ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT4 - Problemas propuestos: RESOLUCIÓN DE RECURRENCIAS

1. Resuelve, directamente, la recurrencia lineal correspondiente para calcular la forma explícita de la sucesión definida mediante
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{3} \quad , \quad n \geq 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

2. Resuelve el problema de las torres de Hanoi: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$, a partir de la ecuación característica correspondiente y verifica que obtienes el mismo resultado que mediante resolución directa.

3. Resuelve la recurrencia lineal (no homogénea) de primer orden: $a_{n+1} = a_n + 3n$, a partir de la ecuación característica. Comprueba que obtienes el mismo resultado que por resolución directa.

4. Resuelve la recurrencia lineal (no homogénea) de segundo orden: $a_{n+2} = 2a_n + 3$, a partir de la ecuación característica.

5. Considera la sucesión definida por
$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 3 \end{cases}$$
   a) Obtén el valor de a_5
   b) Resuelve la recurrencia correspondiente y obtén una expresión explícita para a_n

6. Resuelve la recurrencia lineal homogénea de segundo orden definida por
$$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad , \quad \text{con} \quad a_1 = -6 \quad \text{y} \quad a_2 = 20.$$

7. a) Obtén la solución general de la recurrencia homogénea de segundo orden definida mediante
$$a_{n+1} = \frac{a_{n+2} + 9a_n}{6}$$
   b) Determina los valores de las constantes para que $a_1 = -3$ y $a_2 = 9$.

8. Considera la sucesión definida por
$$\begin{cases} a_{n+2} = -a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n \\ a_1 = 1 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$
   a) Obtén el valor de a_5
   b) Resuelve la recurrencia para expresar a_n en forma explícita.
   c) Calcula el límite de la sucesión $\{a_n\}$

9. Determina la solución de la recurrencia de segundo orden definida mediante
$$\begin{cases} a_{n+2} + 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \\ a_1 = 4 \quad , \quad a_2 = 20 \end{cases}$$

10. Determina la solución de la recurrencia de segundo orden definida mediante
$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_n \\ a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4 \end{cases}$$

11. Determina la forma explícita de la sucesión definida mediante
$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

12. Considera la succesión recurrente definida por

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a) Resuelve la recurrencia y expresa a_n explícitamente.

b) Compara los órdenes de magnitud de $\{a_n\}$ y de $\{b_n\} = \{\log(n)\}$. Justifica tu respuesta.

c) Repite los apartados a) y b) considerando el problema no homogéneo, con segundo miembro, 2^n.

13. Considera la sucesión definida por

$$\begin{cases} 2a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a) Escribe los cinco primeros términos de la sucesión.

b) Halla explícitamente a_n resolviendo la recurrencia correspondiente.

c) Resuelve el mismo problema no homogéneo, con segundo miembro, $6n$.

14. Determina la solución particular de la recurrencia de segundo orden definida mediante

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 1 \\ a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1 \end{cases}$$

15. Considera la recurrencia lineal homogénea de segundo orden:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0$$

a) Resuélvela a partir de la ecuación característica

b) Resuelve el mismo problema no homogéneo, con segundo miembro $t_n = 2$

c) Determina la solución particular del problema no homogéneo (apartado b) con $a_1 = a_2 = 1$

d) Analiza el orden de magnitud de la solución obtenida en el apartado anterior.

16. Considera la recurrencia lineal homogénea de segundo orden:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

a) Resuélvela a partir de la ecuación característica

b) Resuelve el mismo problema no homogéneo, con segundo miembro $t_n = n - n^2$

c) Determina la solución particular del problema no homogéneo (apartado b) con $a_1 = 2$, $a_2 = 8$

d) Analiza el orden de magnitud de la solución obtenida en el apartado anterior.

17. Nos regalan tres sellos y decidimos comenzar una colección. El año siguiente la incrementamos en tres sellos más. Si cada año compramos un número de sellos igual al doble de los que compramos el año anterior, ¿al cabo de cuántos años habremos superado el millón de sellos?

18. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo que trabaja sobre n datos de entrada. El problema que genera el algoritmo se resuelve mediante dos instrucciones para un único dato de entrada. Si existen $n + 1$ datos, el problema se reduce a uno con n datos después de ejecutar n^2 instrucciones. Sabiendo que la complejidad del algoritmo es cúbica; es decir, que $a_n \in \Theta(n^3)$, halla una expresión explícita para a_n sin hacer uso del método de la ecuación característica.

19. Obtén las soluciones generales de las recurrencias de orden superior a dos:

a) $t_{n+3} = t_{n+2} + 2t_{n+1} - 2t_n$ (homogénea)

b) $t_{n+4} = 4t_{n+3} + 3t_{n+2} + 4t_{n+1} - 4t_n$ (homogénea)

ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT4 - Ejercicios adicionales: RESOLUCIÓN DE RECURRENCIAS

1. La recurrencia dada por: $a_n = 3a_{n/2} + n$, $a_1 = 1$, se obtiene al aplicar un algoritmo conocido como "divide y vencerás"

   a) Efectúa el cambio de variable $n = 2^k$ para reducir el problema a una recurrencia lineal (no homogénea) de primer orden

   b) Resuelve el problema mediante resolución directa, en forma análoga al caso de las torres de Hanoi

   c) Resuelve el problema a partir de la ecuación característica correspondiente. Verifica que ambos resultados coinciden.

2. Considera la recurrencia lineal homogénea de segundo orden:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$$

   a) Resuélvela a partir de la ecuación característica

   b) Resuelve el mismo problema no homogéneo, con segundo miembro $t_n = 3^n$

   c) Determina la solución particular del problema no homogéneo (apartado b) con $a_1 = a_2 = 1$

*3. Obtén las soluciones generales de las recurrencias de orden superior a dos:

   a) $t_{n+3} = t_{n+2} + 2t_{n+1} - 2t_n + 2^n$ (no homogénea).

   b) $t_{n+4} - 4t_{n+3} - 3t_{n+2} - 4t_{n+1} + 4t_n = 3n^2 - 5$ (no homogénea).

4. Con los valores iniciales $a_1 = a > 0$ y $a_2 = b > a$, prueba que la sucesión $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n-1}\right)$ es convergente y que su límite es $\frac{1}{3}\left(a + b\right)$.

*5. Supongamos que se deposita en una reserva natural una población compuesta por depredadores y presas. Ambas poblaciones se van a reproducir y los primeros se van a alimentar de los segundos. Si denotamos por d_n y p_n la población respectiva de depredadores y presas existente después de n años, en la reserva se verifica la ley de recurrencia

$$\left\{\begin{array}{rcl} d_{n+1} & = & \alpha \cdot d_n + \beta \cdot p_n \\ p_{n+1} & = & \mu \cdot p_n - \delta \cdot d_n \end{array}\right. \qquad \alpha > 0\ ,\ \beta > 0\ ,\ \mu > 0\ ,\ \delta > 0$$

   a) Comprueba que las poblaciones consideradas satisfacen las recurrencias de segundo orden

$$\begin{array}{rcl} d_{n+2} - (\alpha + \mu)\, d_{n+1} + (\alpha\mu + \beta\delta)\, d_n & = & 0 \\ p_{n+2} - (\alpha + \mu)\, p_{n+1} + (\alpha\mu + \beta\delta)\, p_n & = & 0 \end{array}$$

   b) Para los valores $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{4}{3}$, $\delta = \frac{1}{3}$ resuelve la ecuación y comprueba que ambas sucesiones convergen.

   c) Para valores iniciales de $p_0 = 300$ y $d_0 = 30$, ¿cuál es el valor límite en el que se estabilizarían las dos poblaciones?

   d) Para los valores $\alpha = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{1}{8}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{3}$ comprueba que las dos poblaciones se extinguen independientemente de los valores iniciales de las poblaciones.