Àlgebra **21 de juny de 2018**
Examen de recuperació **3 hores**

Recordeu que no podeu fer servir calculadora, ordinador, telèfon mòbil, tauleta o qualsevol altre dispositiu electrònic.

Marqueu a quins parcials us presenteu: | 1r | 2n |

COGNOMS:	GRUP:
NOM:	

Si et presentes només al primer parcial, has de respondre les qüestions 1, 2, 3, 4 i 5

Si et presentes només al segon parcial, has de respondre les qüestions 6, 7, 8, 9, 10 i 11

Si et presentes als dos parcials, has de respondre les qüestions 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 i 10

Qüestió 1 (3 pt) Donada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

a) Trobeu la forma esglaonada reduïda, R, de A i una matriu T tal que $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$. Escriviu la matriu T^{-1} com un producte de matrius elementals.

b) Digueu, justificant la vostra resposta, quin és el rang de la matriu A.

c) si $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ discutiu i resoleu, si és possible, els sistemes lineals $\mathsf{B}\vec{x} = (0, 0, 0)$ i $\mathsf{B}\vec{x} = (2, 4, 2)$.

Solució:

a) Aplicarem l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La forma esglaonada reduïda de A és la matriu $\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si $\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ llavors, $\mathsf{TA} = \mathsf{R}$. A més a més, $\mathsf{T} = \mathsf{E}_2(-1)\mathsf{E}_{2,3}\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-2)$, així que $\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{E}_{2,1}(2)\mathsf{E}_{3,1}(1)\mathsf{E}_{2,3}\mathsf{E}_2(1)$.

b) El rang de A és igual al nombre d'uns principals de la forma esglaonada reduïda R, és a dir, $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 2$.

c) Com que la matriu B correspon a les tres primeres columnes de la matriu A, la forma esglaonada reduïda de B és $\mathsf{R_B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Llavors, el sistema lineal $\mathsf{B}\vec{x} = (0, 0, 0)$ és equivalent al sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, així que aquest sistema és compatible indeterminat (perquè el rang de B i el de la matriu ampliada són iguals a 2 i hi ha tres incògnites), i la solució general és $x_1 = -3\alpha, x_2 = 0, x_3 = \alpha$ o, en forma vectorial, $\vec{x} = \alpha(-3, 0, 1)$.

D'altra banda, el sistema lineal $\mathsf{B}\vec{x} = (2, 4, 2)$ és equivalent al sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, així que també és indeterminat i la solució general és $\vec{x} = (2, 0, 0) + \alpha(-3, 0, 1)$.

Qüestió 2 (1'5 pt) Trobeu el rang de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b & b-1 \\ b & -1 & b+2 & 2 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ segons els valors dels paràmetres a i b.

Solució: Fent operacions elementals,

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & b & b-1 \\ b & -1 & b+2 & 2 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{4,1}(-1)\mathsf{E}_{3,1}(-b)\mathsf{E}_{2,1}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & b-2 & b-3 \\ 0 & -1 & -b+2 & -2b+2 \\ 0 & 0 & a-2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & b-2 & b-3 \\ 0 & 0 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & a-2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & b-2 & b-3 \\ 0 & 0 & a-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -b-1 \end{bmatrix} = \mathsf{B}$$

obtenim la matriu B, el rang de la qual és el mateix que el de A. Aleshores distingirem els casos següents:

(1) Si $a = 2$,

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & b-2 & b-3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -b-1 \end{bmatrix}$$

i el rang de A és 3 (observeu que, en aquest cas, no importa el valor de b).

(2) Si $a \neq 2$ tindrem dues possibilitats:

(1a) Si $b = -1$ el rang de A és 3.

(1b) Si $b \neq -1$ el rang de A és 4.

En resum: si $a = 2$ o $b = -1$ el rang de A és 3; si $a \neq 2$ i $b \neq -1$, el rang és 4.

Qüestió 3 (2'5 pt) Donada la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

a) Calculeu la matriu inversa de A i escriviu-la (la inversa) com un producte de matrius elementals.

b) Resoleu l'equació matricial $\mathsf{AX} - 2\mathsf{A} = \mathrm{I}$. Calculeu la matriu X explícitament.

c) Si X és la solució de l'equació de l'apartat anterior, proveu que A commuta amb X **sense fer les multiplicacions**.

Solució:

a) Aplicarem l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \mathrm{I}\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \mathrm{I}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3}(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

La inversa és $\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \mathsf{E}_3(-1/2)\mathsf{E}_{1,2}(-3)\mathsf{E}_{1,2}$.

b) $\mathsf{AX} - 2\mathsf{A} = \mathrm{I} \iff \mathsf{AX} = \mathrm{I} + 2\mathsf{A} \iff \mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}(\mathrm{I} + 2\mathsf{A}) \iff \mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1} + 2\mathrm{I}$, així que

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix} -3+2 & 1 & 0 \\ 1 & 0+2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

c) Com que $\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1} + 2\mathrm{I}$, $\mathsf{XA} = \left(\mathsf{A}^{-1} + 2\mathrm{I}\right)\mathsf{A} = \mathrm{I} + 2\mathsf{A}$. D'altra banda, en l'apartat anterior, ja hem vist que $\mathsf{AX} = \mathrm{I} + 2\mathsf{A}$, així que $\mathsf{AX} = \mathsf{XA}$.

Qüestió 4 (1 pt) Calculeu una factorització LU de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

Solució:

Primera solució: Fem operacions elementals sobre A fins convertir-la en triangular superior:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

Com que $\mathsf{E}_{3,2}(-2)\mathsf{E}_{1,3}\mathsf{A} = \mathsf{U}$, la matriu L tal que $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$ és

$$\mathsf{L} = (\mathsf{E}_{3,2}(-2)\mathsf{E}_{1,3})^{-1} = \mathsf{E}_{1,3}\mathsf{E}_{3,2}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Segona solució: Cada vegada que fem una operació elemental per files, partint de la matriu A, farem l'operació elemental inversa *per columnes* partint de la matriu identitat:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathsf{E}_{1,3}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathsf{E}_{3,2}(2)]{} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{L}$$

Si et presentes als dos parcials *no respongues* la qüestió 5

Qüestió 5 (2 pt) a) Sabent que la solució del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = (3, -1)$ és $\vec{x} = (1, 1)$ i la solució del sistema $\mathsf{A}\vec{x} = (2, 1)$ és $\vec{x} = (0, 1)$, trobeu la matriu A.

b) Proveu que, si A i B són dues matrius quadrades del mateix ordre i A és antisimètrica, aleshores $\mathsf{BAB}^t - \mathsf{A}$ també és antisimètrica.

c) Escriviu totes les matrius 3×3 esglaonades reduïdes que tenen rang 2 i, com a màxim, dos elements no nuls.

d) Justifiqueu si la matriu A és invertible, sabent que $\mathsf{A}^3 + 2\mathsf{A}^2 - \mathrm{I} = \mathsf{O}$.

Solució:

a) Sabem que $\mathsf{A}(1, 1) = (3, -1)$ i $\mathsf{A}(0, 1) = (2, 1)$, així que

$$\mathsf{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathsf{A}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathsf{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Hem de provar que $(\mathsf{BAB}^t - \mathsf{A})^t = -(\mathsf{BAB}^t - \mathsf{A})$:

$$(\mathsf{BAB}^t - \mathsf{A})^t = (\mathsf{BAB}^t)^t - \mathsf{A}^t = (\mathsf{B}^t)^t\mathsf{A}^t\mathsf{B}^t - \mathsf{A}^t$$

Com que A és antisimètrica, $\mathsf{A}^t = -\mathsf{A}$,

$$= (\mathsf{B}^t)^t(-\mathsf{A})\mathsf{B}^t - (-\mathsf{A}) = -\mathsf{BAB}^t + \mathsf{A} = -(\mathsf{BAB}^t - \mathsf{A})$$

c) Si són esglaonades reduïdes i tenen rang igual a 2, hi ha d'haver dos uns principals; i com que no hi pot haver més de dos elements no nuls, tots els altres elements de la matriu són zeros. Hi ha tres possibilitats, perquè les columnes principals poden ser: (1) la primera i la segona, (2) la primera i la tercera o (3) la segona i la tercera. Això ens proporciona aquestes tres matrius:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Si no haguéssem imposat la condició que només hi haja dues entrades no nul·les, les possibilitats serien aquestes: $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ i $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, on a i b són nombres arbitraris).

d)

$$\mathsf{A}^3 + 2\mathsf{A}^2 - \mathrm{I} = \mathsf{O} \iff \mathsf{A}^3 + 2\mathsf{A}^2 = \mathrm{I} \iff \mathsf{A}(\mathsf{A}^2 + 2\mathsf{A}) = \mathrm{I}$$

Per tant, la matriu A és invertible i $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^2 + 2\mathsf{A}$.

Qüestió 6 (1 pt) Sabent que la forma esglaonada reduïda de la matriu

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

trobeu bases dels espais fila, columna i nul (nucli) de A.

Solució: Els conjunts

$$\begin{aligned} B_{\text{Fil}} &= \{(1,0,0,-1,0,1),(0,0,1,0,0,2),(0,0,0,0,1,3)\} \\ B_{\text{Col}} &= \{(1,-2,0,1),(0,1,0,2),(-1,0,1,0)\} \\ B_{\text{Nul}} &= \{(0,1,0,0,0,0),(1,0,0,1,0,0),(-1,0,-2,0,-3,1)\} \end{aligned}$$

són bases, respectivament, del subespais fila, columna i nul de A.

Qüestió 7 (2 pt) Considerem els següents subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \langle(1,2,-3,1),(1,1,0,0),(3,5,-6,2)\rangle \\ G &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3=0, x_1-2x_4=0\} \end{aligned}$$

a) Trobeu bases de F i G i les equacions de F.

b) És directa, la suma $F+G$? Justifiqueu la vostra resposta.

c) Trobeu una base de l'ortogonal de G.

Solució:

a) El vector $(3,5,-6,2)$ és combinació lineal de $(1,2,-3,1)$ i $(1,1,0,0)$, perquè $2(1,2,-3,1)+(1,1,0,0) = (3,5,-6,2)$. Com que és clar que $B_F = \{(1,2,-3,1),(1,1,0,0)\}$ és linealment independent, aquest conjunt és una base de F.

El subespai G és l'espai nul d'una matriu:

$$G = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

així que el conjunt $B_G = \{(0,-1,1,0)(2,-2,0,1)\}$ és una base de G.

Per trobar les equacions de F, podem fer servir dos mètodes alternatius:

(1) Com que F és l'espai columna de la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, l'ortogonal de F és l'espai nul esquerre,

$$F^{\perp} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

En conseqüència, el conjunt $\{(-3,3,1,0),(1,-1,0,1)\}$ és una base de $F^{\perp}$, és a dir, $F^{\perp} = \text{Fil}\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Aleshores, F és l'espai nul d'aquesta matriu, $F = \text{Nul}\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : \; -3x_1+3x_2+x_3=0, x_1-x_2+x_4=0\}$$

(2) Un vector $\vec{x}$ és a F si és combinació lineal dels vectors de la base de F, és a dir, si el rang de la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{bmatrix}$ és igual a 2. Fent operacions elementals sobre aquesta matriu tenim que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -3 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 3 & 3x_1 + x_3 \\ 0 & -1 & -x_1 + x_4 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

Aquest rang és igual a zero si i només si $-3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$ i $x_1 - x_2 + x_4 = 0$, així que aquestes equacions defineixen l'espai F.

b) Podem esbrinar si la suma $F + G$ és directa fent servir les bases respectives o, alternativament, les equacions:

(1) $F + G$ és l'embolcall lineal de la unió de les bases de F i G, és a dir l'espai columna de la matriu que conté els vectors de les dues bases. Fem operacions elementals sobre aquesta matriu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Algorisme de Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquesta matriu té rang 4, així que la dimensió de $F + G$ és igual a 4. Això vol dir que la suma és directa, perquè, aplicant-hi la fórmula de Grassman,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 2 + 2 - 4 = 0$$

(2) Els vectors de $F \cap G$ són els que compleixen simultàniament les equacions de G i les de F, és a dir, que

$$F \cap G = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{=}{\xrightarrow{\text{algorisme de Gauss}}} \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El rang d'aquesta matriu és 4 així que el sistema d'equacions és compatible determinat, la solució (única) és $\vec{x} = \vec{0}$ i, en conseqüència, la suma és directa.

c) L'ortogonal de G és l'embolcall lineal del conjunt $B_{G^\perp} = \{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, -2)\}$. A més a més, la dimensió de $G^\perp$ és $4 - \dim G = 4 - 2 = 2$, així que el conjunt B_G és una base de $G^\perp$.

De la qüestió 8 hi ha dues versions diferents

Qüestió 8 (1 pt) **Primera versió** Siga $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal donada per

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, 2x_1+x_2-x_3, 3x_1+2x_2-x_3, x_1+3x_3)$$

a) Trobeu la matriu canònica de f.

b) Quines són les dimensions del nucli i la imatge de f?

c) L'aplicació f és injectiva? i suprajectiva? Justifiqueu la vostra resposta.

Solució:

a) La matriu canònica és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Per respondre aquesta qüestió, calcularem el rang de la matriu canònica (fent-hi operacions elementals per files i per columnes):

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 3$$

La dimensió de la imatge de f és igual a la de l'espai columna d'aquesta matriu, és a dir, 3, i la del nucli, igual a la de l'espai nul de A, 0.

c) El nucli és zero, així que f és injectiva. Com que la imatge té dimensió 3 no pot cobrir l'espai $\mathbb{R}^4$, així que f no és suprajectiva.

Qüestió 8 (1 pt) **Segona versió** Siga $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal donada per

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, 2x_1+x_2-x_3, 3x_1+2x_2-x_3, x_1-x_3)$$

a) Trobeu la matriu canònica de f.

b) Quines són les dimensions del nucli i la imatge de f?

c) L'aplicació f és injectiva? i suprajectiva? Justifiqueu la vostra resposta.

Solució:

a) La matriu canònica és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Per respondre aquesta qüestió, calcularem el rang de la matriu canònica (fent-hi operacions elementals per files i per columnes):

$$\text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

La dimensió de la imatge de f és igual a la de l'espai columna d'aquesta matriu, és a dir, 2, i la del nucli, igual a la de l'espai nul de A, 1.

c) El nucli no és zero, així que f no és injectiva. Com que la imatge té dimensió 2 no pot cobrir l'espai $\mathbb{R}^4$, així que f no és suprajectiva.

Qüestió 9 (1 pt) Calculeu els determinants de les matrius següents

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \mathsf{E}_{1,2}\mathsf{E}_{1,4}\mathsf{E}_{2,3}(-5)\mathsf{E}_2(1/5) \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solució:

- La matriu A és triangular, així que el seu determinant és el producte de les entrades diagonals: $\det \mathsf{A} = n!$
- A la matriu B, la tercera fila és igual a la primera més la segona, així que $\det \mathsf{B} = 0$.
- $\det \mathsf{C} = \det\left(\mathsf{E}_{1,2}\mathsf{E}_{1,4}\mathsf{E}_{2,3}(-5)\mathsf{E}_2(1/5)\right) = \det \mathsf{E}_{1,2} \det \mathsf{E}_{1,4} \det\left(\mathsf{E}_{2,3}(-5)\right) \det\left(\mathsf{E}_2(1/5)\right) = (-1)(-1)1(1/5) = 1/5.$
- $\det \mathsf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$

Qüestió 10 (3 pt) a) Estudieu la diagonalitzabilitat de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ segons els valors del paràmetre a.

b) En els casos que siga diagonalizable, trobeu una matriu invertible, P, i una matriu diagonal, D, tal que $\mathsf{A} = \mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^{-1}$.

Solució:

a) En primer lloc, calculem el polinomi característic:

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Els valors propis són $\lambda_1 = 1$, amb multiplicitat algebraica $\mathrm{malg}(1) = 2$, i $\lambda_2 = 2$, amb multiplicitat algebraica $\mathrm{malg}(2) = 1$.

Perquè la matriu siga diagonalitzable, cal que les multiplicitats algebraiques coincidisquen amb les geomètriques. Tot i això, en el cas del valor propi 2, això no cal comprovar-ho, perquè els valors propis simples sempre compleixen aquesta condició. En conseqüència, el que hem d'estudiar és si la multiplicitat geomètrica del valor propi 1 és igual a 2.

$$\mathrm{mgeo}(1) = \dim \mathrm{Nul}(\mathsf{A} - 1\mathrm{I}) = 3 - \mathrm{rang}(\mathsf{A} - \mathrm{I}) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 0$, llavors el rang és 1; però si $a \neq 0$, el rang és 2, així que

$$\mathrm{mgeo}(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

i la matriu A és diagonalitzable si i només si $a = 0$.

b) Només es pot diagonalitzar si $a = 0$. En aquest cas la nostra matriu és $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Els valors propis són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$. Calculem-ne els subespais propis:

$$E_1(\mathsf{A}) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,1,0), (-1,0,1) \rangle$$

$$E_2(\mathsf{A}) = \text{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle (0,-1,1) \rangle$$

La matriu A es pot diagonalitzar de la manera següent:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathsf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathsf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathsf{P}^{-1}}$$

Si et presentes als dos parcials *no respongues* la qüestió 11

Qüestió 11 (2 pt) a) Si f és una aplicació lineal de $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^3$ suprajectiva, dieu, justificant la vostra resposta, quines són les dimensions dels subespais nucli i imatge de f.

b) Demostreu que, si 0 és un valor propi de la matriu A, llavors, aquesta matriu no és invertible.

c) Proveu que la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ no és diagonalitzable com a matriu real, però A^2 sí que ho és.

d) Pot un vector no nul tenir les mateixes coordenades respecte a dues bases diferents? Justifiqueu la vostra resposta.

Solució:

a) Si f és suprajectiva, llavors el subespai imatge de f és $\mathbb{R}^3$, així que la dimensió d'aquest subespai és 3. D'altra banda, per la fórmula de les dimensions,

$$\dim \text{Nuc}\, f + \underbrace{\dim \text{Im}\, f}_{3} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^5}_{5}$$

així que $\dim \text{Nuc}\, f = 2$.

b) Si 0 és un valor propi de la matriu A, llavors, el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ és indeterminat, així que el rang de A no és màxim i A no és invertible.

c) Els valors propis d'aquesta matriu són les arrels de l'equació

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 4 = 0$$

és a dir, $\lambda = \pm 2i$. En conseqüència, els valors propis no són reals i, *en el camp real*, la matriu A no és diagonalitzable.

Ara bé, $\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. és diagonal i, òbviament, diagonalitzable.

d) És clar que sí. Per exemple, en $\mathbb{R}^2$, tenim les bases $B_1 = \{(1,2),(1,0)\}$ i $B_2 = \{(1,2),(1,1)\}$ i les coordenades del vector $\vec{u} = (2,4)$ respecte a les dues bases són iguals: $\vec{u}_{B_1} = (2,0)$ i, també, $\vec{u}_{B_2} = (2,0)$.
