Computabilidad y Complejidad

Boletín de Ejercicios 2-- Enunciados (Funciones Recursivas Primitivas)

01. Para cada $k \geq 0$, sea la función $cte_k(n) = k$ para cada $n \geq 0$. Demuestre que estas funciones son recursivas primitivas.

02. Sea $Proy_0$ la familia de las funciones de proyección con selector 0, esto es,

$$Proy_0 = \{p_{0,k} \ / \ k \geq 1\}.$$

Demuestre que cada función de $Proy_0$ puede definirse como recursiva primitiva sin utilizar ninguna función de $Proy_0$.

03. Sea $g(i,n_1,\ldots,n_m)$ una función recursiva primitiva. Demuestre que la función

$$f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = \sum_{j \leq i \leq k} g(i,n_1,\ldots,n_m)$$

también lo es. (Nótese que cuando $k < j$, se tiene que $f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = 0$.)

04. Sea $g(i,n_1,\ldots,n_m)$ una función recursiva primitiva. Demuestre que la función

$$f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = \prod_{j \leq i \leq k} g(i,n_1,\ldots,n_m)$$

también lo es. (Nótese que cuando $k < j$, se tiene que $f(j,k,n_1,\ldots,n_m) = 1$.)

05. Sea $máx(n,m)$ la función que obtiene el máximo entre n y m. Sea

$$g: N \longrightarrow N$$

una función recursiva primitiva. Se define la función

$$máx.g: N \longrightarrow N,$$

de modo que $máx.g(n) = máx\{g(i) \ / \ i \in \{0,\ldots,n\}\}$.

Sabiendo que la función $máx$ es recursiva primitiva (véase el boletín de ejercicios de autoevaluación) demuestre que también lo es la función $máx.g$.

06. Diremos que las funciones recursivas primitivas $g_i(n_1,\dots,n_m)$, $i=1,\dots,k$, son compatibles si y sólo si

$$\sum_{1 \le i \le k} g_i(n_1,\dots,n_m) = 1, \ \forall n_1,\dots,n_m$$

Sean para $i=1,\dots,k$, las funciones recursivas primitivas $h_i(n_1,\dots,n_m)$ y las funciones recursivas primitivas compatibles $g_i(n_1,\dots,n_m)$. Demuestre que la función

$f(n_1,\dots,n_m) =$

- $h_1(n_1,\dots,n_m)$, si $g_1(n_1,\dots,n_m) = 1$
- . . . .
- $h_k(n_1,\dots,n_m)$, si $g_k(n_1,\dots,n_m) = 1$

es recursiva primitiva.