DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (E.I)

AMA - Primer Parcial 08-11-2010 Duración prevista: 1h 30'

---

1. (0.3p) Escribe el número complejo $z = \dfrac{5-i}{2-3i}$ en forma binómica y calcula z^4.

Observa que

$$z = \frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10-2i+15i-3i^2}{2^2+3^2} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$$

de donde

$$z^4 = (1+i)^2 (1+i)^2 = (2i)^2 = -4$$

De manera alternativa, escribiendo z en forma polar, puesto que $|z| = \sqrt{2}$ y $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, se tendrá

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4_{4\frac{\pi}{4}} = 4_\pi = 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -4$$

---

2. (0.3p) Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x \cdot \sin(x)}{1 - \sqrt{|x|-2}}$ y demuestra si es par, impar o de ninguno de los dos tipos.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\Big/\; \sqrt{|x|-2} \neq 1 \quad , \quad |x|-2 \geq 0\right\}$$

Por un lado, tenemos que

$$\sqrt{|x|-2} = 1 \Leftrightarrow |x|-2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ó } x = -3$$

y, por otra parte,

$$|x|-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[$$

En resumen,

$$D(f) = \left]-\infty,-3\right[\cup \left]-3,-2\right] \cup \left[2,3\right[\cup \left]3,+\infty\right[$$

La función es par, puesto que

$$f(-x) = \frac{(-x)\cdot\sin(-x)}{1-\sqrt{|-x|-2}} = \frac{(-x)\cdot(-\sin(x))}{1-\sqrt{|x|-2}} = \frac{x\cdot\sin(x)}{1-\sqrt{|x|-2}} = f(x)$$

---

3. (0.3p) A partir del estudio de su derivada, determina las regiones de crecimiento y decrecimiento y los puntos en que toma máximos o mínimos relativos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

Observa que puedes escribir $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, cuya derivada es

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1) = \left(2x - x^2\right)\cdot e^{-x} = x\cdot(2-x)\cdot e^{-x}$$

por lo que los posibles máximos o mínimos de $f(x)$ serán $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.
Por otra parte, el signo de la derivada coincide con el del polinomio ya que la exponencial es siempre positiva.
Así, teniendo en cuenta que $2x - x^2$ es una parábola con las ramas hacia abajo que se anula en $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$,

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &> 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \left]0,2\right[\\ 2x - x^2 &< 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]2,+\infty\right[\end{aligned}$$

de donde podemos concluir que en el intervalo $]-\infty, 0[$ la función $f(x)$ es estrictamente decreciente, en $]0, 2[$ es estrictamente creciente y en $]2, +\infty[$ vuelve a ser estrictamente decreciente. Por ello, además, podemos decir que en $x_1 = 0$ la función alcanza un mínimo relativo, mientras que en $x_2 = 2$ alcanza un máximo.
También puedes utilizar el signo de la derivada segunda para justificar ésto último

$$f"(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right) \cdot e^{-x} \;\Rightarrow\; f"(0) = 2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{en 0 hay un mínimo}$$
$$\Rightarrow f"(2) = -2e^{-2} < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{en 2 hay un máximo}$$

---

4. (0.6p) Considera la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente mediante

$$F(x, y, z) = \log\left(\frac{x}{y - z}\right) - x + 2 = 0$$

Determina el valor de z_0 para que el punto $P = (2, 5, z_0)$ se encuentre en la superficie.

Determina la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P.

Encuentra el ángulo que forma el plano tangente a la superficie en el punto P con el plano XY.

El punto $P = (2, 5, z_0)$ se encuentra en la superficie si se verifica $F(2, 5, z_0) = 0$. Por tanto,

$$\log\left(\frac{2}{5 - z_0}\right) - 2 + 2 = 0 \iff \log\left(\frac{2}{5 - z_0}\right) = 0 \iff \frac{2}{5 - z_0} = 1 \iff 5 - z_0 = 2 \iff z_0 = 3$$

Observa que puedes escribir

$$F(x, y, z) = \log(x) - \log(y - z) - x + 2$$

de donde

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= \left(\frac{1}{x} - 1 \, , \; -\frac{1}{y - z} \, , \; \frac{1}{y - z} \right) \\ \nabla F(2, 5, 3) &= \left(-\frac{1}{2} \, , \; -\frac{1}{2} \, , \; \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

La ecuación del plano tangente será

$$-\frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 5) + \frac{1}{2}(z - 3) = 0 \iff x + y - z - 4 = 0$$

El vector director del plano tangente en P es el vector gradiente $\nabla F(2, 5, 3)$ y el del plano XY es $(0, 0, 1)$. Por tanto,

$$\cos(\alpha) = \frac{(-1, -1, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\|(-1, -1, 1)\| \cdot \|(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.955317...$$

siendo α el ángulo que forman los planos.