DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Examen Final **26-01-2015** **Duración: 3 horas**

PRIMER PARCIAL

---

1. Sea

$$z = \frac{1+ai}{1+i}$$

a)$_{(1p)}$ Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que z sea un número real.

b)$_{(1p)}$ Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que z sea un número imaginario puro.

$$z = \frac{1+ai}{1+i} = \frac{(1+ai)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1+ai-i-ai^2)}{2} = \frac{1+a}{2} + \frac{a-1}{2}i$$

a) Para que z sea un número real la parte imaginaria debe ser cero, por tanto:

$$a-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=1 \ ; \ z=1.$$

b) Para que z sea un número imaginario puro la parte real debe ser cero, por tanto:

$$1+a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1 \ ; \ z=-i.$$

---

2. a)$_{(1.5p)}$ A partir del estudio de la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}$, determina las regiones de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

b)$_{(1.5p)}$ Calcula el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{\log(2x-5)}$.

---

a) El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

Por otro lado su derivada

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}(-2x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x^2} = \left(-2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^{-x^2} = \left(\frac{1-4x^2}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^{-x^2}$$

está definida en $]0, +\infty[$. El signo de f' coincidirá con el de $1-4x^2$, al ser el denominador de f' y la exponencial siempre positivas. Así, teniendo en cuenta que $1-4x^2$ es una parábola con las ramas hacia abajo que se anula en $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$, tenemos un posible extremo relativo en $x_2 = \frac{1}{2}$, ya que $x_1 = -\frac{1}{2} \notin D(f)$ y, además,

$$1-4x^2 > 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

$$1-4x^2 < 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\bigcup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$$

Como la función f sólo está definida en $[0, +\infty[$, podemos concluir que f es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, es estrictamente decreciente en $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ y alcanza un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$. También puedes utilizar el signo de la derivada segunda para justificar ésto último.

b) El domino de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / \ 4-x \geq 0, \ 2x-5 > 0, \ \log(2x-5) \neq 0\}$$

Ahora bien,

$$4-x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 4 \geq x \ \Leftrightarrow \ x \in]-\infty, 4[$$

Respecto a la segunda desigualdad,

$$2x-5>0 \;\Leftrightarrow\; x>\frac{5}{2} \;\Leftrightarrow\; x\in\left]\frac{5}{2},+\infty\right[$$

Por otro lado

$$\log(2x-5)=0 \;\Leftrightarrow\; 2x-5=1 \;\Leftrightarrow\; 2x=6 \;\Leftrightarrow x=3$$

En resumen,

$$D(f)=]-\infty,4]\bigcap\left]\frac{5}{2},+\infty\right[\bigcap(\mathbb{R}-\{3\})=\left]\frac{5}{2},4\right]-\{3\}=\left]\frac{5}{2},3\right[\bigcup\,]3,4]\,.$$

---

3. a)$_{(2p)}$ Calcula el valor exacto de $\int_1^{(\pi+1)^2}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\,dx$.

b)$_{(2p)}$ Aproxima la integral $\int_1^2\frac{dx}{1+x^4}$ utilizando la fórmula de trapecios con $n=4$.

c)$_{(1p)}$ Determina la cota del error cometido mediante la aproximación anterior utilizando la fórmula del error de los trapecios. Utiliza el dato: $M_2=\frac{3}{2}$ para $x\in[1,2]$.

---

a) Hacemos el cambio de variable $t=\sqrt{x}-1$, entonces $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ y $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\cdot dt$. Calculamos los nuevos límites de integración:
para $x=1$, $t=0$, para $x=(\pi+1)^2$, $t=\pi$. Entonces,

$$\int_1^{(\pi+1)^2}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\,dx=2\cdot\int_0^{\pi}\operatorname{sen}t\;dt=-2\cdot[\cos(t)]_0^{\pi}=4$$

Otro cambio de variable con el que se puede resolver también la integral anterior es $t=\sqrt{x}$, aunque evidentemente los límites de integración son diferentes.
b) Utilizamos la fórmula de los trapecios:

$$T_nf=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)+f(b)\right)\;con\;h=\frac{b-a}{n}.$$

en nuestro caso $n=4$,

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Entonces la partición P para el intervalo $[1,2]$ es:

$$P=\left\{1,\;\frac{5}{4},\;\frac{3}{2},\;\frac{7}{4},\;2\right\},$$

y

$$T_4=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+1^4}+2\cdot\left(\frac{1}{1+\left(\frac{5}{4}\right)^4}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^4}+\frac{1}{1+\left(\frac{7}{4}\right)^4}\right)+\frac{1}{1+2^4}\right)=0.207822093$$

c) Aplicando la fórmula del error de los trapecios,

$$E_n\le\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2\;;\;M_2\ge\max_{[a,b]}|f''|\,.$$

En nuestro caso $M_2=\frac{3}{2}$:

$$E_4\le\frac{(2-1)^3}{12\cdot4^2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{128}=0.0078125$$

Por lo tanto el resultado anterior se puede escribir como:

$$\int_1^{(\pi+1)^2}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}\,dx=0.208\pm0.008$$

Con Derive o *Mathematica* puedes comprobar fácilmente que el valor de la integral anterior es 0.203155, por lo que el resultado obtenido es coherente.

SEGUNDO PARCIAL

1. (1.5p) Consideremos las sucesiones de términos generales:

$$\begin{cases} a_n &= \log(2n-1), \\ b_n &= 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n-1}. \end{cases}$$

Calcula el límite $\lim \frac{a_n}{b_n}$. A partir del valor del límite anterior compara los órdenes de magnitud de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\log(2n-1)}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n-1}} = (Stolz) =$$

$$\lim \frac{\overbrace{\log(2(n+1)-1)}^{a_{n+1}} - \overbrace{\log(2n-1)}^{a_n}}{\underbrace{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n})}_{b_{n+1}} - \underbrace{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n-1})}_{b_n}} =$$

$$= \lim \frac{\log\left(\frac{2n+2-1}{2n-1}\right)}{\sqrt{n}} = \lim \frac{\log\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)}{\sqrt{n}} = \lim \log\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \log \lim \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \log 1^0 = 0,$$

a la vista del resultado anterior podemos concluir que $a_n \ll b_n$.

---

2. a)(2.5p) Resuelve la recurrencia homogénea:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \\ a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 4. \end{cases}$$

b)(1p) Halla una solución particular de la recurrencia:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n - 4$$

---

a) La ecuación característica asociada a la recurrencia es:

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

que tiene una raiz doble $x = 2$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea anterior es:

$$a_n^h = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Ahora utilizamos las condiciones de contorno para encontrar el valor de las constantes C_1 y C_2:

$$\textit{para n=1} \Rightarrow a_1 = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 = 0,$$

$$\textit{para n=2} \Rightarrow a_2 = C_1 2^2 + C_2 \cdot 2^2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 4 \cdot C_1 + 8 \cdot C_2 = 4.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos: $C_1 = -1$ y $C_2 = 1$ con lo que la solución es:

$$a_n = -2^n + n \cdot 2^n = 2^n(n-1).$$

b) Una solución particular de la recurrencia no homogénea será:

$$U_n^p = A \cdot n + B.$$

Sustituyéndola en la ecuación podemos obtener los valores de las constantes A y B:

$$\underbrace{(A \cdot n + B)}_{U_n^p} - 4 \cdot \underbrace{(A \cdot (n-1) + B)}_{U_{n-1}^p} + 4 \cdot \underbrace{(A \cdot (n-2) + B)}_{U_{n-2}^p} = n - 4$$

hacemos operaciones,

$$-4 \cdot A + B + A \cdot n = n - 4$$

Igualando los coeficientes con el mismo grado en n tenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4 \cdot A + B & = & -4, \\ A & = & 1. \end{array} \right.$$

Resolviendolo $A = 1$ y $B = 0$. Con esto una solución particular de la ecuación homogénea es:

$$U_n^p = n.$$

---

3. Considera la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n} \cdot x^n$$

a) (1.5p) Aproxima $f\left(\frac{-1}{4}\right)$ usando el criterio de Leibniz de manera que el error cometido en dicha aproximación sea menor que 10^{-2}.

b) (1.5p) Deriva la serie de potencias inicial. ¿Dónde converge? Calcula la suma donde sea convergente.

c) (1p) Integra el resultado anterior para obtener el valor explícito de $f(x)$.

d) (1p) A partir del resultado anterior calcula el valor exacto de $f\left(\frac{-1}{4}\right)$ y compáralo con la aproximación de a).

---

a)

$$f\left(\frac{-1}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n} \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^n =$$

simplificamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^n \cdot (-1)^n}{n \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$$

es una serie alternada, y cumple las condiciones de Leibniz. Por lo tanto podemos calcular cuantos términos necesitamos utilizar para obtener una suma parcial con un error menor que 10^{-2}. Sabemos que el error siempre es menor que el valor absoluto del primer término que no utilizamos en la aproximación. Supongamos que hacemos la suma hasta el término N, entonces el error asociado es:

$$E_N < \left| \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1) \cdot 2^{N+1-1}} \right| = \frac{1}{(N+1) \cdot 2^N}$$

queremos que $E_N < 10^{-2}$ por tanto:

$$E_N < \frac{1}{(N+1) \cdot 2^N} < 10^{-2}$$

Resolvemos la ecuación dándole valores a N:
para $N = 1$:

$$E_1 < \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} = 0.25,$$

para $N = 2$:

$$E_2 < \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12} = 0.0833333,$$

para $N = 3$:

$$E_3 < \frac{1}{4 \cdot 2^3} = \frac{1}{32} = 0.03125,$$

para $N = 4$:

$$E_4 < \frac{1}{5 \cdot 2^4} = \frac{1}{80} = 0.0125,$$

para $N = 5$:

$$E_5 < \frac{1}{6 \cdot 2^5} = \frac{1}{192} = 0.00520833 < 10^{-2},$$

por lo tanto necesitamos sumar 5 términos para asegurar la precisión deseada.

$$s_5 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{32} - \frac{1}{80} = \frac{-391}{480} = -0.81 \pm 10^{-2}$$

b) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n} \cdot x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n} \cdot \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} \cdot x^{n-1} =$$

vamos a utilizar la fórmula de la suma de la serie geométrica, por eso vamos a hacer algunas simplificaciones para ver cual es la razón de la serie:

$$= 2^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot x^{n-1} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2 \cdot x)^{n-1} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2 \cdot x)^n$$

es la serie geométrica de razón $r = 2x$, es convergente para $|r| < 1$, por lo tanto:

$$|2x| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4 \cdot \left(\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{4}{1-2x} & si\ |x| < \frac{1}{2}. \\ \\ divergente & si\ |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{4}{1-2x}dx = -2 \cdot \log(1-2x) + C.$$

La integral anterior es inmediata, si no lo ves claro prueba a hacer el cambio de variable $t = 1 - 2x$. Calculamos el valor de la constante calculando $f(0)$:

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n} \cdot 0^n = 0$$

por lo tanto:

$$f(0) = -2 \cdot \log(1) + C = 0 \;\rightarrow\; C = 0$$

y

$$f(x) = -2 \cdot \log(1-2x) = 2 \cdot \log\left(\frac{1}{1-2x}\right)$$

d) Utilizando la fórmula anterior:

$$f\left(\frac{-1}{4}\right) = 2 \cdot \log\left(\frac{1}{1-2\left(\frac{-1}{4}\right)}\right) = 2 \cdot \log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) = 2 \cdot \log\left(\frac{2}{3}\right) = -0.81093$$

Podemos comprobar que el resultado esta comprendido dentro de la cota de error encontrada en el apartado a), $f\left(\frac{-1}{4}\right) = -0.81 \pm 10^{-2}$.