este 1% de metales que se recuperan incluye algunos muy valiosos (titanio, platino) y se podrían vender por un valor de 2.500 € (por semana). La empresa de ingenierías pide 12.000 € por la instalación y mantenimiento de este avanzado filtro cada mes. ¿Crees que interesa instalar este filtro? Justifica tu respuesta.

Soluciones Problemas Tema 3

3.1

a) El beneficio máximo obtenible es de 10.400 €. Se venderían 500, 200 y 680 uds. de A, B y C, respectivamente.
Los cuellos de botella del sistema, ordenados por magnitud de los C.O. de las restricciones correspondientes son:
1 Ventas máximas de A
2 Ventas máximas de B
3 Capacidad de Almacén

b) No tenemos espacio sobrante (holgura) en el almacén, luego en principio interesa ampliarlo. Una ampliación de 2.000 m^2 se saldría del rango, por lo que en primera instancia no se podría contestar. En cualquier caso, cabe comentar que justo en el límite dentro del cual nuestro C.O. de 0,5 es válido (200) se obtiene un beneficio de 200*0,5=100 Euros, que es superior al coste de la ampliación. Además, aunque previsiblemente nos sobraría almacén, tendríamos la empresa preparada para futuras ampliaciones. Por tanto, la ampliación SI es recomendable.

c) Las ventas mínimas y máximas para los tres productos acotan el valor de las variables decisión, por lo tanto:
A está en su cota superior. Por lo tanto, por cada unidad de más que se vendiese de A por encima del máximo, ganaríamos 8 Euros. Un razonamiento similar se aplica a B con una ganancia de 7 Euros por cada unidad vendida por encima del máximo. Por lo tanto, sería rentable vender MÁS unidades de A y de B.
El caso es diferente para C, dado que se encuentra entre sus dos cotas, por tanto, no interesa vender ni más ni menos, exactamente 680 unidades.

d) El coste de comprar cada unidad de C bajaría de 195 a 190 Euros. Esto significa que igualmente el coeficiente actual de C en la F.O. se incrementaría de 5 a 10.
Si nos fijamos en los rangos, éste incremento está dentro del rango dentro del cual la solución óptima permanece constante. Por tanto, los valores de las variables no cambiarían y la solución actual seguiría siendo la óptima.
El beneficio sí cambiaría, dado que se venden 680 unidades de C y el beneficio aumenta en 5 Euros por unidad, el beneficio semanal se incrementaría en 680*5=3400 Euros.

e) Hemos de tener en cuenta que el intervalo proporcionado por Lingo de máximo incremento de ∞ y máximo decremento de 8 es para el beneficio expresado como P.V.P.-coste. Dado que se quiere obtener el intervalo para el coste, es necesario hacer unos pequeños cálculos.

<u>Máximo coste:</u>
Mínimo valor para el beneficio de 10 (100-90) de acuerdo a los intervalos: 2
Máximo valor para el beneficio de 10 (100-90) de acuerdo a los intervalos: ∞

Por tanto:
Máximo coste 100-Xmax=2 => Xmax=98.
Mínimo coste 100-Xmin=∞ => Xmin=-∞ o mejor, 0 dado que los costes no pueden ser negativos.

Por tanto el coste debe de moverse en el intervalo [0;98] para asegurar que el plan de ventas no cambie.

3.2

a) No. No existen soluciones óptimas alternativas ya que no existe ninguna variable con valor 0 en la solución óptima y coste reducido igual a 0 ni tampoco ninguna restricción que se verifique estrictamente en la solución óptima y cuyo coste de oportunidad sea igual a 0.

b) La variable X_3 está acotada y toma en la solución óptima el valor de su cota inferior, por tanto, al incrementar su cota inferior el beneficio empeorará, es decir, se decrementará en 1.99 uds. por cada unidad que se incremente dicha cota.

Al incrementar su cota superior el beneficio no varía puesto que dicha cota representa una restricción con holgura.

c) Si se decrementa en 4 uds. la capacidad de la máquina 1, puesto que esta nueva capacidad se encuentra dentro del intervalo dado por el análisis de sensibilidad para los segundos miembros de las restricciones, se puede calcular el nuevo valor de la función objetivo (NVFO) utilizando el coste de oportunidad, que en este caso es de 6.6 uds.:

$$\text{NVFO} = 44798 - 4 * 6.6 = 44771.6$$

La nueva solución óptima no la podemos conocer con la información mostrada. Sería necesario resolver de nuevo.

Incrementar la capacidad de la máquina 3 no tiene efecto alguno sobre el valor de la función objetivo ni sobre la solución óptima porque se trata de una restricción de holgura en la solución óptima.

d) Si el beneficio del producto 4 se duplicase, es decir, pasase a ser de 600 uds., puesto que esta modificación se encuentra dentro del intervalo dado por el análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo, la solución óptima seguiría siendo la misma. Lo que sí varia es el valor de la función objetivo, que pasará a ser:

$$\text{NVFO} = 44798 + 300 * 35 = 55298$$

3.3

a) Sí. Estamos en una situación de infinitas soluciones óptimas dado que el azulejo 4 toma valor 0 en la S.O. (VNB) y además su C.R. (Cj-Zj) es 0, luego existen soluciones óptimas alternativas (infinitas).

(No existe posibilidad de que la variable X4 sea VB con valor 0 (solución degenerada) con coste reducido 0 ya que la solución tiene 4 VB, i.e. tantas como restricciones.)

b) Para las dos variables se ha definido cota superior. En la solución óptima se cumple estrictamente la cota superior de x2 y en ese caso le corresponde un coste de oportunidad igual a 0.75, es decir, el beneficio aumentaría a razón de 0.75 por cada m2 que se decidiera fabricar. En el caso del azulejo tipo 1, la cota que se verifica en la solución óptima es la cota inferior, por tanto no interesa aumentar su cota superior ya que no se alcanza en la solución óptima actual.

c) La parte derecha de la restricción de personal está expresada en minutos a la semana. Tenemos una holgura de 16.024 minutos y teniendo en cuenta que disponemos de 2 turnos de 7 horas cada uno y 6 días por semana, de los 5 trabajadores en cada uno de los turnos sobrarían 3 trabajadores dado que 3*2*7*6*60=15.120 y aún quedaría algo de holgura.

O también, de acuerdo al valor de la holgura de la restricción sobran 8.012 minutos en cada turno. Teniendo en cuenta que 1 trabajador supone 2.520 minutos de trabajo, sobran 3 trabajadores en cada turno (2.520*3=7560 minutos).

d) Hoy por hoy la empresa puede emitir 3 Kg. (3000 grs.) de metales pesados a la atmósfera. Si somos capaces de recuperar un 1% de estos metales lo que efectivamente está ocurriendo es que podremos emitir 3030 grs. de metales, dado que 30 se recuperan, por lo que estamos aumentando la parte derecha de la restricción de emisiones en 30 unidades, lo cual queda dentro del intervalo proporcionado por LINGO dentro del cual el C.O. y la base permanecen constantes.

Con esto tenemos que los beneficios aumentarán en 30*50= 1.500 € por semana, a lo que le podemos sumar los 2.500 € que obtenemos por la venta de estos metales pesados. En total cada semana aumentamos los beneficios en 4000 €, o lo que es lo mismo, 16.000 € al mes, lo cual supera ampliamente el coste de instalación y mantenimiento del filtro. Por tanto, **SI INTERESA** instalar el filtro.