DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Primer parcial **18-11-2013** **Duración: 2 horas**

---

1. (0.5p) a)Halla el número complejo $z = a + bi$ tal que cumpla la siguiente ecuación:

$$z - 1 = 2\bar{z} + i$$

b) Calcula el modulo de z

Si $z = a + bi$, entonces $\bar{z} = a - bi$ sustituyendo ambos en

$$z - 1 = 2\bar{z} + i$$

obtenemos

$$a + bi - 1 = 2(a - bi) + i,$$
$$-a + 3bi = +1 + i$$

igualando parte real a parte real y parte imaginaria a parte imaginaria tenemos

$$a = -1 \ y \ \ b = \frac{1}{3}$$

b) el módulo de z es:

$$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

---

2. (0.7p) Encuentra el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\log(|2-x^2|-1)}$.

Para resolver este ejercicio tenemos que tener encuenta:

a) Estamos trabajando con un logaritmo y el dominio de la función logaritmo son $x \in (0, +\infty)$ por lo tanto tenemos que exigir que $(|2 - x^2| - 1) > 0$.

b) Ademas como tenemos un cociente tenemos que exigir $log(|2 - x^2| - 1) \neq 0$

Vamos a la primera condición:

a)

$$|2 - x^2| - 1 > 0 \leftrightarrow |2 - x^2| > 1$$
$$2 - x^2 > 1 \ \ ó \ \ 2 - x^2 < -1$$

obtenemos dos desigualdades, por lo tanto la solución será la unión de los dos resultados:

a.1) resolviendo la primera de ellas

$$-x^2 > 1 - 2 \ \leftrightarrow \ x^2 < 1 \ \leftrightarrow \ -1 < x < 1$$

o lo que es lo mismo

$$x \in (-1, 1)$$

a.2) resolviendo la segunda desigualdad

$$2 - x^2 < -1 \ \leftrightarrow \ -x^2 < -1 - 2 \ \leftrightarrow \ -x^2 < -3 \ \leftrightarrow \ x^2 > 3$$

esto nos da como resultado

$$x < -\sqrt{3} \text{ ó } x > \sqrt{3}$$

que es lo mismo que:

$$(-\infty, -\sqrt{3}) \ \cup \ (\sqrt{3}, +\infty)$$

Por lo tanto la solución de $(|2 - x^2| - 1) > 0$ es (de **a.1** y **a.2**):

$$(-\infty, -\sqrt{3}) \ \cup \ (-1, 1) \ \cup \ (\sqrt{3}, +\infty)$$

b) Ahora resolvemos $log(|2 - x^2| - 1) \neq 0$

necesitamos eliminar los valores de x tales que

$$(|2 - x^2| - 1) = 1$$

$$(|2 - x^2| - 1) = 1 \ \leftrightarrow \ |2 - x^2| = 1 + 1 = 2 \ \leftrightarrow \ (2 - x^2)^2 = 2^2$$
$$\leftrightarrow \ 4 + x^4 - 4x^2 = 4 \ \leftrightarrow \ x^4 - 4x^2 = 0$$

eso ocurre para:

$$x = \pm 2 \ y \ x = 0$$

excluyendo estos puntos del conjunto obtenido en el apartado **a)**, el dominio queda como:

$$(-\infty, -2) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \sqrt{3}, 2) \cup (2, +\infty)$$

---

3. (0.5p) A partir del estudio de la derivada de la función $f(x) = x^2 - x \cdot cos(x) + sen(x)$, determina las regiones de crecimiento y decrecimiento así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

Primero calculamos la derivada de la función

$$f'(x) = 2x + x \cdot sen(x)$$

igualamos a cero y resolvemos:

$$2x + x \cdot sen(x) = 0 \ \leftrightarrow \ x \cdot (2 + sen(x)) = 0$$

las posibles soluciones son:

$$x = 0 \ y \ (2 + sen(x)) = 0$$

como $|sen(x)| \leq 1$ la única solución posible es $x = 0$,
calculamos la derivada segunda (este apartado se puede resolver también estudiando el signo de la derivada primera)

$$f''(x) = 2 + x \cdot cos(x) + sen(x)$$

sustituyendo $x = 0$ obtenemos

$$f''(0) = 2 + 0 + sen(0) = 2$$

el resultado es positivo, en $x = 0$ existe un mínimo local por lo que la función es decreciente en $(-\infty, 0)$, tiene un mínimo local en $x = 0$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

4. a)$_{(0.5\text{p})}$ Calcula el valor exacto de $\int_1^3 x \cdot e^{-x} dx$.

b)$_{(0.5\text{p})}$ Aproxima, mediante la regla de Simpson, el valor de la integral anterior dividiendo el intervalo de integración en 4 partes iguales.

c)$_{(0.3\text{p})}$ ¿Cuántas subdivisiones necesitas hacer para que el error sea menor que 10^{-8}?

---

a) Vamos a hacer primero la integral indefinida por utilizando la fórmula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

tomando como $u = x$ y $e^{-x}dx = dv$ entonces:

$$du = dx \ y \ v = \int e^{-x} dx = -e^{-x},$$

$$\int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -(1+x) \cdot e^{-x},$$

entonces

$$\int_1^3 x \cdot e^{-x} dx = -(1+x) \cdot e^{-x} \Big]_1^3 = -(1+3)e^{-3} + (1+1)e^{-1} = -4e^{-3} + 2e^{-1} \approx 0.536611.$$

b) La fórmula se Simpson es:

$$\underset{(n \text{ par})}{\text{Formula de Simpson}} : \ S_n f = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+2kh) + f(b)\right)$$

en nuestro caso $n = 4$, $a = 1$, $b = 3$ y $h = \frac{3-1}{4} = 0.5$, los puntos que marcan los subintervalos son :

$$P = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$$

la fórmula de Simpsom queda:

$$S_4 f = \frac{0.5}{3}\left(1 \cdot e^{-1} + 4(1.5 \cdot e^{-1.5} + 2.5 \cdot e^{-2.5}) \right.$$
$$\left. + 2(2 \cdot e^{-2}) + 3 \cdot e^{-3}\right) = 0.536368$$

c) El error de la fórmula se Simpson es:

$$E_n = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4 \ ; \ con \ \ M_4 \geq \max_{[a,b]} \left| f^{iv} \right|$$

primero tenemos que calcular la derivada cuarta:

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$
$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x) \cdot e^{-x} = e^{-x}(x-2)$$
$$f'''(x) = e^{-x} - (x-2) \cdot e^{-x} = e^{-x}(3-x)$$
$$f^{iv}(x) = -e^{-x} - (3-x) \cdot e^{-x} = e^{-x}(x-4)$$
$$\left| f^{iv} \right| = \left| \frac{x-4}{e^x} \right|$$

queremos encontrar la cota para $x \in [1,3]$,el máximo del valor absoluto del numerador se alcanza para $x = 1$ y el mínimo del denominador se alcanza también en $x = 1$ por lo tanto tomamos como M4

$$\left| \frac{x-4}{e^x} \right| < \left| \frac{1-4}{e^1} \right| = \frac{3}{e}$$

como queremos que el error sea menor que 10^{-8}

$$E_n = \frac{(3-1)^5}{180 n^4} \frac{3}{e} < 10^{-8}$$

despejando

$$\sqrt[4]{\frac{2^5 \cdot 10^8 \cdot 3}{180 \cdot e}} < n$$

$66.55 < n$ por lo que $68 \leq n$