Análisis Matemático

UT3 - Integración

AMA

Objetivos

Generalidades sobre integrales y áreas (Una sesión)

- Comprender la definición de función integrable y de integral
- Usar correctamente la integral para el cálculo de áreas

Cálculo exacto de integrales (Una sesión)

- Usar la regla de Barrow para el calculo exacto de integrales
- Aplicar el método de integración por partes
- Realizar cambios de variable en casos sencillos

Cálculo aproximado de integrales (Dos sesiones)

- Aproximar con el método de trapecios o la regla de Simpson
- Acotar el error cometido en las aproximaciones
- Predecir el número de nodos necesario para una aproximación

Aplicaciones (Una sesión)

Introducción

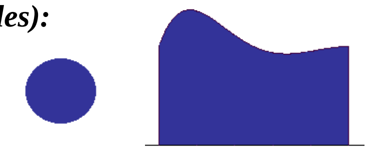
Cálculo de áreas planas:

Unidad de medida

Rectángulos/Triángulos

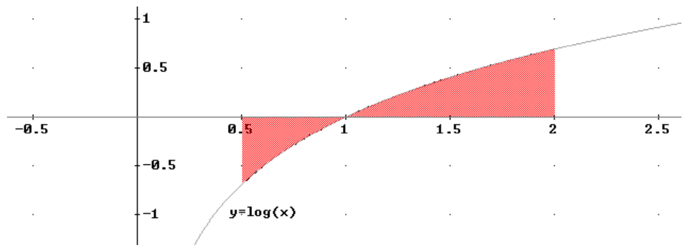
Triangulación de Polígonos

Problema (recintos más generales):



***Problema 1 (área exacta obtenida usando la regla de Barrow)*:**

Hallar el área que determina $y = \log(x)$ entre $x = \frac{1}{2}, x = 2$ y el eje OX



Conocemos una primitiva de $f(x) = \log(x)$ definida en el intervalo.

***Solución*:**

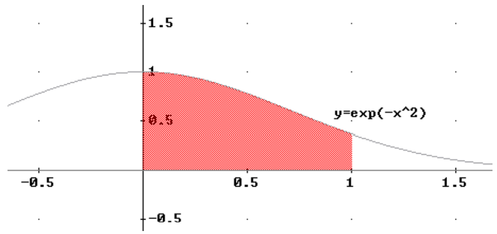
$$A = \int_{1/2}^{2} \log(x)\,dx = -\int_{1/2}^{1} \log(x)\,dx + \int_{1}^{2} \log(x)\,dx$$

(Regla de Barrow)

$$= \Big[x - x\log(x)\Big]_{1/2}^{1} + \Big[x - x\log(x)\Big]_{1}^{2} = \frac{3\log(2)-1}{2}$$

***Problema 2 (área obtenida con integración aproximada)*:**

Hallar el área que determina $y = e^{-x^2}$ entre $x = 0, x = 1$ y el eje OX



No existe primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$ que pueda usarse para la regla de Barrow

***Solución*:**

$$A = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 s(x)\, dx =$$

Integramos otra función más sencilla

$$\underset{\text{(Regla de Simpson)}}{=} \frac{1}{30}\left[\begin{array}{l} 1+4\left(e^{-1/100}+e^{-9/100}+\cdots+e^{-81/100}\right)+ \\ +2\left(e^{-4/100}+e^{-16/100}+\cdots+e^{-64/100}\right)+\dfrac{1}{e} \end{array}\right] = 0.7468\ldots$$

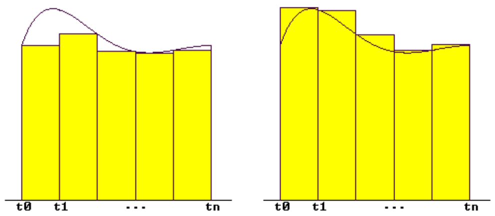
La integral de Riemann

Se considera $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, acotada,

$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ una *partición* de $[a,b]$

y se definen las *sumas inferior y superior* asociadas a f y a P:

$L(f,P)$, (*lower*)



$U(f,P)$, (*upper*)

Si f es positiva, L y U representan sumas de áreas de rectángulos que acotan por debajo y por encima, respectivamente, el "área" del recinto que determinan la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX, $x = a$, $x = b$

Caracterización sucesional de integrabilidad

Una función f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si existe una sucesión de particiones $\{P_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$\lim_n \big(U(f,P_n) - L(f,P_n)\big) = 0$$

Además, en este caso, $\displaystyle\int_a^b f = \lim_n U(f,P_n) = \lim_n L(f,P_n)$

$\int_a^b f$ es el único valor entre $U(f,P)$ y $L(f,P)$ para cualquier partición.

Ejemplo : Veamos que $f(x) = x$ es integrable en $[0,1]$

Consideramos la sucesion de particiones que dividen el intervalo $[0,1]$ en partes iguales.

P_n divide $[0,1]$ en n partes iguales de longitud $h = \frac{1}{n}$

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

En cada subintervalo $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ (para $k = 1, 2, \ldots, n$) consideramos los rectángulos de áreas

$$\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad (\textit{base} \times \textit{altura})$$

que acotan por debajo y por encima, respectivamente, el área del recinto que determina la función $f(x) = x$, el eje OX, $x = \frac{k-1}{n}$ y $x = \frac{k}{n}$.

La suma de estas áreas de rectángulos asociadas a f y a P_n son

$$L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k-1}{n} = \frac{0+1+\cdots+(n-1)}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2}$$

$$U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Además, $\lim_n L(f,P_n) = \lim_n U(f,P_n) = \frac{1}{2}$

Por lo cual, f es integrable en $[0,1]$ y $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$

Algunas funciones integrables:

- f monótona en $[a,b] \;\Rightarrow\; f$ integrable en $[a,b]$
- f continua en $[a,b] \;\Rightarrow\; f$ integrable en $[a,b]$

Las funciones continuas en $[a,b]$ salvo en un conjunto finito de puntos también son integrables. Esto puede extenderse incluso a casos mucho más generales

Ejemplos: $f(x)=k$ (cte) es integrable en cualquier $[a,b]$

$f(x)=x$ (creciente, continua) es integrable en cualquier $[a,b]$

$f(x)=x^2$ (continua) es integrable en cualquier $[a,b]$

$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ , si } x\in[0,2]-\{1\} \\ 2 \text{ , si } x=1 \end{cases}$ (continua salvo en $x=1$) es integrable en $[0,2]$

$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ , si } x\in\mathbb{Q} \\ 1 \text{ , si } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ (discontinua en cada punto de $[0,1]$) no es integrable

Dos definiciones necesarias: $\displaystyle\int_a^a f = 0$ y $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$

Propiedades: álgebra y desigualdades:

1) f,g integrables en $[a,b]$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \alpha f+\beta g$ integrable en $[a,b]$

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$$

2) f,g integrables en $[a,b] \;\Rightarrow\; f\cdot g$ integrable en $[a,b]$

$$\int_a^b(f\cdot g)\neq\left(\int_a^b f\right)\cdot\left(\int_a^b g\right) \qquad (f(x)=k,\; g(x)=x,\; a=0,\; b=2)$$

3) f integrable en $[a,c]$ y en $[c,b] \;\Rightarrow\; f$ integrable en $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f \qquad \text{(incluso si } c\notin[a,b])$$

4) *Monotonía*: f,g integrables en $[a,b]$ y $f\le g \;\Rightarrow\; \int_a^b f\le\int_a^b g$

5) f integrable en $[a,b] \;\Rightarrow\; |f|$ integrable en $[a,b]$ y $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$

6) $\underbrace{f \text{ integrable en } [a,b]}_{m=\inf_{[a,b]}(f)\;;\;M=\sup_{[a,b]}(f)} \;\Rightarrow\; m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$

f continua $\Rightarrow \exists\alpha\in[a,b]$ tal que $\int_a^b f=f(\alpha)(b-a)$

Ejemplo: Si f es integrable en $[1,2]$ y $x\le f(x)\le x^2$, para $x\in[1,2]$,

$$\int_1^2 x\,dx\le\int_1^2 f(x)\,dx\le\int_1^2 x^2dx \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\le\int_1^2 f(x)\,dx\le\frac{7}{3}$$

(se utiliza 4) y resultados de ejemplos anteriores)

Ejemplo:

$$\left|\int_0^1\frac{\cos(nx)}{x+1}dx\right| \le \int_0^1\left|\frac{\cos(nx)}{x+1}\right|dx \le \int_0^1\frac{dx}{1+x} \le \int_0^1 dx=1$$

(se utilizan 4) y 5), junto con resultados de ejemplos anteriores)

¿Puede mejorarse?

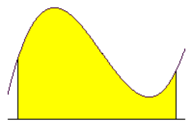
Area plana:

Si f es integrable en $[a,b]$, se define el ***área*** del recinto limitado por:

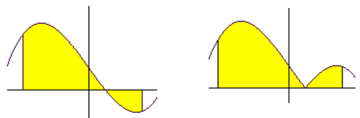
$\begin{cases} \text{la gráfica de } y=f(x) \\ \text{el eje } OX \\ \text{las rectas verticales } x=a,\; x=b \end{cases}$

mediante:

$$A=\int_a^b|f|$$



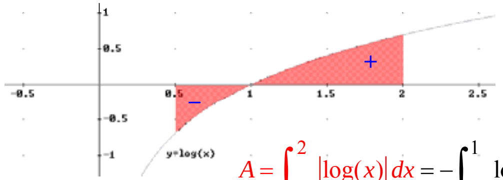
f positiva en $[a,b]$

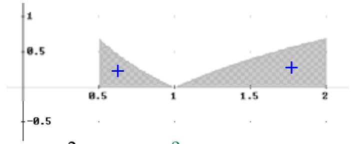


f cambia de signo en $[a,b]$

El área entre curvas se obtiene por diferencia: $A=\int_a^b|f(x)-g(x)|$

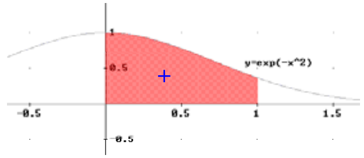
Ejemplo: El área que limitan $y=\log(x)$ (continua), $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ y el eje OX es

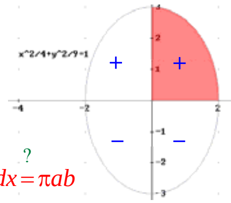




$$A=\int_{1/2}^{2}|\log(x)|\,dx=-\int_{1/2}^{1}\log(x)dx+\int_{1}^{2}\log(x)dx\overset{?}{=}\frac{3\log(2)-1}{2}$$

Ejemplo: El área que limitan $y=e^{-x^2}$, $x=0$, $x=1$ y OX es $A=\int_0^1 e^{-x^2}dx\overset{?}{\approx}0.7468$





Ejemplo: El área de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es $A=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\overset{?}{=}\pi ab$

Cálculo exacto de integrales

Regla de Barrow:

Si $h(x)$ es una primitiva de $f(x)$, definida en $[a,b]$ e integrable, entonces

$$\int_a^b f=\int_a^b f(x)\,dx=h(x)\Big]_a^b\equiv h(b)-h(a)$$

$\big(h'(x)=f(x)\big)$

$\left(\text{El caso particular } h(x)=\int_c^x f(t)\,dt \text{ no es útil}\right)$

Ejemplos:

$$\int_a^b x^p\,dx\underset{(p\neq-1)}{=}\frac{x^{p+1}}{p+1}\Bigg]_a^b=\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

¿Qué ocurre si $p=-1$? $(a,b>0)$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(x)\,dx=-\cos(x)\Big]_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2$$

$$\int_{-1}^{1}e^x\,dx=e^x\Big]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}=\frac{e^2-1}{e}$$

Si encontrar la primitiva no es evidente, disponemos de dos técnicas

Integración por partes: $\int_a^b f\cdot g'=\big[f\cdot g\big]_a^b-\int_a^b f'\cdot g$

$$\left(\int_a^b u\cdot dv=\big[u\cdot v\big]_a^b-\int_a^b v\cdot du\right)$$

Cambio de variable: $\int_{g(a)}^{g(b)}f(x)\,dx=\left(\underbrace{x=g(t)}_{\leftarrow\text{ cdv }\rightarrow}\right)=\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt$

Ejemplo (partes)

$$\int_0^1 x\cdot\cos(x)\,dx=\begin{pmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos(x)dx & v=\operatorname{sen}(x)\end{pmatrix}=\Big[x\cdot\operatorname{sen}(x)\Big]_0^1-\int_0^1\operatorname{sen}(x)\,dx=$$

$$=\Big[x\cdot\operatorname{sen}(x)\Big]_0^1-\Big[-\cos(x)\Big]_0^1=\operatorname{sen}(1)+\cos(1)-1$$

Ejemplo (partes)

$$\int_{1/2}^{2}\log(x)dx=\int_{1/2}^{2}\log(x)\cdot 1\,dx=\begin{pmatrix}u=\log(x) & du=\frac{dx}{x}\\ dv=dx & v=x\end{pmatrix}$$

$$=\Big[x\log(x)\Big]_{1/2}^{2}-\int_{1/2}^{2}\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=\Big[x\log(x)\Big]_{1/2}^{2}-\Big[x\Big]_{1/2}^{2}=$$

$$=2\log(2)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5\log(2)-3}{2}$$

Ejemplo (partes)

$$\int_0^1\arctan(x)dx=\int_0^1\arctan(x)\cdot 1\,dx=\begin{pmatrix}u=\arctan(x) & du=\frac{dx}{1+x^2}\\ dv=dx & v=x\end{pmatrix}$$

$$=\Big[\arctan(x)\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=$$

$$=\arctan(1)-\arctan(0)-\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log(2)$$

Ejemplo (cdv):

$$\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx\overset{\leftarrow}{=}\begin{pmatrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=2\\ x=0\Rightarrow t=1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

¡Extremos de integración!

Ejemplo (cdv):

$$\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x-1}\,dx\overset{\rightarrow}{=}\begin{pmatrix}x-1=t^3\\ x=t^3+1\\ dx=3t^2dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=-1\end{pmatrix}=$$

$$=\int_{-1}^0(t^3+1)\cdot t\cdot 3t^2\,dt=3\int_{-1}^0\left(t^6+t^3\right)dt=$$

$$=3\left[\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^0=\frac{-1}{7}+\frac{1}{4}=-\frac{9}{28}$$

Ejemplo (cdv)

$$\int_1^4\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\begin{pmatrix}\sqrt{x}=t\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=1\\ x=4\Rightarrow t=2\end{pmatrix}$$

$$=2\int_1^2\sqrt{1+t}\,dt=2\left[\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_1^2=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_1^4\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\begin{pmatrix}\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\\ dx=2tdt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=1\Rightarrow t=1\\ x=4\Rightarrow t=2\end{pmatrix}$$

$$=\int_1^2\frac{\sqrt{1+t}}{\cancel{t}}2\cancel{t}\,dt=2\left[\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right]_1^2=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Ejercicio (cdv)

Usa el cambio de variable $x=-t$ para simplificar la expresión

$$\int_{-b}^b f(x)dx=\int_{-b}^0 f(x)dx+\int_0^b f(x)dx$$

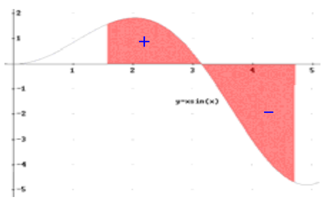
cuando f sea una función par. ¿Que ocurre si f es impar?

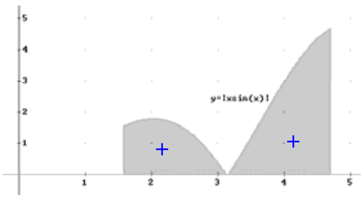
Ejemplo (área plana):

Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $y=x\cdot\mathrm{sen}(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$

Por definición, $A=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}|x\,\mathrm{sen}(x)|\,dx$; es decir, $A=\int_{\pi/2}^{\pi}x\,\mathrm{sen}(x)\,dx-\int_{\pi}^{3\pi/2}x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$

(teniendo en cuenta que $x\,\mathrm{sen}(x)$ cambia de signo en $x=\pi$)





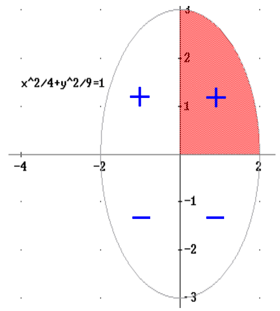
Integrando por partes cada una de las dos integrales $(u=x\,,\,dv=\mathrm{sen}(x)dx)$,

$$A=\left[\mathrm{sen}(x)-x\cos(x)\right]_{\pi/2}^{\pi}-\left[\mathrm{sen}(x)-x\cos(x)\right]_{\pi}^{3\pi/2}=(\pi-1)-(-1-\pi)=2\pi$$

Ejemplo (área plana):

Hallar el área del recinto interior a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Por simetría, $A=4\int_0^a\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}dx=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$



Usando el cambio de variable trigonométrico $x=a\cos(t)$

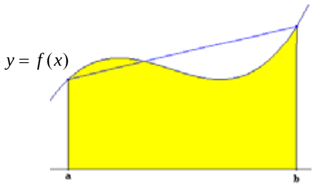
$$\begin{pmatrix}x=a\cos(t)\\ dx=-a\,\mathrm{sen}(t)dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x=0\Rightarrow t=\pi/2\\ x=a\Rightarrow t=0\end{pmatrix}$$

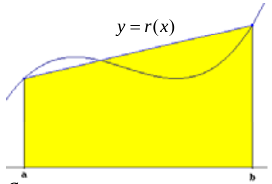
$$A=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=4ab\int_{\pi/2}^0-\mathrm{sen}^2(t)dt=2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2t))\,dt=\pi ab$$

¿Area del círculo?

Cálculo aproximado de integrales

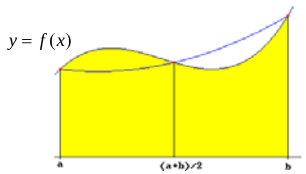
Aproximación mediante una recta (trapecio)

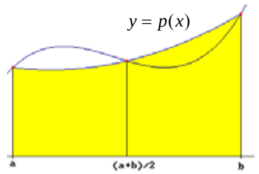




$$\int_a^b f(x)\,dx \;\cong\; \int_a^b r(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Aproximación mediante una parábola





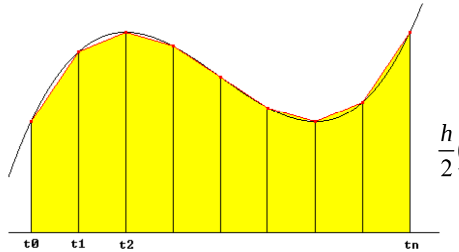
$$\int_a^b f(x)\,dx \;\cong\; \int_a^b p(x)\,dx \overset{?}{=} \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Método de trapecios. Cota de error:

Dividimos $[a,b]$ en n partes iguales, de medida $h=\dfrac{b-a}{n}$

$P=\{a=t_0,t_1,\ldots,t_n=b\}=\{a,a+h,a+2h,\ldots,a+nh=b\}$ partición de $[a,b]$

En cada subintervalo aproximamos $f(x)$ mediante una recta



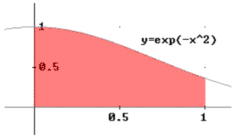
$$\frac{h}{2}\underbrace{(1+2+2+2+2+\cdots+2+2+1)}_{\text{esquema de coeficientes}}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\cong T_n f = \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)+f(b)\right)$$

$$E_n = \left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n f\right| \le \frac{n\cdot h^3}{12}M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \;\text{, siendo }\; M_2 \ge \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Ejemplo: Aproximación de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ mediante trapecios

Valor real de la integral (DERIVE): 0.7468241328…



Efectuando 10 subdivisiones del intervalo:

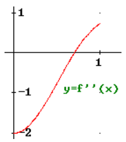
Sea $n=10$, $h=\dfrac{1}{10}$ y la partición de $[0,1]$: $P=\left\{0,\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10},\ldots,\dfrac{9}{10},1\right\}$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong T_{10} f = \frac{1}{20}\left(1+2\left(e^{-1/100}+e^{-4/100}+\cdots+e^{-81/100}\right)+\frac{1}{e}\right)=0.\underline{746}2107961\ldots$$

A la vista del valor real, la aproximación garantiza 3 decimales exactos

Para ver qué predice la cota de error acotamos la segunda derivada de e^{-x^2} en $[0,1]$

$$f'(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right) \Rightarrow |f''(x)| \overset{?}{\le} 6 \underset{\text{mejorarse}}{\overset{\text{puede}}{=}} M_2$$



De aquí, $E_{10} \le \dfrac{6}{12\cdot 10^2}=\dfrac{1}{200}=0.005$ (prácticamente dos decimales exactos)

Garantizando 5 decimales exactos (al menos):

Se trata de imponer $E_n < 10^{-6}$ y hallar el número (n) de subdivisiones necesario

A la vista del valor de la cota $M_2=6$,

$$E_n \le \frac{6}{12n^2}=\frac{1}{2n^2}<10^{-6} \iff n^2 > 5\cdot 10^5 \Rightarrow n \ge 708$$

y, en consecuencia, efectuando 708 subdivisiones de $[0,1]$, $h=\dfrac{1}{708}$ y

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \cong T_{708} f = \frac{1}{1416}\left(f(0)+2\sum_{k=1}^{707} f\left(\frac{k}{708}\right)+f(1)\right) \underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}} \underline{0.746824}0104\ldots$$

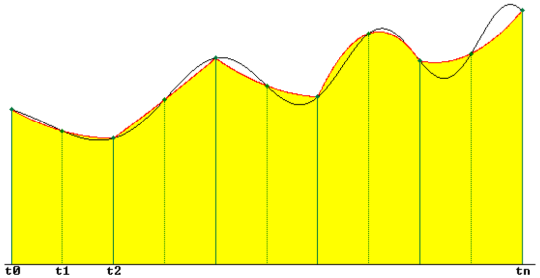
que, a la vista del resultado $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.7468241328\ldots$, nos proporciona realmente seis decimales correctos (mejor de lo esperado)

Método de Simpson (*mejora trapecios*). Cota de error:

Dividimos $[a,b]$ en n (par) partes iguales, de medida $h=\dfrac{b-a}{n}$

$$P=\{a=t_0,t_1,\dots,t_n=b\}=\{a,a+h,a+2h,\dots,a+nh=b\}\ \text{ partición de } [a,b]$$

En cada subintervalo doble aproximamos $f(x)$ mediante una parábola



$$\frac{h}{3}\underbrace{(1+4+2+4+2+\cdots+2+4+1)}_{\text{esquema de coeficientes}}$$

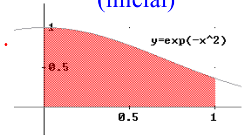
$$\int_a^b f(x)\,dx \cong S_n f=\frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(2k+1)h)+2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+2kh)+f(b)\right)$$

$$E_n=\left|\int_a^b f(x)\,dx-S_n f\right|\le \frac{n\cdot h^5}{180}M_4=\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4\ ,\ \text{ siendo } M_4\ge \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(iv)}(x)\right|$$

Ejemplo: Aproximación de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ mediante Simpson

Problema 3 (inicial)

Valor real de la integral (DERIVE): 0.7468241328…



Efectuando 10 subdivisiones del intervalo:

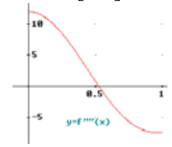
Sea $n=10$, $h=\dfrac{1}{10}$ y la partición de $[0,1]$: $P=\left\{0,\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10},\dots,\dfrac{9}{10},1\right\}$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\cong S_{10}f=\frac{1}{30}\left(\begin{array}{l}1+4\left(e^{-1/100}+e^{-9/100}+\cdots+e^{-81/100}\right)\\ +2\left(e^{-4/100}+e^{-16/100}+\cdots+e^{-64/100}\right)+\dfrac{1}{e}\end{array}\right)=0.\underline{746824}9482\dots$$

A la vista del valor real, la aproximación garantiza ya 6 decimales exactos

Para ver qué predice la cota de error acotamos la cuarta derivada de e^{-x^2} en $[0,1]$

$$f^{(iv)}(x)=4e^{-x^2}\left(4x^4-12x^2+3\right)\Rightarrow\left|f^{(iv)}(x)\right|\overset{?}{\le}76\underset{\text{mejorarse}}{\overset{\text{puede}}{=}}M_4$$



De aquí, $E_{10}\le\dfrac{76}{180\cdot 10^4}<0.000043$ (cuatro decimales exactos, al menos)

Garantizando 8 decimales exactos (al menos):

Se trata de imponer $E_n<10^{-9}$ y hallar el número (n) de subdivisiones necesario

A la vista del valor de la cota $M_4=76$,

$$E_n\le\frac{76}{180n^4}<10^{-9}\ \Leftrightarrow\ n^4>\frac{38}{9}\cdot 10^8\ \Rightarrow\ n\ge 144$$

y, en consecuencia, efectuando 144 subdivisiones de $[0,1]$, $h=\dfrac{1}{144}$ y

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\cong S_{144}f=\frac{1}{432}\left(f(0)+4\sum_{k=0}^{71}f\left(\frac{2k+1}{144}\right)+2\sum_{k=1}^{71}f\left(\frac{2k}{144}\right)+f(1)\right)$$

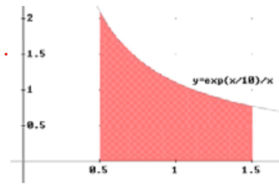
$$\underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}}\ \underline{0.7468241328}31439\dots$$

que, a la vista del resultado $\int_0^1 e^{-x^2}dx=0.746824132812427\dots$, nos proporciona realmente diez decimales correctos (mejor de lo esperado)

La ventaja del método de Simpson sobre el de trapecios es evidente en cualquier caso

Ejemplo: Aproximación de $\displaystyle\int_{0.5}^{1.5}\frac{\exp(x/10)}{x}dx$ mediante trapecios y Simpson, con 10 subdivisiones y garantizando cada vez 6 decimales exactos

Valor real de la integral (DERIVE): 1.203798181…



Trapecios (n=10):

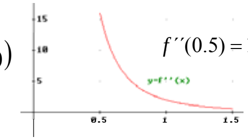
$h=0.1$ y $P=\{0.5,0.6,0.7,\dots,1.4,1.5\}$

$$\int_{0.5}^{1.5}\frac{\exp(x/10)}{x}dx\cong T_{10}f=\frac{1}{20}\left(f(0.5)+2\left(f(0.6)+f(0.7)+\cdots+f(1.4)\right)+f(1.5)\right)$$

$$=1.\underline{20}6748518\dots\ \text{ (dos decimales exactos)}$$

Para ver qué predice la cota de error acotamos (gráficamente) f'' en $[0.5,1.5]$

$$f''(x)=\frac{\exp(x/10)}{x}\left(x^2-20x+200\right)$$



$f''(0.5)=16.000346\ldots<17=M_2$

Acotación manual

$M_2=22$

De aquí, $E_{10}\le\dfrac{17}{12\cdot 10^2}<0.02$ (un decimal exacto, al menos)

***Trapecios (6 decimales exactos)*:**

Para $M_2 = 17,\ E_n \le \dfrac{17}{12n^2} < 10^{-7} \ \Leftrightarrow\ n^2 > \dfrac{17}{12}\cdot 10^7 \ \Rightarrow\ n \ge 3764$

y, en consecuencia, efectuando 3764 subdivisiones de [0.5,1.5], $h = \dfrac{1}{3764}$ y

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx \cong T_{3764} f = \frac{1}{7528}\left(f(0.5) + 2\sum_{k=1}^{3763} f\left(0.5 + \frac{k}{3764}\right) + f(1.5)\right) \underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}} \underline{1.203798}202$$

que, a la vista de $\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx = 1.203798181\ldots$, proporciona la precisión esperada

***Simpson (n=10)*:**

De nuevo, $h = 0.1$ y $P = \{0.5, 0.6, 0.7, \ldots, 1.4, 1.5\}$ y

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx \cong S_{10} f = \frac{1}{30}\left(\begin{array}{l} f(0.5) + 4\big(f(0.6) + f(0.8) + \cdots + f(1.4)\big) \\ \qquad + 2\big(f(0.7) + f(0.9) + \cdots + f(1.3)\big) + f(1.5) \end{array}\right)$$

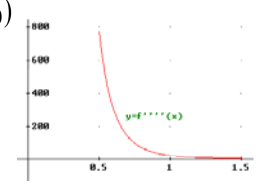
$$= \underline{1.203}846491\ldots \quad \text{(tres decimales exactos)}$$

Para ver qué predice la cota de error acotamos (gráficamente) $f^{(iv)}$ en [0.5,1.5]

$$f^{(iv)}(x) = \frac{\exp(x/10)}{10^4 x^5}\left(x^4 - 40x^3 + 1200x^2 - 24000x + 240000\right)$$

$$f^{(iv)}(0.5) = 768.000002\ldots < 769 = M_4$$

Acotación manual: $M_4 = 1037$



De aquí, $E_{10} \le \dfrac{769}{180\cdot 10^4} < 0.00045$ (tres decimales exactos)

***Simpson (6 decimales exactos)*:**

Con $M_4 = 769,\ E_n \le \dfrac{769}{180n^4} < 10^{-7} \ \Leftrightarrow\ n^4 > \dfrac{769}{18}\cdot 10^6 \ \Rightarrow\ n \ge 82$ (n par)

Efectuando 82 subdivisiones de [0.5,1.5], $h = \dfrac{1}{82}$ y

$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\exp(x/10)}{x}\,dx \cong S_{82} f = \frac{1}{246}\left(f(0.5) + 4\sum_{k=0}^{40} f\left(0.5 + \frac{2k+1}{82}\right) + 2\sum_{k=1}^{40} f\left(0.5 + \frac{2k}{82}\right) + f(1.5)\right)$$

$$\underset{\text{DERIVE}}{\overset{?}{=}} \underline{1.2037981}92\ldots \quad \text{(siete decimales exactos)}$$