DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Primer Parcial **12-11-2018** **Duración prevista: 2h**

---

1. a)$_{(1p)}$ Determina el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| > x^2 - 2$.

b)$_{(1p)}$ Encuentra el valor de $a > 0$ para que el dominio de $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 2ax + 1)}$ sea $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

---

a) Observa que si $x \geq 0$ la inecuación queda

$$x > x^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-1, 2[$$

por tratarse de una parábola con las ramas hacia arriba que se anula en $x = -1$ y $x = 2$. La solución, para este caso, será

$$[0, +\infty[\, \cap \,]-1, 2[\, = [0, 2[$$

Por otro lado, si $x < 0$ se tendrá

$$-x > x^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-2, 1[$$

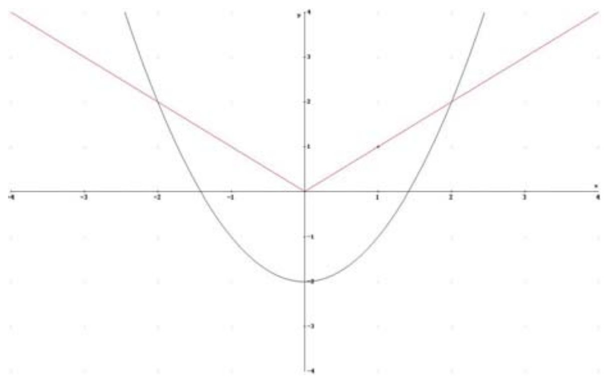
por resultar una parábola con las ramas hacia arriba que se anula en $x = -2$ y $x = 1$, y la solución, en este caso, vendrá dada por

$$]-\infty, 0[\, \cap \,]-2, 1[\, = \,]-2, 0[$$

En resumen, la solución de la desigualdad será la unión de los dos conjuntos y, por tanto,

$$|x| > x^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-2, 2[$$

como se puede apreciar en la gráfica



b) El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\Big/\; x^2 - 2ax + 1 > 0 \,,\; \log\left(x^2 - 2ax + 1\right) \geq 0 \right\}$$

Ahora bien,

$$\log\left(x^2 - 2ax + 1\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2ax + 1 \geq 1$$

y dado que

$$x^2 - 2ax + 1 \geq 1 > 0$$

para calcular el dominio bastará con resolver la inecuación

$$x^2 - 2ax + 1 \geq 1$$

Así pues,

$$x^2 - 2ax + 1 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2ax \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x - 2a) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2a, +\infty\right[$$

por ser $x^2 - 2ax$ una parábola con las ramas hacia arriba y que se anula en $x = 0$ y $x = 2a$. En resumen,

$$D(f) = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2a, +\infty\right[$$

de donde $a = \dfrac{1}{2}$.

---

2. Considera la función $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - 2}$. Se pide:

a)$_{(0.5\text{p})}$ Hallar su dominio.

b)$_{(0.5\text{p})}$ Demostrar si es par, impar o de ninguno de los dos tipos.

c)$_{(1.5\text{p})}$ Determinar máximos y mínimos relativos así como las regiones de crecimiento y decrecimiento.

d)$_{(0.5\text{p})}$ Estudiar las regiones de concavidad y convexidad.

---

a) El dominio de $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\Big/\; x^2 - 2 \geq 0 \right\} = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$$

por ser $x^2 - 2$ una parábola con las ramas hacia arriba, que se anula en $\pm\sqrt{2}$.

b) La función $f(x)$ es par, ya que

$$f(-x) = (-x)^2 - \sqrt{(-x)^2 - 2} = x^2 - \sqrt{x^2 - 2} = f(x)$$

c) Su derivada

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{2x\sqrt{x^2 - 2} - x}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{x\left(2\sqrt{x^2 - 2} - 1\right)}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

definida en $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$, se anula en $x = 0$ (que no está en el dominio) y cuando $2\sqrt{x^2 - 2} - 1 = 0$. Por ello, los posibles máximos o mínimos de $f(x)$ serán las soluciones de esta última ecuación, es decir,

$$2\sqrt{x^2 - 2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 4\left(x^2 - 2\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}$$

Observa además que, como la función es par, es suficiente con deducir su comportamiento en el intervalo $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ (o en el $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$), ya que la simetría respecto del eje OY, justifica el del otro intervalo.

Por otra parte, el signo de la derivada en el intervalo $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ coincide con el de $2\sqrt{x^2 - 2} - 1$. Así,

$$\begin{aligned}
x \;&\in\; \left]\sqrt{2}\,,\,\frac{3}{2}\right[\;\Rightarrow\; \sqrt{x^2 - 2} < \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x^2 - 2} - 1 < 0 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0 \\
x \;&\in\; \left]\frac{3}{2}\,,+\infty\right[\;\Rightarrow\; \sqrt{x^2 - 2} > \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x^2 - 2} - 1 > 0 \;\Rightarrow\; f'(x) > 0
\end{aligned}$$

podemos concluir que $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $\left[\sqrt{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right[$ y estrictamente creciente en $\left]\frac{3}{2}\ ,\ +\infty\right[$. Además, podemos decir que en $x=\frac{3}{2}$ la función alcanza un mínimo relativo de coordenadas $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$. Análogamente, por simetría, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[$, estrictamente creciente en $\left]-\frac{3}{2}\ ,-\sqrt{2}\right]$ y en $x=-\frac{3}{2}$ alcanza un mínimo relativo de coordenadas $\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$. También puedes utilizar el signo de la derivada segunda (siguiente apartado) para justificar que en $x=\pm\frac{3}{2}$ se alcanzan mínimos relativos.

d) A partir del signo de la derivada segunda

$$f''(x)=2-\frac{\sqrt{x^2-2}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}}{(x^2-2)}=2-\frac{(x^2-2)-x^2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}=2+\frac{2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}>0$$

podemos concluir que la función es cóncava en todo su dominio.

---

3. a)$_{(1p)}$ Calcula $\displaystyle\int_0^1 x\cdot\arctan(x)dx$.

b)$_{(1p)}$ Halla el valor exacto de $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}dx$.

c)$_{(2p)}$ Aproxima, mediante la regla de Simpson, el valor de la integral siguiente dividiendo el intervalo de integración en 6 partes iguales

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Sabiendo que $M_4=1$, acota el error cometido en la aproximación.

d)$_{(0.5p)}$ Calcula el valor exacto de la integral del apartado anterior y verifica que la aproximación obtenida en c) es compatible con el valor exacto.

e)$_{(0.5p)}$ Sabiendo que la derivada segunda de la función integrando es, en módulo, menor que 0.1, determina el valor mínimo de n necesario para aproximar la integral del apartado c) mediante la fórmula de los trapecios con la misma precisión que garantiza la regla de Simpson en c).

---

a) Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\cdot\arctan(x)dx &= \begin{pmatrix} u=\arctan(x) & ; & du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ & & \\ dv=xdx & ; & v=\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix} = \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\cdot\arctan(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\arctan(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\cdot\arctan(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan(x)\right]_0^1 = \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\arctan(1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\arctan(1)-0\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Efectuando el cambio de variable $t=e^x$, se tiene

$$dt=e^x dx$$

Calculamos los nuevos límites de integración: para $x=-1$, $t=e^{-1}$ y para $x=0$, $t=1$. Por tanto,

$$\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}dx \;=\; \int_{1/e}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} \;=\; \int_{1/e}^{1}(1-t)^{-1/2}\,dt \;=\; \left[-2\sqrt{1-t}\;\right]_{1/e}^{1} \;=\; 2\sqrt{1-\frac{1}{e}}$$

También puede calcularse como inmediata sin necesidad de efectuar un cambio de variable.

c) Para hallar la aproximación, consideremos $h=\dfrac{3-2}{6}=\dfrac{1}{6}$ y la partición

$$P=\left\{\;2\;,\;2+\frac{1}{6}\;,\;2+\frac{1}{3}\;,\;2+\frac{1}{2}\;,\;2+\frac{2}{3}\;,\;2+\frac{5}{6}\;,\;3\;\right\}$$

La fórmula de la regla de Simpson vendrá dada por

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}dx\simeq\; S_6 \;&=\; \frac{\frac{1}{6}}{3}\left(\frac{4}{2^2+1}+4\cdot\frac{\frac{13}{3}}{\left(\frac{13}{6}\right)^2+1}+2\cdot\frac{\frac{14}{3}}{\left(\frac{7}{3}\right)^2+1}+\right.\\&\qquad\left.+\;4\cdot\frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1}+2\cdot\frac{\frac{16}{3}}{\left(\frac{8}{3}\right)^2+1}+4\cdot\frac{\frac{17}{3}}{\left(\frac{17}{6}\right)^2+1}+\frac{6}{3^2+1}\right)=\\&=\;\frac{1}{18}\,(0.8\;+\;4\cdot 0.7609756097\;+\;2\cdot 0.7241379310\;+\;4\cdot 0.6896551724\;+\\&\qquad+\;2\cdot 0.6575342465\;+\;4\cdot 0.6276923076\;+\;0.6)\;=\\&=\;\frac{1}{18}\cdot 12.47663671...\;=\;0.6931464841...\end{aligned}$$

Aplicamos la cota de error de Simpson

$$\left|\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}dx\;-\;S_6\right|\le\frac{1\cdot(3-2)^5}{180\cdot 6^4}\approx 4.286694101...\cdot 10^{-6}<10^{-5}$$

que garantiza, al menos, 4 decimales (en realidad 5).

d) Puesto que

$$\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}\;dx=\left[\;\log\left(x^2+1\right)\;\right]_2^3=\log(10)-\log(5)=\log(2)\approx 0.6931471805\ldots$$

se cumple que el error cometido es compatible con la cota

$$\begin{aligned}\left|\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}\;dx\;-\;S_6\right|\;&=\;|\;\log(2)-\;0.6931464838...|=\\&=\;|\;0.6931471805\ldots\;-\;0.6931464841...|=6.967000555...\cdot 10^{-7}<4.286694101...\cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

e) Teniendo en cuenta la cota de error de Trapecios

$$\left|\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}\;dx\;-\;T_n\right|\le\frac{0.1\cdot(3-2)^3}{12\cdot n^2}$$

bastará con hallar n que verifique la desigualdad

$$\frac{0.1\cdot(3-2)^3}{12\cdot n^2}<10^{-5}$$

de la que se deduce $n\ge 29$.