Àlgebra **8 de juny de 2018**
Segon parcial **2 hores**

Recordeu que no podeu fer servir calculadora, ordinador, telèfon mòbil, tauleta o qualsevol altre dispositiu electrònic.

COGNOMS:	**GRUP:**
NOM:	

Qüestió 1 (3'5 pt) Considerem els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$
$$H = \langle (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0) \rangle$$

a) Trobeu bases de F, G i $F + G$.
b) La suma $F + G$ és directa? Quina és la dimensió de $F \cap G$?
c) Calculeu les equacions de H.
d) Trobeu les equacions i una base del subespai $H^\perp$.
e) Estudieu si la suma $F + H$ és directa.

Qüestió 2 (1'5 pt) Siga $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida com

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3)$$

a) Trobeu la matriu canònica de f.
b) Trobeu bases del nucli i la imatge de f.
c) Justifiqueu si f és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva.
d) Proveu que el vector $\vec{y} = (3, 1, 5)$ es troba a la imatge de f i calculeu el conjunt de totes les antiimatges de $\vec{y}$.

Qüestió 3 (3 pt) a) Estudieu si cadascuna de les matrius reals següents és diagonalitzable.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathsf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathsf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Justifiqueu que la matriu $\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ és diagonalitzable i calculeu dues matrius P, invertible, i D, diagonal, tals que $\mathsf{F} = \mathsf{PDP}^{-1}$.
c) Utilitzant el resultat anterior, trobeu una matriu G tal que $\mathsf{G}^2 = \mathsf{F}$.

Qüestió 4 (2 pt)
a) **(0'2 pt)** Si A és una matriu 3×5 de rang 2, quines són les dimensions del subespai columna i nul (o nucli) de A?

$$\dim \operatorname{Col} \mathsf{A} = \boxed{} \qquad \dim \operatorname{Nul} \mathsf{A} = \boxed{}$$

b) **(0'4 pt)** Calculeu la projecció del vector $\vec{v} = (2, 1, 2)$ sobre el subespai $F = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$.
c) **(0'6 pt)** Sabent que A és una matriu 4×4 i que el seu determinant és igual a -5, calculeu els determinants següents:

$$\det\left(\mathsf{A}^3\right) = \boxed{} \qquad \det(3\mathsf{A}) = \boxed{} \qquad \det\left(\frac{1}{3}\mathsf{A}\right) = \boxed{}$$
$$\det(\mathsf{E}_3(3)\mathsf{A}) = \boxed{} \qquad \det(-\mathsf{A}) = \boxed{} \qquad \det\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{O} & \mathsf{A}^{-1} \end{bmatrix} = \boxed{}$$

d) **(0'2 pt)** Si $\vec{v}$ és un vector propi de la matriu A, associat al valor propi λ, proveu que $\vec{v}$ també és vector propi de la matriu A^3, amb quin valor propi associat?
e) **(0'2 pt)** Suposem que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, definida com $f(\vec{x}) = \mathsf{A}\vec{x}$, és una aplicació lineal i que $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 3$. Aquesta aplicació és injectiva, suprajectiva i/o bijectiva?
f) **(0'2 pt)** És possible que la composició, $g \circ f$, de dues aplicacions lineals, $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ i $g\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siga bijectiva?
g) **(0'2 pt)** És possible que la composició, $f \circ g$, de dues aplicacions lineals, $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ i $g\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siga bijectiva?
