DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Segundo parcial **14-01-2015** **Duración: 2 horas**

Nombre: **Grupo:**

1.(2p) Demuestra que las sucesiones a_n y b_n tienen el mismo orden de magnitud

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^5 + ... + \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n+2}, \\ b_n &= n. \end{aligned}$$

Para comparar el orden de magnitud de dos sucesiones tenemos que calcular el límite del cociente de ambas sucesiones. Si tienen el mismo orden de magnitud, el límite del cociente será una constante. Vamos a comprobarlo:

$$\text{lím}\, \frac{a_n}{b_n} = \text{lím}\, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 + ... + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}}{n} = \textit{(Stolz)} =$$

$$\text{lím}\, \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 + ... + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} + \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 + ... + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}\right)}{(n+1)-n} =$$

$$\text{lím}\, \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}}{1} = \text{lím}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = \textit{(Fórmula de Euler)} = e^{\underbrace{\text{lím}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)\cdot(n+3)}_{(*)}}$$

calculamos el límite de (*):

$$\text{lím}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)\cdot(n+3) = \text{lím}\, \frac{n+1-n-2}{n+2}\cdot(n+3) = \text{lím}\, \frac{-1\cdot(n+3)}{n+2} = \text{lím}\, \frac{-n-3}{n+2} = -1,$$

sustituimos en (*)

$$e^{\text{lím}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)\cdot(n+3)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Efectivamente, el valor del límite del cociente es una constante, por lo tanto ambas sucesiones son del mismo orden de magnitud.

2.(3p) Considera la recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2^n \\ a_1 = 4 \quad , \quad a_2 = 0. \end{cases}$$

a) (0.5p) A partir de la definición anterior, calcula a_3 y a_4.

b) (2p) Determina la solución explícita de la recurrencia.

c) (0.5p) ¿Qué sucesión exponencial tiene el mismo orden de magnitud que a_n? Justifícalo.

---

a) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2^n$, para $n = 3$ calculamos a_3 utilizando a_1 y a_2:

$$a_3 = 2a_2 + 3a_1 + 2^3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 2^3 = 20,$$

con la misma fórmula $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2^n$, para $n = 4$ calculamos a_4 utilizando a_2 y a_3:

$$a_4 = 2a_3 + 3a_2 + 2^4 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 0 + 2^4 = 56.$$

b) Primero vamos a resolver el problema homogéneo:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2},$$

la ecuación característica asociada a la recurrencia es:

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

que tiene dos raíces reales distintas $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$. Por tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$a_n^h = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Por otro lado, una solución particular de la recurrencia completa será:

$$U_n^p = k \cdot 2^n.$$

Sustituyéndola en la ecuación completa podemos obtener el valor de k:

$$k \cdot 2^n = 2k \cdot 2^{n-1} + 3k \cdot 2^{n-2} + 2^n,$$

dividiendo entre 2^{n-2} en ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$k \cdot 2^2 = 2k \cdot 2^1 + 3k + 2^2$$

por lo que $k = -\frac{4}{3}$. Con esto la solución de la ecuación completa nos queda:

$$a_n = C_1 \cdot (-1)^n + C_2 \cdot 3^n - \frac{4}{3} 2^n.$$

Ahora utilizamos las condiciones de contorno para encontrar el valor de las constantes C_1 y C_2:

$$\textit{para n=1} \;\Rightarrow\; a_1 = C_1 \cdot (-1)^1 + C_2 \cdot 3^1 - \frac{4}{3} 2^1 = 4 \;\Rightarrow -C_1 + 3 \cdot C_2 = \frac{20}{3},$$

$$\textit{para n=2} \;\Rightarrow\; a_2 = C_1 \cdot (-1)^2 + C_2 \cdot 3^2 - \frac{4}{3} 2^2 = 0 \;\Rightarrow C_1 + 9 \cdot C_2 = \frac{16}{3}.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos: $C_1 = -\frac{11}{3}$ y $C_2 = 1$ con lo que la solución es:

$$a_n = -\frac{11}{3}(-1)^n + 3^n - \frac{4}{3} 2^n = \frac{1}{3}\left(3^{n+1} - 2^{n+2} + 11 \cdot (-1)^{n+1}\right)$$

c) Como $2^n \ll 3^n$ y $(-1)^n \ll 3^n$ podemos concluir que $a_n \approx 3^n$, por lo tanto cualquier sucesión de la forma $b_n = K \cdot 3^n$ donde K es una constante tendrá el mismo orden de magnitud que a_n.

---

3. (2p) Para la serie telescópica

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$$

Halla la sucesión de sumas parciales s_N y a partir de ahí calcula el valor de la suma exacta.

Calculamos primero la suma parcial N-ésima:

$$s_N = \sum_{n=3}^{N} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) = \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)}_{n=3} - \underbrace{\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right)}_{n=4} + ...$$

$$+ \underbrace{(-1)^N \left(\frac{1}{2(N-1)-1} + \frac{1}{2(N-1)+1} \right)}_{n=N-1} + \underbrace{(-1)^{N+1} \left(\frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N+1} \right)}_{n=N} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)}_{n=3} - \underbrace{\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right)}_{n=4} + ... + \underbrace{(-1)^N \left(\frac{1}{2N-3} + \frac{1}{2N-1} \right)}_{n=N-1} + \underbrace{(-1)^{N+1} \left(\frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N+1} \right)}_{n=N} =$$

simplificando:

$$s_N = \frac{1}{5} + (-1)^{N+1} \frac{1}{2N+1}$$

tomamos el límite cuando N tiende a infinito de s_N y calculamos así el valor de la suma exacta:

$$\lim s_N = \lim \left(\frac{1}{5} + (-1)^{N+1} \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{5}$$

donde hemos tenido en cuenta que el $\lim \frac{1}{2N+1} = 0$, independientemente de que N sea par o impar.

---

4. (3p) Considera la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n} \cdot x^n$$

a) (1p) Para $x = \frac{-1}{8}$ aproxima la suma exacta por la suma parcial N-ésima de forma que el error de s_N sea menor que 10^{-2}.

b) (1p) Deriva la serie de potencias y calcula el valor de $f'(x)$ explícitamente donde sea convergente.

c) (0.5p) Integra el resultado anterior para obtener el valor explícito de $f(x)$.

d) (0.5p) Calcula el valor exacto de $f\left(\frac{-1}{8}\right)$ y compáralo con la aproximación de a).

---

a)

$$f\left(\frac{-1}{8}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n} \cdot \left(\frac{-1}{8}\right)^n =$$

simplificamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^2)^n \cdot (-1)^n}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n \cdot 8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$$

es una serie alternada, y cumple las condiciones de Leibniz. Por lo tanto podemos calcular cuantos términos necesitamos utilizar para obtener una suma parcial con un error menor que 10^{-2}. Sabemos que el error siempre es menor que el valor absoluto del primer término que no utililizamos en la aproximación. Supongamos que hacemos la suma hasta el término N, entonces:

$$E_N < \left| \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1) \cdot 2^{N+1}} \right| = \frac{1}{(N+1) \cdot 2^{N+1}}$$

queremos que $E_N < 10^{-2}$ por tanto:

$$E_N < \frac{1}{(N+1) \cdot 2^{N+1}} < 10^{-2}$$

Resolvemos la ecuación dandole valores a N:
para $N = 1$:

$$E_1 < \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8} = 0.125,$$

para $N = 2$:

$$E_2 < \frac{1}{3 \cdot 2^3} = \frac{1}{24} = 0.0416667,$$

para $N = 3$:

$$E_3 < \frac{1}{4 \cdot 2^4} = \frac{1}{64} = 0.015625,$$

para $N = 4$:

$$E_4 < \frac{1}{5 \cdot 2^5} = \frac{1}{160} = 0.00625 < 10^{-2},$$

por lo tanto necesitamos sumar 4 términos para asegurar la precisión deseada.

$$s_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64} = \frac{-77}{192} = -0.40 \pm 10^{-2}$$

b) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n} \cdot x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n} \cdot \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \cdot x^{n-1} =$$

vamos a utilizar la fórmula de la suma de la serie geométrica, por eso vamos a hacer algunas simplificaciones para ver cual es la razón de la serie:

$$= 2^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^{n-1} \cdot x^{n-1} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (4 \cdot x)^{n-1} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot x)^n$$

es la serie geométrica de razón $r = 4x$, es convergente para $|r| < 1$, por lo tanto:

$$|4x| < 1 \ \rightarrow \ |x| < \frac{1}{4}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4 \cdot \left(\frac{1}{1-4x}\right) = \frac{4}{1-4x} & si\ |x| < \frac{1}{4}. \\ \\ divergente & si\ |x| \geq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{4}{1-4x}dx = -\log(1-4x) + C.$$

La integral anterior es inmediata, si no lo ves claro prueba a hacer el cambio de variable $t = 1 - 4x$. Calculamos el valor de la constante calculando $f(0)$:

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n} \cdot 0^n = 0$$

por lo tanto:

$$f(0) = -\log(1) + C = 0 \ \rightarrow \ C = 0$$

y

$$f(x) = -\log(1-4x) = \log\left(\frac{1}{1-4x}\right)$$

d) Utilizando la fórmula anterior:

$$f\left(\frac{-1}{8}\right) = \log\left(\frac{1}{1-4\left(\frac{-1}{8}\right)}\right) = \log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right) = -0.405$$

Podemos comprobar que el resultado esta comprendido dentro de la cota de error encontrada en el apartado a), $f\left(\frac{-1}{8}\right) = 0.40 \pm 10^{-2}$.