Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 12
Robert Fuster

Exercici 12.1. *Estudieu si els conjunts de vectors següents són subespais de l'espai $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ o si no ho són. Descriviu geomètricament aquests conjunts.*

(a) $F_1 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$

(b) $F_2 = \{(a - b, 2a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

(c) $F_3 = \{(a - b, b - c, c - a) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(d) $F_4 = \{(a + 1, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$

(e) $F_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 1\}$

(f) $F_6 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

(g) $F_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$

(h) $F_8 = \{(1, 2, 0), (0, -1, 1)\}$

(a) F_1 és un subespai de $\mathbb{R}^2$, perquè és una recta que passa per l'origen. Es tracta de l'eix d'abscises $y = 0$.

Es pot provar que és un subespai observant que el vector $\vec{0} = (0, 0)$ és un element de F_1 i que, si $(a_1, 0)$ i $(a_2, 0)$ són dos vectors qualssevol de F_1, llavors la combinació lineal

$$\alpha_1(a_1, 0) + \alpha_2(a_2, 0) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, 0)$$

també és a F_1.

(b) F_2 també és subespai de $\mathbb{R}^2$: com que $(0, 0) = (0 - 0, 2 \cdot 0 + 0)$, el vector nul hi és; d'altra banda, fent una combinació lineal amb dos vectors arbitraris de F_2 tindrem

$$\alpha_1(a_1 - b_1, 2a_1 + b_1) + \alpha_2(a_2 - b_2, 2a_2 + b_2) = \\ \Big((\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) - (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2), 2(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)\Big) \in F_2$$

En realitat, $F_2 = \mathbb{R}^2$, perquè $(a - b, 2a + b) = a(1, 2) + b(-1, 1)$, així que es tracta del conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $(1, 2)$ i $b(-1, 1)$.

(c) F_3 és un subespai de $\mathbb{R}^3$. Com que

$$(a - b, b - c, c - a) = a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(0, -1, 1)$$

resulta que F_3 és el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $(1, 0, -1)$, $(-1, 1, 0)$ i $(0, -1, 1)$; però, com que $(0, -1, 1) = -(1, 0, -1) - (-1, 1, 0)$, podem expressar els vectors de F_3 com a combinacions lineals de, només, els dos primers vectors. Així, F_3 és un pla.

(d) F_4 no és un subespai, perquè $(0, 0, 0) \notin F_4$.

F_4 és la recta que passa pels punts $(1, 0, 0)$ i $(0, -1, 0)$.

(e) F_5 no és un subespai de $\mathbb{R}^3$, perquè $(0, 0, 0) \notin F_5$. Resolent el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

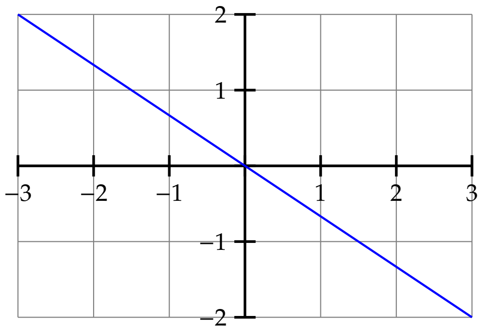
obtenim $x_1 = 1 + \alpha$, $x_2 = 1 + \alpha$, $x_3 = \alpha$, així que es tracta de la recta que passa pel punt $(1, 1, 0)$ i té per vector director $(1, 1, 1)$.

(f) F_6 no és un subespai de $\mathbb{R}^3$, perquè el vector $\vec{u} = (1, 2)$ hi és però $-\vec{u} = (-1, -2)$, no. És un semiplà.

(g) F_7 és un subespai de $\mathbb{R}^3$. Es tracta de la recta que passa per l'origen amb vector director $(1, 1, 1)$.

(h) F_8 no és un subespai de $\mathbb{R}^3$, per exemple, perquè el vector zero no hi pertany. Tret del subespai zero, tots els subespais de $\mathbb{R}^n$ tenen un nombre infinit d'elements (i aquest conjunt només en té dos).

Exercici 12.2. *Proveu que el conjunt* $F = \{(2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$ *és un subespai de* $\mathbb{R}^2$*, representeu-lo gràficament i descriviu-lo (1) com el conjunt de totes les combinacions lineals d'un vector, (2) com la solució general d'una equació lineal, i (3) com el conjunt de tots els vectors ortogonals a un vector.*



Es tracta d'un subespai perquè és la recta que passa per l'origen amb vector director $(2, 3)$.

(1) F és el conjunt de totes les combinacions lineals del vector $(2, 3)$.

(2) F és el conjunt de totes les solucions de l'equació $-3x_1 + 2x_2 = 0$.

(3) F és el conjunt de tots els vectors ortogonals al vector $(-3, 2)$.

Exercici 12.3. *Proveu que els conjunts següents són subespais de* $\mathbb{R}^3$ *i descriviu-los (1) com el conjunt de totes les combinacions lineals d'un conjunt de vectors, (2) com la solució general d'un sistema d'equacions lineals, i (3) com el conjunt de tots els vectors ortogonals a un conjunt de vectors.*

(a) $F_1 = \{(a, 2a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$ (b) $F_2 = \{(a, a+b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

F_1 i F_2 són una recta i un pla que contenen l'origen; per tant, són subespais de $\mathbb{R}^3$.

(1) F_1 és el conjunt de totes les combinacions lineals de $S_1 = \{(1, 2, 3)\}$

F_2 és el conjunt de totes les combinacions lineals de $S_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

(2) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 = 0; 3x_1 - x_3 = 0\}$

$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

(3) $F_1 = \{(2, -1, 0), (3, 0, -1)\}^\perp$

$F_2 = \{(1, -1, 1)\}^\perp$

Exercici 12.4. *Trobeu una base de cadascun dels subespais de* $\mathbb{R}^4$ *següents*

(a) $F = \{(a - b, b - c, c - d, d - a) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

(b) $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0; x_3 + x_4 = 0\}$

(a) Com que

$$(a-b, b-c, c-d, d-a) = a(1,0,0,-1) + b(-1,1,0,0) + c(0,-1,1,0) + d(0,0,-1,1)$$

el conjunt $S = \{(1,0,0,-1),(-1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1,1)\}$ genera el subespai F. D'altra banda, una forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\mathsf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de manera que els tres vectors són independent, però el quart n'és combinació lineal. En conseqüència,

$$B = \{(1,0,0,-1),(-1,1,0,0),(0,-1,1,0)\}$$

és una base de F.

(b) És fàcil veure que

$$B = \{(1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$$

és una base de G.

Exercici 12.5. *Trobeu bases dels subespais següents:*

(a) $\langle(1,1,0),(2,-1,1),(3,0,1)\rangle$ (b) $\langle(1,1,0),(2,-1,1),(3,0,0)\rangle$

(a) Esglaonem la matriu formada pels tres vectors:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Així que el tercer vector és combinació lineal dels dos primers. Per tant, la base que cerquem és

$$B = \{(1,1,0),(2,-1,1)\}$$

(b) El rang de la matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és tres, així que podem triar el conjunt

$$B = \{(1,1,0),(2,-1,1),(3,0,0)\}$$

com a base de G.

Exercici 12.6. *Siga S un subconjunt no buit de $\mathbb{R}^n$. Proveu que*

(a) $\langle S\rangle$ és un subespai de $\mathbb{R}^n$

(b) si F és un subespai de $\mathbb{R}^n$ i $S \subset F$, llavors $\langle S\rangle \subset F$.

(a) Si $\vec{u}$ és un vector de S, llavors $\vec{0} = 0\vec{u}$, així que el vector zero és combinació lineal dels vectors de S. D'altra banda, si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són elements de $\langle S\rangle$, com que tots dos són combinacions lineals dels elements de S és clar que una combinació lineal de $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ també ho serà.

Això prova que $\langle S\rangle$ és un subespai.

(b) Si F conté S, com que F és subespai, també contindrà totes les combinacions lineals que es puguen fer amb els elements de S; és a dir, $\langle S\rangle \subset F$.

Exercici 12.7. *És evident que, si el vector $\vec{u}$ no és un element de S, llavors $\langle S\rangle \subset \langle S \cup \{\vec{u}\}\rangle$. Poden ser iguals, $\langle S\rangle$ i $\langle S \cup \{\vec{u}\}\rangle$? En cas afirmatiu, quina condició s'ha de complir perquè no ho siguen?*

La condició necessària i suficient perquè $\langle S\rangle = \langle S \cup \{\vec{u}\}\rangle$ és que $\vec{u}$ siga una combinació lineal dels vectors de S.

Exercici 12.8. ***(Canvi de base en un subespai)***
(a) Proveu que els dos conjunts $B_1 = \{(1,1,1),(1,-1,0)\}$ i $B_2 = \{(2,0,1),(0,2,1)\}$ són bases del subespai de $\mathbb{R}^3$ $F = \{(x+y, x-y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$. (b) Comproveu que el vector $\vec{u} = (3,1,2)$ és un element de F i calculeu les coordenades de $\vec{u}$ respecte a cadascuna d'aquestes bases. (c) Trobeu una matriu $\mathsf{M}_{B_1B_2}$ de manera que, per a qualsevol vector $\vec{v} \in F$, $\vec{v}_{B_2} = \mathsf{M}_{B_1B_2}\vec{v}_{B_1}$. d) Comproveu amb el vector $\vec{u}$ el resultat que heu obtingut.

(a) Els dos conjunts B_1 i B_2 són, clarament, linealment independents. D'altra banda, un vector qualsevol de F es pot escriure com

$$(x+y, x-y, x) = x(1,1,1) + y(1,-1,0)$$

de manera que B_1 genera F (i n'és base). Per a provar que B_2 també genera F bastarà que provem que els dos vectors de B_1 són combinacions lineals dels de B_2, és a dir que el sistemes lineals

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

són compatibles. Parò això és cert perquè

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Això prova que B_2 també és base de F.

(b) Aquest vector és un element de F perquè

$$(3,1,2) = 2(1,1,1) + (1,-1,0)$$

la qual cosa també prova que $\vec{u}_{B_1} = (2,1)$.
Per a calcular les coordenades de $\vec{u}$ respecte la base B_2 resolem el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{u}_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solució que s'hi obté és

$$\vec{u}_{B_2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(c) Per a qualsevol vector $\vec{v} \in F$ tenim les igualtats

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2}$$

Per tant,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1}$$

Per a aïllar $\vec{v}_{B_2}$ en aquesta igualtat hi podem fer servir l'algorisme de Gauss-Jordan!:

$$\mathsf{E}_{3,1}(-1/2) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2} = \mathsf{E}_{3,1}(-1/2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1}$$

$$\mathsf{E}_{3,2}(-1/2) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2} = \mathsf{E}_{3,2}(-1/2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1}$$

Aquesta darrera expressió és equivalent a

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1}$$

així que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1}$$

És a dir,

$$\vec{v}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \vec{v}_{B_1}$$

i la matriu que cercàvem és

$$\boxed{\mathsf{M}_{B_1 B_2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}$$

(d)

$$\mathsf{M}_{B_1 B_2} \vec{u}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \vec{u}_{B_2}$$