ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT1 - Problemas Propuestos: NÚMEROS REALES

1. Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las desigualdades que siguen:

   a) $2x + 3 < 3x - 8$
   b) $(x+2)(x-2) \geq -3$
   c) $\frac{2x-1}{x+1} \geq 1$
   d) $(2x+1)^4 (x-2)(x+3) \leq 0$

2. Encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ que verifican:

   a) $|x-3| \leq 8$
   b) $|x-1|\,|x+2| < 3$
   c) $||x|+4| \leq 5$
   d) $(x-2)^2 \geq 4$
   e) $|2-|x|| \geq 1$
   f) $|x-1| > \frac{2x+1}{x+1}$ *(sug: $|x-a| > b$)*
   g) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$
   h) $|x| - |x+1| > 1$ *(sug: $|x+1| < |x| - 1$; sol:)*
   i) $\left|x^2-2\right| \leq 1$
   j) $||x-1|+2| < 3$
   k) $\left|2-x^2\right| \leq 1+2x^2$.

ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT1 - Problemas adicionales: NÚMEROS REALES

1. a) Comprueba que $0.\overline{9} = 1$
   b) Encuentra la representación decimal de $\frac{19}{8}$ y de $\frac{23}{29}$
   c) Encuentra los números racionales con representación decimal $0.\overline{917}$ i $2.3\overline{292}$, respectivamente.

2. Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $x^3 + 2x^2 - 5x > 6$.

3. Prueba la desigualdad: $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

4. Si a, b y c son números reales, prueba que:

   a) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
   b) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$. ¿Qué puedes decir si $a > 1$?

5. Encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ que verifican:

   a) $\left|x^2 + 6x + 5\right| \geq 2\,|x - 3|$ *(sug: dividir; $x \neq 3$)*
   b) $2 < |x| + |2x + 2| < 4$. *(sug: considerar regiones; $x < -1$, $-1 < x < 0$, $x > 0$; sol: $\left]-2, -\frac{4}{3}\right[\cup \left]0, \frac{2}{3}\right[$)*

*6. a) Verifica que para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, resulta $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$
   b) Comprueba que si x,$y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \max(x, y) &= \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right) \\ \min(x, y) &= \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right) \end{aligned}$$

*7. a) Verifica que si x,$y \in \mathbb{R}$, entonces $|xy| \leq x^2 + y^2$
   b) ¿En qué condiciones es cierta la igualdad $|x + y| = |x| + |y|$?

*8. Determina —puedes ayudarte de una gráfica— el conjunto de pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican:

   a) $|x| = |y|$
   b) $|x \cdot y| = 2$
   c) $|x| \leq |y|$
   d) $|x| - |y| \geq 2$
   e) $|x| + |y| \leq 1$
   f) $\max\left(|x|, |y|\right) < 2$