ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT6 - Problemas propuestos: SERIES DE POTENCIAS

1. Analiza la convergencia y calcula la suma (donde convergen) de las series de potencias:

   a) $\sum\limits_{n=1} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

   b) $\sum\limits_{n=1} \frac{x^{3n+2}}{2^n}$

   c) $\sum\limits_{n=1} (-1)^n \, x^{2n}$

2. Deriva e integra las series de potencias:

   a) $\sum\limits_{n=1} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

   b) $f(x) = \sum\limits_{n=1} \frac{x^n}{n}$. En este caso calcula también $f'(x)$, explícitamente, así como $\int_0^1 f$.

3. A partir de la igualdad, que es cierta para $x \in \,]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0} x^n$ obtén expresiones explícitas para:

   a) $\sum\limits_{n=1} (-1)^n \, nx^n$

   b) $\sum\limits_{n=1} n^2 x^n$

   c) $\sum\limits_{n=1} (-1)^n \, \frac{x^n}{n}$

4. Considera la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n \geq 1} \frac{x^n}{n 2^n}$

   a) Obtén la serie de potencias que corresponde a $f'(x)$ y súmala donde converja

   b) Halla $f(x)$ explícitamente, sabiendo que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$.

5. Considera la serie $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} (n+1)x^n$

   a) Integra término a término para obtener $\int_0^x f(t)dt$ y deriva para hallar $f(x)$ explícitamente

   b) Deduce el valor de la suma de las series: $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{n+1}{3^n}$ y $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$

6. Sabiendo que $\sum\limits_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $x \in \,]-1, 1[$:

   a) Integra término a término y obtén una serie de potencias para $\log(1-x)$

   b) Considera $x = -\frac{1}{2}$ y encuentra una serie numérica de suma $\log\left(\frac{3}{2}\right)$.

   c) Acota el error cometido al aproximar este valor sumando los seis primeros términos de tal serie.

7. Sabiendo que $e^x = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$:

   a) Analiza la convergencia y calcula la suma (donde converja) de la serie de potencias $\sum\limits_{n=1} \frac{x^n}{(n+3)!}$

   b) Dada la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} x^n$, obtén $f(x)$ explícitamente.

   c) Deriva la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ y obtén $f'(x)$ explícitamente

8. Escribe los desarrollos en serie de potencias de las funciones:

   a) $f(x) = \frac{d}{dx}\left(sen(x) - x\right)$
   b) $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$

   y deduce el valor de $g^{(15)}(0)$.

9. a) Halla el coeficiente de x^{10} en la serie de McLaurin de $sen(x)$.
   b) Si $h(x) = x^6 e^{x+1}$ y $p(x) = \frac{x}{1+x^2}$, halla los valores de $h^{(10)}(0)$ y de $p^{(12)}(0)$.

ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT6 - Ejercicios adicionaless: SERIES DE POTENCIAS

1. Considera la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n5^n}$.

   a) Considera la serie numérica (alternada) $f(0)$ y halla el valor de n necesario para aproximar, con tres decimales exactos, la suma de la serie mediante la suma parcial s_n. Obtén tal aproximación

   b) Desarrolla $f'(x)$ en serie de potencias.Observa que es geométrica y súmala donde converja. Integra la expresión obtenida para obtener $f(x)$, añadiendo una constante C de integración. Encuentra la constante sabiendo que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$

   c) A la vista de b), ¿cuál es la suma exacta de la serie que define $f(0)$? ¿Se obtiene en a) la precisión esperada?

2. Obtén la serie de potencias correspondiente a la función $atan\,(x)$ y usa el valor de $atan\,(1)$ para aproximar dos cifras decimales exactas del número π.

3. Desarrolla en serie de potencias $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$, previa descomposición en fracciones simples. ¿Cuál es su intervalo de convergencia?

4. Obtén series de potencias para las funciones $\cosh(x)$ y $senh\,(x)$, y úsalas para comprobar que

$$\cosh(x)' = senh\,(x) \quad , \quad senh'\,(x) = \cosh(x) \ .$$

* 5. Integrando dos veces $f\,(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n$, obtén explicitamente $f\,(x)$ y, como aplicación, calcula $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$.

6. Sabiendo que $e^x = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ calcula en forma explícita $f(x) = \sum\limits_{n\geq 2} \frac{3n^2-1}{(n+1)!} x^n$ descomponiendo el numerador en la forma $a + b(n+1) + cn(n+1)$.

7. Utilizando la serie de potencias para $\cos(x)$ hallada en clase, aproxima $\cos(0.05)$ con siete decimales exactos, al menos. Deberás tener en cuenta la cota de error que te proporciona el criterio de Leibniz para series alternadas. Verifica, con DERIVE o mediante calculadora, que el resultado que obtengas es correcto.

8. A partir de la serie de potencias hallada en clase para la exponencial e^x y sustituyendo x por $-x^2$, encuentra el desarrollo en serie de e^{-x^2}. Integra entre 0 y 1 y aplica la cota de error de Leibniz para series alternadas para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con dos decimals exactos, al menos. Comprueba el resultado calculando la integral con DERIVE en modo aproximado.

9. Escribe el desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\right)$

* 10. Determina el coeficiente de x^6 en la serie de McLaurin de $f(x) = \frac{sen^3(x)}{x}$.

11. Resuelve la *ecuación diferencial* $y' = 3y$ con valor inicial $y\,(0) = 2$, suponiendo que $y = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.