

Problemes del tema 3: Determinants

1. Calcula els següents determinants fent servir la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Calcula els següents determinants:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & -z & t \\ x & y & 0 & 1 \\ x & y & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Sabent que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcula els següents determinants:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} d+2f & f & e \\ a+2c & c & b \\ g+2i & i & h \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

4. Per a cadascun dels següents determinants, calcula els valors de λ que l'anul·len:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & -7 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

5. Sabent que A és una matriu quadrada d'ordre 20 que satisfà que

$$A = E_{1,2}(-3)E_{1,12}E_9(-2)E_{11,2}(1/3)E_{12,3}E_9(-1/3),$$

calcula el determinant de A .

6. Sabent que A és una matriu quadrada d'ordre 4 i que $|A| = -1/2$, calcula els determinants:

$$|-2A| \quad |(1/2)A| \quad |A^{-1}| \quad |-2A^{-1}| \quad |2A^2|$$

7. Comprova que la matriu A és invertible i calcula la seua inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quina relació tenen A^{-1} i A^t ?

8. Calcula el rang de B segons els valors de a :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & a-1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & a^2-10 & 2 \\ 6 & 3 & a-6 & a-9 \end{pmatrix}$$

9. Resol per Cramer els següents sistemes:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 3z &= 3 \\ 2x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + y + z - t &= 0 \\ x - by + 2z + t &= 0 \end{aligned}$$