Análisis Matemático

UT1 - Números Reales

Contenido

Números Reales

- Evolución de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$
- Números irracionales
- Propiedades de los número reales
- Valor absoluto. Propiedades elementales

Objetivos

Números Reales (Dos sesiones)

- Recordar los distintos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$
- Conocer las propiedades básicas de $\mathbb{R}$ (estructura, álgebra, y orden)
- Manipular correctamente el valor absoluto y las desigualdades

Números Reales

Números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Suma y producto. Ordenación "natural"

La ecuación $2 + x = 1$, no es resoluble en $\mathbb{N}$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Ordenación "natural" inducida

La ecuación $2 \cdot x = 1$, no es resoluble en $\mathbb{Z}$

Números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;;\; m \in \mathbb{Z},\; n \in \mathbb{N},\; \text{fracción irreducible} \right\}$$

$(\mathbb{Q}, \leq)$ definida por: $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow m \cdot q \leq n \cdot p$

Admiten una representación decimal finita o periódica

$$x = 2.456 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2456}{1000} = \frac{307}{125}$$

$$\frac{139}{60} = 2.31\widehat{6} \qquad x = 2.31\widehat{6} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 100x = 231 + 0.\widehat{6} \\ 1000x = 2316 + 0.\widehat{6} \end{cases} \;\Rightarrow\; x = \frac{2316 - 231}{900}$$

$$\frac{1812}{37} = 48.\widehat{972} \qquad x = 48.\widehat{972} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 48 + 0.\widehat{972} \\ 1000x = 48972 + 0.\widehat{972} \end{cases} \;\Rightarrow\; x = \frac{48972 - 48}{999}$$

Las operaciones y el orden de los números racionales se extienden a los irracionales (y a los reales) usando las aproximaciones decimales.

Propiedades de los números reales

$(\mathbb{R}, +, \times)$ cuerpo abeliano

$(\mathbb{R}, \leq)$ relación de orden total, compatible con + y $\times$

$x \leq y \;\Leftrightarrow\; y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (reflexiva, antisimétrica y transitiva)

Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x < y \;\vee\; x = y \;\vee\; x > y$

Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+ \;\wedge\; x \cdot y \in \mathbb{R}^+$

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ es completo

Nota: Se define la recta real ampliada añadiendo dos símbolos más

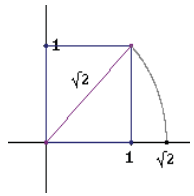
$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Números irracionales

La ecuación $x^2 = 2$ no es resoluble en $\mathbb{Q}$

La solución, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; es irracional

(corresponde a la diagonal del cuadrado unidad)



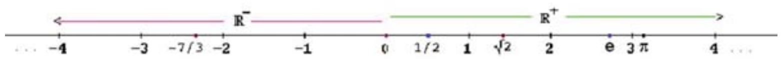
Les corresponde una representación decimal infinita no periódica

($\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$; $\pi = 3.14159265\ldots$; $e = 2.71828182\ldots$)

Números reales

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ (racionales e irracionales)

$\mathbb{R}$ se identifica con el conjunto de puntos de la recta



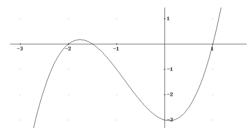
$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ (los negativos, el cero y los positivos)

Propiedades de las desigualdades

$$a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$$

$$a \leq b \;\Rightarrow\; \begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c & \text{si } c > 0 \\ a \cdot c \geq b \cdot c & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} 4x + 13 \leq 2x + 7 & 4x + 13 \leq 6x + 7 & 2x^3 + 5x^2 - x - 6 \leq 0 \\ 4x - 2x \leq 7 - 13 & 4x - 6x \leq 7 - 13 & 2(x-1)(x+2)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) \leq 0 \\ 2x \leq -6 & -2x \leq -6 & \\ x \leq \dfrac{-6}{2} = -3 & x \geq \dfrac{-6}{-2} = 3 & x \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[\dfrac{-3}{2}, 1\right] \\ x \in \left]-\infty, -3\right] & x \in \left[3, +\infty\right[& \end{array}$$



Valor absoluto en $\mathbb{R}$

Si $x \in \mathbb{R}$, se define su valor absoluto como $|x| = |-x| = \begin{cases} x\ , \text{ si } x \geq 0 \\ -x\ , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

$|x| \geq 0$

$(a>0)$ $\quad |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff -a \leq x \wedge x \leq a \iff x \in [-a, a]$

$(b>0)$ $\quad |x| \geq b \iff b \leq x \vee x \leq -b \iff x \in]-\infty, -b] \cup [b, +\infty[$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad de Minkowski)

Nota: $\sqrt{x^2} = |x|$

Distancia en $\mathbb{R}$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, se define la distancia entre ambos como $d(x,y) = |x-y|$

$I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, d(x,a) < \delta\} =]a-\delta, a+\delta[$, intervalo (abierto) de centro a y radio δ

Ejercicio: Hallar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\big||x|-2\big| \leq 1$

Teniendo en cuenta la segunda propiedad del valor absoluto,

$$\big||x|-2\big| \leq 1 \iff 1 \leq |x| \leq 3 \iff |x| \leq 3 \wedge |x| \geq 1$$

Por la misma razón, $|x| \leq 3 \iff x \in [-3, 3]$

La tercera propiedad nos conduce a $|x| \geq 1 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

El conjunto solución, S, es $[-3,3] \cap (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[) = [-3,-1] \cup [1,3]$