Departament de Matemàtica Aplicada
Unitat Docent de l'ETS d'Enginyeria Informàtica
Materials docents d'Àlgebra

Exercicis del Tema 2 (Unitat Temàtica 4)

27 de febrer de 2011

Exercici 2.1 *Determineu si les matriu següents són invertibles i, en cas que ho siguen, calculeu la inversa i escriviu les matrius com a producte de matrius elementals.*

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *(b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *(c)* $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *(d)* $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *(f)* $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *(g)* $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *(h)* $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *(j)* $M = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ *(k)* $N = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$ *(l)* $P = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$

(a) És clar que les dues columnes de la matriu són linealment independents. Per tant, la matriu és invertible. Calcularem la inversa buscant la forma escalonada reduïda de la matriu ampliada $\left[A \mid I\right]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-3/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}(-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_2(2)E_1(1/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

En conseqüència,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) La matriu és invertible, pel mateix motiu que ho era la de l'apartat anterior. Calculem la forma escalonada reduïda de la matriu ampliada $\left[B \mid I\right]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2(1/10)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{1,2}(3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

En conseqüència,

$$B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Podríem comprovar prèviament si el rang de la matriu C és tres. Però ho farem simultàniament amb l'intent de calcular la inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-3)E_{3,1}(-5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(-4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Ara ja podem assegurar que la matriu C és invertible, perquè $\operatorname{rang} C = 3$. Continuem, doncs, cercant-hi la forma escalonada reduïda:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,3}(1)E_{2,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_2(-1)E_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

I la inversa és

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \\ -7/2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) Les dues darreres columnes de la matriu D són iguals, així que la matriu no és invertible (les seues columnes no són linealment independents).

(e) És clar que $E^{-1} = E$ (de fet, E és la matriu identitat).

(f) Aquesta és una matriu elemental del tipus permutació. En conseqüència,

$$F^{-1} = F$$

(g)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

0 1 0
0 0 1
3/5 i/5 1 0 0
−i/5 2/5

Així que

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(h) Com que $G^{-1} = H$, és clar que $H^{-1} = G$.

(i) Aquesta matriu no és invertible, perquè té una columna de zeros i, per tant, no pot tenir rang tres.

(j) La segona fila de la matriu M és igual a la primera multiplicada per i, així que la matriu no és invertible.

(k)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0 \\ i & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-i/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -i/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2(2/5)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{1,2}(i)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6/5 & 2i/5 \\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1(1/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & i/5 \\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right]$$

De manera que

$$\mathsf{N}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

La matriu P és un producte de matrius elementals: $\mathsf{P} = \mathsf{E}_1(1-i)\mathsf{E}_2(1+i)$. Per tant,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^{-1} &= \Big(\mathsf{E}_1(1-i)\mathsf{E}_2(1+i)\Big)^{-1} = \mathsf{E}_2(1+i)^{-1}\mathsf{E}_1(1-i)^{-1} \\ &= \mathsf{E}_2\left(\frac{1}{1+i}\right) + \mathsf{E}_1\left(\frac{1}{1-i}\right) = \mathsf{E}_2\left(\frac{1-i}{2}\right)\mathsf{E}_1\left(\frac{1+i}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercici 2.2 *Calculeu la inversa, si existeix, de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

La inversa és aquesta matriu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.3 *Sense fer cap càlcul digueu quina és la matriu inversa de*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquesta matriu és el producte de tres matrius elementals del tipus reducció. Notem que és la matriu que faríem servir en el primer pas de l'algorisme de Gauss, si a la segona fila li restàvem la primera, a la tercera li la sumàvem dues vegades i, a la quarta, tres. Aquest tipus de matrius s'anomenen a vegades *matrius del tipus G* (per Gauss).

És clar que la inversa és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.4 *Sabent que les matrius* A *i* B *són invertibles, aïlleu la matriu* X *en l'expressió*

$$\mathsf{BA}^2\mathsf{XB} = \mathsf{C} - 2\mathrm{I}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{BA}^2\mathsf{XB} &= \mathsf{C} - 2\mathrm{I} \\ \mathsf{X} &= (\mathsf{A}^2)^{-1}\mathsf{B}^{-1}(\mathsf{C} - 2\mathrm{I})\mathsf{B}^{-1} \\ &= (\mathsf{A}^2)^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{C}\mathsf{B}^{-1} - 2(\mathsf{A}^2)^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathrm{I}\mathsf{B}^{-1} \\ &= (\mathsf{A}^2)^{-1}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{C}\mathsf{B}^{-1} - 2(\mathsf{A}^2)^{-1}(\mathsf{B}^2)^{-1} \end{aligned}$$

Exercici 2.5 *Proveu que si* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ *aleshores* $\mathsf{A}^3 - 8\mathsf{A} - 32\mathrm{I} = \mathsf{O}$ *i utilitzeu aquest resultat per a calcular la matriu inversa* A^{-1}.

Fent les operacions es comprova sense dificultat que $\mathsf{A}^3 - 8\mathsf{A} - 32\mathrm{I} = \mathsf{O}$.
A partir d'aquí, podem aïllar la matriu identitat I d'aquesta manera:

$$\mathsf{A}^3 - 8\mathsf{A} - 32\mathrm{I} = \mathsf{O} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{1}{32}(\mathsf{A}^3 - 8\mathsf{A}) = \mathsf{A}\Big(\frac{1}{32}(\mathsf{A}^2 - 8\mathrm{I})\Big)$$

De manera que

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{32}(\mathsf{A}^2 - 8\mathrm{I}) = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 14 & 40 & -12 \\ -4 & -16 & 8 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.6 *(a) Calculeu el producte* AB *essent*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

(b) El nombre $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *s'anomena* determinant *de la matriu* A. *Proveu que la matriu* A *és invertible si i només si el seu determinant és no nul. En el cas que* A *siga invertible, trobeu una fórmula per a la matriu inversa de* A.

(a)

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Si el determinant de A és no nul llavors, del resultat de l'apartat anterior deduïm que

$$\mathsf{A}\left(\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\right)\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

així que A és invertible i

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\mathsf{B} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

En el cas que el determinant de A és nul es prova fàcilment que les columnes de la matriu A són linealment dependents, així que, en aquest cas, la matriu no té inversa.