

TEMA 3.4. ALGORITMO SIMPLEX REVISADO + TÉCNICA DE LAS COTAS

---

**3.4.1** Dado el siguiente modelo de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= X_1 + 3X_2 - 2X_3 \\ \text{s.a} \quad [\text{R1}] \quad &X_2 - 2X_3 \leq 2 \\ [\text{R2}] \quad &2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 8 \\ [\text{R3}] \quad &X_1 + \frac{1}{2}X_2 \geq 2 \\ [\text{C1}] \quad &0 \leq X_1 \leq 1 \\ [\text{C2}] \quad &0 \leq X_2 \leq 3 \\ [\text{C3}] \quad &1 \leq X_3 \leq 2 \end{aligned}$$

Obtener la **solución óptima** aplicando el algoritmo **simplex revisado** con **variables acotadas** y el **método de las 2 fases**. En cada iteración calcular los valores de los parámetros  $\beta$ ,  $u_j$ ,  $\delta$  para justificar el cambio de solución. Indicar el valor de las variables y la función objetivo en la solución óptima.

**3.4.2** Resolver el siguiente programa lineal aplicando el algoritmo del **Simplex** con **variables acotadas**:

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad &x_1 + x_2 \geq 4 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ &2x_1 + x_2 = 6 \\ &0 \leq x_1 \leq 1 \\ &x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

En cada iteración, calcular el valor de  $\beta$ ,  $u_j$  y  $\delta$ . Indicar claramente el valor de las variables decisión y de holgura en la solución óptima.

**3.4.3** Resolver el siguiente programa lineal aplicando el algoritmo **Simplex** con **variables acotadas**:

$$\begin{aligned} \text{Max } &4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a:} \quad &2x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ &2x_1 + x_2 \leq 9; \\ &1 \leq x_1 \leq 4; \\ &0 \leq x_2 \leq 1; \end{aligned}$$

## Soluciones Problemas Tema 3.4

### 3.4.1

En primer lugar, se transforma el modelo teniendo en cuenta la cota inferior definida sobre  $X_3$ :

$\begin{aligned} \text{MAX } X_1 + 3X_2 - 2X_3 \\ X_2 - 2X_3 &\leq 2 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 &\leq 8 \\ X_1 + 1/2 X_2 &\geq 2 \\ 0 \leq X_1 &\leq 1 \\ 0 \leq X_2 &\leq 3 \\ 1 \leq X_3 \leq 2; X_3 \geq 1 &\rightarrow X_3 = 1 + \ell_3 \end{aligned}$	$\rightarrow$	$\begin{aligned} \text{MAX } X_1 + 3X_2 - 2(1 + \ell_3) \\ X_2 - 2(1 + \ell_3) &\leq 2 \\ 2X_1 + X_2 + 2(1 + \ell_3) &\leq 8 \\ X_1 + 1/2 X_2 &\geq 2 \\ 0 \leq X_1 &\leq 1 \\ 0 \leq X_2 &\leq 3 \\ 0 \leq \ell_3 &\leq 1 \end{aligned}$	$\rightarrow$	$\begin{aligned} \text{MAX } -2 + X_1 + 3X_2 - 2\ell_3 \\ X_2 - 2\ell_3 &\leq 4 \\ 2X_1 + X_2 + 2\ell_3 &\leq 6 \\ X_1 + 1/2 X_2 &\geq 2 \\ 0 \leq X_1 &\leq 1 \\ 0 \leq X_2 &\leq 3 \\ 0 \leq \ell_3 &\leq 1 \end{aligned}$
--	---------------	---	---------------	--

Dado que el modelo incluye restricciones de tipo  $\geq$  para poder obtener la Solución Básica inicial factible es necesario definir variables artificiales. Al definir dichas variables se obtiene el siguiente **MODELO AMPLIADO** expresado en forma estándar:

MODELO AMPLIADO (forma Estándar)

$$\text{MAX } -2 + X_1 + 3X_2 - 2\ell_3$$

$$X_2 - 2\ell_3 + S_1 = 4$$

$$2X_1 + X_2 + 2\ell_3 + S_2 = 6$$

$$X_1 + 1/2 X_2 - S_3 + A_3 = 2$$

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$0 \leq X_2 \leq 3$$

$$0 \leq \ell_3 \leq 1$$

- Para resolver el modelo ampliado aplicaremos el Método de las 2 Fases.
- Además, deberemos tener en cuenta las cotas superiores definidas sobre  $X_1$ ,  $X_2$  y  $\ell_3$ :

$$X_1 = 1 - u_{X_1}; u_{X_1} \leq 1$$

$$X_2 = 3 - u_{X_2}; u_{X_2} \leq 3$$

$$\ell_3 = 1 - u_{\ell_3}; u_{\ell_3} \leq 1$$

En cada una de las cotas superiores existentes las correspondientes variables auxiliares están acotadas superiormente por lo que trabajaremos con una  $u$  otra variable de cada una de las expresiones anteriores según que  $X_1$ ,  $X_2$  o  $\ell_3$  estén o no en su cota superior.

## PROBLEMAS RESUELTOS

### FASE 1: MIN A3

SB0:

VARIABLES = (X1, X2,  $\ell_3$ , S1, S2, S3, A3)

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$
S1	1	0	0	4
S2	0	1	0	6
A3	0	0	1	2
$c_B^t B^{-1}$	0	0	1	$Z=2$

$$C_{x1} - Z_{x1} = -1$$

$$C_{x2} - Z_{x2} = -1/2$$

$$C_{\ell_3} - Z_{\ell_3} = 0$$

$$C_{s3} - Z_{s3} = 1$$

La variable que entre en la base (JE) es X1

Calculamos el vector  $y_{x1}$ :

$$y_{x1} = B^{-1}a_{x1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como X1 está acotada superiormente calculamos  $\beta$ ,  $u_j$  y  $\delta$  para saber qué tipo de cambio de base se produce.

$$\beta = \min (b_i / \alpha_{iJE}^+) = 2$$

$$u_j = 1$$

$\delta$  no existe ya que ninguna de las var. básicas tienen cota superior

$$\theta_j = \min (\beta, u_j, \delta) = 1 (u_j)$$

Es decir, antes de que ninguna variable básica se haga 0, la variable X1 alcanza su cota superior.

## PROBLEMAS RESUELTOS

El cambio de solución implica no cambiar de base y pasar a trabajar con un modelo en el que  $x_1 = 1 - u_{x1}$  y  $u_{x1}$  es variable no básica:

### MODELO SOLUCIÓN BÁSICA 1

$$\text{MAX } -2 + (1 - u_{x1}) + 3x_2 - 2l_3$$

$$x_2 - 2l_3 + s_1 = 4$$

$$2(1 - u_{x1}) + x_2 + 2l_3 + s_2 = 6$$

$$(1 - u_{x1}) + 1/2 x_2 - s_3 + a_3 = 2$$

SB 1:

$$\text{VARIABLES} = (u_{x1}, x_2, l_3, s_1, s_2, s_3, a_3)$$

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$
S1	1	0	0	4
S2	0	1	0	4
A3	0	0	1	1
$c_B^t B^{-1}$	0	0	1	$Z=1$

$$c_{u_{x1}} - Z_{u_{x1}} = 1$$

$$c_{x_2} - Z_{x_2} = -1/2$$

$$c_{l_3} - Z_{l_3} = 0$$

$$c_{s_3} - Z_{s_3} = 1$$

Por tanto, **JE:  $x_2$**

Calculamos el vector  $y_{x_2}$ :

$$y_{x_2} = B^{-1}a_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Como  $x_2$  está acotada superiormente calculamos  $\beta$ ,  $u_j$  y  $\delta$  para saber qué tipo de cambio de base se produce.

$$\beta = \min (b_i / \alpha_{ij}^+) = 2$$

$$u_j = 3$$

$\delta$  no existe ya que ninguna de las var. básicas tienen cota superior

$$\theta_j = \min (\beta, u_j, \delta) = 2 (\beta)$$

por tanto se produce un cambio de base cuando entra  $x_2$  y la variable  $A_3$  alcanza el valor 0.

## PROBLEMAS RESUELTOS

La variable con menor ratio ( $x_b/y_{x2,i^+}$ ) es A3, por lo que la variable que sale de la base (IS) es A3

La nueva solución básica es:

**SB2:**

VARIABLES = ( $u_{x1}$ , X2,  $\ell_3$ , S1, S2, S3, A3)

v.básicas	B <sup>-1</sup>			x <sub>B</sub>
S1	1	0	-2	2
S2	0	1	-2	2
X2	0	0	2	2
c <sub>B</sub> <sup>t</sup> B <sup>-1</sup>	0	0	0	Z=0

Esta es la solución óptima de la FASE 1. Pasamos por tanto a la FASE 2 del método.

**FASE 2: MAX -2 + (1 -  $u_{x1}$ ) + 3x2 -2  $\ell_3$**

La tabla del simplex actualizada con la actual función objetivo es:

VARIABLES = ( $u_{x1}$ , X2,  $\ell_3$ , S1, S2, S3)

v.básicas	B <sup>-1</sup>			x <sub>B</sub>
S1	1	0	-2	2
S2	0	1	-2	2
X2	0	0	2	2
c <sub>B</sub> <sup>t</sup> B <sup>-1</sup>	0	0	6	Z=5

$$C_{u_{x1}} - Z_{u_{x1}} = 5$$

$$C_{\ell_3} - Z_{\ell_3} = -2$$

$$C_{s3} - Z_{s3} = 6$$

La solución actual todavía **no** es solución óptima y se elige **JE: S3**.

Calculamos el vector  $y_{s3}$ :

$$y_{s3} = B^{-1}a_{s3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y calculamos los parámetros  $\beta$ ,  $u_j$  y  $\delta$  para saber qué tipo de cambio de base se produce.

$$\beta = \min (b_i / \alpha_{ijE}^+) = 1$$

$u_j$  no existe ya que S3 no está acotada superiormente

$$\delta = \min ((b_i - \text{cota superior } X_i) / \alpha_{ijE}^-) = (2 - 3) / -2 = 1/2$$

$$\theta_j = \min (\beta, u_j, \delta) = 1/2 (\delta)$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

por tanto, se trata de un cambio de base porque la variable básica  $X_2$  alcanza su cota superior:

**JE: S3** y **IS: X2**.

Trabajamos con un modelo en el que  $X_2 = 3 - u_{X2}$  y en la nueva solución  $u_{X2}$  es variable no básica:

### MODELO SOLUCIÓN BÁSICA 3

$$\text{MAX } -2 + 1 - u_{X1} + 3(3 - u_{X2}) - 2 \ell_3$$

$$(3 - u_{X2}) - 2 \ell_3 + S1 = 4$$

$$-2 u_{X1} + (3 - u_{X2}) + 2 \ell_3 + S2 = 4$$

$$-u_{X1} + 1/2 (3 - u_{X2}) - S3 + A3 = 1$$

La nueva solución es la de la siguiente tabla:

**SB3:**

VARIABLES =  $(u_{X1}, u_{X2}, \ell_3, S1, S2, S3)$

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$
S1	1	0	0	1
S2	0	1	0	1
S3	0	0	-1	1/2
$c_B^t B^{-1}$	0	0	0	$Z=8$

$$C_{u_{X1}} - Z_{u_{X1}} = -1$$

$$C_{u_{X2}} - Z_{u_{X2}} = -3$$

$$C_{\ell_3} - Z_{\ell_3} = -2$$

Como  $C_j - Z_j \leq 0$  para todo  $j$ , la solución actual es **SOLUCIÓN OPTIMA**.

Deshacemos los cambios de variables para conocer el valor de las variables del modelo original. El valor de las variables decisión y el de la función objetivo son los siguientes:

$$X1 = 1 - u_{X1} = 1$$

$$X2 = 3 - u_{X2} = 3$$

$$X3 = 1 + \ell_3 = 1$$

**FUNCIÓN OBJETIVO: 8**

## PROBLEMAS RESUELTOS

### 3.4.2

En primer lugar, se transforma el modelo teniendo en cuenta la cota inferior definida sobre  $X_2$ :

$\begin{aligned} \text{MAX } 3X_1 + X_2 \\ X_1 + X_2 &\geq 4 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ 2X_1 + X_2 &= 6 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 \\ X_2 \geq 2 &\rightarrow X_2 = 2 + l_2 \end{aligned}$	$\rightarrow$	$\begin{aligned} \text{MAX } 3X_1 + 2 + l_2 \\ X_1 + 2 + l_2 &\geq 4 \\ X_1 + 2(2+l_2) &\leq 10 \\ 2X_1 + 2 + l_2 &= 6 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 \\ l_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\rightarrow$	$\begin{aligned} \text{MAX } 2 + 3X_1 + l_2 \\ X_1 + l_2 &\geq 2 \\ X_1 + 2l_2 &\leq 6 \\ 2X_1 + l_2 &= 4 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 \\ l_2 \geq 0 \end{aligned}$
---	---------------	--	---------------	---

Dado que el modelo incluye restricciones de tipo  $\geq$  y  $=$ , para poder obtener la Solución Básica inicial factible es necesario definir variables artificiales. Al definir dichas variables se obtiene el siguiente MODELO AMPLIADO expresado en forma estándar:

#### MODELO AMPLIADO (forma Estándar)

$$\text{MAX } 2 + 3X_1 + l_2$$

$$X_1 + l_2 - X_3 + X_a = 2$$

$$X_1 + 2l_2 + X_4 = 6$$

$$2X_1 + l_2 + X_b = 4$$

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$l_2 \geq 0$$

- Para resolver el modelo ampliado aplicaremos el Método de las 2 Fases.
- Además deberemos tener en cuenta la cota superior definida sobre  $X_1$ . Para ello se define la variable  $X_1'$  como:

$$X_1 + u_1 = 1$$

a su vez  $u_1 \leq 1$ , por lo que trabajaremos con ambas variables utilizando una u otra según que  $X_1$  esté o no en su cota superior.

## PROBLEMAS RESUELTOS

FASE 1: MIN  $x_a + x_b$

### SOLUCIÓN BÁSICA INICIAL

**Tabla SB<sub>0</sub>**  
(Variables:  $x_1, l_2, x_3, x_4, x_a, x_b$ )

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$
$x_a$	1	0	0	2
$x_4$	0	1	0	6
$x_b$	0	0	1	4
$c_B^t B^{-1}$	1	0	1	$Z = 6$

$$z_j = c_B^t y_j = (c_B^t B^{-1}) a_j$$

$$z_{x1} = c_B^t y_{x1} = (c_B^t B^{-1}) a_{x1} = (1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3; \quad c_{x1} - z_{x1} = -3$$

$$z_{l2} = c_B^t y_{l2} = (c_B^t B^{-1}) a_{l2} = (1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2; \quad c_{l2} - z_{l2} = -2$$

$$z_{x3} = c_B^t y_{x3} = (c_B^t B^{-1}) a_{x3} = (1, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1; \quad c_{x3} - z_{x3} = 1$$

JE:  $x_1$

$$y_{x1} = B^{-1} a_{x1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Tabla SB<sub>0</sub>**  
(Variables:  $x_1, l_2, x_3, x_4, x_a, x_b$ )

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$	$y_{x1}$	$\frac{x_B}{y_{x1}}$
$x_a$	1	0	0	2	1	2
$x_4$	0	1	0	6	1	6
$x_b$	0	0	1	4	2	2
$c_B^t B^{-1}$	1	0	1	$Z = 6$		



## PROBLEMAS RESUELTOS

Como  $x_1$  está acotada superiormente calculamos  $\beta$ ,  $u_j$  y  $\delta$  para saber qué tipo de cambio de base se produce.

$$\beta = \min (b_i / \alpha_{ij}^+) = 2$$

$$u_j = 1$$

$\delta$  no existe ya que ninguna de las var. Básicas tienen cota superior

$$\theta_j = \min (\beta, u_j, \delta) = u_j$$

- No hay cambio de variables básicas
- Recalcular el valor de las variables y de la función objetivo. Pasamos a trabajar con un modelo en el que aparece  $u_1$  en lugar de  $x_1$ .

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = c_B^t X_B = 3$$

**Tabla SB<sub>1</sub>**  
**(Variables:  $u_1$ ,  $l_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_a$ ,  $x_b$ )**

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$
$x_a$	1	0	0	1
$x_4$	0	1	0	5
$x_b$	0	0	1	2
$c_B^t B^{-1}$	1	0	1	$Z = 3$

$$z_{x1'} = (1, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3; \quad c_{x1} - z_{x1} = 3$$

$$z_{l2} = 2; \quad c_{l2} - z_{l2} = -2$$

$$z_{x3} = -1; \quad c_{x3} - z_{x3} = 1$$

JE: L2

$$Y_{l2} = B^{-1} a_{l2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

**Tabla SB<sub>1</sub>**  
(Variables:  $u_1, l_2, x_3, x_4, x_a, x_b$ )

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$	$Y_{l_2}$	$\frac{x_B}{y_{y2}}$
$x_a$	1	0	0	1	1	1
$x_4$	0	1	0	5	2	5/2
$x_b$	0	0	1	2	1	2
$c_B^t B^{-1}$	1	0	1	$Z = 3$		

- Calculamos  $\beta$ ,  $u_j$  y  $\delta$  para saber qué tipo de cambio de base se produce.

$$\beta = \min (b_i / \alpha_{ij}^+) = 1$$

$U_j$  no existe

$\delta$  no existe ya que ninguna de las var. Básicas tienen cota superior

➔ Cambio de base por Beta

**IS:  $x_a$**

**Tabla SB<sub>2</sub>**  
(Variables:  $u_1, l_2, x_3, x_4, x_a, x_b$ )

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$
$l_2$	1	0	0	1
$x_4$	-2	1	0	3
$x_b$	-1	0	1	1
$c_B^t B^{-1}$	-1	0	1	$Z = 1$

$$z_{u1} = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1; \quad c_{u1} - z_{u1} = 1$$

$$z_{x3} = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1; \quad c_{x3} - z_{x3} = -1$$

**JE:  $x_3$**

## PROBLEMAS RESUELTOS

$$Y_{x3} = B^{-1} a_{x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Tabla SB<sub>2</sub>**  
(Variables: u<sub>1</sub>, l<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>, x<sub>a</sub>, x<sub>b</sub>)

v.básicas	B <sup>-1</sup>			x <sub>B</sub>	Y <sub>x3</sub>	$\frac{x_B}{y_{x3}}$
l <sub>2</sub>	1	0	0	1	-1	
x <sub>4</sub>	-2	1	0	3	2	3/2
X <sub>b</sub>	-1	0	1	1	(1)	1
c <sub>B</sub> <sup>t</sup> B <sup>-1</sup>	-1	0	1	Z = 1		

Calculamos β, u<sub>j</sub> y δ para saber qué tipo de cambio de base se produce.

$$\beta = \min (b_i / \alpha_{i,j}^+) = 1$$

U<sub>j</sub> no existe

δ no existe ya que ninguna de las var. Básicas tienen cota superior

### Cambio de base por Beta

**IS: x<sub>b</sub>**

La nueva solución Básica es:

**Tabla SB<sub>3</sub>**  
(Variables: u<sub>1</sub>, l<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>, x<sub>a</sub>, x<sub>b</sub>)

v.básicas	B <sup>-1</sup>			x <sub>B</sub>
l <sub>2</sub>	0	0	1	2
x <sub>4</sub>	0	1	-2	1
x <sub>3</sub>	-1	0	1	1
c <sub>B</sub> <sup>t</sup> B <sup>-1</sup>	0	0	0	Z = 0

### SOLUCIÓN ÓPTIMA FASE 1

## PROBLEMAS RESUELTOS

FASE 2:  $\text{MAX } 2 + 3x_1 + x_2$

- Recalcular el valor de  $c_B^t B^{-1}$
- Recalcular el valor de la función objetivo

$$c_B^t B^{-1} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z = 2 + 3 + c_B^t x_B = 7$$

**Fase 2: Tabla SB<sub>3</sub>**  
(Variables:  $u_1, l_2, x_3, x_4, x_a, x_b$ )

v.básicas	$B^{-1}$			$x_B$
$l_2$	0	0	1	2
$x_4$	0	1	-2	1
$x_3$	-1	0	1	1
$c_B^t B^{-1}$	0	0	1	$Z = 7$

$$z_{u1} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2; \quad c_{u1} - z_{u1} = -3 + 2 = -1$$

por tanto la solución actual es SOLUCIÓN ÓPTIMA.

El valor de las variables decisión y de la función objetivo es:

$$x_1 = 1 - u_1 \rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = 2 + l_2 = 2 + 2 = 4$$

**FUNCIÓN OBJETIVO  $Z = 7$**

3.4.3

---

$$\begin{aligned} \text{Max } & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a: } & 2x_1 + 3x_2 \leq 9; \\ & 2x_1 + x_2 \leq 9; \\ & 1 \leq x_1 \leq 4; \\ & 0 \leq x_2 \leq 1; \end{aligned}$$

TÉCNICA COTA INFERIOR:

$$x_1 = 1 + \ell_{x1}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } & 4(1 + \ell_{x1}) + 5x_2 \\ \text{s.a: } & 2(1 + \ell_{x1}) + 3x_2 \leq 9; \\ & 2(1 + \ell_{x1}) + x_2 \leq 9; \\ & \ell_{x1} \leq 3; \\ & 0 \leq x_2 \leq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } & 4 + 4\ell_{x1} + 5x_2 \\ \text{s.a: } & 2\ell_{x1} + 3x_2 \leq 7; \\ & 2\ell_{x1} + x_2 \leq 7; \\ & \ell_{x1} \leq 3; \\ & 0 \leq x_2 \leq 1; \end{aligned}$$

TÉCNICA COTA SUPERIOR:

$$\ell_{x1} \leq 3 \rightarrow \ell_{x1} = 3 - u_{x1}; \quad u_{x1} \leq 3$$

$$x_2 \leq 1 \rightarrow x_2 = 1 - u_{x2}; \quad u_{x2} \leq 1$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

### MODELO AMPLIADO:

$$\begin{aligned} \text{Max } 4 + 4 \ell_{x1} + 5 x_2 \\ \text{s.a: } 2 \ell_{x1} + 3 x_2 + h_1 &= 7; \\ 2 \ell_{x1} + x_2 + h_2 &= 7; \end{aligned}$$

### Tabla SBF0:

Modelo ( $\ell_{x1}$ ,  $x_2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ )

v.básicas	B_inversa	XB	Yx2	XB/Yx
h1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	7	3	7/3
h2		7	1	7
CtBBinv	0 0	Z=4		

\*Variables no básicas:  $\ell_{x1}, x_2$

$$C_{\ell_{x1}} - Z_{\ell_{x1}} = 4$$

$$C_{x_2} - Z_{x_2} = 5 \quad \leftarrow \text{JE}$$

Beta: 7/3

Ux2: 1

Delta: Infinito

Mínimo: Ux2 (SI cambio de modelo, NO cambio de base)  
( $x_2$  alcanza su cota)

$$\text{Max } 4 + 4 \ell_{x1} + 5 (1 - u_{x2})$$

$$\text{s.a: } 2 \ell_{x1} + 3 (1 - u_{x2}) + h_1 = 7;$$

$$2 \ell_{x1} + (1 - u_{x2}) + h_2 = 7;$$

$$\begin{aligned} \text{Max } 9 + 4 \ell_{x1} - 5 u_{x2} \\ \text{s.a: } 2 \ell_{x1} - 3 u_{x2} + h_1 &= 4; \\ 2 \ell_{x1} - u_{x2} + h_2 &= 6; \end{aligned}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Tabla SBF1:

Modelo ( $x_1$ ,  $u_{x2}$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ )

v.básicas	B_inversa	XB	$y_{x1}$	XB/Yx
$h_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	4	2	2
$h_2$		6	2	3
CtBBinv	0 0	Z=9		

\*Variables no básicas:  $x_1$ ,  $u_{x2}$

$$c_{x1} - z_{x1} = 4 \quad \leftarrow \text{JE}$$

$$c_{u_{x2}} - z_{u_{x2}} = -5$$

Beta: 2

$u_{x1}$ : 3

Delta: Infinito

Mínimo: Beta (NO cambio de modelo, SI cambio de base)

$$IS = h_1$$

### Tabla SBF2:

Modelo ( $x_1$ ,  $u_{x2}$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ )

v.básicas	B_inversa	XB	$y_{u_{x2}}$	XB/Yx
$x_1$	$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	2	-3/2	-
$h_2$		2	2	1
CtBBinv	2 0	Z=17		

\*Variables no básicas:  $h_1$ ,  $u_{x2}$

$$c_{h1} - z_{h1} = -2$$

$$c_{u_{x2}} - z_{u_{x2}} = 1 \quad \leftarrow \text{JE}$$

Beta: 1

$u_{u_{x2}}$ : 1

## PROBLEMAS RESUELTOS

Delta:  $2/3$

Mínimo: Beta (SI cambio de modelo, SI cambio de base)  
( $x_1$  alcanza su cota)

$$\text{Max } 9 + 4(3 - u_{x1}) - 5u_{x2}$$

$$\text{s.a: } 2(3 - u_{x1}) - 3u_{x2} + h1 = 4;$$

$$2(3 - u_{x1}) - u_{x2} + h2 = 6;$$

$$\text{Max } 21 - 4u_{x1} - 5u_{x2}$$

$$\text{s.a: } -2u_{x1} - 3u_{x2} + h1 = -2;$$

$$-2u_{x1} - u_{x2} + h2 = 0;$$

### Tabla SBF3:

Modelo ( $u_{x1}$ ,  $u_{x2}$ ,  $h1$ ,  $h2$ )

v.básicas B inversa XB

$u_{x2}$	$\begin{bmatrix} -1/3 & 0 \end{bmatrix}$	$2/3$
$h2$	$\begin{bmatrix} -1/3 & 1 \end{bmatrix}$	$2/3$
CtBBinv	$5/3 \ 0$	$z=53/3$

\*Variables no básicas:  $u_{x1}$ ,  $h1$

$$Cu_{x1} - z u_{x1} = -2/3$$

$$Ch1 - zh1 = -5/3$$

### SOLUCIÓN ÓPTIMA ENCONTRADA

Deshacemos los cambios:

$$x1 = 1 + u_{x1} = 1 + (3 - u_{x1}) = 1 + (3 - 0) = 4$$

$$x2 = 1 - u_{x2} = 1 - 2/3 = 1/3$$

$$z^* = 53/3$$