Exercici 14.1 Trobeu una base de $F \cap G$

a) $F =< (1,1,0),(1,0,1) > \quad , G =< (0,1,1),(1,1,1) >$

b) $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 = 0\}, \quad G = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 0\}$

Solució a) Trobem primer unes equacions implícites de cadascun dels subespais donats.

Pel que fa a F, és clar que el sistema que genera F és linealment independent i per tant, una base de F és:

$$B_F = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$$

per tant la dimensió de F és 2. És a dir $dim(F) = 2$. Recordem que per a qualsevol subespai F de $\mathbb{R}^n$ s'acompleix:

$$\boxed{\text{Nombre d'equacions implícites (linealment independents) de } F = dim(\mathbb{R}^n) - dim(F)}$$

Per tant, el nombre d'equacions implícites de F és igual a $dim(\mathbb{R}^3) - dim(F) = 3 - 2 = 1$. Per trobar aquesta equació implícita de F hem de veure quan el sistema següent serà compatible:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

fent operacions elementals trobem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21(-1)}} \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{E_{2(-1)}} \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -y+x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32(-1)}} \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -y+x \\ 0 & 0 & z+y-x \end{array}\right)$$

Per tant, una equació implícita de F és:

$$x - y - z = 0$$

o qualsevol equivalent. Noteu que els vectors de la base de F acompleixen aquesta equació.

Pel que fa a G, és clar que el sistema que genera G és linealment independent i per tant, una base de G és:

$$B_G = \{(0,1,1),(1,1,1)\}$$

per tant la dimensió de G és 2. És a dir $dim(G) = 2$. Sabem que el nombre d'equacions implícites (linealment independents) de G és igual a $dim(\mathbb{R}^3) - dim(G) = 3 - 2 = 1$. Per trobar aquesta equació implícita de G hem de veure quan el sistema següent serà compatible:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right)$$

fent operacions elementals trobem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31(-1)}} \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & z-y \end{array}\right)$$

Per tant, una equació implícita de G és:

$$y - z = 0$$

o qualsevol equivalent. Noteu que els vectors de la base de G acompleixen aquesta equació.

L'espai intersecció $F \cap G$ està format pels vectors que pertanyen als dos subespais. Per tant han d'acomplir ambdues equacions implícites. És a dir:

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left.\begin{array}{rcl} x - y - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent aquest sistema trobem una base de $F \cap G$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12(1)}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

agafant com a paràmetre a z, tenim:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 2z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ z & = & \alpha \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} x & = & 2\alpha \\ y & = & \alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right\}$$

és a dir les solucions són del tipus $(x, y, z) = \alpha(2, 1, 1)$. Per tant, el vector $(2, 1, 1)$ és una base de $F \cap G$. És a dir:

$$B_{F \cap G} = \{(2, 1, 1)\}$$

Noteu que $F \cap G$ és un subespai de $\mathbb{R}^3$ i, per tant, s'acompleix:

$$\boxed{\text{Nombre d'equacions implícites (linealment independents) de } (F \cap G) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(F \cap G)}$$

o siga: $2 = 3 - 1$.

Solució b) Com que tenim els subespais en forma implícita sabem que les equacions implícites de $F \cap G$ són el sistema d'equacions format per totes les implícites, és a dir:

$$F \cap G = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right\}\right.$$

Resolent aquest sistema trobem una base de $F \cap G$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Veiem que és un sistema compatible indeterminat. Agafant com a paràmetre $x_2 = \alpha$ tenim que el sistema d'equacions té com a solució:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & \alpha \\ x_2 & = & \alpha \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

és a dir les solucions són

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Per tant, una base de la intersecció és:

$$B_{F \cap H} = \{(1,1,0)\}$$

Noteu que $F \cap G$ és un subespai de $\mathbb{R}^3$ i, per tant, s'acompleix:

$$\boxed{\text{Nombre d'equacions implícites (linealment independents) de } (F \cap G) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(F \cap G)}$$

o siga: $2 = 3 - 1$.

Exercici 14.2 En cada apartat, trobeu una base del subespai suma dels dos subespais F i G donats.

a) $F =< (1,1,0),(1,0,1) > \quad , G =< (0,1,1),(1,1,1) >$

b) $F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}, \quad G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$

Solució.a)

$$F + G =< (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1) >$$

Els quatre vectors formen un sistema lligat. Podem llevar-ne un i deixar un sistema lliure.

$$F + G =< (1,1,0),(1,0,1),(1,1,1) >= \mathbb{R}^3$$

ja que $F + G$ es un espai de dimensió 3 en $\mathbb{R}^3$. Podem donar com a base

$$\{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

o la base canònica de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Solució.b) Resolent les equacions implícites de F és fàcil trobar que una base de F és:

$$B_F = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

i una base de G és:

$$B_G = \{(1,1,1,0),(-1,0,0,1)\}$$

Per tant, la suma ve generada per:

$$F + G =< (1,1,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,0),(-1,0,0,1) >$$

És clar que aquests quatre vectors formen un sistema lligat, ja que el segon vector és igual al quart. Llevant eixe vector, els tres que queden formen un sistema lliure, i per tant, base:

$$B_{F+G} = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1),(-1,0,0,1)\}$$

Exercici 14.3

a) Trobeu unes equacions implícites del subespai de $\mathbb{R}^4$: $F =< (1,2,0,1),(2,3,0,3),(3,2,1,2) >$

b) Trobeu una base de $G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

c) Proveu que $F + G = \mathbb{R}^4$.

d) Determineu la dimensió de $F \cap G$.

e) Trobeu una base de $F \cap G$.

Solució a) Els tres vectors que generen F són un sistema lliure. Per tant, són base de F. Per trobar unes equacions implícites hem de veure quan és compatible el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 1 & 3 & 2 & t \end{array}\right)$$

fent operacions elementals trobem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & 2 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 1 & 3 & 2 & t \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21(-2)}} \xrightarrow{E_{41(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -4 & y-2x \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & t-x \end{array}\right) \xrightarrow{E_{42(1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -4 & y-2x \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -5 & t-3x+y \end{array}\right) \xrightarrow{E_{43(5)}} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & -1 & -4 & y-2x \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & t-3x+y+5z \end{array}\right)$$

Per tant, una equació implícita és

$$-3x + y + 5z + t = 0$$

Noteu que F té dimensió 3 i viu en $\mathbb{R}^4$, per tant només té una equació implícita. És fàcil comprovar que els vectors de la base de F acompleixen aquesta equació implícita.

Solució b) El subespai G té només una equació implícita. Com que és subespai de $\mathbb{R}^4$ haurá de tenir dimensió 3. Resolent l'equació implícita de G és fàcil trobar que les solucions poden donar-se com:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Per tant:

$$B_G = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$$

Solució c) Per definició:

$$F + G =< (1, 2, 0, 1), (2, 3, 0, 3), (3, 2, 1, 2), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$$

Només poden haver 4 vectors lliures com a molt. És fàcil comprovar que podem agafar els vector lliures:

$$F + G =< (3, 2, 1, 2), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$$

ja que el determinant de la matriu que formen és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-4) = 4 \neq 0$$

Per tant, una base de la suma $F + G$ és:

$$B_{F+G} = \{(3, 2, 1, 2), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$$

i per tant la seua dimensió és 4. Necessàriament ha de ser $F + G = \mathbb{R}^4$, ja que $F + G$ és un subespai de $\mathbb{R}^4$ amb la mateixa dimensió. Noteu, a més, que $F + G$ és un subespai de $\mathbb{R}^4$ i, per tant, s'acompleix:

$$\boxed{\text{Nombre d'equacions implícites (linealment independents) de } (F + G) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(F + G)}$$

o siga $F + G$ no té equacions implícites, ja que es trata de tot l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ sense cap condició sobre les components dels vectors.

Solució.c) Usant la fórmula de Grassman:

$$\boxed{dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)}$$

tenim que

$$dim(F \cap G) = +dim(F) + dim(G) - dim(F + G) = 3 + 3 - 4 = 2$$

Solució.d) Per trobar una base de la intersecció partim de les equacions implícites de la intersecció, que estan formades per la unió de les de F i les de G:

$$F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \left. \begin{aligned} -3x + y + 5z + t &= 0 \\ x - y + z + t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Resolent aquest sistema trobem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{21}(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_2(-1/2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

es tracta d'un sistema compatible amb grau d'indeterminació 2. Agafant com a paràmetres $z = \alpha$ i $t = \beta$, tenim que el sistema s'escriu:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & = & 3z + t & = & 3\alpha + \beta \\ y & = & 4z + 2t & = & 4\alpha + 2\beta \end{array}\right\}$$

és a dir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$$

per tant, una base de $F \cap G$ és:

$$B_{F \cap G} = \{(3, 4, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$$

i aleshores $dim(F \cap G) = 2$. Noteu que $F \cap G$ és un subespai de $\mathbb{R}^4$ i, per tant, s'acompleix:

$$\boxed{\text{Nombre d'equacions implícites (linealment independents) de } (F \cap G) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(F \cap G)}$$

o siga: $2 = 4 - 2$.

Exercici 14.4 Determineu si la suma dels subespais de $\mathbb{R}^3$: $F =< (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, -1) >$, $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_2 = x_3\}$ és directa.

Solució. Com que

$$det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

els vectors que generen F formen un sistema linealment dependent. Ens quedem amb els dos primers, que són lliures, i per tant, formen base de F:

$$B_F = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

per tant, $dim(F) = 2$.

Pel que fa a G, noteu que unes equacions implícites linealment independents són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent-les trobem una base de G:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

és a dir:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_3 & = & \alpha \end{array}\right\}$$

per tant, les solucions són:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

amb la qual cosa tenim que

$$B_G = \{(1,1,1)\}$$

i per tant, $dim(G) = 1$.

Per tal de comprovar si la suma $F + G$ és directa anem a calcular explícitament el subespai intersecció $F \cap G$. Com que F té dimensió 2, sabem que només té una equació implícita (ja que estem en $\mathbb{R}^3$).

Per trobar l'equació implícita de F hem de veure quan el sistema següent és compatible:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}} \xrightarrow{E_{23}} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 \end{array}\right)$$

Per tant l'equació implícita de F és:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Sabem que les equacions implicites de $F \cap G$ estan formades per la unió de les de F i les de G. És a dir:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolent aquest sistema d'equacions trobem

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ja veiem que es tracta d'un sistema compatible determinat amb solució única:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per tant $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ amb la qual cosa la suma és directa i la denotem com $F \oplus G$.

Per la fórmula de Grassman:

$$\boxed{dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)} = 2 + 1 - 0 = 3$$

és a dir $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.