Análisis Matemático

UT6 - Series de Potencias

AMA

Contenido

Conceptos Generales

- Definició de sèrie de potències
- La serie geométrica
- Radio e intervalo de convergencia

Derivación e integración de series de potencias

- Cálculo de derivadas y primitivas
- Obtención de series de potencias a partir de la geométrica
- Aplicación a la suma de series numéricas

Desarrollo en serie de Taylor (McLaurin)

- Polinomios de McLaurin.
- Paso al límite en los polinomios de McLaurin
- Obtención de las series exponencial, seno y coseno

Objetivos

Conceptos generales (Una sesión)

- Reconocer un serie de potencias
- Calcular el radio e intervalo de convergencia

Derivar e integrar series de potencias (Una sesión)

- Derivar e integrar correctamente las series de potencias
- Manipular correctamente la serie geométrica
- Identificar nuevas series de potencias
- Usar esas técnicas para sumar series numéricas

Desarrollo en serie de funciones elementales (Una sesión)

- Obtener series de potencias a partir de polinomios de McLaurin
- Desarrollar en serie la exponencial, seno y coseno

Aplicaciones (Una sesión)

Conceptos generales

Serie de potencias:

Una serie de potencias (centrada en $a=0$) es una función de la forma

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots ,$$

definida donde la serie numérica sea convergente.

Se considera centrada en a si es de la forma

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$$

En ambos casos la serie representaría un polinomio de grado infinito

Ejemplo (Serie geométrica)

$$1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots=\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \ , \ \text{solo si } |x|<1$$

Radio e intervalo de convergencia

Cualquier serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \begin{cases} \text{converge si } |x|<\rho \iff x\in I=]-\rho,\rho[\\ \text{diverge si } |x|>\rho \end{cases}$

$I=]-\rho,\rho[$ es el intervalo de convergencia
ρ es el radio de convergencia

En los otros dos puntos, $x=\pm\rho$, la serie puede ser convergente o no. Depende del caso.

¿Cuál sería el radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias centrada en a?

Ejemplo (Serie geométrica):

$$\sum_{n\geq 0} x^n \ ,\ a_n=1. \quad \begin{cases} \text{Radio de convergencia: } \rho=1 \\ \text{Intervalo de convergencia: } I=]-1,1[\end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{converge si } |x|<1 \\ \text{diverge si } |x|>1 \\ \text{en } x=1 \text{ diverge} \\ \text{en } x=-1 \text{ diverge} \end{pmatrix}$$

¿Cuál sería el radio e intervalo de convergencia de $\sum_{n\geq 0} n^k x^n$ para los valores de $k\in\mathbb{N}$?

Derivación e integración

La serie de potencias

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots=\sum_{n\geq 0} a_n x^n\ ,\ x\in I$$

puede derivarse e integrarse (término a término) en su intervalo de convergencia:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+ka_kx^{k-1}+\cdots=\sum_{n\geq 1} na_nx^{n-1}\ ,\ x\in I$$

$$\int f(x)dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C\ ,\ x\in I$$

Ejemplo (Serie geométrica):

$$1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots=\sum_{n\geq 0} x^n=\frac{1}{1-x}$$

Derivando: $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n\geq 1} n\cdot x^{n-1}$

Integrando: $\log\left(\frac{1}{1-x}\right)=C+\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ejemplo

Sumar las series $\sum_{n\geq 1} n\cdot x^n$ y $\sum_{n\geq 1} n^2\cdot x^n$, para $|x|<1$

Partimos de la serie geométrica, $\sum_{n\geq 0} x^n=\frac{1}{1-x}$, si $|x|<1$.

Derivando tendremos

$$\sum_{n\geq 1} n\cdot x^{n-1}=\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$\leftarrow$ Serie aritmético-geométrica
Prob adicional en la Ut5

y multiplicando por x,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} n\cdot x^n=\frac{x}{(1-x)^2}}$$

Derivando de nuevo, $\sum_{n\geq 1} n^2\cdot x^{n-1}=\left(\sum_{n\geq 1} n\cdot x^n\right)'=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

de donde, $\boxed{\sum_{n\geq 1} n^2\cdot x^n=\frac{x\cdot(1+x)}{(1-x)^3}}$

$\leftarrow$ Serie aritmético-geométrica generalizada. Sumable a partir de las técnicas de la Ut5

Ejercicio

Integrando la serie de potencias $f(x)=\sum_{n\geq 1}(n+1)x^n$ halla:

a) Una expresión explícita para $f(x)$

b) El resultado de la suma infinita $s=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}+\cdots$

Integrando y derivando después, $\int f=C+\sum_{n\geq 1} x^{n+1}=C+\frac{x^2}{1-x} \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}}$

La suma infinita pedida es

$$s=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}+\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=\boxed{3}$$

Desarrollo en serie de log y arctan:

De la serie geométrica, $\boxed{\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0} x^n \ ,\ |x|<1}$, se deduce $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$

Integrando, $\boxed{\log(1+x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots,\ |x|<1}$

La serie anterior converge (Leibniz) si $x=1$. Puede verse que

$$\log(2)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

resultado mencionado en la UT3 al aproximar la suma de esta serie numérica.

Sustituyendo x por $-x^2$ en la serie geométrica, se tiene $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$

Integrando, $\boxed{\arctan(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots\ ,\ |x|<1}$

Ejercicio

Desarrollar en serie de potencias la función $\log(x^2+3x+2)$

$$f(x)=\log\left(x^2+3x+2\right)=\log\left((x+1)(x+2)\right)=\log(x+1)+\log(x+2)$$

podriamos usar la serie de potencias del logaritmo para encontrar la serie pero su derivada parece mas manejable $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

Usando la serie geométrica,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n\geq 0}(-x)^n=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n\\ &\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

Integrando, $f(x)=\log(2)+\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ ,\ |x|<1$

Ejercicio:

A partir del valor de $\arctan(1)$, aproxima π con seis cifras decimales correctas usando la serie de $\arctan(x)$ y el criteri de Leibniz para acotar el error.

Desarrollo en serie de Taylor

Desarrollo de McLaurin de orden *n* de una función:

Sea $f(x)$ derivable hasta el orden $(n+1)$ en el intervalo $I=]-h,h[$.
Para cada $x\in I$ podemos encontrar un cierto $\alpha\in]0,1[$ de modo que

$$f(x)=\underbrace{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Polinomio de McLaurin, } P_n f(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange, } R_n f(x)}$$

(Existe un desarrollo más general – Taylor – centrado en $a\in\mathbb{R}$)

Ejemplo:

La función exponencial, $y=f(x)=e^x$ es derivable indefinidamente en $\mathbb{R}$
Todas sus derivadas coinciden con ella: $f^{(n)}(x)=e^x$. De aquí,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\alpha x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ ,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ \text{para cierto } \alpha\in]0,1[$$

Ejemplo (Paso al límite):

Tomando límites $(n\to\infty)$ en el desarrollo de McLaurin de orden n de e^x

$$e^x=\lim_{n\to+\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{\alpha x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\quad;\quad\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{\alpha x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right)=0$$

tendremos e^x expresado como suma de una serie (serie de McLaurin de e^x)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Aplicación: Tomando $x=\pm 1$ se llega a los desarrollos en serie infinita

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\ \leftarrow$$

En la UT5 se aproxima el número *e* a partir de esta serie

$$\frac{1}{e}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}+\cdots=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\ \leftarrow$$

¿Cómo se aproximaría $1/e$ con 6 decimales exactos?

La serie exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \ , \ x \in \mathbb{R}$$

En este caso, $a_n = \frac{1}{n!}$ $\begin{cases} \text{Intervalo de convergencia: } I = \left]-\infty, +\infty\right[= \mathbb{R} \\ \text{Radio de convergencia: } \rho = +\infty \end{cases}$

Ejercicio

Deriva e integra para probar que

$$e^x = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$e^x = 1 + \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ejercicio

¿Qué suma la serie numérica

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!2^{n+1}} \ ?$$

Desarrollo en serie de funciones elementales (seno y coseno)

Calculando las derivadas sucesivas, en forma similar a la exponencial, escribiendo los correspondientes polinomios de McLaurin y aplicando límites se obtienen:

$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \ , \ x \in \mathbb{R}$$

$$\text{sen}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio: Encuentra la serie del coseno derivando la serie del seno.

Ejercicio: A partir del desarrollo en serie de $\cos(x)$, aproxima $\cos(1)$ con 4 decimales correctos. Utiliza la cota de error de Leibniz.

Derivadas sucesivas de una serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \ \Rightarrow \ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Derivando sucesivamente, para $k: 0,1,2,\ldots \ ; x \in I$,

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)k\cdots 2a_{k+1}x + \cdots = \sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Y sustituyendo en $x = 0$

$$f^{(k)}(0) = k!a_k + 0 = k!a_k \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

Consecuencia:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Toda serie de potencias es la serie de Taylor (o McLaurin) de la función que representa.
El desarrollo en serie de potencias es único.

$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \ \Rightarrow \ P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ es el polinomio de McLaurin de $f(x)$

Ejercicio:

Si $f(x) = \sum_{n\geq 1} (n+1)x^n$, observa que $a_n = n+1$ y encuentra $f^{(12)}(0)$

Verifica el resultado con DERIVE, a partir de la expresión explícita para $f(x)$, obtenida previamente.

Ejercicio:

Si $f(x) = \log\left(x^2 + 3x + 2\right)$, usa DERIVE para encontrar $f^{(11)}(0)$.

Verifica el resultado a partir del desarrollo en serie de $f(x)$, encontrado previamente, y la fórmula $f^{(n)}(0) = n!a_n$.