**Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)**
**Solucions dels exercicis de la lliçó 8**
**Robert Fuster**

**Exercici 8.1.** *Determineu si les matriu següents són invertibles i, en cas que ho siguen, calculeu la inversa i escriviu les matrius com a producte de matrius elementals.*

(a) $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\mathsf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\mathsf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ (k) $\mathsf{N} = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$ (l) $\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$

**(a)** És clar que les dues columnes de la matriu són linealment independents. Per tant, la matriu és invertible. Calcularem la inversa buscant la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada $\left[\mathsf{A} \mid \mathrm{I}\right]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-3/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_2(2)\mathsf{E}_1(1/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

En conseqüència,

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

**(b)** La matriu és invertible, pel mateix motiu que ho era la de l'apartat anterior. Calculem la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada $\left[\mathsf{B} \mid \mathrm{I}\right]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_2(1/10)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & -3/10 & 1/10 \end{array}\right]$$

En conseqüència,

$$\mathsf{B}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

**(c)** Podríem comprovar prèviament si el rang de la matriu $\mathsf{C}$ és tres. Però ho farem simultàniament amb l'intent de calcular la inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_1(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-3)\mathsf{E}_{3,1}(-5)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Ara ja podem assegurar que la matriu $\mathsf{C}$ és invertible, perquè $\operatorname{rang}\mathsf{C} = 3$. Continuem, doncs, cercant-hi la forma esglaonada reduïda:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}(1)\mathsf{E}_{2,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7/2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}_2(-1)\mathsf{E}_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

I la inversa és

$$\mathsf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \\ -7/2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

**(d)** Les dues darreres columnes de la matriu $\mathsf{D}$ són iguals, així que la matriu no és invertible (les seues columnes no són linealment independents).

**(e)** És clar que $\mathsf{E}^{-1} = \mathsf{E}$ (de fet, $\mathsf{E}$ és la matriu identitat).

**(f)** Aquesta és una matriu elemental del tipus permutació. En conseqüència,

$$\mathsf{F}^{-1} = \mathsf{F}$$

**(g)**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Així que

$$\mathsf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**(h)** Com que $\mathsf{G}^{-1} = \mathsf{H}$, és clar que $\mathsf{H}^{-1} = \mathsf{G}$.

**(i)** Aquesta matriu no és invertible, perquè té una columna de zeros i, per tant, no pot tenir rang tres.

**(j)** La segona fila de la matriu $\mathsf{M}$ és igual a la primera multiplicada per i, així que la matriu no és invertible.

**(k)**

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0 \\ i & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-i/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -i/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2(2/5)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{1,2}(i)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6/5 & 2i/5 \\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_1(1/2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & i/5 \\ 0 & 1 & -i/5 & 2/5 \end{array}\right]$$

De manera que

$$N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

La matriu $\mathsf{P}$ és un producte de matrius elementals: $P = E_1(1-i)E_2(1+i)$. Per tant,

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \big(E_1(1-i)E_2(1+i)\big)^{-1} = E_2(1+i)^{-1}E_1(1-i)^{-1} \\ &= E_2\left(\frac{1}{1+i}\right) + E_1\left(\frac{1}{1-i}\right) = E_2\left(\frac{1-i}{2}\right)E_1\left(\frac{1+i}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Exercici 8.2.** *Calculeu la inversa, si existeix, de la matriu* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{2,3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4,3}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{2,4}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{1,2}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2(-1)E_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa és aquesta matriu:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercici 8.3.** *Sense fer cap càlcul digueu quina és la matriu inversa de* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aquesta matriu és el producte de tres matrius elementals del tipus reducció. Notem que és la matriu que faríem servir en el primer pas de l'algorisme de Gauss, si a la segona fila li restàvem la primera, a la tercera li la sumàvem dues vegades i, a la quarta, tres. Aquest tipus de matrius s'anomenen a vegades *matrius del tipus G* (per Gauss).

És clar que la inversa és

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercici 8.4.** *Sabent que les matrius* $A$ *i* $B$ *són invertibles, aïlleu la matriu* $X$ *en l'expressió*

$$BA^2XB = C - 2I$$

$$\begin{aligned} BA^2XB &= C - 2I \\ X &= (A^2)^{-1}B^{-1}(C - 2I)B^{-1} \\ &= (A^2)^{-1}B^{-1}CB^{-1} - 2(A^2)^{-1}B^{-1}IB^{-1} \\ &= (A^2)^{-1}B^{-1}CB^{-1} - 2(A^2)^{-1}(B^2)^{-1} \end{aligned}$$

**Exercici 8.5.** *Proveu que si* $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ *aleshores* $A^3 - 8A - 32I = O$ *i utilitzeu aquest resultat per a calcular la matriu inversa* $A^{-1}$.

Fent les operacions es comprova sense dificultat que $A^3 - 8A - 32I = O$.

A partir d'aquí, podem aïllar la matriu identitat I d'aquesta manera:

$$A^3 - 8A - 32I = O \Rightarrow I = \frac{1}{32}(A^3 - 8A) = A\left(\frac{1}{32}(A^2 - 8I)\right)$$

De manera que

$$A^{-1} = \frac{1}{32}(A^2 - 8I) = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 14 & 40 & -12 \\ -4 & -16 & 8 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

**Exercici 8.6.** ***(Càlcul ràpid de la inversa d'una matriu*** $2 \times 2$*)*
*(a) Calculeu el producte* $\mathsf{AB}$ *essent*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

*(b) El nombre* $|\mathsf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *s'anomena* determinant *de la matriu* $\mathsf{A}$*. Proveu que la matriu* $\mathsf{A}$ *és invertible si i només si el seu determinant és no nul. En el cas que* $\mathsf{A}$ *siga invertible, trobeu una fórmula per a la matriu inversa de* $\mathsf{A}$*. (c) Feu servir el determinant per calcular inverses, si existeixen, de les matrius* $2 \times 2$ *de l'exercici 8.1.*

(a)

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Si el determinant de $\mathsf{A}$ és no nul llavors, del resultat de l'apartat anterior deduïm que

$$\mathsf{A}\left(\frac{1}{|\mathsf{A}|}\right)\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

així que $\mathsf{A}$ és invertible i

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\mathsf{B} = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

En el cas que el determinant de $\mathsf{A}$ és nul es prova fàcilment que les columnes de la matriu $\mathsf{A}$ són linealment dependents, així que, en aquest cas, la matriu no té inversa.

(c) Els determinants de les matrius $2 \times 2$ de l'exercici 8.1. són

(a) $\det \mathsf{A} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$ (b) $\det \mathsf{B} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 10$
(k) $\det \mathsf{M} = 1 \cdot 1 - (-\mathrm{i})\mathrm{i} = 0$ (l) $\det \mathsf{N} = 2 \cdot 3 - (-\mathrm{i})\mathrm{i} = 5$
(m) $\det \mathsf{P} = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) - 0 \cdot 0 = 2$

Així que totes aquestes matrius, excepte $\mathsf{M}$ són invertibles. I les inverses són

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{N}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}$$