Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 5
Robert Fuster

Exercici 5.1. *Determineu quines són les matrius elementals* E_1, E_2, E_3 *que, en multiplicar-les per* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *ens proporcionen els resultats següents:*

(a) $E_1A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $E_2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $E_3A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(a) $E_1 = E_{1,2}(1)$ (b) $E_2 = E_2(2)$ (c) $E_3 = E_{1,2}$

Exercici 5.2. *En cada apartat expliqueu quin és l'efecte de la multiplicació indicada.*

1. $E_4(-2)A$

   La quarta fila de la matriu A es multiplica per -2.

2. $E_{2,4}(3)A$

   A la segona fila de la matriu A s'hi suma el triple de la quarta fila.

3. $E_{4,1}A$

   Es permuten les files primera i quarta de A.

4. $E_{2,1}(3)E_{3,1}(1)E_{4,1}(-1/2)A$

   A la segona fila s'hi suma el triple de la primera, a la tercera s'hi suma la primera i a la quarta s'hi resta un mig de la primera.

Exercici 5.3. *Calculeu la forma esglaonada reduïda de la matriu*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

seguint els passos indicats: en cada pas feu les operacions elementals corresponents a les matrius que hi ha al damunt de la fletxa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -10 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{1,2}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_1(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(5/2)E_{1,2}(-5/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_2(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -23/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2,3}(7)E_{1,3}(23)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 5.4. *Calculeu una forma esglaonada de la matriu*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

fent servir l'algorisme de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu és

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercici 5.5. *Trobeu la forma esglaonada reduïda de la matriu* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. *Discutiu i resoleu el sistema lineal*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

La forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada l'hem obtinguda a l'exercici anterior

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema és compatible indeterminat amb grau d'indeterminació 1. Per a resoldre'l agafem com a paràmetre indeterminat la incògnita corresponent a la columna de la matriu de coeficients que NO és principal, o siga: $x_2 = \alpha$

i la solució general és $x_1 = 1 - 2\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 3$, o

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercici 5.6. *Discutiu i resoleu pel mètode de Gauss-Jordan els sistemes lineals*

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 3x_4 = -4 \end{cases}$$

(a) Apliquem l'algorisme de Gauss-Jordan. Comencem esglaonant la matriu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(-2)E_{3,1}(-3)E_{4,1}(-6)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3,2}(-2/3)} \xrightarrow{E_{4,2}(-5/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -10/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & -10/3 & -10/3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4,3}(-1)} \xrightarrow{E_3(-3/10)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{1,3}(-1)} \xrightarrow{E_{2,3}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2(1/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solució és $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ -7 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(2)E_{3,1}(7)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema és compatible determinat

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,3}(-1/8)E_{2,3}(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}(1/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2(1/3)E_3(1/8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La solució és $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(c) La matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és una forma esglaonada de la matriu ampliada, així que el sistema és incompatible, perquè rang $\mathsf{A} = 2$ i rang $\left[\mathsf{A} \mid \vec{0}\right] = 3$.

Exercici 5.7. *Discutiu segons els valors dels paràmetres (i resoleu, si és possible) els següents sistemes lineals:*

(a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = a \\ 6x_1 + 3x_2 = b \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + x_3 = c \end{cases}$ (c) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = m \\ 2mx_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3mx_1 + 4x_2 + x_3 = m+1 \end{cases}$

(a) Esglaonant la matriu ampliada trobem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 6 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(3)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & -3a+b \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_1(1/2)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & a/2 \\ 0 & 0 & -3a+b \end{array}\right]$$

així que el sistema és

(a1) Incompatible si $b \neq 3a$

(a2) Indeterminat si $b = 3a$. En aquest cas, la solució general és

$$(x_1, x_2) = (a/2, 0) + \alpha(-1/2, 1)$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 3 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right]$$

El sistema és determinat.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7a-3b-c \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5a-2b-c \\ 0 & -1 & 0 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5a-2b-c \\ 0 & 1 & 0 & 2a-b \\ 0 & 0 & 1 & -6a+3b+c \end{array}\right]$$

La solució és

$$\vec{x} = (5a-2b-c, 2a-b, -6a+3b+c)$$

(c) Aquest problema se simplifica notablement si reordenem les incògnites en la forma:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_4 & +2x_3 & +x_2 & +mx_1 & = & m \\ -x_4 & -x_3 & +3x_2 & +2mx_1 & = & 1 \\ & x_3 & +4x_2 & +3mx_1 & = & m+1 \end{array}\right.$$

(perquè d'aquesta manera no ens hem de capficar amb els paràmetres). Ara esglaonem,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ -1 & -1 & 3 & 2m & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2,1}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3,2}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema és indeterminat, amb independència dels valors del paràmetre m; les incògnites principals són x_4 i x_3. Per tant, agafem com a paràmetres x_1 i x_2 (noteu que hem canviat l'ordre usual de les incògnites). Amb una operació elemental tenim la forma esglaonada reduïda:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & m & m \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{1,2}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & -5m & -m-2 \\ 0 & 1 & 4 & 3m & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

I la solució general és

$$x_4 = -m - 2 + 7\alpha_1 + 5m\alpha_2, \quad x_3 = m + 1 - 4\alpha_1 - 3m\alpha_2, \quad x_2 = \alpha_1, \quad x_1 = \alpha_2$$

Exercici 5.8. *(**Una matriu inversa**)*
Si $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$,

1. *Resoleu el sistema lineal*

$$\mathsf{A}\vec{x} = \vec{u}$$

La matriu ampliada és

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & u_1 \\ 2 & 3 & u_2 \end{bmatrix}$$

Aplicant-hi l'algorisme de Gauss-Jordan obtenim aquesta forma esglaonada reduïda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3u_1 + 2u_2 \\ 0 & 1 & 2u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

Per tant, la solució és $x_1 = -3u_1 + 2u_2$, $x_2 = 2u_1 - u_2$, és a dir,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -3u_1 + 2u_2 \\ 2u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

2. *Trobeu la matriu quadrada* B *per a la qual la solució és* $\vec{x} = \mathsf{B}\vec{u}$ *i calculeu* AB *i* BA.

És clar que

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{u}$$

així que $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Aleshores,

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{BA} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 5.9. *(a) Feu servir el teorema de Rouché per a justificar que un sistema lineal amb més incògnites que equacions no pot ser determinat. (b) Un sistema amb més equacions que incògnites pot ser determinat? Indeterminat? Incompatible?*

(a) Si hi ha més incògnites que equacions, llavors el rang és menor que el nombre d'incògnites (perquè el rang no pot més gran que el nombre de files de la matriu). Per tant, per la segona part del teorema de Rouché, el sistema no pot ser determinat.

(b) La resposta és afirmativa a totes les qüestions, com mostren els següents exemples:

- Un sistema amb més equacions que incògnites determinat:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 \quad\;\; &= 1 \end{aligned}$$

- Un sistema amb més equacions que incògnites indeterminat:

$$\begin{aligned} x_1 + \;\; x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

- Un sistema amb més equacions que incògnites incompatible:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= -\pi \end{aligned}$$