DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Segundo Parcial   10-01-2019   Duración prevista: 2h

---

1. a)$_{(1\text{p})}$Compara el orden de magnitud de las siguientes sucesiones:

$$\begin{cases} a_n &= (n+1)+(n+2)+(n+3)+...+2n \ , \\ b_n &= 1+2+3+...+n \end{cases}$$

b)$_{(1\text{p})}$ Calcula:

$$\lim_n \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{n+1} \right)^{n^2}$$

---

a) Para comparar el orden de magnitud tenemos que calcular el límite del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_n}{b_n} &= \lim_n \left(\frac{(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+2n}{1+2+3+...+n} \right) = (\text{Stolz}) \\
&= \lim_n \frac{((n+2)+(n+3)+...+2n+(2n+1)+(2n+2)) - ((n+1)+(n+2)+...+(2n))}{(1+2+3+...+n+(n+1)) - (1+2+3+...+n)} = \\
&= \lim_n \frac{(2n+1)+(2n+2)-(n+1)}{(n+1)} = \lim_n \frac{3n+2}{n+1} = 3
\end{aligned}$$

y podemos concluir que $a_n \approx b_n$. El límite también se puede resolver utilizando la fórmula de la suma de los n primeros números naturales.

b) Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la fórmula de Euler:

$$\lim_n \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{n+1} \right)^{n^2} = e^{\lim_n \left[n^2 \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{n+1} - 1 \right) \right]}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\lim_n \left(n^2 \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{n+1} - 1 \right) \right) &= \lim_n \frac{n^2 \left(\sqrt{n^2+1} - n \right)}{n+1} \underset{(\text{Ind } \infty - \infty)}{=} \lim_n \frac{n^2 \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \left(\sqrt{n^2+1} + n \right)}{(n+1) \left(\sqrt{n^2+1} + n \right)} = \\
&= \lim_n \frac{n^2}{(n+1) \left(\sqrt{n^2+1} + n \right)} = \lim_n \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) \left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \frac{n}{n} \right)} = \\
&= \lim_n \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$\lim_n \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{n+1} \right)^{n^2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

2. (2p) Resuelve la recurrencia lineal de segundo orden definida por

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3^{n-2} \\ a_1 = 9 \quad , \quad a_2 = 29 \end{cases}$$

La ecuación característica asociada a la recurrencia homogénea es

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

que tienes una raíz real doble $r = 2$.

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogéna puede escribirse mediante

$$a_n^H = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n$$

Una solución particular de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n^P = A \cdot 3^n$$

de donde

$$A \cdot 3^n - 4A \cdot 3^{n-1} + 4A \cdot 3^{n-2} = 3^{n-2} \;\Rightarrow\; 9A - 12A + 4A = 1 \quad \Rightarrow\; A = 1$$

por lo que

$$a_n^P = 3^n$$

Por tanto, podemos concluir que la solución general de la recurrencia completa será de la forma

$$a_n = a_n^H + a_n^P = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n + 3^n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{lcccc} \text{para } n = 1 \;\; ; & a_1 & = & 2C_1 + 2C_2 + 3 & = & 9 \\ \text{para } n = 2 \;\; ; & a_2 & = & 4C_1 + 8C_2 + 9 & = & 29 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 1$ y $C_2 = 2$. De aquí:

$$a_n = 2^n + n \cdot 2^{n+1} + 3^n$$

---

3 (1p) Halla el valor de las constantes A y B para que $a_n = A \cdot n \cdot 2^n + B$ sea una solución particular de la recurrencia

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5 \cdot 2^{n+2} + 4$$

Si $a_n = A \cdot n \cdot 2^n + B$ es solución de la recurrencia

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 5 \cdot 2^{n+2} + 4$$

al sustituir $a_n = A \cdot n \cdot 2^n + B$, $a_{n+1} = A \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1} + B$ y $a_{n+2}^p = A \cdot (n+2) \cdot 2^{n+2} + B$ en la recurrencia, se tendrá

$$
\begin{aligned}
\big(A\cdot(n+2)\cdot 2^{n+2}+B\big)+\big(A\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}+B\big)-6\,(A\cdot n\cdot 2^n+B) &= 5\cdot 2^{n+2}+4 \Leftrightarrow\\
4A\cdot(n+2)\cdot 2^n+2A\cdot(n+1)\cdot 2^n-6A\cdot n\cdot 2^n-4B &= 20\cdot 2^n+4 \ \Leftrightarrow\\
(4A\cdot n+8A+2A\cdot n+2A-6A\cdot n)\cdot 2^n-4B &= 20\cdot 2^n+4 \ \Leftrightarrow\\
10A\cdot 2^n-4B &= 20\cdot 2^n+4
\end{aligned}
$$

Igualando coeficientes, resulta

$$10A=20\ ,\ \ -4B=4\ \Leftrightarrow\ A=2\ ,\ B=-1$$

por lo que $a_n=n\cdot 2^{n+1}-1$ es una solución particular de la recurrencia completa

$$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=5\cdot 2^{n+2}+4$$

---

4. a)$_{(1\text{p})}$ Calcula la suma de la serie:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

b)$_{(1\text{p})}$ Encuentra el valor de n necesario para aproximar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\cdot n!}$ mediante la suma parcial s_n con una precisión de 10^{-5}. Calcula dicha aproximación.

c)$_{(1\text{p})}$ Sabiendo que $e^x=\sum_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{n!}$, halla la suma exacta de la serie del apartado anterior.

---

a) Escribiendo en columna los términos $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{1}}\\
a_2 &= \frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\
a_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\vdots\\
a_{n-2} &= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-2}}\\
a_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\\
a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

y, sumando (teniendo en cuenta que casi todos los términos se cancelan en diagonal), calculamos la suma parcial n-ésima

$$s_n=a_{1+}a+\cdots+a_n=-\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Por último, tomando límites,

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim s_n=\lim\left(-\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) La serie alternada

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n!}$$

verifica las condiciones del teorema de Leibniz, ya que la sucesión de término general

$$a_n = \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

es decreciente y tiende a 0. Para encontrar una aproximación con un error menor que 10^{-5} hemos de hallar N tal que $E_N < 10^{-5}$, lo cual se conseguirá si

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{2^{N+1} \cdot (N+1)!} < 10^{-5} \;\Leftrightarrow\; 2^{N+1} \cdot (N+1)! > 100000 \;\Leftrightarrow\; N \geq 6.$$

Y tomando $N = 6$ obtenemos la aproximación

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n!} = \frac{1}{2^1 \cdot 1!} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1}{2^4 \cdot 4!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!} - \frac{1}{2^6 \cdot 6!} = \frac{18131}{46080} = 0.3934678819...$$

c) Observa que, a partir de la serie de potencias de la función exponencial, podemos escribir:

$$e^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} = \frac{(-1)^0}{0! \cdot 2^0} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n}$$

de donde

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} = e^{-1/2} - 1$$

y, por tanto,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n!} = 1 - e^{-1/2} = 0.3934693402...$$

---

5. Dada la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-2)^n \cdot x^{2n+1}$$

a)$_{(1p)}$ Súmala donde converja indicando cuál es su intervalo de convergencia.

b)$_{(1p)}$ Teniendo en cuenta el resultado del apartado a), integra término a término para obtener el desarollo en serie de $\log(1 + 2x^2)$.

---

a) Se trata de una serie geométrica, de razón $r = -2x^2$, que podemos sumar

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-2)^n \cdot x^{2n+1} = x \sum_{n\geq 0} \left(-2x^2\right)^n = \frac{x}{1+2x^2}$$

para los valores de x tales que

$$\left|-2x^2\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x|^2 < \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow\; x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$$

que será su intervalo de convergencia.

b) A partir del resultado del apartado a)

$$\frac{x}{1+2x^2} = \sum_{n\geq 0}(-2)^n \cdot x^{2n+1} \quad \text{si} \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e integrando, mediante las técnicas habituales para series de potencias, resulta

$$\int \frac{x}{1+2x^2}dx = \sum_{n\geq 0}(-2)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + C \quad , \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde

$$\frac{1}{4}\log\left(1+2x^2\right) = \sum_{n\geq 0}(-2)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + C \quad , \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para hallar C, observa que

$$\frac{1}{4}\log(1) = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

En conclusión,

$$\log\left(1+2x^2\right) = \sum_{n\geq 0} 4\cdot(-2)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot 2^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{n+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot \frac{(2x^2)^{n+1}}{n+1} \quad , \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$