Exercicis

Exercici 1

Es demana obtenir l'autòmat de posició de cadascuna de las expressions regulars següents:

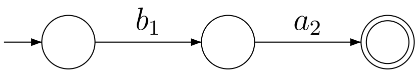
(a) $r = (ba)^*b$

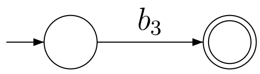
Solució:

El primer pas de l'algorisme consisteix a obtenir la versió linearitzada de r:

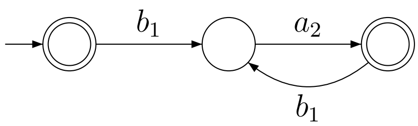
$$\overline{r} = (b_1a_2)^*b_3$$

Els autòmats locals estàndards per a les subexpressions b_1a_2 i b_3 són:

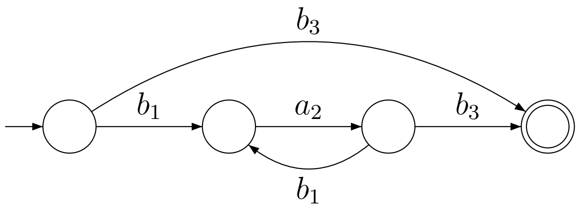




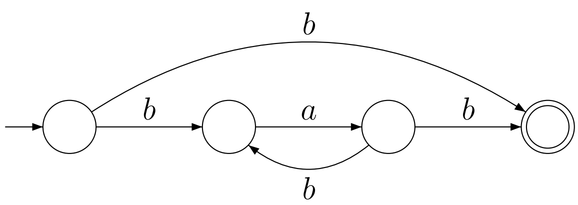
L'autòmat local estàndard per a l'expressió $(b_1a_2)^*$ queda:



Per la qual cosa l'autòmat per a $\overline{r}$ queda:



sent l'autòmat de posició de r el que s'obté en eliminar els subíndex dels símbols de l'alfabet linealitzat:



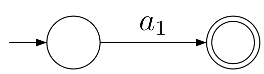
(b) $r = a(a + b)^*$

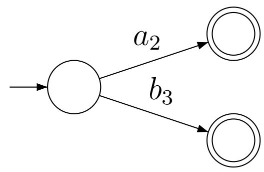
Solució:

El primer pas de l'algorisme consisteix a obtenir la versió linearitzada de r:

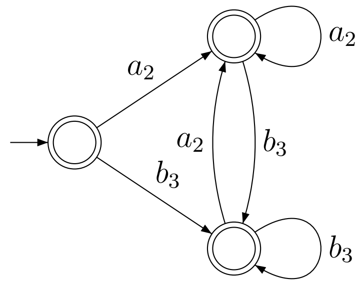
$$\overline{r} = a_1(a_2 + b_3)^*$$

Els autòmats locals estàndards que acsepten els llenguatges representats per les subexpressions a_1 i $a_2 + b_3$ són:

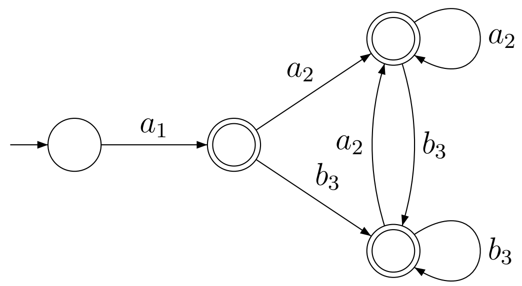




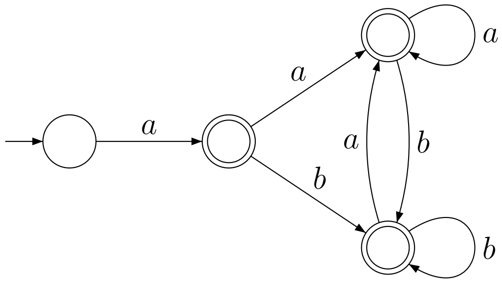
L'autòmat local estàndard per a l'expressió $(a_2 + b_3)^*$ queda:



Sent l'autòmat que accepta $L(\overline{r})$ el següent:



i l'autòmat de posició que accepta $L(r)$ el següent:



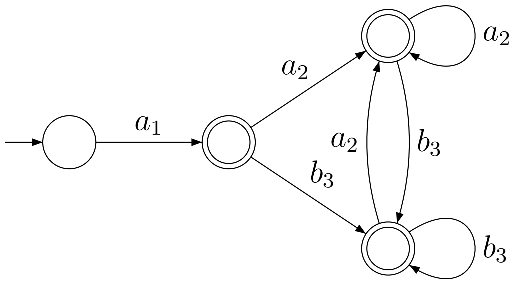
(c) $r = a(a+b)^*b$

Solució:

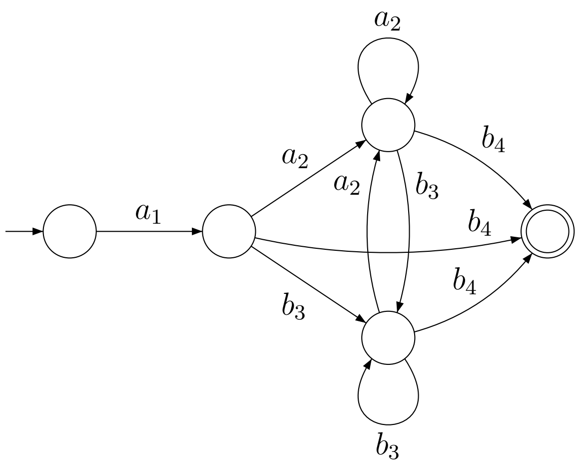
La versió linearitzada de r:

$$\overline{r} = a_1(a_2 + b_3)^* b_4$$

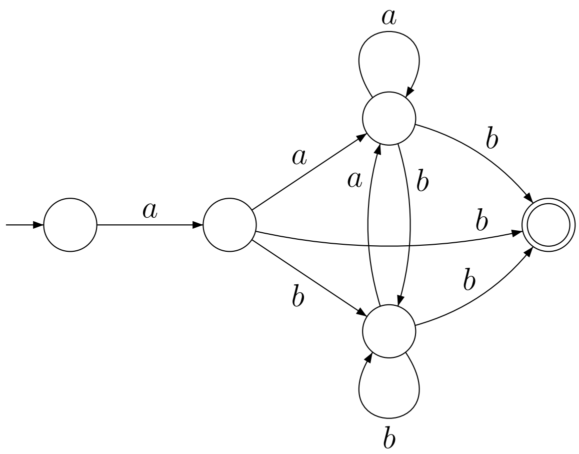
L'autòmat que accepta $L(a_1(a_2+b_3)^*)$ és el següent:



Sent l'autòmat que accepta $L(\overline{r})$ el següent:



i l'autòmat que accepta $L(r)$ el següent:

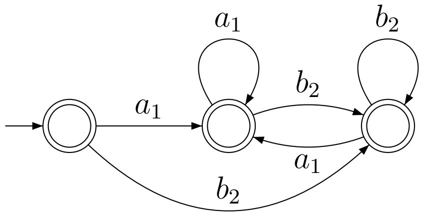


(d) $r = (a^*b^*)^* + (a + b)^*$

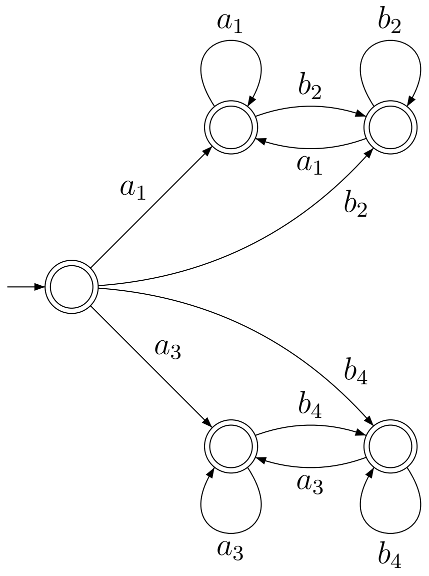
Solució:

$$\overline{r} = (a_1^*b_2^*)^* + (a_3 + b_4)^*$$

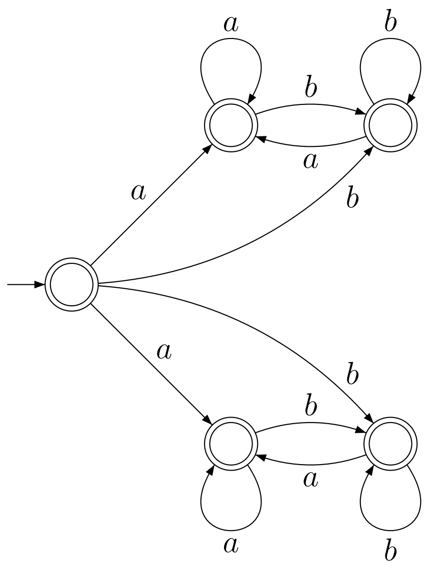
L'autòmat local estàndard per a l'expressió $(a_1^*b_2^*)^*$ queda:



Amb la qual cosa l'autòmat que accepta $L(\overline{r})$ queda:



i l'autòmat que accepta $L(r)$ el següent:

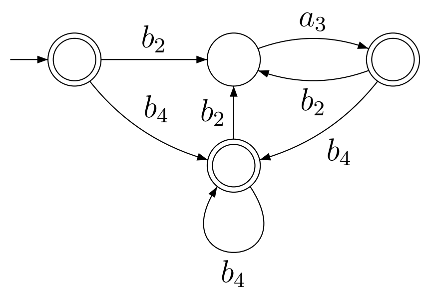


(e) $r = a(ba + b)^*$

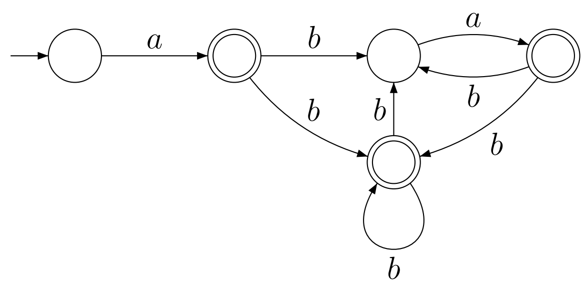
Solució:

$$\overline{r} = a_1(b_2a_3 + b_4)^*$$

L'autòmat local estàndard per a $(b_2a_3 + b_4)^*$



i l'autòmat de posició per a $L(r)$



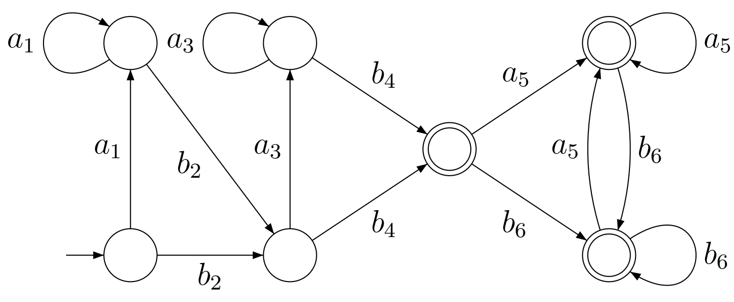
(f) $r = a^*ba^*b(a+b)^*$

Solució:

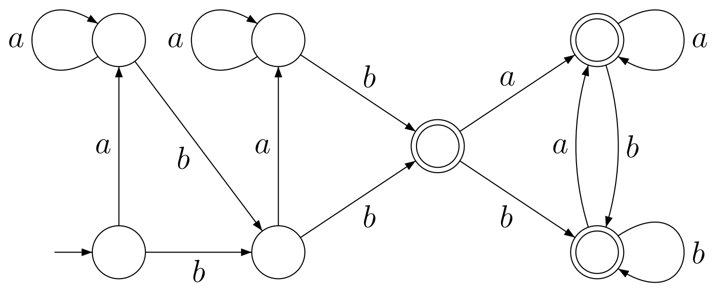
La corresponent expressión linearitzada és:

$$\overline{r} = a_1^* b_2 a_3^* b_4 (a_5 + b_6)^*$$

i l'autòmat local estàndard que accepta $L(\overline{r})$ el següent:



Una vegada aplicat l'homomorfisme d'eliminació de subíndex, l'autòmat de posició queda:

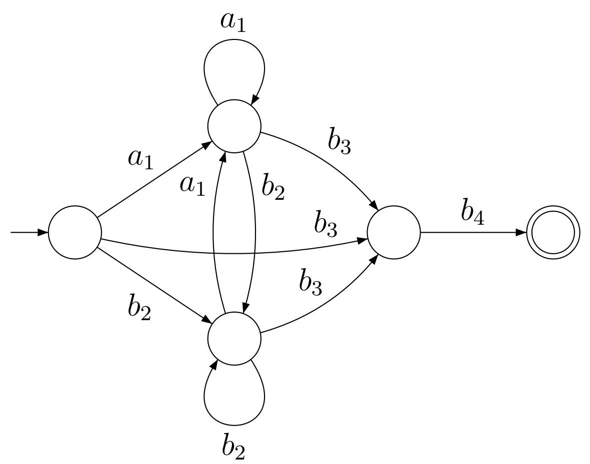


(g) $r = (a+b)^*bb + (a+b)^*a$

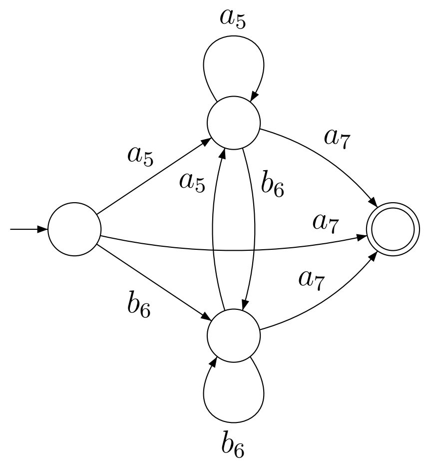
Solució:

$$\overline{r} = (a_1 + b_2)^* b_3 b_4 + (a_5 + b_6)^* a_7$$

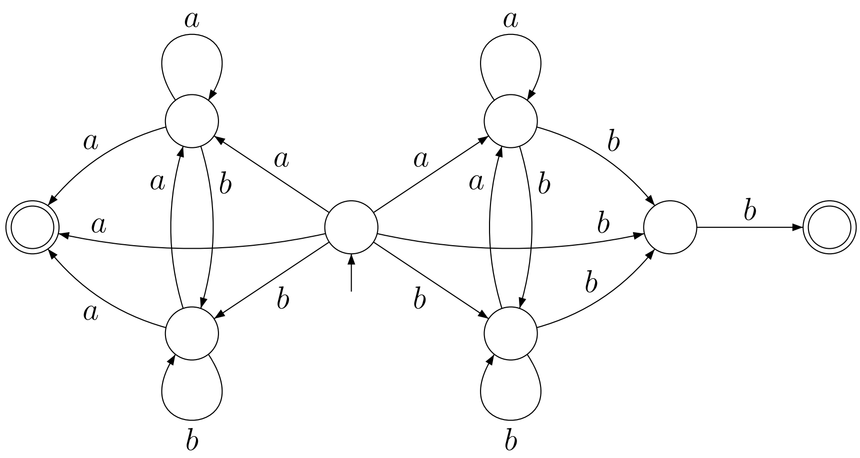
L'autòmat local estàndard que accepta $L((a_1 + b_2)^* b_3 b_4)$ és el següent:



i a continuació es mostra l'autòmat local estàndard que accepta el llenguatge representat per $(a_5 + b_6)^* a_7$:



L'autòmat de posició que accepta $L(r)$ és:

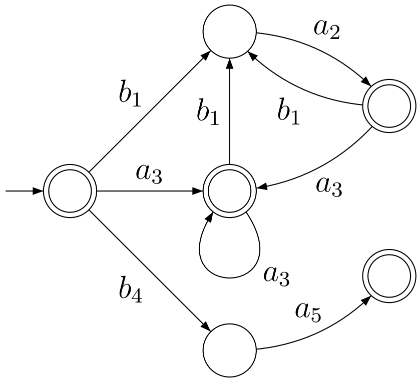


(h) $r = ((ba + a^*)^* + ba)(ab)^*$

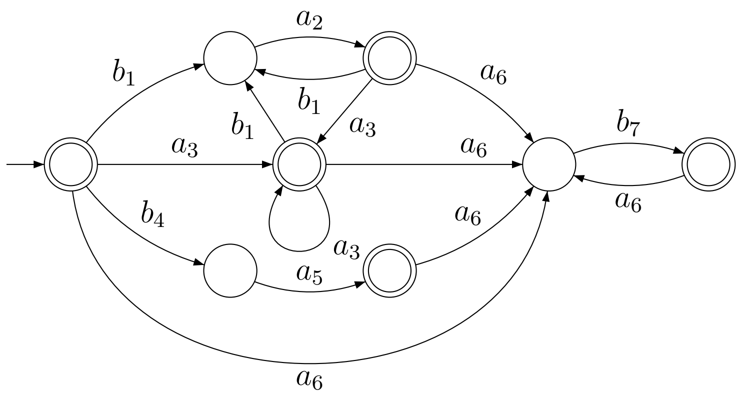
Solució:

$$\overline{r} = ((b_1a_2 + a_3^*)^* + b_4a_5)(a_6b_7)^*$$

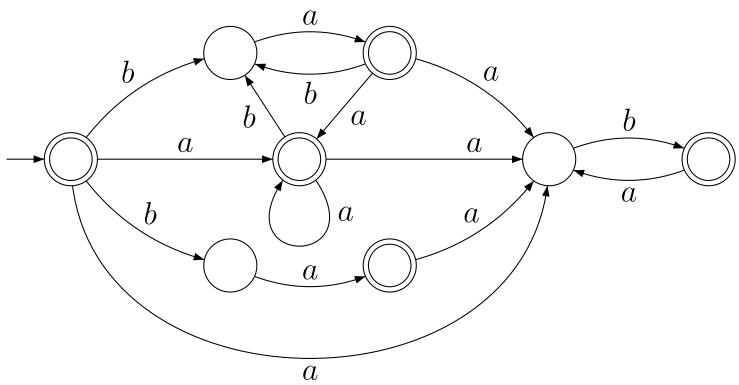
L'autòmat local estàndard que accepta $L((b_1a_2 + a_3^*)^* + b_4a_5)$ és el següent:



l'autòmat local estàndard que accepta $L(\overline{r})$ el següent:



l'autòmat de posició que accepta $L(r)$ és el següent:



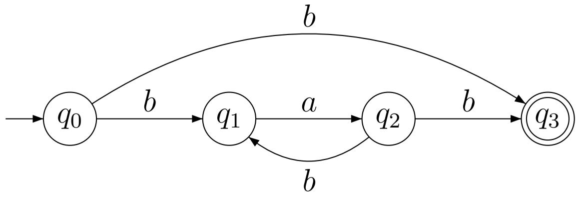
Exercici 2

Es demana obtenir l'autòmat follow de cadascuna de les expressions regulars següents:

(a) $r = (ba)^*b$

Solució:

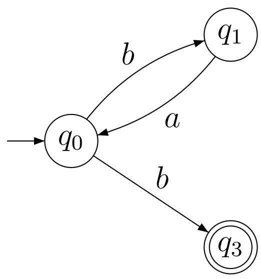
El autómata de posición de r es el siguiente:



la siguiente tabla muestra los seguidores de cada estado:

Q	*seguidores*
q_0	$\{q_1, q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_1, q_3\}$
q_3	$\emptyset$

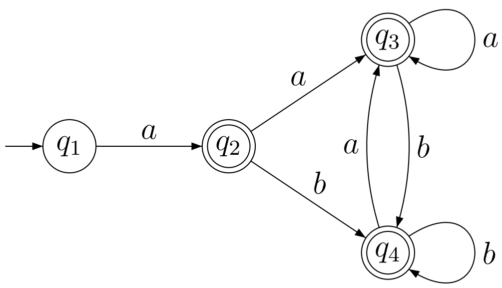
con lo que el autómata follow queda como sigue:



(b) $r = a(a + b)^*$

Solució:

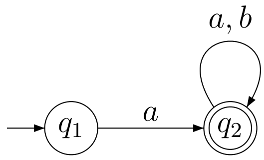
El autómata de posición que acepta $L(r)$ el siguiente:



a continuación se muestra la tabla con los seguidores de cada estado:

Q	*seguidores*
q_1	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3, q_4\}$
q_3	$\{q_3, q_4\}$
q_4	$\{q_3, q_4\}$

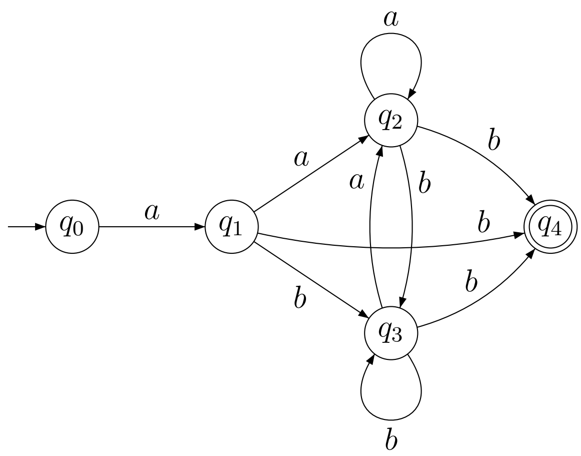
por lo tanto, el autómata follow para r queda:



(c) $r = a(a + b)^*b$

Solució:

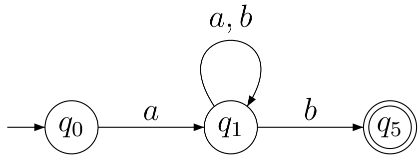
El autómata que acepta $L(r)$ el siguiente:



la tabla con los seguidores de cada estado se muestra a continuación:

Q	*seguidores*
q_0	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2, q_3, q_4\}$
q_2	$\{q_2, q_3, q_4\}$
q_3	$\{q_2, q_3, q_4\}$
q_4	$\emptyset$

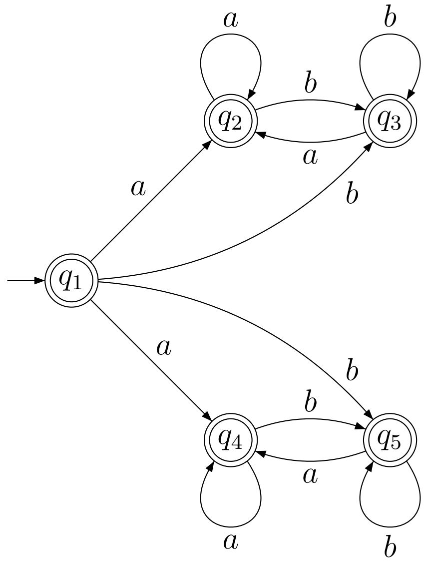
con lo que el autómata follow que acepta $L(r)$ queda como sigue:



(d) $r = (a^*b^*)^* + (a+b)^*$

Solució:

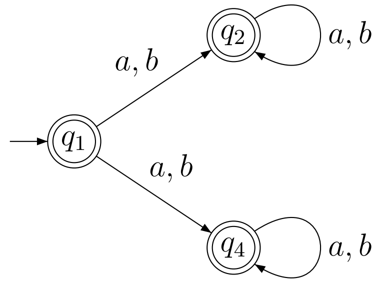
El autómata que acepta $L(r)$ el siguiente:



la tabla de seguidores de cada estado:

Q	$seguidores$
q_1	$\{q_2, q_3, q_4, q_5\}$
q_2	$\{q_2, q_3\}$
q_3	$\{q_2, q_3\}$
q_4	$\{q_4, q_5\}$
q_5	$\{q_4, q_5\}$

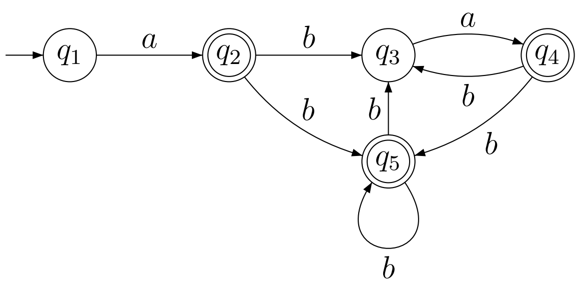
y el autómata follow que acepta $L(r)$:



(e) $r = a(ba + b)^*$

Solució:

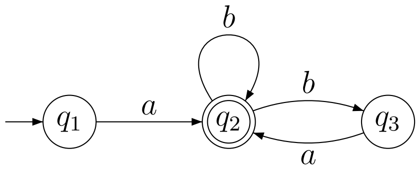
El autómata de posición para $L(r)$



teniendo en cuenta los seguidores de cada estado:

Q	$seguidores$
q_1	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3, q_5\}$
q_3	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_3, q_5\}$
q_5	$\{q_3, q_5\}$

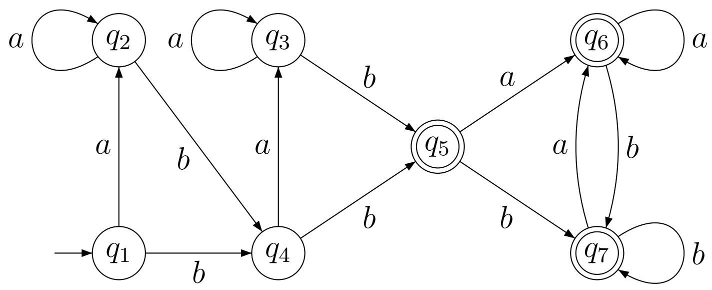
el autómata follow que acepta el lenguaje $L(r)$ se muestra a continuación:



(f) $r = a^*ba^*b(a + b)^*$

Solució:

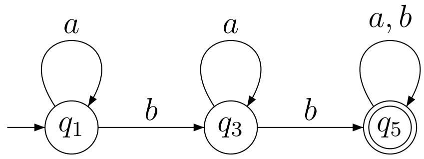
El autómata de posición queda es el siguiente:



y la tabla de seguidores la siguiente:

Q	*seguidores*
q_1	$\{q_2, q_4\}$
q_2	$\{q_2, q_4\}$
q_3	$\{q_3, q_5\}$
q_4	$\{q_3, q_5\}$
q_5	$\{q_6, q_7\}$
q_6	$\{q_6, q_7\}$
q_7	$\{q_6, q_7\}$

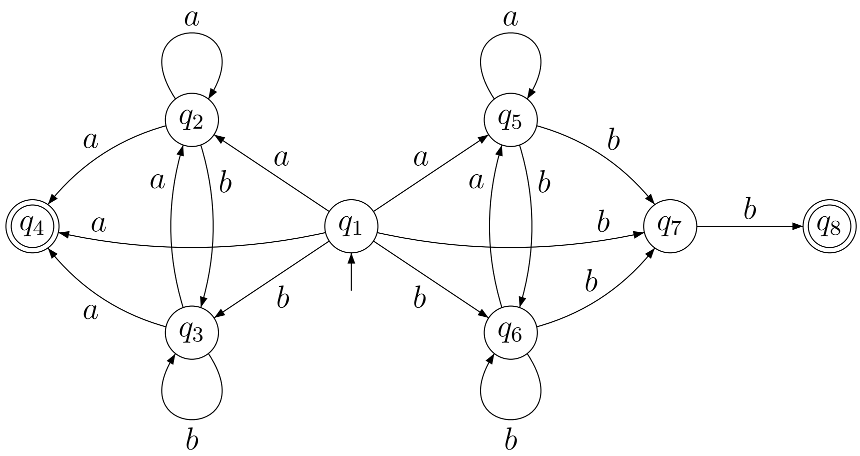
finalmente, el autómata follow que acepta el lenguaje $L(r)$ el que se muestra a continuación:



(g) $r = (a + b)^*bb + (a + b)^*a$

Solució:

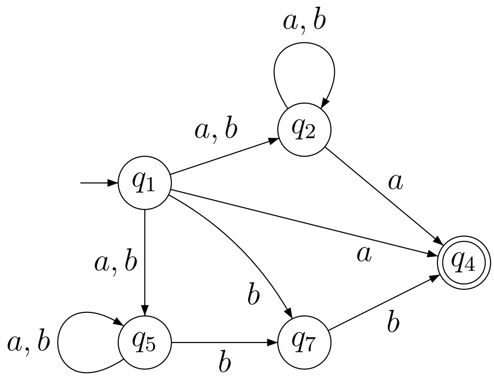
A continuación se muestra el autómata de posición que acepta $L(r)$ es:



y la tabla de seguidores de cada estado:

Q	*seguidores*
q_1	$\{q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$
q_2	$\{q_2, q_3, q_4\}$
q_3	$\{q_2, q_3, q_4\}$
q_4	$\emptyset$
q_5	$\{q_5, q_6, q_7\}$
q_6	$\{q_5, q_6, q_7\}$
q_7	$\{q_8\}$
q_8	$\emptyset$

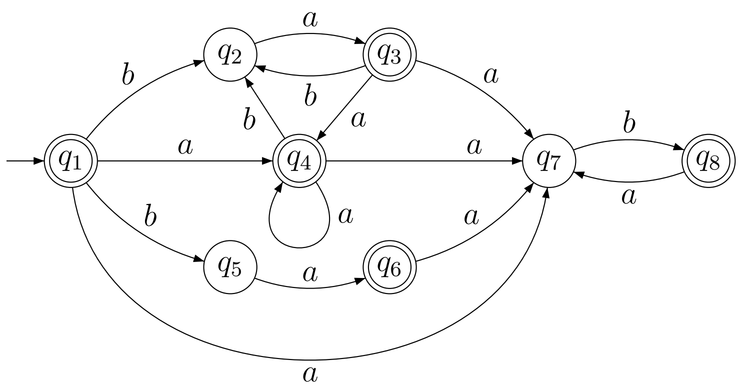
finalmente, el autómata follow que acepta el lenguaje $L(r)$ el que se muestra a continuación:



(h) $r = ((ba + a^*)^* + ba)(ab)^*$

Solució:

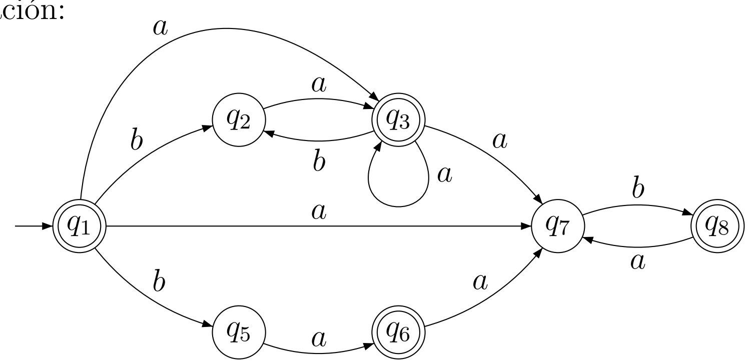
El autómata de posición que acepta $L(r)$ es el siguiente:



y la tabla de seguidores de cada estado:

Q	*seguidores*
q_1	$\{q_2, q_4, q_5, q_7\}$
q_2	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_2, q_4, q_7\}$
q_4	$\{q_2, q_4, q_7\}$
q_5	$\{q_6\}$
q_6	$\{q_7\}$
q_7	$\{q_8\}$
q_8	$\{q_7\}$

con lo que el autómata follow que acepta el lenguaje $L(r)$ es el que se muestra a continuación:



Exercici 3

Es demana obtenir, per a cadascuna de les expressions regulars següents, un AFD utilitzant l'algorisme de Brzozowski.

(a) $r = a(ba + b)^*$

Solució:

Inicializamos el estado inicial con r. El estado inicial no es final ya que $\lambda \notin L(r)$.

Derivamos a continuación r respecto cada símbolo del alfabeto.

$$\begin{aligned} a^{-1}a(ba+b)^* &= (a^{-1}a)(ba+b)^* = \\ &= \lambda(ba+b)^* = (ba+b)^* = r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}a(ba+b)^* &= (b^{-1}a)(ba+b)^* = \\ &= \emptyset(ba+b)^* = \emptyset = r_2 \end{aligned}$$

ambas expresiones denotan lenguajes que no han aparecido previamente, por lo tanto añadimos nuevos estados (r_1 y r_2) y transiciones ($\delta(r,a) = r_1$ y $\delta(r,b) = r_2$) al autómata. Añadimos también r_1 al conjunto de estados finales ya que $\lambda \in L(r_1)$. Continuamos derivando:

$$\begin{aligned} a^{-1}r_1 &= a^{-1}(ba+b)^* = (a^{-1}(ba+b))(ba+b)^* = \\ &= (a^{-1}(ba) + a^{-1}b)(ba+b)^* = \emptyset = r_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}r_1 &= b^{-1}(ba+b)^* = (b^{-1}(ba+b))(ba+b)^* = \\ &= (b^{-1}(ba) + b^{-1}b)(ba+b)^* = \\ &= (a+\lambda)(ba+b)^* = r_3 \end{aligned}$$

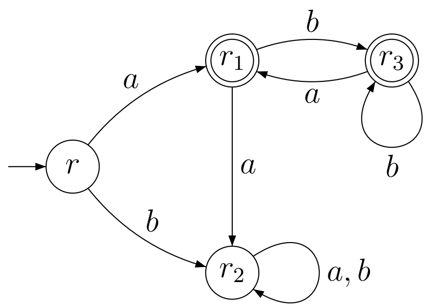
$$a^{-1}r_2 = b^{-1}r_2 = \emptyset = r_2$$

Actualizamos Q, δ y F. Derivamos ahora r_3 respecto los símbolos del alfabeto:

$$\begin{aligned} a^{-1}r_3 &= a^{-1}(a+\lambda)(ba+b)^* = (a^{-1}(a+\lambda))(ba+b)^* + (a^{-1}(ba+b)^*) = \\ &= \lambda(ba+b)^* + \emptyset = r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}r_3 &= b^{-1}(a+\lambda)(ba+b)^* = (b^{-1}(a+\lambda))(ba+b)^* + (b^{-1}(ba+b)^*) = \\ &= \emptyset + (b^{-1}(ba+b)^*) = r_3 \end{aligned}$$

Con lo que el diagrama de estados del autómata es:



(b) $r = b(ab^*a)^*b$

Solució:

El estado inicial se inicializa con r. La cadena vacía no está incluida en el lenguaje $L(r)$, por lo que el estado inicial no es final. Derivamos a continuación r respecto cada símbolo del alfabeto.

$$a^{-1}r = a^{-1}b(ab^*a)^*b = (a^{-1}b)(ab^*a)^*b = \emptyset = r_1$$

$$b^{-1}r = b^{-1}b(ab^*a)^*b = (b^{-1}b)(ab^*a)^*b = (ab^*a)^*b = r_2$$

actualizamos el autómata con los dos nuevos estados y las correspondientes transiciones. El conjunto de finales no se actualiza y continuamos derivando:

$$a^{-1}r_1 = b^{-1}r_1 = \emptyset = r_1$$

$$\begin{aligned} a^{-1}r_2 &= a^{-1}(ab^*a)^*b = \\ &= (a^{-1}(ab^*a)^*)b + (a^{-1}b) = \\ &= (a^{-1}ab^*a)(ab^*a)^*b + \emptyset = \\ &= b^*a(ab^*a)^*b = r_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}r_2 &= b^{-1}(ab^*a)^*b = \\ &= (b^{-1}(ab^*a)^*)b + (b^{-1}b) = \\ &= \emptyset + \lambda = \lambda = r_4 \end{aligned}$$

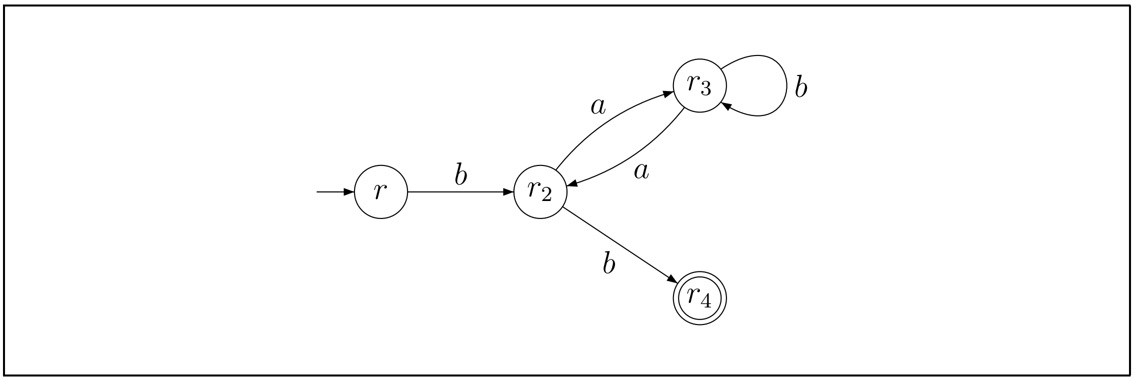
Actualizamos Q, δ y F ($r_4 \in F$). Derivamos ahora r_3 y r_4 respecto los símbolos del alfabeto:

$$\begin{aligned} a^{-1}r_3 &= a^{-1}b^*a(ab^*a)^*b = \\ &= (a^{-1}b^*)a(ab^*a)^*b + (a^{-1}a(ab^*a)^*b) = \\ &= (a^{-1}b)b^*a(ab^*a)^*b + (ab^*a)^*b = \\ &= (ab^*a)^*b = r_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}r_3 &= b^{-1}b^*a(ab^*a)^*b = \\ &= (b^{-1}b^*)a(ab^*a)^*b + (b^{-1}a(ab^*a)^*b) = \\ &= (b^{-1}b)b^*a(ab^*a)^*b + \emptyset = \\ &= b^*a(ab^*a)^*b = r_3 \end{aligned}$$

$$a^{-1}r_4 = b^{-1}r_4 = \emptyset = r_1$$

Con lo que obtenemos el siguiente autómata:



(c) $r = (ab + b)((aa)^*(a + ba + \lambda))$

Solució:

El estado inicial corresponde a $\lambda^{-1}r = r$. El estado inicial no es final ya que $\lambda \notin L(r)$. Derivamos a continuación r respecto cada símbolo del alfabeto.

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab+b)(aa)^*(a+ba+\lambda) &= (a^{-1}(ab+b))(aa)^*(a+ba+\lambda) = \\ &= b(aa)^*(a+ba+\lambda) = r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}(ab+b)(aa)^*(a+ba+\lambda) &= (b^{-1}(ab+b))(aa)^*(a+ba+\lambda) = \\ &= (aa)^*(a+ba+\lambda)) = r_2 \end{aligned}$$

actualizamos el autómata con los dos nuevos estados y las correspondientes transiciones. Añadimos r_2 al conjunto de finales y continuamos derivando:

$$\begin{aligned} a^{-1}r_1 &= a^{-1}b(aa)^*(a+ba+\lambda) = (a^{-1}b)(aa)^*(a+ba+\lambda) = \\ &= \emptyset = r_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}r_1 &= b^{-1}b(aa)^*(a+ba+\lambda) = (b^{-1}b)(aa)^*(a+ba+\lambda) = \\ &= (aa)^*(a+ba+\lambda) = r_2 \end{aligned}$$

Actualizamos Q, δ y F. Derivamos ahora r_2 y r_3 respecto los símbolos del alfabeto:

$$\begin{aligned} a^{-1}r_2 &= a^{-1}(aa)^*(a+ba+\lambda) = \\ &= (a^{-1}(aa)^*)(a+ba+\lambda) + (a^{-1}(a+ba+\lambda) = \\ &= (a^{-1}aa)(aa)^*(a+ba+\lambda) + \lambda = \\ &= a(aa)^*(a+ba+\lambda) + \lambda = r_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{-1}r_2 &= b^{-1}(aa)^*(a+ba+\lambda) = \\ &= (b^{-1}(aa)^*)(a+ba+\lambda) + (b^{-1}(a+ba+\lambda) = \\ &= (b^{-1}aa)(aa)^*(a+ba+\lambda) + a = \\ &= \emptyset + a = a = r_5 \end{aligned}$$

$$a^{-1}r_3 = b^{-1}r_3 = \emptyset = r_3$$

Volvemos a actualizar Q, δ y F (r_4). Derivamos ahora r_4 y r_5 respecto los símbolos del alfabeto:

$$\begin{aligned}
a^{-1}r_4 &= a^{-1}(a(aa)^*(a+ba+\lambda)+\lambda) = \\
&= (a^{-1}a(aa)^*(a+ba+\lambda)) + (a^{-1}\lambda) = \\
&= (aa)^*(a+ba+\lambda) + \emptyset = r_2
\end{aligned}$$

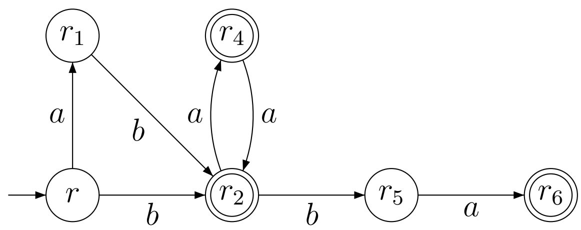
$$\begin{aligned}
b^{-1}r_4 &= b^{-1}(a(aa)^*(a+ba+\lambda)+\lambda) = \\
&= (b^{-1}a(aa)^*(a+ba+\lambda)) + (b^{-1}\lambda) = \\
&= \emptyset = r_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^{-1}r_5 &= \lambda = r_6 \\
b^{-1}r_5 &= \emptyset = r_3
\end{aligned}$$

Finalmente, derivamos r_6:

$$a^{-1}r_6 = b^{-1}r_6 = \emptyset = r_3$$

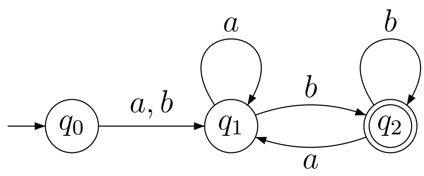
Con lo que el diagrama de estados del autómata es:



Exercici 4

Es demana obtenir una expressió regular per als llenguatges acceptats per cadascun dels autòmats següents:

(a)



Solució:

Construimos el sistema de ecuaciones para el autómata:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_1 = (a+b)X_1 \\ X_1 = aX_1 + bX_2 \\ X_2 = aX_1 + bX_2 + \lambda \end{cases}$$

Aplicando el lema de Arden obtenemos que $X_2 = b^*(aX_1 + \lambda) = b^*aX_1 + b^*$. Sustituyendo en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X_0 = (a+b)X_1 \\ X_1 = aX_1 + bb^*aX_1 + b^* = (a + bb^*a)X_1 + bb^* \end{cases}$$

Aplicando de nuevo el lema de Arden $X_1 = (a + bb^*a)^*bb^*$. Sustituyendo en la ecuación de X_0 obtenemos la expresión regular para el lenguaje que buscamos:

$$(a+b)(a+bb^*a)^*bb^*$$

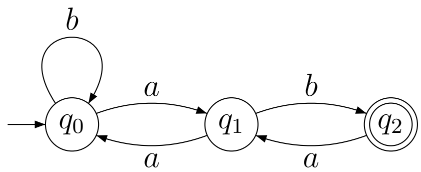
Nota:
En ocasiones es interesante simplificar las expresiones obtenidas. En este ejercicio, la expresión regular obtenida mediante Arden para X_1 puede simplificarse y obtener una expresión más reducida, de este modo:

$$\begin{aligned} X_1 &= (a+bb^*a)^*bb^* = ((\lambda + bb^*)a)^*bb^* = \\ &= (b^*a)^*bb^* = (b^*a)^*b^*b = \\ &= (a+b)^*b \end{aligned}$$

con lo que la expresión que se buscaba queda:

$$(a+b)(a+b)^*b$$

(b)



Solució:

Sistema de ecuaciones para el autómata:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 \\ X_1 = aX_0 + bX_2 \\ X_2 = aX_1 + \lambda \end{cases}$$

sustitituyendo directamente el valor de X_2, el sistema queda:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 \\ X_1 = aX_0 + b(aX_1 + \lambda) = aX_0 + baX_1 + b \end{cases}$$

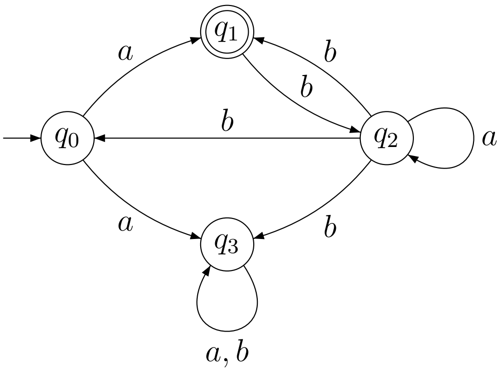
aplicando el lema de Arden se obtiene $X_1 = (ba)^*(aX_0 + b)$ con lo que:

$$\begin{aligned} X_0 &= a(ba)^*(aX_0 + b) + bX_0 = \\ &= a(ba)^*aX_0 + a(ba)^*b + bX_0 = \\ &= (a(ba)^*a + b)X_0 + a(ba)^*b \end{aligned}$$

y aplicando una última vez el lema de Arden, obtenemos la expresión regular:

$$(a(ba)^*a + b)^*a(ba)^*b$$

(c)



Solució:

Sistema de ecuaciones para el autómata:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + aX_3 \\ X_1 = bX_2 + \lambda \\ X_2 = bX_0 + bX_1 + aX_2 + bX_3 \\ X_3 = (a + b)X_3 \end{cases}$$

Aplicando el lema de Arden se obtiene que $X_3 = (a + b)^*\emptyset = \emptyset$, por lo que podemos simplificar el sistema de ecuaciones que queda:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 \\ X_1 = bX_2 + \lambda \\ X_2 = bX_0 + bX_1 + aX_2 \end{cases}$$

aplicando de nuevo el lema de Arden, obtenemos:

$$X_2 = a^*(bX_0 + bX_1) = a^*bX_0 + a^*bX_1$$

sustituyendo de nuevo en el sistema:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 \\ X_1 = b(a^*bX_0 + a^*bX_1) + \lambda \ = \ ba^*bX_0 + ba^*bX_1 + \lambda \end{cases}$$

de nuevo aplicando Arden:

$$X_1 \ = \ (ba^*b)^*(ba^*bX_0 + \lambda) \ = \ ba^*b(ba^*b)^*X_0 + (ba^*b)^*$$

con lo que:

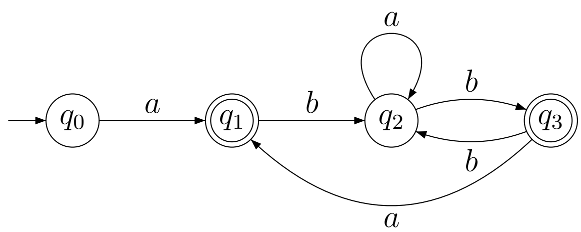
$$X_0 \ = \ aba^*b(ba^*b)^*X_0 + a(ba^*b)^*$$

y aplicando el lema de Arden por última vez:

$$X_0 \ = \ (aba^*b(ba^*b)^*)^*a(ba^*b)^*$$

que representa el lenguaje aceptado por el autómata.

(d)



Solució:

Sistema de ecuaciones para el autómata:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 \\ X_1 = bX_2 + \lambda \\ X_2 = aX_2 + bX_3 \\ X_3 = bX_2 + aX_1 + \lambda \end{cases}$$

sustituyendo el valor de X_3 en el sistema:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 \\ X_1 = bX_2 + \lambda \\ X_2 = aX_2 + b(aX_1 + bX_2 + \lambda) \ = \ baX_1 + (a+bb)X_2 + b \end{cases}$$

sustituimos también el valor de X_1 en el sistema:

$$\begin{cases} X_0 = a(bX_2 + \lambda) \ = \ abX_2 + a \\ X_2 = ba(bX_2 + \lambda) + (a+bb)X_2 + b \ = \ (a+bab+bb)X_2 + b + ba \end{cases}$$

aplicando el lema de Arden se obtiene $X_2 = (a+bab+bb)^*(b+ba)$. Sustituyendo por último en la última ecuación obtenemos la expresión regular para el lenguaje:

$$ab(a+bab+bb)^*(b+ba) + a$$