Computabilidad y Complejidad

Boletín de Ejercicios 1-- Enunciados

(Máquina de Turing)

---

01. Sea P la operación sobre lenguajes definida como sigue: para cada palabra x del lenguaje, si x contiene un número par de símbolos b, entonces cada símbolo a de x pasa a ser aa; si la palabra x tiene un número impar de símbolos b, entonces queda como está. Por ejemplo, si x = babaa, entonces P(x) = baabaaaa; si x = baa, entonces P(x) = baa. ¿Es la familia de los lenguajes recursivamente enumerables cerrada respecto de la operación P?

02. Sean L_1 y L_2 lenguajes. Se define la operación & como sigue:

$$L_1 \& L_2 = \{ x \in L_1 \ / \ (\exists y \notin L_2)\ (|x| = |y|)\}.$$

¿Es la clase de los lenguajes recursivos cerrada bajo la operación &?

03. Sean $L \subseteq \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$. Se define la operación $\text{Insertar}(a,L) = \{xay \ / \ xy \in L\}$.

a) Si L es recursivo ¿lo es también Insertar(a,L)?

b) Si L es recursivamente enumerable ¿lo es también Inserta(a,L)?

04. Sean L y L’ dos lenguajes, se define la operación F de modo que

$$F(L,L') = \{x \in L \ / x^r \notin L'\}.$$

Si L y L’ son lenguajes recursivos ¿lo es también F(L,L’)?

05. ¿Son los lenguajes recursivamente enumerables cerrados para los homomorfismos inversos? ¿Y los lenguajes recursivos?

06. ¿Son los lenguajes recursivamente enumerables cerrados para los homomorfismos?

07. Sean L_1, L_2 y L lenguajes no vacíos. Sea $\mathscr{L}_{REN}$ la clase de los lenguajes recursivamente enumerables. Pruebe o refute la siguiente implicación:

$(\forall L_1, L_2, L)$

$$[(L_1 \in \mathscr{L}_{REN} \ \wedge \ L_2 \in \mathscr{L}_{REN} \ \wedge \ L_1 \cap L_2 = \varnothing \wedge L_1 \cap L = \varnothing \wedge L \cap L_2 = \varnothing) \Rightarrow L \in \mathscr{L}_{REN}]$$

08. Se define la siguiente operación sobre palabras: $P(x) = 0^n x 0^n$ donde $n = |x|_0$. Esta operación se extiende del modo usual a lenguajes, esto es: $P(L) = \{P(x) \ / \ x \in L\}$. Pruebe o refute las siguientes implicaciones:

1) L es recursivo $\Rightarrow$ P(L) es recursivo.

2) P(L) es recursivo $\Rightarrow$ L es recursivo.

09. Sea Σ un alfabeto y $R \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje recursivo dado. Para L, L' $\subseteq \Sigma^*$ se define

$$L \blacklozenge L' = \{x \in L \ / \ (\exists y \in L')\ (\text{prefijos}(x) \cap \text{sufijos}(y) \cap R \neq \emptyset)\}.$$

Si L y L' son lenguajes recursivamente enumerables ¿lo es también $L \blacklozenge L'$?

10. Dados un alfabeto Σ, $L \subseteq \Sigma^*$ y $x \in \Sigma^*$, se define la operación cociente

$$x^{-1}L = \{ y \in \Sigma^* \ / \ xy \in L \}.$$

a) Si L es un lenguaje recursivo ¿lo es también $x^{-1}L$ para cada $x \in \Sigma^*$?

b) Si para $x \in \Sigma^*$, $x^{-1}L$ es un lenguaje recursivo ¿lo es también L?

c) Si L es un lenguaje recursivamente enumerable ¿lo es también $x^{-1}L$ para cada $x \in \Sigma^*$?

11. Sea L un lenguaje, se define $P(L) = \{x \ / \ (\exists u,v)(\ x = uv \ \wedge vu \in L)\}$.

I. Si L es un lenguaje recursivamente enumerable ¿lo es también P(L)?
II. Si L es un lenguaje recursivo ¿lo es también P(L)?

12. Sea Σ un alfabeto, para $x,y \in \Sigma^*$ se define la operación

$$\Diamond(x,y) = \{z \ / \ (\exists u,v,w)(x = uv \wedge y = vw \wedge z = uvw)\}.$$

Esta operación se extiende a lenguajes L,L' $\subseteq \Sigma^*$ de la manera habitual, esto es,

$$\Diamond(L,L') = \bigcup_{x \in L,\ y \in L'} \Diamond(x,y).$$

Si L y L' son lenguajes recursivos ¿lo es también $\Diamond(L,L')$?

13. Sea Σ un alfabeto y $L \subseteq \Sigma^*$. Sea $R \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje recursivo. Se define la operación

$$P_R(L) = \{x \in L \ / \ (x \notin R) \wedge (\ x = x^r) \}.$$

I. Si L es un lenguaje recursivamente enumerable ¿lo es también $P_R(L)$?
II. Si L es un lenguaje recursivamente enumerable ¿lo es también $L - P_R(L)$?

14. Sean L_1, L_2, L_3 lenguajes. Se define la operación $\nabla(L_1, L_2, L_3)$ que define el lenguaje formado por las palabras que pertenecen al menos a dos de sus argumentos.

I. ¿Es la operación ∇ una operación de cierre en la familia de los lenguajes recursivos?
II. ¿Es la operación ∇ una operación de cierre en la familia de los lenguajes recursivamente enumerables?

15. Sea Σ un alfabeto y sea < una relación de orden canónico definida sobre Σ^*. Sean dos lenguajes L, L' $\subseteq \Sigma^*$, se define la operación μ(L,L') del modo que sigue:

$$\mu(L,L') = \{x \in L \,/(\exists y \in L')(y \leq x)\}.$$

1) Si L y L' son lenguajes recursivamente enumerables, entonces ¿lo es también μ(L,L')?
2) Si L y L' son lenguajes recursivos, entonces ¿lo es también μ(L,L')?

16. Se define la operación $P:\{a,b\}^* \longrightarrow \wp(\{a,b\}^*)$ del modo que sigue:

I. $P(\lambda) = \{\lambda\}$
II. $P(x) = a^*x$, si $x = by$
III. $P(x) = b^*x$, si $x = ay$

¿Es la operación P de cierre dentro de la clase de los lenguajes recursivos?

17. Dado un lenguaje L se define el lenguaje

$$\mu(L) = \{x \,/(x = x^r) \wedge (x \in \text{prefijos}(L))\}.$$

Si L es recursivamente enumerable, entonces ¿lo es también μ(L)?