Análisis Matemático

UT4 - Sucesiones de Números Reales

AMA

Contenido

Conceptos generales

- Formas explícita y recurrente de una sucesión
- Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas
- Sucesiones convergentes y divergentes
- Álgebra de límites. Casos de indeterminación

Cálculo de Límites

- Límites de cocientes
- Fórmula de Euler
- Criterio de Stolz

Órdenes de Magnitud

Resolución de recurrencias lineales

- Resolución directa en casos de primer orden
- Segundo orden: Método de la ecuación característica
- Caso no homogéneo

Objetivos

Generalidades (Una sesión)

- Calcular términos de sucesiones en forma explícita o recurrente
- Comprobar la monotonía y obtener cotas
- Distinguir entre sucesiones convergentes y divergentes

Cálculo de límites (Una sesión)

- Conocer las manipulaciones algebraicas usuales en el cálculo de límites
- Saber aplicar las fórmulas de Euler y Stolz

Órdenes de magnitud (Una sesión)

- Identificar el orden de magnitud de una sucesión divergente
- Comparar órdenes de magnitud entre sucesiones

Recurrencias lineales (Dos sesiones)

- Resolver recurrencias lineales homogéneas de primer y segundo orden
- Comprobar soluciones particulares en ecuaciones completas

Conceptos generales

Una sucesión es una aplicación:

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \quad ; \quad f(n)=a_n \quad \text{(término general de la sucesión)}$$

Usaremos para representarla $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{a_n\}$

Forma explícita : $a_n=\varphi(n)$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\geq 1} \; , \; \{n!\}_{n\geq 0} \; , \; \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$$

Forma recurrente : $a_n=\varphi(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},n)$

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{n} \\ a_1=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} a_n=n\cdot a_{n-1} \\ a_0=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \\ a_1=a_2=1 \end{cases} \quad \text{(Fibonacci)}$$

Ejercicio: Escribir cinco términos de las sucesiones anteriores

Forma explícita : $a_n = \varphi(n)$

$$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\ge 1} = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots\right\}$$

$$\{n!\}_{n\ge 0} = \{0!,1!,2!,3!,4!,\ldots.\} = \{1,1,2,6,24,\ldots.\}$$

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}_{n\ge 1} = \left\{1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ldots\right\} = \left\{1,\frac{3}{2},\frac{11}{6},\frac{25}{12},\frac{137}{60},\ldots\right\}$$

Forma recurrente : $a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, n)$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$$a_5 = a_4 + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$$

$$\begin{cases} a_n = n \cdot a_{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$$a_1 = 1\cdot a_0 = 1\cdot 1 = 1$$

$$a_2 = 2\cdot a_1 = 2\cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3\cdot a_2 = 3\cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4\cdot a_3 = 4\cdot 6 = 24$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

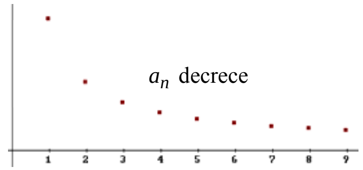
$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

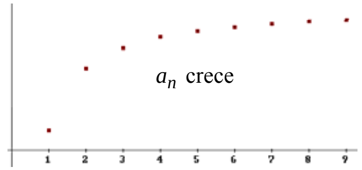
$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

Sucesiones monótonas:

$$\{a_n\}_{n\ge 1} \text{ decreciente } \Leftrightarrow a_n \ge a_{n+1} \,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\{a_n\}_{n\ge 1} \text{ creciente } \Leftrightarrow a_n \le a_{n+1} \,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$





Ejemplos

$\{n^2+1\}_{n\ge 1}$ es creciente , $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$ es creciente

$\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}_{n\ge 1}$ es decreciente , $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$ ni crece, ni decrece

Ejercicio : Verificar que $\{a_n\}_{n\ge 1}$ tal que $a_n = \dfrac{2n+4}{1-3n}$ es creciente

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+4}{1-3n} \\ a_{n+1} &= \frac{2(n+1)+4}{1-3(n+1)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+4}{1-3(n+1)} - \frac{2n+4}{1-3n} = \cdots = \frac{14}{9n^2+3n-2} > 0$$

Ejercicio : Demostrar que la sucesión $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \\ a_1 = 7 \end{cases}$ decrece

Usamos un argumento de inducción:

$(n=1)$ $\quad a_1 \ge a_2$ ya que $a_1 = 7$, $a_2 = \sqrt{2+7} = 3$

(H.I.) $\quad$ Supongamos que $a_n \ge a_{n+1}$ para un determinado valor de n

En el paso siguiente

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \underset{\text{(HI)}}{\ge} \sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Sucesiones acotadas

$$\{a_n\}_{n\ge 1} \text{ acotada superiormente } \Leftrightarrow a_n \le K \,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\{a_n\}_{n\ge 1} \text{ acotada inferiormente } \Leftrightarrow a_n \ge K \,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\{a_n\}_{n\ge 1} \text{ acotada } \Leftrightarrow \{|a_n|\}_{n\ge 1} \text{ acotada superiormente}$$

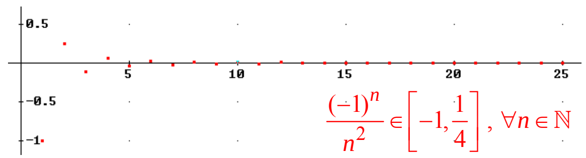
Ejemplos

$\{n^2+1\}_{n\ge 1}$ es acotada inferiormente pero no superiormente (no acotada)

$\{\operatorname{sen}(n)-n\}_{n\ge 1}$ es acotada superiormente pero no inferiormente (no acotada)

$\{(-n)^n\}_{n\ge 1}$ no es acotada (ni superior ni inferiormente)

$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n\ge 1}$ es acotada



Ejercicio: Demostrar que $\left\{\dfrac{2n+4}{1-3n}\right\}_{n\geq 1}$ es acotada superiormente por $\dfrac{-2}{3}$

$$\frac{2n+4}{1-3n}\leq\frac{-2}{3} \iff 3(2n+4)\geq -2(1-3n) \iff 6n+12\geq -2+6n \iff 14\geq 0$$

(Por otro lado, es evidente que está acotada superiormente por cero.)

Ejercicio: Comprueba que 2 es una cota inferior de $\begin{cases} a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \\ a_1=7 \end{cases}$

Usamos un argumento de inducción:

$(n=1)$ $\quad a_1\geq 2$ ya que $a_1=7\geq 2$

(H.I.) $\quad$ Supongamos que $a_n\geq 2$ para un determinado valor de n

En el paso siguiente

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\underset{\text{(HI)}}{\geq}\sqrt{2+2}=2$$

(Demostrar que está acotada inferiormente por cero habría sido evidente.)

Sucesiones convergentes:

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ *converge* a $\alpha\in\mathbb{R}$ si, para cualquier $\varepsilon>0, \exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\geq n_0 \quad\Rightarrow\quad |a_n-\alpha|<\varepsilon$$

El número α, caso de existir, es único. Se llama límite de la sucesión $\{a_n\}$

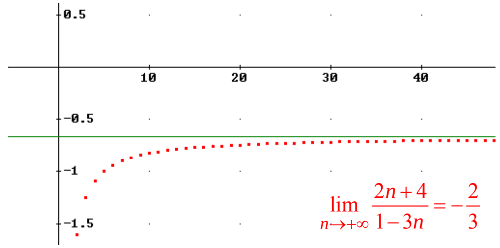
Usaremos la notación: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n} a_n=\alpha$, $\lim a_n=\alpha$, $\{a_n\}\to\alpha$

Ejemplos

$a_n=c \;\Rightarrow\; \{a_n\}\to c$

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\to 0$

$0<a<1 \;\Rightarrow\; \{a^n\}\to 0$



Ejercicio

$$\left\{\frac{2n+4}{1-3n}\right\}\to-\frac{2}{3}$$

$$|a_n-\alpha|=\left|\frac{2n+4}{1-3n}+\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{14}{3(3-3n)}\right|=\frac{14}{3(3n-3)}<\varepsilon \iff n>\frac{14\varepsilon+3}{9}$$

Sucesiones divergentes

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ *diverge* cuando no converge

$\{a_n\}\to+\infty$ si, para $K>0$, existe n_0 tal que $a_n>K$, si $n\geq n_0$

$\{a_n\}\to-\infty$ si $\{-a_n\}\to+\infty$

$\{a_n\}\to\infty$ si $\{|a_n|\}\to+\infty$

$$\text{Sucesiones divergentes}\begin{cases}\text{divergentes a } \infty\ (+\infty, -\infty) \\ \text{oscilantes}\begin{cases}\text{acotadas}\\ \text{no acotadas}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos:

$\{n!\}\to+\infty$; $\{-n\}\to-\infty$; $\{(-n)^n\}\to\infty$

$\{(-1)^n\}$ es oscilante y acotada)

$\{n+n\cdot(-1)^n\}$ es oscilante, no acotada y no diverge a ∞

$a>1 \;\Rightarrow\; \{a^n\}\to+\infty$ $\quad$ (Recordemos que $0<a<1\Rightarrow\{a^n\}\to 0$)

Notación: $\lim a_n\in\overline{\mathbb{R}} \iff \{a_n\}$ converge o diverge a $\pm\infty$

Teorema de Convergencia Monótona

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente $\left(\exists \lim a_n=\alpha\in\mathbb{R}\right)$

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente $\left(\exists \lim a_n=\alpha\in\mathbb{R}\right)$

Consecuencia:

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es creciente y **no** es acotada (sup), diverge a $+\infty$

Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y **no** es acotada (inf), diverge a $-\infty$

Ejercicio: Demostrar que la sucesión $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \\ a_1 = 7 \end{cases}$ converge

Calcular su límite

Decreciente:

$a_n = \{\, 7 \,, 3 \,, 2.2 \,,\ 2.05 \,,\ \ldots\}$

$a_1 \geq a_2$ ya que $a_1 = 7$, $a_2 = \sqrt{2+7} = 3$

Supongamos que $a_n \geq a_{n+1}$

En el paso siguiente

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \underset{\text{(HI)}}{\geq} \sqrt{2+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Acotada inferiormente por 0

***Aplicando el* TCM,** $\{a_n\}$ converge. Si llamamos $\alpha = \lim a_n \in \mathbb{R}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \;\Rightarrow\; \alpha = \sqrt{2+\alpha} \;\Rightarrow\; \alpha^2 = 2+\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 2 \vee \cancel{\alpha = -1}$$

Álgebra de límites:

Si $\lim a_n = \mathrm{a} \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\lim b_n = \mathrm{b} \in \overline{\mathbb{R}}$,

- $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = \mathrm{a} + \mathrm{b}$
- $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim a_n = \lambda \cdot \mathrm{a}$
- $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$
- $\lim(a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n = \mathrm{a} / \mathrm{b}$
- $\lim\left((a_n)^{b_n}\right) = (\lim a_n)^{\lim b_n} = \mathrm{a}^{\mathrm{b}}$
- Si f es continua (en un entorno de a), $\lim f(a_n) = f(\lim a_n) = f(\mathrm{a})$
- $\{a_n\}$ acotada y $\lim b_n = 0 \;\Rightarrow\; \lim(a_n \cdot b_n) = 0$
- $\lim |a_n| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim a_n = 0$,

siempre que no se den casos de indeterminación.

Indeterminaciones : $\infty - \infty \,,\ \dfrac{0}{0} \,,\ \dfrac{\infty}{\infty} \,,\ 0 \cdot \infty \,,\ \infty^0 \,,\ 0^0 \,,\ 1^\infty \,,\ \cancel{0^\infty} \,,\ \cancel{\infty^\infty}$

Ejemplos:

$$\lim \frac{6n^2+3n-5}{3n^2-1} = \lim \frac{\dfrac{6n^2+3n-5}{n^2}}{\dfrac{3n^2-1}{n^2}} = \lim \frac{6+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{6+0-0}{3-0} = 2$$

$$\lim \frac{n^3+3n^2-5}{3n^2+2} = \lim \frac{\dfrac{n^3+3n^2-5}{n^3}}{\dfrac{3n^2+2}{n^3}} = \lim \frac{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^3}}{\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}} = \frac{1+0-0}{0+0} = \infty \text{ (con signo +)}$$

$$\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \lim \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0$$

$$\lim\left(\log(2n+1)-\log(n)\right) = \lim\left(\log\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right) = \log(2)$$

Cálculo de límites

Límites de cocientes

$$\boxed{\lim \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0} = \lim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} \;;\ a_p, b_q \neq 0}$$

Ejemplos

$$\lim \frac{6n^2+3n-5}{3n^2-1} = \lim \frac{6n^2}{3n^2} = 2$$

$$\lim \frac{n^3+3n^2-5}{3n^2+2} = \lim \frac{n^3}{3n^2} = \lim \frac{n}{3} = +\infty$$

(y similares)

$$\lim \frac{n^2\sqrt{n}+3n^2-5\sqrt{n^2+1}}{3\sqrt{n^5}+n-2\sqrt{n+1}} = \lim \frac{n^2\sqrt{n}}{3\sqrt{n^5}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim \frac{3^{n+1}+2^n}{5^{n+2}-8\cdot 3^n} = \lim \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} = 0$$

Fórmula de Euler

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \quad ; \quad e=2.718281828...$$

$$\boxed{\lim a_n=1 \ \text{ y } \ \lim b_n=\pm\infty \ \Rightarrow \ \lim(a_n)^{b_n} = e^{\lim\, b_n(a_n-1)}}$$

Ejemplos

$$\lim\left(\frac{3n-5}{3n+2}\right)^{n-1} = \cancel{(1^\infty)} = e^{\lim(n-1)\left(\frac{3n-5}{3n+2}-1\right)} = e^{\lim(n-1)\left(\frac{-7}{3n+2}\right)} = e^{-\frac{7}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^7}}$$

$$\lim\left(\frac{3n^2+3n-5}{3n^2+2}\right)^{\sqrt{n^2-3n}} = \cancel{(1^\infty)} = e^{\lim\sqrt{n^2-3n}\cdot\left(\frac{3n^2+3n-5}{3n^2+2}-1\right)} = e^{\lim\sqrt{n^2-3n}\cdot\left(\frac{3n-7}{3n^2+2}\right)} = e$$

Nota

$$\lim\left(\frac{6n^2+3n-5}{3n^2-1}\right)^{n+3} = \left(\frac{6}{3}\right)^{+\infty} = +\infty \qquad \lim\left(\frac{n^2+3n-5}{3n^2+2}\right)^{n^2-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

Criterio de Stolz (cociente)

$$\boxed{b_n \text{ creciente },\ b_n\to+\infty \ \text{ y } \ \lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lambda\in\overline{\mathbb{R}} \ \Rightarrow \ \lim\frac{a_n}{b_n}=\lambda}$$

Nota : $\nexists \lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \not\Leftarrow \nexists \lim\frac{a_n}{b_n}$ $\left(\textbf{Ejemplo :}\ \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Ejemplos

$$\lim\frac{\log(n)}{n} = \lim\frac{\log(n+1)-\log(n)}{(n+1)-n} = \lim\left(\log(n+1)-\log(n)\right) = \lim\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(1)=0$$

$$\lim\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim\frac{(1+2+3+\cdots+(n+1))-(1+2+3+\cdots+n)}{(n+1)^2-n^2} = \lim\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim\frac{1+2+3+\cdots+2n}{n^2} = \lim\frac{(1+2+\cdots+2(n+1))-(1+2+\cdots+2n)}{(n+1)^2-n^2} = \lim\frac{4n+3}{2n+1} = 2$$

Órdenes de magnitud

$\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de términos positivos que tienden a $+\infty$

Notación O $\left[\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=0 \Rightarrow a_n\in O(b_n)\right]$ y escribimos $a_n \ll b_n$

Notación Ω $\left[\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=+\infty \Rightarrow a_n\in \Omega(b_n)\right]$ y escribimos $a_n \gg b_n$

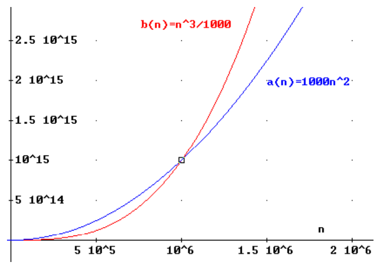
Notación Θ $\left[\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\alpha>0 \Rightarrow a_n\in \Theta(b_n)\right]$ y escribimos $a_n \approx b_n$

Propiedades

$$a_n\in O(b_n) \iff b_n\in\Omega(a_n)$$
$$a_n\in \Theta(b_n) \iff a_n\in O(b_n) \wedge a_n\in\Omega(b_n)$$
$$\Theta(a_n+b_n)=\Theta(\max(a_n,b_n))$$

Ejemplos

$$27n^2+\frac{355}{113}n+12 \in \Theta(n^2)$$
$$\sqrt{n} \approx \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$1000n^2\in O\left(\frac{n^3}{1000}\right)$$



$$\boxed{\log(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n\log(n) \ll n^2 \ll e^n \ll n! \ll n^n}$$

Resolución de recurrencias lineales

$$s_n^{(k)} \cdot a_{n+k} + s_n^{(k-1)} \cdot a_{n+k-1} + \cdots + s_n^{(1)} \cdot a_{n+1} + s_n^{(0)} \cdot a_n + t_n \;,\; n \in \mathbb{N} \text{ (orden } k\text{)}$$

Recurrencias lineales de primer orden

$$\boxed{a_{n+1} = s_n \cdot a_n + t_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Casos más interesantes: } s_n = c \;,\; t_n = c \cdot n \;,\; t_n = c \cdot k^n \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 5n + 2 \;\;;\;\; a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \cdot 5^{n-1} \end{array} \right)$$

Ejemplos

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + k \\ a_1 = k \end{cases} \Rightarrow a_n = n \cdot k$$

```
#1:   a(n) := ITERATE(x + k, x, k, n - 1)
#2:   a(n) := IF(n = 1, k, a(n - 1) + k)
#3:   VECTOR(a(n), n, 1, 10)
#4:   [k, 2·k, 3·k, 4·k, 5·k, 6·k, 7·k, 8·k, 9·k, 10·k]
```

$$\begin{cases} a_{n+1} = k \cdot a_n \\ a_1 = k \end{cases} \Rightarrow a_n = k^n$$

```
#1:   a(n) := ITERATE(k·x, x, k, n - 1)
#2:   a(n) := IF(n = 1, k, k*a(n - 1))
#3:   VECTOR(a(n), n, 1, 10)
#4:   [k, k^2, k^3, k^4, k^5, k^6, k^7, k^8, k^9, k^10]
```

$$\begin{cases} a_n = n \cdot a_{n-1} \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = n!$$

```
#1:   a(n) := IF(n = 1, 1, n*a(n - 1))
#2:   VECTOR(a(n), n, 1, 10)
#3:   [1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800]
```

Resolución directa para las de primer orden (*algoritmo recursivo*)

a) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ $\left(\textit{Torres de Hanoi} \right)$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma de una progresión geométrica} \\ 1 + r + r^2 + \cdots + r^m = \dfrac{r^{m+1} - 1}{r - 1} \end{array} \right)$$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot (2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$

$\vdots$

$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1) + 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{1 - 2^{n-1} \cdot 2}{1 - 2} = 2^n - 1$

$a_n \in \Theta(2^n)$

b) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Suma de una progresión aritmética} \\ 1 + 2 + 3 + \cdots + m = \dfrac{m \cdot (m+1)}{2} \end{array} \right)$$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 3 \cdot 1$

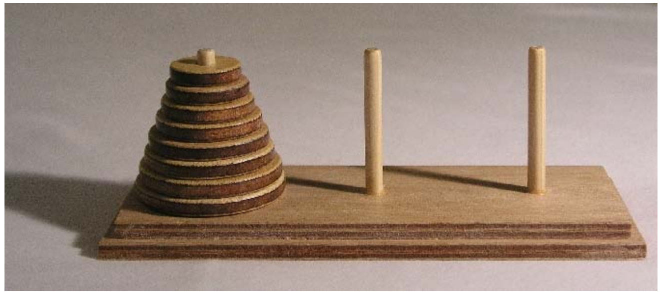
$a_3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2$

$a_4 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3$

$\vdots$

$a_n = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot (n-1) = 1 + 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 1 + 3 \cdot \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{3n^2 - 3n + 2}{2}$

$a_n \in \Theta(n^2)$



$a(8) = 2^8 - 1 = 255$

$a(4) = 2^4 - 1 = 15$

$a(64) = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$

(500.000 millones de años si cada movimiento dura un segundo)

LA LEYENDA DE LAS TORRES DE HANOI

Dice la leyenda que, al crear el mundo, Dios situó sobre la Tierra tres varillas de diamante y sesenta y cuatro discos de oro. Los discos son todos de diferente tamaño e inicialmente fueron colocados en orden decreciente de diámetros sobre la primera de las varillas. También creó Dios un monasterio cuyos monjes tienen la tarea de trasladar todos los discos desde la primera varilla a la tercera. La única operación permitida es mover un disco de una varilla a otra cualquiera, pero con la condición de que no se puede situar encima de un disco otro de diámetro mayor. La leyenda dice también que cuando los monjes terminen su tarea, el mundo se acabará.

Recurrencias lineales de segundo orden y coeficientes constantes

$$\boxed{a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = t_n \quad ; \quad p, q \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}}$$

$$\left(\text{Casos más interesantes: } t_n = P(n) \;,\; t_n = k^n \;,\; t_n = P(n) \cdot k^n \right)$$

La ecuación homogénea asociada a la ecuación completa es

$$\boxed{a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0}$$

Estructura de las soluciones

$$\boxed{a_n = a_n^P + a_n^H}$$

- a_n es la solución general de la ecuación completa (depende de dos constantes)
- a_n^P es una solución particular de la ecuación completa (nos vale cualquiera)
- a_n^H es la solución general de la ecuación homogénea (depende de dos constantes)
- $a_n = a_n^H$ en ecuaciones homogéneas (porque la completa y la homogénea son la misma)

Propiedad 1

Cualquier solución de la ecuación homogénea (solución general) puede escribirse como combinación lineal de dos soluciones particulares que sean linealmente independientes

$$a_n^H = c_1 \cdot a_n^{H(1)} + c_2 \cdot a_n^{H(2)}$$

Propiedad 2

Si $a_n = r^n$ $(r \neq 0)$ satisface $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$, entonces

$$r^2 + p \cdot r + q = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} P(r) = r^2 + p \cdot r + q \ \text{ se conoce como polinomio característico} \\ r^2 + p \cdot r + q = 0 \ \text{ se conoce como ecuación característica} \end{array} \right)$$

Propiedad 3

Si a_n y u_n son dos soluciones de la ecuación completa, entonces $a_n - u_n$ es solución de la homogénea.

$$a_n = u_n + (a_n - u_n) = a_n^P + a_n^H$$

Método de la ecuación característica para la ecuación homogénea

$$a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$$

$$P(r) = r^2 + pr + q = 0 \ \Rightarrow \ r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \ , \ r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Caso 1 (raíces reales distintas de $P(r)$, $r_1 \neq r_2$)

Soluciones particulares linealmente independientes: $r_1^{\,n}$ y $r_2^{\,n}$

Solución general: $a_n = c_1 \cdot r_1^{\,n} + c_2 \cdot r_2^{\,n}$

Caso 2 (raiz real doble de $P(r)$, $r_1 = r_2 = r$)

Soluciones particulares linealmente independientes: r^n y $n \cdot r^n$ (comprobar)

Solución general: $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 \cdot n \cdot r^n$

Caso 3 (raíces complejas conjugadas de $P(r)$, $r = \rho_\alpha$, $\overline{r} = \rho_{-\alpha}$)

Soluciones particulares linealmente independientes: $\rho^n \cos(n\alpha)$, $\rho^n \operatorname{sen}(n\alpha)$

Solución general: $a_n = \rho^n \left(c_1 \cdot \cos(n\alpha) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(n\alpha) \right)$

Ejemplo: Resolver la recurrencia $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 1, \ a_2 = 1 \end{cases}$ *(Sucesión de Fibonacci)*

Reescribimos la recurrencia en la forma $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$

La ecuación característica es $r^2 - r - 1 = 0$ con raíces $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Corresponde al primer caso (raíces reales y distintas)

$$\textit{Solución (general)}: \ a_n = a_n^H = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

A partir de los dos valores iniciales, determinamos las constantes

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \ \Rightarrow \ c_1 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right) + c_2 \left(1-\sqrt{5}\right) = 2 \\ a_2 = 1 \ \Rightarrow \ c_1 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right)^2 + c_2 \cdot \left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \ , \ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \qquad \Theta(a_n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Ejemplo: Resolver la recurrencia $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

La ecuación ordenada sería $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$

La ecuación característica es $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, con raíz doble $r = 1$

$$\textit{Solución general (Caso 2)}: \quad a_n = a_n^H = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot n \cdot 1^n = c_1 + c_2 \cdot n$$

$$\Theta(a_n) = n$$

Ejemplo: Resolver la recurrencia $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

La ecuación característica es $r^2 - r + 1 = 0$ con soluciones complejas (Caso 3)

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{\pi/3} \ , \ r_2 = \frac{1-\sqrt{-3}}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1_{-\pi/3}$$

Solución general:

$$a_n = a_n^H = 1^n \left(c_1 \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right) + c_2 \cdot \operatorname{sen}\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right) = c_1 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right) + c_2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right)$$

Generalización: Extensión a recurrencias de primer orden.

Las recurrencias de primer orden

$$a_{n+1} = p \cdot a_n + t_n$$

pueden tratarse de forma análoga a las de segundo orden.

Ecuación homogénea asociada: $a_{n+1} - p \cdot a_n = 0$

Ecuación característica: $r - p = 0$ (Solución $r = p$)

Solución particular de la homogénea: p^n

Solución general de la homogénea: $a_n^H = c \cdot p^n$

Solución particular: a_n^P que deberemos encontrar

Solución general: $a_n = a_n^P + a_n^H$

Ejercicio: Resolver la recurrencia $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2^n \\ a_1 = 5 \end{cases}$

Solución : $a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2^n$

Generalización: Extensión a recurrencias de orden superior.

Resolver la recurrencia $\begin{cases} a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n \\ a_1 = 0 \, , \, a_2 = 1 \, , \, a_3 = 2 \end{cases}$

Este caso correspondería a un problema homogéneo de tercer orden, de la forma

$$a_{n+3} + m \cdot a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0 \quad (\text{aquí, } m = -5, \ p = 8, \ q = -4)$$

Ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = (r-1)(r-2)^2 = 0$

con soluciones $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ (doble)

Solución general : $a_n^H = c_1 + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot n \cdot 2^n$

A partir de los valores iniciales,

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \\ a_2 = 1 \ \Rightarrow \ c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 1 \\ a_3 = 2 \ \Rightarrow \ c_1 + 8c_2 + 24c_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ c_1 = -2 \, , \, c_2 = \frac{5}{4} \, , \, c_3 = -\frac{1}{4}$$

Solución : $a_n = -2 + (5-n)2^{n-2}$

Soluciones particulares. Búsqueda con coeficientes indeterminados

Como norma general, buscaremos una sucesión con estructura similar a la del termino independiente y elegiremos los coeficientes que sean necesarios para tener una solución.

Ejemplo: Resolver la recurrencia completa $\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2 \\ a_1 = 1 \, , \, a_2 = -1 \end{cases}$

Usando el método de la ecuación característica,

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \ \Rightarrow \ r \in \{2,3\} \ (\text{Caso 1}) \ \Rightarrow \ a_n^H = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

Para la solución particular probamos soluciones del tipo $u_n = k$ (similar a t_n)

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2 \ \Rightarrow \ k - 5k + 6k = 2 \ \Rightarrow \ 2k = 2 \ \Rightarrow \ k = 1$$

por lo que $a_n^P = 1$ es una solución particular.

$$a_n = a_n^P + a_n^P = 1 + c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$$

Y a partir de las condiciones iniciales, calculamos las constantes

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \ \Rightarrow \ 2c_1 + 3c_2 = 0 \\ a_2 = -1 \ \Rightarrow \ 4c_1 + 9c_2 = -2 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ c_1 = 1 \, , \, c_2 = -\frac{2}{3} \qquad a_n = 1 + 2^n - 2 \cdot 3^{n-1}$$

Ejemplo: Resolver la recurrencia completa $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = -n^2$

Usando el método de la ecuación característica,

$$r^2 - r - 1 = 0 \ \Rightarrow \ r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ (\text{Caso 1}) \ \Rightarrow \ a_n^H = c_1 \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para la solución particular probamos un polinomio de segundo grado (similar a t_n)

$$u_n = an^2 + bn + c \ \Rightarrow \ \begin{cases} u_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = an^2 + (2a+b)n + (a+b+c) \\ u_{n+2} = a(n+2)^2 + b(n+2) + c = an^2 + (4a+b)n + (4a+2b+c) \end{cases}$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = -n^2 \ \Rightarrow \ -an^2 + (2a-b)n + (3+b-c) = -n^2 \ \Rightarrow \ a = 1 \, , \, b = 2 \, , \, c = 5$$

por lo que $a_n^P = n^2 + 2n + 5$ es una solución particular.

Solución general : $a_n = a_n^H + a_n^P = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + n^2 + 2n + 5$

y si hubiera condiciones adicionales, las usaríamos ahora para determinar c_1 y c_2

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2$$

#1: LIN2_CCF(-5, 6, 2, n, c1, c2)

#2: $3^n \cdot c1 + 2^n \cdot c2 + 1$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2 \\ a_1 = 1 \text{ , } a_2 = -1 \end{cases}$$

#1: LIN2_CCF_BV(-5, 6, 2, n, 1, 1, 2, -1)

#2: $- 2 \cdot 3^{n - 1} + 2^n + 1$

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 1 \text{ , } a_2 = 1 \end{cases}$$

#1: LIN2_CCF_BV(-1, -1, 0, n, 1, 1, 2, 1)

#2: $\dfrac{\sqrt{5} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)^n}{5} - \dfrac{\sqrt{5} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^n}{5}$

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = -n^2 \\ a_1 = 1 \text{ , } a_2 = 1 \end{cases}$$

#1: LIN2_CCF(-1, -1, 0, n, c1, c2)

#2: $c1 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)^n - c2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^n$

#3: $u(n) := a \cdot n^2 + b \cdot n + c$

#4: $u(n + 2) - u(n + 1) - u(n) = n^2$

#5: $- a \cdot n^2 + n \cdot (2 \cdot a - b) + 3 \cdot a + b - c = n^2$

#6: SOLVE([-a = 1, 2·a - b = 0, 3·a + b - c = 0], [a, b, c])

#7: $[a = -1 \wedge b = -2 \wedge c = -5]$