Ejercicios Tema 5

Percepción

Curso 2021/2022

1. Sean A y B dos clases con la misma probabilidad a priori y f.d. condicional de clase de tipo Bernoulli:

$$p(\mathbf{x} \mid A) \sim Be_2(\mathbf{p}_A) \quad \text{con} \quad \mathbf{p}_A = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad\qquad p(\mathbf{x} \mid B) \sim Be_2(\mathbf{p}_B) \quad \text{con} \quad \mathbf{p}_B = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

   a) Plantea el clasificador Bernoulli dados los parámetros anteriores

   b) Calcula el error global de este clasificador Bernoulli

2. Tenemos $N = 24$ vectores binarios bidimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones de Bernoulli independientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x_{n1}	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
x_{n2}	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
c_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

   a) Calcula el clasificador Bernoulli más probable con respecto a estos datos

   b) Repite el cálculo anterior considerando únicamente el primer bit

   c) Compara los dos clasificadores Bernoulli calculados

3. Tenemos $N = 12$ vectores binarios tridimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones Bernoulli independientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_{n1}	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
x_{n2}	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
x_{n3}	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c_n	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

   a) Calcula el clasificador Bernoulli más probable

   b) Clasifica la siguiente muestra de test $\mathbf{y} = (0\ 0\ 1)^t$

   c) Suaviza los prototipos Bernoulli con truncamiento simple ($\epsilon = 0{,}1$)

   d) Suaviza los prototipos Bernoulli con muestra ficticia

4. Se tiene un clasificador en dos clases basado en distribuciones Bernoulli bidimensionales, de forma que para la clase 1 se tiene $\mathbf{p}_1 = (0{,}3\ 0{,}2)^t$, y para la clase 2 se tiene $\mathbf{p}_2 = (0{,}6\ 0{,}8)^t$. Se pide clasificar la muestra $\mathbf{y} = (0\ 1)^t$ empleando $\arg\max_c P(c \mid \mathbf{y})$ sabiendo que la probabilidad condicional $p(\mathbf{y} \mid c) = \prod_d (p_{cd}\, y_d + (1 - p_{cd})(1 - y_d))$ y las probabilidades a priori son idénticas para ambas clases.

5. Tenemos $N = 12$ vectores binarios tridimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 3$ distribuciones Bernoulli independientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_{n1}	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0
x_{n2}	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
x_{n3}	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
c_n	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

   a) Estima todos los parámetros del clasificador Bernoulli más probable

   b) Suaviza los prototipos Bernoulli con truncamiento simple ($\epsilon = \frac{1}{8}$) y clasifica la muestra $\mathbf{y} = (0\ 0\ 1)^t$

6. Tenemos $N = 12$ vectores 4-dimensionales etiquetados:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_{n1}	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{n2}	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{n3}	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
x_{n4}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
c_n	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

   a) Calcula los parámetros del clasificador Bernoulli más probable respecto a estos datos, asumiendo que han sido aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones Bernoulli independientes

   b) Suaviza los parámetros Bernoulli del apartado anterior mediante truncamiento simple de $\epsilon = \frac{1}{3}$

7. Tenemos $N = 9$ vectores binarios bidimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones Bernoulli independientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_{n1}	1	0	0	1	1	1	1	1	0
x_{n2}	0	0	1	0	0	0	0	0	1
c_n	1	1	1	2	2	2	2	2	2

   a) Calcula los parámetros del clasicador Bernoulli más probable respecto a estos datos

   b) Calcula el error global

   c) Suaviza los parámetros Bernoulli de ambas clases aplicando truncamiento simple con $\epsilon = \frac{1}{4}$

   d) Clasifica el vector $\mathbf{y} = (1, 1)^t$ con el clasificador Bernoulli **suavizado** del apartado anterior

8. Sea A y B dos clases con igual probabilidad a priori y probabilidades condicionales de tipo multinomial:

$$p(\mathbf{x} \mid A) \sim Mult_2(x_+ = 5, \mathbf{p}_A) \;\text{ con }\; \mathbf{p}_A = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad p(\mathbf{x} \mid B) \sim Mult_2(x_+ = 5, \mathbf{p}_B) \;\text{ con }\; \mathbf{p}_B = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

   Para el correspondiente clasificador multinomial:

   a) Calcula las funciones discriminantes

   b) Calcula el error global

9. Tenemos $N = 20$ vectores de cuentas bidimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones multinomiales independientes de longitud 4:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_{n1}	4	3	3	4	2	3	4	2	3	2	2	1	1	4	1	2	3	3	3	0
x_{n2}	0	1	1	0	2	1	0	2	1	2	2	3	3	0	3	2	1	1	1	4
c_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

   a) Calcula el clasificador multinomial más probable respecto a estos datos.

   b) Calcula la probabilidad *a posteriori* para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \,:\, x_1 + x_2 = 4$.

10. Tenemos $N = 18$ vectores de cuentas 5-dimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 3$ distribuciones multinomiales independientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
car	0	0	0	0	2	0	2	0	3	2	2	0	0	0	1	1	0	0
people	2	0	1	0	2	1	0	3	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0
game	0	2	0	0	0	0	1	2	2	3	0	4	2	0	1	1	0	1
party	3	1	4	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
shell	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
c_n	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3

   a) Calcula el clasificador multinomial más probable respecto a estos datos

   b) Clasifica la siguiente muestra de test $\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)^t$

c) Suaviza los parámetros mediante Laplace con $\epsilon = 0{,}1$

d) Suaviza los parámetros con descuento absoluto de $\epsilon = 0{,}05$ y backing-off utilizando como distribución generalizada la distribución uniforme

e) Como el anterior pero con interpolación

11. Dados los parámetros de un clasificador multinomial $\hat{\mathbf{p}}_1 = (0{,}5\ 0{,}3\ 0{,}2\ 0{,}0\ 0{,}0)^t$ y $\hat{\mathbf{p}}_2 = (0{,}0\ 0{,}0\ 0{,}3\ 0{,}3\ 0{,}4)^t$ con probabilidades *a priori* idénticas, clasifica la muestra de test $\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)^t$ tras aplicar los siguientes suavizados:

   - Laplace con $\epsilon = 0{,}1$
   - Descuento absoluto con $\epsilon = 0{,}05$ y *backing-off* utilizando como distribución generalizada la distribución uniforme

12. Tenemos $N = 12$ vectores de cuentas 5-dimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones multinomiales independientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_{n1}	1	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0
x_{n2}	2	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0
x_{n3}	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
x_{n4}	1	0	2	1	0	2	1	2	1	1	2	1
x_{n5}	0	0	0	0	0	0	1	3	1	1	1	1
c_n	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

a) Calcula los parámetros del clasificador multinomial más probable respecto a estos datos

b) Suaviza los parámetros multinomial mediante Laplace con $\epsilon = 0{,}2$

c) Suaviza los parámetros con descuento absoluto de $\epsilon = 0{,}1$ e interpolación usando como distribución generalizada, la distribución uniforme

d) Suaviza los parámetros con descuento absoluto de $\epsilon = 0{,}1$ e interpolación usando como distribución generalizada, la distribución $g = (0{,}1\ 0{,}2\ 0{,}4\ 0{,}2\ 0{,}1)$, donde g_i es la probabilidad asociada a la dimensión i-ésima de $\mathbf{p}_c$

e) Clasifica la muestra de test $\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)^t$ con el clasificador multinomial resultante de aplicar los parámetros suavizados del apartado b)

13. Tenemos $N = 12$ vectores 4-dimensionales etiquetados:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_{n1}	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{n2}	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{n3}	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
x_{n4}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
c_n	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

a) Calcula los parámetros del clasificador multinomial más probable respecto a estos datos, asumiendo que han sido aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones multinomiales independientes

b) Suaviza los parámetros multinomiales del apartado anterior con descuento absoluto de $\epsilon = 0{,}2$ e interpolación usando como distribución generalizada, la distribución uniforme

14. Tenemos $N = 6$ cadenas de longitud $x_+ = 2$ procedentes de un vocabulario $V = \{a, b, c\}$ aleatoriamente extraídas de $C = 2$ distribuciones multinomiales independientes, donde las muestras de la clase 1 son $\mathcal{X}_1 = \{aa, bb, aa\}$ y las muestras de la clase 2 son $\mathcal{X}_2 = \{ab, bc, ac\}$. Se pide

a) Calcula los parámetros del clasificador multinomial más probable respecto a estos datos

b) Calcula el error global (Nota: $0^0 = 1$)

c) Suaviza los parámetros multinomiales de ambas clases aplicando Laplace con $\epsilon = \frac{1}{3}$

d) Clasifica la cadena $y = cc$ con el clasificador multinomial **suavizado** del apartado anterior

15. Tenemos $N = 16$ vectores de cuentas 5-dimensionales aleatoriamente extraídos de $C = 2$ distribuciones multinomiales independientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x_{n1}	1	2	1	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{n2}	2	1	0	1	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{n3}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
x_{n4}	1	0	2	1	0	2	3	3	1	2	1	1	2	1	1	3
x_{n5}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	1	1	1	1	3	1
c_n	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2

a) Calcula los parámetros del clasificador multinomial más probable respecto a estos datos

b) Suaviza los parámetros multinomial mediante Laplace con $\epsilon = 0{,}2$

c) Suaviza los parámetros con descuento absoluto de $\epsilon = 0{,}05$ e interpolación usando como distribución generalizada la distribución uniforme

d) Clasifica la muestra de test $\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)^t$ con el clasificador multinomial resultante de aplicar los parámetros suavizados del apartado c).

16. Sea A y B dos clases con igual probabilidad *a priori* y probabilidades condicionales de clase gaussianas:

$$p(\mathbf{x} \mid A) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_A, \Sigma_A) \qquad \text{y} \qquad p(\mathbf{x} \mid B) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_B, \Sigma_B)$$

Para cada uno de los casos de abajo:

- Calcula funciones discriminantes para A y B
- Calcula la frontera de decisión para el clasificador

	$\boldsymbol{\mu}_A$	Σ_A	$\boldsymbol{\mu}_B$	Σ_B		$\boldsymbol{\mu}_A$	Σ_A	$\boldsymbol{\mu}_B$	Σ_B
1	$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/8&0\\0&1/4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/2\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$	**5**	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1/8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/2\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/8&0\\0&1/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/2\end{pmatrix}$
					7	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4&0\\0&1/2\end{pmatrix}$

17. Tenemos $N = 6$ vectores reales bidimensionales extraídos aleatoriamente de $C = 2$ distribuciones gaussianas con matriz de covarianza común:

n	1	2	3	4	5	6
x_{n1}	3	3	6	6	9	9
x_{n2}	3	9	6	3	6	0
c_n	1	1	1	2	2	2

a) Calcula el clasificador gaussiano más probable respecto a estos datos

b) Calcula la frontera de decisión del clasificador anterior

c) Clasifica los puntos $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$

18. Tenemos $N = 10$ valores reales extraídos aleatoriamente de $C = 2$ distribuciones gaussianas:

$$(1{,}0, A), (1{,}2, A), (1{,}3, A), (1{,}1, A), (0{,}9, A)$$
$$(1{,}3, B), (1{,}2, B), (1{,}4, B), (1{,}2, B), (1{,}3, B)$$

Se pide:

a) Calcula el clasificador gaussiano más probable respecto a estos datos

b) Calcula la frontera de decisión del clasificador anterior

c) Clasifica el punto $x = 1{,}15$ suponiendo que ambas clases son equiprobables

19. Sean A, B y C tres clases con igual probabilidad *a priori* y f.d. condicional de clase gaussianas gobernadas por sus parámetros

$$\boldsymbol{\mu}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \Sigma_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula $p(\mathbf{x} \mid A)$, $p(\mathbf{x} \mid B)$ y $p(\mathbf{x} \mid C)$ para $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

20. Se tiene un clasificador en dos clases basado en distribuciones gaussianas unidimensionales, de forma que para la clase 1 se tiene $\mu_1 = 0$, $\sigma_1 = 2$, y para la clase 2 se tiene $\mu_2 = 1$, $\sigma_2 = 1$. Se pide clasificar el punto $y = 0{,}5$ empleando $\arg\max P(c|y)$ teniendo probabilidades *a priori* idénticas para ambas clases.

21. Se definen las clases A y B en un espacio bidimensional; cada clase está modelada respectivamente por una gaussiana, de forma que sus parámetros son:

$$\boldsymbol{\mu}_A = (\ 1 \quad 1\ )^t \quad \Sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_B = (\ 0 \quad -1\ )^t \quad \Sigma_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que las probabilidades *a priori* de cada clase son $P(A) = 0{,}4$ y $P(B) = 0{,}6$, clasifica la muestra $\mathbf{x} = (\ 1 \quad -1\ )^t$.

22. Sea A, B y C tres clases con probabilidades *a priori* $p(A) = 1/2$ y $p(B) = p(C) = 1/4$, y f.d.p. condicionales de clase gaussianas $p(\mathbf{x} \,|\, A) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_A, \Sigma_A)$, $p(\mathbf{x} \,|\, B) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_B, \Sigma_B)$ y $p(\mathbf{x} \,|\, C) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_C, \Sigma_C)$

$$\boldsymbol{\mu}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Sigma_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_C = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Sigma_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula funciones discriminantes para A, B y C

b) Calcula la frontera de decisión entre las clases A y B

c) Calcula la frontera de decisión entre las clases B y C

d) Clasifica la muestra $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nota: $\Sigma_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $\Sigma_B^{-1} = \Sigma_C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

23. Sea A y B dos clases con probabilidades *a priori* $p(A) = 1/2$ y $p(B) = 1/2$, y f.d.p. condicionales de clase gaussianas $p(\mathbf{x} \,|\, A) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_A, \Sigma_A)$ y $p(\mathbf{x} \,|\, B) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_B, \Sigma_B)$

$$\boldsymbol{\mu}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma_A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula funciones discriminantes para A y B

b) Calcula la frontera de decisión entre las clases A y B

c) Representa gráficamente la frontera y las regiones de decisión

d) Se desea suavizar las matrices de covarianza de ambas clases mediante *flat smoothing*. Calcula el valor de α necesario para que el clasificador resultante sea lineal

Nota: $\Sigma_A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $\Sigma_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

24. Sea A y B dos clases con probabilidades *a priori* $p(A) = 1/4$ y $p(B) = 3/4$, y f.d.p. condicionales de clase gaussianas $p(\mathbf{x} \,|\, A) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_A, \Sigma_A)$ y $p(\mathbf{x} \,|\, B) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_B, \Sigma_B)$

$$\boldsymbol{\mu}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula funciones discriminantes para A y B

b) Calcula la frontera de decisión entre las clases A y B

c) Representa gráficamente la frontera y las regiones de decisión

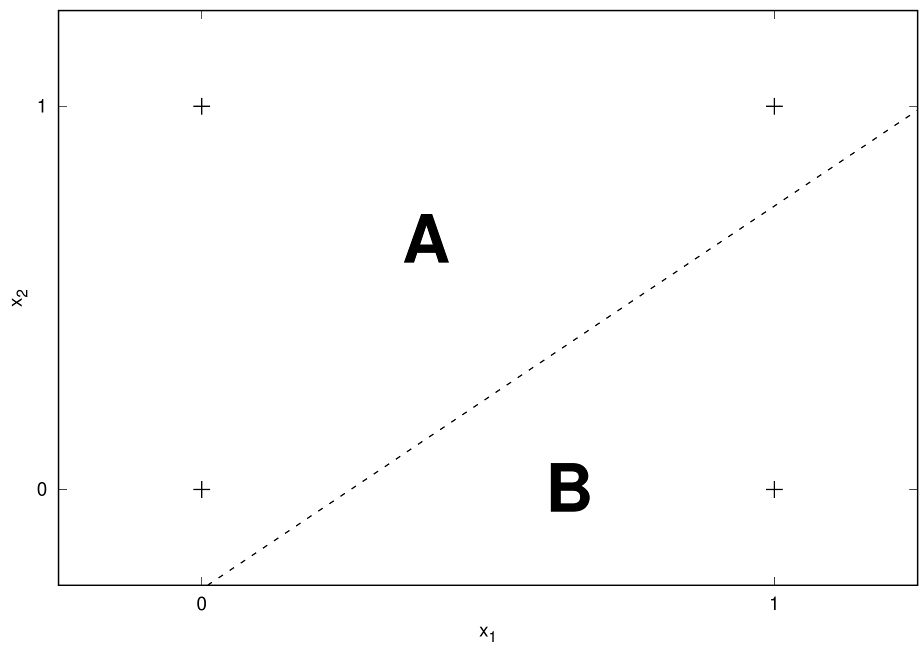
Soluciones

1. *a*)

$$g_A(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_2} \qquad g_B(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_2}\left(\frac{3}{4}\right)^{1-x_2}$$

Si tuvieramos que calcular la frontera de decisión entre la clase A y B, es más sencillo hacerlo para los clasificadores equivalentes usando $\log_2$:

$$\begin{aligned}
\log_2 g_A(\mathbf{x}) &= \log_2 g_B(\mathbf{x}) \\
-1 - x_1 - (1-x_1) - x_2 - (1-x_2) &= -1 + x_1 \log_2 \frac{3}{4} + (1-x_1)\log_2 \frac{1}{4} + x_2 \log_2 \frac{1}{4} + (1-x_2)\log_2 \frac{3}{4} \\
-3 &= -1 + x_1(\log_2 3 - 2) - 2(1-x_1) - 2\,x_2 + (1-x_2)(\log_2 3 - 2) \\
-3 &= -1 + x_1 \log_2 3 - 2 - 2\,x_2 + \log_2 3 - 2 - x_2 \log_2 3 + 2x_2 \\
-3 &= -5 + \log_2 3 + x_1 \log_2 3 - x_2 \log_2 3 \\
x_2 &= \frac{-2 + \log_2 3}{\log_2 3} + x_1 = -0{,}26 + x_1
\end{aligned}$$



b) En general, el error global $p(e)$ se calcula como

$$p(e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\, p(e \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \left(1 - \max_c p(c \mid \mathbf{x})\right).$$

Aplicamos Bayes y simplificamos la expresión teniendo en cuenta que sólo tenemos dos clases

$$\begin{aligned}
p(e) &= \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \min_c p(c \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \min_c \frac{p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c)}{p(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c) \\
&= \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(c) \prod_d p_{cd}^{x_d} (1 - p_{cd})^{(1-x_d)} \\
&= \sum_{\mathbf{x}} \min \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{x_1} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(1-x_1)} \cdot \frac{1}{2}^{x_2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(1-x_2)}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}^{x_1} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{(1-x_1)} \cdot \frac{1}{4}^{x_2} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{(1-x_2)} \right) \\
&= 0{,}34375
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. *a)*

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x_2} \qquad g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x_2}$$

b)

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x_1} \qquad g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x_1}$$

c) Son equivalentes

3. *a)*

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1)^{x_1}(0)^{1-x_1}\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_3}$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x_2}(0)^{x_3}(1)^{1-x_3}$$

b) Ambas F.D. dan valor 0, no es posible clasificar.

c)

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \left(\frac{9}{10}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right)^t$$

d)

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)^t$$

4. (Examen Recuperación Primer Parcial 2013)

$$\hat{c}(\mathbf{y}) = \arg\max_c P(c \mid \mathbf{y}) \approx \arg\max_c p(\mathbf{y} \mid c)\, p(c)$$

Para la clase 1:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y} = (0\ 1)^t \mid c = 1) &= (p_{11}\, y_1 + (1 - p_{11})(1 - y_1)) \cdot (p_{12}\, y_2 + (1 - p_{12})(1 - y_2)) \\ &= (0{,}3 \cdot 0 + (1 - 0{,}3) \cdot (1 - 0)) \cdot (0{,}2 \cdot 1 + (1 - 0{,}2) \cdot (1 - 1)) \\ &= 0{,}14 \end{aligned}$$

Para la clase 2:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y} = (0\ 1)^t \mid c = 2) &= (p_{21}\, y_1 + (1 - p_{21})(1 - y_1)) \cdot (p_{22}\, y_2 + (1 - p_{22})(1 - y_2)) \\ &= (0{,}6 \cdot 0 + (1 - 0{,}6)(1 - 0)) \cdot (0{,}8 \cdot 1 + (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 1)) \\ &= 0{,}32 \end{aligned}$$

Dado que $p(c = 1) = p(c = 2) = 0{,}5$, la muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 2.

5. (Examen Recuperación Segundo Parcial 2013)

   a)

$$p(1) = p(2) = p(3) = \frac{1}{3}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+1+1+1 \\ 0+0+0+0 \\ 1+0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0+0+0+0 \\ 1+1+0+1 \\ 1+1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{p}}_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0+1+1+0 \\ 1+1+1+1 \\ 0+0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   b)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 1/8 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/4 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{p}}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

   En nuestro caso, dado que las priors son idénticas, la regla de clasificación se reduce a:

$$p(\mathbf{y} = (0\;0\;1) \mid c = 1) = (7/8)^0(1-7/8)^{(1-0)}(1/8)^0(1-1/8)^{(1-0)}(1/2)^1(1-1/2)^{(1-1)} = 1/8 \cdot 7/8 \cdot 1/2 = \frac{7}{128}$$
$$p(\mathbf{y} = (0\;0\;1) \mid c = 2) = (1/8)^0(1-1/8)^{(1-0)}(3/4)^0(1-3/4)^{(1-0)}(7/8)^1(1-7/8)^{(1-1)} = 7/8 \cdot 1/4 \cdot 7/8 = \frac{49}{256}$$
$$p(\mathbf{y} = (0\;0\;1) \mid c = 3) = (1/2)^0(1-1/2)^{(1-0)}(7/8)^0(1-7/8)^{(1-0)}(1/8)^1(1-1/8)^{(1-1)} = 1/2 \cdot 1/8 \cdot 1/8 = \frac{1}{128}$$

   La muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 2.

6. (Examen Recuperación Segundo Parcial 2014)

   a)

$$p(1) = p(2) = \frac{6}{12} = 0{,}5$$
$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+0+1+1+0+1 \\ 0+1+1+1+0+1 \\ 0+0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0+0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0+0 \\ 1+1+0+1+0+1 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 2/3 \\ 1{,}0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 2/3 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

7. (Examen Recuperación Segundo Parcial 2015)

a)

$$p(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad p(2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+0+0 \\ 0+0+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+1+1+1+1+0 \\ 0+0+0+0+0+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

b) En general, el error global $p(e)$ se calcula como

$$p(e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\, p(e \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \left(1 - \max_c p(c \mid \mathbf{x})\right).$$

Aplicamos Bayes y simplificamos la expresión teniendo en cuenta que sólo tenemos dos clases

$$p(e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \min_c p(c \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \min_c \frac{p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c)}{p(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c) = \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(c) \prod_d p_{cd}^{x_d} (1 - p_{cd})^{(1-x_d)}$$

$$= \sum_{\mathbf{x}} \min \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}^{x_1} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{(1-x_1)} \cdot \frac{1}{3}^{x_2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{(1-x_2)}, \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}^{x_1} \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{(1-x_1)} \cdot \frac{1}{6}^{x_2} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{(1-x_2)} \right)$$

$\mathbf{x}$		$p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c)$		
x_1	x_2	$c = 1$	$c = 2$	$\min_c$
0	0	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{10}{108}$
0	1	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{108}$
1	0	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{2}{27}$
1	1	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{27}$

Sumando el mínimo de $p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c)$ para cada $\mathbf{x}$:

$$p(e) = \frac{10}{108} + \frac{2}{108} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{9}$$

c)

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

d) Aplicamos la regla de clasificación de Bayes:

$$\hat{c}(\mathbf{y}) = \arg\max_c p(c)\, p(\mathbf{y} \mid c) = p(c) \prod_d \; p_{cd}^{y_d} \, (1 - p_{cd})^{(1-y_d)}$$

$$p(c=1)\, p(\mathbf{y} = (1\ 1)^t \mid c=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}^{y_1} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{(1-y_1)} \cdot \frac{1}{3}^{y_2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{(1-y_2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

$$p(c=2)\, p(\mathbf{y} = (1\ 1)^t \mid c=2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}^{y_1} \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{(1-y_1)} \cdot \frac{1}{4}^{y_2} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{(1-y_2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

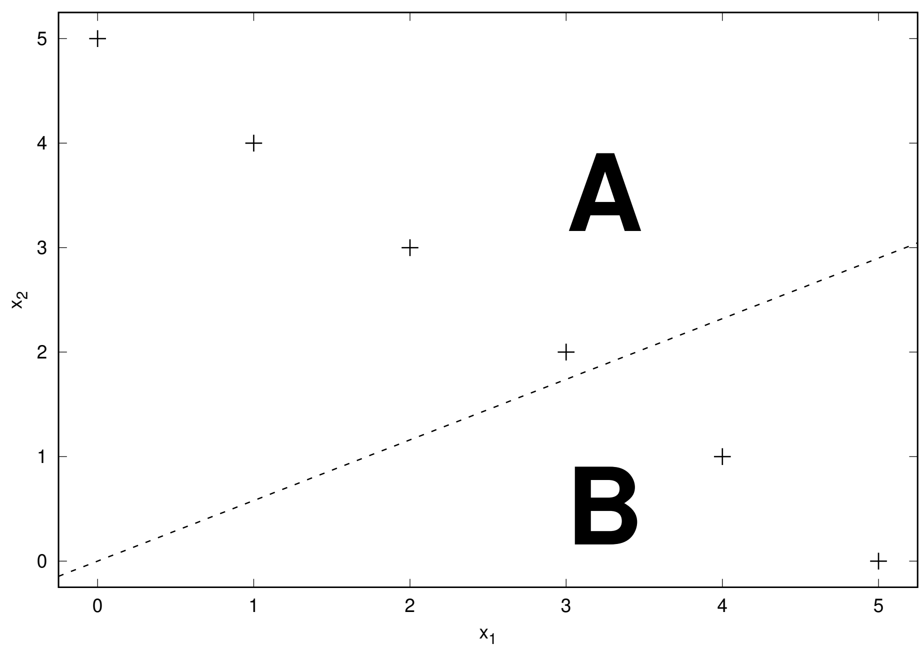
La muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 2.

8. *a*)

$$g_A(\mathbf{x}) = \frac{5}{x_1!\, x_2!} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \qquad g_B(\mathbf{x}) = \frac{5}{x_1!\, x_2!} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{x_2}$$

Si tuvieramos que calcular la frontera de decisión entre la clase A y B, es más sencillo hacerlo para los clasificadores equivalentes usando $\log_2$:

$$\begin{aligned} \log_2 g_A(\mathbf{x}) &= \log_2 g_B(\mathbf{x}) \\ x_1 \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + x_2 \log_2\left(\frac{1}{2}\right) &= x_1 \log_2\left(\frac{3}{4}\right) + x_2 \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ -x_1 - x_2 &= -2\,x_1 + x_1 \log_2 3 - 2\,x_2 \\ x_2 &= x_1(\log_2 3 - 1) = 0{,}58\, x_1 \end{aligned}$$



b) En general, el error global $p(e)$ se calcula como

$$p(e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\, p(e \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \, \left(1 - \max_c p(c \mid \mathbf{x})\right).$$

Aplicamos Bayes y simplificamos la expresión teniendo en cuenta que sólo tenemos dos clases

$$\begin{aligned} p(e) &= \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \, \min_c p(c \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \, \min_c \frac{p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c)}{p(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c) \\ &= \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(c) \, \frac{N!}{\prod_d x_d!} \prod_d \; p_{cd}^{x_d} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la probabilidad a priori es la misma para las dos clase, es decir, es constante, y el coeficiente multinomial no depende de la clase

$$\begin{aligned} p(e) &= p(c) \sum_{\mathbf{x}} \frac{N!}{\prod_d x_d!} \min_c \prod_d p_{cd}^{x_d} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \frac{5!}{x_1!\, x_2!} \min\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}, \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{x_2} \right) \\ &= \frac{568}{2048} \approx 0{,}2773 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

9. *a)*

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

x^t	(0,4)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(4,0)
$p(1\|\mathbf{x})$	$\frac{1}{17}$	$\frac{12}{76}$	$\frac{54}{150}$	$\frac{108}{172}$	$\frac{81}{97}$
$p(2\|\mathbf{x})$	$\frac{16}{17}$	$\frac{64}{76}$	$\frac{96}{150}$	$\frac{64}{172}$	$\frac{16}{97}$

10. *a)*

$$g_1(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{x_1} \left(\frac{3}{10}\right)^{x_2} \left(\frac{1}{10}\right)^{x_3} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_4} (0)^{x_5}$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \left(\frac{3}{10}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2} \left(\frac{2}{5}\right)^{x_3} (0)^{x_4} \left(\frac{1}{10}\right)^{x_5}$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1} (0)^{x_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (0)^{x_4} \left(\frac{3}{10}\right)^{x_5}$$

b) Todas las F.D. dan valor 0, no es posible clasificar.

c)

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{15}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \left(\frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_3 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{15}, \frac{4}{15}\right)^t$$

d)

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{5}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{7}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_3 = \left(\frac{3}{20}, \frac{3}{40}, \frac{9}{20}, \frac{3}{40}, \frac{1}{4}\right)^t$$

e)

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \left(\frac{9}{100}, \frac{29}{100}, \frac{9}{100}, \frac{49}{100}, \frac{4}{100}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_2 = \left(\frac{29}{100}, \frac{19}{100}, \frac{39}{100}, \frac{4}{100}, \frac{9}{100}\right)^t \qquad \tilde{\mathbf{p}}_3 = \left(\frac{18}{100}, \frac{3}{100}, \frac{48}{100}, \frac{3}{100}, \frac{28}{100}\right)^t$$

11. (Segundo Parcial Junio 2013)

   a)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{1{,}5} \begin{pmatrix} 0{,}5+0{,}1 \\ 0{,}3+0{,}1 \\ 0{,}2+0{,}1 \\ 0{,}0+0{,}1 \\ 0{,}0+0{,}1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1{,}5} \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{1{,}5} \begin{pmatrix} 0{,}0+0{,}1 \\ 0{,}0+0{,}1 \\ 0{,}3+0{,}1 \\ 0{,}3+0{,}1 \\ 0{,}4+0{,}1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1{,}5} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

   En nuestro caso, dado que las priors son idénticas, la regla de clasificación se reduce a:

$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 1) = \frac{0{,}6}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}4}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}3}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}1}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}1}{1{,}5} = 0{,}00009$$

$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 2) = \frac{0{,}1}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}1}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}4}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}4}{1{,}5} \cdot \frac{0{,}5}{1{,}5} = 0{,}0001$$

   La muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 2.

   b)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5-0{,}05 & \\ 0{,}3-0{,}05 & \\ 0{,}2-0{,}05 & \\ 0{,}0 & +\frac{1}{2}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}0 & +\frac{1}{2}\cdot 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}25 \\ 0{,}15 \\ 0{,}075 \\ 0{,}075 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 & +\frac{1}{2}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}0 & +\frac{1}{2}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}3-0{,}05 & \\ 0{,}3-0{,}05 & \\ 0{,}4-0{,}05 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}075 \\ 0{,}075 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}$$

$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 1) = 0{,}45 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}075 \cdot 0{,}075 = 0{,}00009$$

$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 2) = 0{,}075 \cdot 0{,}075 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}35 = 0{,}0001$$

   La muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 2.

12. (Segundo Parcial Junio 2014)

   a)

$$p(1) = p(2) = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1+2+1+1+2+1 \\ 2+1+0+1+2+0 \\ 0+0+0+0+0+0 \\ 1+0+2+1+0+2 \\ 0+0+0+0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 0+0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0+0 \\ 1+1+0+1+0+1 \\ 1+2+1+1+2+1 \\ 1+3+1+1+1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{2{,}0} \begin{pmatrix} 0{,}4 + 0{,}2 \\ 0{,}3 + 0{,}2 \\ 0{,}0 + 0{,}2 \\ 0{,}3 + 0{,}2 \\ 0{,}0 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}25 \\ 0{,}10 \\ 0{,}25 \\ 0{,}10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{2{,}0} \begin{pmatrix} 0{,}0 + 0{,}2 \\ 0{,}0 + 0{,}2 \\ 0{,}2 + 0{,}2 \\ 0{,}4 + 0{,}2 \\ 0{,}4 + 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}10 \\ 0{,}20 \\ 0{,}30 \\ 0{,}30 \end{pmatrix}$$

c)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 - 0{,}1 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}3 - 0{,}1 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}0 \qquad\; + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}3 - 0{,}1 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}0 \qquad\; + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}26 \\ 0{,}06 \\ 0{,}26 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \qquad\; + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}0 \qquad\; + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}2 - 0{,}1 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}4 - 0{,}1 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \\ 0{,}4 - 0{,}1 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}06 \\ 0{,}06 \\ 0{,}16 \\ 0{,}36 \\ 0{,}36 \end{pmatrix}$$

d)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 - 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}3 - 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}0 \qquad\; + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}3 - 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}0 \qquad\; + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}26 \\ 0{,}12 \\ 0{,}26 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \qquad\; + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}0 \qquad\; + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}4 - 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}4 - 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}06 \\ 0{,}22 \\ 0{,}36 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$$

e) En nuestro caso, dado que las priors son idénticas, la regla de clasificación se reduce a:

$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 1) = 0{,}30 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}10 = 0{,}0001875$$
$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 2) = 0{,}10 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}30 = 0{,}00018$$

La muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 1.

13. (Recuperación Segundo Parcial Junio 2014)

a)

$$
\begin{aligned}
p(1) = p(2) &= \frac{6}{12} = 0{,}5 \\
\hat{\mathbf{p}}_1 = & \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1+0+1+1+0+1 \\ 0+1+1+1+0+1 \\ 0+0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \\
\hat{\mathbf{p}}_2 = & \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0+0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0+0 \\ 1+1+0+1+0+1 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \\ 0{,}5 - 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \\ 0{,}0 \qquad + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \\ 0{,}0 \qquad + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \\
\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \qquad + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \\ 0{,}0 \qquad + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \\ 0{,}4 - 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \\ 0{,}6 - 0{,}2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

14. (Segundo Parcial Junio 2015)

a) Representando nuestros datos como vectores de contadores tenemos

	aa	bb	aa	ab	bc	ac
x_a	2	0	2	1	0	1
x_b	0	2	0	1	1	0
x_c	0	0	0	0	1	1
c_n	1	1	1	2	2	2

La estimación de los parámetros del clasificador multinomial es

$$
\begin{aligned}
p(1) = p(2) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
\hat{\mathbf{p}}_1 &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2+0+2 \\ 0+2+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\hat{\mathbf{p}}_2 &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+0+1 \\ 1+1+0 \\ 0+1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) En general, el error global $p(e)$ se calcula como

$$
p(e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, e) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\, p(e \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \left(1 - \max_c p(c \mid \mathbf{x})\right).
$$

Como sólo tenemos dos clases con igual prior y aplicando Bayes

$$
\begin{aligned}
p(e) &= \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\ \min_c p(c \mid \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\ \min_c \frac{p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c)}{p(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(c)\, p(\mathbf{x} \mid c) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \min_c p(\mathbf{x} \mid c) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \frac{x_+!}{x_1!\, x_2!\, x_3!} \min\left(p_{1a}^{x_a} \cdot p_{1b}^{x_b} \cdot p_{1c}^{x_c},\, p_{2a}^{x_a} \cdot p_{2b}^{x_b} \cdot p_{2c}^{x_c}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \frac{x_+!}{x_1!\, x_2!\, x_3!} \min\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x_a} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x_b} \cdot 0^{x_c},\, \left(\frac{1}{3}\right)^{x_a} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x_b} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x_c}\right)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{x}$			$\frac{x_+!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}$	$\prod_d p_{cd}^{x_d}$		
x_a	x_b	x_c		$c=1$	$c=2$	$\min_c$
0	0	2	1	0	$\frac{1}{9}$	0
0	2	0	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	0	0	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
0	1	1	2	0	$\frac{1}{9}$	0
1	0	1	2	0	$\frac{1}{9}$	0
1	1	0	2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Sumando para cada $\mathbf{x}$:

$$p(e) = \frac{1}{2}\left(1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9}$$

c)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ 0 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d) En nuestro caso, dado que las priors son idénticas, la regla de clasificación se reduce a:

$$\hat{c}(\mathbf{y}) = \arg\max_c p(\mathbf{y} \mid c) = \arg\max_c \prod_d p_{cd}^{y_d}$$

$$p(\mathbf{y} = (0\ 0\ 2)^t \mid c = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$p(\mathbf{y} = (0\ 0\ 2)^t \mid c = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

La muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 2.

15. (Recuperación Segundo Parcial Junio 2016)

a)

$$p(1) = p(2) = \frac{8}{16} = 0{,}5$$

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1+2+1+1+2+1+1+0 \\ 2+1+0+1+2+0+0+3 \\ 0+0+0+0+0+0+0+0 \\ 1+0+2+1+0+2+3+3 \\ 0+0+0+0+0+0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}4 \\ 0{,}0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0+0+0+0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0+0+0+0 \\ 1+1+0+1+0+1+1+1 \\ 1+2+1+1+2+1+1+3 \\ 1+3+1+1+1+1+3+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}4 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{2{,}0}\begin{pmatrix} 0{,}3+0{,}2 \\ 0{,}3+0{,}2 \\ 0{,}0+0{,}2 \\ 0{,}4+0{,}2 \\ 0{,}0+0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}10 \\ 0{,}30 \\ 0{,}10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{2{,}0}\begin{pmatrix} 0{,}0+0{,}2 \\ 0{,}0+0{,}2 \\ 0{,}2+0{,}2 \\ 0{,}4+0{,}2 \\ 0{,}4+0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}10 \\ 0{,}20 \\ 0{,}30 \\ 0{,}30 \end{pmatrix}$$

c)

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \\ 0{,}3 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 - 0{,}05 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}3 - 0{,}05 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}0 \qquad\quad + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}3 - 0{,}05 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}0 \qquad\quad + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}28 \\ 0{,}03 \\ 0{,}28 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0 \qquad\quad + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}0 \qquad\quad + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}2 - 0{,}05 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}4 - 0{,}05 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \\ 0{,}4 - 0{,}05 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}03 \\ 0{,}18 \\ 0{,}38 \\ 0{,}38 \end{pmatrix}$$

d) En nuestro caso, dado que las priors son idénticas, la regla de clasificación se reduce a:

$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 1) = 0{,}38 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}03 = 2{,}7 \cdot 10^{-5}$$
$$p(\mathbf{y} = (1\ 1\ 1\ 1\ 1) \mid c = 2) = 0{,}03 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}38 = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$$

La muestra $\mathbf{y}$ se clasifica en la clase 1.

16. - Caso 1:
$$g_A(\mathbf{x}) = 3x_1 - \log 2 - \frac{9}{2}$$
$$g_B(\mathbf{x}) = 3x_2 - \log 2 - \frac{9}{2}$$
Frontera: $x_1 = x_2$
- Caso 2:
$$g_A(\mathbf{x}) = -3x_1 + 5x_2 - \log 2 - \frac{29}{2}$$
$$g_B(\mathbf{x}) = -x_1 + 5x_2 - \log 2 - \frac{41}{2}$$
Frontera: $x_1 = 3$
- Caso 3:
$$g_A(\mathbf{x}) = -\log 2$$
$$g_B(\mathbf{x}) = -8x_1 + 4x_2 - \log 2 - 8$$
Frontera: $x_2 = 2x_1 + 2$
- Caso 4:
$$g_A(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - 2x_2^2 + \frac{3}{2}\log 2$$
$$g_B(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 + \frac{1}{2}\log 2 - 4$$
Frontera: $2x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 = \log 2 + 4$
- Caso 5:
$$g_A(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2 + \log 2$$
$$g_B(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 + \frac{1}{2}\log 2 - 4$$
Frontera: $-x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2 = \frac{1}{2}\log 2 + 4$
- Caso 6:
$$g_A(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - x_2^2 + \log 2$$
$$g_B(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 + \frac{1}{2}\log 2 - 4$$
Frontera: $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{8}\log 2 + 1$
- Caso 7:
$$g_A(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + \log 2$$
$$g_B(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 + \frac{1}{2}\log 2 - 4$$
Frontera: $x_2^2 + 4x_2 - \frac{1}{2}\log 2 - 4 = 0$
$x_2 = -2 \pm \sqrt{8 + \frac{1}{2}\log 2} = \begin{cases} 0{,}89 \\ -4{,}89 \end{cases}$

17. *a*) $P(1) = P(2) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{6}x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 14$, $g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{6}x_2^2 - 8x_1 - x_2 + \frac{67}{2}$
b) $8x_1 - 2x_2 - 39 = 0$
c) Clases 1 y 2, respectivamente

18. *a*) $\mu_A = 1{,}1$, $\mu_B = 1{,}28$, $\sigma_A^2 = 0{,}02$, $\sigma_B^2 = 0{,}0056$,
$$g_A(x) = P(A)(0{,}02)^{-\frac{1}{2}}\exp(-25(x-1{,}1)^2) \qquad g_B(x) = P(B)(0{,}0056)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{(x-1{,}28)^2}{0{,}0112}\right)$$
b) $64{,}286x^2 - 173{,}57x + 176{,}536 + \log P(A) + \log P(B) - \frac{1}{2}\log 0{,}02 - \frac{1}{2}\log 0{,}0056 = 0$
c) Clase A

19. $p(\mathbf{x}|A) \approx 0{,}205$, $p(\mathbf{x}|B) \approx 0{,}373$, $p(\mathbf{x}|C) \approx 0{,}086$

20. (Examen Primer Parcial 2013)
Para clase 1: $p(0{,}5|1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}5-0}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{32}}$
Para clase 2: $p(0{,}5|2) = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}5-1}{1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{8}}$
Tomando log en clase 1: $\log p(0{,}5|1) = \log\frac{1}{2} + \log\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{32}$
Tomando log en clase 2: $\log p(0{,}5|2) = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{8}$
Llamando $K = \log\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, tenemos para clase 1: $\log p(0{,}5|1) = -\log 2 - \frac{1}{32} + K = -0{,}69 - 0{,}03 + K = -0{,}72 + K$
Y para clase 2: $\log p(0{,}5|2) = -\frac{1}{8} + K = -0{,}13 + K = -0{,}13 + K$
Por tanto, al tener idénticas probabilidades a priori, se clasifica en clase 2

21. (Examen Recuperación Segundo Parcial 2013)

Usando clasificación por máxima verosimilitud y regla de Bayes, el problema se reduce a calcular

$$c^* = \underset{c\in\{A,B\}}{\arg\max}\, P(c)p(\mathbf{x}|c)$$

Por tanto:

$$p(\mathbf{x}|A) = \frac{1}{|\Sigma_A|^{\frac{1}{2}}2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_A)^t\Sigma_A^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_A)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \cdot e^{-1}$$

$$p(\mathbf{x}|B) = \frac{1}{|\Sigma_B|^{\frac{1}{2}}2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_B)^t\Sigma_B^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_B)} \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{6}}$$

$$P(A|\mathbf{x}) = P(A)p(\mathbf{x}|A) = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \cdot e^{-1} \approx 0{,}0166$$

$$P(B|\mathbf{x}) = P(B)p(\mathbf{x}|B) = 0{,}6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \cdot e^{-\frac{1}{6}} \approx 0{,}0467$$

Por tanto, se clasifica en la clase **B**.

22. (Examen Segundo Parcial 2014)

a) En general, la función discriminante de un clasificador basado en la regla de Bayes se define como

$$g_c(\mathbf{x}) = p(c) \cdot p(\mathbf{x}|c)$$

o de forma equivalente

$$g_c(\mathbf{x}) = \log p(c) + \log p(\mathbf{x}|c)$$

siendo

$$p(\mathbf{x}\,|\,c) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_c, \Sigma_c) = (2\pi)^{-1} \cdot |\Sigma_c|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_c)^t\Sigma_c^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_c)\right)$$

aplicamos logaritmo neperiano y operamos para simplificar la expresión resultante eliminando la constante $(2\pi)^{-1}$

$$g_c(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^t\Sigma_c^{-1}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}_c^t\Sigma_c^{-1}\mathbf{x} + \left(\log p(c) - \frac{1}{2}\log|\Sigma_c| - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_c^t\Sigma_c^{-1}\boldsymbol{\mu}_c\right)$$

Las funciones discriminantes de las clases serían:

$$\begin{aligned} g_A(\mathbf{x}) =& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &+ \left(\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ =& -\frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + \log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 4 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} g_B(\mathbf{x}) =& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &+ \left(\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ =& -x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 + \log\frac{1}{4} - 10 \end{aligned} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
g_C(\mathbf{x}) =& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&+ \left(\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\
=& -x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + \log\frac{1}{4} - 10
\end{aligned}
$$

b) La frontera de decisión entre las clases A y B se obtiene igualando sus respectivas funciones discriminantes

$$g_A(\mathbf{x}) = g_B(\mathbf{x})$$

Por tanto,

$$-\frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + \log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 4 = -x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 + \log\frac{1}{4} - 10$$

que resulta en una curva cuadrática

$$\frac{3}{4}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 10 = 0$$

c) Al igual que en el apartado b) igualamos las funciones discriminantes, pero en este caso las de las clase B y C

$$-x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 + \log\frac{1}{4} - 10 = -x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + \log\frac{1}{4} - 10$$

que como esperábamos definen una frontera de decisión lineal

$$3x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1$$

dado que la matriz de covarianza es común a ambas clases.

d) Aplicamos la regla de clasificación a la muestra $\mathbf{y}$

$$\hat{c}\,(\mathbf{y}) = \arg\max_c g_c(\mathbf{y})$$

Esto es

$$
\begin{aligned}
g_A(\mathbf{y}) &= -\frac{1}{4}1^2 - \frac{1}{4}1^2 + \log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 4 = -1{,}89 \\
g_B(\mathbf{y}) &= -1^2 - 1 - \frac{1}{2}1^2 + 6 + 4 + \log\frac{1}{4} - 10 = -3{,}89 \\
g_C(\mathbf{y}) &= -1^2 - 1 - \frac{1}{2}1^2 - 6 - 4 + \log\frac{1}{4} - 10 = -23{,}89
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\hat{c}\,(\mathbf{y}) = A$.

23. (Examen Segundo Parcial 2016)

a) En general, la función discriminante de un clasificador basado en la regla de Bayes se define como

$$g_c(\mathbf{x}) = p(c) \cdot p(\mathbf{x}|c)$$

o de forma equivalente

$$g_c(\mathbf{x}) = \log p(c) + \log p(\mathbf{x}|c)$$

siendo

$$p(\mathbf{x}\,|\,c) \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}_c, \Sigma_c) = (2\pi)^{-1} \cdot |\Sigma_c|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_c)^t \Sigma_c^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_c)\right)$$

aplicamos logaritmo neperiano y operamos para simplificar la expresión resultante eliminando la constante $(2\pi)^{-1}$

$$g_c(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^t\Sigma_c^{-1}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}_c^t\Sigma_c^{-1}\mathbf{x} + \left(\log p(c) - \frac{1}{2}\log|\Sigma_c| - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_c^t\Sigma_c^{-1}\boldsymbol{\mu}_c\right)$$

Las funciones discriminantes de las clases serían:

$$
\begin{aligned}
g_A(\mathbf{x}) =& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\
&+\left(\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\left|\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\right|-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)\\
=& -x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2-\log 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_B(\mathbf{x}) =& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\
&+\left(\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\left|\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\right|-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\
=& -\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_2-\log 2-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

b) La frontera de decisión entre las clases A y B se obtiene igualando sus respectivas funciones discriminantes

$$g_A(\mathbf{x}) = g_B(\mathbf{x})$$

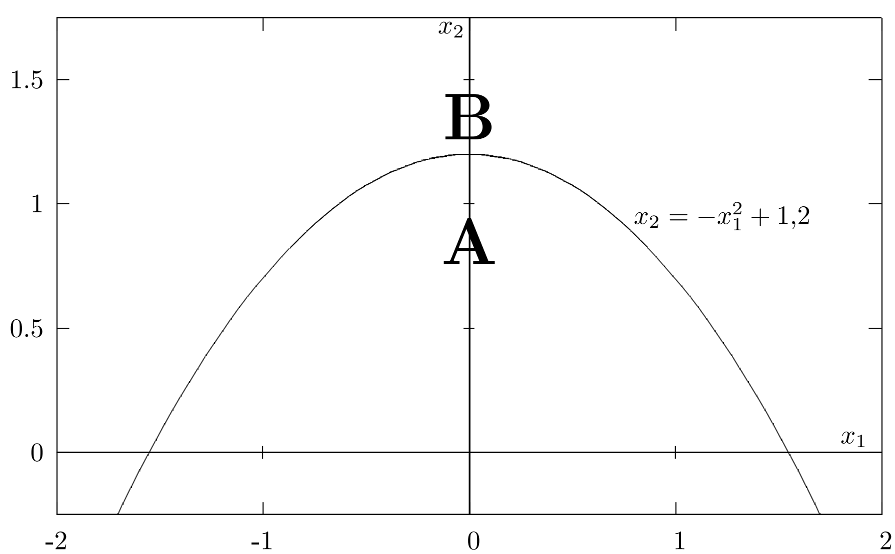
Por tanto,

$$-x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2-\log 2 = -\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_2-\log 2-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}$$

que resulta en una parábola vertical

$$x_2 = -x_1^2+\log 2+\frac{1}{2}\approx -x_1^2+1{,}2$$

c)



d) El suavizado por *flat smoothing* de un matriz de covarianza $\hat{\Sigma}_c$ se calcula como una combinación lineal de dicha matriz y la matriz de identidad I, de forma que la matriz de covarianzas resultante es:

$$\tilde{\Sigma}_c = \alpha\,\hat{\Sigma}_c + (1-\alpha)\,I \quad \forall c$$

En nuestro caso

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_A &= \alpha\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 2\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{2}+1 & 0\\0 & \alpha+1\end{pmatrix}\\
\tilde{\Sigma}_B &= \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \alpha+1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por otra parte, sabemos que un clasificador Gaussiano es lineal si la matriz de covarianzas es la misma para todas las clases. Si igualamos $\tilde{\Sigma}_A$ y $\tilde{\Sigma}_B$ para los elementos no nulos, tenemos

$$\frac{\alpha}{2} + 1 = 1$$
$$\alpha + 1 = \alpha + 1$$

Si resolvemos este sistema de ecuaciones, vemos que la solución es $\alpha = 0$, es decir, obviamente si $\tilde{\Sigma}_A = \tilde{\Sigma}_B = I$.

24. (Examen Recuperación Segundo Parcial 2017)

a) En el caso de matrices de covarianza común, la función discriminante se define como:

$$g_c(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_c^t\,\mathbf{x} + b_c$$

donde

$$\mathbf{w}_c = \Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}_c \qquad b_c = \log P(c) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_c^t\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}_c$$

Las funciones discriminantes de las clases serían:

$$\begin{aligned}
g_A(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}_A^t\,\mathbf{x} + b_A \\
\mathbf{w}_A &= \Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}_A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\
b_A &= \log P(A) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_A^t\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}_A = \log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = -\log 4 \\
g_A(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \log 4 = -\log 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_B(\mathbf{x}) &= \mathbf{w}_B^t\,\mathbf{x} + b_B \\
\mathbf{w}_B &= \Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}_B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\
b_B &= \log P(B) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_B^t\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}_B = \log\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \log\frac{3}{4} - 1 \\
g_B(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \log\frac{3}{4} - 1 = x_1 + x_2 + \log 3 - \log 4 - 1
\end{aligned}$$

b) La frontera de decisión entre las clases A y B se obtiene igualando sus respectivas funciones discriminantes

$$g_A(\mathbf{x}) = g_B(\mathbf{x})$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
-\log 4 &= x_1 + x_2 + \log 3 - \log 4 - 1 \\
0 &= x_1 + x_2 + \log 3 - 1 \\
x_2 &= -x_1 - \log 3 + 1 = -x_1 - 0{,}1
\end{aligned}$$

que es una frontera lineal.

$c)$