DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Primer parcial **9-11-2009** **Duració: 1h**

---

1. a) $_{(0.5p)}$ Determina el conjunt dels $x \in \mathbb{R}$ tals que $\left|x^2 - 2\right| \leq 1$.

b) $_{(0.5p)}$ Escriu $z = \dfrac{x-i}{1+xi}$, on $x \in \mathbb{R}$, en forma binomial.

Expressa el resultat en forma polar.

Calcula $z \cdot w$, on $w = 2_{\frac{2\pi}{3}}$ i escriu el resultat en forma binomial.

---

a) Observa que

$$\left|x^2 - 2\right| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x^2 - 2 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq x^2 \leq 3 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow |x| \geq 1 \quad \wedge \quad |x| \leq \sqrt{3}$$

Ara bé,

$$|x| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

i, d'altra banda,

$$|x| \leq \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$$

En conseqüència, la solució final serà la intersecció d'aquest dos conjunts, és a dir,

$$\left|x^2 - 2\right| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \left[-\sqrt{3}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{3}\right].$$

b) Reescriurem z en forma binomial

$$z = \frac{x-i}{1+xi} = \frac{(x-i)\,(1-xi)}{(1+xi)\,(1-xi)} = \frac{x - i - x^2 i + x i^2}{1+x^2} = -i$$

d'on $|z| = 1$ i $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$. La forma polar de z serà

$$z = 1_{-\frac{\pi}{2}}$$

Tenint en compte el producte de nombres complexos en forma polar

$$z \cdot w = (2 \cdot 1)_{\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{\pi}{6}}$$

que, a partir de la forma trigonomètrica, pot esriure's com

$$z \cdot w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3} + i$$

2. $_{(1p)}$ Compara els ordres de magnitud de les successions $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ i $b_n = \log(n)$

a) Aplicant el criteri de Stolz, podem comprovar que $a_n \gg b_n$, ja que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\log(n)} = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\log(n+1) - \log(n)} =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)} = \lim \frac{1}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{\log\left(\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}}\right)} \underset{\text{Euler}}{=}$$

$$= \frac{1}{\log\left(e^{\lim\left(\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right)}\right)} = \frac{1}{\lim\left(\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right)} = \frac{1}{\lim\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)} = +\infty$$

on s'ha tingut en compte que

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}} = 1^{\infty}$$

i podem aplicar la fórmula d'Euler per resoldre aquesta indeterminació, és a dir,

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}} = e^{\lim\left(\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right)}.$$

3. $_{(1.0p)}$ Considera la successió definida per

$$\begin{cases} 2a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a)$_{(0.3p)}$ Escriu els cinc primers termes de la successió.

b)$_{(0.7p)}$ Troba explícitament a_n resolent la recurrència corresponent.

a) La recurrència pot expressar-se en la forma

$$a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + a_n$$

i donat que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, tindrem

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{3}{2}a_2 + a_1 = \frac{3}{2} \\ a_4 &= \frac{3}{2}a_3 + a_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{13}{4} \\ a_5 &= \frac{3}{2}a_4 + a_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{4} + \frac{3}{2} = \frac{51}{8}. \end{aligned}$$

b) La recurrència pot expressar-se també en la forma

$$a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n = 0$$

així que l'equació característica corresponent serà

$$r^2 - \frac{3}{2}r - 1 = 0$$

que té per solució dues arrels reals simples, $r_1 = -\frac{1}{2}$ i $r_2 = 2$.

La recurrència correspon al cas 1 i la seua solució general pot escriure's en la forma:

$$a_n = C_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot 2^n$$

Tenint en compte les condicions inicials trobarem les constants. Així,

$$\begin{array}{lclcl} \text{per a } n=1 & ; & a_1 & = & -\frac{1}{2}C_1 + 2C_2 & = & 0 \\ \text{per a } n=2 & ; & a_2 & = & \frac{1}{4}C_1 + 4C_2 & = & 1 \end{array}$$

d'on, resolent el sistema, $C_1 = \frac{4}{5}$ i $C_2 = \frac{1}{5}$. D'ací,

$$a_n = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{5} \cdot 2^n$$