PROBLEMAS RESUELTOS TEMA 4[1]

4.1 Empresa de fabricación de juguetes con costes fijos. Una empresa de fabricación de juguetes está considerando la puesta en marcha de tres nuevos juguetes (1, 2 y 3) para su posible inclusión en la próxima campaña. La preparación de instalaciones para la fabricación de estos modelos tendría unos costes fijos de 25000€, 35000€ y 30000€ respectivamente, y un beneficio unitario de 10€, 15€ y 13€ respectivamente.

La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirían los juguetes, dependiendo la elección de la maximización del beneficio.

El número de horas que se precisa para producir cada ratón en cada planta es:

	Juguete 1	Juguete 2	Juguete 3
Planta 1	5	4	6
Planta 2	4	2	2
Planta 3	3	3	2

Las plantas disponen al día 500, 600 y 630 horas de producción respectivamente.

La gerencia ha decidido desarrollar al menos uno de los tres juguetes.

Modelizar el problema **utilizando programación lineal entera** para maximizar el beneficio total.

4.2 Planificación de la producción con capacidades variables. Una compañía produce cuatro tipos de productos: P1, P2, P3 y P4. Cada uno de ellos pasa por tres plantas de producción: planta A, planta B y planta C. En cada planta se dispone de una capacidad de 10000 horas semanales de trabajo.
La tabla siguiente muestra el ingreso unitario, en euros, y las horas de trabajo necesarias en cada planta para la producción de una unidad de cada uno de los productos.

---

[1] Este material es un extracto del Material Docente de Vicent Giner (DEIOAC-UPV).

	P1	P2	P3	P4
Ingreso unitario	6 €	7 €	8 €	9 €
Planta A	5 horas	3 horas	6 horas	4 horas
Planta B	4 horas	6 horas	3 horas	5 horas
Planta C	5 horas	6 horas	3 horas	2 horas

La empresa ha decidido producir como máximo tres de esos productos, sabiendo que los costes fijos de producción de cada uno de ellos son 2800, 4000, 3800 y 4100 €, respectivamente. Además ha decidido que:

* Se puede producir P2 solo si se produce P3,
* Si no se produce P4 entonces se deben producir P1 y P2.

a) Formular un modelo de **programación lineal entera**, para decidir qué productos deben ser producidos y cuántas unidades de cada uno de ellos, si la empresa pretende maximizar beneficios.

b) La empresa va a ampliar 1000 horas de trabajo en dos de sus plantas. Formular el nuevo modelo de programación lineal entera, para decidir en qué plantas se debe realizar esta ampliación.

4.3 Selección óptima de nuevos empleados. Una empresa dedicada a la venta de maquinaria industrial tiene como clientes principales a 10 grandes factorías, distribuidas por todo el territorio nacional. Para contrarrestar las acciones de la competencia, la empresa se plantea contratar a varios ingenieros recién licenciados que realicen tareas comerciales y visiten dichas factorías regularmente. Se han preseleccionado 8 candidatos, que según su zona de residencia y su currículum cobrarían un sueldo distinto y podrían visitar unas determinadas explotaciones, en caso de ser contratados.

En la siguiente tabla se indica el sueldo de cada candidato en caso de ser contratado, y las explotaciones que podría visitar.

Candidato	Sueldo (euros/mes)	Clientes que podría visitar
1	1.200	1 , 4 , 5
2	2.000	3 , 6
3	1.500	2 , 5 , 6
4	2.500	2 , 3 , 7 , 8
5	1.750	6 , 7 , 9
6	1.500	1 , 5 , 7
7	1.300	8 , 10
8	1.900	4 , 9 , 10

a) Plantea un modelo de programación lineal binaria que permita a los responsables de la empresa decidir a qué ingenieros contratar, de modo que todos los clientes puedan ser visitados con el mínimo coste posible.

b) El cliente 6 está muy descontento con el trato recibido por la empresa en el pasado, así que los responsables se plantean asignarle al menos dos comerciales. Modifica el modelo para que contemple esta nueva condición.

4.4 Establecimiento de turnos de vigilancia. En un parque natural deben establecerse turnos de vigilancia para las 24 horas del día, todos los días de la semana.

Con el fin de organizar mejor los turnos, un día se ha dividido en seis franjas de 4 horas: de las 00:00 a las 04:00, de 04:00 a 08:00, de 08:00 a 12:00, etc. En cada franja horaria se han definido las necesidades mínimas de los dos tipos de empleado existentes (responsables e informadores) para asegurar una vigilancia efectiva del parque natural. En la tabla siguiente se detalla dicha información.

	Franja horaria					
	0–4h	4–8h	8–12h	12–16h	16–20h	20–24h
Responsables	1	2	4	4	2	2
Informadores	2	4	8	10	6	3

Cualquier empleado ha de trabajar 8 horas consecutivas, comenzando su turno al principio de una de las franjas en que se ha dividido el día, incluida la última franja del día (es decir, es posible comenzar a trabajar a las 20:00 de un día y terminar a las 04:00 del día siguiente).

El sueldo estándar de un vigilante responsable es de 6,25 €/hora, y el de un informador es 3,75 €/hora. Las horas trabajadas entre las 20:00 y las 04:00 se pagan un 40% más caras.

a) Enumera mediante una tabla todos los posibles turnos u horarios para un empleado cualquiera.

b) Plantea un modelo de programación lineal entera que permita a los gestores del parque decidir cuántos empleados de cada tipo contratar en cada turno, de modo que se cubran las necesidades de vigilancia con el mínimo coste.

Para ajustarse más a las necesidades de cada franja horaria y ahorrar costes, los gestores del parque consideran la posibilidad de contratar un tipo de vigilante «mixto» que trabajaría en el turno de 08:00 a 16:00, cobraría sueldo de vigilante responsable, y podría realizar tareas de informador o de responsable durante cada una de las dos franjas horarias que abarca su turno (es decir, podría trabajar primero 4 horas como informador y luego 4 horas como responsable, o al revés).

Por supuesto, podrán seguir habiendo responsables e informadores en dicha franja, que únicamente se dedicarían a sus respectivas tareas. Y, obviamente, durante el tiempo que un vigilante «mixto» esté desempeñando tareas de informador, estará dejando de realizar la labor de responsable, y viceversa.

c) Reformula el modelo para que tenga en cuenta esta nueva posibilidad.

4.5 Localización de aspersores. En una explotación agropecuaria se está modernizando el sistema de regadío de un riego de superficie a un moderno sistema de riego por aspersión de tipo estacionario fijo enterrado.

La parcela es muy irregular y es necesario instalar un número elevado de aspersores. La parcela se ha dividido en 6 sectores diferentes y existen 8 posibles puntos donde se puede instalar un aspersor. Existen dos tipos de aspersores, el de tipo medio, con un coste de 300 €/unidad y el de tipo grande con un coste de 490 €/unidad. Dependiendo del tipo de aspersor que se instale, más o menos sectores de la parcela quedarán cubiertos.

La tabla siguiente nos indica los sectores de la parcela que quedan cubiertos según se instale un aspersor medio o grande en cada uno de los 8 posibles puntos:

Posibles puntos para los aspersores	Sectores cubiertos con aspersor medio		Sectores cubiertos con aspersor grande		
Punto 1	1		1	2	
Punto 2	4		2	4	5
Punto 3	2	5	2	5	
Punto 4	4	5	2	4	5
Punto 5	2		2	3	5
Punto 6	5	6	3	5	6
Punto 7	3	6	3	6	
Punto 8	6		3	6	

En un punto dado sólo se puede instalar un aspersor, sea de tipo mediano o de tipo grande.

Adicionalmente, debido a restricciones del caudal máximo de agua, tan sólo se pueden instalar como mucho 2 aspersores de tipo grande.

Realiza un modelo de programación lineal, (explicando con claridad variables, función objetivo y restricciones), que permita determinar los puntos de aspersión a ocupar y con qué tipos de aspersores, de manera que se minimice el coste total de instalación.

4.6 Localización de reparto de revistas. La fundación OrangeTree se dedica a la organización y promoción de actividades sociales. Su principal actividad es la distribución de una revista de tirada quincenal.

Los responsables de la fundación desean optimizar el reparto de la revista en el centro de la ciudad de Valencia. Para ello, han identificado 12 posibles puntos de venta, desde los que desean poder cubrir los 13 barrios que componen los distritos de Ciutat Vella, L'Eixample y Extramurs.

En la tabla que se muestra a continuación pueden verse los barrios que quedarían cubiertos en caso de utilizar cada punto de venta.

Barrios a cubrir	Posibles puntos de venta											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.1 La Seu	×	×					×					
1.2 La Xerea		×	×									

1.3 El Carme							×	×	×			
1.4 El Pilar					×	×		×	×			
1.5 El Mercat	×				×		×	×				
1.6 Sant Francesc	×	×	×	×	×	×						
2.1 Russafa				×							×	×
2.2 El Pla del Remei			×	×							×	
2.3 La Gran Via											×	
3.1 El Botànic						×			×	×		
3.2 La Roqueta						×						×
3.3 La Petxina										×		
3.4 Arrancapins										×		×

Barrios a los que se desea llegar y posibles puntos de venta. Se indica con una cruz qué barrios quedan cubiertos en el caso de situar vendedores en cada punto de venta.

a) Con los datos disponibles, formula un modelo de programación lineal binaria para averiguar cuál es la manera de que la revista llegue a todos los barrios utilizando el mínimo número posible de puntos de venta.

b) Los barrios de Sant Francesc, Russafa y Arrancapins, dada su gran extensión, necesitan ser cubiertos desde al menos dos puntos de venta, cada uno. Modifica el modelo anterior para que incluya esta nueva condición.

La fundación quiere detallar más su plan de actuación: cuántos empleados se requieren, cuántos ejemplares van a venderse en cada barrio, etc. En cada punto de venta pueden situarse hasta 2 empleados. Cada empleado es capaz de vender hasta 600 ejemplares/quincena, que distribuirá a partes iguales entre todas las zonas a las que pueda dar servicio desde su punto de venta.

NOTA: Eso significa que, por ejemplo, un empleado situado en el punto de venta 1 puede repartir como máximo 600/3 = 200 ejemplares de la revista quincenalmente en cada uno de los 3 barrios que cubre desde su zona. Y sucede lo mismo si el empleado es asignado a cualquier otro punto de venta, ya que todos cubren 3 barrios, excepto el punto 6: un empleado situado en el punto de venta 6, que cubre 4 barrios, puede repartir en cada uno de ellos hasta 600/4 = 150 ejemplares/quincena.

La fundación desea asegurarse una distribución de al menos 400 ejemplares en cada barrio, excepto en los barrios ya mencionados en el apartado (b), en los cuales la distribución debería ser de al menos 600 ejemplares, cada quincena.

c) Plantea un NUEVO modelo de programación lineal entera para resolver el problema de cómo lograr dicha distribución utilizando el mínimo número posible de empleados.

   NOTA: En este NUEVO PROBLEMA NO es necesario decidir qué puntos de venta SÍ/NO se usan, sino que directamente lo que interesa saber es CUÁNTOS empleados situamos en cada punto de venta.

4.7 Costes no lineales/lineales a tramos. Una empresa fabrica dos artículos diferentes A y B, para cuya elaboración se precisan dos materias primas M1 y M2, de las que hay disponibles 7.200 y 6.000 unidades, respectivamente. Una unidad de A requiere cuatro unidades de M1 y cinco unidades de M2 para su fabricación, mientras que una unidad de B necesita nueve unidades de M1 y tres de M2.

Los precios de venta son de 7,20 € para cada unidad de A, en tanto que para el artículo B el precio de venta es de 8,40 € cuando la cantidad fabricada es menor o igual a 300 unidades, y es de 6,00 €, debido al exceso de oferta, cuando es superior a 300 unidades.

Por otro lado, los costes de fabricación ascienden a 1,80 € por unidad para el artículo B, mientras que para A este coste es de 2,40 € por unidad si se fabrican menos de 200 unidades, y pasa a ser de sólo 1,20 € si se fabrican más de 200, por razones de economía de escala.

Por contratos ya firmados, hay que fabricar al menos 200 unidades de B y, por acuerdos con otras empresas, si se producen 200 o más unidades de A no se pueden producir más de 500 unidades de B.

Se trata de formular un modelo matemático que proporcione un plan de producción que maximice el beneficio.

Soluciones Problemas Tema 4.

4.1 Empresa de fabricación de juguetes con costes fijos.

a) Definimos las variables de decisión siguientes:

x_i = número de juguetes producidos diariamente del tipo i $\quad i=1,2,3$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se pone en marcha el juguete tipo } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se produce en la planta } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max}(10x_1 - 25000y_1 + 15x_2 - 35000y_2 + 13x_3 - 30000y_3)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ x_i \leq My_i \qquad i = 1, 2, 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 500 + M(1 - z_1) \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 + M(1 - z_2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 630 + M(1 - z_3) \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \text{ y enteras } i=1, 2, 3 \\ y_i = 0, 1 \qquad i=1, 2, 3 \\ z_j = 0, 1 \qquad j=1, 2, 3 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

4.2. Planificación de la producción con capacidad variable

a) Variables:

x_i = unidades producidas semanalmente del producto Pi , i =1,...,4

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se produce el producto P}i \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad i=1,\dots,4$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max } [6x_1+7x_2+8x_3+9x_4-(2800y_1+4000y_2+3800y_3+4100y_4)]$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 5x_1+3x_2+6x_3+4x_4 \le 10000 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4 \le 10000 \\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4 \le 10000 \\ x_i \le M\ y_i \qquad i=1,\dots,4 \\ y_1+y_2+y_3+y_4 \le 3 \\ y_3 \ge y_2 \\ \left.\begin{array}{l} y_1+y_4 \ge 1 \\ y_2+y_4 \ge 1 \end{array}\right\rangle \Leftrightarrow y_1+y_2 \ge 2(1-y_4) \\ x_i \ge 0 \text{ y enteras } i=1,\dots,4 \\ y_i = 0,1 \qquad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

b) Definimos las variables de decisión siguientes

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se amplían 1000 horas en la planta } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad j = A, B, C$$

La modelización queda como sigue:

$$\text{Max} \quad [6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 - (2800y_1 + 4000y_2 + 3800y_3 + 4100y_4)]$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 10000 + 1000\, z_A \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10000 + 1000\, z_B \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10000 + 1000\, z_C \\ x_i \leq M\; y_i \qquad i = 1, \ldots, 4 \\ z_A + z_B + z_C = 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3 \\ y_3 \geq y_2 \\ y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_2 + y_4 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \text{ y enteras } i = 1, \ldots, 4 \\ y_i = 0, 1 \qquad i = 1, \ldots, 4 \\ z_j = 0, 1 \qquad j = A, B, C \end{cases}$$

Con M positivo suficientemente grande.

4.3 Selección óptima de nuevos empleados

a)

VARIABLES

Las decisiones a tomar son del tipo contratar sí/no a cada uno de los ocho candidatos. Por tanto, definiremos las siguientes variables de tipo binario:

δ_i = Vale 1 si se contrata al ingeniero *i*; vale 0 en caso contrario.

i = 1,…,8.

FUNCIÓN OBJETIVO

Se trata de realizar la elección de ingenieros que minimice el coste de contratación, es decir:

Min $z = 1{,}2\ \delta_1 + 2{,}0\ \delta_2 + 1{,}5\ \delta_3 + 2{,}5\ \delta_4 + 1{,}75\ \delta_5 + 1{,}5\ \delta_6 + 1{,}3\ \delta_7 + 1{,}9\ \delta_8$ miles de euros al mes.

RESTRICCIONES

La única condición es que debemos contratar a los ingenieros necesarios para que cada cliente pueda ser visitado por al menos uno de ellos. Por tanto, incluiremos una restricción por cada cliente:

[cliente 1] $\delta_1 + \delta_6 \geq 1$

[cliente 2] $\delta_3 + \delta_4 \geq 1$

[cliente 3] $\delta_2 + \delta_4 \geq 1$

[cliente 4] $\delta_1 + \delta_8 \geq 1$

[cliente 5] $\delta_1 + \delta_3 + \delta_6 \geq 1$

[cliente 6] $\delta_2 + \delta_3 + \delta_5 \geq 1$

[cliente 7] $\delta_4 + \delta_5 + \delta_6 \geq 1$

[cliente 8] $\delta_4 + \delta_7 \geq 1$

[cliente 9] $\delta_5 + \delta_8 \geq 1$

[cliente 10] $\delta_7 + \delta_8 \geq 1$

[naturaleza de las variables] $\delta_1, \ldots, \delta_8$ binarias.

b)

Simplemente tendríamos que modificar la restricción del cliente 6:

[cliente 6] $\delta_2 + \delta_3 + \delta_5 \geq 2$

De esta manera, al menos dos de las variables binarias están obligadas a valer 1, es decir, al menos se contratará a dos de los comerciales que pueden visitar al cliente 6.

4.4 Establecimiento de turnos de vigilancia

a)

Los posibles turnos diferentes para un empleado cualquiera son los siguientes:

Turno	0–4h	4–8h	8–12h	12–16h	16–20h	20–24h
A	•	•				
B		•	•			
C			•	•		
D				•	•	
E					•	•
F	•					•

Todos duran 8 horas consecutivas, comenzando al principio de una de las franjas horarias. En concreto, el turno F comienza a las 20:00 de un día y termina a las 04:00 del día siguiente.

b)

VARIABLES

Definimos las variables propias de un problema de turnos:

x_i = Cantidad de vigilantes responsables contratados para el turno *i*.

y_i = Cantidad de vigilantes informadores contratados para el turno *i*.

i = A,…,F.

FUNCIÓN OBJETIVO

Se trata de realizar las contrataciones que minimicen el coste de personal:

$$\text{Min} \quad z = 60\, x_A + 50\, x_B + 50\, x_C + 50\, x_D + 60\, x_E + 70\, x_F + 36\, y_A + 30\, y_B + 30\, y_C + 30\, y_D + 36\, y_E + 42\, y_F \quad \text{euros/día}$$

Los coeficientes de las variables en la función objetivo se han calculado a partir de la información facilitada en el enunciado:

- Sueldo «estándar» de un responsable: 6,25 · 8 = 50 euros/día
- Sueldo de un responsable con 4 horas «nocturnas» (turnos A y E):
  6,25 · 4 + 1,40 · 6,25 · 4 = 60 euros/día.
- Sueldo de un responsable con 8 horas «nocturnas» (turno F):
  1,40 · 6,25 · 8 = 70 euros/día.
- De manera análoga para los informadores.

RESTRICCIONES

Las únicas restricciones son las clásicas de un problema de turnos: que en cada franja horaria se cubran las necesidades mínimas de personal. Tendremos, por tanto, una restricción por cada franja y por cada tipo de trabajador:

[respons. 0–4h] $x_F + x_A \geq 1$

[respons. 4–8h] $x_A + x_B \geq 2$

[respons. 8–12h] $x_B + x_C \geq 4$

[respons. 12–16h] $x_C + x_D \geq 4$

[respons. 16–20h] $x_D + x_E \geq 2$

[respons. 20–24h] $x_E + x_F \geq 2$

[inform. 0–4h] $y_F + y_A \geq 2$

[inform. 4–8h] $y_A + y_B \geq 4$

[inform. 8–12h] $y_B + y_C \geq 8$

[inform. 12–16h] $y_C + y_D \geq 10$

[inform. 16–20h] $y_D + y_E \geq 6$

[inform. 20–24h] $y_E + y_F \geq 3$

[naturaleza de las variables] $x_A, \dots, x_F, y_A, \dots, y_F \geq 0$ y enteras

c)

En este apartado nos plantean la posibilidad de contratar a un nuevo tipo de empleado para el turno C (de 8 a 16h), con sueldo de responsable (50 euros/día) y al cual se le pueden asignar una de las dos tareas siguientes:

– Tarea 1: Responsable de 8:00 a 12:00 e informador de 12:00 a 16:00.

– Tarea 2: Informador de 8:00 a 12:00 y responsable de 12:00 a 16:00.

Por tanto, definiremos dos nuevas variables enteras, para representar estas nuevas posibilidades en la contratación:

w_{C1} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C y con tarea 1.

w_{C2} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C y con tarea 2.

La función objetivo continuaría respondiendo al criterio de minimizar el gasto de personal; añadiríamos ahora el gasto de este nuevo tipo de empleado:

Min $z = 60\, x_A + \dots + 42\, y_F + 50\, (w_{C1} + w_{C2})$ euros/día

Por último, se verían afectadas las restricciones correspondientes a las franjas horarias en las que estos nuevos empleados aparecen:

[respons. 8–12h] $x_B + x_C + w_{C1} \geq 4$

[respons. 12–16h] $x_C + x_D + w_{C2} \geq 4$

[inform. 8–12h] $y_B + y_C + w_{C2} \geq 8$

[inform. 12–16h] $y_C + y_D + w_{C1} \geq 1$

El resto de restricciones permanecerían igual. Añadiríamos que las dos nuevas variables son también de naturaleza entera:

[naturaleza de las variables] $x_A, \dots, x_F, y_A, \dots, y_F, w_{C1}, w_{C2} \geq 0$ y enteras

4.4 Establecimiento de turnos de vigilancia.

a)

Los posibles turnos diferentes para un empleado cualquiera son los siguientes:

Turno	0–4h	4–8h	8–12h	12–16h	16–20h	20–24h
A	•	•				
B		•	•			
C			•	•		
D				•	•	
E					•	•
F	•					•

Todos duran 8 horas consecutivas, comenzando al principio de una de las franjas horarias. En concreto, el turno F comienza a las 20:00 de un día y termina a las 04:00 del día siguiente.

b)

VARIABLES

Definimos las variables propias de un problema de turnos:

x_i = Cantidad de vigilantes responsables contratados para el turno i.

y_i = Cantidad de vigilantes informadores contratados para el turno i.

i = A,…,F.

FUNCIÓN OBJETIVO

Se trata de realizar las contrataciones que minimicen el coste de personal:

Min $z = 60\,x_A + 50\,x_B + 50\,x_C + 50\,x_D + 60\,x_E + 70\,x_F$
$+ 36\,y_A + 30\,y_B + 30\,y_C + 30\,y_D + 36\,y_E + 42\,y_F$ euros/día

Los coeficientes de las variables en la función objetivo se han calculado a partir de la información facilitada en el enunciado:

- Sueldo «estándar» de un responsable: 6,25 · 8 = 50 euros/día
- Sueldo de un responsable con 4 horas «nocturnas» (turnos A y E): 6,25 · 4 + 1,40 · 6,25 · 4 = 60 euros/día.
- Sueldo de un responsable con 8 horas «nocturnas» (turno F): 1,40 · 6,25 · 8 = 70 euros/día.
- De manera análoga para los informadores.

RESTRICCIONES

Las únicas restricciones son las clásicas de un problema de turnos: que en cada franja horaria se cubran las necesidades mínimas de personal. Tendremos, por tanto, una restricción por cada franja y por cada tipo de trabajador:

[respons. 0–4h]	$x_F + x_A \geq$	1
[respons. 4–8h]	$x_A + x_B \geq$	2
[respons. 8–12h]	$x_B + x_C \geq$	4
[respons. 12–16h]	$x_C + x_D \geq$	4
[respons. 16–20h]	$x_D + x_E \geq$	2
[respons. 20–24h]	$x_E + x_F \geq$	2
[inform. 0–4h]	$y_F + y_A \geq$	2
[inform. 4–8h]	$y_A + y_B \geq$	4
[inform. 8–12h]	$y_B + y_C \geq$	8
[inform. 12–16h]	$y_C + y_D \geq$	10
[inform. 16–20h]	$y_D + y_E \geq$	6
[inform. 20–24h]	$y_E + y_F \geq$	3

[naturaleza de las variables] $x_A , \ldots , x_F , y_A , \ldots , y_F \geq 0$ y enteras

c)

En este apartado nos plantean la posibilidad de contratar a un nuevo tipo de empleado para el turno C (de 8 a 16h), con sueldo de responsable (50 euros/día) y al cual se le pueden asignar una de las dos tareas siguientes:

- Tarea 1: Responsable de 8:00 a 12:00 e informador de 12:00 a 16:00.
- Tarea 2: Informador de 8:00 a 12:00 y responsable de 12:00 a 16:00.

Por tanto, definiremos dos nuevas variables enteras, para representar estas nuevas posibilidades en la contratación:

w_{C1} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C y con tarea 1.

w_{C2} = Cantidad de vigilantes «mixtos» contratados para el turno C y con tarea 2.

La función objetivo continuaría respondiendo al criterio de minimizar el gasto de personal; añadiríamos ahora el gasto de este nuevo tipo de empleado:

Min $z = 60\, x_A + \ldots + 42\, y_F + 50\, (w_{C1} + w_{C2})$ euros/día

Por último, se verían afectadas las restricciones correspondientes a las franjas horarias en las que estos nuevos empleados aparecen:

[respons. 8–12h] $x_B + x_C + w_{C1} \geq 4$

[respons. 12–16h] $x_C + x_D + w_{C2} \geq 4$

[inform. 8–12h] $y_B + y_C + w_{C2} \geq 8$

[inform. 12–16h] $y_C + y_D + w_{C1} \geq 10$

El resto de restricciones permanecerían igual. Añadiríamos que las dos nuevas variables son también de naturaleza entera:

[naturaleza de las variables] $x_A, \ldots, x_F, y_A, \ldots, y_F, w_{C1}, w_{C2} \geq 0$ y enteras

4.5 Localización de aspersores

```
!Variables: Mi: 1: Se instala un aspersor Mediano en el punto i. 0: en caso contrario
            Gi: 1: Se instala un aspersor Grande en el punto i. 0: en caso contrario;

[Costes]MIN=300*(M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8)+490*(G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8);

!Todos los sectores han de estar cubiertos;
[S1] M1+G1 >=1;
[S2] G1+G2+G3+G4+G5+M3+M5 >=1;
[S3] G5+G6+G7+G8+M7 >=1;
[S4] G2+G4+M2+M4>=1;
[S5] G2+G3+G4+G5+G6+M3+M4+M6>=1;
[S6] G6+G7+G8+M6+M7+M8 >=1;

!En cada punto se puede instalar como mucho un aspersor sea de tipo grande o mediano;
[Max1_1]G1+M1<=1;
[Max1_2]G2+M2<=1;
[Max1_3]G3+M3<=1;
[Max1_4]G4+M4<=1;
[Max1_5]G5+M5<=1;
[Max1_6]G6+M6<=1;

!Solo se pueden instalar 2 aspersores Grandes;
[Max2_G] G1+G2+G3+G4+G5+G6+G7+G8<=2;

!Las variables son binarias;
@BIN(G1);@BIN(G2);@BIN(G3);@BIN(G4);@BIN(G5);@BIN(G6);@BIN(G7);@BIN(G8);
@BIN(M1);@BIN(M2);@BIN(M3);@BIN(M4);@BIN(M5);@BIN(M6);@BIN(M7);@BIN(M8);
```

4.6 Localización de reparto de revistas.

VARIABLES

Definimos las variables propias de un problema de localización:

δ_i = 1: Se instala el punto de venta *i*.

0: No se instala el punto de venta *i*

$i = 1,\ldots,12$.

FUNCIÓN OBJETIVO

Se trata de realizar las contrataciones que minimicen el coste de personal:

Min $z = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{12}$ (cantidad de puntos de venta)

RESTRICCIONES

[1.1] $\delta_1 + \delta_2 + \delta_7 \geq 1$

[1.2] $\delta_2 + \delta_3 \geq 1$

[1.3] $\delta_7 + \delta_8 + \delta_9 \geq 1$

....

[1.6] $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 \geq 1$

....

[2.1] $\delta_4 + \delta_{11} + \delta_{12} \geq 1$

....

[3.4] $\delta_{10} + \delta_{12} \geq 1$

b) Dado que se desea que ciertos barrios estén cubiertos desde al menos dos puntos de venta, hay que modificar las restricciones de los barrios correspondientes indicando esa nueva necesidad:

[1.6] $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 \geq 2$

[2.1] $\delta_4 + \delta_{11} + \delta_{12} \geq 2$

[3.4] $\delta_{10} + \delta_{12} \geq 2$

c)

VARIABLES

x_i = numero de empleados en el punto de venta i

FUNCIÓN OBJETIVO

Min $z = \sum_i x_i \quad i = 1, \ldots 12$ $(cantidad\ de\ empleados)$

RESTRICCIONES

[1.1] $200x_1 + 200x_2 + 200x_7 \geq 400$

[1.2] $200x_2 + 200x_3 \geq 400$

[1.3] $200x_7 + 200x_8 + 200x_9 \geq 400$

[1.4] $200x_5 + 150x_6 + 200x_8 + 200x_9 \geq 400$

....

[1.6] $200x_1 + 200x_2 + 200x_3 + 200x_4 + 200x_5 + 150x_6 \geq 600$

...

[2.1] $200x_4 + 200x_{11} + 200x_{12} \geq 600$

[3.4] $200x_1 + 200x_2 \geq 600$

[máximo_número_empleados_puesto] $0 \leq x_i \leq 2$

[naturaleza de las variables] $x_i\ entera\ \ \forall i$

4.7 Costes no lineales/lineales a tramos

VARIABLES

Ai = cantidad producida del artículo A según tarifa i (unidades) i=1,2

Bi= cantidad producida del artículo B según tarifa i (unidades) i=1,2

A, B cantidad producida del artículo A/B (unidades). Estas variables no son estrictamente necesarias, solo las hemos definido por claridad en el modelo.

δ_{ij} = Binaria. Vale 1 si para el artículo i se aplica la tarifa j (i=A, B; j=1,2)

FUNCIÓN OBJETIVO

Max $\quad z = Ingresos\ por\ ventas - Costes = 7.2\,A + 8.4B1 + 6B2 - (1.8B + 2.4A1 + 1.2A2)$

RESTRICCIONES

[Cantidad_A] A=A1+A2

[Cantidad_B] B= B1+B2

[M1] 4A + 9B ≤ 7200

[M2] 5A + 3B ≤ 6000

[Costes_A1] A1 ≤ 200 δ_{A1}

[Costes_A2] 200 δ_{A2} ≤ A2 ≤ M δ_{A2}

[solo 1 tarifa] $\delta_{A1} + \delta_{A2} = 1$

[Precio_B1] B1 ≤ 300 δ_{A1}

[Precio_B2] 300 δ_{B2} ≤ B2 ≤ M δ_{B2}

[solo 1 tarifa] $\delta_{B1} + \delta_{B2} = 1$

[Prod_minimaB] B ≥ 200

[Relación A →B] B ≤ 500 + M(1- δ_{A2})