Anàlisi Matemàtica

UT3 - Integració

Contingut

Introducció

La integral de Riemann. Concepte d'àrea

- Classes de funcions integrables
- Propietats: àlgebra i desigualtats

Càlcul exacte d'integrals

- Regla de Barrow
- Integració per parts i per canvi de variable (substitució)

Càlcul aproximat d'integrals de Riemann

- Mètodes de trapezis i de Simpson

Objectius

Generalitats sobre integrals i àrees (1S)

- Entendre la definició de funció integrable i d'integral
- Fer ús correcte de la integral per al càlcul d'àrees

Càlcul exacte d'integrals (1S)

- Fer ús de la regla de Barrow per al càlcul exacte d'integrals
- Aplicar el mètodo d'integració per parts
- Realitzar canvis de variable en casos senzills

Càlcul aproximat d'integrals (2S)

- Aproximar integrals amb els mètodes de trapezis o de Simpson
- Acotar l'error comés en les aproximacions
- Determinar el nombre de nodos necessari per a aproximar

Aplicacions (1S)

Introducció

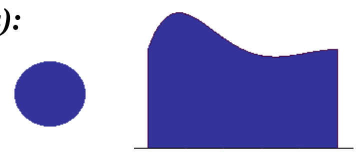
Càlcul d'àrees planes:

Unitat de mesura

Rectangles/Triangles

Triangulació de Polígons

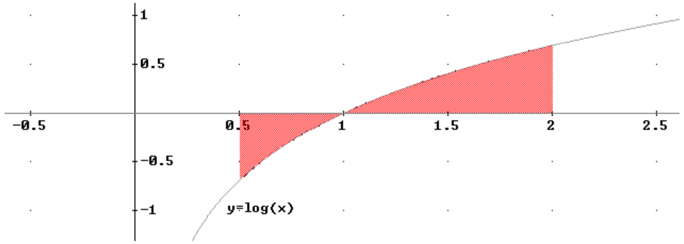
Problema (recintes més generals):



Problemes tipus en integració:

***Problema 1 (àrea com integral de Riemann)*:**

Trobar l'àrea que determina $y=\log(x)$ entre $x=\frac{1}{2}, x=2$ i l'eix OX

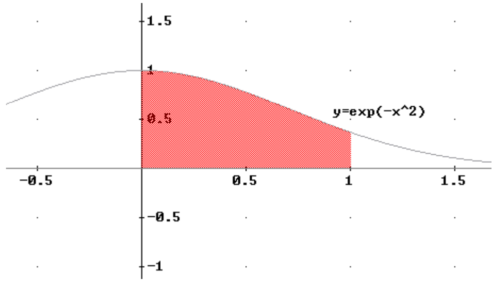


***Solució*:** $A=\int_{1/2}^{2}|\log(x)|dx=-\int_{1/2}^{1}\log(x)dx+\int_{1}^{2}\log(x)dx$ Regla de Barrow

$$=x-x\log(x)]_{1/2}^{1}+x\log(x)-x]_{1}^{2}=\frac{3\log(2)-1}{2}$$

***Problema 2 (àrea com integral de Riemann aproximada)*:**

Trobar l'àrea que determina $y=e^{-x^2}$ entre $x=0, x=1$ i l'eix OX



***Solució*:** $A=\int_{0}^{1}e^{-x^2}dx$ no és possible aplicar la regla de Barrow

Regla de Simpson $\approx\frac{1}{30}\left[1+4\left(e^{-1/100}+e^{-9/100}+\cdots+e^{-81/100}\right)+ +2\left(e^{-4/100}+e^{-16/100}+\cdots+e^{-64/100}\right)+\frac{1}{e}\right]=0.7468\ldots$

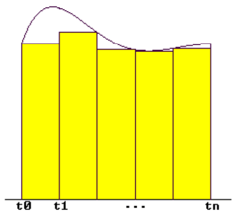
La integral de Riemann. Concepte d'àrea

Classes de funcions integrables:

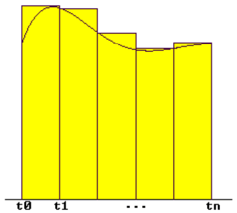
Considerem $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, acotada,

$P=\{a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b\}$ una *partició* de $[a,b]$

i definim les *sumes inferior i superior* associades a f i a P:



$L(f,P)$, (*lower*)



$U(f,P)$, (*upper*)

Si f és positiva, L i U representen sumes d'àrees de rectangles que acoten per baix i per dalt, respectivament, l' "área" del recinte que determinen la gràfica de $y=f(x)$, l'eix OX, $x=a$, $x=b$

Caracterització successional d'integrabilitat

Una funció f és integrable Riemann en $[a,b]$ si i només si existeix una successió de particions $\{P_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$\lim_n\left(U(f,P_n)-L(f,P_n)\right)=0$$

A més a més, en aquest cas, $\int_a^b f=\lim_n U(f,P_n)=\lim_n L(f,P_n)$

$\int_a^b f$ és l'únic valor entre $U(f,P)$ i $L(f,P)$ per a qualsevol partició.

Exemple: $f(x)=x$ és integrable en $[0,1]$

Considerem la successió de particions que divideix l'interval $[0,1]$ en n parts iguals, de mida $h=\frac{1}{n}$: $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right\}$ (nodes)

En cada subinterval $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ (per a $k=1,2,\dots,n$) considerem els rectangles d'àrees

$$\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) \quad \text{i} \quad \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad (base\times altura)$$

que acoten per baix i per dalt, respectivament, l'àrea del recinte que determina la funció $f(x)=x$, l'eix OX, $x=\frac{k-1}{n}$ i $x=\frac{k}{n}$.

La suma d'aquestes àrees de rectangles associades a f i a P_n són:

$$L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{0+1+\cdots+(n-1)}{n^2}=\frac{(n-1)n}{2n^2}\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{2}$$

$$U(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{2}$$

Així, f és integrable en $[0,1]$ i, $\int_0^1 f=\lim_n L(f,P_n)=\lim_n U(f,P_n)=\frac{1}{2}$

Algunes funcions integrables:

- f monòtona en $[a,b]$ $\Rightarrow$ f integrable en $[a,b]$
- f contínua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ f integrable en $[a,b]$

Les funcions contínues en $[a,b]$ excepte en un conjunt finit de punts també són integrables. El resultat pot estendre's inclús a casos molt més generals

Exemples: $f(x)=k$ (*constant*) és integrable en qualsevol $[a,b]$

$f(x)=x$ (creixent, contínua) és integrable en qualsevol $[a,b]$

$f(x)=x^2$ (contínua) és integrable en qualsevol $[a,b]$

$f(x)=\begin{cases}0 \text{ , si } x\in[0,2]-\{1\}\\ 2 \text{ , si } x=1\end{cases}$ (contínua excepte en $x=1$) és integrable en $[0,2]$

$f(x)=\begin{cases}0 \text{ , si } x\in\mathbb{Q}\\ 1 \text{ , si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ (discontínua en cada punt de $[0,1]$) no és integrable

Dues definicions necessàries: $\int_a^a f=0$ i $\int_a^b f=-\int_b^a f$

Propietats: àlgebra i desigualtats:

1) f,g integrables en $[a,b]$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\alpha f+\beta g$ integrable en $[a,b]$

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$$

2) f,g integrables en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f\cdot g$ integrable en $[a,b]$

$$\int_a^b(f\cdot g)\neq\left(\int_a^b f\right)\cdot\left(\int_a^b g\right) \qquad (f(x)=k,\ g(x)=x,\ a=0,\ b=2)$$

3) f integrable en $[a,c]$ i en $[c,b]$ $\Rightarrow$ f integrable en $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f \quad (\text{inclús si } c\notin[a,b])$$

4) *Monotonia*: f,g integrables en $[a,b]$ i $f\le g$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f\le\int_a^b g$

5) f integrable en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $|f|$ integrable en $[a,b]$ i $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$

6) $\underbrace{f \text{ integrable en } [a,b]}_{m=\inf_{[a,b]}(f)\ ;\ M=\sup_{[a,b]}(f)}$ $\Rightarrow$ $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$

f contínua $\Rightarrow\exists\alpha\in[a,b]$ tal que $\int_a^b f=f(\alpha)(b-a)$

Exemple: Si f és integrable en $[1,2]$ i $x\le f(x)\le x^2$, per a $x\in[1,2]$,

$$\int_1^2 x\,dx\le\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^2 x^2dx \Rightarrow \frac{3}{2}\le\int_1^2 f(x)dx\le\frac{7}{3}$$

(es fa ús de 4) i d'exemples precedents)

Exemple:

$$\left|\int_0^1\frac{\cos(nx)}{x+1}dx\right|\le\int_0^1\left|\frac{\cos(nx)}{x+1}\right|dx\le\int_0^1\frac{dx}{1+x}\le\int_0^1 dx=1$$

(es fa ús de 4) i 5) i d'exemples precedents)

Pot millorar-se?

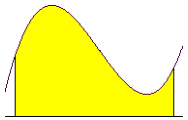
Àrea plana:

Si f és integrable en $[a,b]$, definim l'***àrea*** del recinte limitat per:

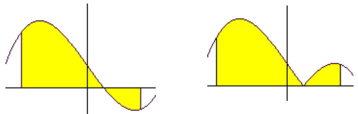
$$\begin{cases}\text{la gràfica de } y=f(x)\\ \text{l'eix } OX\\ \text{les rectes verticals } x=a,\ x=b\end{cases}$$

mitjançant:

$$A=\int_a^b |f|$$



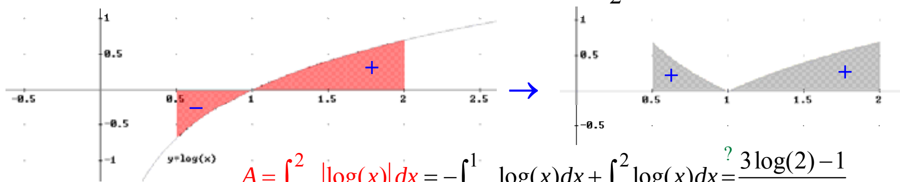
f positiva en $[a,b]$



f canvia de signo en $[a,b]$

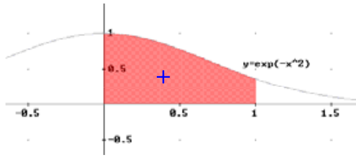
L'àrea entre corbes s'obté por diferència: $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|$

Exemple: L'àrea que limiten $y=\log(x)$ (contínua), $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ i l'eix OX és

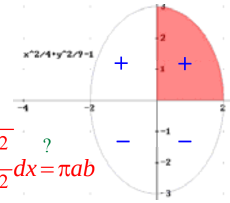


$$A=\int_{1/2}^{2}|\log(x)|\,dx=-\int_{1/2}^{1}\log(x)dx+\int_1^2\log(x)dx\overset{?}{=}\frac{3\log(2)-1}{2}$$

Exemple: L'àrea que limiten $y=e^{-x^2}$, $x=0$, $x=1$ i OX és $A=\int_0^1 e^{-x^2}dx\overset{?}{\approx}0.7468$



Exemple: L'àrea de l'el.lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ és $A=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx\overset{?}{=}\pi ab$



En general, és precís conèixer mètodes de càlcul que permeten obtenir les integrals en qüestió, en forma exacta o amb la precisió desitjada

Càlcul exacte d'integrals

Regla de Barrow:

Si $h(x)$ és una primitiva de $f(x)$, definida en $[a,b]$ i integrable, aleshores

$$\int_a^b f=\int_a^b f(x)\,dx=h(x)\Big]_a^b\equiv h(b)-h(a)\qquad (h'(x)=f(x))$$

Exemples:

$$\int_a^b x^p\,dx\underset{(p\neq-1)}{=}\frac{x^{p+1}}{p+1}\Bigg]_a^b=\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

Què tenim si $p=-1$ $(a,b>0)$?

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx=-\cos(x)\Big]_0^\pi=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2$$

$$\int_{-1}^1 e^x\,dx=e^x\Big]_{-1}^1=e-\frac{1}{e}=\frac{e^2-1}{e}$$

Si trobar la primitiva no és evident, disposem de dues tècniques

Integració per parts: $\int_a^b f\cdot g'=[f\cdot g]_a^b-\int_a^b f'\cdot g$

$\left(\int_a^b u\cdot dv=[u\cdot v]_a^b-\int_a^b v\cdot du\right)$

Canvi de variable (substitució): $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx=\left(\underbrace{x=g(t)}_{\leftarrow\ \text{cdv}\ \rightarrow}\right)=\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt$

Exemple (parts): $\int_0^1 x\cdot\cos(x)\,dx=\begin{pmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos(x)dx & v=\sin(x)\end{pmatrix}$

$$=x\cdot\sin(x)\Big]_0^1-\int_0^1\sin(x)\,dx$$

$$=x\cdot\sin(x)\Big]_0^1-\left(-\cos(x)\Big]_0^1\right)$$

$$=\sin(1)+\cos(1)-1$$

Exemples (parts):

$$\int_{1/2}^{2}\log(x)dx=\int_{1/2}^{2}\log(x)\cdot 1dx=\begin{pmatrix} u=\log(x) & du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx & v=x\end{pmatrix}$$

$$=x\log(x)\Big]_{1/2}^{2}-\int_{1/2}^{2}\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=x\log(x)\Big]_{1/2}^{2}-\int_{1/2}^{2}dx$$

$$=2\log(2)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\left(x\Big]_{1/2}^{2}\right)=\frac{5\log(2)-3}{2}$$

$$\int_{0}^{1}\arctan(x)dx=\int_{0}^{1}\arctan(x)\cdot 1dx=\begin{pmatrix} u=\arctan(x) & du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=dx & v=x\end{pmatrix}$$

$$=x\arctan(x)\Big]_0^1-\int_0^1 x\frac{dx}{1+x^2}=x\arctan(x)\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=\arctan(1)-\arctan(0)-\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{\log(2)}{2}$$

Exemples (cdv):

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx\overset{\leftarrow}{=}\begin{pmatrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=2\\ x=0\Rightarrow t=1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}\left(t^{3/2}\Big]_1^2\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x-1}\,dx\overset{\rightarrow}{=}\begin{pmatrix}x-1=t^3\\ x=t^3+1\\ dx=3t^2dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=-1\end{pmatrix}$$

$$=\int_{-1}^{0}(t^3+1)\cdot t\cdot 3t^2\,dt$$

$$=3\int_{-1}^{0}\left(t^6+t^3\right)dt=3\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\Big]_{-1}^{0}\right)=-\frac{9}{28}$$

Exemple (cdv, en els dos sentits):

$$\int_1^4\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\begin{pmatrix}\sqrt{x}=t\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=1\\ x=4\Rightarrow t=2\end{pmatrix}$$

$$=2\int_1^2\sqrt{1+t}\,dt=2\left[\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_1^2=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_1^4\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\begin{pmatrix}\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\\ dx=2tdt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=1\\ x=4\Rightarrow t=2\end{pmatrix}$$

$$=\int_1^2\frac{\sqrt{1+t}}{\cancel{t}}2\cancel{t}dt=2\left[\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_1^2=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Exercici (cdv): Fes ús del canvi de variable $x=-t$ per a simplificar l'expressió

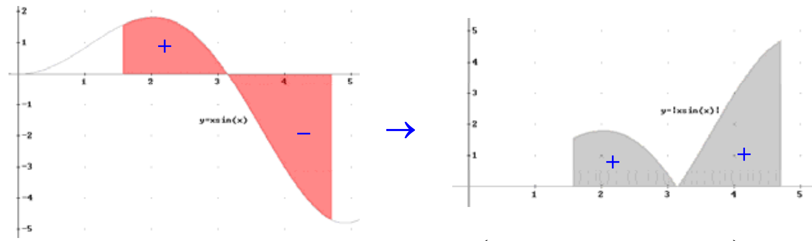
$$\int_{-b}^{b}f(x)dx=\int_{-b}^{0}f(x)dx+\int_0^b f(x)dx$$

quan f siga una funció parella. Què tindrem si f és senar?

Exemple (àrea plana):

Trobar l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $y=x\sin(x)$, les verticals $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$ i l'eix OX

Per definició, $A=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}|x\sin(x)|dx$; és a dir, $A=\int_{\pi/2}^{\pi}x\sin(x)dx-\int_{\pi}^{3\pi/2}x\sin(x)dx$



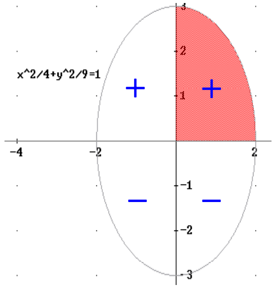
Integrant per parts cada una de les dues integrals $\begin{pmatrix}u=x\ ,\ du=dx\\ dv=\sin(x)\ ,\ v=-\cos(x)\end{pmatrix}$,

$$A=\left(\sin(x)-x\cos(x)\right)\Big]_{\pi/2}^{\pi}+\left(\sin(x)-x\cos(x)\right)\Big]_{\pi}^{3\pi/2}=2\pi$$

Exemple (àrea plana):

Trobar l'àrea del recinte interior a l'el.lipse d'equació $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Tal i com va definir-se, $A=4b\int_0^a\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}dx$



Proposem un cdv trigonomètric, $x=a\cos(t)$:

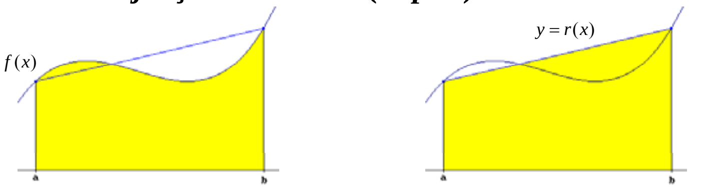
$$\begin{pmatrix} x=a\cos(t) \\ dx=-a\sin(t)dt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x=0\Rightarrow t=\pi/2 \\ x=a\Rightarrow t=0 \end{pmatrix}$$

Àrea del cercle?

Així, $A \underset{\text{cdv}}{\overset{?}{=}} 4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)dt \overset{?}{=} 2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2t))dt=\pi ab$

Càlcul aproximat d'integrals

***Aproximació mitjançant una recta* (*trapezi*)**



$$\int_a^b f(x)\,dx \;\cong\; \int_a^b r(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Aproximació mitjançant una paràbola

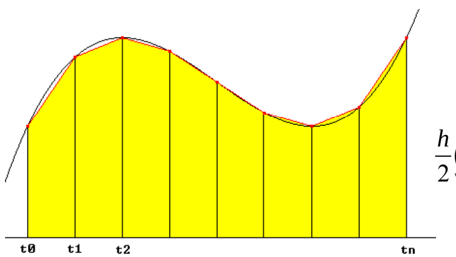
$$\int_a^b f(x)\,dx \;\cong\; \int_a^b p(x)\,dx\overset{?}{=}\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Mètode de trapezis. Cota d'error:

Dividim $[a,b]$ en n parts iguals, de mida $h=\dfrac{b-a}{n}$

$P=\{a=t_0,t_1,\ldots,t_n=b\}=\{a,a+h,a+2h,\ldots,a+nh=b\}$ partició de $[a,b]$

En cada subinterval aproximem $f(x)$ mitjançant una recta



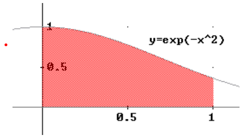
$$\frac{h}{2}\underbrace{(1+2+2+2+2+\cdots+2+2+1)}_{\text{esquema de coeficients}}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\cong T_n f=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b)\right)$$

$$E_n=\left|\int_a^b f(x)\,dx-T_n f\right|\le\frac{n\cdot h^3}{12}M_2=\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \;,\; \text{on } M_2\ge\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Exemple: Aproximació de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ mitjançant trapezis

Valor real de la integral (DERIVE): 0.7468241328…



***Efectuant 10 subdivisions de l'interval*:**

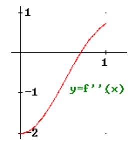
Si $n=10$, $h=\dfrac{1}{10}$ i la partició de $[0,1]$: $P=\left\{0,\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10},\ldots,\dfrac{9}{10},1\right\}$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\cong T_{10}f=\frac{1}{20}\left(1+2\left(e^{-1/100}+e^{-4/100}+\cdots+e^{-81/100}\right)+\frac{1}{e}\right)=0.\underline{746}2107961\ldots$$

A la vista del valor real, l'aproximació assegura 3 decimals exactes

Per a veure què prediu la cota d'error acotem la segona derivada de e^{-x^2} en $[0,1]$

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}\Rightarrow f''(x)=2e^{-x^2}(2x^2-1)\Rightarrow|f''(x)|\overset{?}{\le}6\underset{\text{millorar}}{\overset{\text{es pot}}{=}}M_2$$



D'ací, $E_{10}\le\dfrac{6}{12\cdot10^2}=\dfrac{1}{200}=0.005$ (pràcticament dos decimals exactes)

Garantint 5 decimals exactes (almenys):

Es tracta d'imposar $E_n < 10^{-6}$ i trobar el nombre (n) de subdivisions necessari

A la vista del valor de la cota $M_2 = 6$,

$$E_n \le \frac{6}{12n^2} = \frac{1}{2n^2} < 10^{-6} \iff n^2 > 5\cdot 10^5 \Rightarrow n \ge 708$$

i, en conseqüència, efectuant 708 subdivisions de $[0,1]$, $h = \dfrac{1}{708}$ i

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong T_{708} f = \frac{1}{1416}\left(f(0) + 2\sum_{k=1}^{707} f\left(\frac{k}{708}\right) + f(1) \right) \underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}} \underline{0.746824}0104\ldots$$

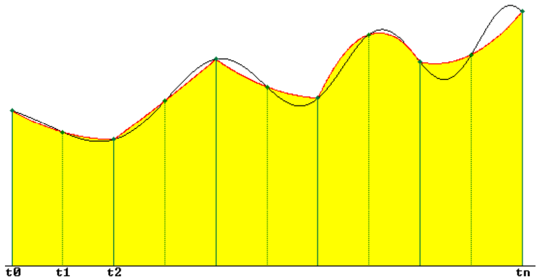
que, tenint en compte el resultat $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.7468241328\ldots$, ens proporciona realment sis decimals correctes (millor del que esperàvem)

Mètode de Simpson. Cota d'error:

Dividim $[a,b]$ en n (parell) parts iguals, de mida $h = \dfrac{b-a}{n}$

$P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\} = \{a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh = b\}$ partició de $[a,b]$

En cada subinterval doble aproximem $f(x)$ mitjançant una paràbola



$$\frac{h}{3}\underbrace{(1+4+2+4+2+\cdots+2+4+1)}_{\text{esquema de coeficients}}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong S_n f = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+2kh) + f(b) \right)$$

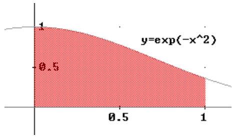
$$E_n = \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n f \right| \le \frac{n\cdot h^5}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4 \ , \text{ on } M_4 \ge \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(iv)}(x) \right|$$

Exemple: Aproximació de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ mitjançant Simpson

Problema 2

(inicial)

Valor real de la integral (DERIVE): 0.7468241328…



Efectuant 10 subdivisions de l'interval:

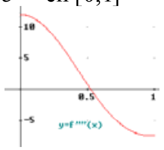
Si $n = 10$, $h = \dfrac{1}{10}$ i la partició de $[0,1]$: $P = \left\{0, \dfrac{1}{10}, \dfrac{2}{10}, \ldots, \dfrac{9}{10}, 1\right\}$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong S_{10} f = \frac{1}{30}\left(\begin{aligned} &1 + 4\left(e^{-1/100} + e^{-9/100} + \cdots + e^{-81/100}\right) \\ &+ 2\left(e^{-4/100} + e^{-16/100} + \cdots + e^{-64/100}\right) + \frac{1}{e} \end{aligned} \right) = 0.\underline{746824}9482\ldots$$

A la vista del valor real, la aproximació assegura ja 6 decimals exactes

Per a veure què prediu la cota d'error acotarem la quarta derivada de e^{-x^2} en $[0,1]$

$$f^{(iv)}(x) = 4e^{-x^2}\left(4x^4 - 12x^2 + 3\right) \Rightarrow \left| f^{(iv)}(x) \right| \overset{?}{\le} 76 \underset{\text{millorar}}{\overset{\text{es pot}}{=}} M_4$$



D'ací, $E_{10} \le \dfrac{76}{180\cdot 10^4} < 0.000043$ (quatre decimals exactes, almenys)

Garantint 8 decimals exactes (almenys):

Es tracta d'imposar $E_n < 10^{-9}$ i trobar el nombre (n) de subdivisions necessari

A la vista del valor de la cota $M_4 = 76$,

$$E_n \le \frac{76}{180 n^4} < 10^{-9} \iff n^4 > \frac{38}{9}\cdot 10^8 \Rightarrow n \ge 144$$

i, en conseqüència, efectuant 144 subdivisions de $[0,1]$, $h = \dfrac{1}{144}$ i

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong S_{144} f = \frac{1}{432}\left(f(0) + 4\sum_{k=0}^{71} f\left(\frac{2k+1}{144}\right) + 2\sum_{k=1}^{71} f\left(\frac{2k}{144}\right) + f(1) \right)$$

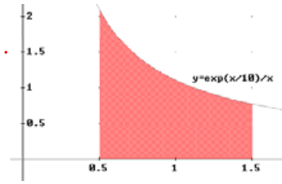
$$\underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}} \underline{0.7468241328}31439\ldots$$

que, tenint en compte el resultat $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.746824132812427\ldots$, ens proporciona realment deu decimals correctes (millor del què esperàvem)

L'avantatge del mètode de Simpson sobre el de trapezis sembla clar.
En general, Simpson quasi sempre millora trapezis.

Exemple: Aproximació de $\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx$ mitjançant trapezis i Simpson, amb 10 subdivisions i garantint cada vegada 6 decimals exactes

Valor real de la integral (DERIVE): 1.203798181…



***Trapezis (n=10)*:**

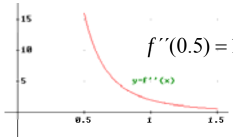
$h = 0.1$ i $P = \{0.5, 0.6, 0.7, \ldots, 1.4, 1.5\}$

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx \cong T_{10} f = \frac{1}{20}\big(f(0.5) + 2\big(f(0.6) + f(0.7) + \cdots + f(1.4)\big) + f(1.5)\big)$$

$$= 1.\underline{20}6748518\ldots \quad \text{(dos decimals exactes)}$$

Per a veure què prediu la cota d'error acotem (gràficament) f'' en $[0.5, 1.5]$

$$f''(x) = \frac{\exp(x/10)}{x}\left(x^2 - 20x + 200\right)$$



$f''(0.5) = 16.000346\ldots < 17 = M_2$

Acotació manual $M_2 = 22$

D'ací, $E_{10} \le \frac{17}{12 \cdot 10^2} < 0.02$ (un decimal exacte, almenys)

***Trapezis (6 decimals exactes)*:**

Per a $M_2 = 17$, $E_n \le \frac{17}{12n^2} < 10^{-7} \iff n^2 > \frac{17}{12} \cdot 10^7 \Rightarrow n \ge 3764$

i, en conseqüència, efectuant 3764 subdivisions de $[0.5, 1.5]$, $h = \frac{1}{3764}$ i

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx \cong T_{3764} f = \frac{1}{7528}\left(f(0.5) + 2\sum_{k=1}^{3763} f\left(0.5 + \frac{k}{3764}\right) + f(1.5)\right)$$

$$\underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}} \underline{1.203798}202$$

que, a la vista de $\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx = 1.203798181\ldots$, proporciona la precisió esperada

***Simpson (n=10)*:**

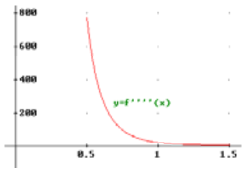
De nou, $h = 0.1$ i $P = \{0.5, 0.6, 0.7, \ldots, 1.4, 1.5\}$ i

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx \cong S_{10} f = \frac{1}{30}\left(\begin{aligned} &f(0.5) + 4\big(f(0.6) + f(0.8) + \cdots + f(1.4)\big) \\ &\quad + 2\big(f(0.7) + f(0.9) + \cdots + f(1.3)\big) + f(1.5) \end{aligned} \right)$$

$$= \underline{1.203}846491\ldots \quad \text{(tres decimals exactes)}$$

Per a veure què prediu la cota d'error acotarem (gràficament) $f^{(iv)}$ en $[0.5, 1.5]$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{\exp(x/10)}{10^4 x^5}\left(x^4 - 40x^3 + 1200x^2 - 24000x + 240000\right)$$



$f^{(iv)}(0.5) = 768.000002\ldots < 769 = M_4$

Acotació manual: $M_4 = 1037$

D'ací, $E_{10} \le \frac{769}{180 \cdot 10^4} < 0.00045$ (tres decimals exactes)

***Simpson (6 decimals exactes)*:**

Amb $M_4 = 769$, $E_n \le \frac{769}{180n^4} < 10^{-7} \iff n^4 > \frac{769}{18} \cdot 10^6 \Rightarrow n \ge 82$ (n parell)

Efectuant 82 subdivisions de $[0.5, 1.5]$, $h = \frac{1}{82}$ i

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx \cong S_{82} f = \frac{1}{246}\left(f(0.5) + 4\sum_{k=0}^{40} f\left(0.5 + \frac{2k+1}{82}\right) + 2\sum_{k=1}^{40} f\left(0.5 + \frac{2k}{82}\right) + f(1.5)\right)$$

$$\underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}} \underline{1.2037981}92\ldots \quad \text{(set decimals exactes)}$$