Anàlisi Matemàtica

UT1 - Nombres Reals

Contingut

Nombres Reals

- Evolució dels conjunts numèrics $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$
- Nombres irracionals
- Propietats dels nombres reals
- Valor absolut. Propietats elementals

Objectius

Nombres reals (2S)

- Recordar els conjunts numèrics $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$
- Conéixer les propietats bàsiques de $\mathbb{R}$ (estructura, àlgebra i ordre)
- Manipular correctament el valor absolut i les desigualtats

Nombres Reals

Nombres naturals:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Suma i producte. Ordenació "natural"

L'equació $2 + x = 1$ no és resoluble en $\mathbb{N}$

Nombres racionals:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\ ,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\ \text{fracció irreduïble}\right\}$$

$$(\mathbb{Q},\le)\ \text{definida per}\ \frac{m}{n}<\frac{p}{q}\Leftrightarrow m\cdot q<n\cdot p$$

Representació decimal finita o periòdica: $\frac{12}{5}=2.4$; $\frac{139}{60}=2.31\widehat{6}$; $\frac{21}{19}=?$

$$x=2.456\ \Leftrightarrow\ x=\frac{2456}{1000}=\frac{307}{125}$$

$$\frac{139}{60}=2.31\widehat{6}\qquad x=2.31\widehat{6}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}100x=231+0.\widehat{6}\\1000x=2316+0.\widehat{6}\end{array}\right\}\Rightarrow\ x=\frac{2316-231}{900}$$

$$\frac{1812}{37}=48.\widehat{972}\qquad x=48.\widehat{972}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c}x=48+0.\widehat{972}\\1000x=48972+0.\widehat{972}\end{array}\right\}\Rightarrow\ x=\frac{48972-48}{999}$$

Les operacions i l'ordre dels nombres racionals s'estenen als irracionals (i als reals) fent ús de les aproximacions decimals.

Propietats dels nombres reals:

$(\mathbb{R},+,\times)$ cos abelià

$(\mathbb{R},\le)$ relació d'ordre total, compatible amb + i $\times$

$x\le y\ \Leftrightarrow\ y-x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ (reflexiva, antisimètrica i transitiva)

Si $x,y\in\mathbb{R}$, aleshores $x<y\ \vee\ x=y\ \vee\ x>y$

Si $x,y\in\mathbb{R}^+$, aleshores $x+y\in\mathbb{R}^+\ \wedge\ x\cdot y\in\mathbb{R}^+$

$(\mathbb{R},+,\times,\le)$ és complet

Nota: Definim la recta real ampliada afegint dos símbols més

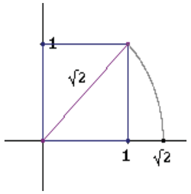
$$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$$

Nombres irracionals:

L'equació $x^2=2$ no és resoluble en $\mathbb{Q}$

La solució, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$; és *irracional*

(correspon a la diagonal del quadrat unitat)



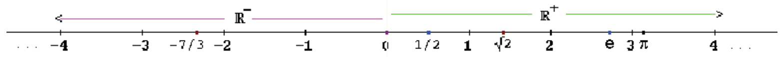
Representació decimal infinita, no periòdica

($\sqrt{2}$=1.41421356… ; π=3.14159265… ; e=2.71828182…)

Nombres reals:

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$ (racionals i irracionals)

$\mathbb{R}$ s'identifica amb el conjunt de punts de la recta real



$$\mathbb{R}=\mathbb{R}^-\cup\{0\}\cup\mathbb{R}^+\ \text{(negatius, zero i positius)}$$

Propietats de les desigualtats:

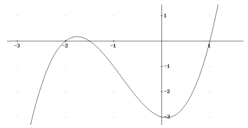
$$a\le b\ \Rightarrow\ a+c\le b+c$$

$$a\le b\ \Rightarrow\ \begin{cases}a\cdot c\le b\cdot c\ \text{ si }\ c>0\\a\cdot c\ge b\cdot c\ \text{ si }\ c<0\end{cases}$$

$$4x+13\le 2x+7$$
$$4x-2x\le 7-13$$
$$2x\le -6$$
$$x\le\frac{-6}{2}=-3$$
$$x\in\,]-\infty,-3]$$

$$4x+13\le 6x+7$$
$$4x-6x\le 7-13$$
$$-2x\le -6$$
$$x\ge\frac{-6}{-2}=3$$
$$x\in[3,+\infty[$$

$$2x^3+5x^2-x-6\le 0$$
$$2(x-1)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)\le 0$$
$$x\in\,]-\infty,-2]\cup\left[\frac{-3}{2},1\right]$$



Valor absolut en $\mathbb{R}$:

Si $x \in \mathbb{R}$, es defineix el seu valor absolut com $|x| = |-x| = \begin{cases} x\ , \text{ si } x \geq 0 \\ -x\ , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

Propietats:

$|x| \geq 0$

$(a>0)$ $\quad |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff -a \leq x \wedge x \leq a \iff x \in [-a, a]$

$(b>0)$ $\quad |x| \geq b \iff b \leq x \vee x \leq -b \iff x \in]-\infty, -b] \cup [b, +\infty[$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualtat de Minkowski)

Nota: $\sqrt{x^2} = |x|$

Distància en $\mathbb{R}$:

Si $x, y \in \mathbb{R}$, es defineix la distància entre ells com $d(x, y) = |x - y|$

$I = \{x \in \mathbb{R} \ / \ d(x,a) < \delta\} =]a-\delta, a+\delta[$, interval (obert) de centre a i radi δ

Exercici: Trobar els $x \in \mathbb{R}$ tals que $\left||x| - 2\right| \leq 1$

Tenint en compte la segona propietat del valor absolut,

$$\left||x| - 2\right| \leq 1 \iff 1 \leq |x| \leq 3 \iff |x| \leq 3 \wedge |x| \geq 1$$

Per la mateixa raó, $|x| \leq 3 \iff x \in [-3, 3]$

La tercera propietat ens condueix a $|x| \geq 1 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

El conjunt solució, S, és $[-3,3] \cap (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[) = [-3,-1] \cup [1,3]$

S és acotat i $\sup(S) = \max(S) = 3$; $\inf(S) = \min(S) = -3$