DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Examen Final 23-01-2018 Duración prevista: 3h

PRIMER PARCIAL

---

1. $_{(2p)}$ Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{|\,|x|-2\,|} - 1}$.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\Big/\; \frac{1}{|\,|x|-2\,|} - 1 \geq 0 \quad , \qquad |x| - 2 \neq 0 \right\}$$

Por un lado, tenemos que

$$|x| - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; |x| = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2$$

y, por otra parte,

$$\frac{1}{|\,|x|-2|} - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; |\,|x|-2\,| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq\; |x| - 2 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq |x| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; |x| \geq 1 \quad \wedge \quad |x| \leq 3$$

Ahora bien

$$|x| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

mientras que

$$|x| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; x \in [-3, -3]$$

Por tanto, la solución de la desigualdad será la intersección de estos dos conjuntos, es decir,

$$\frac{1}{|\,|x|-2\,|} - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-3, -1] \cup [1, 3]$$

En resumen,

$$D(f) = (\,[-3, -1] \cup [1, 3]\,) - \{-2, 2\}$$

---

2. $_{(3p)}$ Halla el dominio de $f(x) = x + \log\left(3 - x^2\right)$. A partir del estudio de su derivada, determina máximos y mínimos relativos así como las regiones de crecimiento y decrecimiento.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \{\; x \in \mathbb{R} \;/\; 3 - x^2 > 0 \;\}$$

Ahora bien,

$$3 - x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 < 3 \;\Leftrightarrow\; |x| < \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$$

Por tanto,

$$D(f) = \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$$

Por otro lado, su derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{3-x^2} = \frac{-x^2-2x+3}{3-x^2}$$

existe si $x \neq \pm\sqrt{3}$, por lo que está definida en el dominio de f . El signo de f' en el dominio de f coincidirá con el del numerador, al ser $(3-x^2)$ positivo en $\left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[$. Así, teniendo en cuenta que $-x^2-2x+3$ es una parábola con las ramas hacia abajo que se anula en $x_1=-3$ y $x_2=1$, tenemos un posible extremo relativo en $x_2=1$, ya que $x_1=-3 \notin D(f)$ y, además,

$$\begin{array}{ccc} x^2-2x+3>0 & \Leftrightarrow & x \in \left]-3,1\right[\\ x^2-2x+3<0 & \Leftrightarrow & x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]1,\infty\right[\end{array}$$

Como la función f sólo está definida en $\left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[$, podemos concluir que

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & > & 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{3},1\right[\\ f'(x) & < & 0 \Leftrightarrow x \in \left]1,\sqrt{3}\right[\end{array}$$

y, por tanto, f es estrictamente creciente en $\left]-\sqrt{3},1\right[$, es estrictamente decreciente en $\left]1,\sqrt{3}\right[$ y alcanza un máximo relativo en $x=1$, de coordenadas $(1, 1+\log(2))$. También podrías utilizar el signo de la derivada segunda para justificar esto último.

---

3. a)$_{(1.5p)}$ Halla el valor exacto de $\displaystyle\int_1^2 (x+\log(\sqrt{x}))\,dx$.

b)$_{(1p)}$ Acota el error cometido al aproximar la integral del apartado a) mediante el mediante de los trapecios, considerando el intervalo de integración dividido en seis subintervalos.

---

a) Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\,x+\log(\sqrt{x})\,)\;dx &= \begin{pmatrix} u = x+\log(\sqrt{x}) & ; & du = \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)dx \\ dv = dx & ; & v = x \end{pmatrix} = \\ &= \Big[\,(\,x+\log(\sqrt{x})\,)\cdot x\,\Big]_1^2 - \int_1^2 x\cdot\left(1+\frac{1}{2x}\right)\;dx = \\ &= \Big[\,x^2+x\cdot\log(\sqrt{x})\,\Big]_1^2 - \int_1^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)\;dx = \\ &= \left[\,x^2+x\cdot\log(\sqrt{x}) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\,\right]_1^2 = \left[\,x\cdot\log(\sqrt{x}) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\,\right]_1^2 = \\ &= \left(2\cdot\log\left(\sqrt{2}\right)+2-1\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = \log(2)+1 \end{aligned}$$

Alternativamente, se puede aplicar que la integral de una suma es la suma de las integrales resolviendo una integral inmediata y otra por partes.

b) Aplicamos la cota de error de Trapecios

$$\left|\int_1^2 (\,x+\log(\sqrt{x})\,)\;dx - T_n\right| \leq \frac{M_2\cdot(2-1)^3}{12\cdot n^2}$$

donde falta calcular M_2, cota de la derivada segunda de $f(x)$ en el intervalo de integración. Así pues,

$$f(x) = x+\log\left(\sqrt{x}\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 1+\frac{1}{2x} \quad\Rightarrow\quad f''(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

de donde

$$\mid f"(x) \mid = \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{2}$$

en el intervalo de integración $[1,2]$, por lo que consideramos $M_2 = 0.5$. De aquí,

$$\left| \int_1^2 \left(x + \log\left(\sqrt{x}\right) \right) \; dx - T_6 \right| \leq \frac{0.5 \cdot (2-1)^3}{12 \cdot 6^2} = 0.0011574074...$$

---

4. $_{(2.5p)}$ Sabiendo que el módulo de la derivada cuarta de $\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ es menor que 3, aproxima la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$ mediante la regla de Simpson, con un error menor que 10^{-4}.

Teniendo en cuenta la cota de error de Simpson

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx - S_n \right| \leq \frac{3 \cdot (1-0)^5}{180 \cdot n^4}$$

bastará con hallar n (par) que verifique la desigualdad

$$\frac{3 \cdot (1-0)^5}{180 \cdot n^4} < 10^{-4}$$

de la que se deduce $n \geq 4$. Para hallar la aproximación, consideremos $h = \dfrac{1}{4}$ y la partición

$$P = \left\{ \; 0 \; , \; \frac{1}{4} \; , \; \frac{1}{2} \; , \; \frac{3}{4} \; , \; 1 \; \right\}$$

La fórmula de la regla de Simpson vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx \; \simeq \; S_4 \;\; &= \;\; \frac{\frac{1}{4}}{3}\left(\frac{e^0}{e^0+1} + 4 \cdot \frac{e^{1/2}}{e^{1/4}+1} + 2 \cdot \frac{e}{e^{1/2}+1} + 4 \cdot \frac{e^{3/2}}{e^{3/4}+1} + \frac{e^2}{e+1} \right) = \\
&= \;\; \frac{1}{12} \left(\; 0.5 + \; 4 \cdot 0.7218489158 \; + \; 2 \cdot 1.026261939 \; + \; 4 \cdot \; 1.437821317 + 1.987223249 \right) \\
&= \;\; \frac{1}{12} \cdot \; 13.17842806 = \; 1.098202338...
\end{aligned}$$

que garantiza, al menos, tres decimales exactos en la aproximación de la integral.

SEGUNDO PARCIAL

---

1. $_{(2p)}$ Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones

$$a_n = \log\left(n^2\right) \quad y \quad b_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

Para comparar los órdenes de magnitud tenemos que calcular el límite del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_n}{b_n} &= \lim_n \frac{\log\left(n^2\right)}{\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}} = (\text{Stolz}) \\
&= \lim_n \frac{\log(n+1)^2 - \log\left(n^2\right)}{\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)} = \\
&= \lim_n \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = \lim_n \left[2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

Se trata ahora de una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$. Aplicando propiedades de los logaritmos ($\log(a^b) = b\log(a)$) y permutando límite con logaritmo, obtenemos una indeterminación del tipo 1^∞ que se resuelve mediante la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}
\lim_n \left[2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] &= 2 \cdot \lim_n \left[\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right] = \\
&= 2 \cdot \log \lim_n \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right] \underset{\text{EULER } (1^\infty)}{=} \\
&= 2 \cdot \log\left[e^{\lim_n\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right]}\right] = \\
&= 2 \cdot \lim_n \left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right] = \\
&= 2 \cdot \lim_n \left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{n}\right) = 0
\end{aligned}$$

y podemos concluir que $a_n \ll b_n$.

---

2. Considera la recurrencia lineal de segundo orden definida por

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 10 \cdot 3^{n+1}$$

a)$_{(1p)}$ Encuentra la solución general de la recurrencia homogénea.

b)$_{(1p)}$ Halla k tal que $a_n^p = k \cdot n \cdot 3^n$ sea solución particular de la recurrencia completa.

c)$_{(1p)}$ Determina la solución explícita de la recurrencia completa con condiciones iniciales $a_1 = -8$, $a_2 = 4$.

---

a) La ecuación característica asociada a la recurrencia homogénea es

$$r^2 - r - 6 = 0$$

que tienes dos raíces reales distintas $r_1 = -2$ y $r_2 = 3$.

La recurrencia corresponde al primer caso y la solución general puede escribirse en la forma

$$a_n^H = C_1\,(-2)^n + C_2 \cdot 3^n$$

b) Si $a_n^p = k \cdot n \cdot 3^n$ es solución de la recurrencia completa, al sustituir $a_n^p = k \cdot n \cdot 3^n$, $a_{n+1}^p = k \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1}$ y $a_{n+2}^p = k \cdot (n+2) \cdot 3^{n+2}$ en la recurrencia se tendrá

$$\begin{aligned}
k \cdot (n+2) \cdot 3^{n+2} - k \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1} - 6k \cdot n \cdot 3^n &= 10 \cdot 3^{n+1} \Leftrightarrow \\
3k \cdot (n+2) \cdot 3^{n+1} - k \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1} - 2k \cdot n \cdot 3^{n+1} &= 10 \cdot 3^{n+1} \Leftrightarrow \\
(3k \cdot n + 6k - k \cdot n - k - 2k \cdot n) \cdot 3^{n+1} &= 10 \cdot 3^{n+1} \Leftrightarrow \\
5k \cdot 3^{n+1} &= 10 \cdot 3^{n+1} \Leftrightarrow 5k = 10 \Leftrightarrow k = 2
\end{aligned}$$

por lo que $a_n^p = 2 \cdot n \cdot 3^n$ es una solución particular de la recurrencia completa

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 10 \cdot 3^{n+1}$$

c) A partir de los apartados anteriores podemos concluir que la solución general de la recurrencia completa puede escribirse como

$$a_n = a_n^H + a_n^p = C_1\,(-2)^n + C_2 \cdot 3^n + 2 \cdot n \cdot 3^n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{aligned}
\text{para } n = 1: &\quad a_1 = -2C_1 + 3C_2 + 6 = -8 \\
\text{para } n = 2: &\quad a_2 = 4C_1 + 9C_2 + 36 = 4
\end{aligned}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 1$ y $C_2 = -4$. De aquí:

$$a_n = (-2)^n - 4 \cdot 3^n + 2 \cdot n \cdot 3^n$$

---

3. a)$_{(2p)}$ Sabiendo que $e^x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$, aproxima $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ con una precisión de 10^{-3}. Justifica tu respuesta.

b)$_{(1p)}$ Suma la serie de potencias $f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \cdot (2x)^{3n}$ donde converja.

c)$_{(1p)}$ Obtén la serie de potencias que corresponde a $f'(x)$.

d)$_{(1p)}$ Considera la serie $g(x) = \sum_{n\geq 1} (n+1)x^{n-1}$ y calcula el valor exacto de $\int_0^{1/2} x \cdot g(x)dx$.

---

a) Observa que, a partir de la serie de potencias de la función exponencial, podemos escribir

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n}$$

serie alternada que verifica las condiciones del teorema de Leibniz. Para encontrar una aproximación con un error menor que 10^{-3} necesitamos

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)! \cdot 2^{N+1}} < 10^{-3} \;\Leftrightarrow\; (N+1)! \cdot 2^{N+1} > 1000 \;\Leftrightarrow\; N \geq 4.$$

Y tomando $N = 4$ obtenemos la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} = \frac{1}{0! \cdot 2^0} - \frac{1}{1! \cdot 2^1} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} - \frac{1}{3! \cdot 2^3} + \frac{1}{4! \cdot 2^4} = \frac{233}{384} = 0.6067708333...$$

b) Se trata de una serie geométrica, de razón $r = -8x^3$, que podemos sumar

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \cdot (2x)^{3n} = -\sum_{n \geq 0} \left(-8x^3\right)^n = -\frac{1}{1+8x^3}$$

para los valores de x tales que

$$\left|-8x^3\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x|^3 < \frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow\; x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

c) Derivando término a término la serie de potencias

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot (3n) \cdot (2x)^{3n-1} \cdot 2 = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot 6n \cdot (2x)^{3n-1} \quad , \quad x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

d) Multiplicando por x la serie $g(x) = \sum_{n \geq 1} (n+1) x^{n-1}$ se tendrá

$$x \cdot g(x) = \sum_{n \geq 1} (n+1) x^n$$

Integrando término a término y aplicando la regla de Barrow

$$\int_0^{1/2} x \cdot g(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^{1/2} (n+1) x^n dx = \sum_{n \geq 1} \left[x^{n+1}\right]_0^{1/2} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$