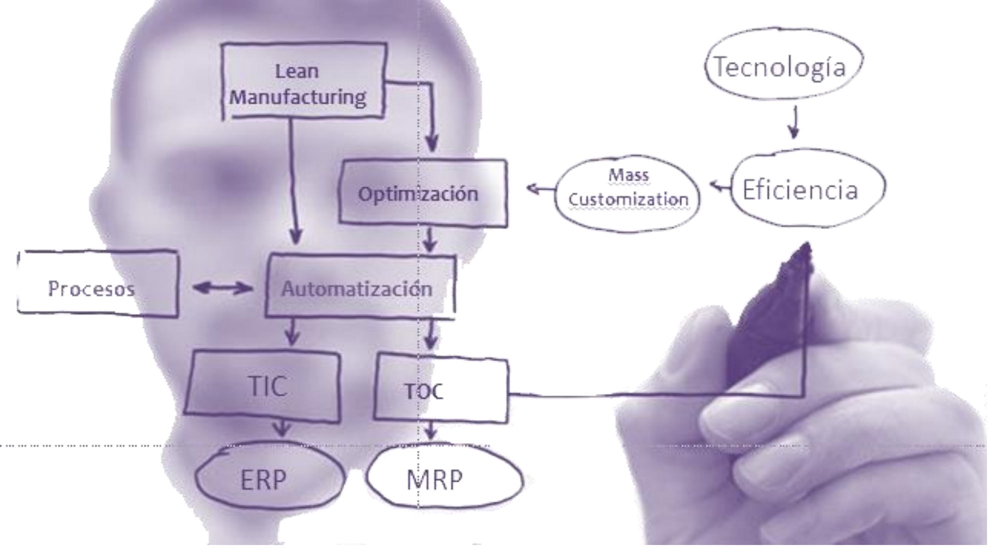


DEIOAC-UPV

Tema 5. Métodos de Programación Entera

Objetivos

Al finalizar el tema, deberás ser capaz de:

- Identificar la diferencia desde un punto de vista computacional entre distintas categorías de Programas Lineales.
- Conocer las principales características conceptuales y algebraicas de los algoritmos para la resolución de problemas de programación lineal entera.
- Aplicar estos algoritmos a problemas de dimensión reducida.

CONTENIDOS

5.1 Introducción

- Muchos de los problemas reales exigen soluciones con valores enteros, por lo tanto las variables de dicho problema deben ser definidas como variables enteras

Hipótesis	Programación Lineal	Programación Entera
H1: Divisibilidad	**SI**	**NO**
H2: No negatividad	**SI**	**SI**
H3: Linealidad	**SI**	**SI**
H4: Certidumbre	**SI**	**SI**

5.1 Introducción

- Este tipo de problemas se denominan en general Problemas de Programación Lineal Entera (PPLE). En concreto:

A. Si todas las variables del problema son enteras se habla de **PPLE Pura.**
B. Si sólo algunas son enteras y las restantes son continuas se habla de **PPLE Mixta.**
C. Si todas las variables enteras son binarias (0/1) el problema se denomina **PPLE Binaria.**

- En ingeniería los problemas más frecuentes son los PPLE Mixta. Estos problemas proporcionan un marco de modelado flexible y eficiente para formular y resolver muchos problemas de ingeniería.

5.1 Introducción

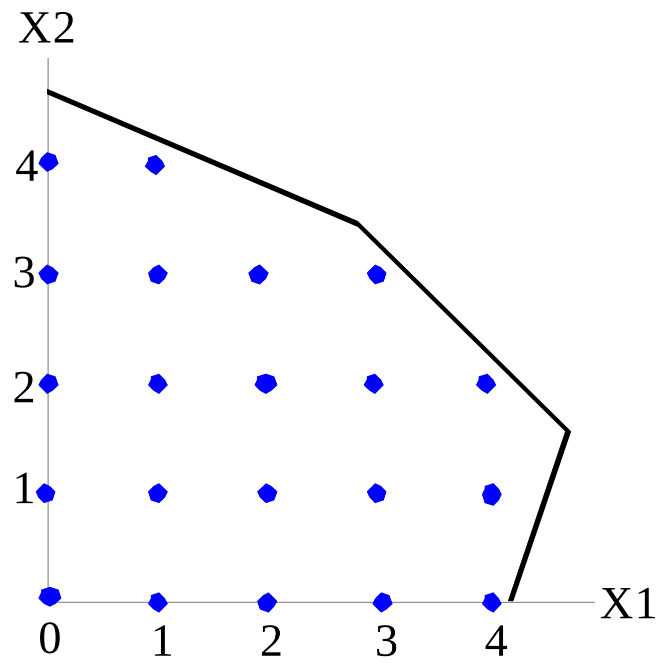
- **Paradójicamente** un modelo de **programación entera** pura o entera binaria tiene un número finito de soluciones mientras que un modelo de **programación lineal** tiene (en general) infinitas soluciones al modelo

¡¡¡ MIL MILLONES DE SOLUCIONES

ES UN NÚMERO FINITO !!!

5.1 Introducción

- **Un modelo de programación entera $\boxed{\text{NO}}$ cumple la propiedad de convexidad:**



Un problema sencillo para desconfiar de redondeos

- El **departamento de I+D** de una gran empresa dispone de 2.5 millones de € para adquirir un nuevo equipamiento informático y resulta imposible ampliar esta cantidad con fondos provenientes de otras fuentes. Diversos estudios realizados indican que sólo dos tipos de máquinas son adecuados y que cualquier número o combinación de ellas sería aceptable. Se han realizado unas pruebas para evaluar la capacidad de carga en unidades de "**trabajos promedio**" por hora para los dos tipos de máquinas

5.1 Introducción

Máquina	Coste (millones de €)	Capacidad (por hora)
1	1.4	28 trabajos
2	0.6	11 trabajos

- El **objetivo** del departamento de I+D es **maximizar la capacidad potencial de trabajo**.

  Es evidente que ***las máquinas sólo pueden adquirirse en unidades enteras***

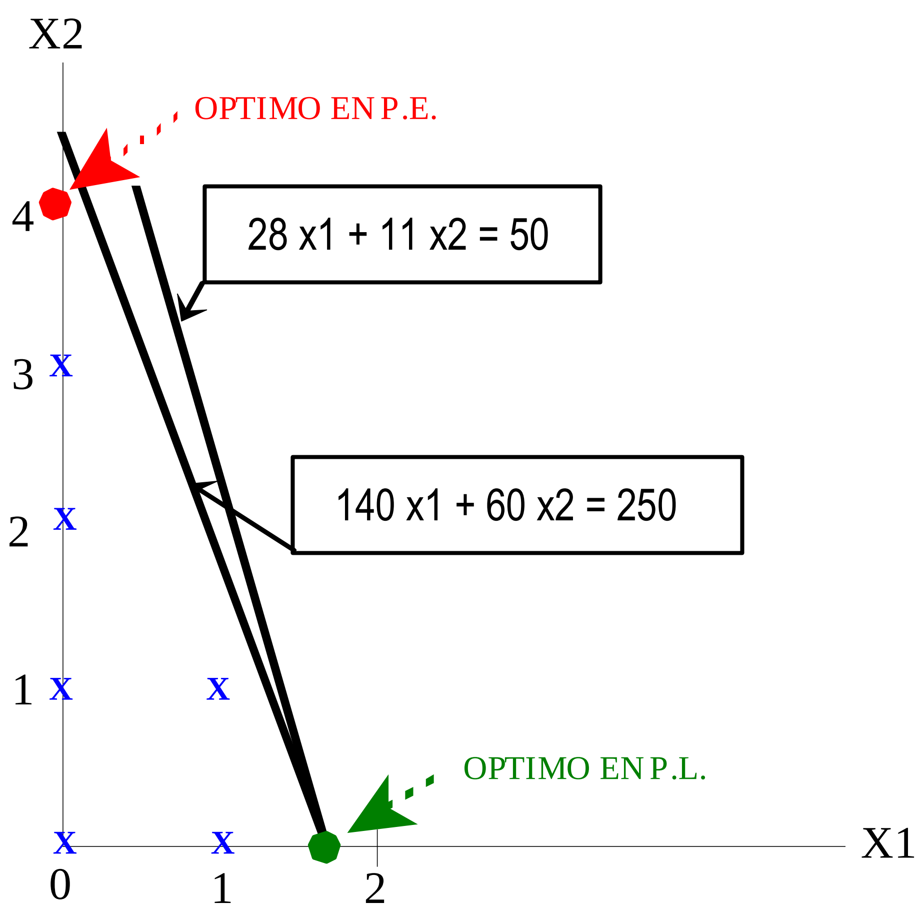
5.1 Introducción

- **VARIABLES:**
  - X_1 : número de máquinas de tipo 1
  - X_2 : número de máquinas de tipo 2
- **FUNCIÓN OBJETIVO:**
  - Maximizar la capacidad de trabajos por hora (en trabajos promedio)

    Max $Z = 28\, X_1 + 11\, X_2$
- **RESTRICCIONES:**
  - Recursos disponibles: $14\, X_1 + 6\, X_2 \leq 25$
  - Condiciones de no negatividad: $X_1, X_2 \geq 0$
  - Condición de enteros: $\boxed{X_1, X_2 \text{ enteros}}$

5.1 Introducción

- REGIÓN FACTIBLE Y SOLUCIÓN ÓPTIMA:



- **Solución óptima continua**:

  X_1=1.78, X_2=0 y **Z=50**

- **Redondear al entero más cercano:**

  X_1=2, X_2=0 y Z=56

  (**Solución no factible**)

- **Solución entera factible más próxima:**

  X_1=1, X_2=0 y **Z=28**

- **Solución entera óptima:**

  $\boxed{X_1=0,\ X_2=4 \text{ y } Z=44}$

5.1 Introducción

- **Un PPLE Mixta** general se formula en forma estándar como:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} && z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\textit{sujeto a} && \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & && x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ & && x_j \in \mathbb{N} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, I \quad ; \quad I \leq n \end{aligned}$$

- Los problemas de PPLE se clasifican en las siguientes clases:
  1. **Muy Fáciles**: Resolubles con algoritmos específicos.
  2. **Fáciles**: Resolubles mediante algoritmos voraces (greedy)
  3. **Muy Difíciles**: el número de pasos requeridos para encontrar la solución óptima en el peor caso crece exponencialmente con el tamaño del problema. (Enumeración Exhaustiva, B&B, Planos de Corte)

5.1 Introducción

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE PE:

- **Muy Fáciles**: Matriz Unimodular (toda submatriz cuadrada tiene determinante **1**, **0** ó -**1**) → directamente resolubles por PL. La mayoría de los modelos que presentan esta propiedad se ajustan a la definición de red pura. Su estructura especial ha llevado a desarrollar algoritmos específicos que se han demostrado mucho más rápidos que el método simplex general o las aproximaciones de punto interior. *Ejemplos:* Problema de Transporte, asignación, flujo con coste mínimo.

- **Fáciles:** Resolubles mediante algoritmos Greedy (voraces).

  Ejemplos: Árbol de expansión mínima, mochila con pesos iguales y numerosos problemas de secuenciación con una sola máquina.

- **Muy Difíciles:** Están entre los problemas de optimización más difíciles de resolver. Para ellos el número de pasos requeridos para encontrar la solución óptima en el peor caso crece exponencialmente con el tamaño del problema.

5.1 Introducción

- En la resolución de un problema de programación lineal entera (PPLE) es clave el concepto de **Relajación Lineal**.
- La **Relajación Lineal** de un PPLE es el PL que se obtiene **omitiendo todas las restricciones sobre el carácter entero de las variables.**
- La Relajación Lineal es menos restringida que el PPLE, es decir, *la región factible del PPLE está contenida en la región factible de la correspondiente Relajación Lineal*. Esto implica que para cualquier PPLE de maximización se cumple:

  Valor óptimo $\mathbf{z}$ *de la Relajación Lineal* ≥ *Valor óptimo de* $\mathbf{z}$ *de PPLE*

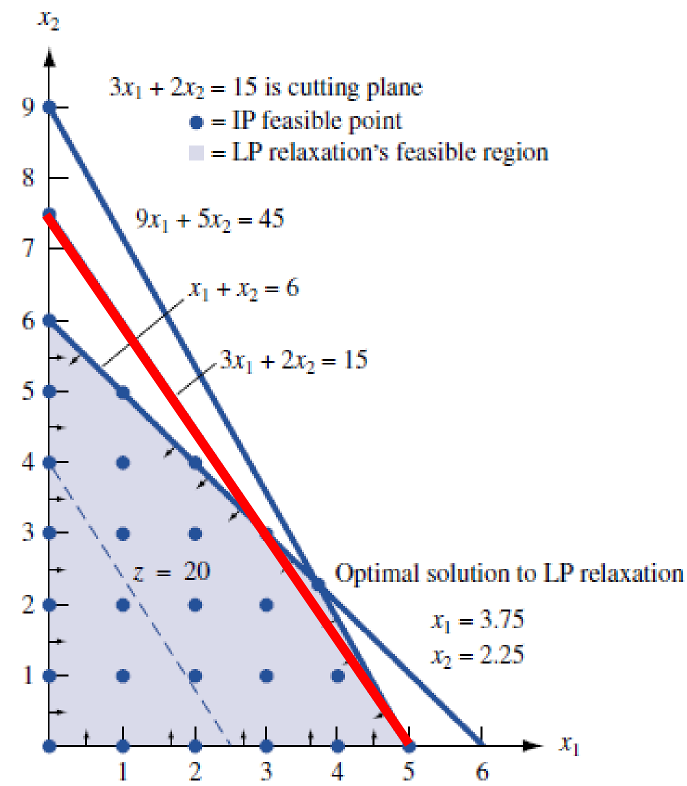
- Ralph **Gomory** fue el creador del primer algoritmo para resolver modelos de programación entera (1958):

Algoritmos de planos de corte

- El **algoritmo de Gomory** consiste en resolver el problema sin considerar las restricciones de carácter entero de las variables. Si la solución no es entera añade restricciones que reducen el conjunto de soluciones del problema lineal continuo asociado sin excluir ninguna solución entera.

- Para cada nueva restricción *(plano de corte)*:

1. Cualquier solución posible la cumple.
2. La solución óptima actual de la relajación lineal del problema **NO** la cumple.



Gomory demostró que este algoritmo encuentra la solución óptima del PPLE después de un número finito de cortes (restricciones)

5.2 Técnicas de programación entera

- **Land** y **Doig** (1960): algoritmos de "**bifurcación y acotación**" o técnicas "**branch and bound**“-**B&B**
- Branch & Bound: Grupo de procedimientos que realizan la enumeración de forma inteligente de modo que no sea necesario examinar todas las combinaciones de valores de las variables.
- B&B tiene dos cualidades destacables:
  1. Puede aplicarse esencialmente del mismo modo a problemas de programación lineal entera -PPLE (PE Pura o PE Mixta)
  2. Típicamente obtiene una sucesión de soluciones factibles de modo que si es necesario interrumpir el proceso de búsqueda, la mejor solución hasta el momento puede ser aceptable como una solución aproximada.

5.2 Técnicas de programación entera

- Es la técnica más utilizada en la práctica para resolver PPLE.
- **B&B** busca la solución óptima enumerando de ***forma eficiente*** las soluciones posibles del problema.
- OBSERVACIÓN: si se resuelve la relajación lineal de un PPLE pura y se obtiene una solución en la que todas las variables toman valor entero, entonces la solución óptima de la relajación lineal es también solución óptima del PPLE.
- **B&B** comienza resolviendo la relajación lineal del PPLE. Si la solución es entera, esta solución será la óptima del problema original (ver OBSERVACIÓN). En otro caso, se cumplirá (si max):

Valor óptimo $\mathbf{z}$ de la Relajación Lineal ≥ Valor óptimo $\mathbf{z}$ de PPLE

Valor Optimo z de la Relajación Lineal es una cota superior del Valor óptimo de z de PPLE

5.3 Algoritmo de bifurcación y acotación

- Las técnicas B&B comienzan resolviendo el problema original como un PL (i.e. relajando las condiciones de que las variables deben tomar valores discretos)
- Si no se obtiene solución entera, una de las variables enteras que todavía tiene valor continuo, denotada por x_s=a.b se selecciona y se crean dos descendientes del problema original, uno en el que $x_s \geq$ a+1 y otro en el que $x_s \leq$ a. Esta operación se denomina ***Ramificación*** ***(o Bifurcación)***.
- El proceso se repite seleccionando uno de los problemas como el actual problema de PE y tratándolo exactamente igual que el original. Esto a su vez genera **dos** nuevos problemas que reemplazan al anterior a menos que por ejemplo el problema en curso no tenga solución posible.
- Repitiendo iterativamente el proceso se alcanza una solución entera (si existe) para uno de los actuales problemas que se convierte en **candidata** para ser la solución óptima del problema original. La mejor de estas soluciones candidatas es una forma de eliminar descendientes del problema original que es inútil explorar porque no conducirían a la solución óptima. La mejor solución entera candidata se llama ***incumbente*** y el proceso de eliminación se denomina ***Poda***.

5.3 Algoritmo de bifurcación y acotación

- La representación de todos los subproblemas que se crean se llama árbol.
- Cada subproblema se denomina nodo del árbol
- Cada línea que conecta dos nodos del árbol es un arco o rama.
- El subproblema correspondiente a cada nodo del árbol está compuesto por la relajación lineal del PPLE + las restricciones asociadas a los arcos que llevan del subproblema inicial hasta este nodo.

5.3.1 Resolución Gráfica

- Para exponer el algoritmo de Bifurcación y Acotación, utilizaremos el siguiente modelo lineal:

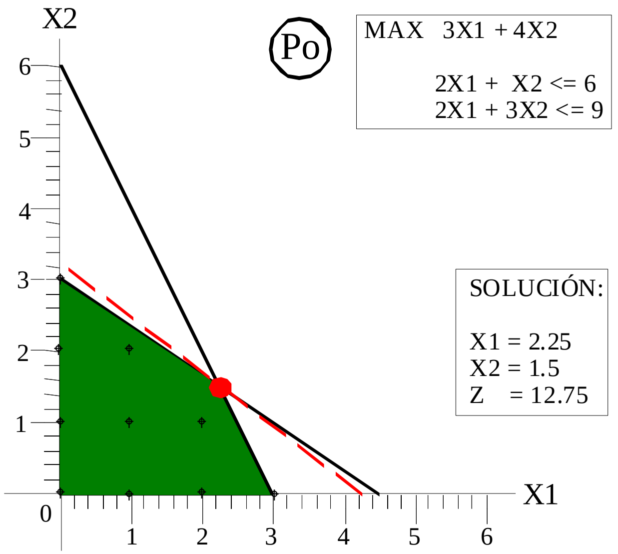
Max 3 x1 + 4 x2

s.a:

$2\,x1 + x2 \leq 6$

$2\,x1 + 3\,x2 \leq 9$

$x1, x2 \geq 0$ **y** x1, x2 **enteras**



al resolver su relajación lineal, se obtiene la solución P0

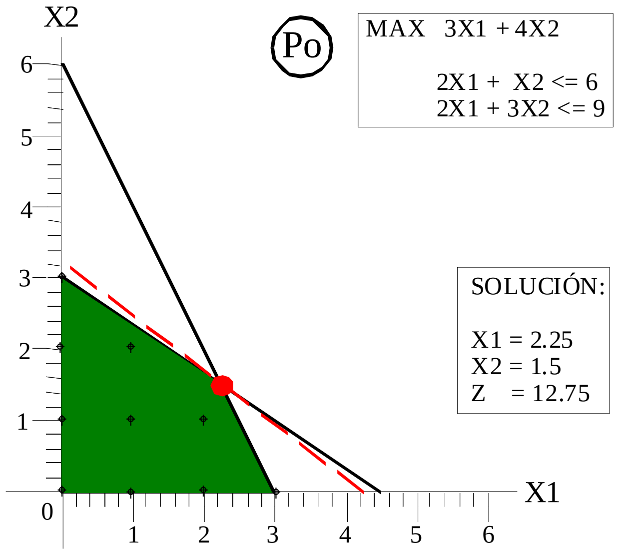
5.3.1 Resolución Gráfica

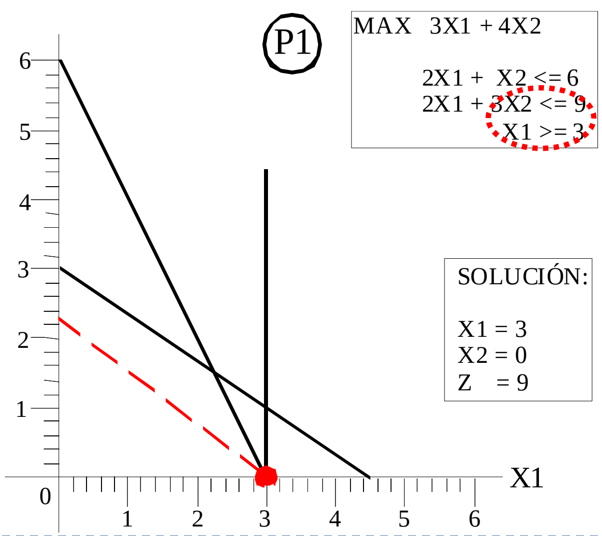
Cota inferior de la Función Objetivo en la Solución Óptima ENTERA → **$Z^* = -\infty$**

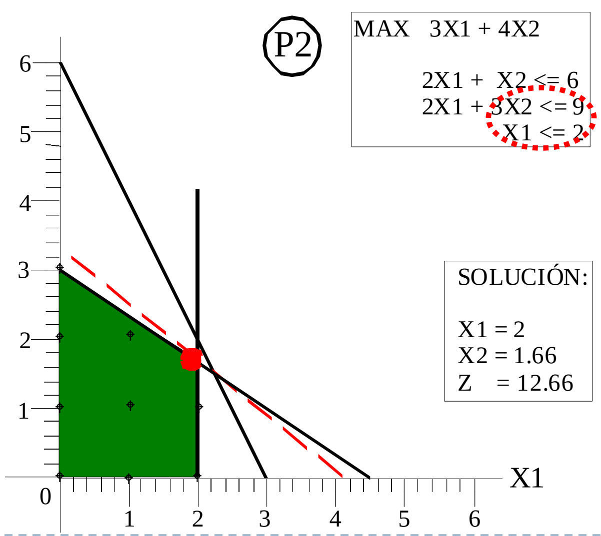
P0

X1=2.25
X2=1.5
Z_0=12.75
$Z^* = -\infty$

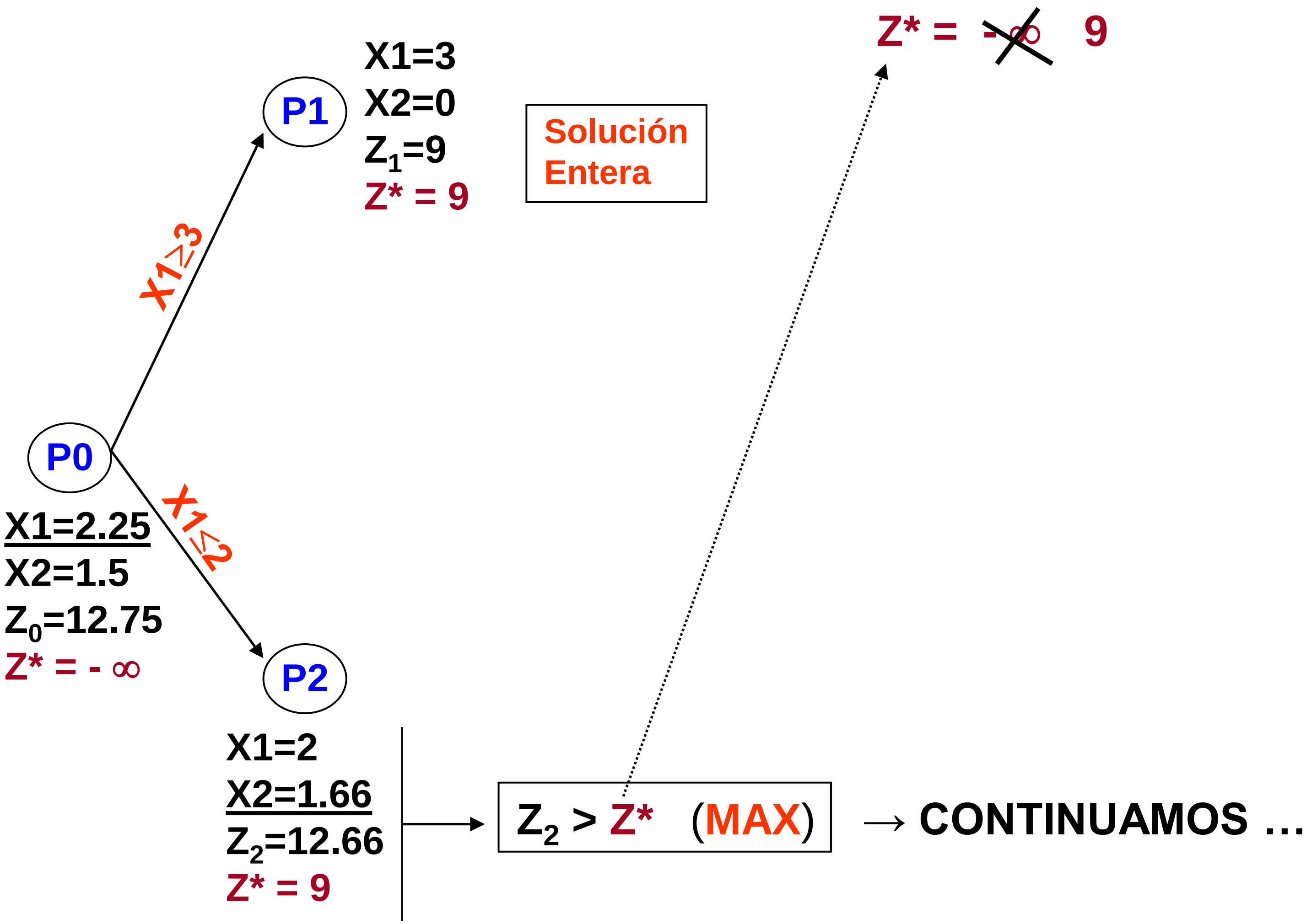
5.3.1 Resolución Gráfica



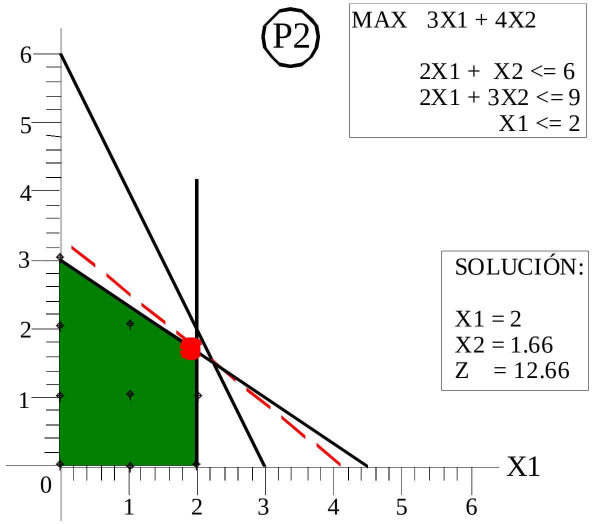


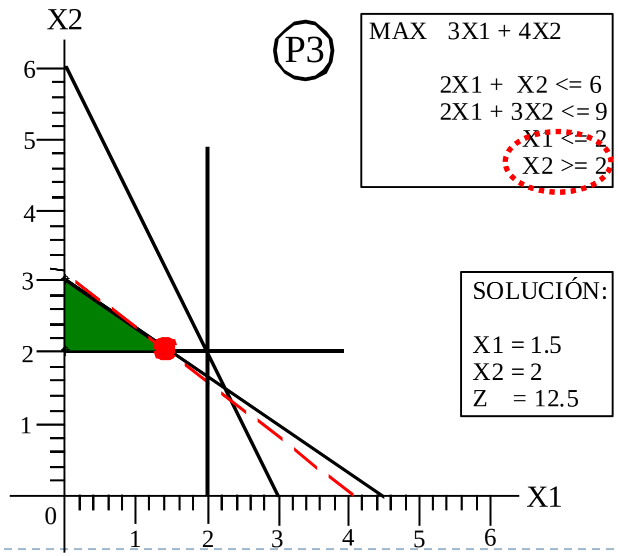


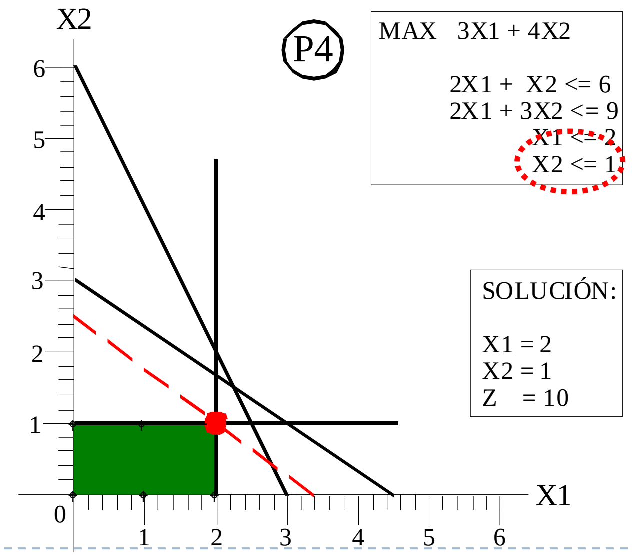
5.3.1 Resolución Gráfica



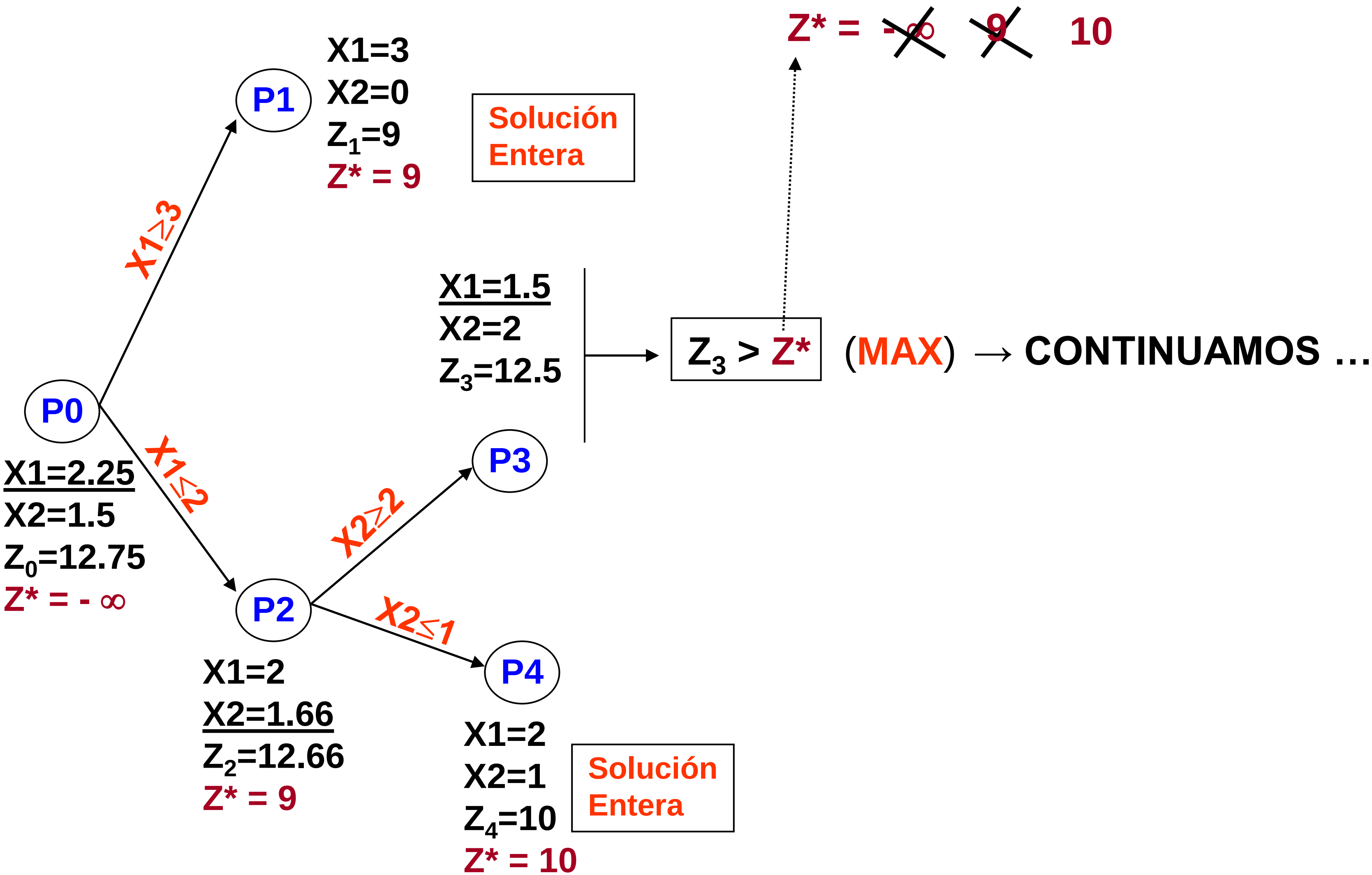
5.3.1 Resolución Gráfica



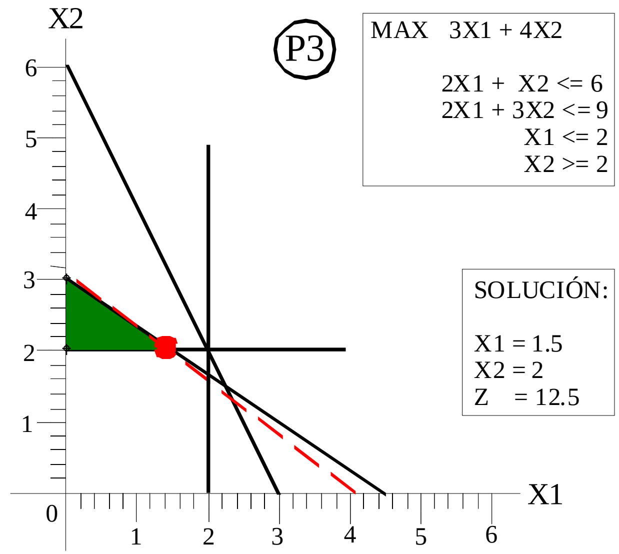


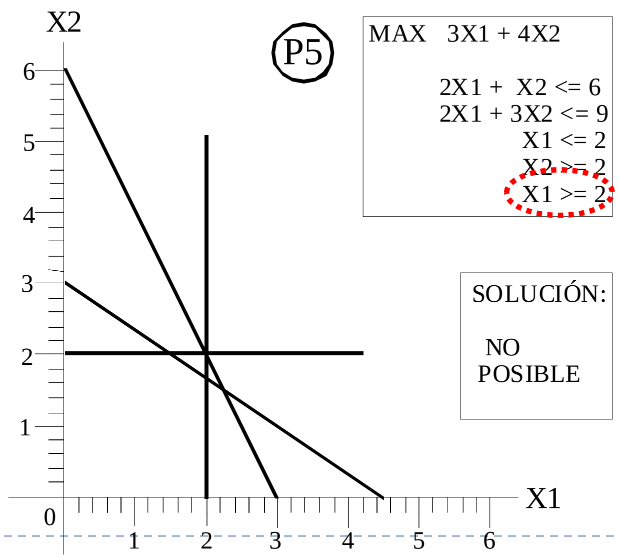


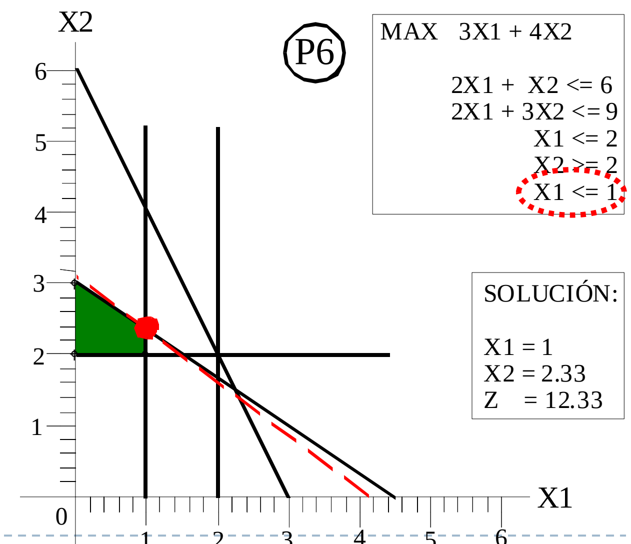
5.3.1 Resolución Gráfica



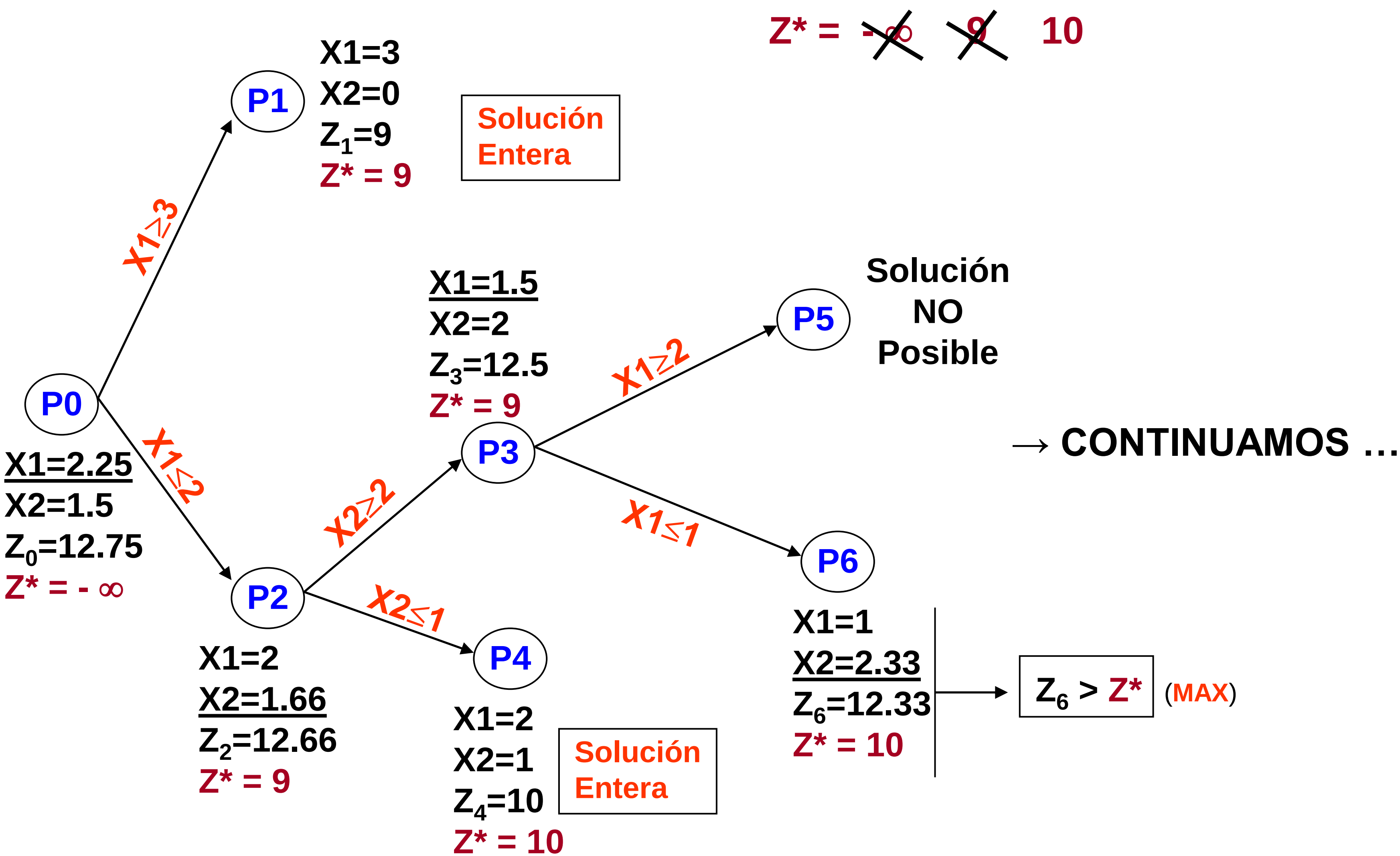
5.3.1 Resolución Gráfica



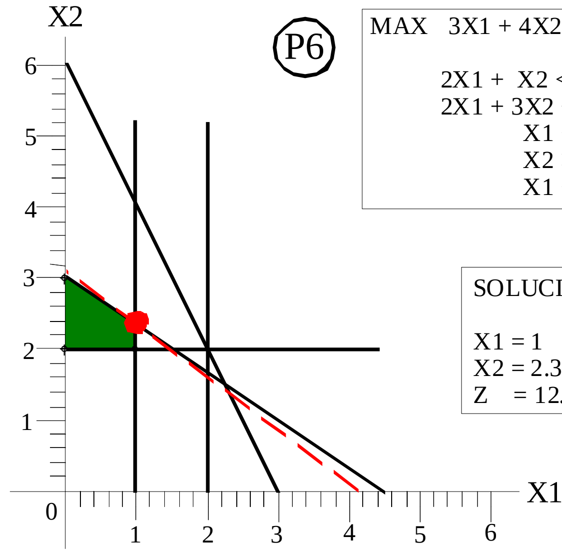




5.3.1 Resolución Gráfica



5.3.1 Resolución Gráfica

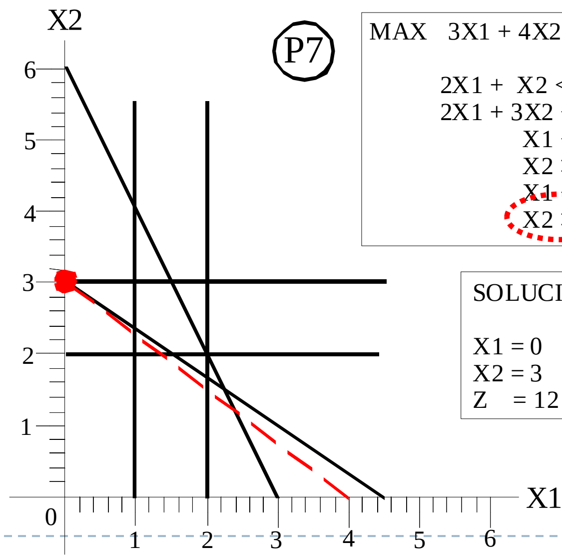


MAX 3X1 + 4X2

2X1 + X2 <= 6
2X1 + 3X2 <= 9
X1 <= 2
X2 >= 2
X1 <= 1

SOLUCIÓN:

X1 = 1
X2 = 2.33
Z = 12.33

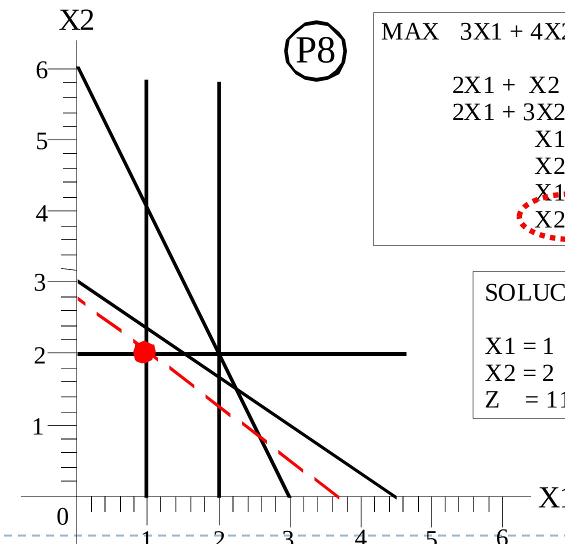


MAX 3X1 + 4X2

2X1 + X2 <= 6
2X1 + 3X2 <= 9
X1 <= 2
X2 >= 2
X1 <= 1
X2 >= 3

SOLUCIÓN:

X1 = 0
X2 = 3
Z = 12



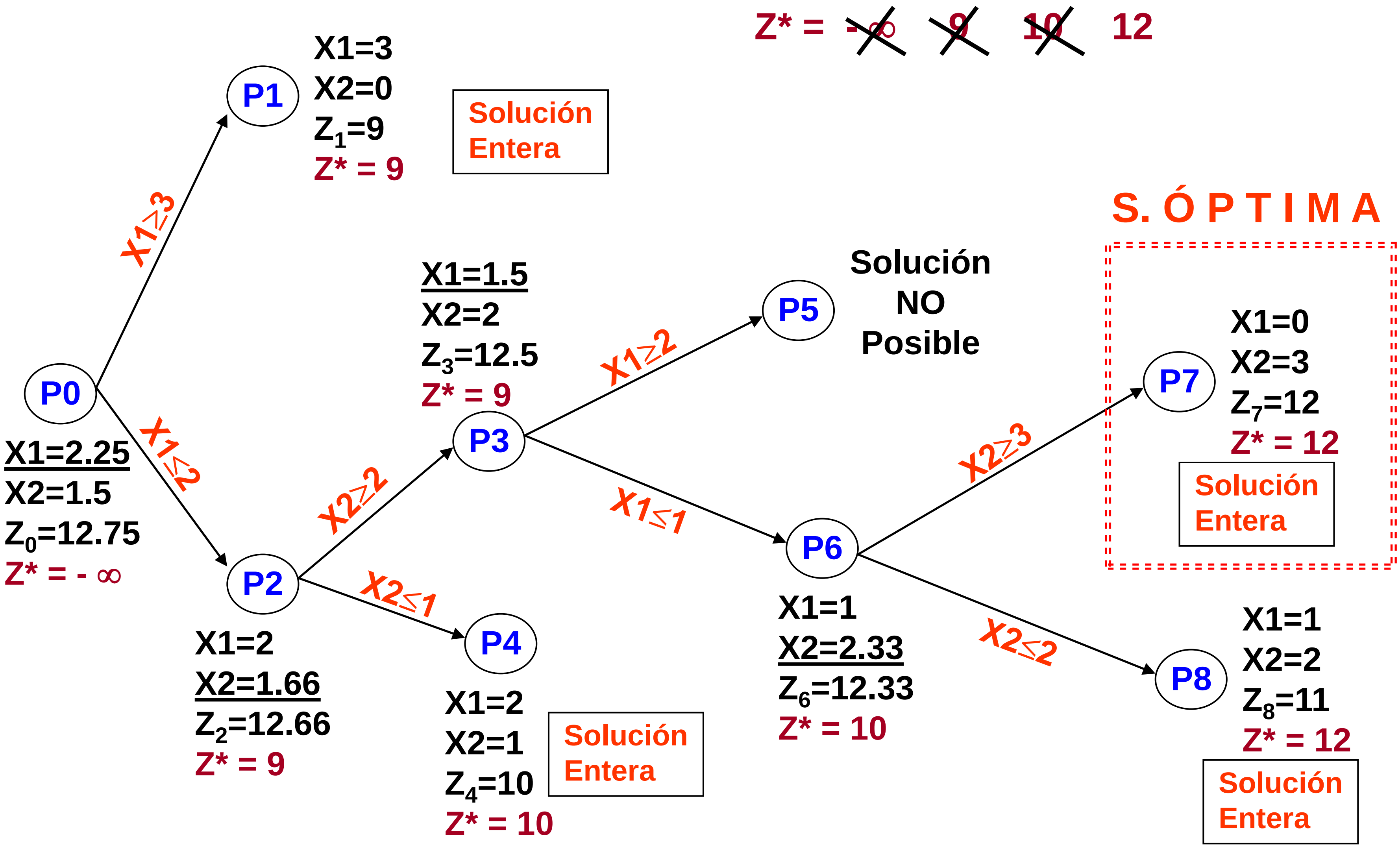
MAX 3X1 + 4X2

2X1 + X2 <= 6
2X1 + 3X2 <= 9
X1 <= 2
X2 >= 2
X1 <= 1
X2 <= 2

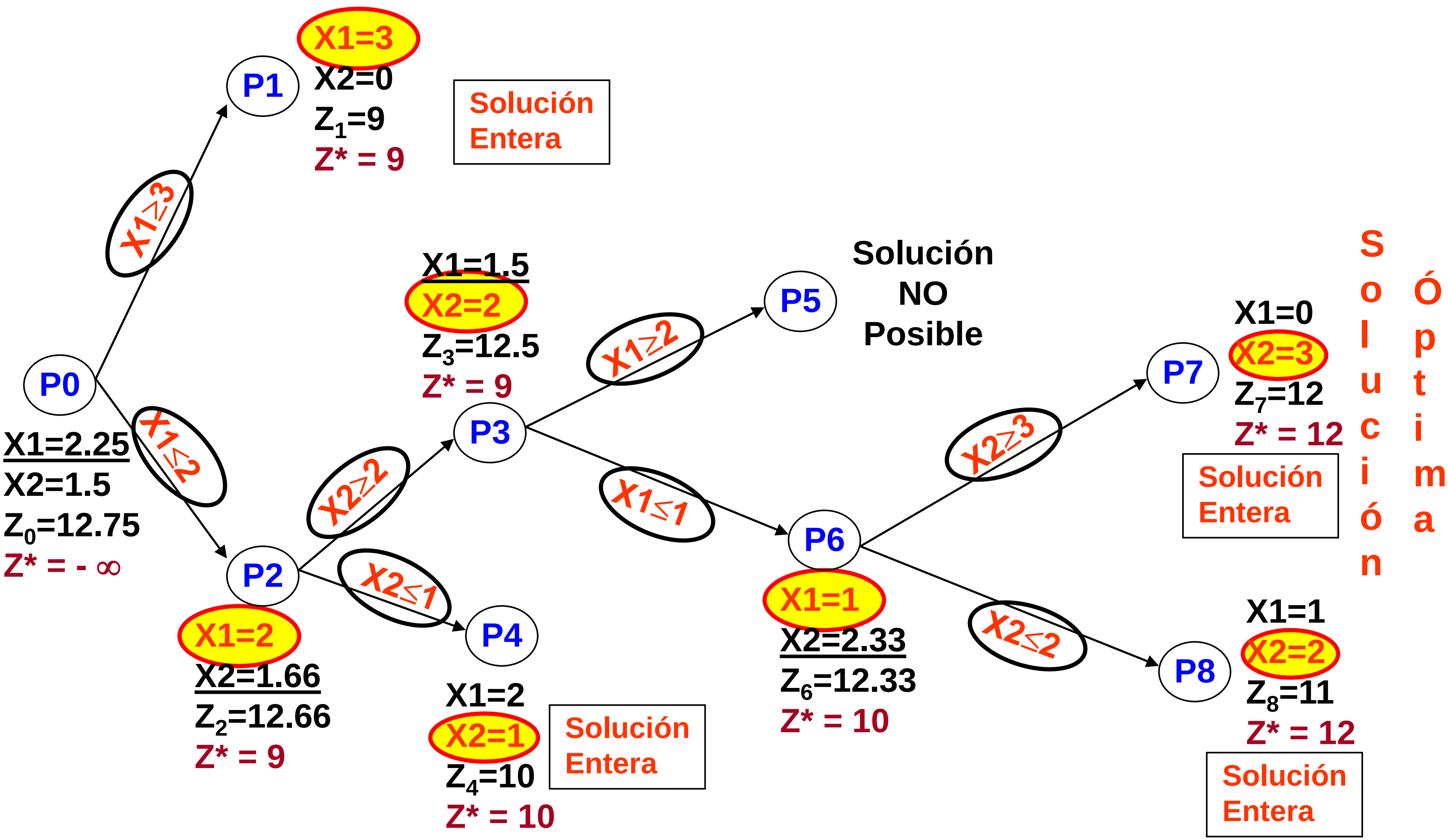
SOLUCIÓN:

X1 = 1
X2 = 2
Z = 11

5.3.1 Resolución Gráfica



5.3.1 Resolución Gráfica



5.3.2 Solución Algebraica

Vamos a aplicar este método de acotación al modelo ejemplo detallando el proceso algebraico necesario.

(P_0): Max 3 x1 + 4 x2

s.a: 2 x1 + x2 $\leq$ 6

2 x1 + 3 x2 $\leq$ 9

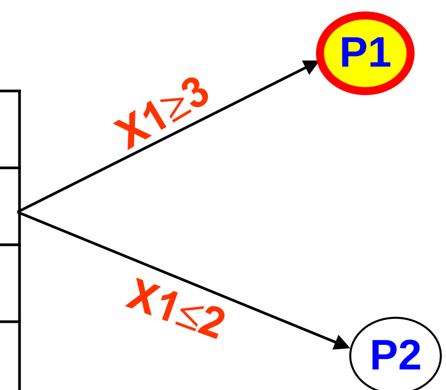
x1, x2 $\geq$ 0 (sin considerar el carácter entero de x1 y x2)

A partir de la tabla de la solución óptima de **P_0**

Tabla simplex de la solución óptima de **P_0** :

Variables: **x1, x2, x3, x4** **($Z^* > -\infty$)**

v.básicas	B^{-1}		x_B
x1	3/4	-1/4	9/4 = **2.25**
X2	-1/2	1/2	3/2 = 1.5
$c^t_B\ B^{-1}$	1/4	5/4	**Z = 51/4 = 12.75**



$$\boxed{P1 = P0(x1,x2,x3,x4) + \boxed{x1 \geq 3}}$$

- Técnica de la cota inferior $\boxed{x1 = 3 + l1;\ l1 \geq 0}$:
  - **x1** en P_1 tomará el valor **3**
  - Para que a partir de la solución óptima de P_0, x1 tome el valor 3, es necesario disponer de algún $\alpha_{x1,j} < 0$ asociado a una **VNB** que permita **incrementar** el valor actual de x1
  - **VNB** en P_0: **x3** y **x4**

$$y_{x3} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad y_{x4} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Pivote

JE

5.3.2 Solución Algebraica

- En P_1 : **VB**: x4 y x2;
  VNB: l1 y x3
- La matriz B^{-1} de P_1 será: $B^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Modelo Equivalente: P_0 + ($x1=3+l1$):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } 3\,x1 + 4\,x2 \\ 2\,x1 + x2 \leq 6 \\ 2\,x1 + 3\,x2 \leq 9 \\ x1,\, x2 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \text{Max } 9 + 3\,l1 + 4\,x2 \\ 2\,l1 + x2 \leq 0 \\ 2\,l1 + 3\,x2 \leq 3 \end{array}$$

- $x_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $Z = 9 + (0, 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9$

Tabla simplex de la **solución óptima de P_1**:

Variables: **l1, x2, x3, x4**

v.básicas	B^{-1}		x_B
x4	-3	1	3
x2	1	0	0
$c^t_B\ B^{-1}$	4	0	**Z = 9**

Solución entera $\rightarrow$ Actualizamos **Z*=9**

✍

5.3.2 Solución Algebraica

(P_0):

Max 3 x1 + 4 x2

s.a:

$2\ x1 + x2 \leq 6$

$2\ x1 + 3\ x2 \leq 9$

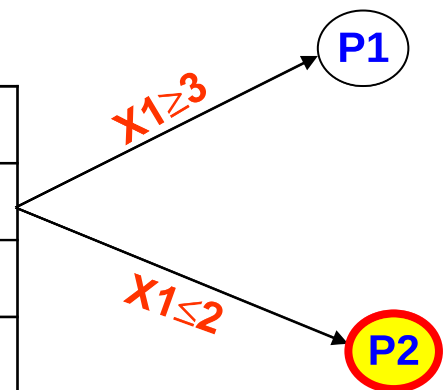
$x1, x2 \geq 0$ y enteras

- A partir de la tabla de la solución óptima de **P_0**

Tabla simplex de la solución óptima de **P_0** :

Variables: **x1, x2, x3, x4**

v.básicas	B^{-1}		x_B
x1	3/4	-1/4	9/4 = **2.25**
X2	-1/2	1/2	3/2 = 1.5
$c^t_B\ B^{-1}$	1/4	5/4	**Z = 51/4 = 12.75**



$$\boxed{P2 = P0(x1,x2,x3,x4) \;+\; \boxed{x1 \leq 2}}$$

- Técnica de la cota superior $\boxed{x1 = 2 - u1;\ 0 \leq u1 \leq 2}$:
  - **x1** en **P_2** tomará el valor **2**
  - Para que a partir de la solución óptima de P_0, x1 tome el valor 2, es necesario disponer de algún $\alpha_{x1,j} > 0$ asociado a una **VNB** que permita **decrementar** el valor actual de x1
  - **VNB** en **P_0**: **x3** y **x4**

$$y_{x4} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad y_{x3} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Pivote

JE

5.3.2 Solución Algebraica

- En P_2 : **VB**: x3 y x2;
  VNB: u1 y x4
- La matriz B^{-1} de P_2 será: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
- Modelo Equivalente: P_0 +(x1=2-u1):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } 3\,x1 + 4\,x2 \\ 2\,x1 + x2 \le 6 \\ 2\,x1 + 3\,x2 \le 9 \\ x1,\, x2 \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \text{Max } 6 - 3\,u1 + 4\,x2 \\ -2\,u1 + x2 \le 2 \\ -2\,u1 + 3\,x2 \le 5 \end{array}$$

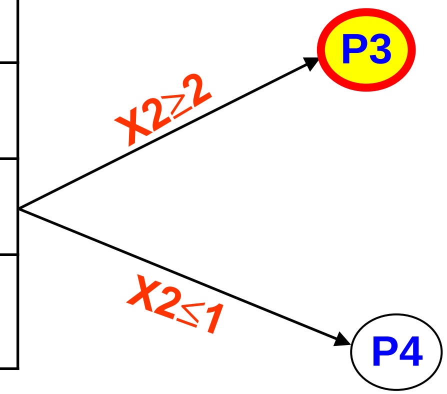
- $X_B = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$
- $Z = 6 + (0, 4) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} = 6 + 20/3 = 38/3 = \mathbf{12.66}$

Solución no entera $\rightarrow$ $Z > Z^*$

Tabla simplex de la **solución óptima de P_2**:

Variables: **u1, x2, x3, x4**

v.básicas	B^{-1}		x_B
x3	1	-1/3	1/3=0.33
x2	0	1/3	5/3=**1.667**
$c^t_B\ B^{-1}$	0	4/3	**Z = 38/3= 12.66**



5.3.2 Solución Algebraica

$$\boxed{P3 = P2(u1,x2,x3,x4)\ +\ \boxed{x2 \geq 2}}$$

- Técnica de la cota inferior $\boxed{x2 = 2 + l2;\ l2 \geq 0}$:
  - x2 en P_3 tomará el valor 2
  - Para que a partir de la solución óptima de P_2, x2 tome el valor 2, es necesario disponer de algún $\alpha_{x2,j} < 0$ asociado a una **VNB** que permita **incrementar** el valor actual de x2
  - **VNB** en P_2: **u1** y **x4**

$$y_{x4} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad y_{u1} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Pivote

JE

5.3.2 Solución Algebraica

- En P_3 : **VB**: x3 y u1

  VNB: l2 y x4

- La matriz B^{-1} de P_3 será: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

- Modelo Equivalente: P_2+ (**x2 = 2 + l2**):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } 6 - 3\,u1 + 4\,x2 \\ -2\,u1 + x2 \le 2 \\ -2\,u1 + 3\,x2 \le 5 \\ \quad u1,\, x2 \ge 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Max } 6 + 8 - 3\,u1 + 4\,\mathbf{l2} \\ -2\,u1 + \mathbf{l2} \le 0 \\ -2\,u1 + 3\,\mathbf{l2} \le -1 \end{array}$$

- $X_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

- $\mathbf{Z} = (6 + 8) + (0, -3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 28/2 - 3/2 = 25/2 = \mathbf{12.5}$

Solución no entera $\rightarrow$ **Z** > **Z***

Tabla simplex de la **solución óptima de P_3**:

Variables: **u1, l2, x3, x4**

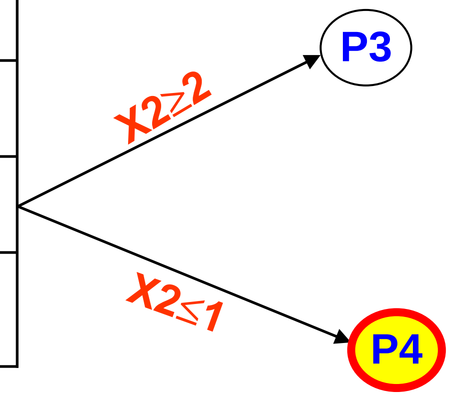
v.básicas	B^{-1}		x_B
x3	1	-1	1
u1	0	-1/2	1/2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	+3/2	**Z = 25/2= 12.5**

$$P_5 = P_3 + \boxed{x1 \geq 2} \text{ y } P_6 = P_3 + \boxed{x1 \leq 1}$$

Tabla simplex de la **solución óptima de P_2**:

Variables: **u1, x2, x3, x4**

v.básicas	B^{-1}		x_B
x3	1	-1/3	1/3=0.33
x2	0	1/3	5/3=**1.667**
$c^t_B\ B^{-1}$	0	4/3	**Z = 38/3= 12.66**



5.3.2 Solución Algebraica

$$\boxed{P4 = P2(u1,x2,x3,x4) + \boxed{x2 \leq 1}}$$

- Técnica de la cota superior $\boxed{x2 = 1 - u2;\ 0 \leq u2 \leq 1}$:
  - **x2** en P_4 tomará el valor **1**
  - Para que a partir de la solución óptima de P_2, x2 tome el valor 1, es necesario disponer de algún $\alpha_{x2,j} > 0$ asociado a una **VNB** que permita **decrementar** el valor actual de x2
  - **VNB** en P_2: **u1** y **x4**

$$y_{u1} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \qquad y_{X4} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Pivote

JE

5.3.2 Solución Algebraica

- En P_4 : **VB**: x3 y x4 (con valor 2);
  VNB: u1 y u2
- La matriz B^{-1} de P_4 será: $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- Modelo Equivalente : P_2+ (**x2 = 1 –u2**):

Max 6 - 3 u1 + 4 x2	Max 6 + 4 - 3 u1 - 4**u2**
-2 u1 + x2 ≤ 2	-2 u1 – **u2** ≤ 1
-2 u1 + 3 x2 ≤ 5	-2 u1 – 3 **u2** ≤ 2
u1, x2 ≥ 0	

- $x_B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$
- $Z = (6 + 4) + (0, 0)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = 10 + 0 = \mathbf{10}$

Solución entera y Z > **Z* → Z* =10**

Tabla simplex de la **solución óptima de P_4**:

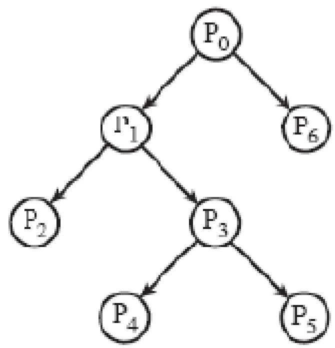
Variables: **u1, u2, x3, x4**

v.básicas	B^{-1}		x_B
x3	1	0	1
x4	0	1	2
$c^t_B B^{-1}$	0	0	**Z = 10**

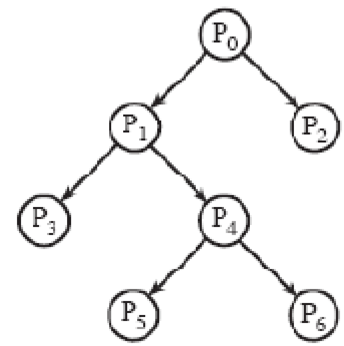
5.3.3 Estrategias de Bifurcación

- Cualquier variable que deba ser entera pero que no lo sea en la solución actual, es una *variable candidata* para bifurcación. Cuál escoger no es una cuestión trivial, y su respuesta ha de basarse en la estructura del problema.
- Los problemas almacenados para ser procesados pueden tratarse mediante estrategias en **profundidad**, en **anchura (mejor cota)** o mixtas.

Búsqueda en profundidad



Búsqueda en anchura



- Normalmente el conocimiento técnico del problema permite establecer el tipo de estrategia a utilizar.

¿Qué nodo elegir para hacer la siguiente bifurcación?

1. **Técnica de la mejor cota (jumptracking)**

   Consiste en elegir el nodo con mejor valor óptimo continuo, pretendiendo con ello encontrar **buenas soluciones factibles**. Cuando se bifurca un nodo esta aproximación resuelve todos los subproblemas creados. Después el proceso continúa bifurcando de nuevo el nodo con mejor valor de la función objetivo. En problemas grandes, este criterio suele conducir a tener que almacenar muchos datos y presenta **problemas de memoria** de ordenador

¿Qué nodo elegir para hacer la siguiente bifurcación?

2. **Técnica de la cota más reciente (backtracking)**

   Este criterio consiste en elegir el nodo de creación más reciente. De esta forma se avanza en profundidad en el árbol y, aunque haya que examinar más nodos que con el criterio anterior (no se tiene en cuenta la función objetivo), es más fácil poder eliminarlos durante el proceso. Requiere **poca memoria** de ordenador

5.3.5 Estrategias de Poda

- La poda de la rama correspondiente tiene lugar por una de las tres razones siguientes:

1. La solución obtenida satisface las condiciones de integralidad (las variables que han de ser enteras, tienen valor entero).
2. El problema considerado NO tiene solución.
3. La solución del problema es continua y el valor de la función objetivo es peor que la mejor cota entera disponible.

(En los 3 casos anteriores, el nodo correspondiente será una **hoja** del árbol de soluciones y por tanto no se bifurcará de nuevo)

Ejercicio Propuesto:

- Dado el siguiente programa lineal:

  MIN 5 x1 + 2 x2

  s.a: $2x_1 + 2x_2 \geq 9$

  $3x_1 + x_2 \geq 11$

  $x_1, x_2 \geq 0$ y enteras

  y teniendo en cuenta que la solución óptima continua es la que se incluye en la siguiente tabla simplex:

v.básicas	B^{-1}		x_B
x1	-1/4	1/2	13/4
x2	3/4	-1/2	5/4
$c^t_B\ B^{-1}$	1/4	3/2	**Z = 75/4**

Calcula la solución óptima entera mediante el algoritmo de bifurcación y acotación utilizando las siguientes técnicas de selección del nodo a bifurcar:

a) Técnica del nodo de creación más reciente

b) Técnica de la mejor cota

En ambos casos empezar acotando la variable x1 inferiormente ($x1 \geq$)

5.4 Desarrollos recientes en programación entera

- Los **modelos de programación entera** son **más difíciles de resolver que los de programación lineal continua** aunque a diferencia de estos últimos los modelos de programación entera tienen muchas menos soluciones que considerar.
  - Tener un número finito de soluciones no asegura que el problema se pueda resolver en un tiempo computacional razonable. Los números finitos pueden ser astronómicamente grandes
  - El hecho de que la solución óptima no se encuentre necesariamente en un punto extremo implica que no se puede utilizar el simplex aunque dada su eficiencia se utiliza tanto como sea posible

5.4 Desarrollos recientes en programación entera

- Existen **problemas** que por su **estructura especial** garantizan **solución entera** aunque no se especifiquen sus variables como tales:

Problema de flujo a coste mínimo

Problema de asignación

Problema de la ruta más corta

Problema de transporte

Problema de transbordo

Problema de flujo máximo

5.4 Desarrollos recientes en programación entera

- La **dificultad computacional** de los modelos de programación lineal entera depende del **número de variables enteras** y muy poco del número de restricciones de modo que es posible que añadir restricciones adicionales facilite la resolución al eliminar soluciones posibles.
- No existe ningún algoritmo para resolver de forma óptima modelos de programación entera cuya **eficiencia** computacional pueda compararse con la del método simplex para programación lineal. Por tanto el desarrollo de algoritmos de programación entera sigue siendo un tema de investigación. Uno de los algoritmos más populares de programación entera es la técnica de **bifurcación y acotación** que hemos visto en apartados anteriores.

5.4 Desarrollos recientes en programación entera

- A finales de la década de los 60 y principios de los 70 se produjo un gran cambio con el desarrollo y refinamiento de las técnicas de bifurcación y acotación. Se podían resolver de forma eficiente modelos relativamente pequeños (por debajo de 100 variables enteras)

- En 1983 y 1985 se presentaron técnicas mejoradas para resolver problemas de programación entera binaria. Al nuevo enfoque algorítmico se le ha dado el nombre de **Bifurcación y Corte** (**Branch and cut**)

5.4 Desarrollos recientes en programación entera

- Los algoritmos de Bifurcación y Corte utilizan una combinación de tres tipos de técnicas:

1. **Preproceso automático del problema**: inspección de la formulación del problema con el fin de detectar algunas reformulaciones que hacen que el problema se resuelva con más rapidez, sin eliminar ninguna solución factible. Estas reformulaciones se pueden clasificar en tres categorías:

   -Fijar variables

   -Eliminar restricciones redundantes

   -Reformular restricciones de modo que sean más restrictivas

5.4 Desarrollos recientes en programación entera

2. **Generación de planos de corte**. Los planos de corte son restricciones funcionales que reducen la región factible del modelo de programación lineal asociado al que estamos resolviendo, sin eliminar soluciones factibles para el problema original. Las técnicas de generación de planos de corte tenderán a acelerar la rapidez con la que el método de bifurcación y acotación puede encontrar una solución óptima para un problema de programación entera

3. **Bifurcación y acotación**

5.4 Desarrollos recientes en programación entera

- Durante los años 90 y siguientes se ha continuado e intensificado las actividades de investigación y desarrollo en programación entera. Se resuelven problemas cada vez más grandes. Por ejemplo al final de la década de los 90 **CPLEX** v6.5 aplicó con éxito un algoritmo de ramificación y corte para resolver un problema con más de 4000 restricciones funcionales y más de 12000 variables. También se está consiguiendo resolver problemas de programación entera mixta con miles de variables enteras generales junto con numerosas variables continuas y variables binarias. Por su parte los programas **LINDO** y **LINGO** incluyen optimizadores para resolver problemas de programación entera. En versiones recientes de LINGO se anunciaba la recodificación completa del módulo de programación entera y la incorporación de opciones adicionales a las versiones anteriores que permiten al usuario ajustar con numerosos parámetros el proceso de búsqueda de la solución.

EJERCICIOS ADICIONALES:

1. Dado el siguiente programa lineal:

MAX Z= 4X1 + 3X2

s.a. 3X1+ 4X2 $\leq$ 12

4X1 + 2X2 $\leq$ 9

X1, X2 $\geq$ 0 y **enteras**

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	2/5	-3/10	21/10
X1	-1/5	2/5	12/10
$c_B^t\ B^{-1}$	2/5	7/10	Z=111/10

Obtener la solución óptima entera. Aplicar el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** bifurcando en la solución óptima continua la variable X2.Utilizar como **técnica** de **selección del nodo a explorar** la del **nodo de creación más reciente**. En cada nodo empezar acotando superiormente las variables ($\leq$).

SOLUCIÓN: **X1 = 1; X2 = 2; Z = 10**

Ejercicios Adicionales:

2. Dado el siguiente programa lineal:

MIN 2X1 + 3X2

s.a: [R1] X1 + X2 ≥3

[R2] X1 + 3X2 ≥6

X1, X2≥ 0 y enteras

Cuya solución óptima continua se incluye en la tabla siguiente:

v.básicas	B^{-1}		x_B
X1	3/2	-1/2	3/2
X2	-1/2	1/2	3/2
$c_B^t\ B^{-1}$	3/2	1/2	Z=15/2

Obtener la **solución óptima entera** aplicando el algoritmo de Bifurcación y Acotación. Genera el árbol de soluciones mediante la técnica de la mejor cota y comienza acotando inferiormente (≥) la variable X1.

SOLUCIÓN: **X1 = 1; X2 = 2; Z = 8**

Ejercicios Adicionales:

3. Dado el siguiente programa lineal:

MAX Z= 2X1 + X2

s.a. X1 – X2 $\leq$ 5

4X1 + 3X2 $\leq$ 10

X1, X2 $\geq$ 0 y **enteras**

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente (X3 es la variable de holgura de la primera restricción):

v.básicas	B^{-1}		x_B
X3	1	-¼	5/2
X1	0	¼	5/2
$c_B^t\ B^{-1}$	0	½	Z=5

Aplicar el algoritmo de **Bifurcación y Acotación** hasta encontrar **una solución entera.** Utilizar como **técnica** de **bifurcación** la de la **mejor cota.** <u>En cada nodo empezar acotando inferiormente las variables</u>.

La solución obtenida en el apartado anterior, ¿es óptima? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN: **X1 = 2; X2 = 0; Z = 4**

Material complementario…

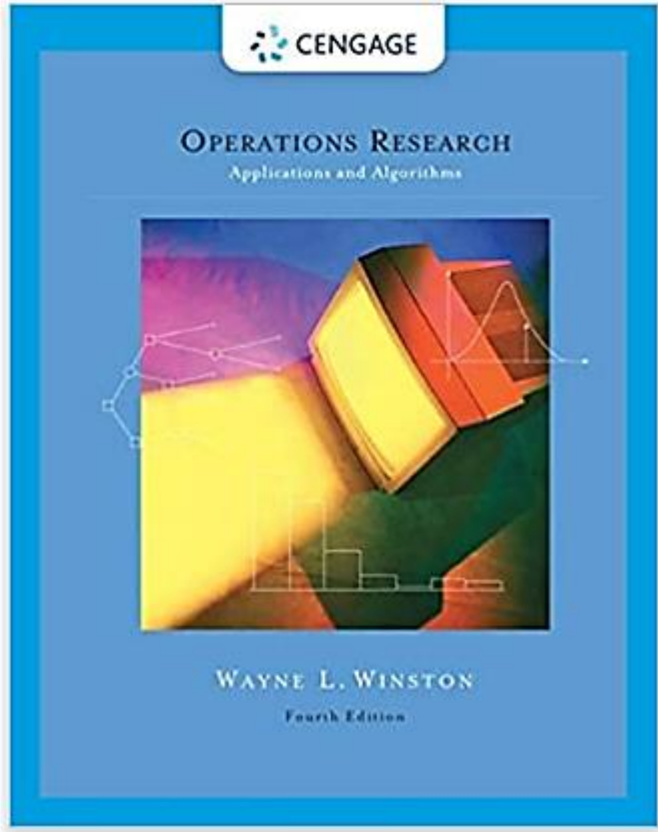
Winston, W., Operations Research: Applications and Algorithms, 4th edition

Chapter 9: Integer Programming

9.3 The Branch-and-Bound Method for Solving Pure Integer Programming Problems

9.4 The Branch-and-Bound Method for Solving Mixed Integer Programming Problems

9.5 Solving Knapsack Problems by the Branch-and-Bound Method



Material complementario…

Winston,W., Investigación de Operaciones: Aplicaciones y algoritmos, 4ª edición

Capítulo 9: Programación entera

9.3 Método de ramificación y acotamiento para resolver problemas de programación pura con enteros

9.4 Método de ramificación y acotamiento para resolver problemas de programación mezclados con enteros (Programación mixta)

9.5 Resolución de problemas de la mochila por el método de ramificación y acotamiento