

Problemes del tema 1

1. Siguen les matrius $A = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}$.

Obtin les matrius X i Y sabent que es verifiquen les igualtats: $2X + 3Y = A$ i $6X - 2Y = B$.

2. Donades les matrius

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calcula els productes que siguen possibles.

3. Siguen A , B i C tres matrius quadrades. Indica si les següents propietats són certes o no. En cas afirmatiu demostra-ho i, en cas contrari, dóna un contra-exemple.

- (a) Si $AB = 0$ llavors $A = 0$ o $B = 0$.
- (b) Si $AB = AC$ llavors $A = 0$ o $B = C$.
- (c) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
- (d) Si $AB = A$ i $BA = B$ llavors $A^2 = A$ i $B^2 = B$.

4. Indica quines de les següents matrius són escalonades reduïdes, escalonades principals o simplement escalonades:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Indica segons els valors de $a \in \mathbb{R}$ quines de les següents matrius són escalonades reduïdes:

(a) $\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Si S i T són dues solucions del sistema $AX = B$, demostra que $2S - T$ és també una solució del sistema. ¿Passa el mateix amb $S + T$? Justifica la resposta.
7. Discuteix i resol els sistemes les matrius ampliades dels quals són les matrius del problema 4.
8. (a) Escribe la forma escalonada reduïda de la matriu ampliada d'un sistema de quatre equacions i dues incògnites la solució única del qual és el vector $(1, 0)$.
- (b) Escribe la forma escalonada reduïda de la matriu ampliada d'un sistema de tres equacions y quatre incògnites la solució del qual, obtinguda per Gauss-Jordan, és el conjunt $\{(-\lambda - 2\mu, \mu, \lambda, \lambda) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

9. Donada la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ calcula la matriu T tal que $TA = R$, sent R la forma escalonada reduïda de A .

10. Determina si els següents parells de sistemes són equivalents:

$$\begin{array}{llll} x + y = 1 & x + 2y + z = 3 & x + y + 2z = 1 & 5x - y + 16z = 8 \\ \text{(a)} \quad 2x + 4y + z = 3 & 2x + z = 7 & \text{(b)} \quad x - y + 4z = 2 & 2x - 2y + 8z = 4 \\ x - z = -1 & x - 2y = 4 & 3x - y + 10z = 5 & x + 3y = 0 \end{array}$$

11. Resol per Gauss-Jordan els sistemes següents:

$$\begin{array}{lll} x + 2y - z = 2 & 2x - y - z - t = 0 & 2x + y + z = 4 \\ \text{(a)} \quad x - y + z = 1 & \text{(b)} \quad x + 2y + z - t = 1 & \text{(c)} \quad x - y + z = 1 \\ 2x + y = 3 & 3x + y - 2t = 1 & 3x - y - z = 1 \\ 3y - 2z = 1 & 6x + 2y - 4t = 1 & 6x - y + z = 6 \end{array}$$

12. Resol per substitució regressiva cadascun dels sistemes del problema anterior.

13. Discuteix i resol els sistemes següents segons els valors de a , b i c :

$$\begin{array}{ll} x + y = 1 & x + y + z = a \\ \text{(a)} \quad ay + z = 0 & \text{(b)} \quad 2x + y + 2z = b \\ x + (a+1)y + az = a+1 & 3y + z = c \end{array}$$

14. Obtén la forma escalonada reduïda de la matriu ampliada del sistema següent i resol-lo:

$$\begin{array}{l} mx + y + 2z + t = m \\ 2mx + 3y - z - t = 1 \\ 3mx + 4y + z = m + 1 \end{array}$$

15. (a) Calcula segons els valors de a i b el rang de la matriu $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & b \end{bmatrix}$

(b) ¿Quin tipus de sistema és el que té com a matriu ampliada B ?

16. Resol simultàniament, pel mètode de Gauss-Jordan, els sistemes següents:

$$\begin{array}{lll} x + y = 1 & x + y = 1 & x + y = 2 \\ 2x + 3y = 0 & 2x + 3y = 4 & 2x + 3y = -2 \\ x - y = 3 & x - y = 2 & x - y = 14 \end{array}$$