DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Examen Final **27-01-2014** **Duración: 3 horas**

PRIMER PARCIAL

---

1. (0.8p) Sea

$$z = \frac{3 + xi}{1 + i}$$

a) Encuentra $x \in \mathbb{R}$ para que z esté en la bisectriz del cuarto cuadrante.

b) Calcula el módulo de z.

$$z = \frac{3 + xi}{1 + i} = \frac{(3 + xi) \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \frac{3 + xi - 3i - xi^2}{2} = \frac{3 + x + (-3 + x)i}{2}.$$

Para que z esté en la bisectriz del segundo-cuarto cuadrante, $Re[z] = -Im[z]$. Si además queremos que esté en el cuarto cuadrante entonces: $Re[z] > 0$ e $Im[z] < 0$. Aplicando primero la condición de segundo-cuarto cuadrante tenemos que

$$3 + x = -(-3 + x),$$

$$3 + x = 3 - x,$$

$$x = -x,$$

$$x = 0.$$

Ahora tenemos que comprobar que la solución efectivamente está en el cuarto cuadrante. Sustituimos $x = 0$ en z

$$z = \frac{3 - 3i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Efectivamente $Re[z] > 0$ e $Im[z] < 0$, por lo que ya está en el cuarto cuadrante.

Ahora calculamos $|z|$

$$|z| = \sqrt{\frac{3^2 + (-3)^2}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

---

2. (0.8p) Encuentra el dominio de la función $f(x) = x^2 \cdot \log x$. A partir del estudio de la derivada de la función determina las regiones de crecimiento y decrecimiento así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

Para resolver este ejercicio tenemos que tener en cuenta que estamos trabajando con el producto de un logaritmo y una parábola:

a) El dominio de la función logaritmo son $x \in]0, +\infty[$ por lo tanto tenemos que exigir que $x > 0$.

b) En el caso de la parábola, el dominio son todos los números reales.

Entonces el dominio viene limitado solamente por la función logaritmo:

$$Dom(f(x)) =]0, +\infty[.$$

Para calcular posibles máximos y mínimos calculamos los ceros de la derivada primera:

$$f'(x) = x + 2x \log x,$$

igualando a cero,

$$x + 2x \log x = 0,$$

$$x(1 + 2 \log x) = 0,$$

las soluciones son:

$$x = 0 \;\; y \;\; 1 + 2 \log x = 0.$$

Como $x = 0$ no está en el dominio, trabajamos con la segunda ecuación:

$$1 + 2\log x = 0$$

$$\log x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Ahora calculamos la derivada segunda para ver en qué caso estamos:

$$f''(x) = (x + 2x\log x)' = 3 + 2\log x,$$

sustituyendo $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 3 + 2\log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 3 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0,$$

por lo que tenemos un mínimo relativo en $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Por tanto la función es decreciente en $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, tiene un mínimo local en $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ y es creciente en $\left]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$.

---

3. a)$_{(0.5p)}$ Calcula el valor exacto de $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

b)$_{(0.5p)}$ Aproxima la integral anterior utilizando la fórmula de trapecios con $n = 6$. Determina la cota del error cometido mediante dicha aproximación utilizando la fórmula del error de los trapecios.

(Dato: Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ se cumple $|\, f''(x)| \leq 1$ para $x \in [0, 3]$).

c)$_{(0.4p)}$ Determina el valor mínimo de n en la fórmula de los trapecios para que se garantize un error menor que 10^{-4}.

---

a) Una forma de hacer la integral anterior es con el cambio de variable $t = \sqrt{x+1}$, entonces $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$ y $x = t^2 - 1$.
Para $x = 0$ tenemos que $t = 1$ y para $x = 3$, $t = 2$. Sustituyendo en la integral

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\cdot\int_1^2 (t^2 - 1)\,dt = 2\cdot\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^2 = 2\cdot\left[\left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)\right] = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}6666.$$

b) Utilizamos la fórmula de los trapecios:

$$T_n f = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + f(b)\right)\ \textit{con}\ h = \frac{b-a}{n}.$$

En nuestro caso como $n = 6$,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}.$$

Entonces la partición P del intervalo $[0, 3]$ queda

$$P = \{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3\},$$

y

$$T_6 = \frac{1}{4}\left(\frac{0}{\sqrt{1}} + 2\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} + \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}+1}} + \frac{2}{\sqrt{2+1}} + \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}+1}}\right) + \frac{3}{\sqrt{3+1}}\right) = 2{,}6525$$

La cota de error cometido la calculamos haciendo uso de la fórmula

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2\ ;\ M_2 \geq \max_{[a,b]} |f''|\,.$$

Sustituyendo nuestros valores:

$$E_6 \leq \frac{3^3}{12\cdot 6^2}\cdot 1\ = 0{,}0625,$$

c) Ahora determinamos el número mínimo de subintervalos para que $E_n < 10^{-4}$

$$E_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{27}{12n^2} \cdot 1 = \frac{9}{4n^2} < 10^{-4},$$

$$\frac{9}{4 \cdot 10^{-4}} < n^2,$$

$$n > \sqrt{\frac{9 \cdot 10^4}{4}} = \frac{3}{2} \cdot 10^2 = 150,$$

$$n \ge 151.$$

SEGUNDO PARCIAL

---

1. (0.6p) Justifica que

$$\log n \ll n \ll 2^n$$

calculando los límites que sean necesarios para ello.

Para obtener el resultado pedido vamos a comparar los órdenes de magnitud calculando el limite de los cocientes:

$$\lim \frac{\log n}{n} \quad y \quad \lim \frac{n}{2^n},$$

si ambos límites nos dan cero entonces:

$$\log n \ll n \quad y \quad n \ll 2^n \;\; \rightarrow \;\; \log n \ll n \ll 2^n.$$

Vamos con el primer límite:

$$\lim \frac{\log n}{n} = \textit{(Stolz)} = \lim \frac{\log(n+1) - \log n}{(n+1) - n} = \lim \frac{\log(n+1) - \log n}{1} =$$

$$\lim \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \log(1) = 0.$$

con lo que tenemos el primer resultado $\log n \ll n$.
Ahora calculamos el segundo:

$$\lim \frac{n}{2^n} = \textit{(Stolz)} = \lim \frac{(n+1) - n}{2^{(n+1)} - 2^n} = \lim \frac{1}{2^n(2-1)} = \lim \frac{1}{2^n} = 0.$$

con lo cual $n \ll 2^n$ y juntando los resultados de ambos límites se tiene el resultado pedido.

---

2. (1p) Resuelve la recurrencia

$$a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - 4 \cdot a_n + 5,$$

con las condiciones iniciales:

$$a_1 = 5 \;\; y \;\; a_2 = 1.$$

La ecuación característica asociada a la recurrencia es:

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

que tiene una raiz doble $x = 2$. Por tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$a_n^h = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Por otro lado, una solución particular de la recurrencia completa será:

$$U_n^p = K.$$

Sustituyéndola en la ecuación completa podemos obtener el valor de K:

$$K = -4K + 4K + 5,$$

$$K = 5$$

Con esto la solución de la ecuación completa nos queda:

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 2^n \cdot n + 5.$$

Ahora utilizamos las condiciones de contorno para encontrar el valor de las constantes C_1 y C_2:

$$\textit{para n=1} \;\Rightarrow\; a_1 = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 2 + 5 = 5 \;\Rightarrow 2 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 = 0,$$

$$\textit{para n=2} \;\Rightarrow\; a_2 = C_1 2^2 + C_2 \cdot 2^2 \cdot 2 + 5 = 1 \;\Rightarrow 4 \cdot C_1 + 8 \cdot C_2 = -4.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos: $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$ con lo que la solución es:

$$a_n = 2^n - n \cdot 2^n + 5.$$

---

3. Sea $f(x) = \sum_{n\geq 1} n \cdot x^{n-1}$.

a)$_{(0.6\text{p})}$ Calcula la integral $\int f(x)dx$ y suma la serie resultante donde converja. Seguidamente deriva el resultado anterior y encuentra una expresión explícita de $f(x)$.

b)$_{(0.3\text{p})}$ A partir del resultado anterior encuentra el valor exacto de:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{5^{2n-1}}.$$

c)$_{(0.5\text{p})}$. Aproxima el valor de la suma anterior utilizando s_3 y acota el error cometido utilizando el criterio de Leibniz.

---

a)

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n\geq 1} n \cdot x^{n-1} \right) dx = \sum_{n\geq 1} \left(n \cdot \int x^{n-1} dx \right) = \sum_{n\geq 1} \left(n \cdot \frac{x^n}{n} + C \right) = \sum_{n\geq 1} x^n + C.$$

Aplicando la fórmula de la suma de la serie geométrica $\sum_{n\geq p} r^p = \frac{r^p}{1-r}$ si $|r| < 1$:

$$\int f(x)dx = \sum_{n\geq 1} x^n + C = \frac{x}{1-x} + C \;\; si \; |x| < 1.$$

Calculando la derivada:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx \right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x} + C \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

b) A partir del resultado anterior vamos a encontrar el valor de:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{5^{2n-1}}.$$

Reagrupando términos:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{5^{2n-1}}=\frac{(-1)^2}{5^{-1}}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{5^{2n}}=5\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{25^{n}}=\frac{5}{25}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{25^{n-1}}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{n\geq 1}n\cdot\left(\frac{-1}{25}\right)^{n-1}.$$

Aplicando el resultado del apartado anterior con $x=\frac{-1}{25}$ tenemos la suma exacta de la serie:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{5^{2n-1}}=\frac{1}{5}\cdot f\left(\frac{-1}{25}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1-(\frac{-1}{25}))^2}=\frac{125}{676}=0{,}18491.$$

c)

$$s_3=\sum_{n=1}^{3}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{5^{2n-1}}=\frac{1\cdot(-1)^2}{5^{2-1}}+\frac{2\cdot(-1)^3}{5^{4-1}}+\frac{3\cdot(-1)^4}{5^{6-1}}=\frac{578}{3125}=0{,}18496$$

El error cometido en la suma anterior viene determinado por el valor absoluto del cuarto término de la serie (el valor absoluto del primer que se desprecia):

$$\left|\frac{4\cdot(-1)^{4+1}}{5^{2\cdot 4-1}}\right|=\frac{4}{5^{2\cdot 4-1}}=\frac{4}{78125}=0{,}0000512$$