Sistemas Inteligentes

Escuela Técnica Superior de Informática

Universitat Politècnica de València

Tema B2T5:
Representación estructurada. Modelos de Markov.

Índice

○ 1 *Representación estructurada: ejemplos de modelado sintáctico* ▷ 1

2 Modelos de Markov y gramáticas regulares estocásticas ▷ 3

Objetos estructurados en reconocimiento de formas

- La representación de objetos en un espacio vectorial puede suponer una importante pérdida de información en algunos problemas:
  - Reconocimiento del habla
  - Reconocimiento de texto manuscrito
  - Identificación de la lengua
  - Reconocimiento de actitud o predilección en texto o habla
  - Identificación del tema de un documento i
  - Reconocimiento de escenas en imágenes o vídeos
  - **Reconocimiento de imágenes por cadena de contorno**
  - ...
- Representación estructurada:
  - Secuencias de longitud variable de vectores o de símbolos
  - Árboles, grafos, etc.
- Modelización: Modelos estructurales, por ejemplo, gramáticas estocásticas o modelos ocultos de Markov

Índice

1 Representación estructurada: ejemplos de modelado sintáctico ▷ 1

○ 2 *Modelos de Markov y gramáticas regulares estocásticas* ▷ 3

Modelos de Markov

Un *modelo de Markov* es una quíntupla $M = (Q, \Sigma, \pi, A, B)$ donde:

- Q es un ***conjunto de estados***
  - En cada instante $t = 1, 2, \dots,$ M está en uno de sus estados, denotado q_t
  - Q incluye un *estado final* F
- Σ es un ***conjunto de símbolos "observables"***
  En cada instante $t = 1, 2, \dots,$ M emite un símbolo, que se denota con y_t
- $\pi \in \mathbb{R}^Q$ es un ***vector de probabilidades iniciales***:
  M elige q_1 según π
- $A \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$ es una ***matriz de probabilidades de transición (entre estados)***:
  M elige q_{t+1} basándose en q_t y A: $A_{q,q'} = P(q_{t+1} = q' | q_t = q)$
- $B \in \mathbb{R}^{Q \times \Sigma}$ es una ***matriz de probabilidades de emisión (de símbolos)***:
  M elige y_t basándose en q_t y B: $B_{q,\sigma} = P(y_t = \sigma \mid q_t = q)$

Modelos de Markov: ejemplo

$Q=\{1,2,3,F\}$; $\Sigma = \{a,b,c\}$; $\pi_1 = 1; \quad \pi_2 = \pi_3 = \pi_F = 0$

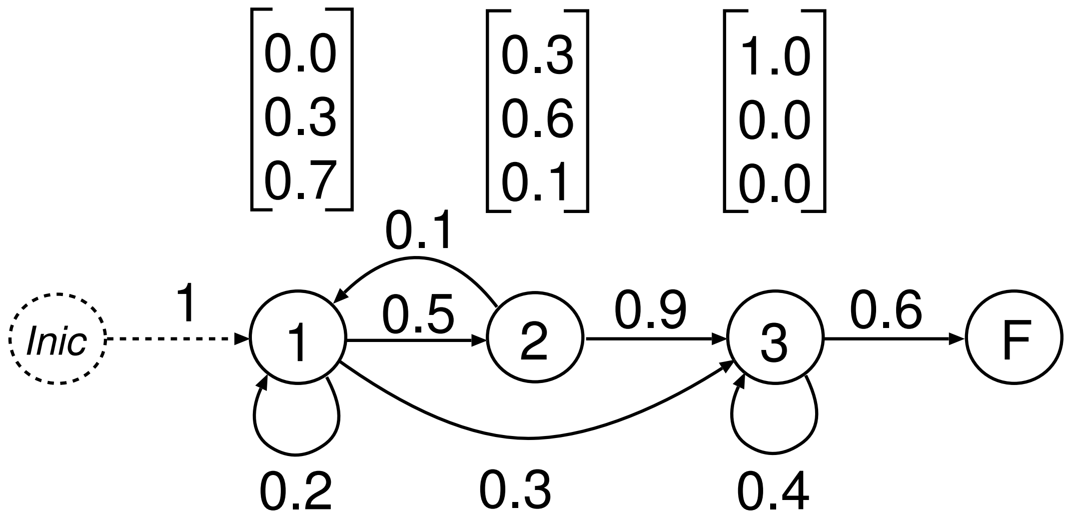
$p(q'|q) \equiv A(q,q') \rightarrow$

	1	2	3	F
1	0.2	0.5	0.3	0.0
2	0.1	0.0	0.9	0.0
3	0.0	0.0	0.4	0.6

$p(\sigma|q) \equiv B(q,\sigma) \rightarrow$

	a	b	c
1	0.0	0.3	0.7
2	0.3	0.6	0.1
3	1.0	0.0	0.0

Representación Gráfica Equivalente:



Modelos de Markov (cont.)

Condiciones de normalización para π, A, B:

- Probabilidad de estado inicial:

  $0 \leq \pi_q \leq 1, \quad \sum_{q \in Q} \pi_q = 1, \quad \pi_F = 0$

- Probabilidades de Transición entre estados:

  $0 \leq A_{q,q'} \leq 1, \quad \sum_{q' \in Q} A_{q,q'} = 1, \quad A_{F,q} = 0$

- Probabilidades de emisión de observables:

  $0 \leq B_{q,\sigma} \leq 1, \quad \sum_{\sigma \in \Sigma} B_{q,\sigma} = 1, \quad B_{F,\sigma} = 0$

Probabilidad de generar una cadena con un modelo de Markov

Probabilidad de que M genere la cadena $y = y_1 \ldots y_m \in \Sigma^+$:

$$P(y \mid M) = \sum_{z \in Q^+} P(y, z)$$

$$= \sum_{q_1,\ldots,q_m \in Q^+} P(q_1) \prod_{t=2}^{m} P(q_t \mid q_{t-1}) \;\; P(q_F \mid q_m) \cdot \prod_{t=1}^{m} P(y_t \mid q_t)$$

$$= \sum_{q_1,\ldots,q_m \in Q^+} \pi_{q_1} \, B_{q_1,y_1} \left(\prod_{t=2}^{m} A_{q_{t-1},q_t} \, B_{q_t,y_t} \right) A_{q_m,q_F}$$

Se cumple: $0 \leq P(y|M) \leq 1, \qquad \sum_{y \in \Sigma^+} P(y|M) = 1$

Probabilidades calculadas con el modelo del ejemplo

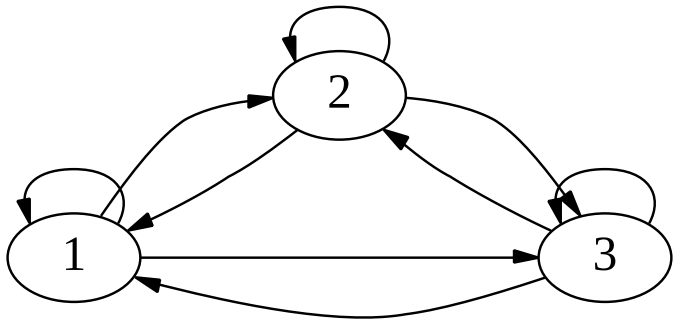
$$\begin{array}{rcllllll}
P(\texttt{cba}|M) & = & (\pi_1 \cdot B_{1,\texttt{c}}) & (A_{1,2} \cdot B_{2,\texttt{b}}) & (A_{2,3} \cdot B_{3,\texttt{a}}) & A_{3,F} & & \\
 & + & (\pi_1 \cdot B_{1,\texttt{c}}) & (A_{1,1} \cdot B_{1,\texttt{b}}) & (A_{1,3} \cdot B_{3,\texttt{a}}) & A_{3,F} & & \\
 & = & (1 \cdot 0.7) & (0.5 \cdot 0.6) & (0.9 \cdot 1) & 0.6 & & \\
 & + & (1 \cdot 0.7) & (0.2 \cdot 0.3) & (0.3 \cdot 1) & 0.6 & = & 0.1134 + 0.00756 \\
 & & & & & & \approx & 0.12
\end{array}$$

$$P(\texttt{bcbaa}|M) = P(y, z_1) + P(y, z_2) + P(y, z_3) + P(y, z_4) + P(y, z_5)$$

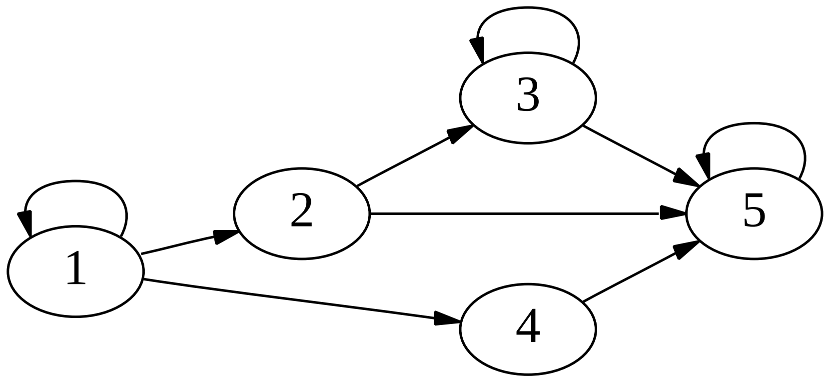
$$\begin{array}{rccccccr}
y = & \texttt{b} & \texttt{c} & \texttt{b} & \texttt{a} & \texttt{a} & & \\
z_1 = & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & F & \\
P(y, z_1) = & (1 \cdot 0.3) & (0.2 \cdot 0.7) & (0.2 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.3) & (0.9 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000204 \\
z_2 = & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & F & \\
P(y, z_2) = & (1 \cdot 0.3) & (0.2 \cdot 0.7) & (0.2 \cdot 0.3) & (0.3 \cdot 1) & (0.4 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000181 \\
z_3 = & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & F & \\
P(y, z_3) = & (1 \cdot 0.3) & (0.2 \cdot 0.7) & (0.5 \cdot 0.6) & (0.9 \cdot 1) & (0.4 \cdot 1) & 0.6 & = 0.002722 \\
z_4 = & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & F & \\
P(y, z_4) = & (1 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.1) & (0.1 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.3) & (0.9 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000036 \\
z_5 = & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & F & \\
P(y, z_5) = & (1 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.1) & (0.1 \cdot 0.3) & (0.3 \cdot 1) & (0.4 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000032 \\
 & & & & & & P(y|M) & = 0.003175
\end{array}$$

Ejemplos de topologías de modelos de Markov

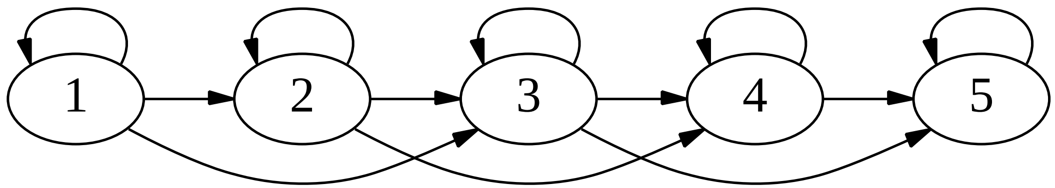
Ergódica



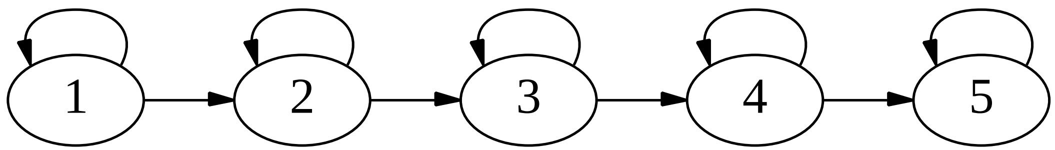
Izquierda-Derecha



Lineal



Estrictamente Lineal



Ejercicio

Sea M un modelo de estados $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 0$; y probabilidades de transición y de emisión:

A	1	2	3	4	5	F
1		0.6	0.4			
2		0.01	0.59	0.4		
3				0.6	0.4	
4					1.0	
5					0.01	0.99

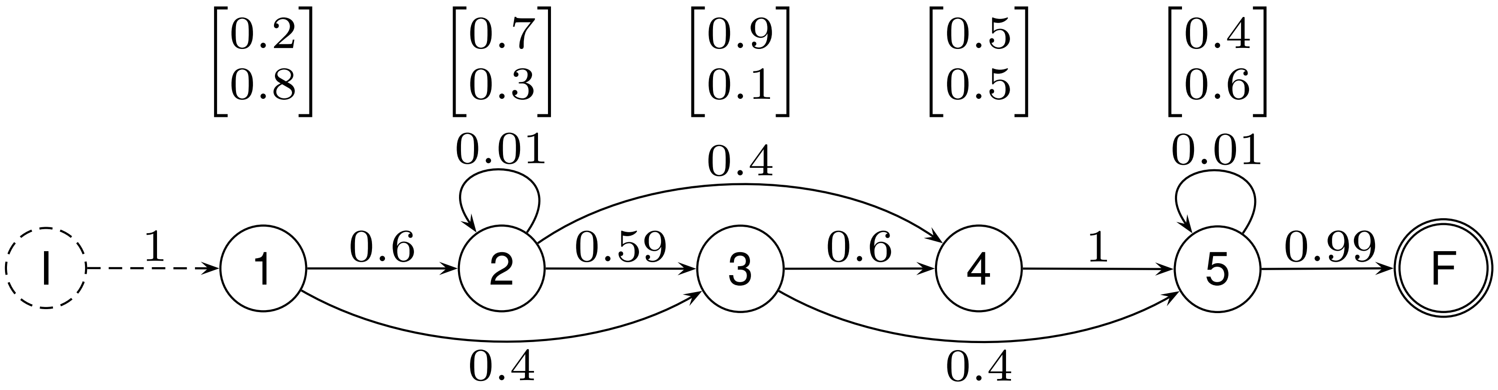
B	a	b
1	0.2	0.8
2	0.7	0.3
3	0.9	0.1
4	0.5	0.5
5	0.4	0.6

1. Representa gráficamente este modelo.

2. Calcula la probabilidad de que M genere la cadena $aaab$.

Ejercicio (solución)

1)



2) Hay 3 secuencias de estados que generan la cadena $aaab$

$$
\begin{array}{rcccccr}
y = & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{b} & & \\
z_1 = & 1 & 2 & 3 & 5 & F & \\
P(y, z_1) = & (1 \cdot 0.2) & (0.6 \cdot 0.7) & (0.59 \cdot 0.9) & (0.4 \cdot 0.6) & 0.99 & = 0.010598 \\
z_2 = & 1 & 2 & 4 & 5 & F & \\
P(y, z_2) = & (1 \cdot 0.2) & (0.6 \cdot 0.7) & (0.4 \cdot 0.5) & (1 \cdot 0.6) & 0.99 & = 0.009979 \\
z_3 = & 1 & 3 & 4 & 5 & F & \\
P(y, z_3) = & (1 \cdot 0.2) & (0.4 \cdot 0.9) & (0.6 \cdot 0.5) & (1 \cdot 0.6) & 0.99 & = 0.012830 \\
z_4 = & 1 & 3 & 5 & 5 & F & \\
P(y, z_4) = & (1 \cdot 0.2) & (0.4 \cdot 0.9) & (0.4 \cdot 0.4) & (0.01 \cdot 0.6) & 0.99 & = 0.000068 \\
 & & & & & P(y|M) & = 0.023497
\end{array}
$$