



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Modelos de Markov ocultos: Algoritmo de Viterbi

Albert Sanchis
Alfons Juan
Jorge Civera

DSIC

Departamento de Sistemas
Informáticos y Computación

Objetivos formativos

- Describir la aproximación de Viterbi para el cálculo de probabilidades con la que un Modelo Oculto de Markov genera cadenas.
- Calcular la probabilidad de una cadena mediante la aproximación de Viterbi.
- Obtener la secuencia de estados que genera una cadena con máxima probabilidad.
- Diferenciar entre la probabilidad con la que un Modelo Oculto de Markov genera una cadena y la probabilidad estimada mediante la *aproximación de Viterbi*.

Índice

1	Probabilidad de una cadena	3
2	Aproximación de Viterbi	4
3	Algoritmo de Viterbi	5
4	Algoritmo de Viterbi: implementación	6

1. Probabilidad de una cadena

- Dado un *modelo oculto de Markov* $M = (Q, \Sigma, \pi, A, B)$ con estado final F , y una cadena $x = x_1 \cdots x_m \in \Sigma^+$,

$$P(x \mid M) = \sum_{q_1, \dots, q_m \in Q^+} P(x, q_1, \dots, q_m)$$

Ejemplo: tomemos $x = ab$

2. Aproximación de Viterbi

- La *aproximación de Viterbi* es:

$$\tilde{P}(x \mid M) = \max_{q_1, \dots, q_m \in Q^+} P(x, q_1, \dots, q_m)$$

Ejemplo: tomemos $x = ab$

3. Algoritmo de Viterbi

- Definimos $V(q, t)$ como la probabilidad máxima de que en el instante t se alcance el estado q emitiendo el prefijo $x_1 \dots x_t$:

$$V(q, t) = \max_{\substack{q_1, \dots, q_t \\ q_t = q}} P(x_1 \dots x_t, q_1, \dots, q_t)$$

- $V(q, t)$ puede calcularse recursivamente:

$$V(q, t) = \begin{cases} \pi_q B_{q, x_1} & \text{si } t = 1 \\ \max_{q' \in Q} V(q', t-1) A_{q', q} B_{q, x_t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- **Aproximación de Viterbi** a $P(x | M)$:

$$\tilde{P}(x | M) = \max_{q \in Q} V(q, |x|) A_{q, F}$$

4. Algoritmo de Viterbi: implementación

- La función $V()$ se representa como una matriz: $V_{q,t} \equiv V(q, t)$.
- Esta matriz define un *grafo multietapa* denominado **trellis** y permite el **cálculo iterativo eficiente** por **programación dinámica**.
- La secuencia óptima de estados se calcula recorriendo el *trellis* hacia atrás.
- **Complejidad temporal:** $O(mb)$, donde m es la longitud de la cadena y b es el número de transiciones entre estados.