Àlgebra **10 d'abril de 2018**
Primer parcial **2 hores**

Recordeu que no podeu fer servir calculadora, ordinador, telèfono mòbil, tauleta o qualsevol altre dispositiu electrònic.

Resoleu totes les qüestions *sense fer servir determinants*

COGNOMS:	GRUP:
NOM:	

Qüestió 1 (3'5 pt) Considerem la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Trobeu una forma esglaonada (escalonada) de A, S, i una matriu T tal que $\mathsf{TA} = \mathsf{S}$.

(b) Quin és el rang de la matriu A? Justifiqueu la vostra resposta.

(c) Quina és la inversa de la matriu T?

(d) Calculeu la forma esglaonada (escalonada) reduïda de la matriu A.

(e) Determineu l'espai nul (o nucli) de la matriu A.

(f) Comproveu que $\vec{x} = (1,1,1,0,0)$ és una solució del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = (5,4,3)$.

(g) Sense fer cap més càlcul, digueu quina és la solució general del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = (5,4,3)$.

Solució:

(a) Podem calcular les matrius S i T simultàniament, aplicant l'algorisme de Gauss a la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1)} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

La matriu $\mathsf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és una forma esglaonada de la matriu A.

Aquesta matriu s'obtè multiplicant la matriu $\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ per A.

(b) $\operatorname{rang} \mathsf{A} = 3$, perquè la forma esglaonada S té tres files no nul·les.

(c) $\mathsf{T} = \mathsf{E}_{3,2}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{E}_{3,1}(-1)$, així que

$$\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{E}_{3,1}(1)\mathsf{E}_{2,1}(1)\mathsf{E}_{3,2}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Acabem d'aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan a l'apartat primer (ara no cal que treballem amb la matriu ampliada):

$$\mathsf{A} \xrightarrow{\text{Algorisme de Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,3}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_3(-1)\mathsf{E}_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{R}$$

Aquesta matriu R és la forma esglaonada reduïda de A.

(e) L'espai nul és la solució del sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{0}$ o, de manera equivalent, la solució del sistema $\mathsf{R}\vec{x} = \vec{0}$, és a dir, el conjunt

$$\operatorname{Nul} \mathsf{A} = \{\alpha_1(-2,0,0,1,0) + \alpha_2(-2,0,0,0,1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$$

(f) El que hem de fer és comprovar que, si multipliquem A pel vector $\vec{x} = (1,1,1,0,0)$ obtenim el vector $\vec{b}$:

$$\mathsf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(g) La solució general és la suma d'una solució particular més la solució del sistema homogeni (és a dir, l'espai nul), així que la solució completa és

$$\vec{x} = (1,1,1,0,0) + \alpha_1(-2,0,0,1,0) + \alpha_2(-2,0,0,0,1)$$

Qüestió 2 (2 pt) Discutiu, segons els valors de a i b i fent servir l'algorisme de Gauss i el teorema de Rouché, el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 1-2a & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a+1 \end{bmatrix}$$

I resoleu-lo en tots els casos que tinga solució, fent servir l'algorisme de Gauss-Jordan.

Solució: Apliquem l'algorisme de Gauss a la matriu ampliada del sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & b & 1 \\ 1 & 1-2a & 0 & a+1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,1}(-1)\mathsf{E}_{2,1}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & -2a & 0 & a \end{array}\right] \tag{1}$$

En aquest punt, hem de distingir dos casos:

1) Si $a = 0$, la darrera fila d'aquesta matriu és nul·la, el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada són iguals a 2, i el sistema lineal és compatible indeterminat.

2) Si $a \neq 0$, podem continuar esglaonant la matriu,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & -2a & 0 & a \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_3(1/a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \tag{2}$$

I, novament, hem de distingir dos casos:

2.1 Si $b = 0$ llavors, la matriu de coeficients té rang 2, però el rang de l'ampliada és 3, així que el sistema és inconsistent.

2.2 Si $b \neq 0$, els dos rangs són iguals a 3 i el sistema és compatible determinat.

En resum, el nostre sistema lineal és

- Inconsistent (incompatible), si $a \neq 0$ i $b = 0$;
- compatible determinat, si $a \neq 0$ i $b \neq 0$;
- compatible indeterminat, si $a = 0$.

Resolem-lo en els casos indeterminats, és a dir, quan $a = 0$. En aquest cas, la darrera matriu en l'expressió (1) és $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Continuem aplicant-hi l'algorisme de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_2(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -b/2 & 1 \\ 0 & 1 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aquesta és la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada. La solució general, en els casos indeterminats és

$$\vec{x} = (1,0,0) + \alpha\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}, 1\right)$$

En els casos determinats ($a \neq 0$, $b \neq 0$), continuem aplicant l'algorisme de Gauss-Jordan a la darrera matriu de l'expressió (2):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{1,2}(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_2(1/2)\mathsf{E}_3(1/b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/b \end{array}\right]$$

En aquest cas, la solució és

$$\vec{x} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{b}\right)$$

Qüestió 3 (2 pt) (a) Trobeu una factorització LU de la matriu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Calculeu la matriu inversa de A.

(c) Calculeu les potències A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Solució:

(a) Restant a la primera fila la segona ja obtenim una matriu triangular superior:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{U}$$

La matriu U l'hem obtinguda com $\mathsf{U} = \mathsf{E}_{2,1}(-1)\mathsf{A}$. En conseqüència, si $\mathsf{L} = \mathsf{E}_{2,1}(1)$, tindrem $\mathsf{A} = \mathsf{LU}$:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathsf{LU}$$

(b) Apliquem l'algorisme de Gauss-Jordan a la matriu $\begin{bmatrix} \mathsf{A} & \mathrm{I} \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,1(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathsf{E}_{2,3(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathsf{E}_{2(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La inversa de la matriu A és $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}$.

(c) Com que $\mathsf{A}^2 = \mathrm{I}$, les potències parelles de A són iguals a la identitat i les senars són iguals a A:

$$\mathsf{A}^n = \begin{cases} \left(\mathsf{A}^2\right)^m = \mathrm{I}, & \text{si } n = 2m \\ \left(\mathsf{A}^2\right)^m \mathsf{A} = \mathsf{A}, & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$$

Qüestió 4 (2'5 pt) En tots els apartats d'aquesta qüestió, heu de justificar les vostres respostes.

(a) Suposem que A és una matriu $m \times n$. És possible que existisquen dos vectors $m \times 1$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, de manera que el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és determinat i, en canvi, el sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{c}$ és indeterminat?

(b) Calculeu, si és possible, els valors de a i b perquè la matriu $\mathsf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ siga ortogonal.

(c) Sabent que A i B són matrius quadrades $n \times n$, simplifiqueu l'expressió $(\mathsf{B}+\mathsf{A})^2 - \mathsf{B}^2 - \mathsf{A}^2 = \mathsf{I} + \mathsf{BA}$ i justifiqueu que A és invertible.

(d) Si les matrius $n \times n$ A i B són, respectivament, simètrica i antisimètrica, podem assegurar que la matriu $(\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{A}+\mathsf{B})$ és simètrica?

(e) Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors no nuls de $\mathbb{R}^n$, quin és el rang de la matriu $\vec{u}\vec{v}^{\,t}$?

Solució:

(a) No és possible. Pel teorema de Rouché, si el sistema lineal $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{b}$ és determinat aleshores, el rang de A és n. Però, si el sistema $\mathsf{A}\vec{x} = \vec{c}$ és indeterminat, el rang és menor que n.

(b) **Solució primera:** Perquè la matriu siga ortogonal, ha de ser $\mathsf{Q}^t\mathsf{Q} = \mathrm{I}$, és a dir,

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & -2a+b-2 \\ 0 & 9 & a-2b-2 \\ -2a+b-2 & a-2b-2 & a^2+b^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per tant, la matriu és ortogonal si i només si, $\begin{cases} -2a + b - 2 = 0 \\ a - 2b - 2 = 0 \\ a^2 + b^2 + 1 = 9 \end{cases}$

Les dues primeres equacions són un sistema lineal, la solució única del qual és $a = -2, b = -2$. Com que aquests valors també compleixen la relació $a^2 + b^2 + 1 = 9$, podem assegurar que Q és ortogonal si, i només si, $a = b = -2$.

Solució segona: Si la matriu Q és ortogonal, llavors les columnes de Q són vectors ortonormals, així que

$$(-2, 1, -2) \cdot (a, b, 1) = (1, -2, -2) \cdot (a, b, 1) = 0$$

és a dir,

$$\begin{cases} -2a + b - 2 = 0 \\ a - 2b - 2 = 0 \end{cases}$$

Això és un sistema lineal, la solució del qual és $a = -2, b = -2$.

En conseqüència, si la matriu Q és ortogonal llavors, $a = -2, b = -2$ i $\mathsf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Per comprovar que, efectivament, Q és ortogonal, hem de demostrar que $\mathsf{Q}^t\mathsf{Q} = \mathrm{I}$:

$$\mathsf{Q}^t\mathsf{Q} = \left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)^t \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

(c)

$$(\mathsf{B}+\mathsf{A})^2 - \mathsf{B}^2 - \mathsf{A}^2 = \mathsf{I} + \mathsf{BA} \Leftrightarrow \cancel{\mathsf{B}^2} + \cancel{\mathsf{BA}} + \mathsf{AB} + \cancel{\mathsf{A}^2} - \cancel{\mathsf{B}^2} - \cancel{\mathsf{A}^2} = \mathsf{I} + \cancel{\mathsf{BA}} \Leftrightarrow \mathsf{AB} = \mathsf{I}$$

Com que la matriu A és quadrada i existeix una matriu B de manera que $\mathsf{AB} = \mathsf{I}$, A és invertible (i $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{B}$).

(d) Transposant la matriu $(\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{A}+\mathsf{B})$ obtenim

$$\big((\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{A}+\mathsf{B})\big)^t = (\mathsf{A}+\mathsf{B})^t(\mathsf{A}-\mathsf{B})^t = (\mathsf{A}^t+\mathsf{B}^t)(\mathsf{A}^t-\mathsf{B}^t) = (\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{A}+\mathsf{B})$$

(perquè $\mathsf{A}^t = \mathsf{A}$ i $\mathsf{B}^t = -\mathsf{B}$). Així que la matriu $(\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{A}+\mathsf{B})$ és simètrica.

(e) El rang és 1, perquè les columnes de la matriu $\vec{u}\vec{v}^{\,t}$ són combinacions lineals (múltiples) del vector $\vec{u}$:

$$\vec{u}\vec{v}^{\,t} = \vec{u}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\vec{u} & v_2\vec{u} & \cdots & v_n\vec{u} \end{bmatrix}$$

I, com que els vectors no són nuls, el producte no és la matriu nul·la.