Nombre y apellidos:
Grupo:

Examen de Álgebra (primer parcial)

3 de abril de 2017

Duración: 1 hora y 45 minutos

Cuestión 1 (3.5 pt.) A una matriz A, de tamaño 3×5, le hemos efectuado, en el orden que se indica, las siguientes operaciones elementales por filas:

(1) a la segunda fila le hemos restado 3 veces la primera,

(2) a la tercera fila le hemos restado la primera,

(3) a la segunda fila le hemos sumado la tercera,

(4) hemos multiplicado la tercera fila por 3,

obteniendo como resultado la siguiente matriz: $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Calcula (explícitamente) una matriz T tal que $\mathsf{TA} = \mathsf{B}$.

(b) ¿Es T una matriz invertible? Razona la respuesta y, en caso afirmativo, calcula explícitamente la matriz inversa T^{-1} (sin usar determinantes) y escríbela como producto de matrices elementales.

(c) Calcula la forma escalonada reducida de B.

(d) ¿Cuál es la forma escalonada reducida de A? Razona la respuesta.

(e) Calcula (sin usar determinantes) el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es A.

Solución:

(a) Teniendo en cuenta las operaciones elementales realizadas a la matriz A para obtener B, se tiene que

$$\mathsf{E}_3(3)\mathsf{E}_{23}(1)\mathsf{E}_{31}(-1)\mathsf{E}_{21}(-3)\mathsf{A} = \mathsf{B}.$$

Luego:

$$\mathsf{T} = \mathsf{E}_3(3)\mathsf{E}_{23}(1)\mathsf{E}_{31}(-1)\mathsf{E}_{21}(-3) = \mathsf{E}_3(3)\mathsf{E}_{23}(1)\mathsf{E}_{31}(-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{E}_3(3)\mathsf{E}_{23}(1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\mathsf{E}_3(3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) T es una matriz invertible porque es producto de matrices elementales (que son invertibles).

$$\mathsf{T}^{-1} = (\mathsf{E}_3(3)\mathsf{E}_{23}(1)\mathsf{E}_{31}(-1)\mathsf{E}_{21}(-3))^{-1} = \mathsf{E}_{21}(-3)^{-1}\mathsf{E}_{31}(-1)^{-1}\mathsf{E}_{23}(1)^{-1}\mathsf{E}_3(3)^{-1} =$$

$$\mathsf{E}_{21}(3)\mathsf{E}_{31}(1)\mathsf{E}_{23}(-1)\mathsf{E}_3(1/3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

La penúltima igualdad nos da la descomposición de T^{-1} como producto de matrices elementales y la última la expresión explícita de T^{-1} (que puede calcularse procediendo como en el apartado (a)).

(c) Para calcular la forma escalonada reducida de B realizamos sobre ella las siguientes operaciones elementales:

$$\mathsf{B} \xrightarrow{\mathsf{E}_3(1/3)} [\cdots] \xrightarrow{\mathsf{E}_{12}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Como A es equivalente por filas a B, tiene la misma forma escalonada reducida que B (ya calculada en el apartado anterior).

(e) Haciendo uso de la forma escalonada reducida de A, ya calculada, podemos obtener fácilmente el conjunto de soluciones del sistema. Si x, y, z, t son las indeterminadas:

$$\{(3,2,0,2) + \alpha(0,0,1,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Cuestión 2 (3.5 pt.) (a) (1.5) Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro (sin utilizar determinantes):

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a^2 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (1) Calcula el núcleo de la matriz A para los valores $a = 0$ y $a = 2$.

(c) (1) Para $a = 2$, calcula una factorización LU de A.

Solución:

(a)

$$\mathsf{E}_{21}(1)\mathsf{E}_{31}(-a)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a^2 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & (a-1)(a+1) & 0 \\ 0 & 1+a & -2a \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Si asumimos $a \neq 1$ podemos restarle, a la tercera fila, la segunda dividida entre $a - 1$. Tendremos, entonces:

$$\mathsf{E}_{32}(-1/(a-1))\mathsf{E}_{21}(1)\mathsf{E}_{31}(-a)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a^2 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & (a-1)(a+1) & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{bmatrix}$$

Distinguimos 4 casos:

1. Si $a \notin \{0, -1, 1\}$ entonces el rango de A es 3.
2. Si $a = 0$ entonces A es equivalente por filas a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuyo rango es claramente 2.

3. Si $a = -1$ entonces A es equivalente por filas a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Intercambiando la segunda y la tercera filas obtenemos una matriz escalonada con dos elementos principales (pivotes). Por tanto, el rango es 2.

4. Si $a = 1$ entonces (sustituyendo a por 1 en (1)) se tiene que A es equivalente por filas a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Intercambiando las dos últimas filas vemos que el rango también es 2 en este caso.

Por tanto, el rango es 2 para $a \in \{0, -1, 1\}$ y 3 en otro caso.

(b) El núcleo de A es el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathsf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Si $a = 0$, es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo dado por las ecuaciones $x - y + 2z = 0$, $-y = 0$, que es

$$\{(-2\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Si $a = 2$ entonces el núcleo es $\{(0, 0, 0)\}$, pues A es una matriz cuadrada de rango máximo.

(c) Para $a = 2$ hemos visto en el apartado anterior que

$$\mathsf{E}_{32}(-1)\mathsf{E}_{21}(1)\mathsf{E}_{31}(-2)\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \mathsf{U}.$$

Luego $\mathsf{A} = \mathsf{L}\mathsf{U}$, donde

$$\mathsf{L} = (\mathsf{E}_{32}(-1)\mathsf{E}_{21}(1)\mathsf{E}_{31}(-2))^{-1} = \mathsf{E}_{31}(2)\mathsf{E}_{21}(-1)\mathsf{E}_{32}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y $\mathsf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Cuestión 3 (1 pt.) Sea J la matriz cuadrada de orden 100 integrada completamente por elementos iguales a 1.

(a) Calcula J^2.

(b) Demuestra que
$$(\mathsf{I}-\mathsf{J})^{-1}=\mathsf{I}-\frac{1}{99}\mathsf{J},$$
siendo I la matriz identidad de orden 100.

Solución:

(a) $\mathsf{J}^2 = 100\,\mathsf{J}$.

(b) Aplicando la propiedad distributiva del producto matricial y el apartado (a) obtenemos:
$$(\mathsf{I}-\mathsf{J})\left(\mathsf{I}-\frac{1}{99}\mathsf{J}\right)=\mathsf{I}-\frac{1}{99}\mathsf{J}-\mathsf{J}+\frac{1}{99}\mathsf{J}^2=\mathsf{I}-\frac{1}{99}\mathsf{J}-\mathsf{J}+\frac{100}{99}\mathsf{J}=\mathsf{I}.$$
Por lo tanto $\mathsf{I}-\mathsf{J}$ es invertible y su inversa es $\mathsf{I}-\frac{1}{99}\mathsf{J}$.

Cuestión 4 (1 pt.) Sea P una matriz $n\times 1$ tal que $\mathsf{P}^t\mathsf{P}=1$ y sea $\mathsf{H}=\mathsf{I}-2\mathsf{P}\mathsf{P}^t$, siendo I la matriz identidad de orden n.

(a) Demuestra que H es simétrica.

(b) Demuestra que H es ortogonal.

Solución:

(a) $\mathsf{H}^t=(\mathsf{I}-2\mathsf{P}\mathsf{P}^t)^t=\mathsf{I}^t-2\left(\mathsf{P}\mathsf{P}^t\right)^t=\mathsf{I}-2(\mathsf{P}^t)^tP^t=\mathsf{I}-2\mathsf{P}\mathsf{P}^t=\mathsf{H}$. Luego H es simétrica.

(b) Aplicando el apartado anterior:
$$\mathsf{H}\,\mathsf{H}^t=\mathsf{H}^2=\mathsf{I}-4\mathsf{P}\,\mathsf{P}^t+4(\mathsf{P}\,\mathsf{P}^t)^2=\mathsf{I}-4\mathsf{P}\,\mathsf{P}^t+4(\mathsf{P}\,\mathsf{P}^t)(\mathsf{P}\,\mathsf{P}^t)=\mathsf{I}-4\mathsf{P}\,\mathsf{P}^t+4\mathsf{P}\,\underbrace{(\,\mathsf{P}^t\,\mathsf{P}\,)}_{1}\,\mathsf{P}^t=\mathsf{I}.$$
Por tanto, H es ortogonal.

Cuestión 5 (1 pt.) (a) Escribe la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema de 5 ecuaciones lineales con 4 incógnitas cuyo conjunto de soluciones es
$$\{(3-5\beta,\beta,0,\beta)\mid\beta\in\mathbb{R}\}.$$

(b) Indica si la siguiente afirmación es cierta: «si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son dos soluciones cualesquiera del sistema de ecuaciones del apartado (a), entonces $\vec{x}+\vec{y}$ es también una solución». En caso de ser cierta demuéstrala y, en caso de ser falsa, proporciona un contraejemplo.

Solución:

(a) Consideremos las incógnitas x,y,z,t. El enunciado nos proporciona las ecuaciones paramétricas del conjunto de soluciones: $x=3-5\beta$, $y=\beta$, $z=0$, $t=\beta$, con $\beta\in\mathbb{R}$. Considerando la variable t como variable libre, podemos escribir todas las otras variables en función de t: $x=3-5t$, $y=t$, $z=0$. Esto da lugar a un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada (que es escalonada reducida) es:
$$\begin{bmatrix}1&0&0&5&3\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

(b) La afirmación no es cierta. Veamos un contraejemplo: $\vec{x}_1=(3,0,0,0)$ y $\vec{x}_2=(-2,1,0,1)$ son soluciones del sistema (obtenidas asignando al parámetro β los valores 0 y 1). Sin embargo $\vec{x}_1+\vec{x}_2=(1,1,0,1)$ no es solución.