Cuestión 1 (2 pt)

Demuestra que a partir de las siguientes premisas se obtiene la conclusión dada por los métodos directo y reducción al absurdo:

P1: $P \to \rceil Q$

P2: $\rceil Q \to \rceil R$

P3: $S \vee R$

C: $\rceil P \vee S$

Solución:

(a) Método directo:

P1:	$P \to \rceil Q$	
P2:	$\rceil Q \to \rceil R$	
P3:	$S \vee R$	
P4:	$\rceil P \vee S$	
P5:	$P \to \rceil R$	Silogismo hipotético(1,2)
P6:	$\rceil R \to S$	Condicional disyunción (3)
P7:	$P \to S$	Silogismo hipotético (5,6)
C:	$\rceil P \vee S$	Condicional disyunción (7)

(b) Reducción al absurdo:

P1:	$P \to \rceil Q$	
P2:	$\rceil Q \to \rceil R$	
P3:	$S \vee R$	
P4:	$\rceil P \vee S$	
P5:	$P \wedge \rceil S$	Premisa auxiliar
P6:	P	Simplificación(5)
P7:	$\rceil Q$	Modus Ponens (1,6)
P8:	$\rceil R$	Modus Ponens (2,7)
P9:	$\rceil S$	Simplificación(5)
P10:	R	Tollendo Ponens (3,9)
P11:	$R \wedge \rceil R$	L. Unión (8,10)
C:	$\emptyset$	

Cuestión 2 (2 pt) (a) Representa formalmente las siguientes expresiones en el universo de las personas:

(i) "Nadie que está estresado va a correr".

(ii) "Los alumnos de informática que están estresados van a nadar".

(iii) "Hay alumnos de informática que no van a correr ni a nadar".

(iv) "No todos los alumnos de informática están estresados".

Solución: Utilizaremos los siguientes predicados:

$E(x)$: x está estresado $C(x)$: x va a correr

$I(x)$: x es alumno de informática $N(x)$: x va a nadar

Estas expresiones se pueden formalizar como:

(i) $\rceil \exists x \, \big(E(x) \wedge C(x)\big)$

(ii) $\forall x \, \big(I(x) \wedge E(x) \to N(x)\big)$

(iii) $\exists x \, \big(I(x) \wedge \rceil C(x) \wedge \rceil N(x)\big)$

(iv) $\rceil \forall x \, \big(I(x) \to E(x)\big)$

(b) Determina si son correctos o no los siguientes razonamientos. Si son correctos demuéstralos por inferencia, y si no lo son justifica el porqué:

(i) P1: $\exists x\ (P(x) \to Q(x))$
P2: $\exists x\ (Q(x) \to R(x))$
C: $\exists x\ (P(x) \to R(x))$

(ii) P1: $\forall x\ (A(x) \wedge L(x) \to C(x))$
P2: $\exists x\ (L(x) \wedge \rceil C(x))$
C: $\exists x\ \rceil A(x)$

Solución:

(a) Este razonamiento no es correcto. Tanto en la premisa 1 como en la 2 aparece el cuantificador existencial, por lo que al especificar no podemos asegurar que el objeto con el que trabajamos es el mismo en ambas y por tanto no podríamos llegar a la conclusión.

(b)

P1:	$\forall x\ (A(x) \wedge L(x) \to C(x))$	
P2:	$\exists x\ (L(x) \wedge \rceil C(x))$	
P3:	$L(a) \wedge \rceil C(a))$	E. existencial(2)
P4:	$A(a) \wedge L(a) \to C(a)$	E. universal(1)
P5:	$\rceil C(a)$	Simplificación(3)
P6:	$\rceil(A(a) \wedge L(a))$	*Modus Tollens*(4,5)
P7:	$\rceil A(a) \vee \rceil L(a)$	L. Morgan(6)
P8:	$L(a)$	Simplificación(3)
P9:	$\rceil A(a)$	*Tollendo ponens*(7,8)
C:	$\exists x\ \rceil A(x)$	Gen. existencial(9)

Cuestión 3 (1.5 pt) (a) Simplifica la forma proposicional siguiente, indicando en cada paso la tautología empleada:

$$((p \to \rceil q) \to \rceil p) \to \rceil q$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\big((p \to \rceil q) \to \rceil p\big) \to \rceil q &\equiv \big((\rceil p \vee \rceil q) \to \rceil p\big) \to \rceil q && \text{(Condicional-disyunción)}\\
&\equiv \big(\rceil(\rceil p \vee \rceil q) \vee \rceil p\big) \to \rceil q && \text{(Condicional-disyunción)}\\
&\equiv \big((p \wedge q) \vee \rceil p\big) \to \rceil q && \text{(L. Morgan)}\\
&\equiv \big((p \vee \rceil p) \wedge (q \vee \rceil p)\big) \to \rceil q && \text{(Distributiva)}\\
&\equiv (\tau \wedge (q \vee \rceil p)) \to \rceil q && \text{(Propiedad de la negación)}\\
&\equiv (q \vee \rceil p) \to \rceil q && \text{(Elemento neutro)}\\
&\equiv \rceil(q \vee \rceil p) \vee \rceil q && \text{(Condicional-disyunción)}\\
&\equiv (\rceil q \wedge p) \vee \rceil q && \text{(L. Morgan)}\\
&\equiv \rceil q && \text{(Propiedad simplificativa)}
\end{aligned}$$

(b) Sabiendo que $p \to q \vee r$ es falso, ¿cuáles serían los valores de verdad de las expresiones lógicas siguientes?:

(i) $p \to q \wedge r$

(ii) $p \wedge q \to \rceil r$

Solución: Un condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Por tanto en nuestro caso, p será verdadera, y q y r ambas falsas.

(i) Para que una conjunción sea verdadera ambas proposiciones han de ser verdaderas. Por tanto en este caso el consecuente es falso y la proposición será falsa.

(ii) Como $p \wedge q$ es falsa la proposición será verdadera.

Cuestión 4 (1 pt) Prueba por inducción que se verifica que:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución: En primer lugar hemos de probar que la fórmula es cierta para $n = 1$:

Si $n = 1$, la parte izquierda de la igualdad es 2; y, la de la derecha, $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{6}{3} = 2$. Por tanto la propiedad es cierta.

A continuación, vamos a probar que si la propiedad es cierta para un n entonces, también se cumple para $n+1$. Es decir, suponiendo que es cierto $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ (hipótesis de inducción), hemos de deducir que es cierta para $n+1$, es decir que es cierta:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n+1)\cdot(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

La suma

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n+1)\cdot(n+2)$$

és igual a

$$\begin{aligned}(1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1))+(n+1)(n+2) &=^{(hip.\ de\ ind.)} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+(n+1)(n+2)\\ &=(n+1)(n+2)(\frac{1}{3}n+1)\\ &=(n+1)(n+2)(\frac{n+3}{3})\\ &=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)\end{aligned}$$

Y esto es lo que queríamos probar.

Cuestión 5 (1.5 pt) (a) Dada la aplicación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ definida por $f(x)=1-x$. Calcula $f\circ f$. ¿Tiene f aplicación inversa? En caso afirmativo, ¿quien es f^{-1}?

Solución: Por definición, $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x$. Por tanto $f\circ f$ es la aplicación identidad en $\mathbb{Z}$. Esto implica que la inversa de f, $f^{-1}=f$.

(b) Sea f la aplicación de $A=\{1,2,3,5,6,10,30\}$ en $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ definida por $f(a)$ es el número de divisores positivos de a, para todo $a\in A$. ¿Es f una aplicación inyectiva, suprayectiva, biyectiva? Justifica las respuestas.

Solución: En primer lugar, f no es inyectiva, puesto que por ejemplo el número de divisores positivos de 2 y 3 es en ambos casos dos. Es decir, $f(2)=f(3)=2$. Además, $f(1)=1, f(5)=2, f(6)=4=f(10)$ y $f(30)=8$, por tanto por ejemplo el 7 no tiene antiimagen. Luego f no es suprayectiva y tampoco es biyectiva.

Cuestión 6 (2 pt) (a) Dados tres conjuntos A, B y C determina si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas demuéstralas, y en caso de que sean falsas encuentra un contraejemplo.

(i) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

(ii) $C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$.

Solución:

(i) Es cierta, ya que
$A\setminus(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^c=A\cap(B^c\cup C^c)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

(ii) Falsa. Sean $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ y $C=\{1,3,4\}$.
Entonces $C\setminus(A\cap B)=\{1,4\}$. Pero $C\setminus A=\{4\}$ y $C\setminus B=\{1\}$. Luego $(C\setminus A)\cap(C\setminus B)=\emptyset$ que no coincide con $C\setminus(A\cap B)=\{1,4\}$.

(b) Dados dos conjuntos A y B.

(i) Calcula $(A\cap B)\cup(A\setminus B)$.

(ii) ¿Es la familia $\{A\cap B,\ A\setminus B\}$ un recubrimiento del conjunto A? ¿Y una partición? Justifica tus respuestas.

Solución:

(i) $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)=A\cap(B\cup B^c)=A\cap E=A$

(ii) Como acabamos de probar en el apartado anterior, la familia $\{A\cap B,\ A\setminus B\}$ es un recubrimiento del conjunto A. Por otro lado, $(A\cap B)\cap(A\setminus B)=(A\cap B)\cap(A\cap B^c)=A\cap B\cap B^c=A\cap\emptyset=\emptyset$. Por tanto la intersección de ambos conjuntos es vacía y se trata de una partición del conjunto A.