Razonamiento probabilístico: representación e inferencia

Albert Sanchis
Alfons Juan
Jorge Civera

Departamento de Sistemas
Informáticos y Computación

Objetivos formativos

- Representar el conocimiento en términos probabilísticos
- Inferir conocimiento probabilístico mediante las reglas suma y producto del cálculo de probabilidades
- Aplicar el concepto de variables independientes a la representación de conocimiento probabilístico
- Inferir conocimiento probabilístico con el teorema de Bayes

Índice

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

1. El problema de la calificación

Denominamos ***problema de la calificación*** a la pràctica imposibilidad de conocer y comprobar todas las *calificaciones* (condiciones) que habría que garantizar para asegurar el cumplimiento de una acción.

Ejemplos:

- Salir al aeropuerto 90 minutos antes del vuelo me permite llegar a tiempo SI no hay atascos I no hay pinchazos I . . .
- Un bote nos permite cruzar un río SI es un bote de remo I tiene remos y escálamos I no están rotos I encajan I . . .

Los sistemas inteligentes actuales incluyen la ***incerteza*** como parte del conocimiento y la representan mediante ***probabilidades*** asociadas a los sucesos (proposiciones) de interés.

2. Representación probabilística

El conocimiento probabilístico puede representarse con la distribución de prob. conjunta de las variables aleatorias de interès.

Ejemplo del dentista: conocimiento para diagnosticar caries

Variables aleatorias de interés:

$$\begin{aligned} Dolor: &\quad D \in \{0,1\} \\ Caries: &\quad C \in \{0,1\} \\ Hueco: &\quad H \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Representación:

$$P(D=d, C=c, H=h)$$

d	c	h	P
0	0	0	0,576
0	0	1	0,008
0	1	0	0,144
0	1	1	0,072
1	0	0	0,064
1	0	1	0,012
1	1	0	0,016
1	1	1	0,108
Suma:			1,000

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

3. Inferencia probabilística

A partir de la distribución conjunta podemos calcular la probabilidad de qualquier *suceso* (*proposición*) mediante aplicación de:

La regla suma:

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

La regla producto:

$$P(x, y) = P(x)\, P(y \mid x)$$

En general no necesitamos la tabla *completa* de probabilidades conjuntas para calcular la probabilidad de un suceso dado.

Inferencia probabilística: ejemplo del dentista

Probabilidad de observar caries y hueco (a la vez):

$$P(c=1,h=1)=\sum_{d=0,1} P(d,c=1,h=1)=0{,}180$$

d	c	h	P
0	0	0	0,576
0	0	1	0,008
0	1	0	0,144
0	1	1	0,072
1	0	0	0,064
1	0	1	0,012
1	1	0	0,016
1	1	1	0,108

Probabilidad de observar hueco:

$$P(h=1)=\sum_{d=0,1}\sum_{c=0,1} P(d,c,h=1)=0{,}200$$

d	c	h	P
0	0	0	0,576
0	0	1	0,008
0	1	0	0,144
0	1	1	0,072
1	0	0	0,064
1	0	1	0,012
1	1	0	0,016
1	1	1	0,108

Probabilidad de observar caries tras observar hueco:

$$P(c=1\mid h=1)=\frac{P(c=1,h=1)}{P(h=1)}=\frac{0{,}180}{0{,}200}=0{,}900$$

4. Independencia

Decimos que x y y son ***independientes*** si:

$$P(x, y) = P(x)\, P(y) \quad \text{o} \quad P(x \mid y) = P(x) \quad \text{o} \quad P(y \mid x) = P(y)$$

La independencia puede establecerse por conocimiento experto.

Ejemplo del dentista: $\quad Tiempo: \;T \in \{sol, nubes, lluvia, nieve\}$

$$P(t, d, c, h) = P(t)\, P(d, c, h)$$

Reducimos el número de probabilidades a almacenar:

32 probabilidades vs $4 + 8$ probabilidades

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

5. Teorema de Bayes

El *teorema de Bayes* permite actualizar nuestro conocimiento sobre una hipótesis y después de observar una nueva evidencia x:

$$P(y \mid x) \;=\; \frac{P(x, y)}{P(x)} \;=\; P(y)\,\frac{P(x \mid y)}{P(x)}$$

De otra manera: $P(y \mid x)$ es la probabilidad de que se produzca el efecto y después de observar que se ha producido la causa x.

Ej. del dentista: queremos inferir $P(c = 1 \mid d = 1)$ sabiendo que

$$P(c = 1) = 0{,}34, \quad P(d = 1) = 0{,}20 \quad \text{y} \quad P(d = 1 \mid c = 1) = 0{,}36$$

Por Bayes, la probabilidad de caries sabiendo que hay dolor es:

$$P(c = 1 \mid d = 1) = P(c = 1)\,\frac{P(d = 1 \mid c = 1)}{P(d = 1)} = 0{,}34\,\frac{0{,}36}{0{,}20} = 0{,}61$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

6. Conclusiones

- Hemos visto cómo representar el conocimiento en términos probabilísticos, también con variables independientes si las hay

- Hemos visto cómo inferir conocimiento probabilístico con:
  - Las reglas suma y producto del cálculo de probabilidades
  - El teorema de Bayes