DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Segundo parcial 13-12-2010 Duración: 1.30h

---

1. $(0.3p)$ Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad y \quad b_n = \sqrt{n}$$

---

1. Aplicando el criterio de Stolz, podemos comprobar que $a_n \ll b_n$, ya que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim \frac{\left(\log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) - \left(\log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$$

$$= \lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim \left(\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim \left(\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \log\left(\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) \underset{\text{Euler}}{=} \log\left(e^{\lim\left(\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}-1\right)\right)}\right) =$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1} = 0$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 1^{\infty}$$

y podemos aplicar la fórmula de Euler para salvar esta indeterminación, esto es,

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = e^{\lim\left(\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}-1\right)\right)}.$$

---

2. **a)**$_{(0.2p)}$ Obtén la solución general de la recurrencia lineal homogénea de segundo orden definida mediante

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

b)$_{(0.1p)}$ Determina los valores de las constantes para que $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$.

c)$_{(0.2p)}$ Encuentra el valor de la constante A para que $a_n = A \cdot 3^n$ sea una solución particular de la recurrencia

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 3^{n-1}$$

---

2. a) La recurrencia puede expresarse en la forma

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

por lo que la ecuación característica correspondiente será

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

que tiene por solución dos raíces reales simples, $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$.

La recurrencia corresponde al caso 1 y su solución general puede escribirse en la forma:

$$a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$$

b) Planteando las condiciones iniciales encontraremos las constantes. Así,

$$\begin{array}{lllllll} \text{para } n=1 & ; & a_1 & = & C_1 + 2C_2 & = & 1 \\ \text{para } n=2 & ; & a_2 & = & C_1 + 4C_2 & = & -1 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 3$ y $C_2 = -1$. De aquí,

$$a_n = 3 - 2^n$$

c) Si $a_n = A \cdot 3^n$ es una solución particular de

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 3^{n-1}$$

sustituyendo $a_n = A \cdot 3^n$, $a_{n+1} = A \cdot 3^{n+1}$ y $a_{n+2} = A \cdot 3^{n+2}$ en la recurrencia, se verifica

$$A \cdot 3^{n+2} = 3A \cdot 3^{n+1} - 2A \cdot 3^n + 3^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 9A = 9A - 2A + \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{6}$$

---

3. (0.2p) Para la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

determina la sucesión de sumas parciales y su suma.

---

3. La suma parcial s_n vendrá dada por

$$s_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) - \cdots + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

cuya simplificación queda

$$s_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

Tomando límites,

$$\lim s_n = \lim \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$

ya que $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right\}$ tiende a 0, al tratarse del producto de una sucesión acotada por otra que tiende a 0.
Por tanto, podemos concluir que la serie del enunciado converge y suma 1.

4. Considera la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 3^n}{7^{n+1}}$$

a) $_{(0.2p)}$ Calcula el valor exacto de su suma.

b) $_{(0.2p)}$ Usando la cota de error asociada al teorema de Leibniz, obtén el valor de N necesario para que la suma parcial s_N proporcione, al menos, un decimal exacto y calcula esa suma parcial.

c) $_{(0.1p)}$ Compara este resultado con la suma exacta obtenida en a) y verifica que obtienes la precisión exigida.

---

4. a) Podemos calcular su suma exacta por tratarse de una serie geométrica de razón $r = \dfrac{-3}{7}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{7^{n+1}} = \frac{-1}{7} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-3}{7}\right)^n = \frac{-1}{7} \cdot \frac{\left(\frac{-3}{7}\right)^1}{1 - \left(\frac{-3}{7}\right)} = \frac{-1}{7} \cdot \frac{\frac{-3}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{3}{70} = 0.0\overline{428571}$$

b) La serie cumple las condiciones del teorema de Leibniz. Aplicando la cota de error correspondiente,

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{3^{N+1}}{7^{(N+2)}} = \frac{3}{49}\left(\frac{3}{7}\right)^N < 10^{-2} \iff \left(\frac{7}{3}\right)^N > \frac{300}{49} \iff N \geq 3,$$

por lo que s_3 es la primera suma parcial que nos proporcionaría un decimal exacto. La suma parcial será

$$s_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n+1}\, 3^n}{7^{n+1}} = \frac{3}{7^2} - \frac{3^2}{7^3} + \frac{3^3}{7^4} = \frac{111}{2401} = 0.04623073...$$

c) Comparando este valor para s_3 con la suma exacta s obtenida en a) podemos observar que s_3 aproxima la suma de la serie con dos decimales exactos (uno más de lo esperado).