Departament de Matemàtica Aplicada
Unitat Docent de l'ETS d'Enginyeria Informàtica
Materials docents d'Àlgebra

Exercicis del Tema 1 (Unitat Temàtica 2)

27 de febrer de 2011

Exercici 2.1 *Escriviu el sistema lineal*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

en forma vectorial i en forma matricial. Digueu quina és la matriu de coeficients i quina la matriu ampliada.

La forma vectorial d'aquest sistema és

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

I la forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

La matriu de coeficients és

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

i la matriu ampliada

$$\left[\mathsf{A} \;\middle|\; \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{array}\right]$$

Exercici 2.2 *Feu el mateix amb el sistema genèric*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

La forma vectorial d'aquest sistema és

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

I la forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matriu de coeficients és

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i la matriu ampliada

$$\left[A \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Exercici 2.3 *Discutiu i resoleu, en cas que siguen compatibles, els sistemes lineals següents. Utilitzeu l'algorisme de Gauss-Jordan.*

$$(a)\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 4 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 4 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (c)\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Exercici 3.1 *Determineu si cada una d'aquestes matrius és escalonada, escalonada principal, escalonada reduïda o si no és escalonada.*

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ No escalonada

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Escalonada reduïda

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Escalonada

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Escalonada principal

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Escalonada

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ No escalonada

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Escalonada reduïda

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ Escalonada reduïda

Exercici 3.2 *En cada apartat expliqueu quin és l'efecte de la multiplicació indicada.*

1. $E_4(-2)A$

   La quarta fila de la matriu A es multiplica per -2.

2. $E_{2,4}(3)A$

   A la segona fila de la matriu A s'hi suma el triple de la quarta fila.

3. $E_{4,1}A$

   Es permuten les files primera i quarta de A.

4. $E_{2,1}(3)E_{3,1}(1)E_{4,1}(-1/2)A$

   A la segona fila s'hi suma el triple de la primera, a la tercera s'hi suma la primera i a la quarta s'hi resta un mig de la primera.

Exercici 3.3 *Calculeu la forma escalonada reduïda de la matriu*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

seguint els passos indicats: en cada pas feu les operacions elementals corresponents a les matrius que hi ha al damunt de la fletxa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1}(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(5/2)\mathsf{E}_{1,2}(-5/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2}(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(7)\mathsf{E}_{1,3}(23)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 3.4 *Trobeu la forma escalonada reduïda de la matriu* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. *Discutiu i resoleu el sistema lineal*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema és compatible indeterminat i la solució general és

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercici 3.5 *Si* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$,

1. *Resoleu l'equació matricial*

$$\mathsf{A}\vec{X} = \vec{u}$$

L'equació és equivalent al sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= u_1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= u_2 \end{aligned}$$

Per a resoldre'l eliminem x_2 de la segona equació, restant el doble de la primera:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= u_1 \\ -x_2 &= -2u_1 + u_2 \end{aligned}$$

i la solució és $x_2 = 2u_1 - u_2$, $x_1 = u_1 - 2x_2 = -3u_1 + 2u_2$, és a dir,

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix} -3u_1 + 2u_2 \\ 2u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

2. *Observeu que la solució de l'apartat anterior es pot escriure així:*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{u}$$

i anomenem B *a la matriu* $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. *Calculeu* AB *i* BA.

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{BA} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$