Tema 4. Distribuciones de Probabilidad Continuas

Dep. Estadística e IO Aplicadas y Calidad, Universidad Politécnica de Valencia

Índice

1. Introducción

- Este tema se centra en la distribución de probabilidad de variables continuas.

- Veremos que la función de probabilidad no tiene utilidad dado que la probabilidad de un variable continua en un punto valdrá siempre cero. Aquí hablaremos de probabilidad "de intervalos" y usaremos la función de densidad ,que medirá la densidad de probabilidad en el punto, junto con la función de distribución para caracterizarlas.

- Las distribuciones continuas (unidimensionales) surgen en contextos reales, en los que la característica aleatoria que queremos estudiar es algún tipo de dimensión o medida (peso, longitud, volumen, tiempo, superficie, etc.)

1. Introducción

- Estudiaremos las siguientes distribuciones de probabilidad continuas: Uniforme, Exponencial y Normal , siendo la más relevante, por sus múltiples aplicaciones, la distribución Normal (distribución gaussiana).

- De cada distribución, aprenderemos sus principales características, en qué contextos utilizarla, y cómo realizar cálculos relacionados con sus probabilidades.

- Por último, veremos que otras distribuciones, como la Binomial o la de Poisson, pueden aproximarse en algunos casos a la Distribución Normal.

2. Distribución de probabilidad

Expresa sintéticamente la pauta de variabilidad de una v.a.

Función Matemática

DISCRETA

F. Probabilidad : indica la probabilidad de que la v.a. tome un valor

F. Distribución (Acumulada) : indica la probabilidad de que la v.a. tome valores ≤ a un valor concreto

Esperanza Matemática $$E(h(X)) = \sum h(x_i)P(X = x_i)$$

CONTINUA

F. Densidad : permite calcular la probabilidad de que la v.a. tome valores dentro de un intervalo

F. Distribución (Acumulada) : indica la probabilidad de que la v.a. tome valores ≤ a un valor concreto (pero aquí < y ≤ es lo mismo)

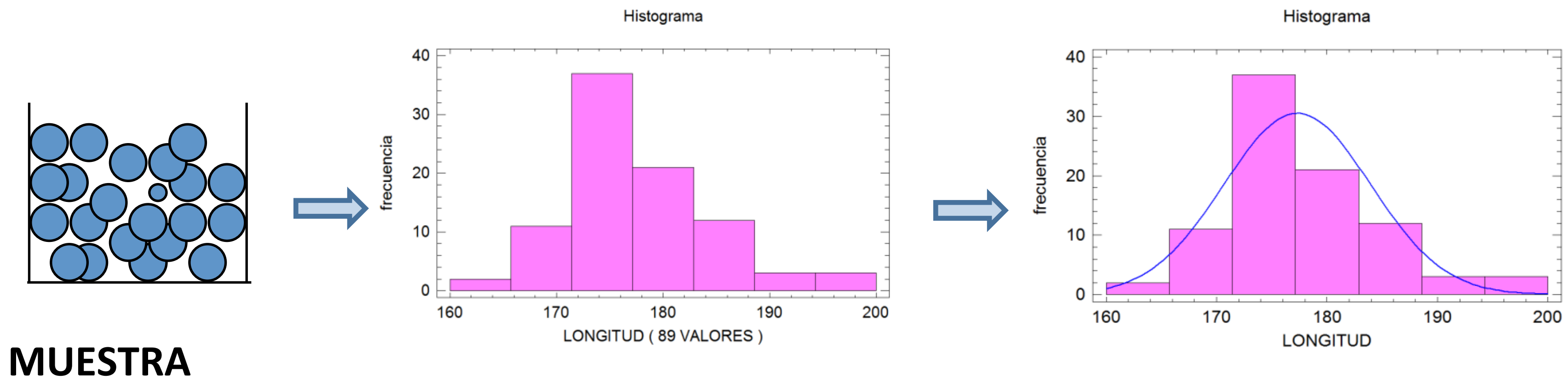
Esperanza matemática $$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$$

3. Función de densidad

Esa función, a la cual "tiende" el histograma según aumentamos el número de intervalos, y a medida que la muestra se aproxima a la población entera, es la función de densidad de la v.a. X, y la representaremos por $f_X(x_i)$

El procedimiento general para la obtención de la $f_X(x_i)$ es:

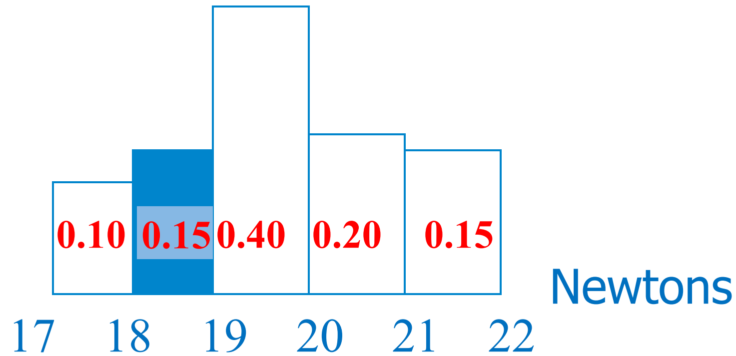
1. Seleccionar una muestra
2. Representar el histograma de X
3. Elegir la función f_x que mejor aproxime el histograma



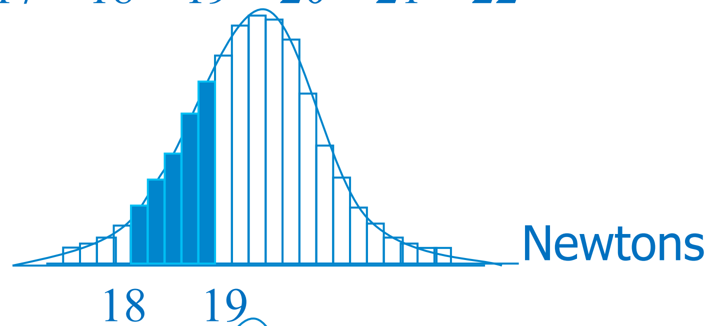
3. Función de densidad

Ejemplo: Dureza respaldos de poliuretano de una cierta marca de vehículos (Nw)

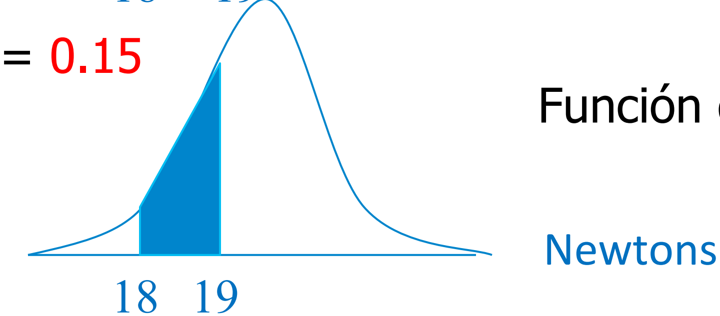
Muestra=100



Área rayada = 0.15



Probabilidad (18<X<19) = 0.15
Área rayada = 0.15



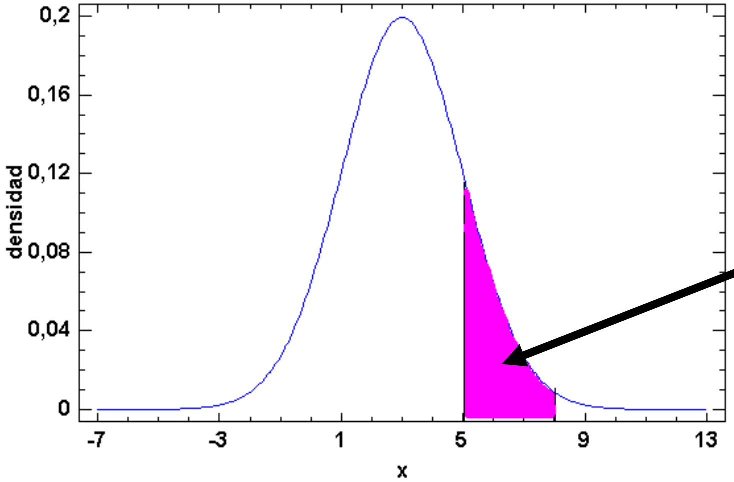
Función de densidad $f_X(x_i)$

$$\boxed{\int_{18}^{19} f(x)dx = 0.15}$$

3. Función de densidad

- La probabilidad de que x tome valores entre a y b será:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx}$$



$$P(5 \leq x \leq 8) = \int_5^8 f(x)dx$$

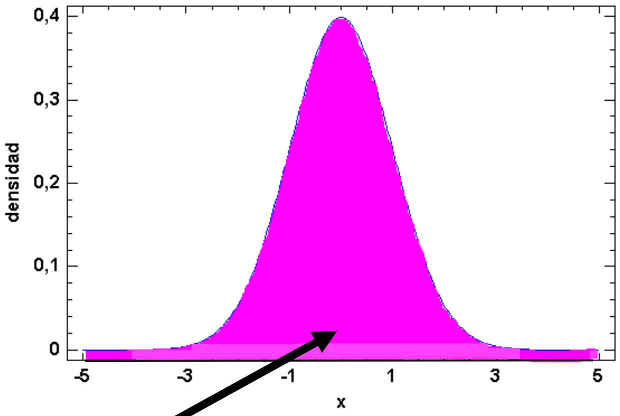
NOTA:
El área bajo la curva f que queda entre los valores 5 y 8

3. Función de densidad

- FUNCIÓN DE DENSIDAD verificará:

$$f_X(x_i) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$



El área total que determina la $f_X(x_i)$ siempre vale 1

Puesto que:

$$P(-\infty \leq X \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

4. Función de distribución

- Función de Distribución de una v.a. continua X:

$$\boxed{F_X(x_i) = P(X \le x_i)} \qquad \forall x_i \in \Re$$

- F_x y f_x se pueden obtener de forma alternativa:

$$F_X(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_X(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- Cálculo de probabilidades en intervalos con la F_x

$$\boxed{P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)}$$

- Obtención de Percentiles (x_p)

$$\boxed{F(x_p) = P(X \le x_p) = p} \qquad \text{si } p=0.5 \Rightarrow x_p = \text{mediana}$$

5. Distribución Uniforme

- UNIFORME U(a,b): si la probabilidad de que x pertenezca a cualquier subintervalo S del intervalo [a,b] es proporcional a la longitud del subintervalo. La función de densidad es constante en el intervalo [a b] y vale cero fuera de dicho intervalo.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

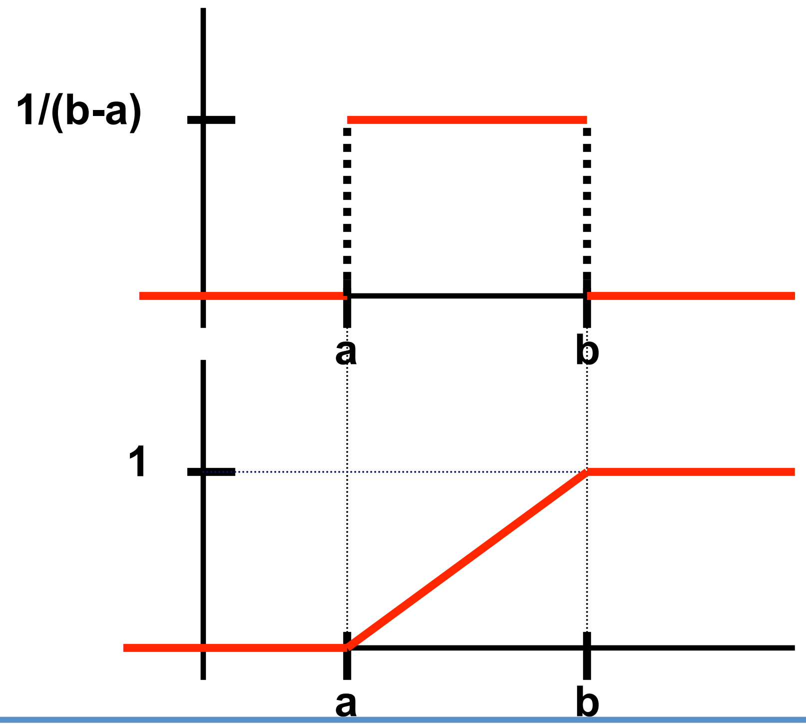
$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD

$$f_X(x_i) = \begin{cases} K = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x_i \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

$$F_X(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i < a \\ \dfrac{x_i - a}{b - a} & \text{si } a \leq x_i \leq b \\ 1 & \text{si } x_i > b \end{cases}$$



Ejemplo

Ejercicio. De una estación parte un tren cada 20 minutos. Un viajero llega de improviso y coge el primer tren que salga de la estación, hallar:

a) Función de distribución de la variable aleatoria "Tiempo de espera del viajero"

b) Probabilidad de que espere al tren menos de 7 minutos

c) Probabilidad de que espere al tren entre 4 y 11 minutos

c) El tiempo medio de espera del viajero

d) Probabilidad de que espere exactamente 12 minutos

e) La probabilidad que tenga que esperar al menos 5 minutos más si ya lleva esperando 6 minutos

6. Distribución Exponencial

- Se utiliza como modelo cuando se asume que no existe desgaste en el producto (envejecimiento o fatiga de materiales) y que los fallos son por tanto accidentales:
  - La v.a. indica el **tiempo de vida** de un producto. El t que transcurre antes de que se produzca un fallo accidental en su funcionamiento
  - El tiempo transcurrido entre 2 averías de un producto reparable.

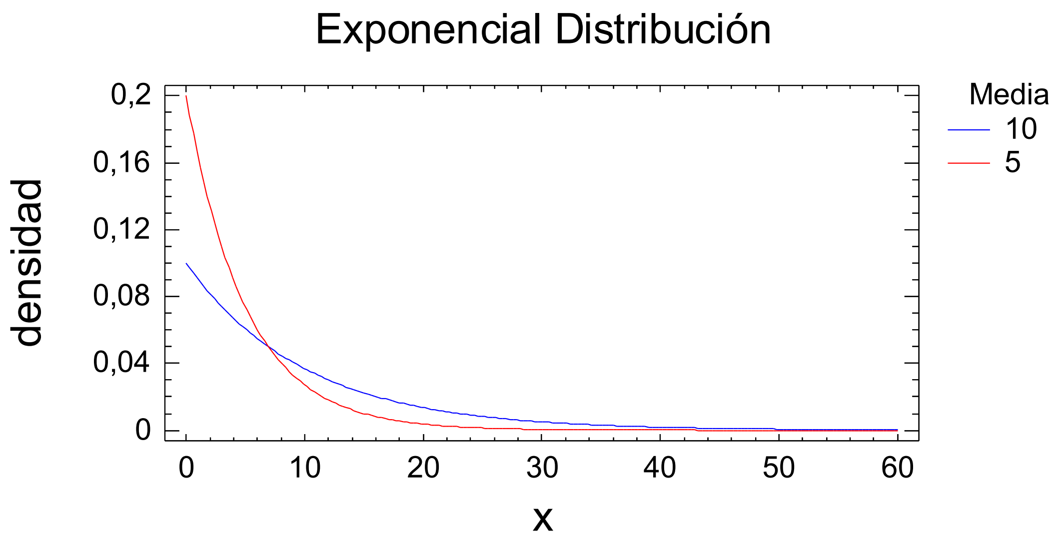
- Su parámetro característico es **α** y se define:

α: Tasa de fallos o fallo por unidad de tiempo

6. Distribución Exponencial

La función de densidad de la distribución exponencial se define como:

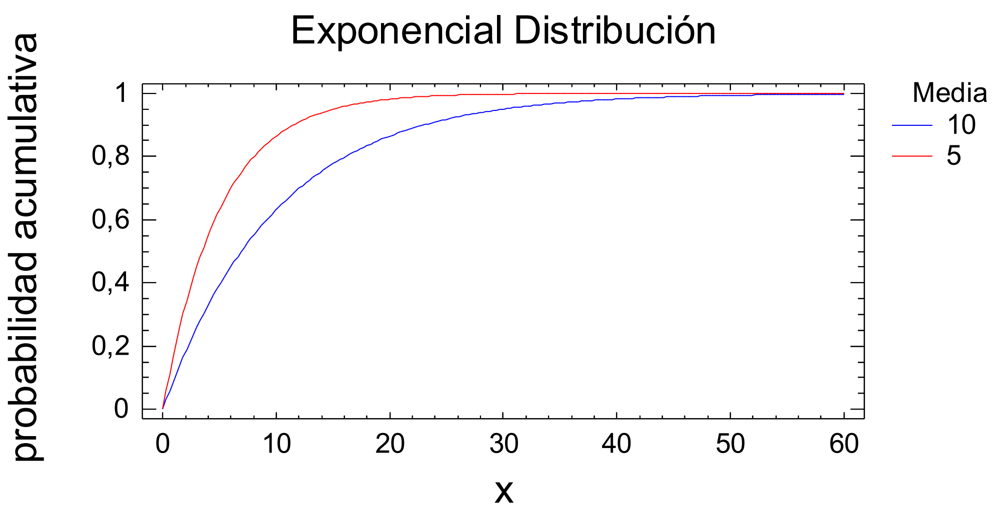
$$f_X(x_i) = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x_i} \quad , \text{para todo } x_i \geq 0$$



6. Distribución Exponencial

La función de distribución de la distribución exponencial se define como:

$$F_X(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i < 0 \\ 1 - e^{-\alpha \cdot x_i} & x_i \geq 0 \end{cases}$$



6. Distribución Exponencial

- Percentil x_p

$$p = 1 - e^{-\alpha \cdot x_p} \Rightarrow x_p = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-p)$$

- Media

$$E(x) = \frac{1}{\alpha}$$

El valor medio de una distribución exponencial también se denomina:
MTTF (Mean Time To Failure)
MTBF (Mean Time Between Failures)

- Varianza y desviación típica

$$Var(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \qquad \sigma = \frac{1}{\alpha}$$

6. Distribución Exponencial

- INVARIABILIDAD EN EL TIEMPO (falta de memoria)

  El comportamiento futuro es independiente de su comportamiento actual o pasado:

$$P(X>t_0+x/X>t_0) = P(X>x)$$

CONCLUSIÓN: Los fallos se deben a causas accidentales y no al desgaste (envejecimiento) del producto. Si en una máquina los fallos son más frecuentes a medida que envejece, el t hasta el fallo no siguen una distribución exponencial

Ejemplo

Ejercicio La vida X de las pilas eléctricas de un determinado fabricante se distribuyen exponencialmente con media 50 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pila falle a lo largo de las 10 horas siguientes? **Alfa=0.02; $P(X>10)$= 1-0.81873**

b) Si una pila lleva ya funcionado sin fallos 50 horas ¿cuál es la probabilidad de que falle a lo largo de las 10 horas siguientes? **$P(X>60/X>50) = P(X>10)=1-0.81873$**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una pila dure entre 20 y 40 horas? **$P(20<X<40)= 0.221$**

d) ¿Cuál es la duración de tiempo superado por el 50% de las pilas? Antes de calcularlo razona si será superior o no a la vida media. **tiempo=34.66h=mediana**

Si el fabricante produce un nuevo tipo de pila de “Extra Duración” y nos informa de que un 30% de las pilas superan las 300 horas

e) ¿Cuál es la probabilidad de que una pila de extra duración supere las 100 horas? . **Alfa=0.004013; $P(X>100)$= 0.66943**

7. Distribución Normal

- **La variable aleatoria Normal** (variable de Gauss) es la más importante de las variables aleatorias continuas, pues modeliza bien un gran número de variables encontradas en la realidad

- Es un modelo "simétrico": la probabilidad se concentra en una zona central de valores, y va disminuyendo de manera simétrica según nos alejamos de dicha zona central. Recuerda a una forma de campana.

- Se representa por $X \equiv N(m,\sigma)$.

- Los parámetros característicos de una distribución normal son la **m** (media) y **σ** (desviación)
- E: $\{-\infty \quad +\infty\}$

7. Distribución Normal

- El teorema Central del Límite justifica matemáticamente este hecho que se puede observar de modo empírico.

De forma simplificada: En condiciones muy generales, la suma tipificada de variables aleatorias **independientes y con la misma distribución**, sea cual sea su distribución, tiende a distribuirse **normalmente** a medida que aumenta el número de sumandos.

$$\boxed{Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \xrightarrow[N \to \infty]{} Y \approx \text{Normal}}$$

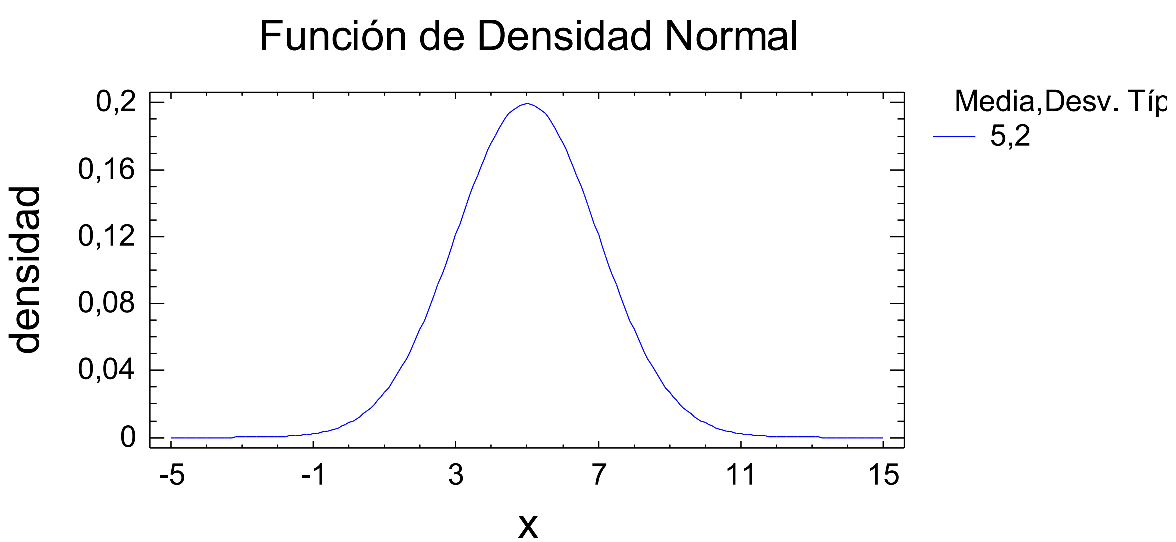
7. Distribución Normal. Función de densidad

La función de densidad de una variable X con distribución normal de parámetros m y σ es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

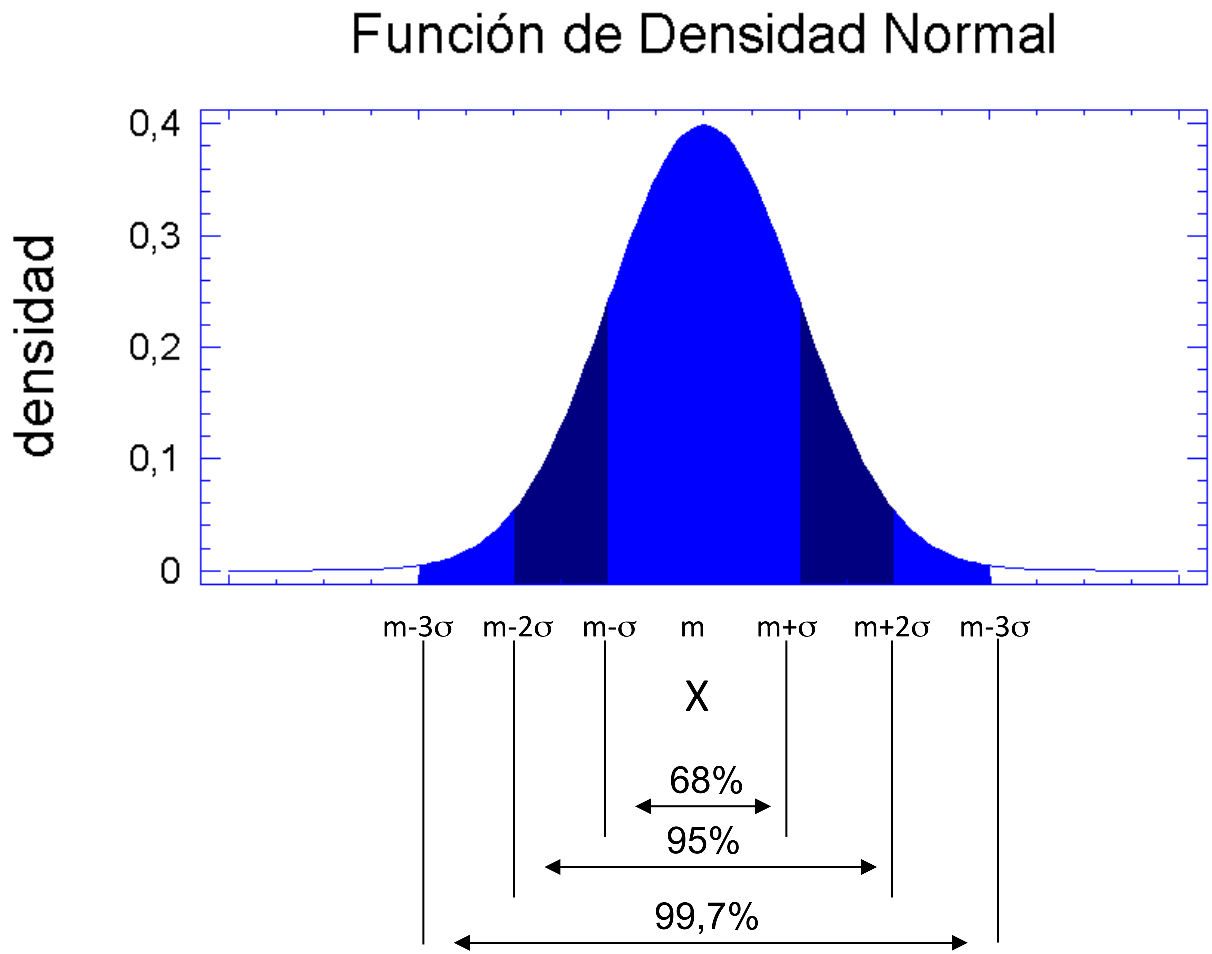
m= Media

σ = Desviación típica



7. Distribución Normal. Función de densidad

Probabilidades asociadas con una distribución normal

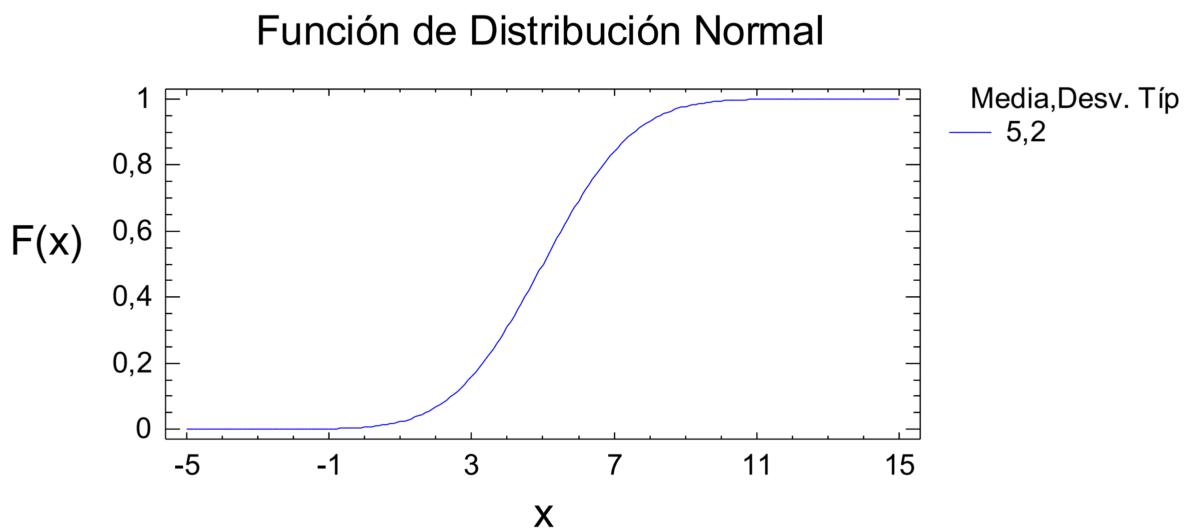


7. Distribución Normal. Función de distribución

- La función de distribución de una variable x con distribución normal de parámetros m y σ es:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

NOTA: La integral no puede resolverse analíticamente



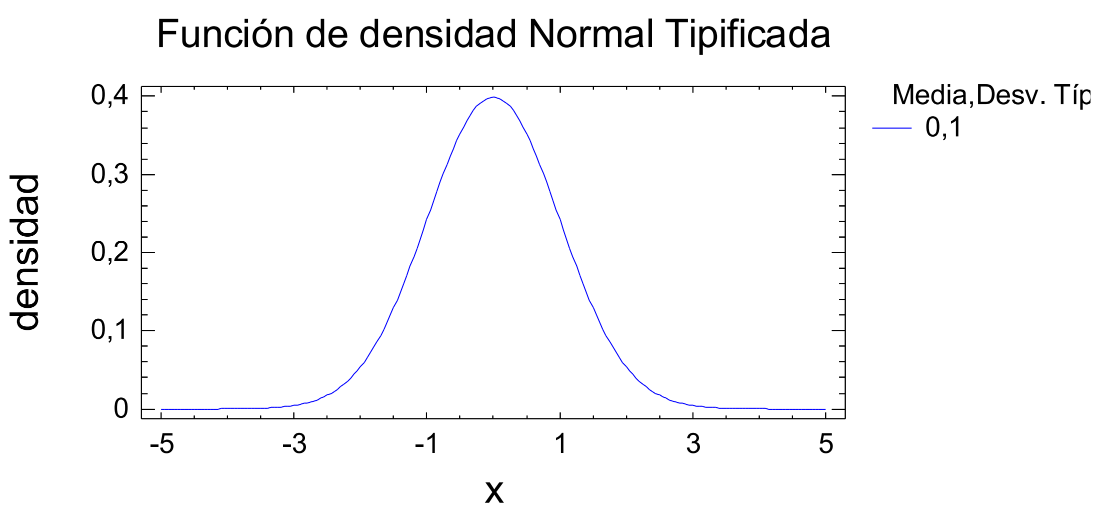
7.1 Normal Tipificada. Función de densidad

Una distribución **NORMAL TIPIFICADA** es una distribución normal de parámetros m=0 y σ=1 $\Rightarrow$ Z~N(0;1)

Su función de densidad es:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < +\infty$$

Donde:
m= 0
σ= 1

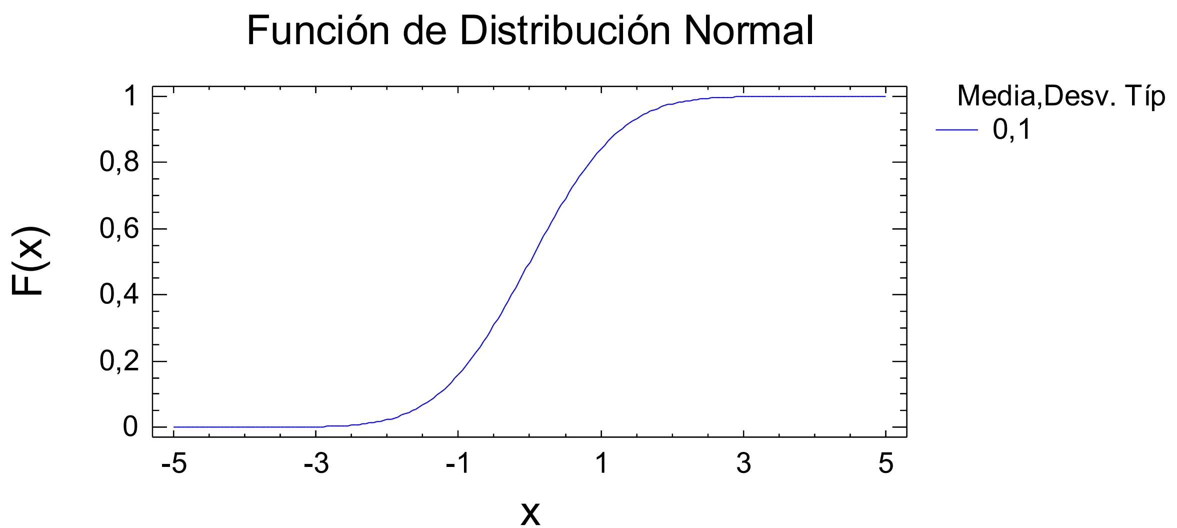


7.1 Normal Tipificada. Función de distribución

La función de distribución de una normal tipificada es:

$$\phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz$$

NOTA: Integral resuelta por métodos numéricos $\Rightarrow$ **TABLA N(0;1)**



7.1 Normal Tipificada. Cálculo probabilidades

¿P(Z≤ 1,67)?

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916

P(Z≤ 1,67) = **0,9525**

Lecturas de la Normal (0;1)

P (N (0;1) > 0.5)

P (N (0;1) < - 0.5)

P (N (0;1) < 0.5)

P (-0,8 < N (0;1) < 0.5)

P (-1 < N (0;1) < 1)

P (-2 < N (0;1) < 2)

P (-3 < N (0;1) < 3)

7.1 Normal Tipificada. Cálculo probabilidades

Apartado c)

¿P(Z≤ z) = 0,9871?

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916

P(Z≤ **2,23**) = 0,9871

Tipificar

Si $X \sim N(m_x ; \sigma_x)$ → **TIPIFICAR UNA NORMAL** → $Z = \dfrac{X - m_x}{\sigma_x}$

$$Z \sim N(m_z = 0; \sigma_z = 1)$$

Leer probabilidades en una $X \sim N(m_x ; \sigma_x)$

$$P(X > a) = P(X - m_X > a - m_X) = P\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} > \frac{a - m_X}{\sigma_X}\right)$$

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a - m_X}{\sigma_X}\right)$$ → **Lectura en Tabla N(0,1)**

Ejemplo

Ejercicio. La longitud de una pieza de plástico sigue una distribución Normal de parámetros m= 120 cm y σ = 2 cm. Según las especificaciones de la pieza, se considera que es correcta para una longitud de 120 $\pm$ 3 cm.

a) Calcular el porcentaje de piezas correctas.

b) Queremos realizar unas nuevas especificaciones. Rechazaremos el 5% de las piezas de mayor longitud y el 5% de las piezas de menor longitud, ¿cuál será la longitud máxima y mínima para que la pieza sea aceptada?.

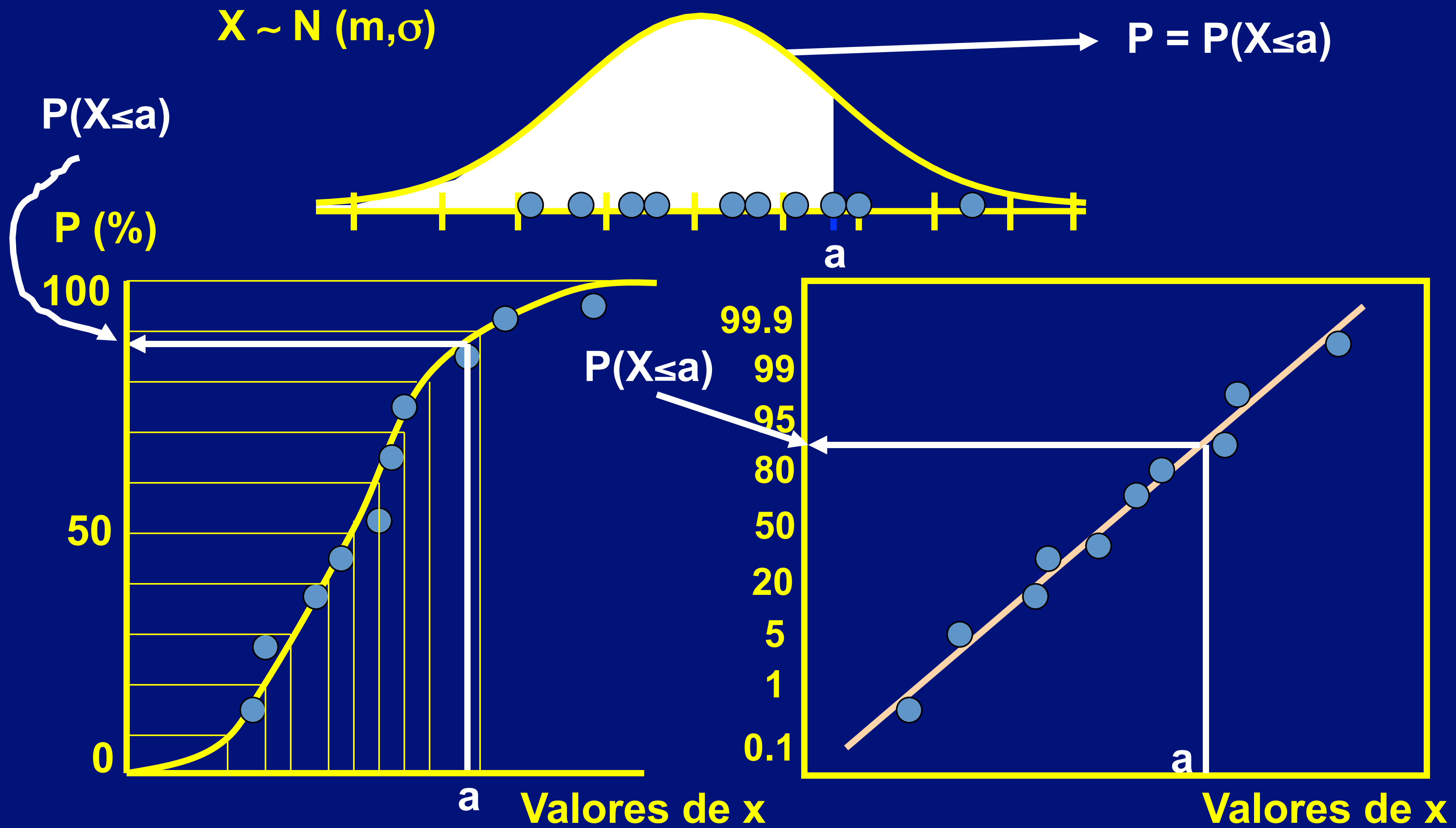
Ejemplo

Ejercicio. Una empresa de plásticos compra habitualmente un tipo de Policarbonato para fabricar sus productos. Se sabe que la densidad del material sigue una distribución normal. A través de diferentes pruebas empíricas, han determinado que la probabilidad de que el material tenga una densidad superior a 1250 kg/m^3 es aproximadamente 0,3 y que la probabilidad de que el material tenga una densidad inferior a 1400 kg/m^3 es aproximadamente 0,8. A partir de estos datos:

a) calcula los parámetros de la distribución normal de la variable densidad del material.

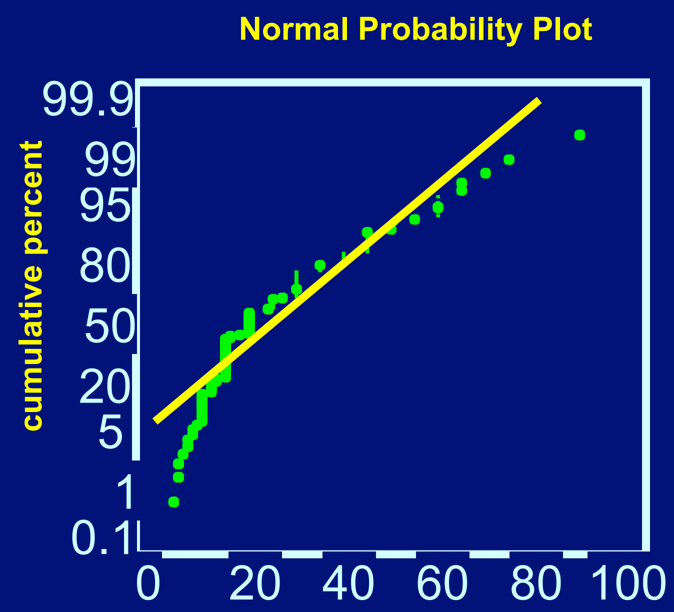
b) Si tienen problemas al fabricar sus productos cuando la densidad es superior a 1600 kg/m^3, ¿cuál es la probabilidad de que un material de problemas?

GRÁFICOS PROBABILÍSTICOS NORMALES

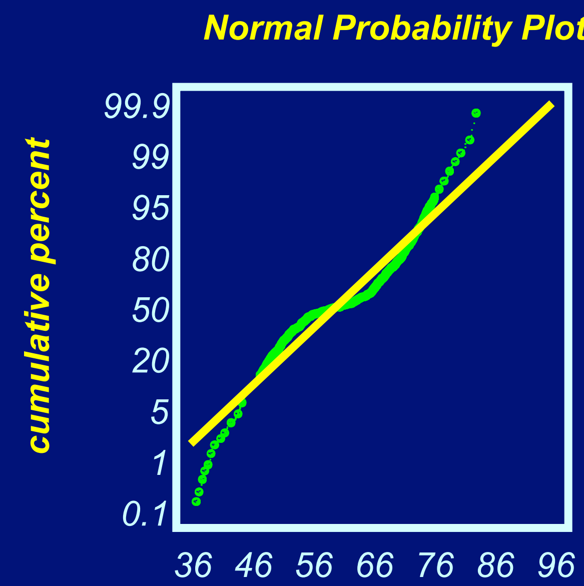


Papel cuadriculado ordinario

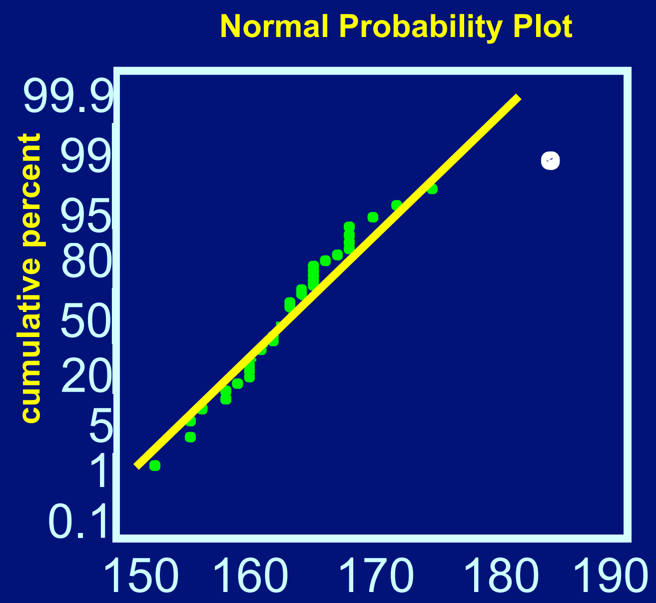
Papel probabilístico normal



Asimetría positiva



Mezcla de dos poblaciones



Datos anómalos

7.3 Combinación lineal de Normales

- Una combinación lineal de n variables $X_1,\ldots X_n$ tiene la forma:

$$Y = c_0 + c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n$$

Los coeficientes "c" son constantes

- Su media y varianza se calculan a partir de las propiedades de la media y la varianza:

$$E(y) = C_0 + C_1 E(x_1) + \ldots + C_n E(x_n)$$

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \operatorname{var}(X_i) + 2 \sum_{i,j=1\ldots n}\sum c_i c_j Cov(X_i, X_j)$$

7.3 Combinación lineal de Normales

- En el caso de una combinación lineal de variables **normales independientes**, su distribución también es **normal**
- El **valor medio** y la **varianza** de esta distribución vendrá dado por:

$$\boxed{E(y) = C_0 + C_1 E(x_1) + \ldots + C_n E(x_n)}$$

$$\boxed{\operatorname{var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \operatorname{var}(X_i)}$$

Al ser variables independientes la covarianza vale 0

Ejemplo

Ejercicio. Una empresa que se dedica a la venta de bombones comercializa cajas de 20 bombones. Si el peso de cada bombón sigue una distribución normal de m=10 gr y σ=1 gr, el peso de la caja que los contiene sigue una distribución normal de m=50 gr y σ=10 gr y el peso del material que separa los bombones en dos capas podemos suponer que es constante y de 20 gramos

a)¿Cuál es el porcentaje de cajas de bombones vendidas cuyo peso total es superior a 250 gr?

b) ¿Cuál es el peso que superaran el 20% de las cajas de bombones vendidas?

c) ¿Hallar un intervalo de pesos en el que se hallaran el 80% central de las cajas de bombones vendidas?l

Ejemplo

Ejercicio. La estatura de los alumnos de la clase de estadística, se distribuye normalmente con media 175 cm y desviación típica 10 cm, mientras que la estatura de las chicas se distribuye normalmente con media 164 cm y desviación típica 7 cm. Calcular la probabilidad de que escogiendo una pareja al azar la estatura de la chica sea superior a la del chico.

7.4 Aproximaciones a la Distribución Normal

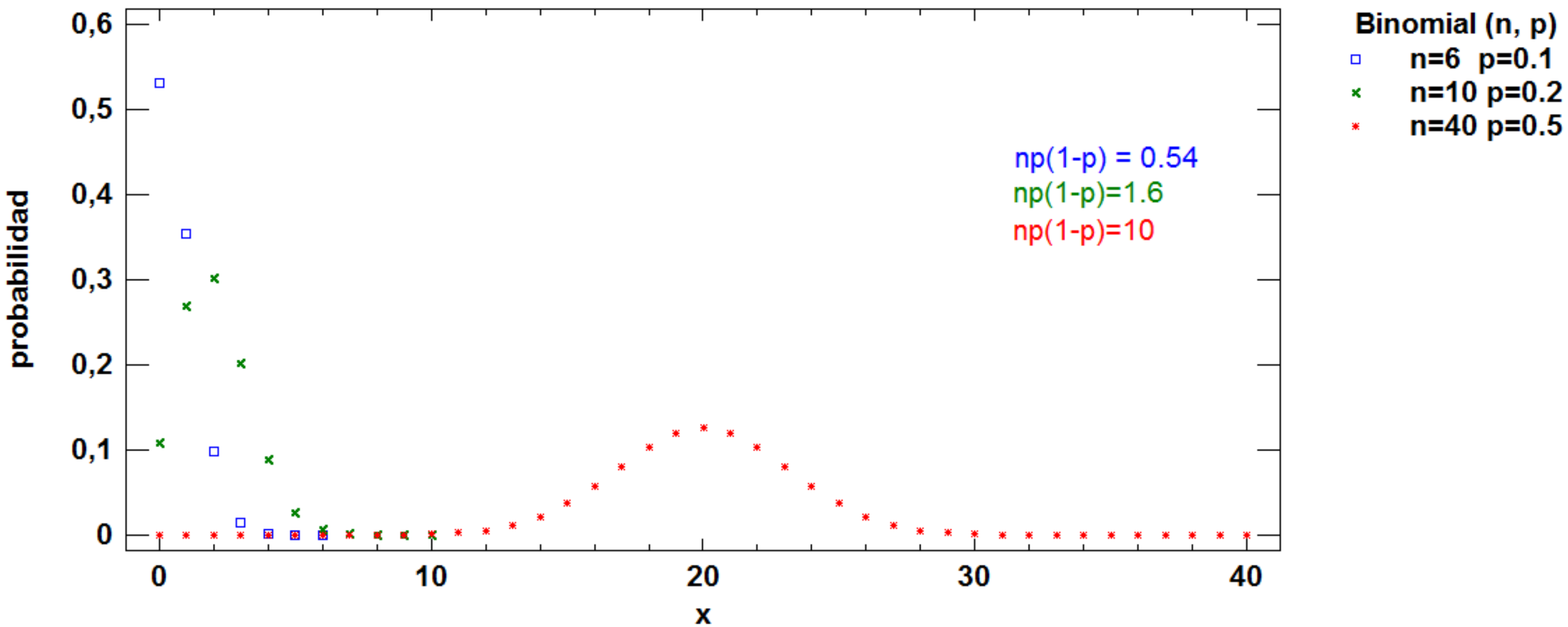
$$\mathrm{Bi}\ (n,p) = \mathrm{Be}_1(p) + \mathrm{Be}_2(p) + \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots + \mathrm{Be}_n(p)$$

TCL: Teorema Central del Limite

$$\mathrm{Bi}(n,p) \xrightarrow{np(1-p)\geq 9} N(m = np; \sigma = \sqrt{np(1-p)})$$

La aproximación es buena cuando: **np(1-p) ≥ 9**

Nota: algunos autores si np(1-p) >5



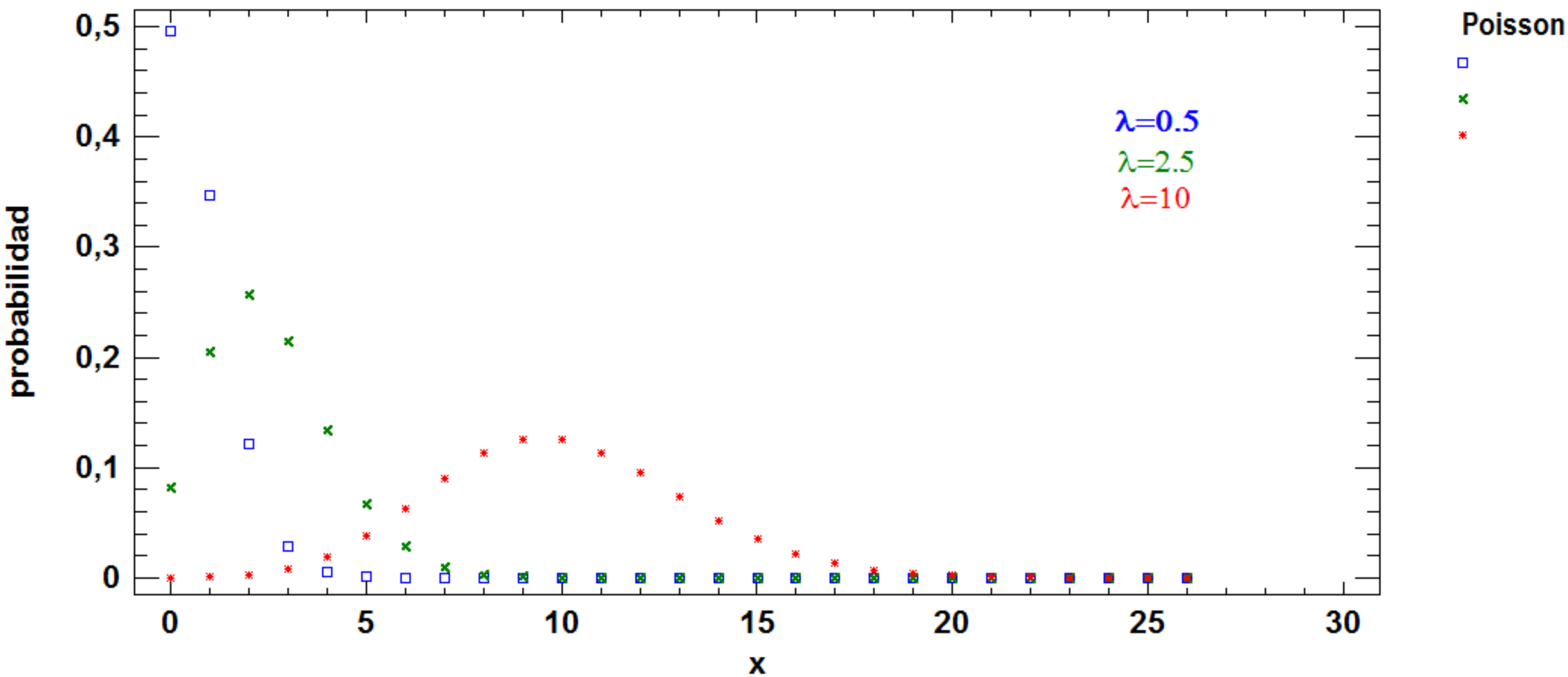
7.4 Aproximaciones a la Distribución Normal

TCL: Teorema Central del Limite

$$Po(\lambda) \xrightarrow[\text{TCL}]{\lambda \geq 9} N(m = \lambda; \sigma = \sqrt{\lambda})$$

Nota: algunos autores si $\lambda > 5$

La aproximación es buena cuando: $\lambda \geq 9$

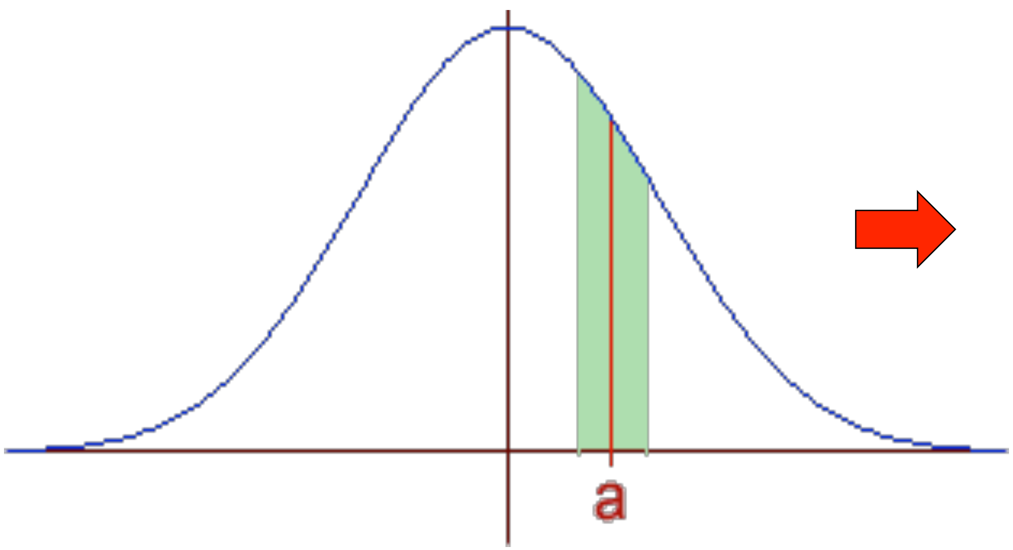


7.4 Aproximaciones a la Distribución Normal

Corrección de continuidad

Cuando se utiliza el modelo **normal** para calcular las probabilidades asociadas a una v.a. discreta, como consecuencia de una aproximación, hay que efectuar previamente una **corrección de continuidad.**

$$P(X = a) = P(a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5)$$



X: Discreta	X*: Continua
$P(X > 25)$	$P(X^* \geq 25.5)$
$P(X \geq 25)$	$P(X^* \geq 24.5)$
$P(X < 14)$	$P(X^* \leq 13.5)$
$P(X \leq 14)$	$P(X^* \leq 14.5)$

Ejemplo

Ejercicio. Si se pregunta a una muestra de 131 individuos que digan cuál es su digito favorito (del 0 al 9), suponiendo que en la población la probabilidad de decir un dígito impar es la misma que la de un dígito par, calcular aproximadamente la probabilidad de que de los 131 dígitos recogidos, 88 o más sean impares.

Ejemplo

Ejercicio. A una centralita telefónica llegan en promedio 2 llamadas por minuto. Calcular aproximadamente la probabilidad de que en una hora se reciban más de 150 llamadas.

8. Fiabilidad

La Fiabilidad de un sistema para una misión de duración x=t uds. de tiempo, es la probabilidad de que la duración de dicho sistema supere el tiempo t.

$$F_{sist} = P(T_{sist} > t)$$

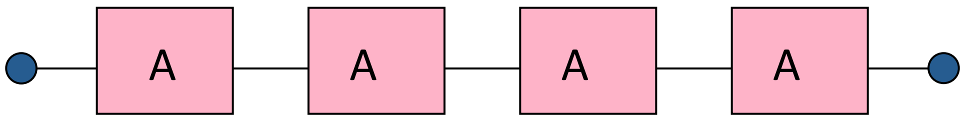
Tipos de sistemas:

- Serie
- Paralelo

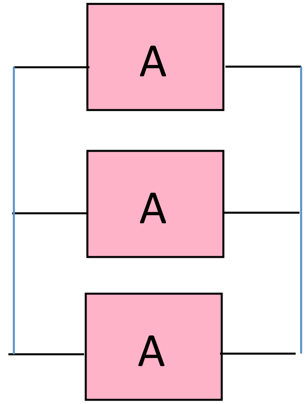
Tipos de Variable T:

- Puede seguir diferentes distribuciones de probabilidad: Normal, Exponencial, Weibull, Lognormal, etc.
- Las características del sistema y el tipo de componentes que lo formen determinará la distribución a utilizar
- Si el modelo asume que no existe desgaste en el producto y que los fallos son por tanto accidentales $\Rightarrow$ Exponencial

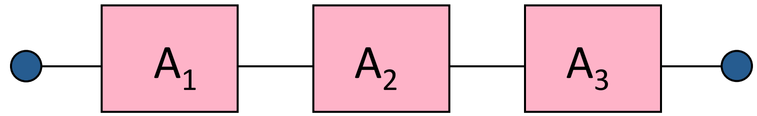
- **Sistema en serie:** Un sistema en serie es aquel que para que funcione lo han de hacer todas sus componentes.



- **Sistema en paralelo:** Un sistema en paralelo es aquel que para que funcione basta con que lo haga una de sus componentes.



Sistema en Serie:



Sucesos

Suceso S_{A1} ={ La vida de la componente A_1 supera el tiempo t} = {T_{A1}>t}

Suceso S_{A2} ={ La vida de la componente A_2 supera el tiempo t} = {T_{A2}>t}

Suceso S_{A3} ={ La vida de la componente A_3 supera el tiempo t} = {T_{A3}>t}

Suceso Sistema_Serie ={ La vida del Sistema_Serie supera el tiempo t}

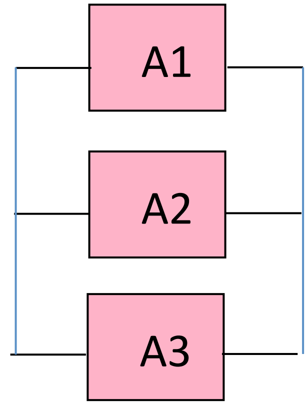
Cálculo de la Fiabilidad para una vida t

$F_{Sistema\_Serie}$ para una vida t = P(Suceso Sistema_Serie) = $P(S_{A1} \cdot S_{A2} \cdot S_{A3})$

Si asumimos la independencia en la vida de las componentes:

$F_{Sistema\_Serie}$ para una vida t = $P(S_{A1}) \cdot P(S_{A2}) \cdot P(S_{A3}) = P(T_{A1}>t)\, P(T_{A2}>t)\, P(T_{A3}>t)$

Sistema en Paralelo:



Sucesos

Suceso S_{A1} ={ La vida de la componente A_1 supera el tiempo t} = {T_{A1}>t}
Suceso S_{A2} ={ La vida de la componente A_2 supera el tiempo t} = {T_{A2}>t}
Suceso S_{A3} ={ La vida de la componente A_3 supera el tiempo t} = {T_{A3}>t}
Suceso Sistema_Paralelo ={ La vida del Sistema_Paralelo supera el tiempo t}

Cálculo de la Fiabilidad para una vida t

$F_{Sistema\_Paralelo}$ para una vida t = P(Suceso Sistema_Paralelo) = $P(S_{A1}+S_{A2}+S_{A3})$

$$P(S_{A1}+S_{A2}+S_{A3}) = 1 - P(\overline{S_{A1}+S_{A2}+S_{A3}}) = 1 - P(\overline{S}_{A1}\cdot\overline{S}_{A2}\cdot\overline{S}_{A3})$$

Si asumimos la independencia en la vida de las componentes:

$F_{sistema\_Paralelo}$ para una vida t = $1-[P(\overline{S}_{A1})\cdot P(\overline{S}_{A2})\cdot P(\overline{S}_{A3})]$= 1- [P($T_{A1}$≤t) P($T_{A2}$ ≤ t) P(T_{A3} ≤ t)]

Ejemplo

Ejercicio. Un dispositivo está formado por tres componentes del mismo tipo A_1, A_2 y A_3 conectadas en paralelo. La vida de las componentes A_i sigue una distribución exponencial cuya media es de 80 horas. Calcula la fiabilidad del dispositivo a las 100 horas.

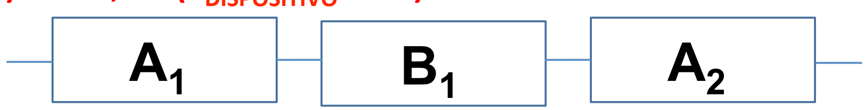
Ejemplo

Ejercicio. Se tienen dos tipos de componentes de un proveedor (tipo A y tipo B) cuya vida se distribuye exponencialmente e independientemente.

a) El 75% de unas componentes tipo A superan las 1000 horas de funcionamiento ¿Cuál es la probabilidad de que una componente tipo A sacada al azar de una partida de dicho proveedor supere las 500 horas? **Alfa=0.00028768; $P(T_A>500)= 0.8660254$**

b) Las componentes tipo B tienen una vida mediana de 750 horas ¿cuál es la probabilidad de que una componente tipo B sacada al azar de una partida de dicho proveedor supere las 500 horas? **Alfa=0.0009242; $P(T_B>500)= 0.62996$**

c) Si montamos un dispositivo como el de la figura ¿cuál es la probabilidad de que el dispositivo supere las 500 horas de funcionamiento?
$P(T_A>500)= 0.866$; $P(T_B>500)= 0.63$; $P(T_{DISPOSITIVO}>500) = 0.472443$



Ejemplo

Ejercicio. Un dispositivo está formado por n componentes independientes conectadas en paralelo. La vida de cada una de dichas componentes se distribuye exponencialmente con media 100 horas. Calcular el valor mínimo que debe tener n si se desea que la fiabilidad del dispositivo a las 200 horas sea superior al 95%.

Tema 4. Distribuciones de Probabilidad Continuas

Dep. Estadística e IO Aplicadas y Calidad, Universidad Politécnica de Valencia

Fuentes:
Material docente : S. Vidal y M.Clemente