

# Anàlisi Matemàtica

## UT6 - Sèries de Potències



*Contingut*

### Conceptes generals

- Definició de sèrie de potències
- La sèrie geomètrica
- Radi i interval de convergència

### Derivació i integració de sèries de potències

- Càlcul de derivades i primitives
- Obtenció de sèries de potències a partir de la geomètrica
- Aplicació a la suma de sèries numèriques

### Desenvolupament en sèrie de Taylor (McLaurin)

- Polinomis de McLaurin.
- Pas al límit en els polinomis de McLaurin
- Obtenció de les sèries exponencial, sinus i cosinus

## *Objectius*

### Conceptes generals (1S)

- Reconèixer una sèrie de potències
- Trobar el seu radi i l'interval de convergència

### Derivar i integrar sèries de potències (1S)

- Derivar i integrar correctament les sèries de potències
- Manipular correctament la sèrie geomètrica
- Identificar noves sèries de potències
- Fer ús d'aquestes tècniques per a sumar sèries numèriques

### Desenvolupament en sèrie de Taylor (McLaurin) (1S)

- Obtenir sèries de potències a partir de polinomis de McLaurin
- Desenvolupar en sèrie l'exponencial, sinus i cosinus

### Aplicacions (1S)

## *Conceptes generals*

### Sèrie de potències:

Una sèrie de potències (centrada en  $a = 0$ ) és una funció de la forma

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots,$$

definida on la sèrie numèrica siga convergent.

Es considera centrada en  $a$  si és de la forma

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - a)^n$$

En ambdós casos la sèrie representa un polinomi de grau infinit

### Exemple (Sèrie geomètrica)

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ solo si } |x| < 1$$

## Radi i interval de convergència:

Qualsevol sèrie de potències  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$   $\begin{cases} \text{convergeix si } |x| < \rho \Leftrightarrow x \in I = ]-\rho, \rho[ \\ \text{divergeix si } |x| > \rho \end{cases}$

$I = ]-\rho, \rho[$  és l'interval de convergència  
 $\rho$  és el radi de convergència

En els altres dos punts,  $x = \pm \rho$ , la sèrie pot ser convergent o no. Depèn del cas.

Quin seria el radi i interval de convergència d'una sèrie de potències centrada en  $a$ ?

## Exemple (Sèrie geomètrica):

$\sum_{n \geq 0} x^n$ ,  $a_n = 1$ .  $\begin{cases} \text{Radi de convergència: } \rho = 1 \\ \text{Interval de convergència: } I = ]-1, 1[ \end{cases}$   $\begin{cases} \text{convergeix si } |x| < 1 \\ \text{divergeix si } |x| > 1 \\ \text{en } x = 1 \text{ divergeix} \\ \text{en } x = -1 \text{ divergeix} \end{cases}$

Quin seria el radi i interval de convergència de  $\sum_{n \geq 0} n^k x^n$  per als valors de  $k \in \mathbb{N}$ ?

## Derivació i integració

La sèrie de potències

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, x \in I$$

pot derivar-se i integrar-se terme a terme en el seu interval de convergència:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, x \in I$$

$$\int f = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C, x \in I$$

## Exemple (Sèrie geomètrica):

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Derivant: } \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 1} n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{Integrant: } \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = C + \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

## Exemple:

Sumar les sèries  $\sum_{n \geq 1} n \cdot x^n$  i  $\sum_{n \geq 1} n^2 \cdot x^n$ , per a  $|x| < 1$

Partim de la sèrie geomètrica,  $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ , si  $|x| < 1$ .

Derivant tindrem

$$\sum_{n \geq 1} n \cdot x^{n-1} = \left( \sum_{n \geq 0} x^n \right)' = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \leftarrow \begin{cases} \text{Sèrie aritmètico-geomètrica} \\ \text{(Prob add, UT5)} \end{cases}$$

i multiplicant per  $x$ ,

$$\sum_{n \geq 1} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Derivant de nou,  $\sum_{n \geq 1} n^2 \cdot x^{n-1} = \left( \sum_{n \geq 1} n \cdot x^{n-1} \right)' = \left( \frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

d'on,  $\sum_{n \geq 1} n^2 \cdot x^n = \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^3} \leftarrow \begin{cases} \text{Sèrie aritmètico-geomètrica} \\ \text{generalitzada} \end{cases}$

## Exercici:

Integrant la sèrie de potències  $f(x) = \sum_{n \geq 1} (n+1)x^n$  troba:

a) Una expressió explícita per a  $f(x)$

b) El resultat de la suma infinita  $s = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n+1}{2^n} + \dots$

$$\text{Integrant i derivant després, } \int f = C + \sum_{n \geq 1} x^{n+1} = C + \frac{x^2}{1-x} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}}$$

La suma infinita demanada és

$$s = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n+1}{2^n} + \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \boxed{3}$$

## Desenvolupament en sèrie de log i arctan:

A partir de la sèrie geomètrica,  $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n, |x| < 1}$ , es dedueix  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$

Integrant,  $\boxed{\log(1+x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, |x| < 1}$

$$\left( \begin{array}{l} \text{La sèrie anterior convergeix (Leibniz) si } x=1. \text{ Es pot veure que} \\ \log(2) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ \text{resultat comentat en la UT5 en aproximar la suma d'aquesta sèrie numèrica.} \end{array} \right)$$

Substituint  $x$  per  $-x^2$  a la sèrie geomètrica, tenim  $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$

Integrant,  $\boxed{\arctan(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, |x| < 1}$

**Exercici:** Desenvolupar en sèrie de potències la funció  $\log(x^2 + 3x + 2)$

$$f(x) = \log(x^2 + 3x + 2) = \log((x+1)(x+2)) = \log(x+1) + \log(x+2)$$

Podriem fer ús de la sèrie de potències del logaritme per a trobar la sèrie però la seu derivada sembla més manejable:  $f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$

A partir de la sèrie geomètrica,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n \geq 0} (-x)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \\ \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

Integrant, tindrem  $\boxed{f(x) = \log(2) + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}, |x| < 1}$

**Exercici:** A partir del valor de  $\arctan(1)$ , aproxima  $\pi$  amb sis xifres decimals correctes fent servir la sèrie de  $\arctan(x)$  i el criteri de Leibniz per acotar l'error.

## Desenvolupament en sèrie de Taylor

### Desenvolupament de McLaurin d'ordre $n$ d'una funció:

Siga  $f$  derivable fins a l'ordre  $n+1$  en  $\overbrace{]-h, h[}^I$ . Per a  $x \in I$  i cert  $\alpha \in ]0, 1[$ ,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Polinomi de McLaurin, } P_n f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{Residu de Lagrange, } R_n f(x)}$$

(Existeix un desenvolupament més general -Taylor- amb centre en  $a \in \mathbb{R}$ )

### Exemple:

La funció exponencial,  $y = f(x) = e^x$  és derivable indefinidament en  $\mathbb{R}$

Totes les seues derivades coincideixen amb ella:  $f^{(n)}(x) = e^x$ . D'ací,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\alpha x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in ]0, 1[$$

### Pas al límit:

Prenent límits ( $n \rightarrow \infty$ ) en el desenvolupament de McLaurin d'ordre  $n$  de  $e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

El límit anterior és 0. D'ací,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(desenvolupament en sèrie de McLaurin de  $e^x$ )

**Aplicació:** Prenent  $x = \pm 1$  s'arriba als desenvolupaments en sèrie infinita:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \quad \leftarrow \begin{cases} \text{En la UT5 s'aproxima el} \\ \text{número } e \text{ a partir d'aquesta sèrie} \end{cases}$$

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \quad \leftarrow \begin{cases} \text{Com s'aproximaria } 1/e \\ \text{amb 6 decimals exactes?} \end{cases}$$

## La sèrie exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

En aquest cas,  $a_n = \frac{1}{n!}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Interval de convergència: } I = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R} \\ \text{Radi de convergència: } \rho = +\infty \end{array} \right.$

### Exercici

Deriva i integra  
per a provar que

$$e^x = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$e^x = 1 + \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

### Exercici

Què suma  
la sèrie numèrica

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! 2^{n+1}} ?$$

## Desenvolupament en sèrie de sinus i cosinus:

Calculant les derivades successives, en forma similar a la exponencial, escrivint els corresponents polinomis de McLaurin i aplicant límits s'obtenen:

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Exercici:** Troba la sèrie del cosinus derivant la sèrie del sinus.

**Exercici:** A partir del desenvolupament en sèrie de  $\cos(x)$ , aproxima  $\cos(1)$  amb 4 decimals correctes. Fes servir la cota d'error de Leibniz.

## Derivades successives d'una sèrie de potències:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Derivant successivament, per a  $k : 0, 1, 2, \dots ; x \in I$ ,

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + (k+1)k \dots 2 a_{k+1} x + \dots = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k}$$

I substituint en  $x = 0$

$$f^{(k)}(0) = k! a_k + 0 = k! a_k \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

## Conseqüència:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Tota sèrie de potències és la sèrie de Taylor (o McLaurin) de la funció que representa.

El desenvolupament en sèrie de potències és únic.

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \Rightarrow P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \text{ és el polinomi de McLaurin de } f(x)$$

## Exercici:

Si  $f(x) = \sum_{n \geq 1} (n+1)x^n$ , observa que  $a_n = n+1$  i troba  $f^{(12)}(0)$

Verifica el resultat fent ús de DERIVE, a partir de l'expressió explícita per a  $f(x)$ , obtinguda prèviament.

## Exercici:

Si  $f(x) = \log(x^2 + 3x + 2)$ , fes ús de DERIVE per a trobar  $f^{(11)}(0)$ .

Verifica el resultat a partir del desenvolupament en sèrie de  $f(x)$ , trobat prèviament, i la fórmula  $f^{(n)}(0) = n! a_n$ .