9. (a) $M = \langle (1,0,2,3), (0,1,2,2), (-1,0,-1,1) \rangle$

Equacions de M: El sistema ha de ser compatible i per tant hem d'imposar que rang(A) = rang(A^*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 2 & 2 & -1 & z \\ 3 & 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{4,1}(-3)]{E_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 1 & z-2x \\ 0 & 2 & 4 & t-3x \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{4,2}(-2)]{E_{3,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-2x-2y \\ 0 & 0 & 4 & t-3x-2y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{4,3}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-2x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 5x+6y-4z+t \end{pmatrix}$$

rang(A) = 3

(*)

(*) $t-3x-2y-4(z-2x-2y) = t-3x-2y-4z+8x+8y = 5x+6y-4z+t$

rang(A^*) = 3 $\Leftrightarrow$ $\boxed{5x+6y-4z+t=0}$ ← Equació de M.

Equacions de N:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 2 & 2 & 6 & z \\ 3 & 2 & 8 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{4,1}(-3)]{E_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 8 & 8 & z-2x \\ 0 & 11 & 11 & t-3x \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{4,2}(-11)]{E_{3,2}(-8)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x-8y \\ 0 & 0 & 0 & t-3x-11y \end{pmatrix}$$

rang(A) = 2

Per tant rang(A^*) = rang(A) = 2 $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} z-2x-8y=0 \\ t-3x-11y=0 \end{array}\right\}$

Equacions de N.

(b) Base de $M \cap N$:

Hem de resoldre el sistema format per les equacions de M i N. Com que el coeficient de x no està molt bé per a escalonar, anem a canviar l'ordre de les variables al sistema per que siga més fàcil. Però ens hem de recordar després d'aquest ordre al resolver el sistema. Així reordenem les equacions:

$$\begin{array}{l} M \\ N \\ \end{array} \left.\begin{array}{l} t+5x+6y-4z=0 \\ -2x-8y+z=0 \\ t-3x-11y=0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -11 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{3,2}(-4)]{} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} t & x & y & z \end{array} \end{array}$$

S. Comp. Indet.

$z = \lambda$

$y = 0$

$$-2x-\cancel{8y}+z=0 \rightarrow z=2x \rightarrow x=\frac{z}{2}=\frac{\lambda}{2}$$

$$t+5x+\cancel{6y}-4z=0 \rightarrow t=-\frac{5\lambda}{2}+4\lambda=\frac{-5\lambda+8\lambda}{2}=\frac{3\lambda}{2}$$

En forma vectorial: $(x,y,z,t)=\left(\frac{\lambda}{2},0,\lambda,\frac{3\lambda}{2}\right)=\lambda\left(\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2}\right)$

Per tant $M \cap N = \langle \underbrace{(\tfrac{1}{2},0,1,\tfrac{3}{2})}_{\text{Base de } M\cap N} \rangle$

(c) Hem d'obtindre b de forma que $\langle(1,0,b,7)\rangle \subseteq \langle(\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2})\rangle$

Açò vol dir que $(1,0,b,7)$ ha de ser múltiple de $(\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2})$. Per tant $(1,0,b,7)=\alpha(\frac{1}{2},0,1,\frac{3}{2})$. D'ací

$1=\frac{\alpha}{2} \rightarrow \alpha=2$

$b=\alpha$, $\quad 7=\alpha\cdot\frac{3}{2} \rightarrow \alpha=\frac{14}{3}$ $\rightarrow 2=\frac{14}{3}$ Contradicció i per tant $\nexists\, b$