UNIDAD DIDÁCTICA 5

INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

(2ªparte: Inferencia básica en poblaciones normales)

Contenidos

1. Inferencia en una población normal
2. Comparación de dos varianzas

Contenidos Inferencia respecto a una población normal

1. Un ejemplo
2. Análisis descriptivo de la muestra
3. Estudio de la hipótesis H_0: $m=m_0$
4. Riesgo de 1ª especie
5. Intervalo de confianza para m
6. Intervalo de confianza para σ
7. Análisis con Statgraphics

Inferencia respecto a una población normal

UN EJEMPLO

Un programador desea estudiar las características de un nuevo sistema de depuración automática de programas.

Debido a una serie de causas de variabilidad es imposible obtener constantemente programas que tarden en depurarse lo mismo.

El tiempo que tarda el nuevo sistema en depurar programas es realmente una variable aleatoria definida sobre la población de todos los programas.

Inferencia respecto a una población normal

UN EJEMPLO

El programador desea estudiar si con el nuevo sistema el tiempo de depuración es 60,2 minutos.

Para ello, selecciona al azar 10 programas y registra el tiempo que el nuevo sistema tarda en realizar la depuración de los mismos.

Dichos tiempos, en minutos, son los siguientes:

63, 61, 57, 61, 58, 60, 64, 60, 59 y 58.

¿Puede admitirse que el tiempo medio de depuración con el nuevo sistema es 60,2 o, por el contrario, hay evidencia de que la media es diferente de 60,2?

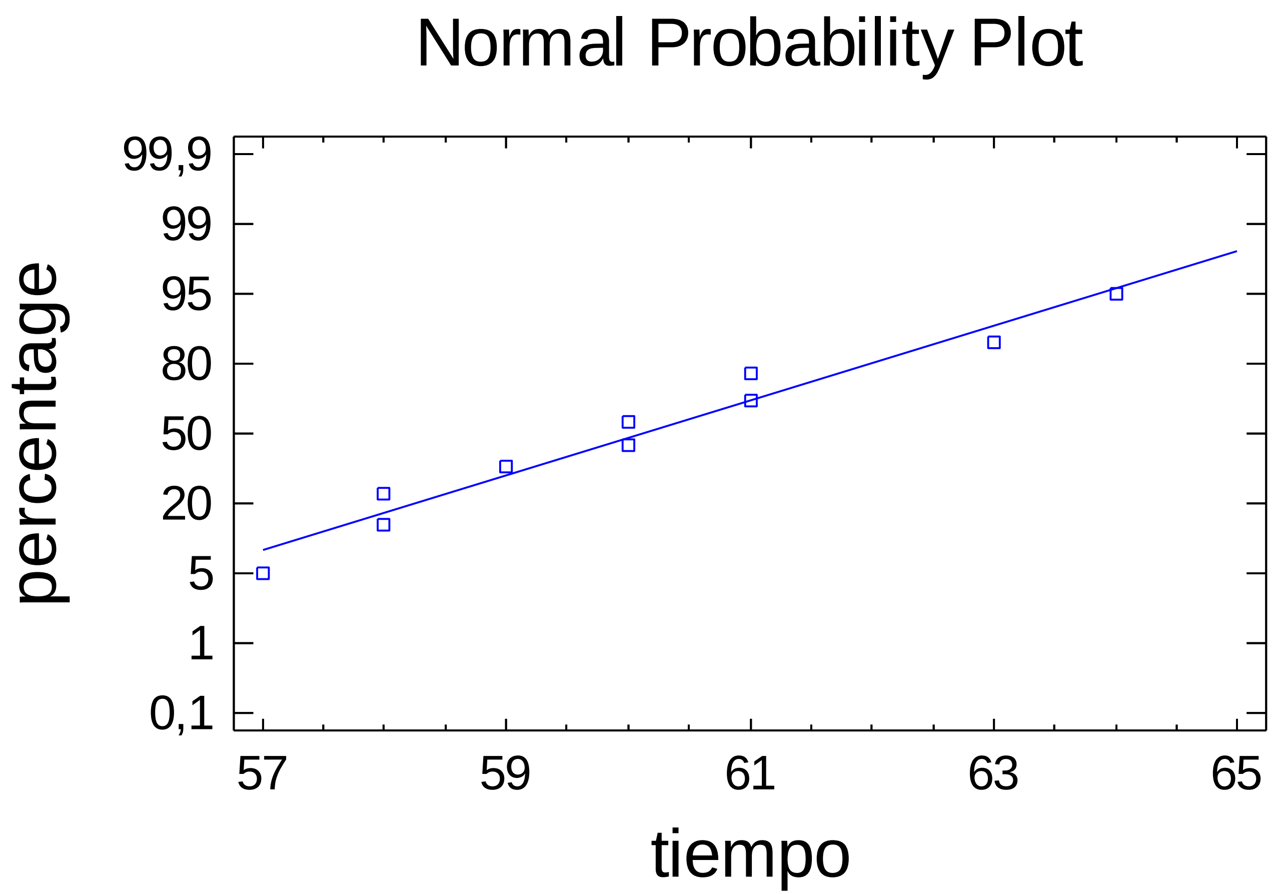
Normalidad de los datos

- La mayor parte de las técnicas de inferencia estadística clásicas sobre variables aleatorias continuas asumen que las variables muestreadas se distribuyen normalmente.

- Antes de aplicar estas técnicas es aconsejable analizar hasta qué punto el modelo normal es adecuado a la vista de los datos obtenidos.

- Diez datos es un número muy reducido para elaborar un histograma. En el ejemplo se estudiará la normalidad a partir de la representación de los datos en papel probabilístico normal.

Normalidad de los datos



Análisis descriptivo de la muestra

Obtenido con Statgraphics:
Summary Statistics for tiempo

Count = 10
Average = 60,1 (media muestral)
Median = 60,0
Variance = 4,98889
Standard deviation = 2,23358 (desviación típica muestral)
Minimum = 57,0
Maximum = 64,0
Range = 7,0
Lower quartile = 58,0
Upper quartile = 61,0
Skewness = 0,442726
Stnd. skewness = 0,571556
Kurtosis = -0,515112
Stnd. kurtosis = -0,332504

Análisis descriptivo de la muestra

Ejercicio:

La media muestral ha resultado igual a 60,1, y es por tanto, diferente de 60,2. ¿Quiere ello decir que en la población de todos los programas no es admisible una media de 60,2 minutos?

Estudio de la hipótesis m=60,2

- Se asume como hipótesis que m es igual a 60,2 minutos.

- Esta hipótesis que se toma como base de partida, y que refleja el conocimiento previo de la situación es la **Hipótesis Nula H_0**.

Estudio de la hipótesis m=60,2

Si m=60,2 $\Rightarrow \overline{X}$ debería ser "cercana" a 60,2

Se rechaza m=60,2 si $\overline{X}$ no es "cercana" a 60,2

¿Qué debe entenderse por "cercana" ?

Estudio de la hipótesis m=60,2

- La solución se basa en

$$t_{calc} = \frac{\overline{X} - 60,2}{s/\sqrt{N}}$$

(donde N=10)

- En el apartado anterior de esta UD, se estudió que este cociente sigue una distribución t de Student con 9 grados de libertad si m=60,2.
- Si $m \neq 60,2$, la t_{calc} toma con mayor frecuencia valores alejados de cero (positivos si $m > 60,2$ ó negativos si $m < 60,2$), que los esperables para una variable t de Student.

Estudio de la hipótesis m=60,2

- Una forma de proceder: **se rechaza la hipótesis nula si la t_{calc} resulta demasiado grande (en valor absoluto) para ser una t de Student**.

- Si $t_9(\alpha=0{,}05)=2{,}262$,

$$\left|t_{calc}\right| = \left|\frac{\overline{X}-60{,}2}{s/\sqrt{N}}\right| = \left|\frac{60{,}1-60{,}2}{2{,}23/\sqrt{10}}\right| = \left|-0{,}14\right| < 2{,}262$$

se acepta la hipótesis nula m=60,2

Estudio de la hipótesis $m=m_0$

$H_0: m=m_0$

- Se calcular $$t_{calc} = \frac{\bar{X} - m_0}{s/\sqrt{N}}$$
- **Se rechazar H_0 si $|t_{calc}|>t_{N-1}(\alpha)$** donde $t_{N-1}(\alpha)$ es el valor de tabla que

$$P(|t_{N-1}|>t_{N-1}(\alpha))=\alpha$$

En el ejemplo $\alpha=0{,}05$

Riesgo de 1ª especie

α= Probabilidad de rechazar H_0 cuando es cierta. Se denomina **Riesgo de 1ª especie**.

1-α= nivel de confianza= Probabilidad de aceptar H_0 cuando es cierta.

Intervalo de confianza para m

¿Cómo se puede calcular a partir de la muestra, un intervalo que tenga una probabilidad elevada de contener el valor m de la media poblacional?

Se parte del resultado:

$$\frac{\overline{X} - m}{s/\sqrt{N}} \text{ se distribuye como una } t_{N-1}$$

Intervalo de confianza para m

Como $P(|t_{N-1}|>t_{N-1}(\alpha))=\alpha$ se cumple que

$$P\left(-t_{N-1}(\alpha)<\frac{\overline{X}-m}{s/\sqrt{N}}<t_{N-1}(\alpha)\right)=1-\alpha$$

de donde:

$$P\left(\overline{X}-t_{N-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{N}}<m<\overline{X}+t_{N-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{N}}\right)=1-\alpha$$

Intervalo de confianza $\left[\overline{X}-t_{N-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{N}},\overline{X}+t_{N-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{N}}\right]$

1- α: nivel de confianza

Intervalo de confianza para m

En el ejemplo:

$$\left[60{,}1-2{,}262\frac{2{,}23}{\sqrt{10}};60{,}1+2{,}262\frac{2{,}23}{\sqrt{10}}\right]=[58{,}5;61{,}69]$$

Constituye un intervalo de confianza para la media del proceso, para un nivel de confianza del 95%

Nota: el intervalo contiene el valor m=60,2 hipótesis que ha sido aceptable.

Intervalo de confianza para σ

Es también sencillo obtener un intervalo de confianza para σ a partir del resultado:

$$(N-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \text{ se distribuye como Gi-dos con } (N-1) \text{ g.l.}$$

De la tabla Gi-dos es posible obtener dos valores, g_1 y g_2 tales que

$$P(g_1 < X^2_{N-1} < g_2)=1-\alpha$$

Por ejemplo, $P(2,7 < X^2_9 < 19,023)=0,95$

Intervalo de confianza para σ

Por tanto

$$P\left(g_1 < (N-1)\frac{s^2}{\sigma^2} < g_2\right) = 1-\alpha$$

de donde:

$$P\left((N-1)\frac{s^2}{g_2} < \sigma^2 < (N-1)\frac{s^2}{g_1}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza para σ^2 $\left[(N-1)\frac{s^2}{g_2}, (N-1)\frac{s^2}{g_1}\right]$

Intervalo de confianza para σ $\left[\sqrt{(N-1)\frac{s^2}{g_2}}, \sqrt{(N-1)\frac{s^2}{g_1}}\right]$

Intervalo de confianza para σ

En el ejemplo:

$$\left[\sqrt{(10-1)\frac{2{,}23^2}{19{,}023}}, \sqrt{(10-1)\frac{2{,}23^2}{2{,}7}}\right] = [1{,}53; 4{,}07]$$

Intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para σ.

Análisis con Statgraphics

Opción: *Describe..Numeric data..One-Variable Analysis*

Hypothesis Tests for tiempo

Sample mean = 60,1
Sample median = 60,0

t-test

Null hypothesis: mean = 60,2
Alternative: not equal

Computed t statistic = -0,141579
P-Value = 0,890531

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

Confidence Intervals for tiempo
--
95,0% confidence interval for mean: 60,1 +/- 1,59781 [58,5022;61,6978]
95,0% confidence interval for standard deviation: [1,53634;4,07765]

Comparación de dos varianzas

UN EJEMPLO

Al programador se le presenta un nuevo sistema de depuración más caro que el anterior, y que al aplicarlo sobre 10 nuevos programas proporciona los tiempos (en minutos):

62, 59, 61, 60, 58, 63, 61, 58, 63 y 60.

¿Podemos decir que hay diferencias significativas en la distribución de los tiempos de depuración proporcionados por uno y otro sistema?

Resultados

	Sistema 1	Sistema 2
	63	62
	61	59
	57	61
	61	60
	58	58
	60	63
	64	61
	60	58
	59	63
	58	60
Media $\bar{X}$	60,1	60,5
Desv.Típica s	2,23	1,84

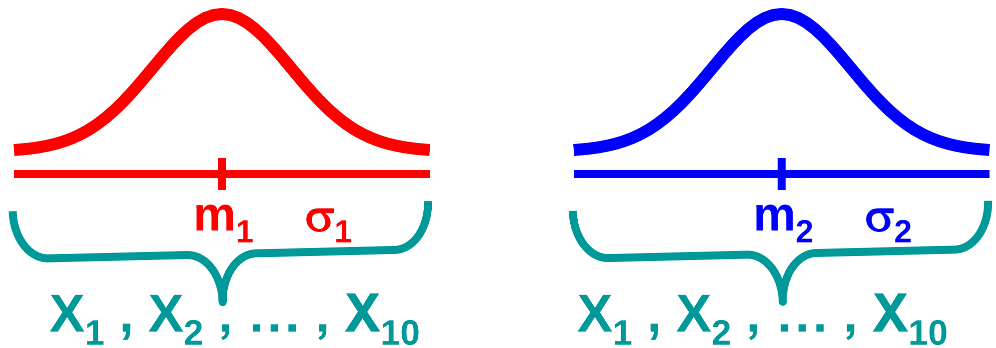
Comparación de dos varianzas

Poblaciones estudiadas: programas a depurar con sistema 1 o sistema 2.

Variable aleatoria: tiempo de depuración

Se supone que la variable se distribuye normalmente:

Muestreo:



$\bar{x}_1$ $\quad$ s_1 $\qquad\qquad$ $\bar{x}_2$ $\quad$ s_2

¿ $m_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} m_2$? $\qquad\qquad$ ¿ $\sigma_1 \overset{>}{\underset{<}{=}} \sigma_2$?

Comparación de dos varianzas

¿Hay diferencias entre ambos sistemas en el tiempo medio de depuración?

¿Es admisible la hipótesis de que las varianzas de ambas poblaciones son iguales?

Comparación de dos varianzas

- La hipótesis nula H_0:m_1=m_2 se puede estudiar con el análisis de la varianza (UD 5, 3ª parte).

Comparación de dos varianzas

- H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$
  - Se calcula el intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2
  - Se acepta H_0 si el intervalo contiene el valor 1
- Fórmula del intervalo: $$\left[\frac{s_1^2/s_2^2}{f_2},\frac{s_1^2/s_2^2}{f_1}\right]$$

Donde f_1 y f_2 se obtienen de las tablas de la F:

$$P(f_1 < F_{N1\text{-}1,\, N2\text{-}1} < f_2)=0{,}95$$

(Tabla de la distribución F

$$P(0{,}25 < F_{9,9} < 4{,}03)=0{,}95)$$

Comparación de dos varianzas

- En el ejemplo:

$$\left[\frac{2{,}23^2 / 1{,}84^2}{4{,}03}, \frac{2{,}23^2 / 1{,}84^2}{0{,}25}\right] = [0{,}36 \quad 5{,}87]$$

$\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ está en el intervalo $\Rightarrow$ e s admisible la hipótesis $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Análisis mediante Statgraphics

Opción:

Compare...Two samples...Two samples comparison.

En el cuadro de diálogo si los datos se introducen como dos variables (“two column input”):

-Nombre de variable con datos de 1ª muestra

-Nombre de variable con datos de 2ª muestra

- El programa proporciona:
  - Estadísticos básicos de las dos muestras
  - Intervalo de confianza para la diferencia de medias y el ratio de varianzas
  - Contraste de la hipótesis nula de que la diferencia entre las medias poblacionales es cero.

Análisis mediante Statgraphics

```
95,0% Confidence Intervals
       Ratio of Variances: [0,365657;5,92679]
```

Ejercicios autoevaluación

1- Con el fin de estudiar la eficiencia de un algoritmo (Algoritmo_1) para realizar ajustes de regresión, se han seleccionado al azar 13 ejemplos (todos ellos de 100 puntos), y se han obtenido los siguientes resultados para el tiempo de resolución en segundos:

14,2 11,2 11,2 16 15 11,3 8,6 5,9 12 10,2 12,9 4,8 6,3

a) ¿Es admisible un tiempo de resolución medio para este algoritmo igual a 8 segundos?¿Es admisible una desviación típica igual a 6 segundos? Justifica las respuestas utilizando un riesgo de primera especie α=5%. ¿El p-value para contrastar si es admisible un tiempo medio igual a 8 segundos es mayor o menor que 0,05?

b) Si se utiliza un nivel de confianza del 99%, ¿es admisible una media igual a 8? ¿Es admisible una desviación típica igual a 6? Justifica las respuestas.

Ejercicios autoevaluación

2- Se plantea la posibilidad de utilizar otro algoritmo (Algoritmo_2) para resolver este tipo de problemas. Para compararlo con el algoritmo utilizado en el problema anterior se ha obtenido otra muestra de 10 ejemplos (también de 100 datos cada uno) y al aplicar el Algoritmo_2 los tiempos de resolución han sido:

4,3 4,8 13,5 12,3 7,3 8,7 2,4 12,6 13 2,8

a) Con un riesgo de primera especie α=5%, ¿hay diferencias significativas entre las varianzas del tiempo medio de resolución con los dos algoritmos?

b) Para construir el intervalo de confianza (nivel de confianza 90%) del ratio de varianzas, ¿se utilizan f_1=0,29 y f_2=3,87?