DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Segundo parcial 07-01-2013 Duración: 2h

---

1. a)$_{(0.3p)}$ Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad b_n = \sqrt{2n+1}$$

b) $_{(0.2p)}$ Encuentra una sucesión que tenga el mismo orden de magnitud que $\dfrac{1}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}}$

---

a) Para comparar los órdenes de magnitud tenemos que calcular el limite del cociente

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+1}} = \text{(Stolz)} \\
&= \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}} = \\
&= \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)}{\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)} = \\
&= \lim \frac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}{2\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

por lo que $a_n \approx b_n$.

b) Multiplicando y dividiendo por el conjugado

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}} = \frac{\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)}{\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)} = \frac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}{2}$$

por lo que

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}} \approx \sqrt{n}$$

En efecto, observa que

$$\begin{aligned}
\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}}}{\sqrt{n}} &= \lim \frac{\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)} = \\
&= \lim \frac{\left(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}\right)}{2\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

---

2. $_{(1p)}$ Resuelve la recurrencia lineal completa de segundo orden definida mediante

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n + 6n - 1 \\ a_1 = 2, \quad a_2 = 7 \end{cases}$$

La ecuación característica asociada a la recurrencia es

$$r^2 - r - 6 = 0$$

que tienes dos raíces reales distintas $r_1 = -2$ y $r_2 = 3$.

La recurrencia corresponde al primer caso y la solución general puede escribirse en la forma

$$a_n = C_1\,(-2)^n + C_2 \cdot 3^n$$

Por otro lado, una solución particular de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n = An + B$$

de donde

$$A(n+2) + B = A(n+1) + B + 6(An+B) + 6n - 1$$

Reagrupando términos

$$-6An + (A - 6B) = 6n - 1$$

e igualando coeficientes

$$-6A = 6 \quad , \quad A - 6B = -1$$

cuya solución será $A = -1$ y $B = 0$.

Por tanto, la solución general de la recurrencia completa puede escribirse como

$$a_n = C_1\,(-2)^n + C_2 \cdot 3^n - n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{lcccc} \text{para } n=1 \;\; ; \;\; a_1 & = & -2C_1 + 3C_2 - 1 & = & 2 \\ \text{para } n=2 \;\; ; \;\; a_2 & = & 4C_1 + 9C_2 - 2 & = & 7 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. De aquí:

$$a_n = 3^n - n$$

---

3. a) $_{(0.3p)}$ Calcula la suma exacta de la serie numérica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^n}{2^{3n-1}}$$

b) $_{(0.5p)}$ Usando la cota de error asociada al teorema de Leibniz, obtén el valor de N necesario para que el error cometido al aproximar la suma exacta de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+5)^4}$ mediante la suma paracial s_N sea menor que 10^{-4}. Calcula esa suma parcial.

---

a) Es una serie geométrica de razón $r = \dfrac{-5}{8}$ ya que,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^n}{2^{3n-1}} = -2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot 5^n}{8^n} = -2\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-5}{8}\right)^n = -2\left(\frac{\left(\frac{-5}{8}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{-5}{8}\right)\right)}\right) = -2\left(\frac{25}{104}\right) = -\frac{25}{52}$$

b) La serie cumple las condiciones del criterio de Leibniz. Aplicando la cota correspondiente, para obtener la precisión pedida, necesitamos

$$E_N = |s - s_N| \le a_{N+1} = \frac{1}{(N+6)^4} < 10^{-4} \quad \Leftrightarrow (N+6)^4 > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad N \ge 5$$

y obtendremos la aproximación

$$s_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+5)^4} = \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{8^4} - \frac{1}{9^4} + \frac{1}{10^4} = 0.0005468366451...$$

4. $(0.7p)$ Integra término a término la serie de potencias $f(x) = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ y súmala donde converja para obtener $\int f(x)dx$. A continuación, deriva para hallar $f(x)$ explícitamente. A partir de esta expresión, deduce el valor de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{3^n}$

Integrando término a término la serie de potencias y sumando la serie resultante (geométrica de razón x),

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} \Rightarrow \int f(x)dx = \sum_{n\geq 1} x^n + C \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{x}{1-x} + C \quad , \quad |x| < 1$$

Derivando la última expresión

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1$$

Por último, observa que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2} = \frac{3}{16}$$