Pràctiques de Matemàtica Discreta

Activitats de la sessió 5 (Arbres)

1. Un arbre té $2n$ vèrtexs de grau 1, $3n$ vèrtexs de grau 2 i n vèrtexs de grau 3. Determina el nombre de vèrtexs i d'arestes d'aquest arbre.

   Solució:

   El nombre de vèrtexs de l'arbre en funció de n és $2n + 3n + n = 6n$.

   Sabem que, **en tractar-se d'un arbre, el seu nombre d'arestes és el nombre de vèrtexs menys un**, és a dir, $6n - 1$. Així, tenim tant el nombre de vèrtexs com el d'arestes en funció de n. Calculant n obtindrem la solució al problema.

   Sabem que la suma dels graus dels vèrtexs de qualsevol graf és igual al doble del nombre d'arestes. Aplicat a aquest cas:

   $$2n + (3n) \cdot 2 + n \cdot 3 = 2(6n - 1).$$

   Resolent aquesta senzilla equació obtenim $n = 2$, amb la qual cosa l'arbre té 12 vèrtexs i 11 arestes.

2. Siga T un arbre amb 21 vèrtexs, el conjunt de graus del qual és $\{1, 3, 5, 6\}$. Sabent que té 15 fulles i un sol vèrtex de grau 6, quants vèrtexs de grau 5 té?

   Solució:

   L'enunciat ens diu, d'una banda, que només hi ha 4 possibilitats per als graus dels vèrtexs (1,3,5 i 6) i que l'arbre té

   - 15 vèrtexs de grau 1
   - 1 vèrtex de grau 6

   El nombre de vèrtexs de grau 3 és desconegut. Cridem-li x. També és desconegut el nombre de vèrtexs de grau 5. Cridem-li y. Aquest últim és, realment, la dada que hem de trobar.

   D'altra banda, l'enunciat ens diu que el nombre de vèrtexs és 21. Per tant tenim la relació

   $$15 + 1 + x + y = 21,$$

   és a dir,

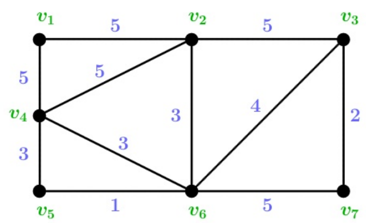
   $$x + y = 5.$$

   Si poguérem establir una altra equació podríem calcular x i y i hauríem resolt el problema. L'altra equació ve de dues observacions:

- D'una banda, com es tracta d'un arbre, el nombre d'arestes és igual al nombre de vèrtexs menys un. És a dir, hi ha $15 + 1 + x + y - 1 = 15 + x + y$ arestes.
- D'altra banda, sabem que la suma dels graus dels vèrtexs és igual al doble del nombre d'arestes:
$$15 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + x \cdot 3 + y \cdot 5 = 2(15 + x + y),$$
és a dir,
$$x + 3y = 9.$$

Resolent el sistema d'equacions lineals donat per aquesta equació i l'anterior, s'obté que $x = 3$ i $y = 2$. Per tant, existeixen 2 vèrtexs de grau 5.

3. Calcula un arbre generador minimal, aplicant l'algorisme de Kruskal, del següent graf ponderat:



Calcula també un arbre generador maximal.

Solució:

L'arbre generador minimal es va obtenir en classe (té pes 18). El maximal es calcula anàlogament però triant les arestes de major a menor pes.

4. (*) Considera el mapa d'Espanya de l'exemple de SWGraphs que apareix en obrir els menús Exemples-Dijkstra-mapa d'Espanya. Es pretén connectar entre si totes les ciutats que apareixen en el mapa mitjançant una xarxa de línies d'AVE. En l'exemple s'ha modelitzat la situació mitjançant un graf els vèrtexs del qual es corresponen amb les ciutats que es desitja connectar, i les arestes del qual es corresponen amb els "possibles trams" pels quals pot construir-se la línia fèrria. S'indica, també, la longitud de cada tram (en Km). El disseny de la xarxa d'AVE hauria de verificar les següents condicions raonables (almenys, a priori):

   - la xarxa ha de connectar dues ciutats qualssevol de les quals apareixen en el mapa (és a dir, un viatger ha de ser capaç de viatjar entre dues ciutats qualssevol prenent només trens AVE);
   - la longitud total de via construïda ha de ser la menor possible (para així minimitzar el cost de l'obra, que és, de per si mateix, considerable).

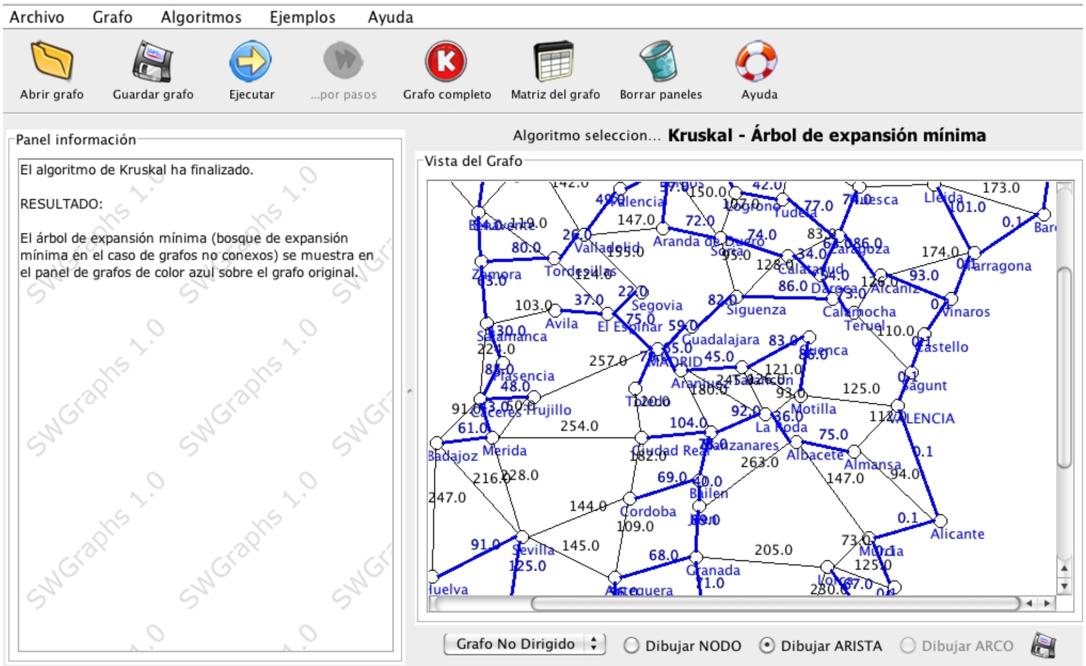
(a) Determina un possible disseny de la xarxa d'AVE amb aquestes condicions usant algun algorisme de Teoria de Grafs, raonant adequadament per què apliques aquest algorisme.

(b) Per motius estratègics resulta convenient realitzar la construcció d'un eix mediterrani (Girona-Barcelona-Tarragona-Vinarós-Castelló-Sagunt-València-Alacant-Múrcia-Cartagena-Águilas-Almeria). Quin és el recorregut total de l'AVE que ha de dissenyar-se tenint en compte, a més dels 2 requisits inicials, la condició que l'eix mediterrani ha d'estar present?

Solució:

(a) Com volem que totes les ciutats estiguen connectades entre si, el disseny de xarxa d'AVE que cerquem deu modelitzarse mitjançant un graf connex. A més, com volem estalviar en la quantitat de via utilitzada, el graf no deurà contenir cicles i el pes total del mateix deurà ser el menor possible. Per tant, el que cerquem és un **arbre generador de pes mínim** del graf de l'exemple. Podem calcular-ho ràpidament amb SWGraphs usant l'algorisme de Kruskal:

(b) Per a forçar al fet que les arestes del "corredor mediterrani" apareguen forçosament en aplicar l'algorisme de Kruskal, podem modificar el seu pes canviant-ho per un que siga menor que tots els altres (per exemple, 0.1). D'aquesta manera forçarem al fet que, en aplicar Kruskal, les primeres arestes que s'afigen siguen precisament les del corredor mediterrani:


Archivo
Grafo
Algoritmos
Ejemplos
Ayuda
Abrir grafo
Guardar grafo
Ejecutar
...por pasos
Grafo completo
Matriz del grafo
Borrar paneles
Ayuda
Panel información
El algoritmo de Kruskal ha finalizado.
RESULTADO:
El árbol de expansión mínima (bosque de expansión mínima en el caso de grafos no conexos) se muestra en el panel de grafos de color azul sobre el grafo original.
Algoritmo seleccion... Kruskal - Árbol de expansión mínima
Vista del Grafo
Grafo No Dirigido
Dibujar NODO
Dibujar ARISTA
Dibujar ARCO