UNIDAD DIDÁCTICA 3

CONCEPTOS BÁSICOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Objetivo: El objetivo de esta Unidad Docente es introducir de forma sintética los conceptos básicos de sucesos, probabilidad (concepto y propiedades), probabilidad condicional e independencia de sucesos, teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Contenido

Rafael Romero Villafranca

1. Sucesos. Operaciones con sucesos

Sea **E** al conjunto de todos los posibles valores que puede tomar una variable aleatoria. A cualquier subconjunto **A** de a **E** se denomina **Suceso**.

Cada suceso lleva asociado en la población un determinado subconjunto de individuos para los que dicho suceso se verifica, que son los individuos para los cuales el valor de la variable pertenece a **A**

Ejemplo 1: Sea la población constituida por todos los lanzamientos de un determinado dado y **E** el conjunto {1, 2, 3, 4, 5 y 6} de resultados posibles. Sea el suceso "obtener un número par", al que le corresponde el subconjunto **A** = {2, 4, 6} de **E**. A dicho suceso le corresponderá en la población el subconjunto constituido por todos los lanzamientos en los que el resultado sea un número par, es decir que pertenezca a **A**.

Ejemplo 2: Sea la población constituida por todos los jóvenes españoles y sea la variables aleatoria asociada, ESTATURA de cada individuo expresada en cms. **E** estará constituido por el conjunto de números reales positivos. Un suceso podría estar definido por la expresión "ESTATURA > 180" y le correspondería en **E** el subconjunto **A** de valores mayores que 180 y en la población el subconjunto de jóvenes de estatura superior a 180 cms.

Se denomina **suceso seguro** al asociado a **E**, que es obviamente un subconjunto de sí mismo. Al suceso seguro se le asocia la totalidad de la población, o, lo que es lo mismo, para todos los individuos de la población se verifica dicho suceso.

Se denomina **suceso imposible** al asociado al subconjunto vacío **Φ** de **E**. Dado que no contiene ninguno de los posibles valores de **E**, no existirá individuo alguno en la población para el que se verifique dicho suceso imposible **Φ**.

Dado dos sucesos se denomina **suma o reunión** de ambos a un nuevo suceso que se verifica si, y sólo si, se verifica al menos uno de los dos sucesos (**C=A∪B**). Evidentemente el subconjunto **C** correspondiente a este nuevo suceso no es más que la reunión de los subconjuntos **A** y **B** correspondientes a los primitivos, y de forma análoga el subconjunto de individuos de la población que verifican **C** no es más que la reunión del subconjunto de los que verifican **A** y del de los que verifican **B**. Expresaremos la suma de dos sucesos utilizando el signo **+** (**C = A + B**)

Nota: auque utilicemos el mismo símbolo +, es obvio que la operación suma de sucesos, definida sobre el conjunto de los sucesos, es diferente de la operación suma aritmética, definida sobre el conjunto de números reales. La operación suma de sucesos es la **unión** de dos conjuntos (**U**)

Dado dos sucesos, se denomina **producto o intersección** de ambos a un nuevo suceso que se presenta si, y sólo si, se presentan tanto uno como el otro suceso (**C=A∩B**). Su subconjunto asociado **C** no es más que la intersección de los subconjuntos **A** y **B** correspondientes a los dos sucesos considerados. Análogamente el subconjunto de individuos que en la población verifican **C** no es más que la intersección del de los que verifican **A** con el de los que verifican **B**. Al producto de dos sucesos **A** y **B** lo representaremos como **A.B** o si no hay riesgo de error simplemente como **AB**.

Dos sucesos cuya intersección es el suceso imposible **Φ** se dice que son **excluyentes**, no pudiendo presentarse los dos simultáneamente en un mismo individuo.

Se denomina **suceso contrario** a uno dado a aquél que se verifica si, y sólo si, no se verifica este último. Sus subconjuntos asociados, tanto en **E** como en la población, no son más que los subconjuntos **complementarios** del los correspondientes al suceso considerado. Al suceso contrario de un suceso **A** lo representaremos como $\overline{A}$.

Ejemplo 3: En la población de todos los estudiantes de esta universidad se definen los dos sucesos siguientes:

A : ESTATURA mayor que 175 cms (o sea, estudiante "alto")

B : SEXO = "chicas".

¿Cuáles serían los individuos de la población asociados a los siguientes sucesos?

A + B; AB; $\overline{A}.\overline{B}$; $\overline{A}+\overline{B}$; $A.\overline{B}$.

¿Cuál sería el suceso contrario de A + B? ¿Y el de A.B? (Leyes de Morgan)

Ejemplo 4: Un determinado dispositivo se fabrica a partir de dos componentes CA y CB. Sean los sucesos:

A: la componente CA funciona más de 1000 horas sin fallar

B: la componente CB funciona más de 1000 horas sin fallar

D: el dispositivo conjunto funciona más de 1000 horas sin fallar

Si las dos componentes se montan en serie (de forma que el dispositivo falla en cuando lo hace una cualquiera de las dos componentes) ¿qué relación existirá entre el suceso D y los sucesos A y B?

Si las dos componentes se montan en paralelo (de forma que el dispositivo funciona mientras funcione al menos una cualquiera de las dos componentes) ¿qué relación existirá entre el suceso D y los sucesos A y B?

Ver respuesta en el Anejo al final del Tema. Métodos Estadísticos en Ingeniería (Romero Villafranca, Rafael)

2. Probabilidad. Concepto y propiedades

2.1. Concepto de probabilidad

A todo suceso se le puede asociar un número comprendido entre 0 y 1 al que se denomina **probabilidad** de dicho suceso. Desde un punto de vista intuitivo la probabilidad de un suceso no es más que la proporción de individuos de la población considerada en los que se verifica dicho suceso.

Así, en el Ejemplo 1, la probabilidad del suceso "obtener un número par" no sería más que la proporción de veces que se obtiene un número par en la población de todos los lanzamientos que pudieran realizarse del dado considerado. En principio esta probabilidad podría diferir de un dado a otro, según que estuvieran mejor o peor equilibrados.

Caso particular: espacios simétricos

Si el conjunto de valores que puede tomar una variable aleatoria es finito (como en el caso del dado) y además por razones de simetría puede asumirse que la probabilidad es la misma para cada uno de dichos valores (o sea que la proporción de individuos en la población para cada valor es la misma para todos los valores), la probabilidad de un suceso resulta coincidir con el cociente entre el número de valores favorables a dicho suceso y el número de valores posibles.

2.2. Propiedades de la Probabilidad

La probabilidad de un suceso asociado a un conjunto **A** la expresaremos como:

$$\boxed{P(A)}$$

De la definición intuitiva que hemos dado se deduce inmediatamente que toda probabilidad satisface las siguientes propiedades:

1- **P(A) > 0** por ser P(A) una frecuencia relativa en la población

2- **P(E) = 1** puesto que el suceso seguro se verifica en todos los individuos de la población.

3- Si A y B son sucesos excluyentes **P(A+B) = P(A) + P(B)** puesto que el número de individuos que verifican A+B es la suma de los que verifican A más los que verifican B. Esto no sería cierto si A y B no fueran excluyentes, puesto que en la suma estaríamos contando dos veces algunos individuos.

Importante: hay que ser consciente de que en la ecuación anterior los dos signos “+” que aparecen corresponden a operaciones conceptualmente diferentes: suma de sucesos y suma algebraica)

En un desarrollo axiomático de la Teoría de la Probabilidad las tres propiedades anteriores se enuncian como axiomas que definen el concepto de probabilidad de un suceso, y todas las propiedades que se exponen a continuación se deducen analíticamente como consecuencia de los axiomas anteriores.

4- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ como se deduce inmediatamente de **3** y **2** por ser A y $\overline{A}$ sucesos excluyentes cuya suma es E

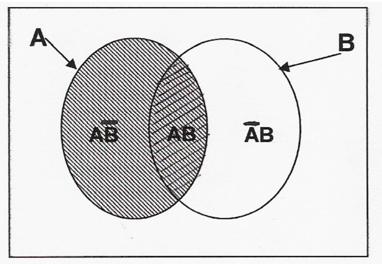
5- $P(A) \leq 1$ como se deduce de **4** y de **1**

6- $P(\mathbf{\Phi}) = 0$ como se deduce de **4** y de **2**, por ser **Φ** el suceso complementario de **E**.

3. Probabilidad de la suma de sucesos

Hemos visto que si dos sucesos A y B son excluyentes se cumple que

$P(A+B) = P(A) + P(B)$. ¿Qué sucede si A y B no son excluyentes?



Como se aprecia en la figura adjunta

$$(A+B) = A + \bar{A}B$$

donde A y $\bar{A}B$ son sucesos disjuntos. Por tanto

$$P(A+B) = P(A) + P(\bar{A}B) \qquad (1)$$

Por otra parte $B = AB + \bar{A}B$, siendo también disjuntos estos dos sucesos, por lo que $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$. Despejando $P(\bar{A}B)$ de esta expresión y sustituyéndolo en (1) se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathbf{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}}$$

que es la expresión general de la probabilidad de la suma de dos sucesos.

Nota: Obsérvese que la propiedad 3 es un caso particular de esta expresión, pues al ser A y B excluyentes AB resulta igual a Φ cuya probabilidad es cero.

El resultado expuesto es también lógico desde el punto de vista intuitivo, puesto que para obtener la frecuencia de individuos que verifican A+B, a la suma de los que verifican A más los que verifican B hay que restar los que verifican ambos (AB) para no contarlos dos veces.

Ejercicio 1: aplicando el razonamiento intuitivo anterior obtener la expresión de la probabilidad de la suma de 3 sucesos $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

4. Probabilidad condicional. Independencia de sucesos

Dados dos sucesos A y B, donde $P(B)>0$, se define intuitivamente el concepto de probabilidad condicional de A dado B a la probabilidad de que se haya presentado el suceso A sabiendo que se ha presentado el suceso B. Se simboliza como:

$$\boxed{\mathbf{P(A/B)}}$$

Ejercicio 2: ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado simétrico salga un número mayor que 3 (suceso A) sabiendo que el número que ha salido ha sido par (suceso B)?

P(A/B) sería por tanto la proporción de individuos que verifican el suceso A en la subpoblación constituida por los individuos que verifican el suceso B. De forma equivalente P(A/B) sería el cociente entre el número de individuos que verifican tanto A como B (o sea que verifican AB) dividido por el número de individuos que verifican B.

Como se deduce de lo anterior, el valor de la probabilidad condicional P(A/B) puede obtenerse dividiendo P(AB) por P(B)

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2)$$

Probabilidad del suceso producto

Una consecuencia inmediata de la definición de probabilidad condicional es la expresión que permite obtener, a partir de (2), la probabilidad del producto de dos sucesos:

$$\mathbf{P(AB) = P(B) \times P(A/B)}$$

o también:

$$\mathbf{P(AB) = P(A) \times P(B/A)}$$

Como puede observarse no es cierto, en general que la probabilidad del producto de dos sucesos sea el producto de las probabilidades de ambos, como tampoco lo fue, en general, que la probabilidad de la suma de dos sucesos sea la suma de las probabilidades.

En el caso de la suma la fórmula general P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) se simplificaba a la más sencilla (probabilidad de la suma igual a suma de las probabilidades) en un caso particular: si los sucesos considerados eran excluyentes.

De forma análoga la expresión general para la probabilidad del suceso producto P(AB) = P(A)P(B/A) se simplifica otra más sencilla en un caso particular muy importante: el de que los sucesos considerados sean **independientes**. En este caso, la probabilidad del producto igual al producto de probabilidades:

$$\mathbf{P(AB) = P(A) \times P(B)}$$

Teniendo en cuenta que el producto de tres sucesos ABC es el producto del suceso A por el BC, y aplicando sucesivamente la fórmula de la probabilidad del producto de dos sucesos se obtiene:

$$\mathbf{P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)}$$

Esta expresión se generaliza fácilmente a la probabilidad del producto de n sucesos.

5. Teorema de la probabilidad total

Sea un suceso **B** que se presenta siempre asociado a uno de los n sucesos **A_1, A_2,...,A_n mutuamente excluyentes** en que se particiona **E**. Si se conocen las probabilidades **$P(A_i)$** y las probabilidades condicionales **$P(B/A_i)$** es posible calcular **P(B)** a partir del siguiente razonamiento:

$$B = \mathbf{E}B = (A_1+A_2+...+A_n)B = A_1B + A_2B + ... + A_nB$$

y como los sucesos A_iB son mutuamente excluyentes al serlo los sucesos A_i

$$P(B) = P(A_1B) + ... + P(A_nB) = P(A_1)P(B/A_1) + ... + P(A_n)P(B/A_n)$$

fórmula que constituye el **Teorema de la Probabilidad Total**:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P\left(B/A_i\right)$$

Ejercicio 3: En una fábrica de conservas se utilizan dos llenadoras de botes. La primera, que tiene una capacidad de 500 botes por hora, produce un 1% de botes defectuosos y la segunda, cuya capacidad es 1000 botes/hora, produce un 2% de botes defectuosos. ¿A qué probabilidades condicionales corresponden los valores 1% y 2%? Si las dos máquinas funcionan a pleno rendimiento, ¿Cuál será el porcentaje de botes defectuosos producidos en total?

6. Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B se dice que son independientes si se verifica una cualquiera, y por lo tanto las ocho, de las siguientes condiciones equivalentes:

1- $P(A/B) = P(A)$
2- $P(A/B) = P(A/\overline{B})$
3- $P(B/A) = P(B)$
4- $P(B/A) = P(B/\overline{A})$
5- $P(AB) = P(A)P(B)$
6- $P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

7- $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B)$
8- $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$

No es difícil comprobar que, en efecto, el cumplimiento de una cualquiera de las 8 condiciones anteriores implica necesariamente el cumplimiento de las otras 7.

Ejercicio 4: En una baraja española (40 cartas, 10 de cada palo) sea el experimento aleatorio sacar una carta al azar y considérense los sucesos siguientes:
A = sacar un as
B = sacar un oro
Comprobar que se verifican las 8 condiciones anteriores (realmente bastaría con comprobar que se verifica una cualquiera de ellas, puesto que una implica a todas las demás)

El concepto de independencia se generaliza a n sucesos. Un conjunto de n sucesos $A_1,A_2...A_n$ son independientes si, para cualquier subconjunto de estos sucesos, se verifica que la probabilidad del suceso producto es el producto de las probabilidades de los sucesos individuales considerados.

7. Teorema de Bayes

Se presentan a veces situaciones en las que **E** está particionado en n sucesos **A_1, A_2,...A_n mutuamente excluyentes** conociéndose las probabilidades **$P(A_i)$** (que obviamente deben sumar 1). Se conocen también las probabilidades condicionales **$P(B/A_i)$** de cierto suceso condicionado a cada uno de los **A_i**, y se desea finalmente obtener la probabilidad **$P(A_k/B)$** de uno de los sucesos considerados **A_k** sabiendo que se ha presentado **B**.

Veamos un ejemplo. El 30% de los enfermos de hepatitis que ingresan en un hospital tienen hepatitis obstructiva que exige una intervención quirúrgica, mientras que el otro 70% tienen hepatitis infecciosa que puede curarse simplemente con reposo y medicación. (Estos serían los dos sucesos A_1 y A_2 en los que se particiona toda la población de ingresos de hepatitis).

Para discernir entre ambas situaciones se realiza una determinada prueba clínica que puede dar positiva (éste sería el suceso B) o negativa. Se sabe que la probabilidad de que la prueba resulte positiva es 0.95 cuando los enfermos tienen hepatitis obstructiva y 0.10 cuando la tienen infecciosa (éstas serían las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$).

Sabiendo que en un enfermo la prueba ha dado positiva) cuál es la probabilidad de que tenga realmente una hepatitis obstructiva? (O sea cuánto vale $P(A_1/B)$).

Un resultado, conocido como Teorema de Bayes, permite el cálculo de esta probabilidad.

En efecto:

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$$

y como, por el Teorema de la Probabilidad Total visto en el apartado 5,

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+...+P(A_n)P(B/A_n)$$

sustituyendo esta expresión en el denominador de la anterior se obtiene el resultado final, conocido como **Teorema de Bayes**:

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

Ejercicio 5: Calcular aplicando el Teorema de Bayes la probabilidad solicitada al final del ejemplo mencionado sobre ingresos de enfermos con hepatitis.

Ejercicios resueltos

Apartados 4.A.1 y 4.A.2 del Capítulo 4 del libro de R. Romero y L.R. Zúnica "Métodos Estadísticos en Ingeniería" SPUPV 637

Ver boletín correspondiente en PoliformaT (EST GII: Recursos / 04 | Ejercicios)

Para saber más

- Descartes. Instituto de Tecnologías Educativas (ITE) del Ministerio de Educación: http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Azar_y_probabilidad/azar_probabilidad_4.htm
- Lanzamiento de una monedas "cara o cruz" (University of Canterbury): http://www.math.canterbury.ac.nz/~j.stover/math160081/Applets/probability.html
- La paradoja o problema del cumpleaños, y otras variantes: http://goo.gl/j14S
- Una de las variantes del problema del cumpleaños: ¿Que lugar ocupar en la cola del cine? : http://goo.gl/ewYj
- "Problema de bolas" en oposiciones: ¿cuántos temas me tengo que estudiar?: http://goo.gl/zCyO
- El amigo invisible: ¿Cuántas veces tendremos que repetir el reparto?: http://goo.gl/0MVr
- El problema de las tres puertas (Monty Hall): http://goo.gl/oE2I
- El problema de las tres puertas en Numb3rs: http://goo.gl/2kua
- Haigh, J.: "Taking Chances: Winning with Probability". OUP Oxford | "Matematicas y juegos de azar. Jugar con la probabilidad". Tusquets. Extracto : http://goo.gl/WGbo

Fuentes

Métodos Estadísticos en Ingeniería (Romero Villafranca, Rafael) | Material docente previo de V. Giner (DEIOAC) | Material docente previo de R. Alcover (DEIOAC) | Material docente previo de A. Calduch (DEIOAC) | Material docente previo de J. R. Navarro (DEIOAC) | Material docente previo de C. Capilla (DEIOAC) | Material docente previo de E. Vázquez (DEIOAC)