ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT2 - Problemes proposats: FUNCIONS ELEMENTALS

1. Determina els dominis de les funcions:

   a) $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$
   b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
   c) $h\,(x) = \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}$
   d) $j(x) = \frac{\log(2-x)}{|x|+x}$
   e) $k(x) = \sqrt{1 - |x+2|} + \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$
   f) $l(x) = \sqrt{\log\left(x^2 - x\right)}$
   g) $m(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x^2-2}\right)$.

2. Troba els dominis respectius i determina quines funcions de les que segueixen són parelles, quines senars i quines ni parelles ni senars:

   a) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
   b) $g(x) = \sqrt{1 + x - x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$
   c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$
   d) $j(x) = \frac{x\cdot|x|}{2^x+2^{-x}}$
   e) $k\,(x) = \cos\left(\sin\left(x + \pi\right)\right)$
   f) $r(x) = ax^3 + b$, segons $a,b \in \mathbb{R}$
   g) $s(x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x^2+1}$
   h) $u(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$
   i) $v(x) = \frac{e^{x^2}+1}{x^3-x}$.

3. Calcula les derivades de les funcions:

   a) $f(x) = x\sqrt{x}\,(3\log(x) - 2)$
   b) $g(x) = \log\left(e^{-x} + xe^{-x}\right)$
   c) $h(x) = \frac{x^3-3}{5-x^2}$
   d) $j(x) = 3\sin(x) - \cos^3(x)$
   e) $k(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$
   f) $m(x) = (x^2 - 2)\sin(x) + 2x\arctan(x)$

g) $n(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{1+x^2}$.

4. a) Troba el valor de la derivada de la funció $k(x)$ del problema anterior en el punt d'abscisa $x = \pi$ i determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de $k(x)$ en eixe punt.

   b) La recta tangent a la gràfica de la funció $h(x)$ del problema anterior en el punt $x = 1$ torna a tallar a la gràfica de $h(x)$ en un segon punt. Determina la distància entre els dos punts de tall.

5. Fent ús de les derivades corresponents, troba els intervals de crecixement i decreixement de les funcions:

   a) $f(x) = x^2\,(x-3)$
   b) $g(x) = \frac{x}{x-2}$
   c) $h(x) = x + \sin(x)$
   d) $p(x) = x\log(x)$
   e) $q(x) = \frac{e^x}{x}$
   f) $r(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{1-x}}$

6. Troba els dominis i determina (a partir de l'estudi de les seues derivades) les regions de creixement i decreixement i els punts en que prenen màxims o mínims relatius les funcions:

   a) $f(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$
   b) $g(x) = x^3 + 8x^2 + 4x - 48$
   c) $h(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
   d) $k(x) = \frac{e^x}{x^4}$

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT2 - Exercicis addicionals: FUNCIONS ELEMENTALS

1. Simplifica l'expressió $\frac{x\cdot \sqrt[3]{x}\cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}\cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^5}}}$.

2. Resol les equacions:

   a) $25^{x+1} + 5^{x+2} = 50$

   b) $\log(x) - \log(x-1) = \log(x+2) - \log(5)$.

3. Descomposa en fraccions simples:

   a) $\frac{3x}{x^2-6x+8}$

   b) $\frac{x^4+x^2+x+2}{x^3-2x+4}$

   c) $\frac{x^2+1}{(x+2)^3}$.

4. Troba el domini i la funció inversa, si existeix (on existeix), de cada una de les funcions:

   a) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

   b) $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$

   c) $h(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

5. Determina els següents conjunts.

   a) $A = \left\{\frac{1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R}\right\}$

   b) $B = \{x \in [0, 2\pi] \ : \ \sin x > 0\}$

   c) $C = \{\log x \ : \ x \in \mathbb{R}\}$

   d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos x \geq \frac{1}{2}\right\}$

   e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^3 \leq 1\right\}$

6. Determina si són o no periòdiques les funcions que segueixen:

   a) $\sin(3x - \pi)$

   b) $|\cos(4x)|$

   c) $\tan\left(x^2\right)$

   d) $\sin^2(x)$

   e) $|x - [x]|$, on $[x]$ és la part entera de x; és a dir, el major enter menor o igual que x.

   Troba també el període T de cadascuna de les periòdiques.

7. Verifica que les següents funcions són periòdiques:

   a) $f(x) = 10\sin(3x)$, de període $\frac{2\pi}{3}$.
   b) $h(x) = cos^2(x)$, de període π.

8. a) Quin angle determinen les corbes $y = x^3$ i $y = \frac{1}{x^2}$ en el punt en què es tallen les seues gràfiques?
   b) En quin punt de la corba definida per $y^2 = 2x^3$ la recta tangent és perpendicular a la recta d'equació $3y - 4x = 2$?

*9. Es defineixen les funcions hiperbòliques: sinus, cosinus i tangent per

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Troba les seues gràfiques i justifica analíticament que:

   a) sinh és senar i cosh és parella. Cap d'elles és periòdica
   b) $\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1 \quad , \quad \cosh^2(x) + senh^2(x) = \cosh(2x)$
   c) sinh i tanh són creixents en $\mathbb{R}$; cosh és creixent en $]0, +\infty[$. On són còncaves o convexes?
   d) Les seues inverses respectives (troba també les seues gràfiques): *argsinh*, *argcosh* i *argctanh*, són, respectivament:

$$\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ , x \in \mathbb{R}; \quad \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , x \geq 1; \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ , x \in [-1, 1].$$

*10. Determina la continuïtat i derivabilitat de les següents funcions:

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \text{ si } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$
   b) $g(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   c) $h(x) = \begin{cases} x^3 - 2 \text{ si } x > -3 \\ 27x \text{ si } x \leq -3 \end{cases}$

11. Troba els dominis i determina (a partir de l'estudi de les seues derivades) les regions de creixement i decreixement i els punts en que prenen màxims o mínims relatius les funcions:

   a) $l(x) = \sin(x)\cos^2(x)$
   *b) $m(x) = x\cos(x)$.

12. Calcula les segones derivades de les funcions:

   a) $f(x) = e^{x^2}$
   b) $g(x) = \sin^2(x)$
   c) $h(x) = \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

13. Determina les regions de concavitat i convexitat de les funcions de l'exercici anterior.

14. Troba els màxims i mínims absoluts de:

   a) $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$, en el seu domini
   b) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, en $[-1, 5]$ i en $[-10, 12]$
   c) $h(x) = -\sin(3x)$ en $[-2, 2]$.

*15. Troba els màxims i els mínims absoluts de $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$, en $\mathbb{R}$.

*16. Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ verifica que, per a $x \in [0, 1]$:

$$|f''(x)| \leq 8 \ , \quad \left|f^{(iv)}(x)\right| \leq 384 \ , \quad |g''(x)| \leq 6 \ , \quad \left|g^{(iv)}(x)\right| \leq 76 \ .$$