Departament de Matemàtica Aplicada
Unitat Docent de l'ETS d'Enginyeria Informàtica
Materials docents d'Àlgebra

Exercicis del Tema 1 (Unitat Temàtica 3)

27 de febrer de 2011

Exercici 2.1 *Discutiu i resoleu pel mètode de Gauss i substitució regressiva els sistemes lineals*

$$(a)\quad \begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=4\\ x_1-x_2+x_3&=1\\ 3x_1-x_2-x_3&=1\\ 6x_1-x_2+x_3&=6 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1-\ x_2+\ x_3&=0\\ -2x_1+5x_2+2x_3&=0\\ -7x_1+7x_2+\ x_3&=0 \end{aligned} \qquad (c)\quad \begin{aligned} x_1-\ x_2+2x_3-\ x_4&=-1\\ 2x_1+\ x_2-2x_3-2x_4&=-2\\ -x_1+2x_2-4x_3+\ x_4&=1\\ 3x_1\qquad\qquad -3x_4&=-4 \end{aligned}$$

(a) Escalonem la matriu ampliada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2&1&1&4\\ 1&-1&1&1\\ 3&-1&-1&1\\ 6&-1&1&6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&1\\ 2&1&1&4\\ 3&-1&-1&1\\ 6&-1&1&6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-2)E_{3,1}(-3)E_{4,1}(-6)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&1\\ 0&3&-1&2\\ 0&2&-4&-2\\ 0&5&-5&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4,2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&1\\ 0&5&-5&0\\ 0&2&-4&-2\\ 0&3&-1&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2(1/5)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&1\\ 0&1&-1&0\\ 0&2&-4&-2\\ 0&3&-1&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3,2}(-2)E_{4,2}(-3)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&1\\ 0&1&-1&0\\ 0&0&-2&-2\\ 0&0&2&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4,3}(-1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&1\\ 0&1&-1&0\\ 0&0&-2&-2\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]$$

El sistema és compatible determinat, i equivalent a

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=1\\ x_2-x_3&=0\\ 2x_3&=2 \end{aligned}$$

Resolem aquest sistema per substitució regressiva:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=1+x_2-x_3\\ x_2&=x_3\\ x_3&=1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1&=1+x_2-1\\ x_2&=1\\ x_3&=1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1&=1\\ x_2&=1\\ x_3&=1 \end{aligned}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&0\\ -2&5&2&0\\ -7&7&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(2)E_{3,1}(7)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&-1&1&0\\ 0&3&4&0\\ 0&0&8&0 \end{array}\right]$$

El sistema és compatible determinat i la solució és $(0, 0, 0)$.

(c) Escalonant la matriu ampliada obtenim el sistema equivalent

$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ x_2-2x_3&=0\\ 6x_4&=-1\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Compatible indeterminat. La incògnita x_3 és lliure. Fem la substitució regressiva:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ x_2 &= 2x_3 \\ x_4 &= -1/6 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 - 2x_3 - 1/6 = -5/6 + x_2 - 2x_3 \\ x_2 &= 2x_3 \\ x_4 &= -1/6 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= -5/6 + 2x_3 - 2x_3 = 5/6 \\ x_2 &= 2x_3 \\ x_4 &= -1/6 \end{aligned}\right\}$$

La solució general és $(-5/6, 0, 0, -1/6) + \lambda(0, 2, 1, 0)$.

Exercici 2.2 *Discutiu segons els valors dels paràmetres (i resoleu, si és possible) els següents sistemes lineals:*

$$(a)\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= a \\ 6x_1 + 3x_2 &= b \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + x_3 &= c \end{aligned} \qquad (c)\quad \begin{aligned} mx_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= m \\ 2mx_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 3mx_1 + 4x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} &= m + 1 \end{aligned}$$

(a) Escalonant la matriu ampliada trobem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 6 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & -3a + b \end{array}\right]$$

així que el sistema és

(a1) Incompatible si $b \neq 3a$

(a2) Compatible indeterminat si $b = 3a$. En aquest cas, la solució general és

$$(x_1, x_2) = (a/2, 0) + \lambda(-1/2, 1)$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a + b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3,1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a + b \\ 0 & 0 & 1 & -6a + 3b + c \end{array}\right]$$

El sistema és compatible determinat. La solució es calcula pel mètode de substitució regressiva:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ -x_2 \phantom{{}+ x_3} &= -2a + b \\ x_3 &= -6a + 3b + c \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 &= a - x_2 - x_3 \\ x_2 &= 2a - b \\ x_3 &= -6a + 3b + c \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1 &= a - 2a + b + 6a - 3b - c = 5a - 2b - c \\ x_2 &= 2a - b \\ x_3 &= -6a + 3b + c \end{aligned}$$

(c) Aquest problema se simplifica notablement si primerament l'escrivim així:

$$\begin{aligned} x_4 + 2x_3 + x_2 + mx_1 &= m \\ -x_4 - x_3 + 3x_2 + 2mx_1 &= 1 \\ x_3 + 4x_2 + 3mx_1 &= m + 1 \end{aligned}$$

(perquè d'aquesta manera no ens hem de capficar amb els paràmetres). Ara escalonem,

$$\left.\begin{aligned} x_4 + 2x_3 + x_2 + mx_1 &= m \\ -x_4 - x_3 + 3x_2 + 2mx_1 &= 1 \\ x_3 + 4x_2 + 3mx_1 &= m + 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_4 + 2x_3 + x_2 + mx_1 &= m \\ x_3 + 4x_2 + 3mx_1 &= m + 1 \\ x_3 + 4x_2 + 3mx_1 &= m + 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_4 + 2x_3 + x_2 + mx_1 &= m \\ x_3 + 4x_2 + 3mx_1 &= m + 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

El sistema és compatible indeterminat, amb independència dels valors del paràmetre m; les incògnites lliures són x_1 i x_2 i les solucions les obtenim per substitució regressiva:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= m - 2x_3 - x_2 - mx_1 \\ x_3 &= m + 1 + 4x_2 + 3mx_1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_4 &= -m + 1 - 7mx_1 - 9x_2 \\ x_3 &= m + 1 + 3mx_1 + 4x_2 \end{aligned}\right\}$$

I la solució general és

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m + 1 \\ -m + 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3m \\ -7m \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.3 *Trobeu una forma escalonada de la matriu*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

fent servir l'algorisme de Gauss amb pivotació parcial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(1/4)} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7/2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-2/3)} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 17/6 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.4 *Resoleu pel mètode de Gauss-Jordan el sistema lineal de l'apartat (a) de l'exercici 2.1.*

Ja hem trobat la forma escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

així que continuem amb l'algorisme de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(-1/2)\mathsf{E}_{1,3}(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3}(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solució és $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Exercici 2.5 *Donada la matriu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, *si* R *és la forma escalonada reduïda de* A *calcula una matriu* T *de manera que* $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$.

En primer lloc, calculem la forma escalonada reduïda de la matriu A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

Llavors, $\mathsf{R} = \mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_2(-1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2)\mathsf{A}$ així que

$$\mathsf{T} = \mathsf{E}_{1,2}(-1)\mathsf{E}_2(-1/2)\mathsf{E}_{2,1}(-2) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$