Àlgebra **8 de juny de 2018**
Segon parcial **2 hores**

Recordeu que no podeu fer servir calculadora, ordinador, telèfon mòbil, tauleta o qualsevol altre dispositiu electrònic.

Qüestió 1 (3'5 pt) Considerem els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$
$$H = \langle (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0)\rangle$$

a) Trobeu bases de F, G i $F + G$.
b) La suma $F + G$ és directa? Quina és la dimensió de $F \cap G$?
c) Calculeu les equacions de H.
d) Trobeu les equacions i una base del subespai $H^\perp$.
e) Estudieu si la suma $F + H$ és directa.

Solució:

a) F i G són els conjunts de solucions de dos sistemes lineals (els espais nuls de dues matrius).

$$F = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,1,1,0), (0,0,0,1)\rangle$$
$$G = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,1,1,0), (-1,0,0,1)\rangle$$

Així que els conjunts

$$B_F = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}, \ B_G = \{(1,1,1,0), (-1,0,0,1)\}$$

són bases, respectivament, dels subespais F i G.
La unió d'aquestes dues bases,

$$B_F \cup B_G = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1), (-1,0,0,1)\}$$

genera l'espai $F + G$. Vegem si aquest conjunt és linealment independent; això depén del rang de la matriu que té per columnes aquests vectors:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Com que el rang és 3, les tres columnes de la matriu són independents i el conjunt

$$B_{F+G} = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1), (-1,0,0,1)\}$$

és una base de $F + G$.

b) Tenint en compte la fórmula de Grassman,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 2 + 2 - 3 = 1$$

I, en conseqüència, la suma no és directa.

c) H és l'ortogonal del subespai F, perquè

$$H = \text{Fil}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow H^\perp = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = F$$

Per tant,

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_4 = 0\}$$

d) Com que $H^\perp = F$,

$$H^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$

i el conjunt

$$B_{H^\perp} = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$$

és una base de $H^\perp$.

e) La suma $F + H$ és directa, perquè $F^\perp = H$.

Qüestió 2 (1'5 pt) Siga $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida com

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3)$$

a) Trobeu la matriu canònica de f.
b) Trobeu bases del nucli i la imatge de f.
c) Justifiqueu si f és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva.
d) Proveu que el vector $\vec{y} = (3, 1, 5)$ es troba a la imatge de f i calculeu el conjunt de totes les antiimatges de $\vec{y}$.

Solució:

a) La matriu canònica és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) El nucli de f és l'espai nul de la matriu A,

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nul} \mathsf{A} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$$

La imatge de f és l'espai columna de la matriu A. I, com que ja sabem que la forma esglaonada reduïda de A és $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, deduïm que el rang de la matriu A és 2, les dues primeres columnes són independents i, per tant, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Col} \mathsf{A} = \langle (1, 1, 1), (1, -1, 3) \rangle$.
Així que

$$B_{\operatorname{Nuc} f} = \{(-1, 0, 1)\}$$

és una base del nucli i

$$B_{\operatorname{Im} f} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 3)\}$$

és base de la imatge de f.

c) Com que el nucli no és zero, f no és injectiva (ni bijectiva). I tampoc no és suprajectiva, perquè la dimensió de la imatge no és 3.

d) El vector $\vec{y}$ és a la imatge de f perquè

$$\vec{y} = 2(1, 1, 1) + (1, -1, 3)$$

(o perquè $f(2, 1, 0) = y$).
El conjunt de totes les antiimatges del vector $\vec{y}$ és la solució completa del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{y}$, és a dir, la suma d'una solució particular i l'espai nul de la matriu, ço és, el conjunt

$$f^{-1}(\vec{y}) = \{(2, 1, 0) + \alpha(-1, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Qüestió 3 (3 pt) a) Estudieu si cadascuna de les matrius reals següents és diagonalitzable.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Justifiqueu que la matriu $\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ és diagonalitzable i calculeu dues matrius P, invertible, i D, diagonal, tals que $\mathsf{F} = \mathsf{PDP}^{-1}$.

c) Utilitzant el resultat anterior, trobeu una matriu G tal que $\mathsf{G}^2 = \mathsf{F}$.

Solució:

a) La matriu A no és diagonalitzable, perquè té un únic valor propi, $\lambda = 2$, amb multiplicitat algebraica 3, però la multiplicitat geomètrica és

$$\text{mgeo}(2) = 3 - \text{rang}(\mathsf{A} - 2\mathrm{I}) = 3 - \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

La matriu B tampoc no és diagonalitzable, perquè el valor propi 2 té multiplicitat algebraica 2, però

$$\text{mgeo}(2) = 3 - \text{rang}(\mathsf{B} - 2\mathrm{I}) = 3 - \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

El polinomi característic de la matriu C és

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\Big((2-\lambda)(3-\lambda) - 2\Big) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

i els valors propis són $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ i $\lambda_3 = 1$. Com que tots els valors propis són reals i simples, la matriu C és diagonalitzable.
El polinomi característic de la matriu E és

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big(-\lambda(2-\lambda) + 5\Big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

I, tenint en compte que el discriminant de l'equació $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ és $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -1$, aquesta matriu té dos valors propis que no són reals i, en conseqüència, no és diagonalitzable.
Finalment, la matriu O és diagonalitzable, perquè és diagonal (o perquè $\mathsf{O} = \mathsf{POP}^{-1}$ per a qualsevol matriu invertible P; o perquè el valor propi 0 té multiplicitat geomètrica 3).

b) Els valors propis són $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 9$ (perquè la matriu és triangular). Els subespais propis corresponents,

$$E_4(F) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 4-4 & -5 \\ 0 & 9-4 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (1,0) \rangle$$

$$E_9(F) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 4-9 & -5 \\ 0 & 9-9 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (-1,1) \rangle$$

Per tant, $\mathsf{F} = \mathsf{PDP}^{-1}$, on

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

c) Si

$$\mathsf{G} = \mathsf{P} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathsf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tindrem que

$$\mathsf{G}^2 = \mathsf{P} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathsf{P}^{-1}\mathsf{P} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathsf{P}^{-1} = \mathsf{P} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 \mathsf{P}^{-1} = \mathsf{F}$$

Qüestió 4 (2 pt)

a) **(0'2 pt)** Si A és una matriu 3×5 de rang 2, quines són les dimensions del subespai columna i nul (o nucli) de A?

$$\dim \operatorname{Col} \mathsf{A} = \boxed{2} \qquad \dim \operatorname{Nul} \mathsf{A} = \boxed{3}$$

b) **(0'4 pt)** Calculeu la projecció del vector $\vec{v} = (2, 1, 2)$ sobre el subespai $F = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$.

c) **(0'6 pt)** Sabent que A és una matriu 4×4 i que el seu determinant és igual a -5, calculeu els determinants següents:

$$\det\left(\mathsf{A}^3\right) = \boxed{-5^3} \qquad \det(3\mathsf{A}) = \boxed{3^4(-5)} \qquad \det\left(\frac{1}{3}\mathsf{A}\right) = \boxed{-5/3^4}$$

$$\det\left(\mathsf{E}_3(3)\mathsf{A}\right) = \boxed{-3 \cdot 5} \qquad \det(-\mathsf{A}) = \boxed{-5} \qquad \det\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{O} & \mathsf{A}^{-1} \end{bmatrix} = \boxed{1}$$

d) **(0'2 pt)** Si $\vec{v}$ és un vector propi de la matriu A, associat al valor propi λ, proveu que $\vec{v}$ també és vector propi de la matriu A^3, amb quin valor propi associat?

e) **(0'2 pt)** Suposem que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, definida com $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, és una aplicació lineal i que $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 3$. Aquesta aplicació és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva?

f) **(0'2 pt)** És possible que la composició, $g \circ f$, de dues aplicacions lineals, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ i $g : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siga bijectiva?

g) **(0'2 pt)** És possible que la composició, $f \circ g$, de dues aplicacions lineals, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ i $g : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siga bijectiva?

Solució:

b) F és l'espai columna de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per tant, la projecció sobre F del vector $\vec{v}$ és $\mathsf{A}\vec{x}$ on $\vec{x}$ és la solució del sistema d'equacions $\mathsf{A}^t\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}\vec{v}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^t\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{A}\vec{v} &\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &\iff \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La projecció ortogonal és

$$p_F(\vec{v}) = \mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Si $\vec{v}$ és un vector propi de la matriu A, associat al valor propi λ, llavors

$$\mathsf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \Longrightarrow \mathsf{A}^3\vec{v} = \lambda^3\vec{v}$$

així que $\vec{v}$ també és vector propi de la matriu A^3, amb el valor propi associat λ^3.

e) Si el rang és 3, llavors la dimensió del subespai imatge és 3, així que aquest subespai no coincideix amb $\mathbb{R}^5$ i f no és suprajectiva (ni bijectiva). D'altra banda, com que $\dim \operatorname{Nuc}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = 3$, el nucli és igual a zero i f sí que és injectiva.

f) Sí. Per exemple, si

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x_1, x_2, x_3) & \rightarrow & (x_1, x_2, x_3, 0, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & \rightarrow & (x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

Aquestes dues aplicacions són lineals i la composició $g \circ f$ és l'aplicació identitat (que és bijectiva).

g) No. I ho podem justificar de diverses maneres:

- Perquè no pot ser injectiva. Observem que el nucli de g és un subconjunt del nucli de $f \circ g$ (si $g(\vec{x}) = 0$, llavors $f(g(\vec{x})) = 0$). Així que si $f \circ g$ fora injectiva, g també ho seria. Però el nucli de g no pot ser zero, perquè és l'espai nul d'una matriu 3×5.
- Perquè no pot ser suprajectiva. Si $f \circ g$ fora suprajectiva, qualsevol vector $\vec{z}$ tindria una antiimatge $\vec{x}$, de manera que $f(g(\vec{x})) = \vec{z}$, però aleshores, si $\vec{y} = g(\vec{x})$, tindrem que $f(\vec{y}) = \vec{z}$, de manera que f també seria suprajectiva. Però f no pot ser suprajectiva, perquè la dimensió de la imatge de f és, com a molt, 3.
- Perquè, si $f(\vec{y}) = \mathsf{A}\vec{y}$ i $g(\vec{x}) = \mathsf{B}\vec{x}$ llavors, $f \circ g(\vec{x}) = \mathsf{A}\mathsf{B}\vec{x}$. És sabut que el rang del producte és menor o igual que el rang de cadascuna de les matrius. Per tant, $\operatorname{rang}(\mathsf{A}\mathsf{B}) \leq \operatorname{rang} \mathsf{A} \leq 3$ i $f \circ g$ no és suprajectiva.