

Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 10
Robert Fuster

Exercici 10.1. Calculeu la matriu inversa, si existeix, de les matrius següents (els nombres a, b, c i d són tots no nuls):

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (c) \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad (d) \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

(a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} [B \mid I] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(-1/3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_1(1/2)E_2(1/3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

així que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} [C \mid I] &= \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{1,2}(-b/d)} \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & -b/d \\ 0 & d & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_1(1/a)E_2(1/d)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & -b/(ad) \\ 0 & 1 & 0 & 1/d \end{array} \right] \end{aligned}$$

així que

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & -b/(ad) \\ 0 & 1/d \end{bmatrix}$$

(d)

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ -c/(ad) & 1/d \end{bmatrix}$$

Exercici 10.2. (Substitució progressiva)
 Resoleu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com que la matriu és triangular inferior, podem resoldre el sistema per substitució progressiva:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ -x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -3x_1 + x_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{x_1=1} \left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 + x_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{x_2=2} \left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{array} \right\}$$

Exercici 10.6. Trobeu una forma esglaonada de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

fent servir l'algorisme de Gauss amb pivotatge parcial.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{E_{1,2}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(1/4)} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{2,3}} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(-2/3)} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 17/6 & 1/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$