Tema 4: Espais Vectorials

Bloc 3: Subespais vectorials

Obtenció d'equacions paramètriques a partir d'un sistema generador

Exemple:

Siga el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ donat per
$F = \langle (1,0,-2,4),(3,-2,1,0),(5,-2,-3,8),(2,-2,3,-4) \rangle$.
Podem trobar una base de F escrivint les coordenades dels vectors per files i escalonant la matriu resultant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per tant, una base de F és

$$\{(1,0,-2,4),(0,2,-7,12)\}.$$

Obtenció d'equacions paramètriques a partir d'un sistema generador

Exemple:

Açò vol dir que tot vector $(x, y, z, t) \in F$ satisfà la relació:

$$(x, y, z, t) = \lambda_1(1, 0, -2, 4) + \lambda_2(0, 2, -7, 12)$$

per a certs escalars λ_1, λ_2. Igualant component a component deduïm unes equacions paramètriques de F:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & \lambda_1 & & \\ y & = & & & 2\lambda_2 \\ z & = & -2\lambda_1 & - & 7\lambda_2 \\ t & = & 4\lambda_1 & + & 12\lambda_2 \end{array} \right. \tag{1}$$

amb $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Les equacions paramètriques ens permeten obtenir les coordenades de tots els vectors del subespai vectorial fent variar un conjunt de paràmetres

Obtenció d'equacions implícites

Exemple:

Un vector $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ pertany a F si i només si el sistema d'equacions (1) amb incògnites λ_1, λ_2 és compatible.
Si escalonem la matriu ampliada d'aquest sistema d'equacions obtenim el següent:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ -2 & -7 & z \\ 4 & 12 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & -7 & 2x+z \\ 0 & -12 & 4x-t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 4x+7y+2z \\ 0 & 0 & 8x+12y-2t \end{array}\right]$$

El sistema és compatible si i només si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[A|b]$, és a dir:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 7y & + & 2z & & & = & 0 \\ 4x & + & 6y & & & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Així, un vector (x, y, z, y) pertany a F si i només si les coordenades x, y, z, t satisfan aquestes igualtats, que s'anomenen equacions implícites de F.

Les equacions implícites proporcionen una condició necessària i suficient, *en funció només de coordenades*, perquè un vector forme part d'un subespai vectorial. Observeu que formen un sistema d'equacions homogeni.

Obtenció d'equacions paramètriques i d'una base a partir d'equacions implícites

Hem vist que hi ha 3 maneres d'expressar un subespai vectorial:

- a partir d'un sistema generador (o, millor, d'una base)
- a partir d'equacions paramètriques
- a partir d'equacions implícites.

Hem vist com calcular, a partir d'un sistema generador, unes equacions paramètriques i unes implícites:

Sistema generador $\Rightarrow$ Equacions paramètriques $\Rightarrow$ Equacions implícites

Anem a estudiar ara el procés invers:

Sistema generador $\Leftarrow$ Equacions paramètriques $\Leftarrow$ Equacions implícites

Obtenció d'equacions paramètriques a partir d'equacions implícites

Les equacions implícites d'un subespai vectorial F no són altra cosa que un sistema homogeni d'equacions lineals tal que F és el conjunt de les seues solucions. Així:

Per a trobar unes equacions paramètriques de F només caldrà resoldre el sistema d'equacions donat per les equacions implícites.

Exemple:

Considerem el subespai vectorial F de $\mathbb{R}^3$ següent:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Es tracta ara de resoldre el sistema homogeni amb una equació i 3 incògnites proporcionat per l'equació implícita $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Aïllant una incògnita en funció de les altres dues obtenim, per exemple, les següents equacions paramètriques de F:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & \lambda_1 & & \\ x_2 & = & & & \lambda_2 \\ x_3 & = & -2\lambda_1 & + & \lambda_2 \end{array}\right. \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Obtenció d'una base a partir d'equacions paramètriques

Exemple:

Per a trobar un sistema generador del subespai F només cal escriure les equacions paramètriques

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & \lambda_1 & & \\ x_2 & = & & & \lambda_2 \\ x_3 & = & -2\lambda_1 & + & \lambda_2 \end{array}\right. \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

en forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ -2\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Açò indica que els vectors (x_1, x_2, x_3) de F són exactament les combinacions lineals dels vectors $(1, 0, -2)$ i $(0, 1, 1)$. Per tant,

$$S = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$$

és un sistema generador de F i com és linealment independent, és una base de F.

Bases i equacions d'un subespai vectorial

Diagrama resum

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Sistema generador}} & \rightleftarrows & \boxed{\text{Base}} \\ & & \downarrow\uparrow \\ \boxed{\text{Eq. implícites}} & \rightleftarrows & \boxed{\text{Eq. paramètriques}} \end{array}$$

Subespai nucli d'una matriu

Propietat

El conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni $m \times n$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) que té com a dimensió el nombre de variables lliures del sistema.

Definició

Siga A una matriu $m \times n$. S'anomena subespai nucli o subespai nul de A, i el denotarem per Nuc(A) o Nul(A), al conjunt de solucions del sistema d'equacions homogeni amb matriu de coeficients A, és a dir, al següent subespai de $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$):

$$\mathrm{Nuc}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n(\text{ o } \ \mathbb{C}^n) \mid A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Subespai fila d'una matriu

Definició

Siga A una matriu $m \times n$.

- Anomenarem subespai fila de A, i el denotarem per Fil(A) o $F(A)$, al subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$, segons la matriu siga real o complexa) generat pels vectors fila de A.

De manera anàloga es pot parlar del subespai columna d'una matriu A que es denota per Col(A) o $C(A)$.

Subespais associats a una matriu

Exemple:

Siga la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Els subespais associats són els següents:

$$\mathrm{Fil}(A) = \langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{Nuc}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tal que } \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \{ (x_2, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \ \text{ i } \ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Càlcul de bases dels subespais associats a una matriu

Exemple:

Considerem la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si l'escalonem s'obté la següent matriu equivalent:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

A partir d'aquesta matriu escalonada equivalent a A, ja podem obtenir una base de Fil(A):

$$\{(1,-1,0,1,1),(0,0,3,-2,-1),(0,0,0,7,8)\}$$

Observacions

- Una base del subespai fila de A és la formada pels vectors fila no nuls d'una matriu escalonada equivalent a A.
- $\dim \mathrm{Fil}(A)$ és igual al nombre de files no nul·les que té una matriu escalonada equivalent a A, és a dir, $\mathrm{rg}(A)$.

Càlcul de bases dels subespais associats a una matriu

Exemple:

Seguint amb el mateix exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

el nucli de A serà el conjunt de solucions del sistema d'equacions amb aquesta matriu ampliada:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & = & \lambda_1 & + & \frac{1}{7}\lambda_2 \\ x_2 & = & \lambda_1 & & \\ x_3 & = & & - & \frac{3}{7}\lambda_2 \\ x_4 & = & & - & \frac{8}{7}\lambda_2 \\ x_5 & = & & & \lambda_2 \end{array} \right. \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Per tant:

$$\mathrm{Nuc}(A) = \langle (1,1,0,0,0), (1,0,-3,-8,7) \rangle.$$

La dimensió de Nuc(A) és 2, el nombre de variables lliures.

Dimensions dels subespais associats a una matriu

Propietat

Si $A \in M_{m\times n}$ se satisfà:

- $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$ (n és el nombre de columnes d'A)
- $\dim(\mathrm{Fil}(A)) = \mathrm{rg}(A)$

Intersecció de subespais vectorials

Definició

Donats dos subespais vectorials F i G d'un espai vectorial V, podem calcular la seua intersecció:

$$F \cap G = \{ \vec{x} \in V \mid \vec{x} \in F \text{ i } \vec{x} \in G \} .$$

Propietat

La intersecció $F \cap G$ de dos subespais vectorials F i G d'un espai vectorial V és un subespai vectorial de V.

Atenció! La unió de dos subespais vectorials no és, en general, un subespai vectorial.

Intersecció de subespais vectorials

Mètode per a calcular la intersecció de 2 subespais vectorials

(1) Calculem unes equacions implícites de F i de G.

(2) $F \cap G$ estarà definit per la reunió de totes las equacions implícites (les de F i les de G).

Exemple:

Considerem els següents subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$ (definits per equacions implícites):

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \wedge \quad x_1 - x_4 = 0\} \quad \text{i}$$

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Con $F \cap G$ és el conjunt de vectors que pertanyen simultàniament a F i a G resulta clar que

$$F \cap G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_4 = 0 \quad \text{i} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Suma de subespais vectorials

Definició

Si F i G són dos subespais vectorials d'un espai vectorial V, anomenarem subespai suma de F i G, i el denotarem per $F+G$, al menor subespai vectorial de V que conté $F \cup G$.

Propietat

Si F i G són dos subespais vectorials d'un espai vectorial V aleshores

$$F+G=\{\vec{x}+\vec{y} \mid \vec{x} \in F \quad \text{i} \quad \vec{y} \in G\}.$$

Suma de subespais vectorials

La següent propietat permetrà calcular un sistema generador de la suma de dos subespais vectorials a partir de sistemes generadors dels sumands.

Propietat

Si F i G són dos subespais vectorials d'un espai vectorial V tals que $F = \langle S_1 \rangle$ i $G = \langle S_2 \rangle$ aleshores $F + G = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.

Mètode de càlcul de la suma de subespais

(1) Es calcula un sistema generador S_1 de F.

(2) Es calcula un sistema generador S_2 de G.

(3) La unió $S_1 \cup S_2$ és un sistema generador de $F + G$.

Exemple:
Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:
$F = \langle (1,0,1,0), (-2,3,1,0) \rangle$ i $G = \langle (0,-3,1,0), (1,1,1,1) \rangle$. Aleshores $F + G = \langle (1,0,1,0), (-2,3,1,0), (0,-3,1,0), (1,1,1,1) \rangle$. Quina és la dimensió de $F + G$?

Suma i intersecció de subespais

Fórmula de les dimensions

Si F i G son dos subespais vectorials d'un espai vectorial V aleshores

$$\boxed{\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)}$$

Suma directa de subespais

Definició

Si F i G són dos subespais vectorials d'un espai vectorial V, direm que la suma $F + G$ és directa (i la denotarem per $F \oplus G$) si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Propietat

Si una suma de subespais $F + G$ és directa aleshores tot vector de $F + G$ s'escriu de manera única com una suma $\vec{x} + \vec{y}$, on $\vec{x} \in F$ i $\vec{y} \in G$.

Propietat

Siguen F i G dos subespais vectorials d'un espai vectorial V tal que la suma $F + G$ és directa. Aleshores:

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Exemple: $\mathbb{R}^3 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle \oplus \langle(1, 1, 1)\rangle$.

Vectors i subespais ortogonals en $\mathbb{R}^n$

Definició

Direm que un vector $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ és ortogonal a un subespai vectorial W de $\mathbb{R}^n$ (i ho escriurem $\vec{u} \perp W$) si és ortogonal a tots els vectors de W, és a dir:

$$\vec{u} \perp W \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v} \ \forall\, \vec{v} \in W.$$

Dos subespais W_1 i W_2 de $\mathbb{R}^n$ es dirà que són ortogonals si qualsevol vector $\vec{u}$ de W_1 és ortogonal a W_2.

La següent propietat prova que, per ser un vector $\vec{x}$ ortogonal a un subespai W, és suficient que $\vec{x}$ siga ortogonal als vectors d'un sistema generador de W.

Propietat

Si W és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ generat per $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ aleshores un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ és ortogonal a W si i només si és ortogonal a $\vec{u}_i$ per a tot $i = 1, 2, \ldots, r$.

Complements ortogonals en $\mathbb{R}^n$

Definició

Donat un subespai vectorial W de $\mathbb{R}^n$ s'anomena complement ortogonal de W, i es denota per $W^\perp$, al conjunt de vectors de $\mathbb{R}^n$ que són ortogonals a W. És a dir:

$$W^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \perp W\}.$$

Veurem ara que el complement ortogonal d'un subespai és el nucli de la transposada de la matriu associada a un sistema generador qualsevol.

Propietat

Siga W un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i siga $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ un sistema generador de W. Aleshores:

$$W^\perp = \mathrm{Nuc}(\mathrm{M}(S)^t),$$

on $\mathrm{M}(S)$ denota, com és habitual, la matriu associada a S. En particular $W^\perp$ és un subespai vectorial.

Complements ortogonals en $\mathbb{R}^n$

Exemple: Calculem el complement ortogonal en $\mathbb{R}^2$ del subespai $W = \langle (2,5) \rangle$.
Si anomenem $S = \{(2,5)\}$, es té que $W^\perp$ és el nucli de la matriu

$$\mathrm{M}(S)^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix},$$

és a dir, el conjunt de solucions del sistema d'equacions homogeni

$$2x + 5y = 0.$$

Per tant, $W^\perp = \langle (5,-2) \rangle$.

Ja hem vist que el complement ortogonal d'un subespai és el nucli de la matriu les files de la qual són un conjunt generador del subespai. En particular,

Propietat

Si A és una matriu d'ordre $m \times n$, aleshores

$$(F(A))^\perp = \mathrm{Nuc}(A) \quad \text{i} \quad (C(A))^\perp = \mathrm{Nuc}(A^t)$$

Com $(W^\perp)^\perp = W$ per a qualsevol subespai W, també es dedueix que $(\mathrm{Nuc}(A))^\perp = F(A)$. Per tant, si ens donen un subespai mitjançant unes equacions implícites, podem calcular el seu complement ortogonal sense necesitat d'obtindre un conjunt generador de W:

2ª forma de calcular $W^\perp$ (conegudes unes equacions de W)

Si W és un subespai de $\mathbb{R}^n$ que ve donat per les seues equacions implícites com $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \vec{x} = 0\} = \mathrm{Nuc}(A)$, aleshores $W^\perp = F(A)$, es a dir, $W^\perp$ està generat pels coeficients de les equacions de W.

Exemple

Calcula el complement ortogonal en $\mathbb{R}^3$ del subespai

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + 2z = 0,\ x - 3z = 0\}.$$

Solució:
Si escribim les equacions de W com a productes escalars, aleshores:

$$(x, y, z) \in W \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \text{ i } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Per tant els vectors de W són aquells que són ortogonals als vectors $(0, 1, 2)$ i $(1, 0, -3)$ i, per tant, $\boxed{W^\perp = \langle (0, 1, 2), (1, 0, -3) \rangle.}$

Altra forma de deduir-lo és expressar W com el nucli d'una matriz:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + 2z = 0,\ x - 3z = 0\} = \mathrm{Nuc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Com $(\mathrm{Nuc}(A))^\perp = F(A)$, aleshores $W^\perp = \langle (0, 1, 2), (1, 0, -3) \rangle$

Conclusió

Si coneixem les equacions implícites d'un subespai W, automàticament coneixem els generadors del seu complement ortogonal $W^\perp$, i viceversa.

Propietats del complement ortogonal

Si W és un subespai de $\mathbb{R}^n$ és fàcil deduir de la definició de $W^\perp$ que

$$W \cap W^\perp = \{\vec{0}\} \text{ i, per tant, } W + W^\perp \text{ és una suma directa.}$$

Per una altra part, donat un subespai $W = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ sabem que $W^\perp = \mathrm{Nuc}(A)$ on A és una matriu les files de la qual són eixos vectors generadors. Ademés, sabem que $\dim(W) = rang(A)$.
També hem vist que donada una matriu A amb n columnes, com en aquest cas, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = n - rang(A)$. D'aquestes igualtats deduïm que

$$\dim(W^\perp) = n - \dim(W), \text{ aleshores}$$

$$\dim(W \oplus W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) = n = dim(\mathbb{R}^n) \text{ i, per tant}$$

Propietat

Si W és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ aleshores $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.

Aquesta igualtat fa possible que tot vector $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ puga expressar-se de forma única com a suma d'un vector en W (la *projecció ortogonal de $\vec{x}$ sobre W*) i un vector ortogonal a W.