DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (E.I)

AMA - Segon parcial 14-12-2009 Duració prevista: 1 h. 30 min.

---

1) (1.5 p) Considera la funció definida per la serie de potències

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}$$

a) $(0.5p)$ Fent ús de la cota d'error associada al teorema de Leibniz, troba el valor aproximat de $f(-1)$ amb dos xifres decimals exactes.

b) $(0.5p)$ Troba una sèrie de potències per a la seua derivada, $f'(x)$, i suma-la indicant l'interval de convergència.

c) $(0.5p)$ Integrant la derivada, troba $f(x)$ en forma explícita, i determina el valor exacte de $f(-1)$. Compara aquest resultat amb l'aproximació de a).

---

a) $f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}$ és una sèrie alternada i verifica les condicions del teorema de Leibniz.

Per a trobar una aproximació amb dos decimales correctes necessitem

$$E_N = |s - s_N| \leq a_{N+1} = \frac{1}{(N+2)\,2^{N+1}} < 10^{-3} \Longleftrightarrow (N+2)\,2^{N+1} > 1000 \Longleftrightarrow N \geq 6.$$

I prenent $N = 6$ obtenim l'aproximació

$$f(-1) \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n} = -\frac{1}{1\cdot 2^0} + \frac{1}{2\cdot 2^1} - \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^4} + \frac{1}{6\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^6} = -\frac{909}{1120} = -0.8116...$$

b) Derivant obtenim una sèrie geomètrica que podem sumar.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\cdot x^n}{(n+1)\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

per als valors de x tals que

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \,]-2, 2[$$

c) Integrant $f\prime(x)$

$$f'(x) = \frac{2}{2-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -2\cdot\log(2-x) + C$$

y tenint en compte que $f(0) = 0$,

$$f(0) = -2\cdot\log(2-0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 2\cdot\log(2)$$

d'on

$$f(x) = -2\cdot\log(2-x) + 2\cdot\log(2) = 2\log\left(\frac{2}{2-x}\right)$$

El valor exacte de $f(-1)$ és

$$f(-1) = 2\log\left(\frac{2}{2-(-1)}\right) = 2\log(2/3) = -0.8109302162$$

resultat que confirma la precisió trobada en a).

2) $(1\ p)$ Considera la corba paramètrica definida mitjançant

$$\gamma(t) = \left(\ t^3 + t\ ,\ \sin(t^2 - 1)\ \right)$$

a) $(0.7p)$ Troba l'equació de la recta tangent a la corba en el punt $P = (2, 0)$.

b) $(0.3p)$ Quin és l'angle que forma aquesta recta amb l'eix d'abscisses, OX?

---

a) Donat que $\gamma'(t) = \left(3t^2 + 1\ ,\ 2t\cdot \cos\left(t^2 - 1\right)\right)$, i que el punto $P = (2, 0)$ s'obté per a $t = 1$, l'equació de la recta tangente serà

$$RT \equiv P + t \cdot \gamma'(1)$$
$$RT \equiv (2\ ,\ 0) + t \cdot (4\ ,\ 2) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

o, de forma equivalent,

$$RT \equiv (4t + 2\ ,\ 2t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

b) L'angulo, α, que forma la recta amb l'eix OX és el mateix que forma el seu vector director, $(4, 2)$, amb $(1, 0)$

$$\cos(\alpha) = \frac{(4,2)\cdot(1,0)}{\|(4,2)\|\cdot\|(1,0)\|} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.46 \approx 26^o$$

---

3) $(1\ p)$ Considera la superfície definida implícitament mitjançant

$$F(x, y, z) = x^2 y + \log\left(x - y^2\right) - z^2 = 0$$

a) $(0.7p)$ Calcula l'equación del pla tangent a la superfície en el punt $(2, 1, 2)$

b) $(0.3p)$ Calcula l'equació de la recta normal a la superfície en aquest mateix punt

---

a) Per a obtenir el vector normal a la superfície calcularem el gradient de $F(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y,z) &= \left(2xy + \frac{1}{x - y^2}\ ,\ x^2 - \frac{2y}{x - y^2}\ ,\ -2z\right) \\ \nabla F(2,1,2) &= (5, 2, -4) \end{aligned}$$

i l'equación del plan tangent será

$$5(x-2) + 2(y-1) - 4(z-2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5x + 2y - 4z - 4 = 0$$

b) L'equació de la recta normal serà

$$r(t) = (2, 1, 2) + t \cdot (5, 2, -4) \qquad \Longleftrightarrow \qquad r(t) = (2 + 5t, 1 + 2t, 2 - 4t)$$