Matemática discreta **Marca los parciales a los que te presentas** **24 de enero de 2018**

Recuperación/Primer parcial | 1 | 2 | **2:30h horas**

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas.

Los estudiantes que recuperan los dos parciales han de resolver únicamente los ejercicios 2, 3, 4, 5, 6 y 8

Cuestión 1 (1 pt) Demuestra que la conclusión se deduce de las premisas en el siguiente argumento. (Indica en cada paso las tautologías que utilizas.)

P1. $P \to Q \vee R$
P2. $Q \to \rceil P$ $\qquad c : \rceil S$
P3. $S \to \rceil R$
P4. P

Cuestión 2 (1 pt) Escribe utilizando Lógica de Predicados las siguientes expresiones del lenguaje habitual. Tienes que utilizar el **mismo** universo y los **mismos** predicados en todos los apartados.

a) Los números naturales múltiplos de 6, menores que 19, y mayores que 11, son también múltiplos de 4 o de 9.

b) Hay múltiplos de 4 que no son múltiplos de 6.

c) No hay ningún número natural menor que 19 que sea múltiplo de 12.

d) El número 9 no es múltiplo de 6 ni de 12.

Cuestión 3 (1.5 pt) Analiza si cada uno de los siguientes razonamientos de Lógica de Predicados son correctos. En caso de serlo, demuéstralo, indicando las propiedades aplicadas, y en caso contrario razona porqué no es correcto.

a)
$P1.\ \forall x\ (A(x) \vee P(x))$
$P2.\ \neg\exists x\ (S(x) \wedge \neg T(x))$
$P3.\ \forall x\ (A(x) \wedge T(x) \to L(x))$
$P4.\ \neg P(j) \wedge S(j)$
Conclusión : $L(j)$

b)
$P1.\ \exists x\ (P(x) \to Q(x))$
$P2.\ \exists x\ (\neg T(x) \vee P(x))$
$P3.\ \forall x\ T(x)$
Conclusión : $\exists x\ Q(x)$

Cuestión 4 (1 pt) Simplifica la siguiente expresión de lógica proposicional. **Especifica** las propiedades que utilizas en cada paso.

$$[P \wedge (P \to \rceil Q)] \vee \rceil (Q \to \rceil P)$$

Cuestión 5 (1.5 pt) Demuestra por inducción la siguiente igualdad

$$1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)\ \forall n \geq 1$$

Cuestión 6 (2 pt) (a) Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones? Demuestra las que sean ciertas y da un contraejemplo en caso contrario.

(a-1) Si $A \subseteq B \cup C$, entonces $A \subseteq B$ o $A \subseteq C$.

(a-2) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$.

(b) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, calcula los conjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ y $A \cup B$. Indica, de manera razonada, si la familia $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ es un recubrimiento de $A \cup B$ y si es una partición de $A \cup B$.

Cuestión 7 (1 pt) Sea la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ con $a > 0$.

(a) ¿Es f inyectiva? ¿Y suprayectiva? Si f es biyectiva calcula f^{-1}, la inversa de f.

(b) Si $(f \circ f)(x) = 4x + 2$. ¿Quien es f?

Cuestión 8 (1 pt) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.

(a) Escribe un ejemplo de correspondencia de A en B que no sea aplicación.

(b) Escribe un ejemplo, si es posible, de aplicación suprayectiva de A en B. En caso negativo, justifica la respuesta.

(I)

1.-

P1. $P \to Q \vee R$	C: $\neg S$
P2. $Q \to \neg P$	
P3. $S \to \neg R$	
P4. P	

Método directo:

P5. $Q \vee R$ Modus Ponens (1,4)

P6. $\neg Q$ Modus Tollens (2,4)

P7. R Tollendo Ponens (5,6)

P8. $\neg S$ Modus Tollens (3,7)

Reducción al absurdo.

P5. S Prem. aux. Red. al absurdo

P6. $\neg R$ M. Ponens (3,5)

P7. $Q \vee R$ M. Ponens (1,4)

P8. Q Tollendo Ponens (6,7)

P9. $\neg P$ M. Ponens (2,8)

P10. $P \wedge \neg P$ L. Unión (4,9)

ϕ

2.- U ≡ Números naturales

S(x): x es múltiplo de 6

M(x): x es menor que 19

G(x): x es mayor que 11

C(x): x es múltiplo de 4

N(x): x es múltiplo de 9

D(x): x es múltiplo de 12

(a) $\forall x \; S(x) \wedge M(x) \wedge G(x) \to C(x) \vee N(x)$

(b) $\exists x \; C(x) \wedge \neg S(x)$

(c) $\neg \exists x \; M(x) \wedge D(x)$

(d) $\neg S(9) \wedge \neg D(9)$

3.- (b)

P1. $\exists x \; (P(x) \to Q(x))$	C: $\exists x \; Q(x)$
P2. $\exists x \; (\neg T(x) \vee P(x))$	
P3. $\forall x \; T(x)$	

No podríamos obtener la conclusión, ya que al tener en las premisas 1 y 2 dos "$\exists$" tendríamos que especificar con 2 objetos distintos y no podríamos razonar para llegar a la conclusión

(a) P1. $\forall x\ (A(x) \vee P(x))$

P2. $\neg\exists x\ (S(x) \wedge \neg T(x))$

P3. $\forall x\ (A(x) \wedge T(x) \rightarrow L(x))$

P4. $\neg P(j) \wedge S(j)$

C: $L(j)$

P5. $A(j) \vee P(j)$ E. Universal (1)

P6. $\forall x\ \neg S(x) \vee T(x)$ L. Morgan Gen. (2)

P7. $\neg S(j) \vee T(j)$ E. Universal (6)

P8. $A(j) \wedge T(j) \rightarrow L(j)$ E. Universal (3)

P9. $\neg P(j)$ Simplificación (4)

P10. $A(j)$ Tollendo Ponens (5,9)

P11. $S(j)$ Simplificación (4)

P12. $T(j)$ Tollendo Ponens (7,11)

P13. $A(j) \wedge T(j)$ L. Unión (10,12)

P14. $L(j)$ M. Ponens (8,13)

4-

$[P \wedge (P \rightarrow \neg Q)] \vee \neg(Q \rightarrow \neg P) \equiv$

Cond.-Disyunción

$\equiv [P \wedge (\neg P \vee \neg Q)] \vee \neg(\neg Q \vee \neg P) \equiv$

Distributiva y L. Morgan

$\equiv [(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)] \vee (Q \wedge P) \equiv$

$\equiv [\phi \vee (P \wedge \neg Q)] \vee (P \wedge Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \equiv$

E. neutro Distributiva

Prop. Negación y Conmutativa

$\equiv P \wedge (\neg Q \vee Q) \equiv P \wedge \tau \equiv P$

P. Negación E. neutro

5.- $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n-1) \quad \forall n \geq 1$

Si $n=1$ $\quad 1 = \frac{4}{4} = \frac{1}{4}(5-1)$ v.

Supongamos que es cierto para un n (Hipótesis de inducción)

$$1+5+5^2+\cdots+5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n-1)$$

y veamos que es cierto para $n+1$:

$$¿\ 1+5+5^2+\cdots+5^n = \frac{1}{4}(5^{n+1}-1)\ ?$$

H. de inducción

$$1+5+5^2+\cdots+5^n = \underbrace{1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}}+5^n = \frac{1}{4}(5^n-1)+5^n =$$

$$= \frac{5^n}{4} - \frac{1}{4} + 5^n = \frac{5^n+4\cdot5^n}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5^n(1+4)}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5^{n+1}}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(5^{n+1}-1)$$

6.- **a)** (a-1) Falsa. Sean $B=\{1,2,3\}$, $C=\{2,3,4,5\}$ y $A=\{1,2,4\}$. Entonces $A \not\subseteq B$, $A \not\subseteq C$. Pero se tiene que $B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$, luego $A \subseteq B \cup C$.

(a-2) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap B^c) \setminus (A \cap C^c) =$

Prop. diferencia $\quad$ Prop. dif.

$$= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)^c = (A \cap B^c) \cap (A^c \cup C) \equiv$$

L. Morgan $\quad$ Prop. Distributiva

$$\equiv [(A \cap B^c) \cap A^c] \cup [(A \cap B^c) \cap C] \equiv \phi \cup (A \cap C \cap B^c) \equiv$$

Prop. Neg. Conmutativa

$$\equiv A \cap (C \cap B^c) \equiv A \cap (C \setminus B)$$

E. neutro y asociativa $\quad$ Prop. Diferencia

7.- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ $\quad a > 0$

(a) Inyectiva: Sí

Si $f(x) = f(y) \to ax+b = ay+b \to ax = ay \xrightarrow[a \neq 0]{} x = y$

Supraeyectiva:

Dado $y \in \mathbb{R}$, ¿ $\exists x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y$?

$f(x) = y \to ax+b = y \to ax = y-b \xrightarrow[a \neq 0]{} x = \dfrac{y-b}{a}$

Luego f es supraeyectiva y por tanto biyectiva.

Además $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$.

(b) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b)+b =$

$= a^2x + ab + b = 4x+2 \to a^2 = 4 \xrightarrow[a > 0]{} a = 2$

y $ab+b = 2 \to 3b = 2 \to b = \dfrac{2}{3}$

Luego $f(x) = 2x + \dfrac{2}{3}$.

8.- $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$

(a) $R = \{(1,a),(1,b),(3,c)\} \subseteq A \times B$

(b) No es posible, ya que todo elemento de B tendría que tener antiimagen, y por tanto, habría elementos de A que tendrían más de una imagen haciendo que no fuese aplicación.

6.- (b) $A \setminus B = \{1,2,3\}$; $A \cap B = \{4,5\}$, $B \setminus A = \{6\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

La familia $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ es un recubrimiento de $A \cup B$, ya que $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Además es una partición ya que son dos a dos disjuntos:

$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset = (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (B \setminus A) \cap (A \cap B)$

Matemática discreta **Marca los parciales a los que te presentas** **24 de enero de 2018**
Recuperación/Segundo parcial

1	2

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas.

Los estudiantes que recuperan los dos parciales han de resolver únicamente los ejercicios 1, 2, 3, 4, 6 y 7

Cuestión 1 (1 pt) En el conjunto de los enteros módulo 6, $\mathbb{Z}_6$, considera la relación binaria

$$x\mathcal{R}y \iff \bar{4}x = \bar{4}y$$

a) Describe la relación binaria $\mathcal{R}$ explicitando sus pares.

b) Señala qué propiedades cumple $\mathcal{R}$:

Reflexiva ( ) Simétrica ( ) Antisimétrica ( ) Transitiva ( )

c) ¿Es una relación binaria de equivalencia? ¿Es una relación binaria de orden? **Justifica** tu respuesta. Si es de equivalencia, determina el conjunto cociente. Si es de orden, dibuja el diagrama de Hasse.

Cuestión 2 (1 pt) a) Pon un ejemplo de un retículo que sea distributivo y acotado, pero no sea retículo de Boole.

b) Pon un ejemplo de un retículo que sea complementado, pero no sea retículo de Boole.

Cuestión 3 (2 pt) Considera el conjunto $A = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 42, 84\}$ con la relación de divisibilidad.

a) Dibuja el diagrama de Hasse asociado a dicho conjunto ordenado.

b) Determina los maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, del conjunto A.

c) Considera el subconjunto $B = \{2, 7, 28\}$. Determina sus cotas superiores y supremo, si existen.

d) Considera el subconjunto $C = \{4, 14, 42\}$. ¿Tiene cotas inferiores? ¿Tiene ínfimo? **Justifica** la respuesta.

e) ¿El subconjunto $D = \{1, 2, 7, 28, 42, 84\}$ es un retículo? **Justifica** la respuesta.

Cuestión 4 (2 pt) **a)** Resuelve la ecuación en congruencias $10x \equiv 2 \pmod{42}$.

b) ¿Es $\bar{5}$ invertible en $\mathbb{Z}_{21}$? ¿Y $\overline{15}$? Calcula el inverso en caso afirmativo. **Justifica** cada una de tus respuestas.

Cuestión 5 (1 pt) Calcula, por el método de quine Mc-Cluskey, todas las simplificaciones posibles de la siguiente función booleana:

$$f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z$$

Cuestión 6 (1 pt) Resuelve, en el álgebra de Boole $A = \{0, 1, a, b\}$, la siguiente ecuación. **Justifica** tus afirmaciones.

$$a \cdot (x + b) + b \cdot (x + a) + b = 1$$

Cuestión 7 (1 pt) En una reunión del club de fans de Operación Triunfo, se reunen 100 seguidores del programa. Entre ellos, 65 son fans de Amaia, 40 de Roi y 25 de Miriam. 20 de ellos son fans de Amaia y Roi, 15 de Amaia y Miriam, y 10 de Miriam y Roi. Además, 10 de los asistentes a la reunión no son fans de ninguno de estos tres concursantes.

a) ¿Cuántos de los asistentes a la reunión son fans de estos tres concursantes?

b) ¿Cuántos son fans de Amaia, pero no de Miriam ni de Roi?

c) ¿Cuántos siguen a Amaia o a Miriam, pero no a Roi?

Cuestión 8 (1 pt) En un lote de 80 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados defectuosos. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un chequeo.

a) ¿Cuántas muestras contienen exactamente 3 ordenadores con circuitos defectuosos?

b) ¿Cuántas muestras contienen al menos un ordenador con circuitos defectuosos?

Justifica la respuesta en cada uno de los apartados.

1. $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$$\boxed{x, y \in \mathbb{Z}_6 \ , \ x R y \Leftrightarrow \bar{4} \cdot x = \bar{4} \cdot y}$$

(a) Describe R explicitando sus pares.

Vamos a ver que elementos están relacionados.

x	$\bar{4} \cdot x$
$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{8} = \bar{2}$
$\bar{3}$	$\overline{12} = \bar{0}$
$\bar{4}$	$\overline{16} = \bar{4}$
$\bar{5}$	$\overline{20} = \bar{2}$

↑ en $\mathbb{Z}_6$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 6 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

Luego de la tabla deducimos:

$R = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{3},\bar{3}), (\bar{4},\bar{4}), (\bar{5},\bar{5}),$
$(\bar{0},\bar{3}), (\bar{3},\bar{0}), (\bar{1},\bar{4}), (\bar{4},\bar{1}), (\bar{2},\bar{5}), (\bar{5},\bar{2})\}$

(b) Señala qué propiedades cumple R:

Reflexiva (X) Simétrica (X) Antisimétrica ( )

Transitiva (X)

(c) ¿Es una relación de equivalencia? ¿es de orden? Justifica tu respuesta. Si es de equivalencia determina el conjunto cociente. Si es de orden, dibuja el diagrama de Hasse.

Es una relación de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva.

CLASES DE EQUIVALENCIA:

$[\bar{0}] = \{\bar{0}, \bar{3}\}$
$[\bar{1}] = \{\bar{1}, \bar{4}\}$
$[\bar{2}] = \{\bar{2}, \bar{5}\}$

CONJUNTO COCIENTE:

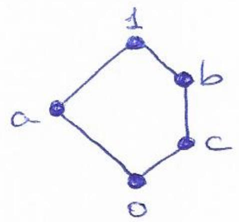
$\mathbb{Z}_6 / R = \{[\bar{0}], [\bar{1}], [\bar{2}]\}$

2) a) Ejemplo de un retículo distributivo y acotado pero que no es retículo de Boole:

D_{12} $\quad (12 = 2^2 \cdot 3)$

Sabemos que D_{12} es retículo distributivo y acotado (porque todo D_n lo es) pero no es complementado porque, por ejemplo, 2 no tiene complementario (no existe ningún divisor de 12, a, que cumple que $mcd(2,a)=1$ y $mcm(2,a)=12$)

b) Ejemplo de un retículo que sea complementado, pero no sea retículo de Boole:



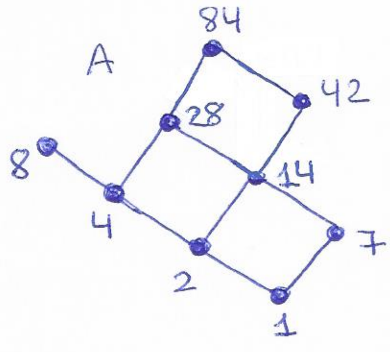
- Es retículo
- Es acotado y todos los elementos tienen complementario ($\overline{1}=0$ y a tiene dos complementarios: b y c)
- No es distributivo:

$$\begin{cases} b\cdot(a+c) = b\cdot 1 = b \\ b\cdot a + b\cdot c = 0 + c = c \end{cases} \quad \times$$

$+$ = supremo
$\cdot$ = ínfimo

3) Considera el conjunto $A = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, \underset{2^2\cdot 7}{28}, \underset{2\cdot 3\cdot 7}{42}, \underset{2^2\cdot 3\cdot 7}{84}\}$ con la relación de divisibilidad.

a) Dibuja el diagrama de Hasse asociado a este conjunto ordenado:



b)

Maximales(A) = {8, 84}
Minimales(A) = {1}
No existe máximo
Mínimo(A) = 1

c) $B=\{2,7,28\}$

Cotas superiores$_A(B)=\{28,84\}$

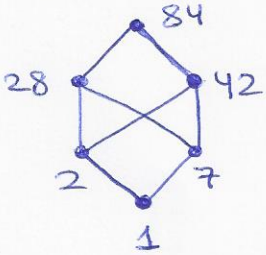
Supremo$_A(B)=28$

d) $C=\{4,14,42\}$

Cotas inferiores$_A(C)=\{2,1\}$

Infimo$_A(C)=2$

e) $D=\{1,2,7,28,42,84\}$ ¿es retículo?



No es retículo porque, por ejemplo, el par $\{2,7\}$ no tiene supremo ya que sus cotas superiores son 28, 42 y 84 pero este conjunto no tiene mínimo:

4 a) Resuelve la ecuación en congruencias:

$$10\cdot x \equiv 2 \ (\text{mod. } 42)$$

En formato de clases de equivalencia será:

$$\boxed{\overline{10}\cdot x=\overline{2} \ \text{ en } \mathbb{Z}_{42}}$$

$\text{mcd}(\underset{2\cdot 5}{10},\underset{2\cdot 3\cdot 7}{42}) = 2 \neq 1 \Rightarrow$ 10 no tiene inverso en $\mathbb{Z}_{42}$

Pero $\text{mcd}(10,42)=2$ divide a 2 que es el otro coeficiente, por tanto la ecuación es de CASO 2 (tiene 2 soluciones) y para resolverla, reducimos a la ec. de CASO 1 que se obtiene al dividir por 2 los coeficientes y el módulo:

$\boxed{\overline{5} \cdot x = \overline{1} \text{ en } \mathbb{Z}_{21} \quad (\text{EC. CASO } 1)}$

Resolver esta ecuación es hallar el inverso de $\overline{5}$ en $\mathbb{Z}_{21}$ (porque el otro coeficiente es 1):

ALG. EUCLIDES

$$21 = 5 \cdot 4 + 1 \qquad 5 = 1 \cdot 5 + 0$$

$\Rightarrow \text{mcd}(5,21) = 1 \Rightarrow 5$ tiene inverso en $\mathbb{Z}_{21}$ (lo sabíamos por ser de CASO 1)

Lo calculamos usando los cocientes de Euclides: (será la clase del coeficiente de $\overline{5}$ en una Identidad de Bezout)

	i=0	i=1	i=2
q_i		4	5
p_i	1 (+)	4 (−)	21

$\rightsquigarrow \boxed{\overline{5}^{-1} = \overline{-4} = \overline{17}}$ ($\mathbb{Z}_{21}$)

Por tanto $x = \overline{17}$ es la solución de la ecuación $\overline{5} \cdot x = \overline{1}$ en $\mathbb{Z}_{21}$.

(OTRA FORMA: Usar la fórmula $\overline{x} = \overline{(-1)^{n-1} \cdot p_{n-1} \cdot b}$

En este caso: $\overline{x} = \overline{(-1)^1 \cdot p_1 \cdot 1} = \overline{-4} = \overline{17}$)

Esta única solución, $x = \overline{17}$, en módulo 42 da lugar a 2 soluciones de la ecuación $\overline{10} \cdot x = \overline{2}$ (en $\mathbb{Z}_{42}$):

$$\boxed{x = \overline{17} \quad y \quad x = \overline{38}}$$

(b) ¿Es $\overline{5}$ invertible en $\mathbb{Z}_{21}$?

Como hemos visto en el apdo. (a), $\overline{5}$ sí tiene inverso en $\mathbb{Z}_{21}$ y $\overline{5}^{-1} = \overline{17}$ en $\mathbb{Z}_{21}$.

¿$\overline{15}$ tiene inverso en $\mathbb{Z}_{21}$?

$\text{mcd}(\underset{3\cdot 5}{15}, \underset{3\cdot 7}{21}) = 3 \neq 1 \Rightarrow \overline{15}$ no tiene inverso en $\mathbb{Z}_{21}$.

5) Calcule, utilizando el método de Quine-McCluskey, todas las posibles simplificaciones de la siguiente función booleana:

$$f(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z$$

$$010 \quad 110 \quad 001 \quad 011 \quad 101$$

• 1ª FASE:

1 1's	010 *	-10
	001 *	01-
2 1's	110 *	0-1
	011 *	-01
	101 *	

→ implicantes primos:

$m_{-10} = y\bar{z}$ $\quad m_{0-1} = \bar{x}z$

$m_{01-} = \bar{x}y$ $\quad m_{-01} = \bar{y}z$

En esta 1ª fase, deducimos que f se puede expresar como suma de esos implicantes primos. Veamos si aún podemos simplificarla más:

• 2ª FASE:

	010	110	001	011	101
-10	X	⊗			
01-	X			X	
0-1			X	X	
-01			X		⊗

$m_{-10} = y\bar{z}$

$m_{-01} = \bar{y}z$

↑

-10 y -01 son implicantes primos esenciales. Estos dos cubren a todos los minitérminos excepto a 011. Para cubrir a éste podemos completar con el implicante 01- o con el 0-1.

Por tanto, obtenemos 2 posibles simplificaciones:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}y \\ \quad\text{o} \\ f(x,y,z) = y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}z \end{cases}$$

6 Resuelve, en el álgebra de Boole de 4 elementos:
$A=\{0,1,a,b\}$, la siguiente ecuación:

$$\boxed{a\cdot(x+b)+b\cdot(x+a)+b=1.}$$

Como A es un álgebra de Boole sabemos que:
$\bar{0}=1$ (y $\bar{1}=0$) y por tanto, necesariamente,
$\bar{a}=b$ (y $\bar{b}=a$). Luego $\boxed{a+b=1 \text{ y } a\cdot b=0.}$

Vamos a simplificar primero la ecuación:

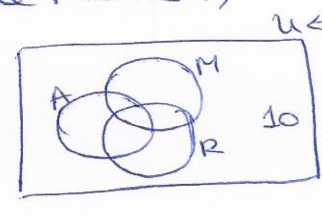
$$a\cdot(x+b)+b\cdot(x+a)+b=1$$
DISTRIBUTIVA
$$a\cdot x+\underbrace{a\cdot b}_{=0}+b\cdot x+\underbrace{b\cdot a}_{=0}+b=1$$
COMPLEMENTARIO NEUTRO
$$a\cdot x+b\cdot x+b=1$$
DISTRIBUTIVA
$$\underbrace{(a+b)}_{=1}\cdot x+b=1$$
COMPLEMENTARIO NEUTRO
$$\boxed{x+b=1}$$

La ecuación simplificada

Las soluciones de esa ecuación en $A=\{0,1,a,b\}$
son: $\boxed{x=a}$ (por COMPLEMENTARIO: $a+b=1$)
y $\boxed{x=1}$ (por ABSORBENTE: $1+b=1$)

7
- $\mathcal{U}=\{$seguidores de OT en la reunión$\}$: $cd(\mathcal{U})=100$
- $A=\{$fans de Amaia en la reunión$\}$: $cd(A)=65$
- $R=\{$fans de Roi en la reunión$\}$: $cd(R)=40$
- $M=\{$fans de Miriam en la reunión$\}$: $cd(M)=25$
- $cd(A\cap R)=20$, $cd(A\cap M)=15$, $cd(M\cap R)=10$
- 10 no son seguidores ni de Amaia, ni de Miriam, ni de Roi $\Rightarrow cd((A\cup R\cup M)^c)=10$

$$(A\cup R\cup M)^c = \mathcal{U}\setminus(A\cup R\cup M)$$



(a) ¿Cuántos de los asistentes a la reunión son fans de los 3 concursantes?

Nos piden $cd(A \cap R \cap M)$. Para calcularlo, nos falta el dato del cardinal de la unión de los tres conjuntos:

$$\boxed{cd(A \cup R \cup M)} = cd(\mathcal{U}) - cd((A \cup R \cup M)^c) = 100 - 10 = \boxed{90}$$

Ahora podemos usar la fórmula del cardinal de la unión de tres conjuntos:

$$cd(A \cup R \cup M) = cd(A) + cd(R) + cd(M) - cd(A \cap R) - cd(A \cap M) - cd(M \cap R) + cd(A \cap R \cap M)$$

$$90 = 65 + 40 + 25 - 20 - 15 - 10 + cd(A \cap R \cap M)$$

Luego $\boxed{cd(A \cap R \cap M) = 90 - 85 = 5}$

(b) ¿Cuántos son fans de Amaia pero no de Miriam ni de Roi?

$$\boxed{cd(A \setminus (M \cup R))} = cd(A) - cd(A \cap (M \cup R)) = 65 - 30 = \boxed{35}$$

$$\left(\begin{aligned} cd(A \cap (M \cup R)) &= cd((A \cap M) \cup (A \cap R)) = cd(A \cap M) + cd(A \cap R) - \\ &- cd(A \cap M \cap R) = 15 + 20 - 5 = 30 \end{aligned} \right)$$

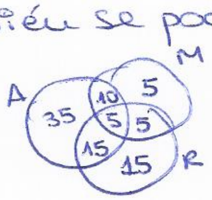
(también se podría deducir de los diagramas de Venn.)

(c) ¿Cuántos son fans de Amaia o de Miriam, pero no de Roi?

$$\boxed{cd((A \cup M) \setminus R)} = \underset{*}{cd(A \cup M)} - \underset{**}{cd((A \cup M) \cap R)} = 75 - 25 = \boxed{50}$$

$$\left(\begin{aligned} &* \ cd(A \cup M) = cd(A) + cd(M) - cd(A \cap M) = 65 + 25 - 15 = 75 \\ &** \ cd((A \cup M) \cap R) = cd((A \cap R) \cup (M \cap R)) = \\ &= cd(A \cap R) + cd(M \cap R) - cd(A \cap R \cap M) = 20 + 10 - 5 = 25 \end{aligned} \right)$$

(también se podría deducir de los diagramas de Venn:



)

8 80 ordenadores (10 de ellos con circuitos defectuosos)

Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria.

(a) ¿Cuántas muestras contienen exactamente 3 ordenadores con circuitos defectuosos?

CONJUNTO DE 80

$\boxed{70}$ Bien

$\boxed{10}$ Mal

SUBCONJUNTO DE 7

$\boxed{4}$ Bien ← posibles elecciones: $\binom{70}{4}$

$\boxed{3}$ Mal

↑ posibles elecciones: $\binom{10}{3}$

nº de muestras (subconjuntos) de 7 ordenadores con 3 ordenadores mal $= \boxed{\binom{10}{3} \cdot \binom{70}{4}} =$

$$= \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{70!}{4! \cdot 66!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot \frac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

(b) ¿Cuántas muestras contienen al menos un ordenador con un circuito defectuoso?

||

nº de muestras (con 7 ordenadores) con exact. 1 mal +

+ nº de muestras con exact. 2 mal +

+ .... + nº de muestras con exact. 7 mal =

$$= \boxed{\binom{10}{1} \cdot \binom{70}{6} + \binom{10}{2} \cdot \binom{70}{5} + \binom{10}{3} \cdot \binom{70}{4} + \binom{10}{4} \cdot \binom{70}{3} + \binom{10}{5} \cdot \binom{70}{2} + \binom{10}{6} \cdot \binom{70}{1} + \binom{10}{7} \cdot \underbrace{\binom{70}{0}}_{=1}}$$

* **OTRA FORMA** (más corta):

Nº muestras con al menos 1 ordenador mal =

= Nº muestras en total (con 7 ordenadores) − Nº muestras (con 7 ordenadores) con 0 ordenadores mal =

$$= \binom{80}{7} - \binom{10}{0} \cdot \binom{70}{7} = \boxed{\binom{80}{7} - \binom{70}{7}} = \boxed{\frac{80!}{73! \cdot 7!} - \frac{70!}{63! \cdot 7!}}$$