Matemática Discreta **11 de enero de 2019**
Segundo parcial **2 horas**

Apellidos:	**Grupo:**
Nombre:	

Cuestión 1 (2 pt) (a) Resuelve, si es posible, la ecuación en congruencias $234x \equiv 6 \pmod{366}$.

Solución: La ecuación tiene soluciones, ya que el máximo común divisor de 234 y 366 es 6, y 6 también es divisor de 6. Por este motivo, podemos simplificarla dividiendo entre 6, con lo cual obtenemos la ecuación transformada $39x \equiv 1 \pmod{61}$.

Comenzamos aplicando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{r|l} 61 & 39 \\ \hline 22 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 39 & 22 \\ \hline 17 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 22 & 17 \\ \hline 5 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

La solución de la ecuación es $x = (-1)^{n-1} P_{n-1} b \pmod{61}$, donde $n = 6$, $b = 1$ y P_{n-1} se obtiene aplicando el algoritmo siguiente:

k	0	1	2	3	4	5	6
q_k		1	1	1	3	2	2
P_k	1	1	2	3	11	$\boxed{25}$	61

Por tanto la solución será

$$x = (-1)^{n-1} P_{n-1} b \pmod{61}$$
$$x = (-1)^5 \cdot 25 \cdot 1 \pmod{61}$$
$$x = -25 \pmod{61} = 36 \pmod{61}$$

Las soluciones de la ecuación original serán entonces (sumando a la solución obtenida el módulo de la ecuación transformada, es decir, 61):

$$x \equiv 36 \pmod{366} \qquad x \equiv 97 \pmod{366} \qquad x \equiv 158 \pmod{366}$$

$$x \equiv 219 \pmod{366} \qquad x \equiv 280 \pmod{366} \qquad x \equiv 341 \pmod{366}$$

(b) Calcula $\overline{73} \cdot \overline{65} + \overline{39}^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{61}$.

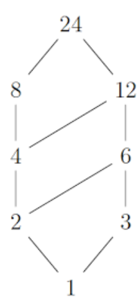
Solución:

Por el apartado anterior, sabemos que $39^{-1} \pmod{61}$=$36 \pmod{61}$. Por tanto

$$73 \cdot 65 + 39^{-1} \pmod{61} = 12 \cdot 4 + 36 \pmod{61} = 48 + 36 \pmod{61} = 84 \pmod{61} = 23 \pmod{61}$$

Cuestión 2 (2.5 pt) Consideremos el retículo D_{24} de los divisores naturales de 24, con la relación de divisibilidad.

(a) Dibuja el correspondiente diagrama de Hasse.



(b) Calcula los elementos de D_{24} que tengan complementario.

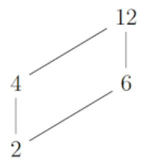
Solución: Los únicos elementos que tienen complementario son $\overline{1} = 24, \overline{24} = 1, \overline{3} = 8$ y $\overline{8} = 3$.

(c) ¿Es un álgebra de Boole? ¿Por qué?

Solución: No es un álgebra de Boole, ya que no todo elemento tiene complementario. Observemos además que $24 = 2^3 \cdot 3$, luego no es libre de cuadrados.

(d) Calcula, si existen, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo del subconjunto $B = \{2, 4, 6, 12\}$ en D_{24}.

Solución: En primer lugar el diagrama de Hasse de B es:



Las cotas superiores de B en D_{24} son $\{12, 24\}$, y por tanto el supremo de B en D_{24} es 12. De forma análoga las cotas inferiores serán $\{1, 2\}$, y el ínfimo será 2.

(e) ¿Es B un álgebra de Boole? Justifica tu respuesta.

Solución: En este caso, sí que se trata de un Álgebra de Boole. Podemos ver claramente que se trata de un retículo. Es acotado, el máximo es 12 y el mínimo 2. Además todo elemento está complementado, $\overline{2} = 12, \overline{12} = 2, \overline{4} = 6, \overline{6} = 4$, y es distributivo puesto que en todas las ternas de elementos de B, o hay dos elementos repetidos, o uno de ellos es el máximo o el mínimo. Otra forma de verlo, sería darnos cuenta de que tiene la misma estructura que el retículo de divisores del 6 y, por tanto, sería retículo de Boole.

Cuestión 3 (2 pt) (a) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se define la siguiente relación binaria

$$aRb \leftrightarrow a \neq b$$

Justifica cuáles de las propiedades siguientes cumple: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva.

Solución:

Reflexiva: No es reflexiva, ya que $\forall a \in \mathbb{N}\ a = a$.

Simétrica: Es simétrica, ya que si aRb, entonces $a \neq b$, luego $b \neq a$ y bRa.

Antisimètrica: No es antisimétrica, por ejemplo $2R3$ y $3R2$ y $2 \neq 3$.

Transitiva: No es transitiva, por ejemplo $2R3$ y $3R2$, pero 2 no está relacionado con 2.

(b) En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dos elementos están relacionados, aRb, si y sólo si el producto $a \cdot b$ es el cuadrado de algún número entero. ¿Es R una relación binaria de equivalencia? En caso afirmativo, calcula las clases de equivalencia de los elementos de A y el conjunto cociente correspondiente.

Solución: Vamos a calcular el grafo de la relación:

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (1, 4), (4, 1), (1, 9), (9, 1), (2, 8), (8, 2), (4, 9), (9, 4)\}$

Como podemos comprobar en el grafo la relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por tanto es una relación binaria de equivalencia.

Las clases de equivalencia son:

$$\begin{aligned}
\overline{1} &= \{1, 4, 9\} = \overline{4} = \overline{9} \\
\overline{2} &= \overline{8} = \{2, 8\} \\
\overline{3} &= \{3\} \\
\overline{5} &= \{5\} \\
\overline{6} &= \{6\} \\
\overline{7} &= \{7\}
\end{aligned}$$

Y, el conjunto cociente, $A_{\mathcal{R}} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\} = \Big\{\{1, 4, 9\}, \{2, 8\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}\Big\}$.

Cuestión 4 (2 pt) (a) Simplifica, especificando las propiedades del álgebra de Boole que utilizas, la siguiente función booleana:

$$f(x,y,z) = \bar{x} + (\overline{(y+z)} \cdot \overline{(x+y+z)})$$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x} + \overline{(y+z)} \cdot \overline{(x+y+z)} & \\ &= \bar{x} + \bar{y}\bar{z}\bar{x}\bar{y}\bar{z} & \text{Leyes de De Morgan} \\ &= \bar{x} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} & \text{Idempotencia} \\ &= \bar{x} & \text{Simplificativa} \end{aligned}$$

(b) Calcula la forma más simplificada de la siguiente función booleana mediante el método de Quine-McCluskey. Si hay más de una, escríbelas todas.

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

Solución:

Método de Quine:

Número de unos	T. minimals	1a comparación	2a comparación
0	000*	0-0	No hay
1	010*	-10	
2	101* 110*	1-1 11-	
3	111*		

Simplificación: $f(x,y,z) = \bar{x}\bar{z} + y\bar{z} + xz + xy$. Rejilla de McCluskey:

	0 0 0	0 1 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
0 − 0	$\boxed{\text{X}}$	X			
− 1 0		X		X	
1 − 1			$\boxed{\text{X}}$		X
1 1 −				X	X

Como en las columnas primera y tercera hay una única marca, los implicantes primos $\bar{x}\bar{z}$ y xz son esenciales. Por otro lado, con estos dos implicantes primos, solamente nos quedaría un término minimal por cubrir, el $xy\bar{z}$. Para ello podemos utilizar o bien el implicante primo $y\bar{z}$, o bien el xy. Por tanto tenemos dos posibles simplificaciones:

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{z} + xz + y\bar{z}$
$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{z} + xz + xy$

Cuestión 5 (1.5 pt) (a) Dado el conjunto $A = \{a, b, c, 8, 13\}$, completa la relación binaria en A definida por el grafo $R = \{(a,b),(b,c),(8,13)\}$, con el menor número de elementos posible, para que sea de equivalencia.

Solución: $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(8,8),(13,13),(a,b),(b,c),(8,13),(b,a),(c,b),(13,8),(a,c),(c,a)\}$

(b) Demuestra que la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$ es una relación transitiva.

Solución: Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que $a \mid b$ y $b \mid c$. De aquí, existen $k \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{N}$ tales que $b = ka$ y $c = bs$. Por tanto sustituyendo obtenemos $c = ksa$ con $ks \in \mathbb{N}$. Luego $a \mid c$ y la relación es transitiva.

(c) Resuelve la siguiente ecuación en el Álgebra de Boole de cuatro elementos $A = \{0, 1, a, b\}$:

$$ax^n + ax^{n-1} + \cdots + ax + bx = 1 + x$$

Solución: Por idempotencia podemos simplificar la ecuación hasta obtener la siguiente $ax + bx = 1 + x$. Aplicando la propiedad absorbente obtenemos $ax+bx = 1$. Aplicando ahora la propiedad distributiva $(a+b)x = 1$. Teniendo en cuenta que estamos en el Álgebra de Boole de cuatro elementos, sabemos que a y b son complementarios, por tanto $a + b = 1$. De aquí $x = 1$ es la solución buscada.