Matemàtica Discreta | **12 de gener de 2018**
Segon parcial | **2 hores**

COGNOMS:	GRUP:
NOM:	

Qüestió 1 (2 pt) (a) Resoleu, si és possible, l'equació en congruències $51x \equiv 27 \pmod{123}$.

Solució: L'equació té solucions, perquè el màxim comú divisor de 51 i 123 és 3, i 3 també és divisor de 27. Per aquest mateix motiu, podem simplificar-la, dividint entre 3, amb la qual cosa obtenim l'equació equivalent $17x \equiv 9 \pmod{41}$.

Primera solució (fent servir equacions diofàntiques):

Aquesta equació en congruències és equivalent a l'equació diofàntica $17x + 41y = 9$. Per resoldre-la, cercarem una identitat de Bézout entre els nombres 17 i 41. Comencem aplicant-hi l'algorisme d'Euclides:

	2	2	2	3
41	17	7	3	1
7	3	1	0	

Els resultats que hem obtingut els fem servir per trobar les fraccions reduïdes de 41/17:

k	0	1	2	3	4
q_k		2	2	2	3
P_k	1	2	5	12	41
Q_k	0	1	2	5	17

Podem obtenir una identitat de Bézout fent servir la fórmula $a(-1)^n P_n + b(-1)^{n+1} Q_n = \text{mcd}(a,b)$, on $n = 3$:

$$17(-1)^3 12 + 41(-1)^4 5 = 1$$
$$17(-12) + 41(5) = 1$$

Aquesta és una identitat de Bézout. Multiplicant per 9...

$$17(-12 \cdot 9) + 41(5 \cdot 9) = 1 \cdot 9$$
$$17(-108) + 41(45) = 9$$

Llavors, $x = -108$, $y = 45$ és una solució de l'equació diofàntica. I el conjunt de totes les solucions és $x = -108 + 41k$, $y = 45 - 17k$.
La solució de l'equació en congruències serà, doncs, $x \equiv -108 \pmod{41}$. O, de manera equivalent,

$$x \equiv 15 \pmod{41}$$

(perquè $-108 + 3 \cdot 41 = 15$).
Com que l'equació original fa referència als enters mòdul 123, pot ser convenient expressar la solució de la mateixa manera; les solucions són:

$$x \equiv 15 \pmod{123} \qquad x \equiv 56 \pmod{123} \qquad x \equiv 97 \pmod{123}$$

Solució alternativa:

Comencem aplicant-hi l'algorisme d'Euclides:

	2	2	2	3
41	17	7	3	1
7	3	1	0	

La solució de l'equació és $x = (-1)^n P_n c \pmod{41}$, on $n = 3$, $c = 9$ i P_n s'obté aplicant l'algorisme següent:

k	0	1	2	3	4
q_k		2	2	2	3
P_k	1	2	5	$\boxed{12}$	41

Així que la solució serà

$$x = (-1)^n P_n c \pmod{41}$$
$$x = (-1)^3 12 \cdot 9 \pmod{41}$$
$$x = -108 \pmod{41}$$

O, de manera equivalent,

$$x \equiv 15 \pmod{41}$$

(perquè $-108 + 3 \cdot 41 = 15$).

Com que l'equació original fa referència als enters mòdul 123, pot ser convenient expressar la solució de la mateixa manera; les solucions són:

$$x \equiv 15 \pmod{123} \qquad x \equiv 56 \pmod{123} \qquad x \equiv 97 \pmod{123}$$

(b) Calculeu, si existeix, l'element invers de $\overline{17}$ en $\mathbb{Z}_{41}$.

Solució:

Primera solució (fent servir equacions diofàntiques): A l'apartat anterior hem trobat la identitat de Bézout

$$17(-12) + 41(5) = 1$$

Així que $17(-12) \equiv 1 \pmod{41}$. O, també (sumant-hi 41), $17(29) \equiv 1 \pmod{41}$. Així que, en $\mathbb{Z}_{41}$, $\overline{17}^{-1} = \overline{29}$.

Solució alternativa:

Es tracta de resoldre, en $\mathbb{Z}_{41}$, l'equació $\overline{17}x = \overline{1}$. Aquesta equació és equivalent a l'equació en congruències $17x \equiv 1 \pmod{41}$, la solució de la qual la podem obtenir amb la fórmula $x = (-1)^n P_n c \pmod{41}$, on n i P_n són els mateixos de l'apartat anterior i $c = 1$. És a dir, $x = (-1)^3 12 \cdot 1 \pmod{41} = -12 \pmod{41}$. O bé, sumant-hi 41, $x = 29 \pmod{41}$.

En conseqüencia, l'invers de $\overline{17}$ en $\mathbb{Z}_{41}$ és $\overline{17}^{-1} = \overline{29}$.

(c) Calculeu $(1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100) \pmod{2}$.

Solució:

Primera solució:

Els nombres que hi ha a la suma són, alternativament, senars i parells (cinquanta són senars i els altres cinquanta, parells). En conseqüència,

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100) \pmod{2} = (1 + 0 + 1 + \cdots + 0 + 1 + 0) \pmod{2} = 50 \pmod{2} = 0$$

Segona solució: Hi podem aplicar la fórmula $\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}$:

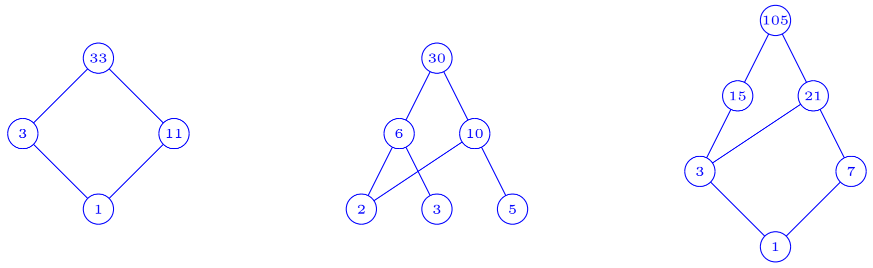
$$(1+2+3+\cdots+98+99+100) \pmod{2} = \frac{100(100+1)}{2} \pmod{2} = 50 \cdot 101 \pmod{2} = 5050 \pmod{2} = 0$$

Qüestió 2 (2 pt) Considerem els subconjunts de $\mathbb{N}$ següents, amb la relació de divisibilitat, $x\mathcal{R}y$ si i només si $x \mid y$ (és a dir, x és divisor de y)

$$A = \{1, 3, 11, 33\},\ B = \{2, 3, 5, 6, 10, 30\},\ C = \{1, 3, 7, 15, 21, 105\}$$

(a) Dibuixeu els diagrames de Hasse corresponents.

Solució:



(b) Quins d'aquests conjunts són reticles?

Solució: Ho són els conjunts A i C, perquè tot parell d'elements hi té un suprem i un ínfim. El conjunt B no és un reticle perquè (per exemple), no existeix $\inf(2, 3)$.

(c) Calculeu, si existeixen, el màxim i el mínim en cadascun d'aquests conjunts.

Solució: El màxim de A és 33; el mínim de A, 1. El màxim de B és 30; en B no hi ha mínim. El màxim de C és 105; el mínim de C, 1.

(d) Quins són reticles de Boole? Justifiqueu totes les respostes.

Solució: En primer lloc, el conjunt B no és un reticle de Boole, perquè ja hem vist que no és un reticle.

1) El reticle A és complementat, perquè els elements 1 i 33 són complementaris l'un de l'altre i el mateix passa amb 3 i 11.

   D'altra banda, en el reticle A, les operacions són $a \cdot b = \text{mcd}(a, b)$ i $a + b = \text{mcm}(a, b)$; com que és ben sabut que els màxim comú divisor i el mínim comú múltiple són mútuament distributius, A és un reticle distributiu.

   Per tant, A és un reticle de Boole.

2) C no és complementat, perquè l'element 21 no té complementari (si $21 + x = 105$, llavors x ha de ser 15 o 105; però $21 \cdot 15 = 3$ i $21 \cdot 105 = 21$, així que no hi ha cap x de manera que $21 + x = 105$ i $21 \cdot x = 1$). Així que C no és un reticle de Boole.

   També es pot justificar que C no és un reticle de Boole d'aquesta manera: se sap que el cardinal dels reticles de Boole finits sempre és una potència de 2; el cardinal de C, però, és 6.

En definitiva, només A és un reticle de Boole.

Qüestió 3 (2 pt) (a) En el conjunt $\mathbb{N}$ dels nombres naturals, s'hi defineix la relació binària següent:

$$a\mathcal{R}b \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; a = b^n$$

(i) Proveu que $\mathcal{R}$ és una relació binària d'ordre.

Solució: Cal justificar que la relació és reflexiva, antisimètrica i transitiva:

Reflexiva: Tot nombre natural a verifica que $a = a^1$, així que $\forall a \in \mathbb{N}\ a\mathcal{R}a$.

Antisimètrica: Si a i b són nombres naturals, $a\mathcal{R}b$ i $b\mathcal{R}a$ llavors, existeixen dos nombres naturals, n_1 i n_2, tals que $a = b^{n_1}$ i $b = a^{n_2}$. En conseqüència,

$$a = b^{n_1} = \left(a^{n_2}\right)^{n_1} = a^{n_2 n_1}$$

Però, com que a, n_1 i n_2 són nombres naturals, això significa que $n_2 n_1 = 1$ i $n_1 = n_2 = 1$. Per tant, $a = b^{n_1} = b$.

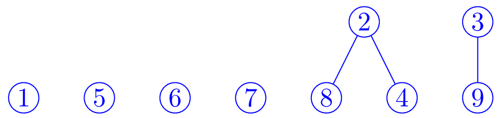
Transitiva: Si $a\mathcal{R}b$ i $b\mathcal{R}c$ llavors, existeixen dos nombres naturals, n_1 i n_2, tals que $a = b^{n_1}$ i $b = c^{n_2}$. Per tant,

$$a = b^{n_1} = \left(c^{n_2}\right)^{n_1} = c^{n_2 n_1}$$

així que $a\mathcal{R}c$.

(ii) Dibuixeu el diagrama de Hasse d'aquesta relació sobre el conjunt $A = \{s \in \mathbb{N} \;/\; 1 \leq s \leq 9\}$.

Solució:



(iii) Calcula els maximals, els minimals, el màxim i el mínim de A (si existeixen), i les fites superiors de A en $\mathbb{N}$.

Solució: Els maximals són: $1, 2, 3, 5, 6$ i 7. Els minimals, $1, 4, 5, 6, 7, 8,$ i 9. Màxim no n'hi ha, perquè hi ha diversos maximals. Mínim, tampoc no n'hi ha. No hi ha fites superiors, perquè si x fos una fita superior tindríem que $2\mathcal{R}x$ i $3\mathcal{R}x$, així que 2 i 3 són potències naturals de x. Però, com que 2 i 3 són nombres primers, això només és possible si $2 = x$ i $3 = x$, i hem arribat a la contradicció $2 = 3$.

(b) En el conjunt $A = \{12, 16, 17, 26, 29, 35, 47, 52, 53\}$ dos elements estan relacionats, $a\mathcal{R}b$, si i només si la suma de les xifres de a és igual a la suma de les xifres de b. Aquesta relació $\mathcal{R}$, és d'equivalència? En cas afirmatiu, calculeu les classes d'equivalència dels elements de A i el conjunt quocient corresponent.

Solució: És clarament una relació d'equivalència, perquè compleix les propietats reflexiva, simètrica i transitiva:

Reflexiva: La suma de les xifres del nombre n és la mateixa que la suma de les xifres de n.

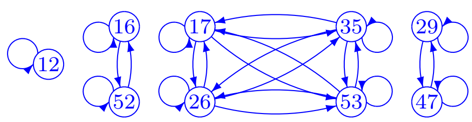
Simètrica: Si la suma de les xifres de a és la mateixa que la de les xifres de b aleshores, la suma de les xifres de b és la mateixa que la de les xifres de a.

Transitiva: Si la suma de les xifres de a és la mateixa que la de les xifres de b i la de les de b coincideix amb la de les de c aleshores, la suma de les xifres de a és la mateixa que la de les xifres de c.

Si sumem les xifres de totes els elements de A,

$1+2=3$	$1+6=7$	$1+7=8$	$2+9=11$
	$5+2=7$	$2+6=8$	$4+7=11$
		$3+5=8$	
		$5+3=8$	

així que el graf associat és aquest:



Les classes d'equivalència són:

$$\overline{12} = \{12\}$$
$$\overline{16} = \overline{52} = \{16, 52\}$$
$$\overline{17} = \overline{26} = \overline{35} = \overline{53} = \{17, 26, 35, 53\}$$
$$\overline{29} = \overline{47} = \{29, 47\}$$

I, el conjunt quocient, $A_{\mathcal{R}} = \{\overline{12}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{29}\} = \Big\{\{12\}, \{16, 52\}, \{17, 26, 35, 53\}, \{29, 47\}\Big\}$.

Qüestió 4 (2 pt) (a) Simplifiqueu, especificant les propietats de l'àlgebra de Boole que feu servir, la función booleana

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + \overline{(x+\bar{z})}$$

Solució:

Solució primera:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + \overline{(x+\bar{z})} && \\
&= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{\bar{z}} && \text{Llei de De Morgan} \\
&= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}z && \text{Involutiva} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + y\bar{z} + z) && \text{Distributiva} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + z + y\bar{z}) && \text{Commutativa} \\
&= \bar{x}(\overline{y\bar{z}} + y\bar{z}) && \text{Llei de De Morgan i involutiva} \\
&= \bar{x}1 && \text{Complementarietat} \\
&= \bar{x} && \text{1 és l'element neutre del producte}
\end{aligned}$$

Solució segona:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + \overline{(x+\bar{z})} && \\
&= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{\bar{z}} && \text{Llei de De Morgan} \\
&= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}z && \text{Involutiva} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + y\bar{z} + z) && \text{Distributiva} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + y\bar{z} + 1z) && \text{Element neutre} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + y\bar{z} + (\bar{y} + y)z) && \text{Complementarietat} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + y\bar{z} + \bar{y}z + yz) && \text{Distributiva} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + \bar{y}z + y\bar{z} + yz) && \text{Commutativa} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + \bar{y}z + y(\bar{z} + z)) && \text{Distributiva} \\
&= \bar{x}(\bar{y} + y1) && \text{Absorció i complementarietat} \\
&= \bar{x} && \text{Element neutre i complementarietat}
\end{aligned}$$

(b) Apliqueu el mètode de Quine-McCluskey per simplificar la funció booleana

$$f(x,y,z) = xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Solució:

Mètode de Quine:

Nombre d'uns	T. minimals	1a comparació	2a comparació
0	000 0	0,4 -00	No n'hi ha
1	100 4	4,5 10-	
2	101 5	5,7 1-1	
3	111 7		

Simplificació: $f(xyz) = \bar{y}\bar{z} + x\bar{y} + xz$. Graella de McCluskey:

	0 0 0	1 0 0	1 0 1	1 1 1
-00	$\boxed{\text{X}}$	X		
$10-$		X	X	
$1-1$			X	$\boxed{\text{X}}$

Com que a les columnes primera i quarta només hi ha una marca, els implicadors m_{-00} i m_{1-1} són necessaris. D'altra banda, aquests dos implicadors ja cobreixen els quatre minitermes, així que no ens cal afegir-ne cap altre. La simplificació que s'obté és $f(xyz) = \bar{y}\bar{z} + xz$.

Qüestió 5 (2 pt) (a) Considerem tots els nombres de quatre xifres que es poden formar amb els digits $1, 3, 5, 7$ i 9.

(i) Quants n'hi ha?

Solució: L'ordre és important, i les xifres es poden repetir, així que se'n poden construir $VR_{5,4} = 5^4 = 625$.

(ii) Quants tenen totes les xifres distintes?

Solució: Ara seran variacions sense repetició: $V_{5,4} = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$.

(iii) Quants són cap-i-cua (és a dir, que es llegeixen igual d'esquerra a dreta que de dreta a esquerra)?

Solució: Un nombre és cap-i-cua siu té la forma $abba$. Així que les dues primeres xifres determinen les dues últimes. N'hi ha $VR_{5,2} = 5^2 = 25$.

(iv) Si els ordenem en forma creixent, quin lloc ocupa el nombre 3579?

Solució:

Solució primera: De tots aquests nombres, els que són més petits que 3579 són

- els que tenen la forma $1abc$, que són $VR_{5,3} = 5^3$, perquè podem triar tres xifres entre cinc dígits,
- els que tenen la forma $31ab$ o $33ab$: $2VR_{5,2} = 2 \cdot 5^2$
- els que tenen la forma $351a$, $353a$ o $355a$: $3VR_{5,1} = 3 \cdot 5$
- i els que tenen la forma $357a$, amb $a = 1, 3, 5, 7$: quatre nombres.

Així que, abans del nombre 3579 hi ha

$$5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 194$$

I el nombre 3579 ocupa la posició 195.

Solució segona: De tots aquests nombres, els que són posteriors al 3579 són

- els que tenen la forma $5abc$, que són $VR_{5,3} = 5^3$, perquè podem triar tres xifres entre cinc dígits,
- els que tenen la forma $7abc$, que també són $VR_{5,3} = 5^3$,
- els que tenen la forma $9abc$, altres $VR_{5,3} = 5^3$,
- els que comencen per 37 o 39, és a dir, $37ab$ o $39ab$ (d'aquests en tenim $2VR_{5,2} = 2 \cdot 5^2$)
- i els que tenen la forma $359a$, que n'hi ha 5.

Així que, de més grans que 3579, n'hi ha

$$3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5 = 430$$

Per tant, la posició del nostre nombre és $625 - 430 = 195$.

(b) Si A i B són dos conjunts tals que $\operatorname{cd}(A \cup B) = 17$, $\operatorname{cd} A = 6$ i $\operatorname{cd} B = 13$, calculeu $\operatorname{cd}(A \setminus B)$ i $\operatorname{cd}(B \setminus A)$.

Solució: Sabem que $\operatorname{cd}(A \setminus B) = \operatorname{cd} A - \operatorname{cd}(A \cap B)$, així que necessitem trobar el cardinal de la intersecció. Això ho podem fer aplicant el principi d'inclusió-exclusió: com que

$$\operatorname{cd}(A \cup B) = \operatorname{cd} A + \operatorname{cd} B - \operatorname{cd}(A \cap B)$$

tindrem

$$\operatorname{cd}(A \cap B) = \operatorname{cd} A + \operatorname{cd} B - \operatorname{cd}(A \cup B)$$

Així que

$$\operatorname{cd}(A \setminus B) = \operatorname{cd} A - \operatorname{cd}(A \cap B) = \operatorname{cd} A - \Big(\operatorname{cd} A + \operatorname{cd} B - \operatorname{cd}(A \cup B)\Big) = -\operatorname{cd} B + \operatorname{cd}(A \cup B) = -13 + 17 = 4$$

$$\operatorname{cd}(B \setminus A) = \operatorname{cd} B - \operatorname{cd}(A \cap B) = \operatorname{cd} B - \Big(\operatorname{cd} A + \operatorname{cd} B - \operatorname{cd}(A \cup B)\Big) = -\operatorname{cd} A + \operatorname{cd}(A \cup B) = -6 + 17 = 11$$