Álgebra **9 de junio de 2017**

Segundo parcial **2h horas**

En todas las cuestiones se han de justificar las respuestas

Cuestión 1 (3 pt) Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \langle (1,-1,1,-1),(1,2,1,1),(0,3,0,2)\rangle$$
$$G = \{(x_1,x_2,x_3,x_4):\ x_1+x_2=0, x_1-2x_2+3x_3=0, x_3+x_4=0\}$$

(a) Calcula una base de F.

(b) Calcula una base de G.

(c) Calcula la suma $F+G$.

(d) Calcula el subespacio intersección $F\cap G$. ¿Es directa, la suma $F+G$?

(e) Calcula una base del subespacio $G^{\perp}$.

Solución:

(a) Como el vector $(0,3,0,2)$ es la resta de los vectores $(1,2,1,1)$ y $(1,-1,1,-1)$, se tiene que $F=\langle(1,-1,1,-1),(1,2,1,1)\rangle$. Por tanto, $\{(1,-1,1,-1),(1,2,1,1)\}$ es un sistema generador de F. Como $(1,-1,1,-1)$ y $(1,2,1,1)$ no son proporcionales, $\{(1,-1,1,-1),(1,2,1,1)\}$ es también linealmente independiente, luego base de F.

(b) Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales constituído por las ecuaciones implícitas de G (dadas en el enunciado), se tiene que $\{(1,-1,-1,1)\}$ es una base de G.

(c) Puesto que disponemos de bases de F y de G, resultará fácil calcular una base de $F+G$. La unión de ambas bases (de F y de G) constituye un sistema de generadores S de $F+G$. Transformando dicho sistema en uno escalonado mediante operaciones elementales, obtendremos una base de $F+G$ eliminando los vectores nulos resultantes. Para ello, escalonaremos la matriz cuyas filas son los traspuestos de los vectores en S:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

Deducimos, por tanto, que $\{(1,-1,1,-1),(0,3,0,2),(0,0,-2,2)\}$ (y también S) es una base de $F+G$.

(d) Como $\dim(F+G)=3, \dim(F)=2$ y $\dim(G)=1$, teniendo en cuenta la fórmula

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G),$$

deducimos que $\dim(F\cap G)=0$ y, por tanto, $F\cap G=\{\vec{0}\}$.

Luego la suma $F+G$ es directa.

(e)

$$G^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \,\forall\, \vec{v} \in G\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} \cdot \vec{(1, -1, -1, 1)} = 0\} =$$

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

Así pues, obtenemos fácilmente la ecuación implícita que define a $G^{\perp}$. Resolviendo dicha ecuación se deduce que $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ es una base de $G^{\perp}$.

Otra forma de obtener una base de $G^{\perp}$ es considerando los vectores cuyas componentes son los coeficiente de las ecuaciones implícitas de G (dadas en el enunciado).

Cuestión 2 (3 pt) Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 3 \\ 5 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

(a) Estudia para qué valores del parámetro a la matriz A es diagonalizable.

(b) Para $a = -1/2$, calcula una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.

(c) Para $a = -1/2$, indica cómo calcularías una fórmula para las potencias A^n para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿A qué tiende la matriz A^n cuando n tiende a infinito?

Solución:

(a) Calculamos primero el polinomio característico de A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 - \lambda & 3 \\ 5 & 0 & 1/4 - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(1/2 - \lambda)(1/4 - \lambda).$$

El conjunto de valores propios de A es, por tanto, $\{1, 1/2, 1/4\}$. Distinguimos 3 casos:

- Caso 1: $a \neq 1/2$ y $a \neq 1/4$. En este caso A (matriz 3×3) tiene 3 valores propios distintos, con lo cual es diagonalizable.
- Caso 2: $a = 1/2$. En este caso A tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 1/2$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$) y $\lambda_2 = 1/4$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$). Vemos ya que la primera condición del teorema de caracterización de matrices diagonalizables ($\alpha_1 + \alpha_2 = 3$) se satisface. Calculemos ahora las multiplicidades geométricas de los valores propios, es decir, las dimensiones de sus subespacios propios. d_1 (resp., d_2) denotará la multiplicidad geométrica de λ_1 (resp., λ_2).

  Como $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1$, se tiene que $d_2 = 1 = \alpha_2$. Así pues, las multiplicidades geométrica y algebraica de λ_2 coinciden.

  $$d_1 = \dim(\mathrm{Nuc}(A - \lambda_1 I)) = 3 - \mathrm{rang}(A - \lambda_1 I) = 3 - \mathrm{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

  Como d_1 no coincide con α_1, se concluye que A no es diagonalizable en este caso.

- Caso 3: $a = 1/4$. En este caso se tienen 2 valores propios: $\lambda_1 = 1/4$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$) y $\lambda_2 = 1/2$ (con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$). La primera condición del teorema de caracterización de matrices diagonalizables se satisface: $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$.

  Usando la misma notación que antes se tiene que, como $1 \leq d_2 \leq \alpha_2 = 1$, entonces $d_2 = 1 = \alpha_2$ y, así, las multiplicidades geométrica y algebraica de λ_2 coinciden.

  $$d_1 = \dim(\mathrm{Nuc}(A - \lambda_1 I)) = 3 - \mathrm{rang}(A - \lambda_1 I) = 3 - \mathrm{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

  Luego $d_1 = 1 \neq \alpha_1$ y A no es diagonalizable tampoco en este caso.

(b) Asumimos $a = -1/2$. Los valores propios son $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 1/2$ y $\lambda_3 = 1/4$.

La matriz diagonal D es la siguiente: $D = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$. Para obtener la matriz P debemos calcular bases de los subespacios propios:

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{Nuc}(A + \frac{1}{2}I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} = \langle(-3, -57, 20)\rangle.$$

$$V_{\lambda_2} = \mathrm{Nuc}(A - \frac{1}{2}I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} = \langle(0, 1, 0)\rangle.$$

$$V_{\lambda_3} = \mathrm{Nuc}(A - \frac{1}{4}I) = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix} -3/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle(0, -12, 1)\rangle.$$

Por tanto:

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -57 & 1 & -12 \\ 20 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Asumimos, como antes, $a = -1/2$. Como $A = PDP^{-1}$, dado un número natural cualquiera n se tiene que:

$$A^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n \text{ veces}} = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -57 & 1 & -12 \\ 20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -57 & 1 & -12 \\ 20 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Puesto que, cuando n tiende a infinito, los elementos diagonales de D tienden a cero, es claro que A^n tiende a la matriz nula.

Cuestión 3 (2 pt) Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (2x + y + z,\ x - y,\ y,\ x - z).$$

(a) Calcula la matriz canónica de f.

(b) Determina razonadamente si f es inyectiva y/o suprayectiva y/o biyectiva.

(c) ¿Pertenece el vector $(1, 0, 0, 0)$ a la imagen de f? Razona la respuesta.

Solución:

(a) Como

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ x - y \\ y \\ x - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

se tiene que la matriz canónica de f es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Nuc}(A) = \{\vec{0}\}.$$

Luego f es inyectiva.

Como $\dim\ \mathrm{Nuc}(f) + \dim\ \mathrm{Im}(f) = 3$, se deduce que $\dim\ \mathrm{Im}(f) = 3$. Así pues, $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$ y, por tanto, f no es suprayectiva. Como no es suprayectiva, tampoco es biyectiva.

(c) El vector $(1, 0, 0, 0)$ pertenece a la imagen de f si y sólo si existe un vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (1, 0, 0, 0)$, es decir, si y sólo si existen números reales x, y, z tales que $2x + y + z = 1, x - y = 0, y = 0$ y $x - z = 0$. Se comprueba fácilmente que este sistema de ecuaciones no tiene solución, con lo cual concluimos que $(1, 0, 0, 0) \notin \mathrm{Im}(f)$.

Cuestión 4 (2 pt) Responde a las siguientes cuestiones:

(a) Sean V y W dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ tales que $\dim(V) = 3$, $\dim(W) = 2$ y $V \cap W = \{\vec{0}\}$. Calcula el complemento ortogonal de $V + W$.

(b) Se sabe que el determinante de una matriz A, $|A|$, es igual a -1 y que $|2A| = -16$. ¿Cuál es el orden de la matriz A?

(c) Sea $\vec{v}$ un vector que es, simultáneamente,

- un vector propio de una matriz cuadrada A asociado al valor propio 3 y
- un vector propio de otra matriz cuadrada B asociado al valor propio 5.

Demuestra que 30 es un valor propio de la matriz $5A + 3B$.

(d) Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y sean B_1 y B_2 dos bases de V tales que la matriz de cambio de base $M_{B_1\,B_2}$ es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Sea $\vec{v}$ un vector de V cuyo vector de coordenadas respecto de la base B_2 es $(-1, 0, 2)$. Calcula sus coordenadas respecto de B_1.

Solución:

(a) Teniendo en cuenta las condiciones dadas en el enunciado y la fórmula de Grassman:

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 3 + 2 - 0 = 5.$$

Luego $V + W = \mathbb{R}^5$ y, por tanto, $(V + W)^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

(b) Sea n el orden de A. Como $|2A| = 2^n|A|$, de los datos del enunciado se deduce que $n = 4$.

(c) Como $\vec{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio 3, se tiene que $\vec{v} \neq \vec{0}$ y $A\vec{v} = 3v$. Además, como $\vec{v}$ es un vector propio de B asociado al valor propio 5 se tiene que $B\vec{v} = 5\vec{v}$.

Luego $(5A + 3B)\vec{v} = 5A\vec{v} + 3B\vec{v} = 5 \cdot 3\vec{v} + 3 \cdot 5\vec{v} = 30\vec{v}$. Así pues, 30 es un valor propio de $5A + 3B$.

(d) El vector de coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de B_1 es $M_{B_2\,B_1}(-1, 0, 2)$. Como

$$M_{B_2\,B_1} = M_{B_1\,B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

se tiene que el vector de coordenadas buscado es $(5/2, 0, 4)$.

Otra forma de calcular este vector es resolviendo el sistema $M_{B_1\,B_2}\vec{x} = (-1, 0, 2)$.