Departament de Matemàtica Aplicada
Unitat Docent de l'ETS d'Enginyeria Informàtica
Materials docents d'Àlgebra

Exercicis del Tema 1 (Unitat Temàtica 1)

26 de gener de 2012

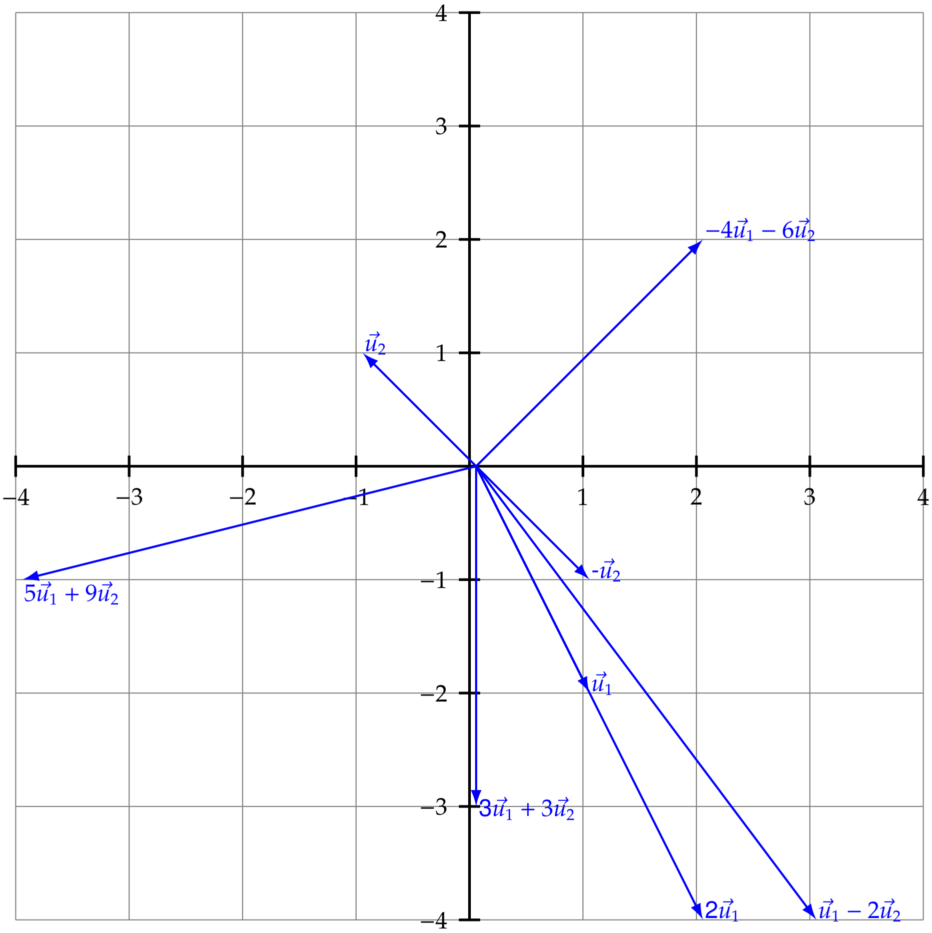
Exercici 2.1 *Considerem els vectors de* $\mathbb{R}^3$ *següents:* $\vec{u}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, -3)$ *i* $\vec{u}_3 = (-1, 3, -8)$. *Calculeu (a)* $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, *(b)* $3\vec{u}_3$ *i (c)* $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

(a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (1, -1, 2) + (0, 1, -3) = (1, 0, -1)$

(b) $3\vec{u}_3 = 3(-1, 3, -8) = (-3, 9, -24)$

(c) $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (1, -1, 2) - 2(0, 1, -3) + (-1, 3, -8) = (0, 0, 0)$

Exercici 2.2 *Siguen* $\vec{u}_1 = (1, -2)$ *i* $\vec{u}_2 = (-1, 1)$. *Representeu gràficament els vectors* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $2\vec{u}_1$, $-\vec{u}_2$, $3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$, $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $5\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2$ *i* $-4\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2$.



Exercici 2.3 *Calculeu les longituds dels vectors* $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$, $\vec{u} = (3,4)$ *i* $\vec{v} = (1,2)$.

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \left\|\vec{e}_1\right\| = \sqrt{1^2+0^2} = 1\\
&\text{(b)} \quad \left\|\vec{e}_2\right\| = \sqrt{0^2+1^2} = 1\\
&\text{(c)} \quad \left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5\\
&\text{(d)} \quad \left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Exercici 2.4 *Calculeu l'angle entre les següents parelles de vectors:*

1. $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *i* $\vec{v} = (0,1)$

   Les normes dels dos vectors són $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{3+1} = 2$ i $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{0+1} = 1$ i el producte escalar, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{3}\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$ així que el cosinus del angle que formen aquests dos vectors és

   $$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

   així que l'angle és $\pi/3$ (o 60º).

2. $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *i* $\vec{v} = (2,2)$

   $$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2 + 1\cdot 2}{\sqrt{3+1}\,\sqrt{4+4}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}$$

   En aquesta expressió pot ser difícil reconèixer l'angle, però si ens fixem que l'angle que formen aquests dos vectors amb l'horitzontal és $\pi/6$ i $\pi/4$, aleshores és fàcil veure que $\alpha = \pi/12$ (= 15º).

3. $\vec{u} = (1,2,3)$ *i* $\vec{v} = (1,2,6)$ *(ací podeu fer servir la calculadora)*

   $$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 6}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{1+4+36}} = \frac{23}{\sqrt{574}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{23}{\sqrt{574}} \approx 0{,}2838$$

4. $\vec{u} = (1,2,1,2)$ *i* $\vec{v} = (2,-1,-2,1)$

   En aquest cas $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ així que els dos vectors són ortogonals.

Exercici 2.5 *Calculeu el producte* $\mathsf{A}\vec{b}$*, essent* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ *i* $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$*, (a) element a element i (b) fent combinacions lineals de les columnes de* A.

(a)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 5 - 5\cdot 2 \\ 0\cdot 5 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.6 *Siga* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ *i* $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$. *Escriviu el vector* $\vec{b} = \mathsf{A}\vec{x}$ *com a combinació lineal de les columnes de* A.

$$\vec{b} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.7 *Calculeu els productes següents fent combinacions lineals de les files de la matriu* $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} & 2a_{13} + a_{23} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Exercici 2.8 *Calculeu el producte* AB *essent*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El nombre $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ és el determinant de A.