Estructura de Computadores

Tema 4
Aritmética en coma flotante

DISCA

Índice

- Introducción
  - Medida del rendimiento
- La norma IEEE y su implementación en el MIPS
  - Formato, valores especiales, redondeo
  - Visión del programador: banco de registros y movimiento de datos
  - Juego de instrucciones de coma flotante
- Operadores de coma flotante
  - Operador de cambio de signo
  - Operadores de conversión de tipo
  - Operador de multiplicación

Bibliografía

D.L. Patterson, J. L. Hennessy: Estructura y diseño de computadores

- Ed. Reverté, 2000: volumen 1, capítulo 4
- Ed. Reverté, 2011, traducción de la 4ª edición en inglés: cap. 3

W. Stallings: Organización y Arquitectura de Computadores (7a ed.) Prentice Hall, capítulo 9

David Goldberg: Computer Arithmetic

- Apéndice H de J. L. Hennessy, D. L. Patterson: Computer Architecture, a Quantitative Approach, 3a edició
- Disponible en castellano en la 1ª edición en McGraw-Hill

– David Goldberg: What every computer scientist should know about floating-point arithmetic

- PDF (accesible en muchos sitios de la web)

Introducción

Introducción

- **La aritmética de coma flotante**
  - Sirve para cálculos definidos sobre reales (*float* y *double* en alto nivel)Puede que no esté directamente soportada por la ALU.
    - no es esencial para el funcionamento de la CPU
    - puede ser emulada mediante instrucciones de enteros
  - Evolución
    - Hasta 1985 (aprox) los operadores de CF iban dentro de un chip opcional que se colocaba al lado de la CPU
    - Desde 1985 en adelante, las CPU de propósito general incluyen operadores de CF dentro de su UAL
    - Desde 1990, los adaptadores de vídeo incluyen una GPU (*Graphics Processing Unit*) con un número creciente de operadores de CF

Introducción

- **La medida de prestaciones en coma flotante**
  - El número de operaciones de coma flotante por segundo (FLOPS, prefijos M=10^6, G=10^9, T=10^{12}) es una medida de prestaciones utilizada en dos contextos:
  - En el diseño de operadores de CF es el número máximo de operaciones por segundo. Viene determinada por el tiempo de operación de cada circuito.
  - En las comparativas entre computadores o entre aceleradores gráficos: es el número de operaciones de CF que ejecuta el dispositivo por segundo.
    - Depende del número y características de los operadores incluídos y del uso que se hace de ellos.
    - **Productividad punta** de un computador o de un acelerador gráfico: suma de las productividades de los operadores de CF incluídos. Suele ser imposible de alcanzar en el uso corriente.

Introducción

- **Productividades punta**

Procesador Intel Core2 Duo @2GHz
16 GFLOPS

Procesador Intel Core i7 965 XE
70 GFLOPS

GPU ATI Radeon HD4890
2.4 TFLOPS

K Computer (Japón, junio 2011)
10 PFLOPS

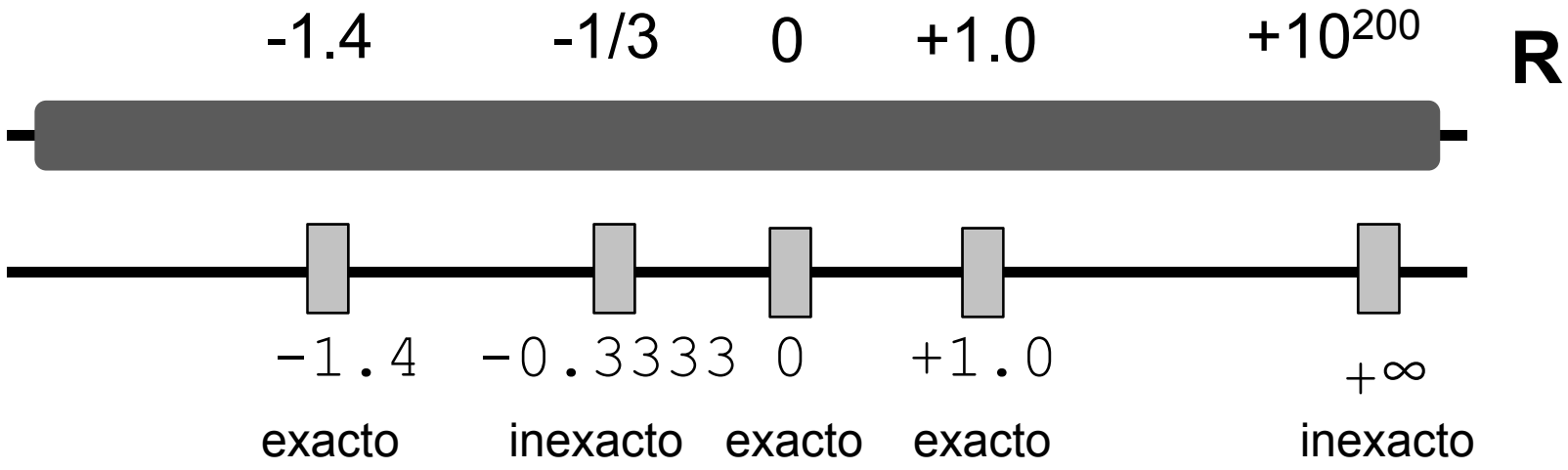
La norma IEEE 754 y su implementación en el MIPS

Notas sobre la representación de números

- Representación del conjunto R (reales positivos y negativos)
  - El conjunto R es un conjunto denso: entre dos números reales cualesquiera hay infinitos números reales
  - La representación del computador es limitada i no siempre es exacta
    - Con 32 bits se pueden obtener 2^{32} palabras diferentes. Por tanto, como máximo se pueden representar 2^{32} valores del conjunto R
  - Hay números reales que tienen representación exacta otros que no, como los números con parte decimal periódica
  - ¿Cómo codificar un número real en una palabra de bits?
    - Aplicando un formato arbitrario, como el IEEE 754, estructurado en tres campos de bits para el signo, el exponente y la parte significativa (mantisa)
  - El formato impone más restricciones a la representación: habrá algunas palabras de bits con una significación matemática especial, como el valor infinito o el cero

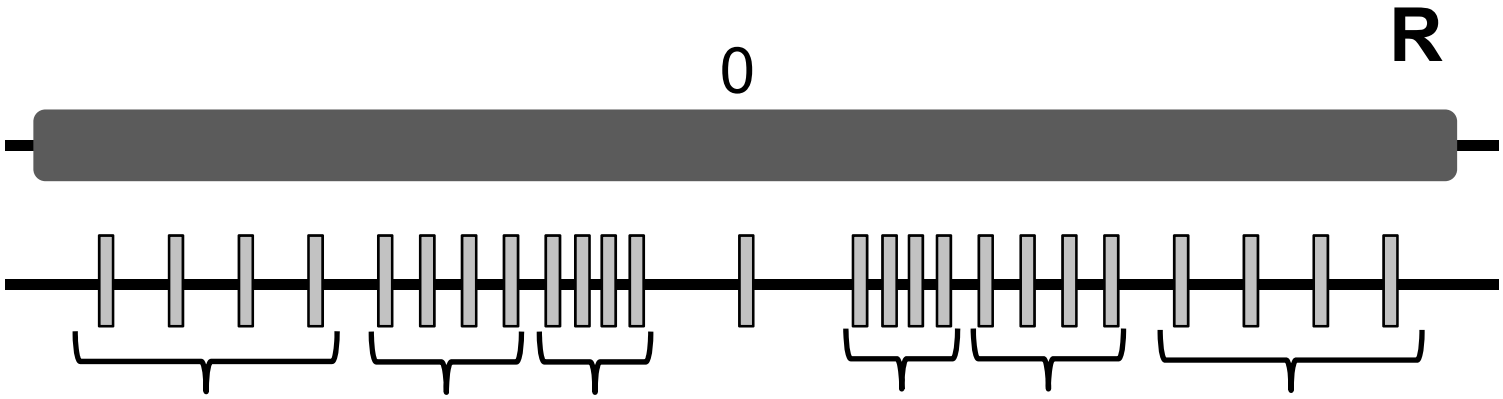
Notas sobre la representación de números

- Representación del conjunto R (reales positivos y negativos)
  - En el computador interesa aumentar
    - La cantidad de números representados (densidad)
    - El rango de la representación
  - Estos dos aspectos dependen de los campos de la parte significativa (mantisa) y del exponente del formato



Notas sobre la representación de números

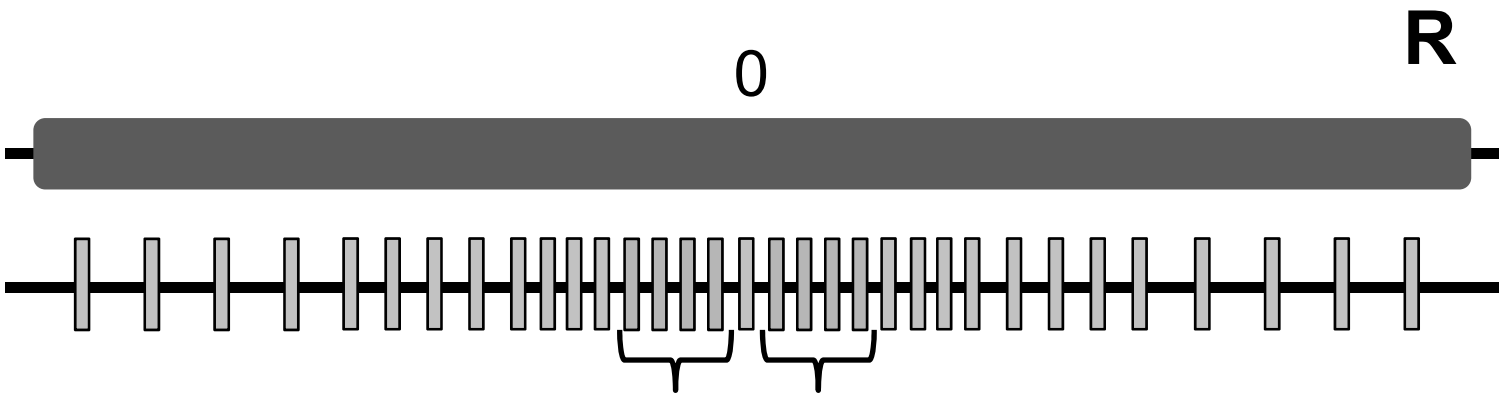
- Patrón de la representación de los números reales
  - No hay valores representados muy cerca del cero
  - Para un mismo valor de exponente los números representados están separados por la misma distancia
  - Cuanto más grande es el exponente más distancia hay entre dos números representados consecutivos (la densidad de representación disminuye)



Cada grupo de valores tiene el
mismo exponente y diferentes mantisas

Notas sobre la representación de números

- Los valores cercanos al cero
  - El formato IEEE 754 reserva un subconjunto de palabras de bits para representar números reales cerca del cero y que se interpretan de forma diferente del resto de valores (valores desnormalizados)
  - No todas las unidades de coma flotante soportan este subconjunto de valores



La norma IEEE 754

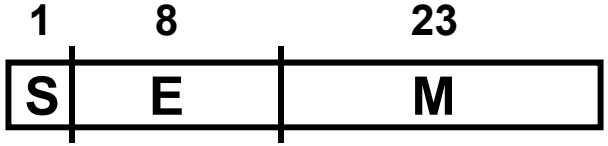
- **Alcance de la norma**
  - La norma IEEE 754 (y su ampliación a la aritmética de punto fijo, IEEE 854) especifican:
    - codificación: cómo representar los números en diversos formatos (precisiones simple, doble y extendida, SP DP EP) y el tratamiento de casos particulares: NaN (Not a Number), ±∞ (infinity), 0 (zero)
    - unos modos de funcionamiento (p. ej, el método de redondeo aplicable durante los cálculos)
    - un conjunto de operaciones que se pueden implementar en el hardware o en forma de bibliotecas
    - el soporte que ha de dar el sistema de excepciones de los procesadores (para que se puedan diseñar buenas bibliotecas de cálculo numérico)

La norma IEEE 754

- **Representación**

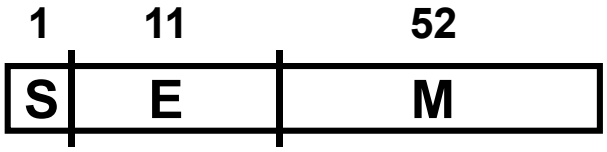
  Símbolos: S es el signo, M la magnitud de la mantisa, E el exponente

  - Simple precisión (SP)



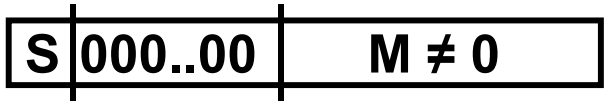
$(-1)^S \cdot 1.M \cdot 2^{E-127}$

  - Doble precisión (DP)



$(-1)^S \cdot 1.M \cdot 2^{E-1023}$

  – Valores subnormales
    - (SP y DP)

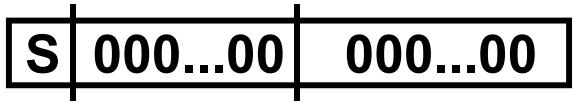


$(-1)^S \cdot 0.M \cdot 2^{-126}$

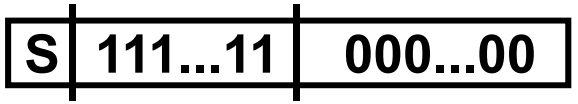
$(-1)^S \cdot 0.M \cdot 2^{-1022}$

  – Valores especiales (SP y DP)

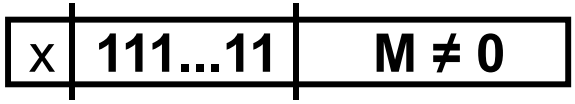
±0



±∞



NaN



La norma IEEE 754

- **Los valores especiales**
  - Son manipulados por las operaciones junto con los reales corrientes
  - Cero e infinito:
    - se entienden como límites matemáticos; por eso

      $+\infty + +\infty = +\infty$; $-\infty + -\infty = -\infty$; etc.

      $+\infty \times positivo = +\infty$; $+\infty \times negativo = -\infty$; etc.

      $positivo \,/\, +0 = +\infty$; $positivo \,/\, -0 = -\infty$; etc.
    - atención a las comparaciones: +0 y –0 son iguales
  - *Not a Number*:
    - propagación: cualquier operación donde un operando es NaN dará como resultado NaN
    - generación: NaN es el resultado de $(+\infty) + (-\infty)$, $\pm 0 \times \pm\infty$, $\pm 0 \,/\, \pm 0$, $\pm\infty \,/\, \pm\infty$ y otras
    - una comparación (=, <, ≥, etc) entre NaN y otro número resulta siempre falsa

La norma IEEE 754

- La norma y los lenguajes de programación
  - Los valores especiales permiten tratar los incidentes del cálculo
  - El desbordamiento aritmético produce un resultado representable

Java

```
float x = +0.0f;
float y = 1/x;
float z = Float.NEGATIVE_INFINITY;
float t = 1/z;
float u = x*z;
System.out.println("x = " + x);
System.out.println("1/x = " + y);
System.out.println("z = " + z);
System.out.println("1/z = " + 1/z);
System.out.println("x * z = " + u);
```

```
x = 0.0
1/x = Infinity
z = -Infinity
1/z = -0.0
x * z = NaN
```

La norma IEEE 754

- **El redondeo**
  - Situación frecuente: una operación genera una mantisa M de longitud más larga (*p* bits) que la prevista en el formato (*m* bits)
    - los *m* primeros bits de la mantisa M se llaman *retenidos*
  - Posibilidades:
    - M es representable de forma *exacta* en el formato: los *p*–*m* bits no retenidos son 0 y se pueden eliminar: **010000** $\rightarrow$ **0100**
    - M se encuentra entre dos valores representables M_- y M_+ ($M_- < M < M_+$) y hay que *redondear*: escoger uno de ellos como representación *inexacta* de M
  - La norma admite cuatro *modos de redondeo*:
    - Hacia $+\infty$
    - Hacia $-\infty$
    - Hacia 0
    - Escoger el más próximo de los dos (este es el modo por omisión)

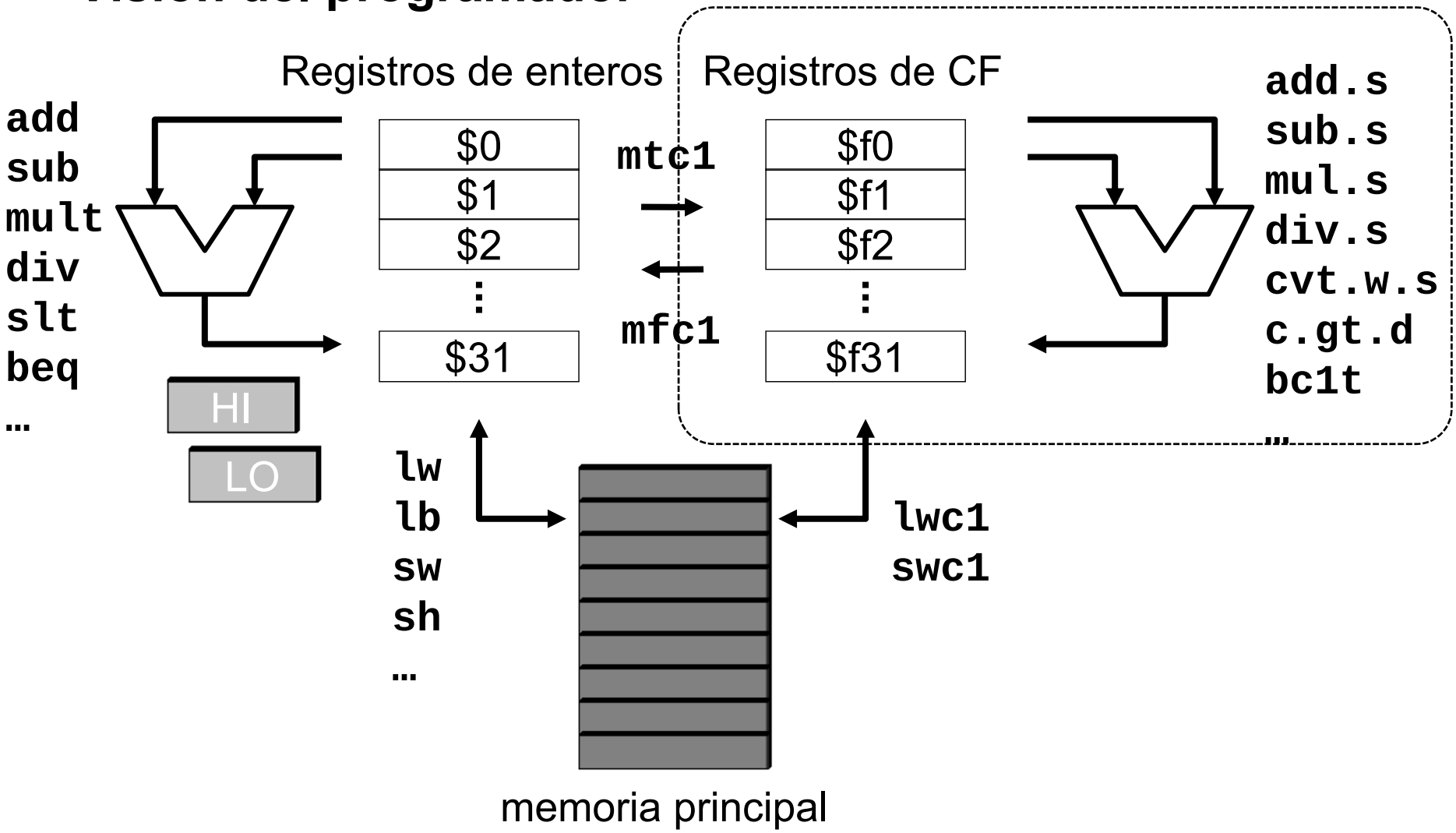
La norma IEEE 754

- **El redondeo hacia el más próximo (sesgado al par)**
  - La variante por omisión es “tie to even”: en caso de que M equidiste de M_- y M_+ hay que escoger la mantisa representable par (o sea, la que acabe en 0)
  - Ejemplo:

M	se elige	M resultante
010000	(exacta)	**0100**
010001	M_-(más próxima)	**0100**
010010	M_- (par)	**0100**
010011	M_+(más próxima)	**0101**
010100	(exacta)	**0101**
010101	M_-(más próxima)	**0101**
010110	M_+ (par)	**0110**
010111	M_+(más próxima)	**0110**
011000	(exacta)	**0110**

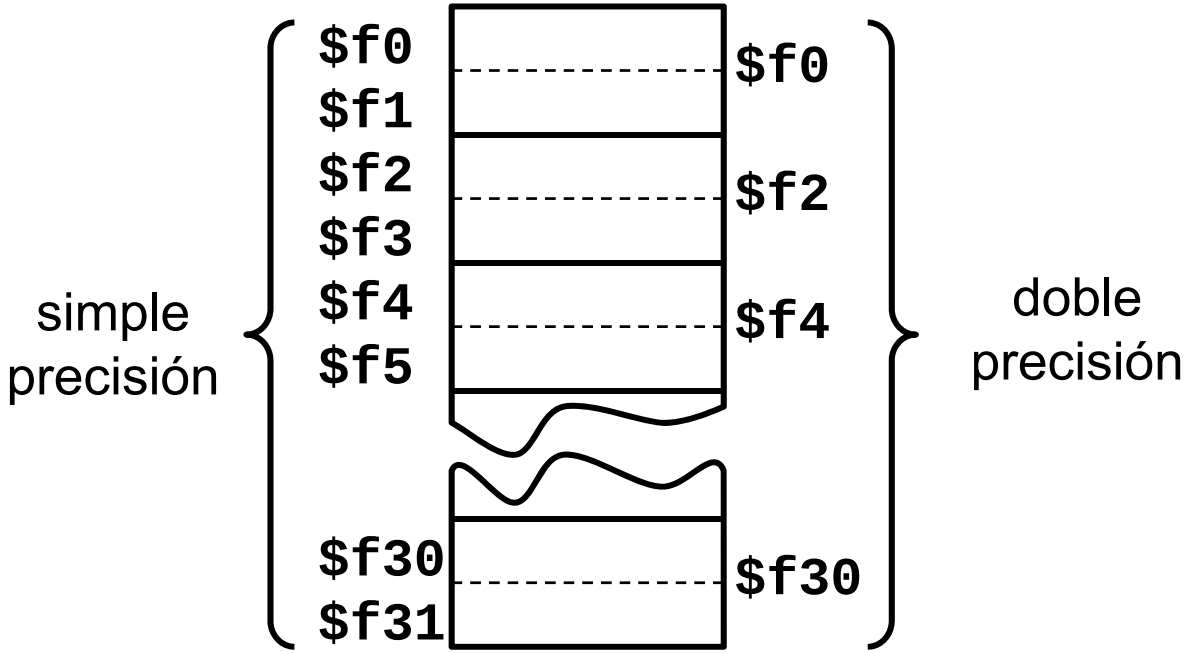
La coma flotante en el MIPS

- **Visión del programador**



La coma flotante en el MIPS

- **El banco de registros**
  - Hay 32 registros de 32 bits, **`$f0,$f1,...,$f31`** para tipo float
    - Se suelen utilizar los números pares **`$f0,$f2,...,$f30`**
  - Emparejables para formar 16 registros de 64 bits para tipo double
    - Si **`$f0`** "contiene" un double: **`$f0`** tiene la parte baja y **`$f1`** la parte alta (**`$f1||$f0`**)



La coma flotante en el MIPS R2000

- Convenio de uso de los registros

Nombre del registro	Utilización
`$f0`	Retorno de función (parte real)
`$f2`	Retorno de función (parte imaginaria)
`$f4,$f6,$f8,$f10`	Registros temporales
`$f12,$f14`	Paso de parámetros a funciones
`$f16,$f18`	Registros temporales
`$f20,$f22,$f24,$f26,$f28,$f30`	Registros a preservar entre llamadas

La coma flotante en el MIPS

- **Intercambio con la memoria y los registros de enteros**

operación	instrucción
lectura *$ft* ← *Mem[X+$rs]*	`lwc1 $ft,X($rs)`
escritura *Mem[X+$rs]* ← *$ft*	`swc1 $ft,X($rs)`
transferencia *$fs* ← *$rt*	`mtc1 $rt,$fs`
transferencia *$rt* ← *$fs*	`mfc1 $rt,$fs`

fs i ft: registros de coma flotante
rs i rt: són registros de enteros

```
        .data
x:      .float 3.14
y:      .double 0.1
        .text
        la $t0,x          # f0 <- x
        lwc1 $f0,0($t0)
        la $t0,y          # f2 <- y
        lwc1 $f2,0($t0)
        lwc1 $f3,4($t0)
        mtc1 $0,$f4       # f4 <- 0.0
```

Las instrucciones de CF no admiten operandos inmediatos. Hay que ubicar las constantes en la memoria o construirlas en los registros de enteros

La coma flotante en el MIPS

- **Conversión de formatos**
  - Los registros de CF pueden contener:

símbolo	*tipo*
S	números en coma flotante en SP
D	(por parejas) números en coma flotante en DP
W	números enteros de 32 bits

  - La instrucción **`cvt._._ fd,fs`** hace las conversiones posibles entre los tres tipos
    - Ejemplo: **`cvt.d.w $f4,$f7`** hace la conversión del entero contenido en **`$f7`** a CF en doble precisión contenido en **`$f4||$f5`**
  - En combinación con las instrucciones de transferencia con el banco de registros de enteros, se puede hacer aritmética con variables de tipos diversos

La coma flotante en el MIPS

- **Instrucciones aritméticas básicas**
  - Hay dos versiones de cada operación: S (simple precisión) y D (doble precisión)
    - Ejemplo: **`add.s $f0,$f1,$f2`**; **`add.d $f2,$f4,$f6`**

operación	instrucción
suma	**`add._ fd,fs,ft`**
resta	**`sub._ fd,fs,ft`**
multiplicación	**`mul._ fd,fs,ft`**
división	**`div._ fd,fs,ft`**
comparación	**`c.`*`cond`*`._ fs,ft`**
copia	**`mov._ fd,fs`**
cambio de signo	**`neg._ fd,fs`**
valor absoluto	**`abs._ fd,fs`**

La coma flotante en el MIPS

- **La comparación**
  - Las instrucciones de comparación escriben un bit implícito ***FPc*** que codifica cierto=1 y falso=0
  - Este bit se encuentra en un registro de control del coprocesador y puede ser consultado por las instrucciones de salto
  - Para cada tipo de datos, hay un conjunto de comparaciones codificables
  - Las más importantes: (**`c.__.s fd,fs`** o **`c.__.d fd,fs`**)

fd>fs	**fd=fs**	**fd<fs**
`gt`	**`eq`**	**`lt`**
`le`	**`neq`**	**`ge`**
fd≤fs	**fd≠fs**	**fd≥fs**

La coma flotante en el MIPS

- **Control de flujo y aritmética de coma flotante**
  - Hay dos instrucciones de bifurcación asociadas al bit FPc

    `bc1t` *`eti`* si (FPc == 1) bifurcar a *eti*

    `bc1f` *`eti`* si (FPc == 0) bifurcar a *eti*
  - Combinadas con las instrucciones de comparación, permiten bifurcar con condiciones aritméticas complejas
  - Cada condición permite dos implementaciones
    - Ejemplo en simple precisión: *si ($f0 > $f2) bifurcar a eti*

```
; mirar si $f0>$f2
      c.gt.s $f0,$f2
; saltar si afirmativo
      bc1t eti
```

```
; mirar si $f0<=$f2
      c.le.s $f0,$f2
; saltar si negativo
      bc1f eti
```

Operadores de coma flotante

DISCA

Operadores de coma flotante

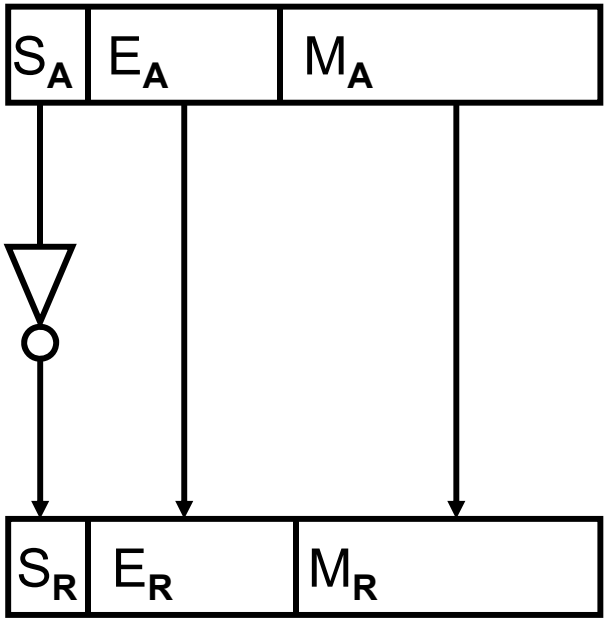
- Operadores
  - Toman como entrada uno o dos operandos en un formato de CF dado
  - Su resultado es un valor en CF codificado según la norma
    - excepto los operandos de comparación
  - Su diseño es complejo porque, además de realizar la operación definida, se han de ocupar de ciertos detalles:
    - Han de suministrar el resultado correctamente **normalizado** según la precisión con la que trabajan
    - Han de gestionar los **valores especiales** definidos en la norma
    - Si procede, han de redondear el resultado según el **modo** programado
    - Han de señalar las **excepciones** previstas por la norma
  - Estudiaremos la estructura básica de algunos operadores y veremos, en casos seleccionados, cómo resuelven los detalles

Operadores de coma flotante

- Ejemplos de operadores
  - NEG.S i NEG.D (cambio de signo)
    - Estructura
  - CVT.D.S (conversión de simple a doble precisión)
    - Estructura básica
    - Detalle: tratamiento de los valores especiales
  - CVT.S.D (conversión de doble a simple precisión)
    - Estructura básica
    - Detalle: el redondeo
  - CVT.D.W (conversión de entero a CF doble precisión)
    - Estructura básica
    - Detalle: la normalización
  - MULT.S i MULT.D (multiplicación)
    - Estructura básica
    - Detalle: la renormalización

Cambio de signo

- Operador
  - Dos versiones:
    - Simple precisión:
      - Entrada: S_A (1 bit), E_A (8 bits) y M_A (23 bits)
      - Salida: S_R (1 bit), E_R (8 bits) y M_R (23 bits)
    - Doble precisión:
      - Entrada: S_A (1 bit), E_A (11 bits) y M_A (52 bits)
      - Salida: S_R (1 bit), E_R (11 bits) y M_R (52 bits)
  - Cambia el signo: S_R = not S_A
  - Copia el exponente: $E_R = E_A$
  - Copia la mantisa: $M_R = M_A$



Emulación del cambio de signo

```
float x = 1.0;

x = -x;
```

```
x:    .float 1.0

      lwc1 $f2, x          # $f2 <- x (1.0)
      mfc1 $t0,$f2         # $t0 <- $f2
      lui $t1, 0x8000      # $t1 <- 0x80000000
      xor $t0, $t0, $t1    # $t0 <- -1.0
      mtc1 $t0, $f2        # $f2 <- $t0
      swc1 $f2, x          # x <- $f2 (-1.0)
```

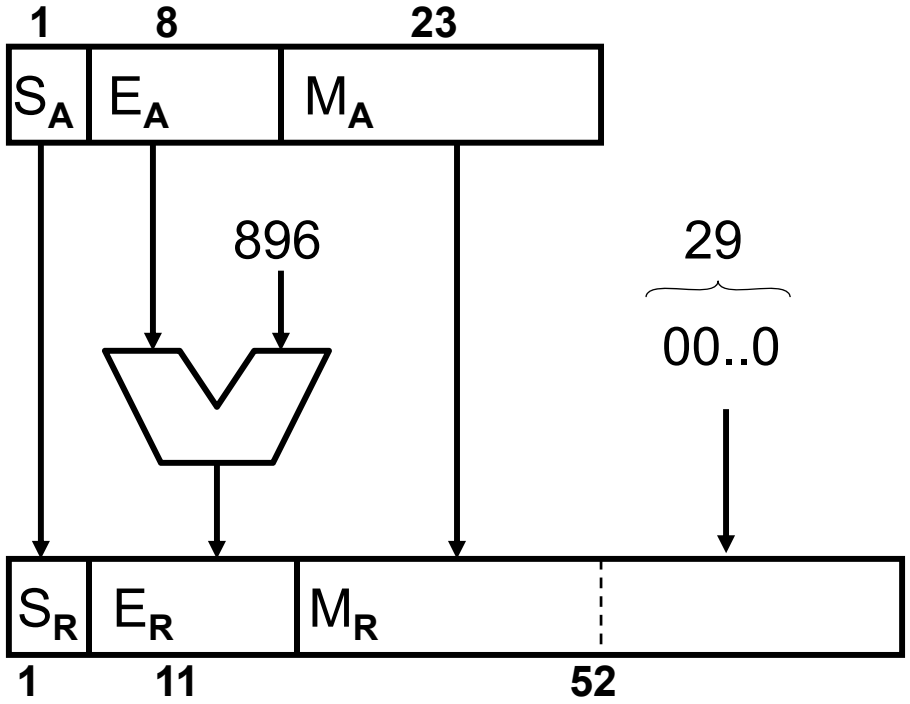
Conversión de simple a doble precisión (`cvt.d.s`)

- **Especificación del operador:**
  - Entrada: S_A (1 bit), E_A (8 bits) y M_A (23 bits)
  - Salida: S_R (1 bit), E_R (11 bits) y M_R (52 bits)
  - El signo no cambia: $S_R = S_A$
  - Exponente: hay que cambiar de exceso 127 a exceso 1023
    - $E_R = E_A + 896$
  - Mantisa: hay que añadir 52–23=29 ceros a la derecha
    - $M_R = M_A \,||\, 00\ldots0$
  - Detalle del trato correcto de los valores especiales:

	E_A	S_R	E_R	M_R
zero y subnormal:	00000000_2	S_A	00000000000_2	$M_A \,||\, 00\ldots0$
±∞ y NaN:	11111111_2	S_A	11111111111_2	$M_A \,||\, 00\ldots0$
valores corrientes:	(otros valores)	S_A	$E_A + 896$	$M_A \,||\, 00\ldots0$

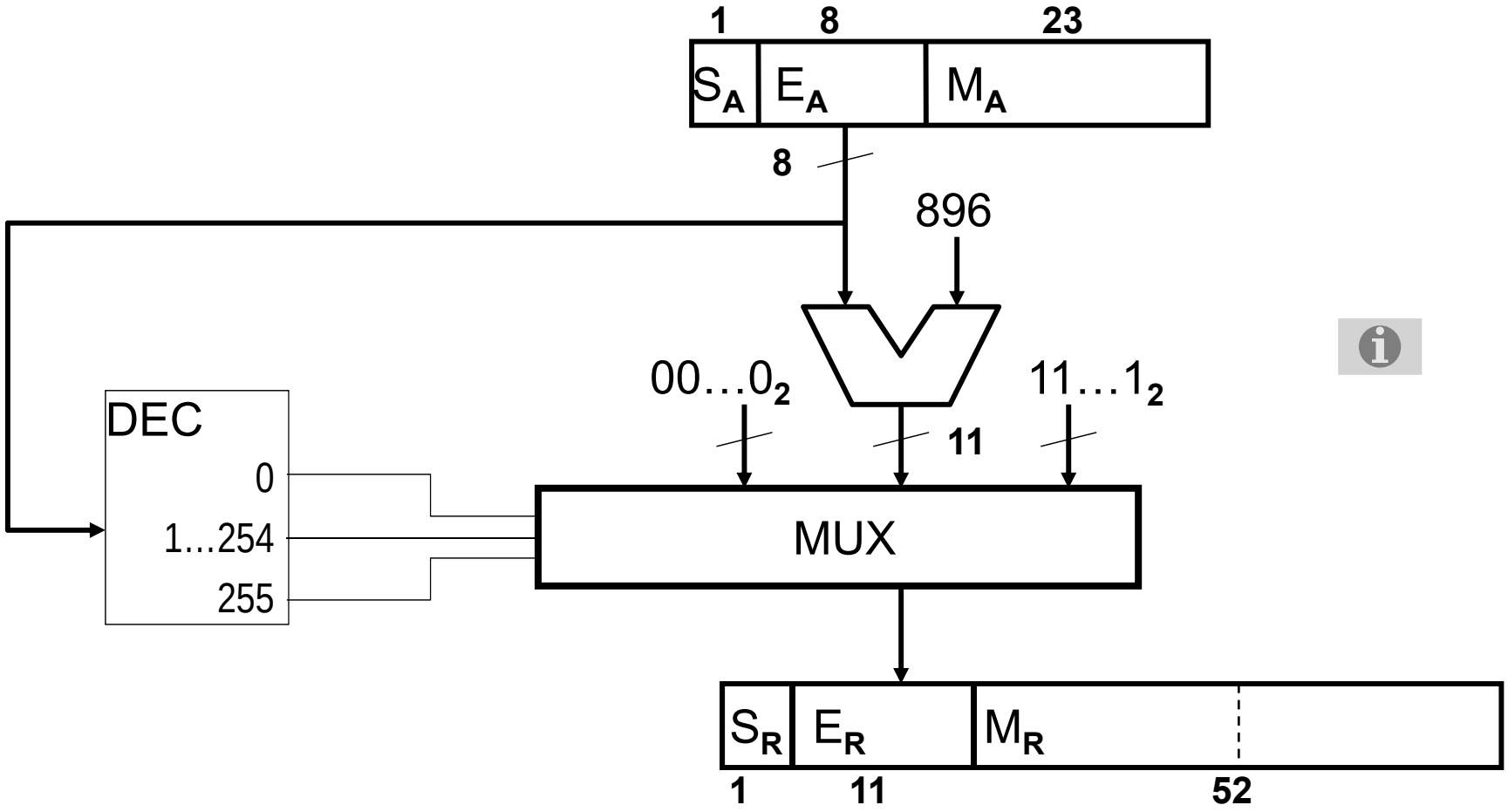
Conversión de simple a doble precisión (`cvt.d.s`)

- **El operador básico**
  - No trata los valores especiales



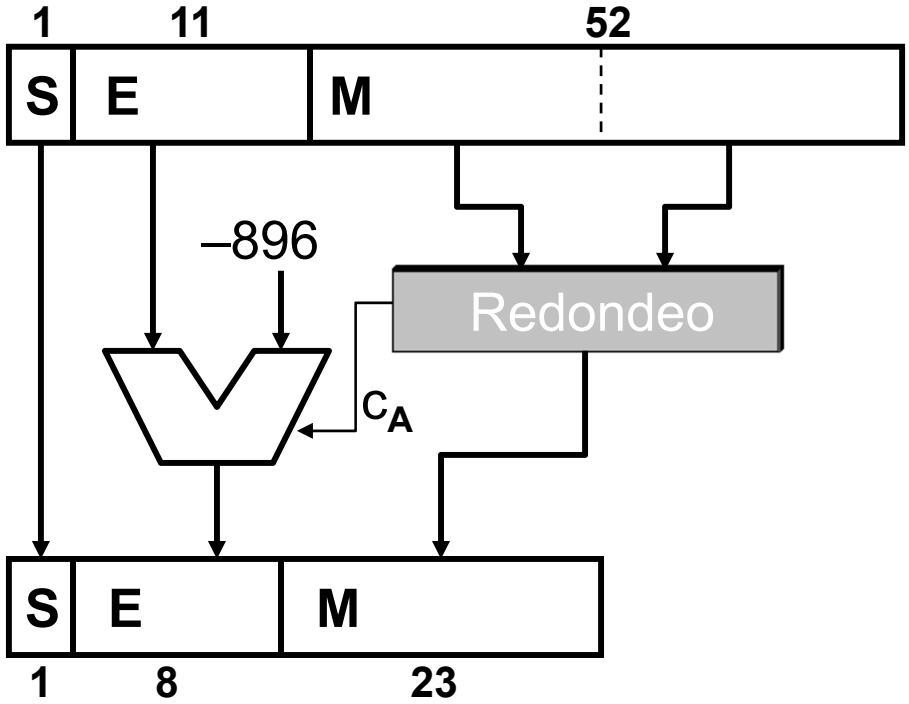
Conversión de simple a doble precisión (cvt.d.s)

- **Tratamiento de los valores especiales**
  - Detalle del cálculo del exponente



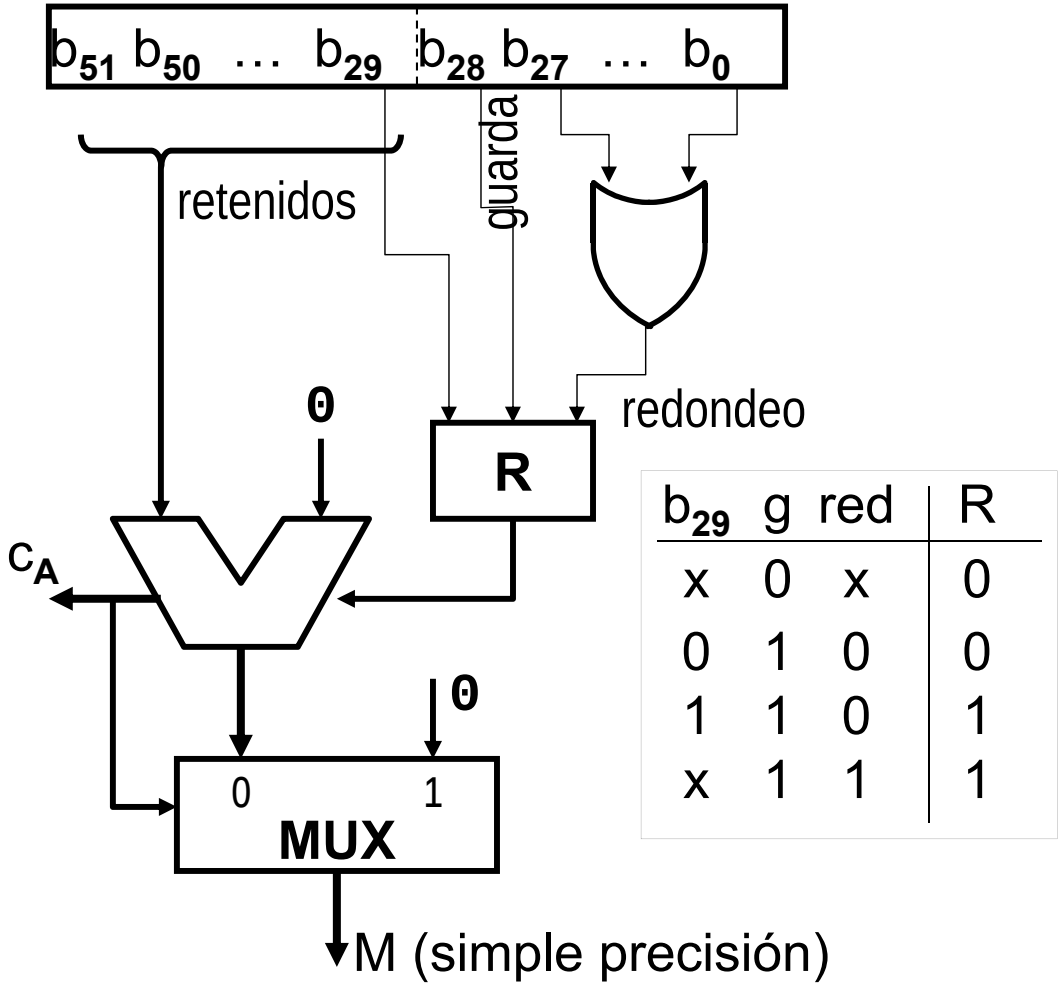
Conversión de doble a simple precisión (`cvt.s.d`)

- **Estructura del operador**
  - El signo no cambia
  - Exponente: hay que cambiar de 11 bits en exceso 1023 a 8 bits en exceso 127
    - puede darse desbordamiento
  - Mantisa: hay que eliminar 29 bits por la derecha y redondear



El redondeo

- Circuito para el redondeo al más próximo



b_{29}	g	red	R
x	0	x	0
0	1	0	0
1	1	0	1
x	1	1	1

Si R=0, truncar:

implícito

```
  1.1001101
+          0
-----------
  1.10011
```

Si R=1, incrementar:

```
  1.1001111
+          1
-----------
  1.10100
```

Si c_A=1, corregir

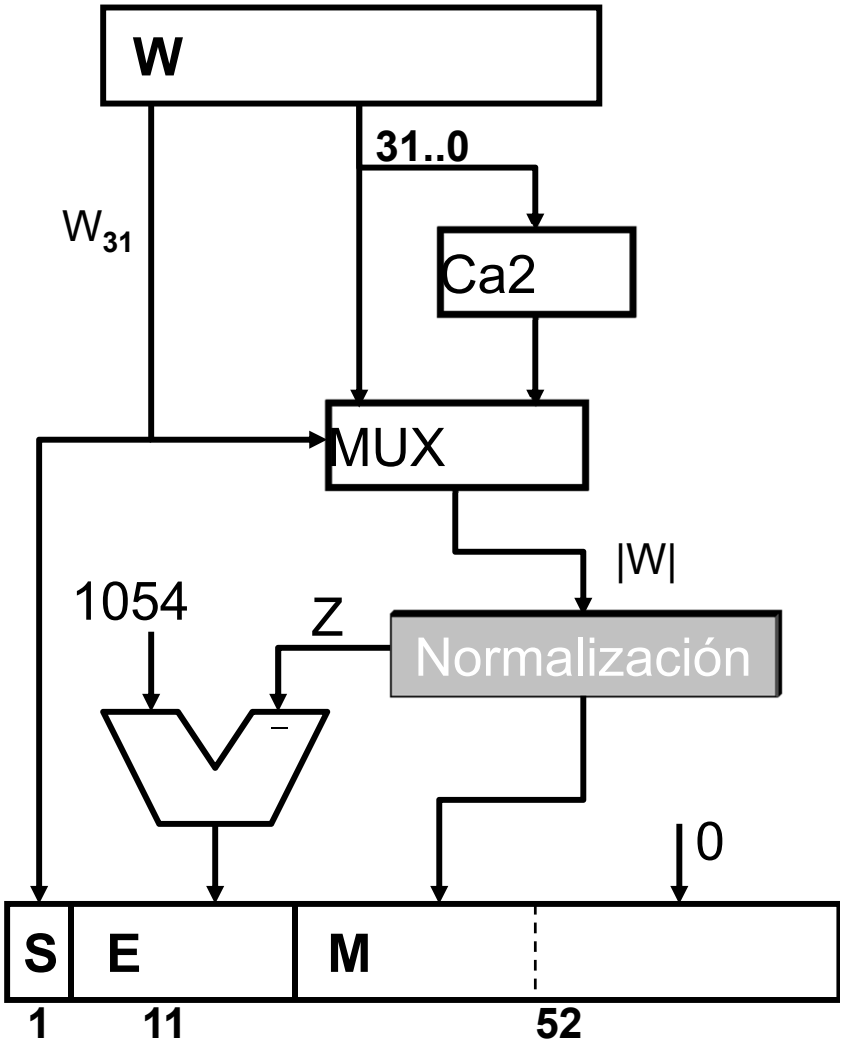
```
  1.1111111
+          1
-----------
 10.00000
  1.00000
```

Conversión de entero a doble precisión (`cvt.d.w`)

- **Filosofía del operador**
  - Si es positivo, un entero W de 32 bits se puede escribir como $+0.W \times 2^{32}$
  - Si es negativo, W se reescribe como $-0.(-W) \times 2^{32}$
  - La mantisa W comienza por una serie de Z ceros ($0 \leq Z \leq 32$)
  - Habrá que normalizar la mantisa desplazándola Z+1 posiciones hacia la izquierda (eliminando el bit entero) y restar Z+1 al exponente
- **Especificación**
  - Entrada del operador: W (32 bits)
  - Salida del operador: SR (1 bit), ER (11 bits) y MR (52 bits)
  - SR = Signo(W)
  - MR = |W| << Z+1 (desplazamiento)
    - Si W<0, hay que hacer W = –W
  - ER = 1023 + 32 – Z – 1

Conversión de entero a doble precisión (`cvt.d.w`)

- Esquema
  - La normalización ha de contar el número Z de bits a cero por la izquierda (hasta el primer 1)
  - Ha de desplazar la mantisa Z posiciones hacia la izquierda
    - Hay que representar el exponente 31 – Z
    - Sumando el exceso, tenemos E = 1023 + 31 – Z
  - Hay que completar la mantisa con ceros

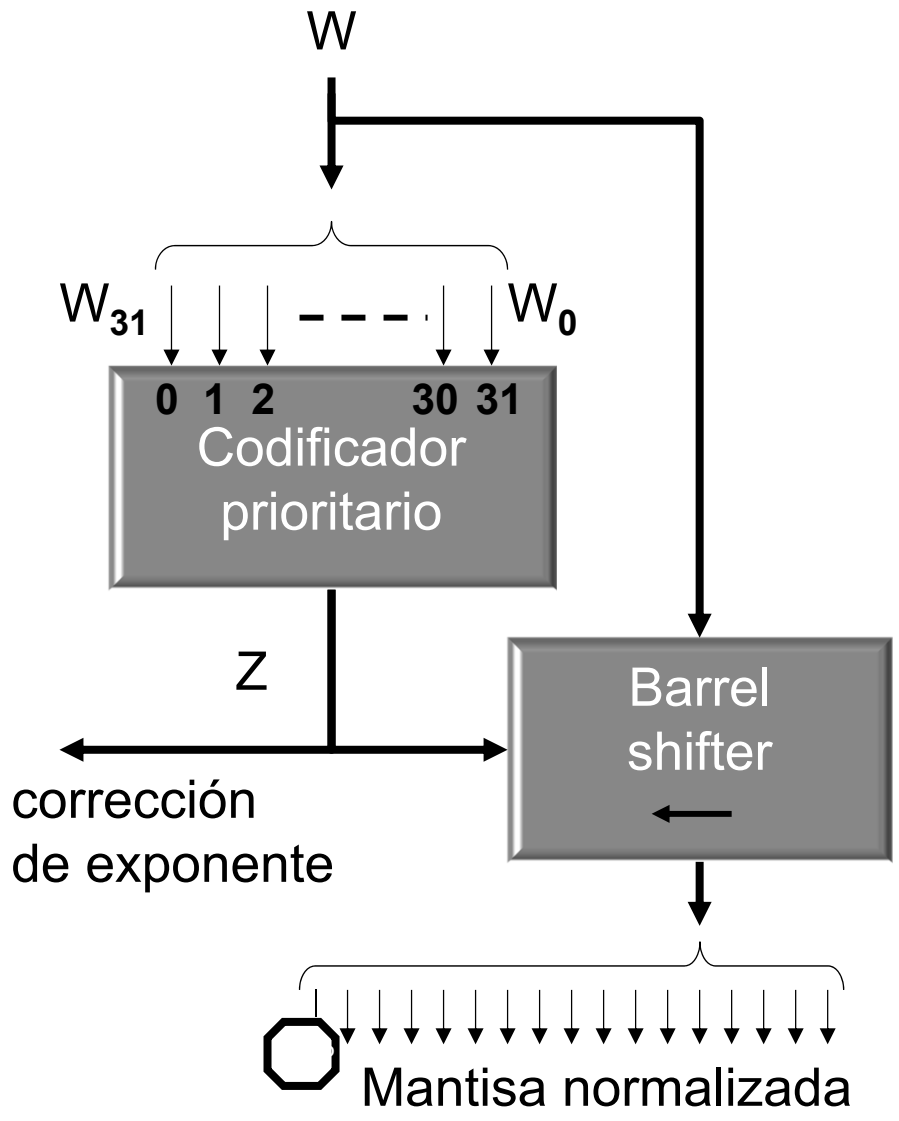


La normalización

- **Circuito de normalización**
  - Un codificador prioritario (que codifica la entrada de menor índice con un 1) calcula Z
  - Un barrel shifter desplaza la mantisa hacia la izquierda y elimina los ceros sobrantes
  - Se descarta el bit implícito

Codificador prioritario

$W_{31}W_{30}W_{29}W_{28}$	…	$W_1\ W_0$	Z
1 X X X	…	X X	00000
0 1 X X	…	X X	00001
0 0 1 X	…	X X	00010
… … … …	…	… …	…
0 0 0 0	…	0 1	11111

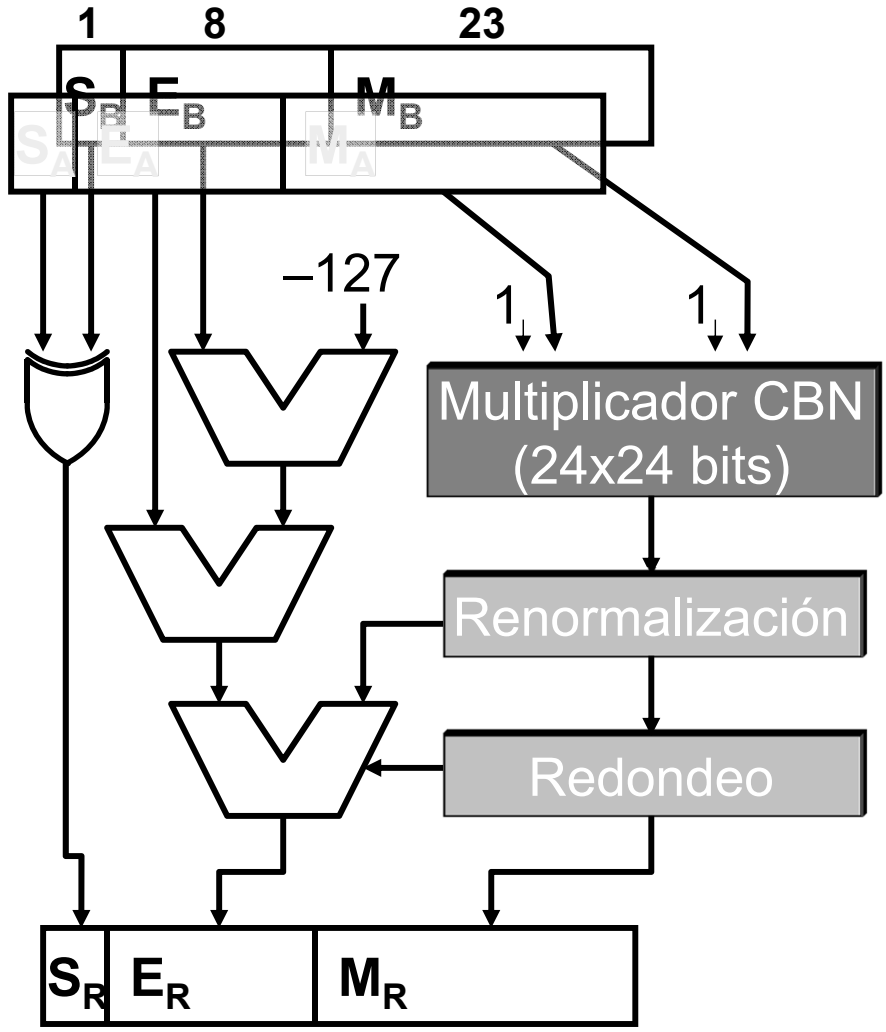


La multiplicación (`mul.s` y `mul.d`)

- **Especificación**
  - Dos versiones: simple precisión y doble precisión
  - Dos entradas (A y B):
    - S_A (1 bit), E_A (8/11 bits) y M_A (23/52 bits)
    - S_B (1 bit), E_B (8/11 bits) y M_B (23/52 bits)
  - Salida: S_R (1 bit), E_R (8/11 bits) y M_R (23/52 bits)
  - Cálculo del signo: $S_R = S_A$ xor S_B
  - Cálculo del exponente: hay que sumar y compensar el exceso
    - Simple precisión $E_R = E_A + E_B - 127$
    - Doble precisión $E_R = E_A + E_B - 1023$
  - Cálculo de la mantisa:
    - Multiplicar $1.M_A$ x $1.M_B$ (considerando el bit implícito)
    - El multiplicador depende de la precisión: 24x24 bits o 53x53 bits
    - Habrá que renormalizar (quitando el bit implícito) y redondear la mantisa resultante dejándola en 23/52 bits

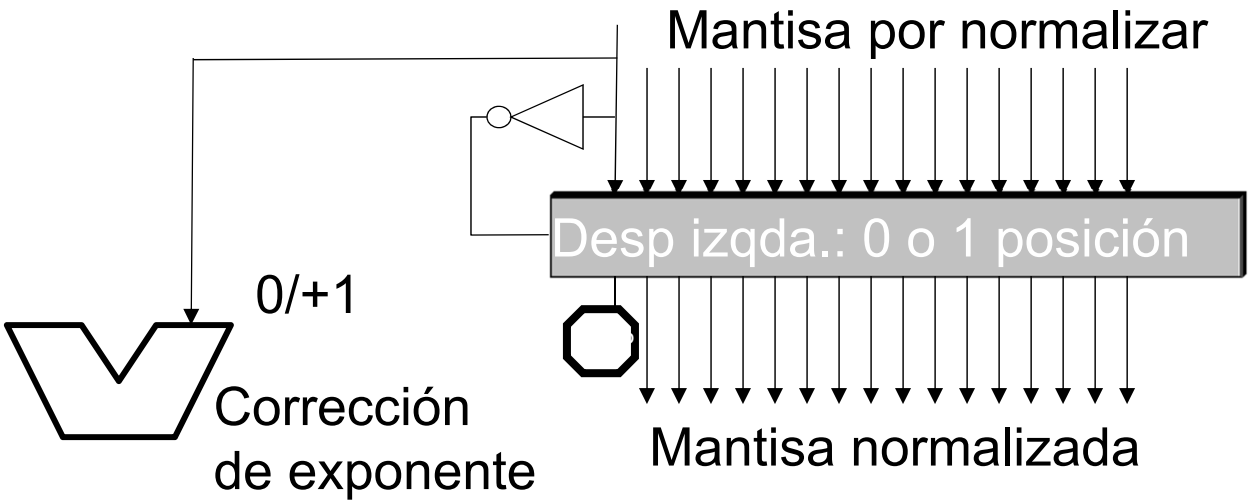
La multiplicación (`mul.s`)

- **Operador (SP)**
  - Dos sumadores para sumar los exponentes representados en exceso 127
  - Multiplicador para las mantisas
    - Opera con el bit implícito añadido: 24x24 bits
  - Habrá que renormalizar el resultado (ahora lo veremos) y quitar el bit implícito
    - Tal vez habrá que decrementar el exponente
  - El resultado ocupará 47 bits y habrá que redondearlo a 23
    - Tal vez habrá que incrementar el exponente

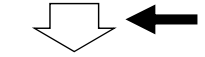


La renormalización

- **Renormalización después de un producto**
  - Si la mantisa del producto comienza por 0:
    - Desplazar a la izquierda una posición
  - Si comienza por 1:
    - Incrementar el exponente en 1
  - En cualquier caso:
    - Eliminar el bit entero implícito

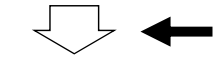



```
    1.000
x   1.000
-----------
01.000000
```



```
0000000
```

```
    1.011
x   1.101
-----------
01.110101
```



```
1101010
```

```
    1.111
x   1.111
-----------
11.100001
```

```
1100001
```