DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (E.I)

AMA - Convocatòria de Gener   18-01-2010   Duració prevista: 3h

---

1.- **BLOC I - Primer parcial (ut1 i ut2)**

a) $(1.0p)$ Siga $z = \dfrac{1-xi}{x+i}$ i $w = \sqrt{3}+i$ dos nombres complexos, on $x \in \mathbb{R}$. Escriu z en forma binomial, multiplica el resultat per w i escriu el producte en forma polar.

b) $(0.5p)$ Troba els valors de $x \in \mathbb{R}$ tals que $\Big|\, 5\,|x-2| - 4 \,\Big| \leq 11$

c) $(1.5p)$ Considera la successió definida per

$$\begin{cases} a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \\ a_1 = 2 \ , \ a_2 = 4 \end{cases}$$

c1) $(0.2p)$ Troba el valor de a_5

c2) $(1.0p)$ Resol la recurrència per a trobar a_n explícitament.

c3) $(0.3p)$ Compara els ordres de magnitud de $\{a_n\}$ i de $\{b_n\} = \{1+2+\cdots+n\}$

---

a) $z = \dfrac{1-xi}{x+i} = \dfrac{(1-xi)\,(x-i)}{(x+i)\,(x-i)} = \dfrac{x - x^2 i - i - x}{x^2+1} = \dfrac{-x^2-1}{x^2+1}\cdot i = \dfrac{-\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\cdot i$

Així, $z \cdot w = (-i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right) = 1 - i\cdot\sqrt{3}$ amb mòdul 2 y argument $-\dfrac{\pi}{3}$. En conseqüència,

$$z\cdot w = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2_{\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

b) $\Big|\, 5\,|x-2| - 4 \,\Big| \leq 11 \quad \Leftrightarrow \quad -11 \leq 5\,|x-2| - 4 \leq 11 \quad \Leftrightarrow \quad -7 \leq 5\,|x-2| \leq 15$

La primera desigualtat es satisfá sempre, així que la solució és la de la segona desigualtat

$$5\,|x-2| \leq 15 \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x-2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1,5]$$

c1) Donat que $a_1 = 2$ i $a_2 = 4$, tindrem

$$\begin{aligned} a_3 - 3a_2 + 2a_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 - 3\cdot 4 + 2\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 8 \\ a_4 - 3a_3 + 2a_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 - 3\cdot 8 + 2\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 12 \\ a_5 - 3a_4 + 2a_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_5 - 3\cdot 12 + 2\cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 32 \end{aligned}$$

c2) L'equación característica associada a la recurrència és

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

amb dues arrels real simples $r_1 = 1$ i $r_2 = 2$.

La recurrència correspon al primer cas i la solució general ve donada per

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$$

Aplicant ara les condicions inicials, trobem

$$\begin{array}{lcccc} \text{per a } n=1 & ; & a_1 & = & C_1+2C_2 & = & 2 \\ \text{per a } n=2 & ; & a_2 & = & C_1+4C_2 & = & 4 \end{array}$$

d'on, resolent el sistema, $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$. D'ací:

$$a_n = 2^n$$

c3) Per a comparar els ordres de magnitud hem de calcular el limit del quocient

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2^n}{1+2+\cdots+n} = (\text{Stolz}) = \lim \frac{2^{n+1}-2^n}{n+1} = \lim \frac{2\cdot 2^n - 2^n}{n+1} = \lim \frac{2^n}{n+1} = +\infty$$

i per tant a_n te major ordre de magnitud que b_n.

2.- **BLOC II - Segon parcial (ut3, ut4 i ut5)**

a) $(0.5p)$ Calcula la suma exacta de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-4}{2^{n-1}}$

b) $(0.5p)$ Fent ús de la sèrie de potències per a e^x i la cota d'error de Leibniz, aproxima el valor de $\dfrac{1}{e^2}$ amb dos decimals exactes.

c) $(0.5p)$ Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, calcula $f'(x)$ y suma aquesta sèrie on siga convergent.

d) $(1.5p)$ Donada l'esfera d'equació $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 = 10$ troba l'equació del pla tangent i de la recta normal a l'esfera en el punt $P = (1,3,-2)$.
Verifica que la recta normal calculada passa pel centre de l'esfera.

e) $(0.5p)$ Calcula $\nabla f(\pi,2,0)$ si $f(x,y,z) = \log\left(\dfrac{xy}{\pi}\right) - 4\sin\left(x+z^2\right)$

---

a) Es una sèrie aritmètico geomètrica de raó $r = \dfrac{-1}{2}$. Aplicant les fórmules corresponents,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-4}{2^{n-1}} &= 3\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}} - 4\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} = -6\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 8\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \\ &= -6\cdot\left(\frac{1\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{1+1}}{\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)\right)^2}\right) + 8\cdot\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = -6\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) + 8\cdot\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

b) La sèrie de potències de e^x ve donada per

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Si $x = -2$ tindrem

$$\frac{1}{e^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$$

que es una sèrie alternada (i convergent) en les condicions del teorema de Leibniz.
Aplicant la cota corresponent, per a obtenir la precisió demanada, necessitem

$$a_{N+1} = \frac{2^{N+1}}{(N+1)!} < 10^{-3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(N+1)!}{2^{N+1}} > 1000 \quad\Leftrightarrow\quad N \geq 9$$

i obtindrem l'aproximació

$$\frac{1}{e^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} \approx \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{2^n}{n!} = \mathbf{0.13}5097...$$

c) $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\cdot x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$, per a $x \in]-1,1[$

d) Considerem $F(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 - 10$

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y,z) &= (\ 2(x-1)\ ,\ 2y\ ,\ 2(z+1)\ ) \\ \nabla F(1,3,-2) &= (\ 0\ ,\ 6\ ,\ -2\ ) \end{aligned}$$

L'equació del pla tangent será

$$0(x-1) + 6(y-3) - 2(z+2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6y - 2z - 22 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3y - z = 11$$

L'equació de la recta normal será

$$r(t) = (1,3,-2) + t\cdot(0,6,-2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad r(t) = (1, 3+6t, -2-2t)$$

L'equació de la recta normal, per a $t = \frac{-1}{2}$ ens dona el punt $r\left(\frac{-1}{2}\right) = (1,0,-1)$ que es el centre de l'esfera.

e) $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\pi}{xy}\cdot\frac{y}{\pi} - 4\cos\left(x+z^2\right), \frac{\pi}{xy}\cdot\frac{x}{\pi}, -4\cos\left(x+z^2\right)2z\right) = \left(\frac{1}{x} - 4\cos\left(x+z^2\right), \frac{1}{y}, -8z\cos\left(x+z^2\right)\right)$,
d'on

$$\nabla f(\pi,2,0) = \left(\frac{1}{\pi} - 4\cos(\pi)\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\right) = \left(\frac{1+4\pi}{\pi}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$$

3.- **BLOQUE III - Residu (ut6)**

a) $(0.5p)$ Calcula el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2-x^2}\,dx$

b) $(1.0p)$ Aproxima el seu valor fent ús de la regla de Simpson amb l'interval d'integració dividit en sis parts. Verifica la precisió que trobes comparant amb el resultat de a)

---

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2-x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\log\left(2-x^2\right)\Big]_0^1 = \frac{-1}{2}\log(1) - \frac{-1}{2}\log(2) = \frac{\log(2)}{2} \approx 0.34657...$

b) Per a l'aproximació demanada considerem $h = \frac{1}{6}$ i la partició $P = \left\{\ 0\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{5}{6}\ ,\ 1\ \right\}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \quad \simeq \quad S_6 &= \frac{\frac{1}{6}}{3}\left(\frac{0}{2-0^2} + 4\cdot\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{2-\left(\frac{1}{6}\right)^2} + 2\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{2-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \right. \\ &\left. + 4\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2-\left(\frac{2}{3}\right)^2} + 4\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{2-\left(\frac{5}{6}\right)^2} + \frac{1}{2-1^2}\right) \\ &= \frac{1}{18}\left(0 + 4\cdot\frac{6}{71} + 2\cdot\frac{3}{17} + 4\cdot\frac{2}{7} + 2\cdot\frac{3}{7} + 4\cdot\frac{30}{47} + 1\right) = \frac{1}{18}\cdot\frac{354225}{56729} = \frac{118075}{340374} \approx 0.3469... \end{aligned}$$

que aproxima el valor exacte de l'integral, obtingut en a), amb tres decimals exactes.