DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Examen Final **25-01-2012** **Duración prevista: 3h**

PRIMER PARCIAL

---

1. a)$_{(0.3p)}$ Resuelve la ecuación $x = |x| - 1$

b)$_{(0.3p)}$ Halla los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x+3| < 2$

---

a) Observa que

$$x = |x| - 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x = -x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La primera igualdad es imposible. A partir de la segunda se obtiene $2x = -1$, cuya solución es $x = -1/2$.

b) Se tiene

$$|x+3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 3 < 2 \Leftrightarrow -5 < x < -1$$

Por tanto, la solución será el intervalo $]-5, -1[$.

---

2. $_{(0.6p)}$ Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \log(x+1)$ y calcula su derivada.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ 4 - x^2 \geq 0 \quad , \quad x + 1 > 0 \right\}$$

Por un lado, tenemos que

$$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$$

y, por otra parte,

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[$$

En resumen,

$$D(f) = [-2, 2] \cap]-1, +\infty[=]-1, 2]$$

La derivada de $f(x)$ será

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} + \log(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1}$$

---

3. $_{(0.6p)}$ Halla el vector gradiente de $f(x,y,z) = e^{xy+z} - \dfrac{y}{z^2} + xyz - 1$ en el punto $P = (1, 1, -1)$.

Observa que

$$f_x = ye^{xy+z} + yz \quad , \quad f_y = xe^{xy+z} - \frac{1}{z^2} + xz \quad , \quad f_z = e^{xy+z} + \frac{2y}{z^3} + xy$$

de donde

$$\nabla f(x,y,z) = \left(ye^{xy+z} + yz \quad , \quad xe^{xy+z} - \frac{1}{z^2} + xz \quad , \quad e^{xy+z} + \frac{2y}{z^3} + xy \right)$$

Por tanto,

$$\nabla f(1, 1, -1) = (0 \ , -1 \ , \ 0)$$

4. a)$_{(0.6p)}$ Calcula el valor exacto de la integral $\displaystyle\int_1^9 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx$.

b)$_{(0.6p)}$ Aproxima el valor de la integral anterior mediante la regla de Simpson con $n = 4$.

---

a) Integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx &= \begin{pmatrix} u = \log(x) & ; & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^{-1/2}dx & ; & v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} \end{pmatrix} = \Big[\, 2\sqrt{x}\cdot\log(x)\, \Big]_1^9 - 2\int_1^9 \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx = \\
&= \Big[\, 2\sqrt{x}\cdot\log(x)\, \Big]_1^9 - 2\int_1^9 x^{-1/2}dx = \left[\, 2\sqrt{x}\cdot\log(x) - 2\frac{x^{1/2}}{1/2}\, \right]_1^9 = \\
&= \Big[\, 2\sqrt{x}\cdot\log(x) - 4\sqrt{x}\, \Big]_1^9 = 2\sqrt{9}\cdot\log(9) - 4\sqrt{9} - 2\cdot\log(1) + 4 = \\
&= 6\cdot\log(9) - 8 = 5.18334746...
\end{aligned}$$

b) Para la aproximación pedida, consideramos $h = \dfrac{8}{4} = 2$ y la partición

$$P = \{\ 1\ ,\ 1+h\ ,\ 1+2h\ ,\ 1+3h\ ,\ 9\ \} = \{\ 1\ ,\ 1+2\ ,\ 1+4\ ,\ 1+6\ ,\ 9\ \} = \{\ 1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\}$$

La regla de Simpson para esta partición queda

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx &\simeq S_4 = \frac{2}{3}\left(\frac{\log(1)}{\sqrt{1}} + 4\cdot\left(\frac{\log(3)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(7)}{\sqrt{7}}\right) + 2\cdot\frac{\log(5)}{\sqrt{5}} + \frac{\log(9)}{\sqrt{9}}\right) = \\
&= 5.100672827...
\end{aligned}$$

que proporciona un decimal correcto.

SEGUNDO PARCIAL

---

1. $(0.6p)$ Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_n \dfrac{2^n+3^n}{5^n}$ **b)** $\lim_n \dfrac{n+\sqrt{n^2-1}}{3n+7}$ **c)** $\lim_n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

---

a) Observa que

$$\lim_n \frac{2^n+3^n}{5^n} = \lim_n \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 0$$

b) En este caso

$$\lim_n \frac{n+\sqrt{n^2-1}}{3n+7} = \lim_n \frac{\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}{3\frac{n}{n}+\frac{7}{n}} = \lim_n \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{7}{n}} = \frac{2}{3}$$

c) Aplicando la fórmula de Euler

$$\lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim_n \left[n\left(1-\frac{1}{n}-1\right)\right]} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

---

2. a) $(0.5p)$ Obtén la solución general de la recurrencia lineal homogénea de segundo orden definida mediante

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$$

b) $(0.2p)$ Encuentra una solución particular de la recurrencia completa

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 2$$

c) $(0.3p)$ Halla la solución de la recurrencia completa con condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 2 \\ a_1 = 6 \quad , \quad a_2 = 4 \end{cases}$$

---

a) La ecuación característica asociada a la recurrencia es

$$r^2 - r - 2 = 0$$

que tiene dos raíces reales distintas $r_1 = -1$ y $r_2 = 2$.

La recurrencia corresponde al primer caso y la solución general puede escribirse en la forma

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n$$

b) Una solución particular de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n = A$$

de donde

$$A - A - 2A = 2 \implies -2A = 2 \implies A = -1$$

Por tanto, una solución particular de la recurrencia completa será

$$a_n = -1$$

c) De los apartados anteriores podemos concluir que la solución general de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 2^n - 1$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{lcl} \text{para } n=1 \;\; ; \;\; a_1 &=& -C_1+2C_2-1 &=& 6 \\ \text{para } n=2 \;\; ; \;\; a_2 &=& C_1+4C_2-1 &=& 4 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1=-3$ y $C_2=2$. De aquí:

$$a_n = (-3)\cdot(-1)^n + 2\cdot 2^n - 1 = 3\cdot(-1)^{n+1} + 2^{n+1} - 1$$

---

3. a)$_{(0.3p)}$ ¿Por qué converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{2^{3n+1}}$? Halla su valor exacto.

b) $_{(0.4p)}$ Aplica el criterio de Leibniz y calcula el valor de N necesario para que la suma parcial s_N proporcione, al menos, dos decimales correctos para la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$. Efectúa la aproximación.

---

a) La serie del enunciado es convergente por ser geométrica de razón $r=\dfrac{5}{8}$ ($|r|<1$). En efecto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{2^{3n+1}} = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{2^{3n}} = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{2^3}\right)^n = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

y podemos calcular su suma exacta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{2^{3n+1}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{5}{8}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{3} = \frac{1}{6}$$

b) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ cumple las condiciones del teorema de Leibniz ya que se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{n^4} > 0\ , \quad \{a_n\} \text{ decrece y tiende a } 0$$

Aplicando la cota de error correspondiente,

$$E_N = |s-s_N| \le a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)^4} < 10^{-3} \Leftrightarrow (N+1)^4 > 1000 \Leftrightarrow N \ge 5,$$

por lo que s_5 es la primera suma parcial que nos proporcionaría dos decimales exactos. La suma parcial será

$$s_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} = 0.9475394290...$$

---

4. a)$_{(0.4p)}$ A partir de la serie geométrica, obtén una expresión explícita para la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^n$, donde sea convergente.

b)$_{(0.3p)}$ Aproxima $\dfrac{1}{e}$ utilizando los cinco primeros sumandos de la serie de potencias de la función exponencial. Acota el error cometido.

---

a) Derivando la serie geométrica de razón x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad , \qquad |x|<1$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1$$

Multiplicando ambos miembros por x, encontramos una expresión explícita para la serie del enunciado (aritmético-geométrica) en el mismo intervalo de convergencia

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1$$

b) Sustituyendo x por -1 en la serie de potencias de la función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

podemos representar $\frac{1}{e}$ como la suma exacta de una serie numérica (alternada, tipo Leibniz, con $a_n = \frac{1}{n!}$)

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots$$

La aproximación pedida vendrá dada por

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 0.375$$

y el error cometido estará acotado por $\frac{1}{5!}$ (primer término de la cola en valor absoluto). Por tanto,

$$\left| \frac{1}{e} - 0.375 \right| < \frac{1}{5!} = 0.0083333... < 10^{-2}$$

que garantiza un decimal correcto. En efecto, observa que

$$\left| \frac{1}{e} - 0.375 \right| = 0.00712055....$$