Análisis Matemático

UT2 - Funciones Reales de Variable Real

Contenido

Conceptos generales

- Dominio y rango
- Funciones inyectivas. Función inversa
- Funciones crecientes, decrecientes y acotadas
- Funciones pares, impares y periódicas

Repaso de Funciones Elementales

- Polinómicas y racionales
- Irracionales
- Exponenciales y logarítmicas
- Trigonométricas e inversas

Derivabilidad de funciones

- Concepto de derivada
- Propiedades de las funciones derivables
- Propiedades geométricas de una función a partir de su derivada

Objetivos

Generalidades sobre funciones (Una sesión)

- Recordar los conceptos básicos: dominio, rango, etc.
- Distinguir si una función es o no acotada, monótona, par, periódica,…
- Reconocer simetrías y periodicidad

Funciones elementales (Una sesión)

- Usar correctamente las propiedades básicas de las elementales
- Saber trazar y reconocer su representación gráfica aproximada

Derivadas (Una sesión)

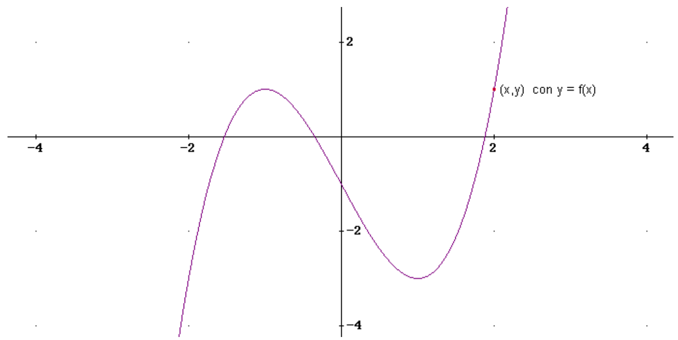
- Recordar el concepto de derivada y su relación con la recta tangente
- Calculo de derivadas en casos sencillos
- Localizar extremos relativos y determinar intervalos de crecimiento

Conceptos generales

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & y \end{array}$$ Es una función si $f(x)$ es único (cuando existe)

$$Dominio \equiv D(f) = \{\ x \in \mathbb{R}\ \mid\ f(x) \text{ existe}\ \}$$

$$Rango \equiv f(D) = R(f)$$

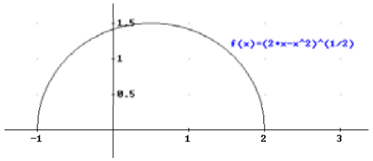


Ejercicio: Obtener el dominio de $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$

$x\in D(f)$ si existe $f(x)$. En este caso, cuando $2+x-x^2\geq 0$ $\left(x^2-x-2\leq 0\right)$

La función $y=x^2-x-2$ es una parábola con las ramas hacia arriba y se anula en $x_1=-1$, $x_2=2$. Así, $x^2-x-2\leq 0$ para $x\in[-1,2]$

$$D(f)=[-1,2]$$



Ejercicio: Hallar el dominio de $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

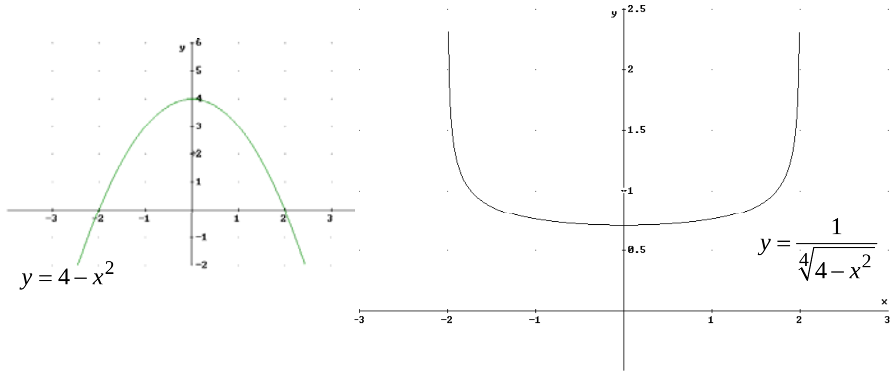
En este caso es necesario que $\underbrace{-x\geq 0}_{x\leq 0}$ y que $\underbrace{2x-1>0}_{x>\frac{1}{2}}$, simultáneamente

$$D(f)=]-\infty,0]\cap\left]\frac{1}{2},+\infty\right[=\varnothing$$

¡La función no está definida para ningún valor!

Ejercicio: Obtener el dominio de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$

$$x\in D(f)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4-x^2\geq 0\\ \sqrt[4]{4-x^2}\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(2+x)(2-x)\geq 0\\ \sqrt[4]{(2+x)(2-x)}\neq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in[-2,2]\\ x\neq 2\,,\,x\neq -2\end{array}\right\}\Leftrightarrow x\in]-2,2[$$



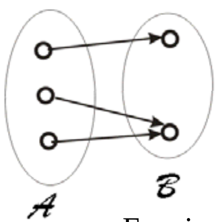
Función inversa

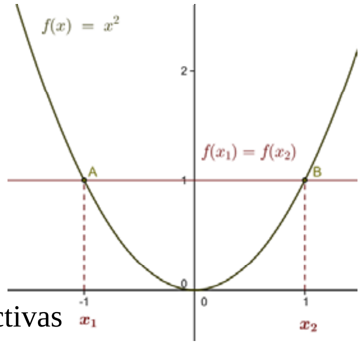
$$\boxed{f:\underset{x}{\mathbb{R}}\longrightarrow\underset{y}{\mathbb{R}}\qquad f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\qquad f^{-1}:\underset{y}{\mathbb{R}}\longrightarrow\underset{x}{\mathbb{R}}}$$

f^{-1} es una función si f es inyectiva

f es inyectiva si para $x_1,x_2\in D(f)$ con $x_1\neq x_2$ $\Rightarrow$ $f(x_1)\neq f(x_2)$

$D(f^{-1})=R(f)$, $R(f^{-1})=D(f)$



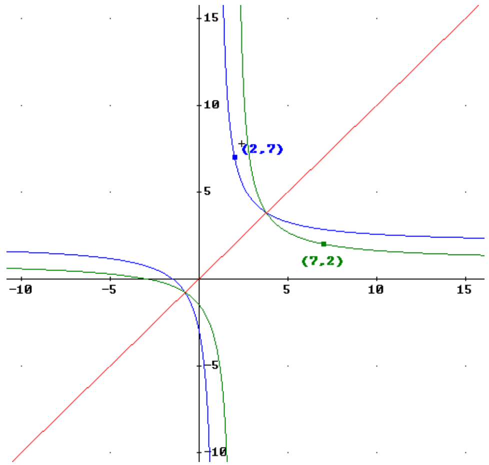


Funciones No inyectivas

Ejemplo: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ tiene inversa y $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

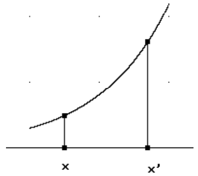
$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}=R(f^{-1})$; $D(f^{-1})=\mathbb{R}-\{2\}=R(f)$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}=y$$
$$\Downarrow$$
$$y\cdot(x-1)=2x+3$$
$$xy-y=2x+3$$
$$xy-2x=y+3$$
$$x(y-2)=y+3$$
$$x=\frac{y+3}{y-2}$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ inyectiva y } f^{-1}(y)=\frac{y+3}{y-2}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$



Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

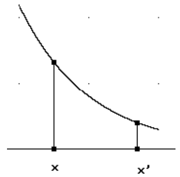
Función creciente:



$$f \text{ creciente } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) \le f(x') \,\right]$$

$$f \text{ estrictamente creciente } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \,\right]$$

Función decreciente:



$$f \text{ decreciente } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) \ge f(x') \,\right]$$

$$f \text{ estrictamente decreciente } \Leftrightarrow \left[\, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \,\right]$$

Función monótona: en cualquiera de los dos casos.

Nota: Las funciones constantes son, a la vez, crecientes y decrecientes

Nota: Si f es estrictamente creciente/decreciente, entonces f es inyectiva

Ejercicio: Verifica que $f(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ decrece estrictamente en $[0,9]$.
Halla también la función inversa de f sobre ese intervalo.

$$D(f) =]-\infty, 9]$$

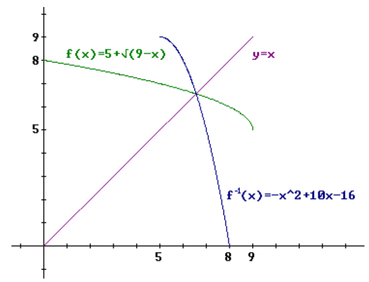
$$0 \le x_1 < x_2 \le 9 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 9 - x_1 > 9 - x_2 \Rightarrow \sqrt{9-x_1} > \sqrt{9-x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

f es estrictamente decreciente en todo su dominio y, en particular, en $[0,9]$

(Veremos después que si f es derivable, $f' > 0\,(<0) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente (decreciente)
Usando el resultado podríamos haber comprobado que $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}} < 0$ para $x \in]-\infty, 9[$)

$$f : \underset{x}{[0,9]} \to \underset{5+\sqrt{9-x}}{[5,8]} \Rightarrow f^{-1} : \underset{x}{[5,8]} \to \underset{-x^2+10x-16}{[0,9]}$$

$$f(x) = 5 + \sqrt{9-x} = y$$
$$x = 9 - (y-5)^2$$
$$x = -y^2 + 10y - 16 = f^{-1}(y)$$
$$f^{-1}(x) = -x^2 + 10x - 16$$



Función acotada superiormente:

f *acotada superiormente* (en I) por K $\Leftrightarrow \left[\, f(x) \le K, \forall x \in I \,\right]$

(K es *cota superior* de f)

Función acotada inferiormente:

f *acotada inferiormente* (en I) por L $\Leftrightarrow \left[\, f(x) \ge L, \forall x \in I \,\right]$

(L es *cota inferior* de f)

Función acotada:

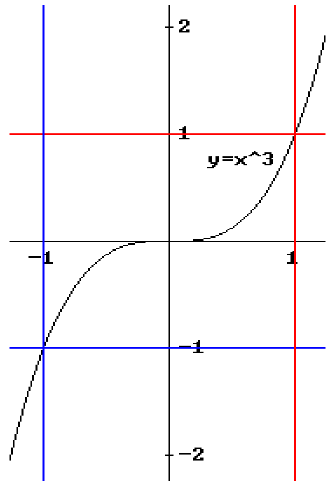
f *acotada* (en I) $\Leftrightarrow \left[\, |f(x)| \le K, \forall x \in I \,\right] \Leftrightarrow \left[-K \le f(x) \le K\right]$

(K es cota superior de f ; $-K$ es cota inferior de f)

Ejercicio : Si $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$, hallar sus valores máximo y mínimo.
Verifica analíticamente que su gráfica corresponde a una semicircunferencia.

$$y = \sqrt{2 + x - x^2} \Leftrightarrow y^2 + (x - 0.5)^2 = (1.5)^2 \Leftrightarrow d\big((x,y),(0.5,0)\big) = 1.5$$

- Acotada superiormente en $[-1,1]$ y en $]-\infty,-1]$
- No acotada superiormente en $[1,+\infty[$
- Acotada inferiormente en $[-1,1]$ y en $[1,+\infty[$
- No acotada inferiormente en $]-\infty,-1]$
- Acotada en $[-1,1]$
- No acotada en $]-\infty,-1]$ ni en $[1,+\infty[$



Función par: $f(-x) = f(x)$ para $x \in D(f)$

Son simétricas respecto del eje OY

$f(x) - f(-x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ es par

Son pares, por ejemplo: x^2 , $x^6 - x^2$, $\dfrac{x^3 + x}{x^5 + x}$, $|x|$

Función impar: $f(-x) = -f(x)$ para $x \in D(f)$

Son simétricas respecto del origen de coordenadas

$f(x) + f(-x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ es impar

Son impares, por ejemplo: x , $x^3 - x$, $\dfrac{x^4 + 1}{x^3 + x}$, $\log\left(1 + \dfrac{2x}{1 - x}\right)$

No son pares ni impares : $\sqrt{1 + x - x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$, $(x+1)^{2/3} + |x - 1|$

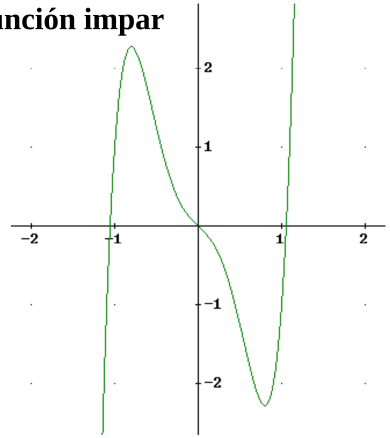
Función periódica: $f(x) = f(x + T)$ para algún valor de T

(T es el periodo, se usa el menor)

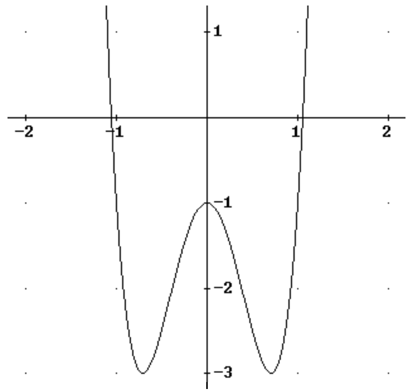
Son periódicas: $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $7\operatorname{sen}(3x) - 5\cos(2x)$

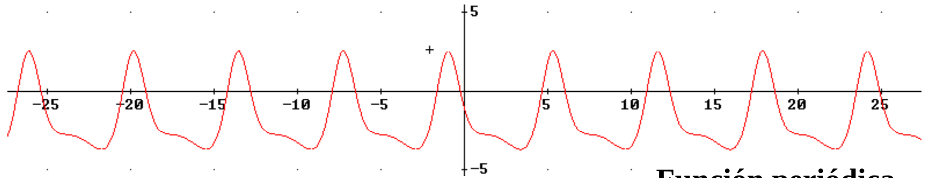
No son periódicas: $\operatorname{sen}(\sqrt{x})$, x^2 , e^{-x}

Función impar



Función par

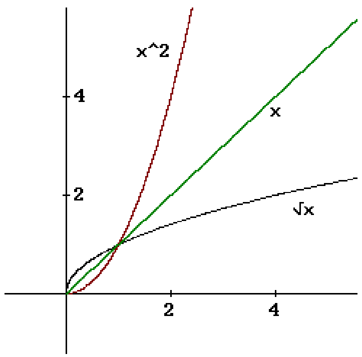


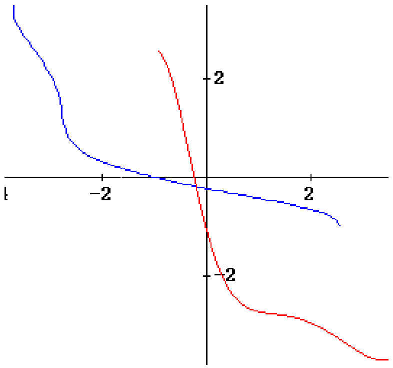


Función periódica

Otras simetrías:

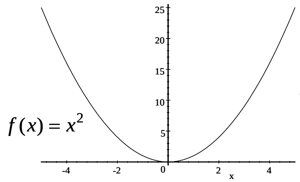
Una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$



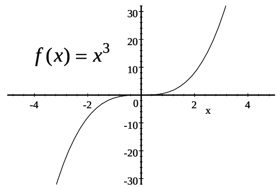


Repaso de funciones elementales

Polinómicas: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R},\ i : 0, 1, \ldots, n$

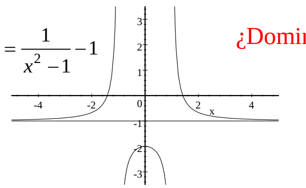


$D(f) = \mathbb{R}$

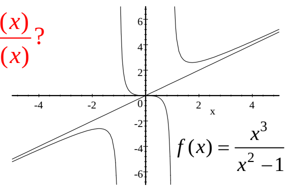


Racionales (cociente de funciones polinómicas)**:**

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} - 1$



¿Dominio de $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$?



Asíntota horizontal : $y = -1$

Asíntotas verticales : $x = \pm 1$

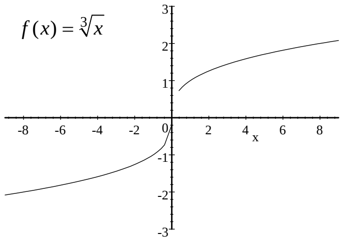
Asíntota oblicua : $y = x$

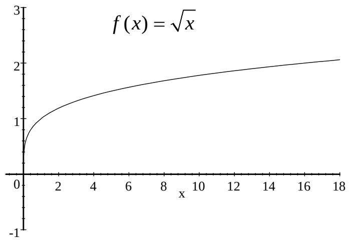
Asíntotas verticales : $x = \pm 1$

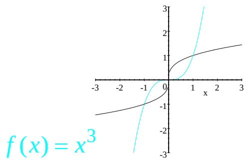
Irracionales (raíces): $f(x)=\sqrt[m]{x}$, $m\in\mathbb{N}$

$$D(f)=\begin{cases}\mathbb{R}^+\cup\{0\} & \text{si } m \text{ es par}\\ \mathbb{R} & \text{si } m \text{ es impar}\end{cases}$$

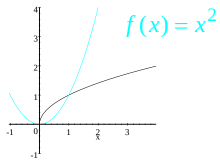
¿Dominio de $F(x)=\sqrt[m]{f(x)}$?



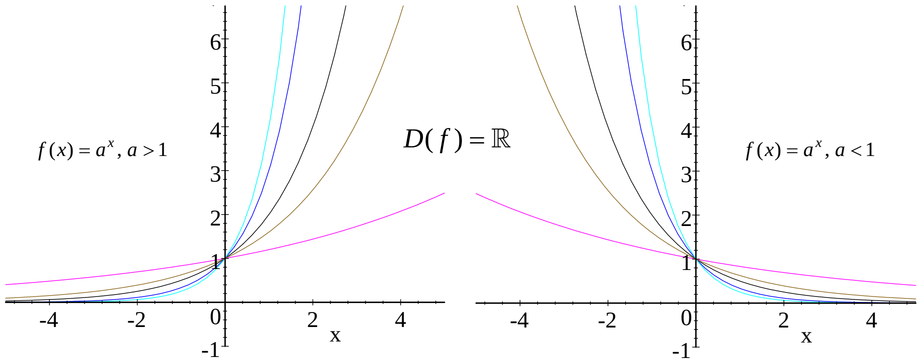




Sus inversas



Exponenciales: $f(x)=a^x$, $a>0$



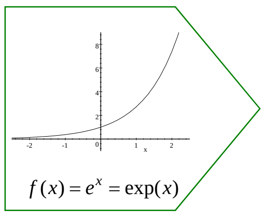
$a^x>0$, $a^0=1$

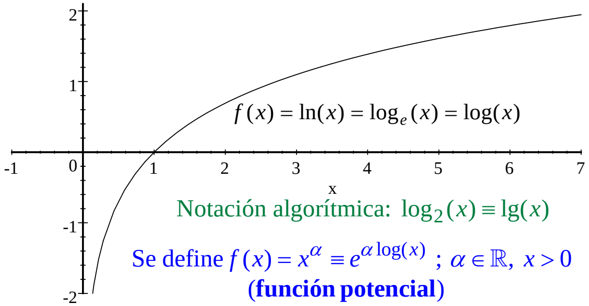
$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, $a^x/a^y=a^{x-y}$

$(a^x)^y=a^{x\cdot y}$

Logarítmicas (inversas de exponenciales)**:** $f(x)=\log_a(x)$, $a>0$

$\left(y=\log_a(x) \iff x=a^y\right)$ $\qquad D(f)=\mathbb{R}^+$





Notación algorítmica: $\log_2(x)\equiv \lg(x)$

Se define $f(x)=x^\alpha\equiv e^{\alpha\log(x)}$; $\alpha\in\mathbb{R},\ x>0$

(función potencial)

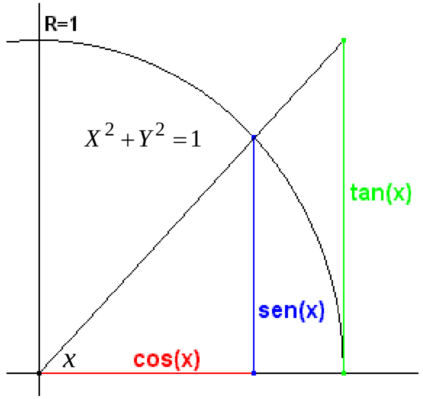
$\log_a(1)=0$, $\log(e)=1$, $\log(e^k)=k$

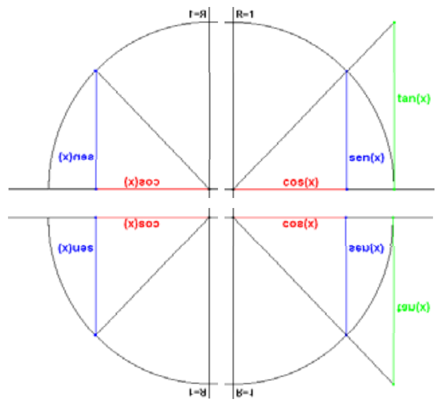
$\log_a(x\cdot y)=\log_a(x)+\log_a(y)$, $\log_a(x/y)=\log_a(x)-\log_a(y)$

$\log_a(x^y)=y\log_a(x)$

$x^{\log_a(y)}=y^{\log_a(x)}$, $\log_a(x)=\dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}=k\cdot\log_b(x)$

Trigonométricas: $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ (x en radianes)





$\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)=1$

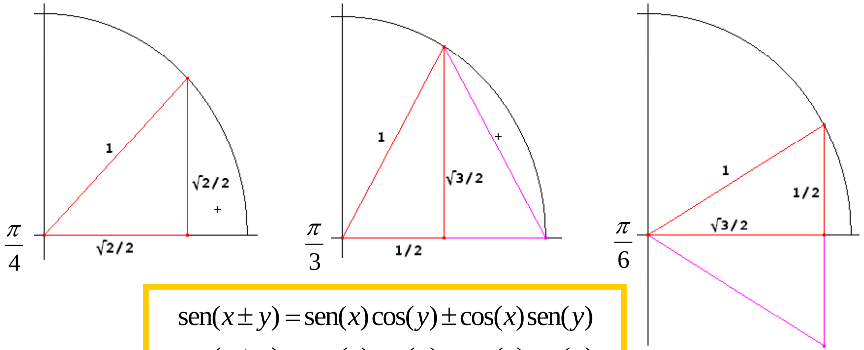
x	sen(x)	cos(x)	tan(x)
0	0	1	0
π/2	1	0	?

impar: $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}(x)$, *par*: $\cos(-x)=\cos(x)$

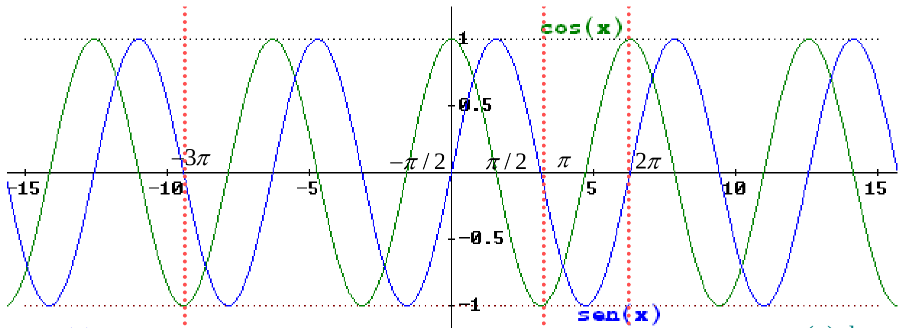
$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}(x)$

$\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\mathrm{sen}(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?

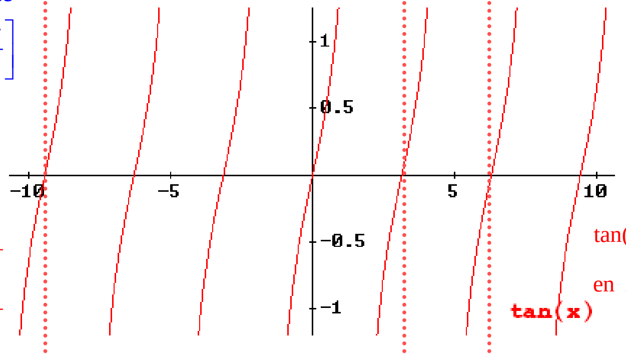


$$\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\mathrm{sen}(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x)$$
$$\mathrm{sen}(2x) = 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$$



$\mathrm{sen}(x)$ crece en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

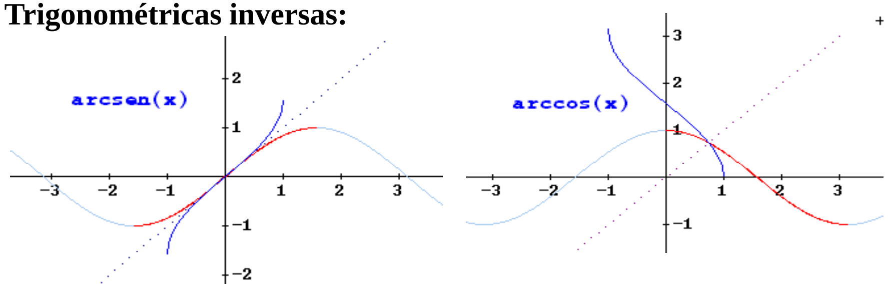
$\cos(x)$ decrece en $[0, \pi]$



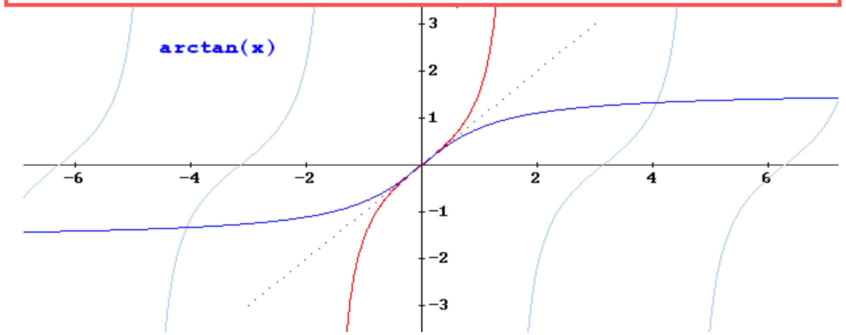
$\tan(x)$ crece en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\tan(x)$ no definida en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Trigonométricas inversas:



$$\mathrm{arcsen}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ , \ \ \arccos: [-1,1] \to [0, \pi] \ , \ \ \arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



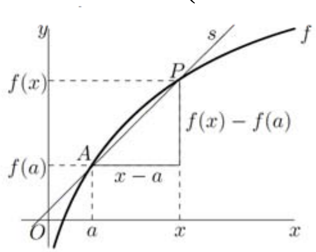
Derivabilidad de funciones

Derivada en un punto

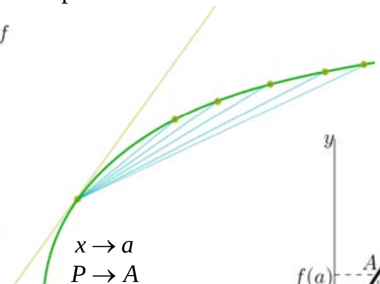
La derivada de $f(x)$ en a se define como: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Es el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

(el límite de las pendientes de las rectas secantes)



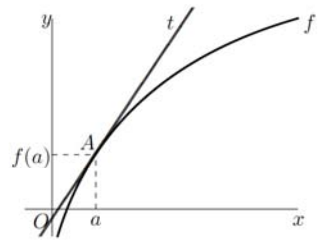
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$x \to a$

$P \to A$

secante s $\to$ tangente t



Funciones derivables

- f es derivable en $x_0 \in]a,b[$ si existe $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- f es derivable en el intervalo $]a,b[$ si es derivable en todos sus puntos

Funcion derivada de f es la funcion $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que en cada punto toma el valor de la derivada en ese punto.

- Toda función derivable es continua.

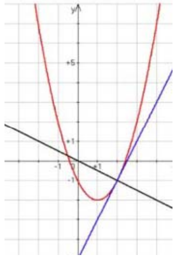
Recta tangente y recta normal

- La recta tangente pasa por $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

- La recta normal pasa por $(a, f(a))$ con pendiente $\dfrac{-1}{f'(a)}$

$$y = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$$



Derivadas de algunas funciones elementales

$f(x)=k \Rightarrow f'(x)=0$	
$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\log(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\log_a(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\log(a)}$
$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$	$f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x\log(a)$
$f(x)=\text{sen}(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x)$	$f(x)=\tan(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=-\sin(x)$	
$f(x)=\arctan(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\text{arcsen}(x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Reglas de derivación

$(\alpha f)'(x)=\alpha f'(x)$
$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$f(x)=\log(x)+3\arctan(x) \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x)=\frac{x^3-5x}{x^2+8} \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{(3x^2-5)(x^2+8)-(x^3-5x)(2x)}{(x^2+8)^2}$$

$$h(x)=x^3\cdot\sqrt{\text{sen}(x)} \;\Rightarrow\; h'(x)=3x^2\cdot\sqrt{\text{sen}(x)}+\frac{x^3}{2\sqrt{\text{sen}(x)}}\cdot\cos(x)$$

Caracterización de crecimiento y decrecimiento

$f'(x)>0$ para $x\in]a,b[\Rightarrow f$ estrictamente creciente en $]a,b[$

$f'(x)<0$ para $x\in]a,b[\Rightarrow f$ estrictamente decreciente en $]a,b[$

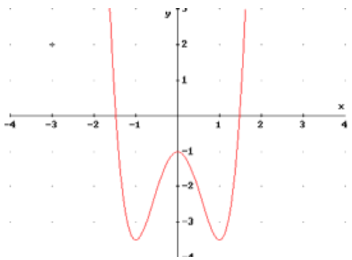
Localización de extremos relativos

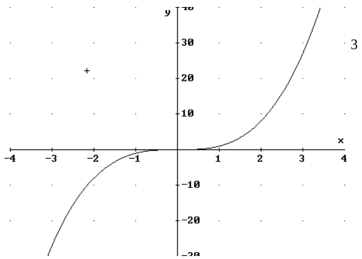
Si f alcanza un extremo relativo en $x=a$, entonces $f'(a)=0$

(La recta tangente es horizontal)

Los posibles extremos relativos se hallan resolviendo $f'(x)=0$

No todas las soluciones de $f'(x)=0$ son extremos relativos





Concavidad y convexidad

f es cóncava donde su gráfica está por encima de la tangente

f es convexa donde su gráfica está por debajo de la tangente

Caracterización de concavidad y convexidad

$$f''(x) > 0 \text{ para } x \in \left]a,b\right[\Rightarrow f \text{ cóncava en } \left]a,b\right[\quad \left(f' \text{ creciente}\right)$$

$$f''(x) < 0 \text{ para } x \in \left]a,b\right[\Rightarrow f \text{ convexa en } \left]a,b\right[\quad \left(f' \text{ decreciente}\right)$$

La función cambia de cóncava a convexa en los puntos de inflexión.

Los posibles puntos de inflexión se hallan resolviendo $f''(x) = 0$

No todas las soluciones de $f''(x) = 0$ son puntos de inflexión.

Localización de máximos y mínimos usando la segunda derivada

En un mínimo relativo la tangente es horizontal y la curva cóncava:

$f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, en $x = a$ tenemos un mínimo relativo.

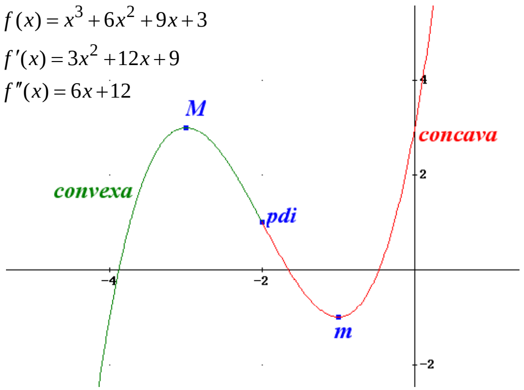
En un máximo relativo la tangente es horizontal y la curva convexa:

$f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, en $x = a$ tenemos un mínimo relativo.

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

$f''(x) = 6x + 12$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1\}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-3,-1\right[$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]-1,+\infty\right[$

f creciente en $\left]-\infty,-3\right[\cup \left]-1,+\infty\right[$

f decreciente en $\left]-3,-1\right[$

máximo relativo en $(-3,3)$

mínimo relativo en $(-1,-1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-2\right[$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2,+\infty\right[$

f convexa en $\left]-\infty,-2\right[$

f concava en $\left]-2,+\infty\right[$

punto de inflexión en $(-2,1)$