Ejercicios de clase
TEMA 6 – Grafos y Estructuras de Partición

Ejercicio 1

Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido con pesos:

$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E = \{(v_0,v_1, 2), (v_0,v_3, 1), (v_1,v_3, 3), (v_1,v_4, 10), (v_3,v_4, 2), (v_3,v_6, 4), (v_3,v_5, 8), (v_3,v_2, 2), (v_2,v_0, 4), (v_2,v_5, 5), (v_4,v_6, 6), (v_6,v_5, 1)\}$

Se pide:

a) $|V|$ y $|E|$

b) Vértices adyacentes a cada uno de los vértices

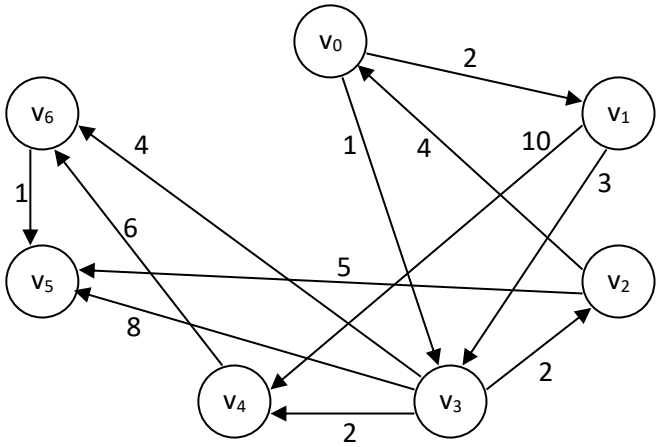
c) Grado de cada vértice y del grafo

d) Caminos desde v_0 a v6, su longitud con y sin pesos

e) Vértices alcanzables desde v_0

f) Caminos mínimos desde v_0 al resto de vértices

g) ¿Tiene ciclos?



SOLUCIÓN:

a) $|V| = 7$

$|A| = 12$

b) Vértices adyacentes a cada uno de los vértices:

Adyacentes(v_0) = {v_1, v_3}

Adyacentes(v_1) = {v_3, v_4}

Adyacentes(v_2) = {v_0, v_5}

Adyacentes(v_3) = {v_2, v_4, v_5, v_6}

Adyacentes(v_4) = {v_6}

Adyacentes(v_5) = ∅

Adyacentes(v_6) = {v_5}

c) Grado de cada vértice y del grafo:

Grado(v_0) = Grado(v_1) = Grado(v_2) = Grado(v_4) = Grado(v_5) = Grado(v_6) = 3

Grado(v_3) = Grado del grafo = 6

d) Caminos simples desde *v0* a *v6*, y su longitud con y sin pesos:

Caminos (simples)	Longitud	Longitud con pesos
$\langle v_0, v_1, v_3, v_4, v_6\rangle$, $\langle v_0, v_1, v_3, v_6\rangle$, $\langle v_0, v_1, v_4, v_6\rangle$, $\langle v_0, v_3, v_4, v_6\rangle$, $\langle v_0, v_3, v_6\rangle$	4, 3, 3, 3, 2	13, 9, 18, 9, 5

e) Vértices alcanzables desde *v0*:
Todos

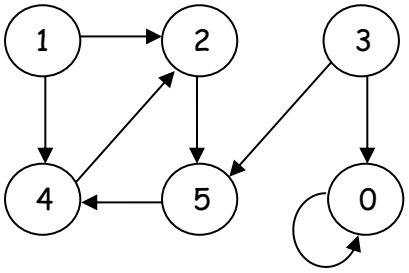
f) Caminos mínimos (con pesos) desde v0 al resto de vértices:
$\langle v_0, v_1\rangle$, $\langle v_0, v_3, v_2\rangle$, $\langle v_0, v_3\rangle$, $\langle v_0, v_3, v_4\rangle$, $\langle v_0, v_3, v_6, v_5\rangle$, $\langle v_0, v_3, v_6\rangle$

g) ¿Tiene ciclos?
Sí. Por ejemplo: $\langle v_0, v_3, v_2, v_0\rangle$

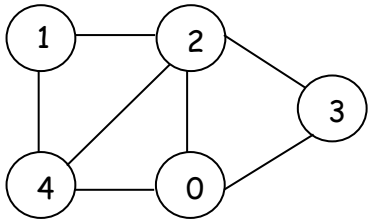
Ejercicio 2

Representad los siguientes grafos mediante una matriz de adyacencia y mediante listas de adyacencia:

a)



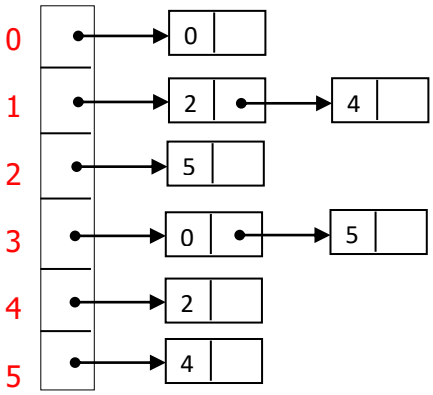
b)



SOLUCIÓN:

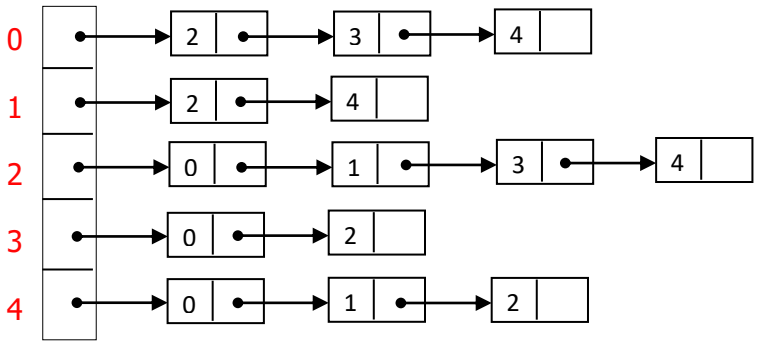
a)

	0	1	2	3	4	5
0	true	false	false	false	false	false
1	false	false	true	false	true	false
2	false	false	false	false	false	true
3	true	false	false	false	false	true
4	false	false	true	false	false	false
5	false	false	false	false	true	false



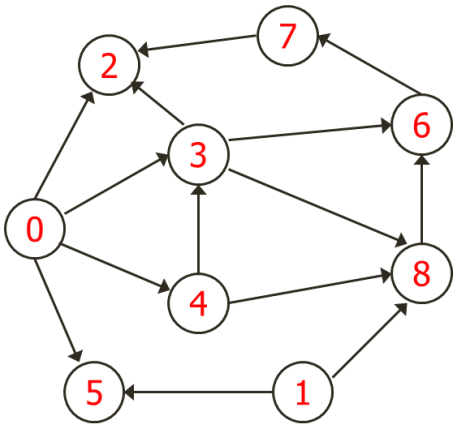
b)

	0	1	2	3	4
0	false	false	true	true	true
1	false	false	true	false	true
2	false	true	false	true	true
3	false	false	true	false	false
4	true	true	true	false	false



Ejercicio 3

Mostrar el resultado de imprimir por pantalla el recorrido en profundidad y en anchura del siguiente grafo:



SOLUCIÓN:

Nota: el orden de las aristas afecta al resultado de los recorridos. La solución que se muestra aquí asume que en la listas de adyacencia las aristas están ordenadas por el código del vértice destino de menor a mayor.

Profundidad (DFS): 0-2-3-6-7-8-4-5-1

Amplitud (BFS): 0-2-3-4-5-6-8-7-1

Ejercicio 4

Diseña un método en la clase *ForestUFSet* que muestre por pantalla los identificadores de cada uno de los conjuntos que hay en el *UFSet*.

SOLUCIÓN:

```
public void mostrarIdentificadores() {
  for (int i = 0; i < talla; i++)
    if (elArray[i] < 0)
      System.out.println("" + i);
}
```

Ejercicio 5

Diseña un método en la clase *ForestUFSet* que muestre por pantalla los elementos del conjunto al que pertenece un elemento dado *x*.

SOLUCIÓN:

```
public void mostrarConjunto(int x) {
  int raiz = find(x);
  for (int i = 0; i < talla; i++)
    if (find(i) == raiz)
      System.out.println("" + i);
}
```

Ejercicio 6

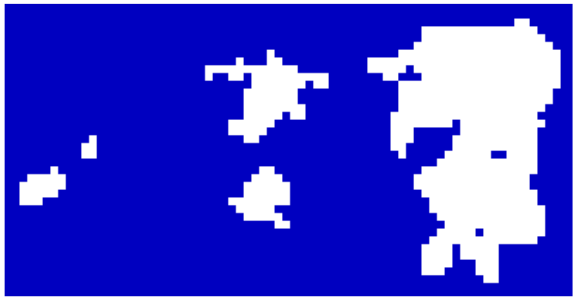
Diseña un método en la clase *ForestUFSet* que devuelva el número de elementos que habría en el conjunto resultante de unir los conjuntos a los que pertenecen dos elementos dados *x* e *y*.

SOLUCIÓN:

```
public int tallaUnion(int x, int y) {
  int raizX = find(x), raizY = find(y), n = 0;
  for (int i = 0; i < talla; i++) {
    int aux = find(i);
    if (aux == raizX || aux == raizY)
      n++;
  }
  return n;
}
```

Ejercicio 7

Se dispone de una matriz de tipo *boolean* que representa un mapa de un archipiélago. Un valor *true* en una posición (x,y) indica que hay tierra en ese punto, mientras que un valor *false* indica que hay mar.



Ejemplo: Los valores *true* y *false* se representan mediante los colores blanco y azul, respectivamente.

Implementa un método con el siguiente perfil que permita calcular el número de islas que hay en el archipiélago:

```
public static int numIslas(boolean[][] mapa);
```

SOLUCIÓN:

```
// Convierte las coordenadas del mapa en un numero entero
private static int posInt(int x, int y, int ancho) {
  return y * ancho + x;
}

// Une los conjuntos a los que pertenecen dos elementos dados
private static void unir(int x, int y, UFSet m) {
  int raizX = m.find(x);
  int raizY = m.find(y);
  if (raizX != raizY) m.merge(raizX, raizY);
}

public static int numIslas(boolean[][] mapa) {
  int ancho = mapa.length, alto = mapa[0].length;
  int talla = ancho * alto, res = 0;
  UFSet m = new ForestUFSet(talla);
  // Creamos las clases de equivalencia
  for (int x = 0; x < ancho; x++) {
    for (int y = 0; y < alto; y++) {
      if (x + 1 < ancho && mapa[x][y] == mapa[x + 1][y])
        unir(posInt(x, y, ancho), posInt(x + 1, y, ancho));
      if (y + 1 < alto && mapa[x][y] == mapa[x][y + 1])
        unir(posInt(x, y, ancho), posInt(x, y + 1, ancho));
    }
  }
  // Calculamos el número de islas (conjuntos de tierra)
  boolean[] visitado = new boolean[talla];
  for (int x = 0; x < ancho; x++) {
    for (int y = 0; y < alto; y++) {
      if (mapa[x][y]) {      // Tierra
        int raiz = m.find(posInt(x, y));
        if (!visitado[raiz]) {
          visitado[raiz] = true;
          res++;
        }
      }
    }
  }
  return res;
}
```

Ejercicio 8

Definir los siguientes métodos en la clase *GrafoDirigido*:

a) Consultar el grado de salida de un vértice dado
b) Consultar el grado de entrada de un vértice dado
c) Empleando los dos métodos anteriores, escribir un método que devuelva el grado del grafo
d) Comprobar si un vértice es *fuente*, es decir, si es un vértice del que sólo salen aristas
e) Comprobar si un vértice es un *sumidero* (i.e. un vértice al que sólo llegan aristas) al que llegan aristas de todos los demás vértices del grafo

SOLUCIÓN:

a) Consultar el grado de salida de un vértice dado:

```
public int gradoDeSalida(int v) {
  return elArray[v].talla();
}
```

b) Consultar el grado de entrada de un vértice dado:

```
public int gradoDeEntrada(int v) {
  int res = 0;
  for (int i = 0; i < numV; i++) {
    ListaConPI<Adyacente> ady = elArray[i];
    for (ady.inicio(); !ady.esFin(); ady.siguiente())
      if (ady.recuperar().destino == v) {
        res++;
        break;
      }
  }
  return res;
}
```

c) Empleando los dos métodos anteriores, escribir un método que devuelva el grado del grafo

```
public int gradoGrafo() {
  int res = 0;
  for (int v = 0; v < numV; v++) {
    int gradoV = gradoDeEntrada(v) + gradoDeSalida(v);
    if (gradoV > res) res = gradoV;
  }
  return res;
}
```

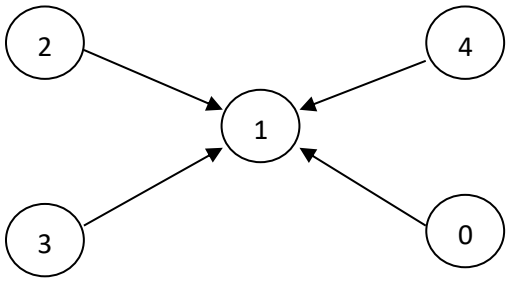
Nota: sin invocar a los dos métodos anteriores es posible implementar este método mucho más eficientemente.

d) Comprobar si un vértice es *fuente*, es decir, si es un vértice del que sólo salen aristas:

```
public boolean esFuente(int v) {
  boolean res = !elArray[v].esVacia();
  for (int i = 0; i < numV && res; i++) {
    ListaConPI<Adyacente> ady = elArray[i];
    for (ady.inicio(); !ady.esFin(); ady.siguiente())
      if (ady.recuperar().destino == v) {
        res = false;
        break;
      }
  }
  return res;
}
```

e) Comprobar si un vértice es un *sumidero* (i.e. un vértice al que sólo llegan aristas) al que llegan aristas de todos los demás vértices del grafo:

Ejemplo: el vértice 1 es un sumidero de este tipo.




```
public boolean sumideroCompleto(int v) {
  boolean res = elArray[v].esVacia();
  for (int i = 0; i < numV && res; i++) {
    if (i != v) {
      boolean llegaArista = false;
      ListaConPI<Adyacente> ady = elArray[i];
      for (ady.inicio(); !ady.esFin(); ady.siguiente())
        if (ady.recuperar().destino == v) {
          llegaArista = true;
          break;
        }
      if (!llegaArista) res = false;
    }
  }
  return res;
}
```

Ejercicio 9

Implementa un método en la clase *Grafo* que compruebe si un vértice es alcanzable desde otro vértice dado.

SOLUCIÓN:

```
public boolean esAlcanzable(int vOrigen, int vDestino) {
  visitados = new int[numVertices()];
  return esAlcanzableRec(vOrigen, vDestino);
}

private boolean esAlcanzableRec(int vActual, int vDestino) {
  if (vActual == vDestino) return true;
  visitados[vActual] = 1;
  ListaConPI<Adyacente> ady = adyacentesDe(vActual);
  for (ady.inicio(); !ady.esFin(); ady.siguiente()) {
    int vSiguiente = ady.recuperar().destino;
    if (visitados[vSiguiente] == 0 && esAlcanzableRec(vSiguiente, vDestino))
       return true;
  }
  return false;
}
```

Ejercicio 10

Un grafo transpuesto T de un grafo G tiene el mismo conjunto de vértices, pero con las direcciones de las aristas en sentido contrario, es decir, que una arista (u, v) en G se corresponde con una arista (v, u) en T.

Diseña un método en la clase *GrafoDirigido* que permita obtener su grafo transpuesto:

```
public GrafoDirigido grafoTranspuesto();
```

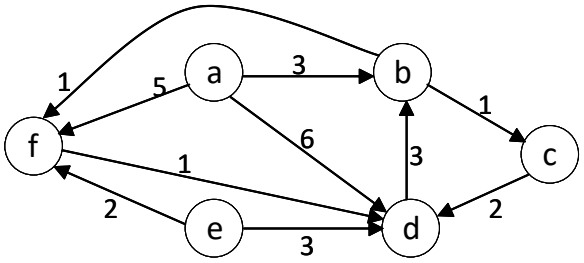
SOLUCIÓN:

```
public GrafoDirigido grafoTranspuesto() {
  GrafoDirigido res = new GrafoDirigido(numV);
  for (int i = 0; i < numV; i++) {
    ListaConPI<Adyacente> ady = elArray[i];
    for (ady.inicio(); !ady.esFin(); ady.siguiente()) {
      Adyacente a = ady.recuperar();
      res.insertarArista(a.destino, i, a.peso);
    }
  }
  return res;
}
```

Ejercicio 11

Los vértices del siguiente grafo representan personas (Ana, Begoña, Carmen, Daniel, Eliseo y Francisco) y las aristas indican si una persona tiene el número de móvil de otra. El peso de una arista es el coste de enviar un SMS (por ejemplo, Ana puede enviar un SMS a Begoña por 3 céntimos).

Haz una traza de Dijkstra para averiguar cuál sería la forma más barata de que Ana le haga llegar un SMS a Francisco.



SOLUCIÓN:

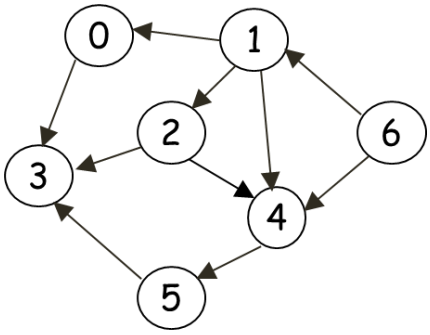
Asumimos que los códigos de los vértices son: a = 0, b = 1, c = 2, d = 3, e = 4, f = 5.

V	qPrior	visitados	distanciaMin	caminoMin
	(0,0)	0 0 0 0 0 0	0 ∞ ∞ ∞ ∞ ∞	-1 -1 -1 -1 -1 -1
0	**(1,3)**,(3,6),(5,5)	1 0 0 0 0 0	0 3 ∞ 6 ∞ 5	-1 0 -1 0 -1 0
1	(3,6),(5,5),**(2,4)**,(5,4)	1 1 0 0 0 0	0 3 4 6 ∞ 4	-1 0 1 0 -1 1
2	(3,6),(5,5),**(5,4)**	1 1 1 0 0 0	0 3 4 6 ∞ 4	-1 0 1 0 -1 1
5	(3,6),(5,5),**(3,5)**	1 1 1 0 0 1	0 3 4 5 ∞ 4	-1 0 1 5 -1 1
3	(3,6),**(5,5)**	1 1 1 1 0 1	0 3 4 5 ∞ 4	-1 0 1 5 -1 1
5	**(3,6)**			
3	∅			

La forma más barata de que Ana le haga llegar un SMS a Francisco es: Ana → Begoña → Francisco.

Ejercicio 12

Siguiendo el método *ordenacionTopologica*, mostrar la ordenación topológica resultante para el siguiente grafo dirigido acíclico:



¿La ordenación obtenida es única? En caso negativo mostrar otra ordenación válida.

SOLUCIÓN:

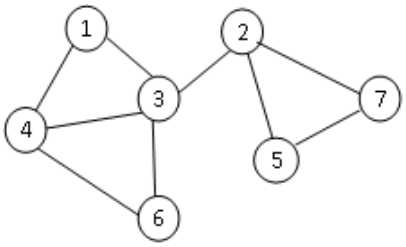
Ordenación obtenida: $6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 0 \rightarrow 3$

No es la única ordenación posible. Ejemplo:

$6 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

Ejercicio 13

En teoría de grafos un puente es una arista tal que si fuese eliminada de un grafo incrementaría el número de componentes conexas de éste. Nótese entonces que un grafo conexo dejaría de serlo si se elimina una arista puente; por ejemplo, la arista (2, 3) del grafo de la siguiente figura es un puente.



Se pide diseñar un método en la clase Grafo que compruebe si una arista (i, j) es una arista puente.

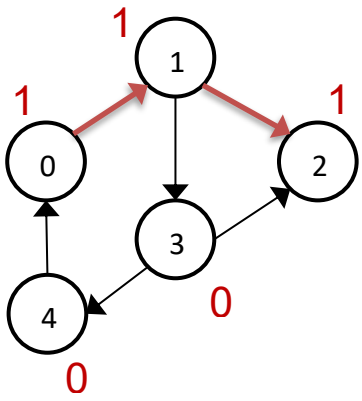
SOLUCIÓN:

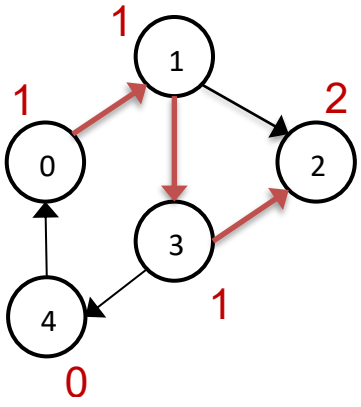
```
public boolean esAristaPuente(int i, int j) {
  visitados = new int[numVertices()];
  return esAristaPuente(i, i, j);
}

protected boolean esAristaPuente(int v, int i, int j) {
  visitados[v] = 1;
  ListaConPI<Adyacente> l = adyacentesDe(v);
  for (l.inicio(); !l.esFin(); l.siguiente()) {
    int w = l.recuperar().destino;
    if (v != i || w != j) { // No es la arista (i,j)
      if (w == j) return false; // Otro camino lleva a j
      if (visitados[w] == 0 && !esAristaPuente(w, i, j))
        return false;
    }
  }
  return true;
}
```

Ejercicio 14

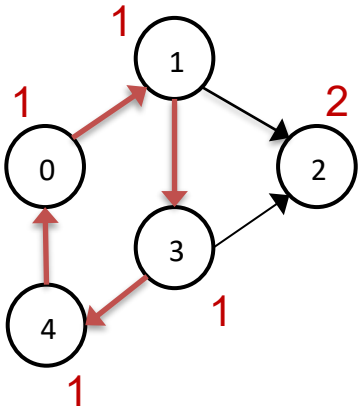
Diseña un método en la clase Grafo que compruebe si el grafo tiene ciclos.

Para ello no basta con saber si un vértice ha sido visitado o no, necesitamos tres posibles estados: **0** (no visitado), **1** (visitado en el camino actual), **2** (visitado por otro camino).





No es un ciclo, el vértice 2 fue visitado por otro camino



Ciclo detectado: una arista vuelve a un vértice visitado en el camino actual

SOLUCIÓN:

```
public boolean tieneCiclos() {
  boolean ciclo = false;
  visitados = new int[numVertices()];
  for (int v = 0; v < numVertices() && !ciclo; v++)
    if (visitados[v] == 0) ciclo = tieneCiclos(v);
  return ciclo;
}

protected boolean tieneCiclos(int v) {
  boolean ciclo = false;
  visitados[v] = 1; // En el camino actual
  ListaConPI<Adyacente> l = adyacentesDe(v);
  for (l.inicio(); !l.esFin() && !ciclo; l.siguiente()) {
    int w = l.recuperar().destino;
    if (visitados[w] == 0) ciclo = tieneCiclos(w);
    else if (visitados[w] == 1) ciclo = true;
  }
  visitados[v] = 2; // Visitado por otro camino
  return ciclo;
}
```