ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT5 - Problemes proposats: CONCEPTES GENERALS I SUMA DE SÈRIES

1. Donada la sèrie numèrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ determina la successió de sumes parcials i la seua suma.

2. Considera la sèrie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$:

   a) Troba les sumes parcials s_3 i s_4

   b) A partir del concepte de suma parcial, verifica que la sèrie convergeix i suma -1.

3. Es conegut que $s_n=\frac{3n+2}{n+4}$ és la successió de sumes parcials associada a la srie $\sum_{n\geq 1}a_n$:

   a) Troba el terme a_1

   b) Calcula el terme general a_n

   c) Suma la serie $\sum_{n\geq 1}a_n$, si convergeix

4. Justifica la resposta a cada una de les qüestions:

   a) Si $a_n\to 0$, pot ser convergent $\sum_{n\geq 1}a_n$? I divergent?

   b) Si $s_n\to 0$, pot ser divergent $\sum_{n\geq 1}a_n$?

   c) Si $\sum_{n\geq 1}a_n$ és de termes positius, com es comporta la successió de sumes parcials s_n?

   d) Si $\sum_{n\geq 1}a_n$ és convergent, pot ser convergent $\sum_{n\geq 1}\frac{a_{n+1}+1}{2-a_n}$? I divergent?

5. A partir de cada s_n, determina la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 1}a_n$, en cas de convergència:

   a) $s_n=\frac{2n}{3n+1}$

   b) $s_n=\frac{n^2}{n+1}$

   c) $s_n=\frac{1}{3^n}$

   d) $s_n=3^n$

   e) $s_n=\log(2n+1)$.

6. Calcula la suma de les sèries (geomètriques o reductibles a elles):

   a) $\sum_{n\geq 2}\frac{2^n+(-1)^{n+1}3^n}{6^n}$

   b) $\sum_{n\geq 2}\frac{2^n+1}{3^{n-1}}$

   c) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{5}{4^n}-\frac{4}{5^n}\right)$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{7^{2n}}$

7. Suma las sèries (reductibles a telescòpiques):

   a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

   c) $\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$

8. Justifica la convergència o divergència de cada una de les sèries:

   a) $\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{1+2^n}$

   c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2n}{(n+1)!}$

   d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 3^n}{5^{n-1}}$

   e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-1}$

   f) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n-2}$

9. Considera les sèries alternades:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3^n n^3}.$$

   Aproxima la suma de cada sèrie amb tres decimals exactes, almenys, i indica si l'aproximació és per defecte o per excés. Calcula, a més a més, el màxim error comés quan la suma de cada una d'elles s'aproxima mitjançant s_{30}. Quina convergeix més ràpidament? Per què?

10. Fent ús de la cota d'error associada al criteri de Leibniz, troba el valor de N necessari per a que la suma parcial s_N ens proporcione dos decimals exactes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}\ .$$

    Calcula també aquesta suma parcial.

11. Considera la sèrie numèrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3^{n+1}}$. Es demana:

    a) Verificar que la successió $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{3^{n+1}}\right\}_{n\geq 1}$ és decreixent.

b) Comprovar, mitjançant el criteri de Stolz, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$.

c) Deduïr dels apartats anteriors que la sèrie inicial és convergent.

d) Determinar el valor de N necessari per a que la suma parcial s_N aproxime la suma de la sèrie amb (almenys) dues xifres decimals correctes. Calcula eixa aproximació.

12. Un ciclista en plena marxa retira els peus dels pedals. La roda davantera gira 200 vegades els primers 10 segons. Posteriorment, en cada periode de 10 segons, la roda gira 4/5 parts de les vegades que va girar en el periode anterior.

a) Quantes vegades gira la roda en els primers 30 segons després de retirar el peus dels pedals?

b) Quant de temps serà necessari per a que la roda gire 900 vegades?

c) Quantes vegades gira la roda abans de parar?

13. Troba el valor de N necessari per a que la suma parcial s_N proporcione cinc decimals exactes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{5^{n+1}}$$

i calcula la suma exacta.

14. Troba el valor de N necessari per a que la suma parcial s_N proporcione cinc decimals exactes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1} \cdot 3^n}$$

i calcula la suma exacta.

15. Troba el valor de N necessari per a que la suma parcial s_N proporcione tres decimals exactes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^{2n}}$$

i calcula el valor exacte d'aquesta suma.

16. Considera la sèrie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^\alpha}{2^{n+1}}\beta^n$, depenent dels paràmetres α, $\beta \in \mathbb{R}$

a) Suma la sèrie quan $\alpha = 0$ i β qualsevol dels valors que la fan convergent, que trobaràs previament

b) Si $\alpha = -2$ i $\beta = -1$, troba el valor de n necessari per aproximar la suma de la sèrie mitjançant la suma parcial s_n, amb tres decimals exactes, almenys. Calcula eixa aproximació.

17. Considera la sèrie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\alpha^n}{2^n(3n-1)}$, segons $\alpha \in \mathbb{R}$. Per a $\alpha = 1$ i $\alpha = 2$, troba n tal que la suma parcial s_n aproxime la suma de la sèrie amb tres decimals exactes, almenys. Calcula l'aproximació en cada cas.

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT5 - Exercicis addicionals: CONCEPTES GENERALS I SUMA DE SÈRIES

1. Estudia el caràcter, i calcula la suma quan siga possible, de les sèries:

   a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(\alpha+1)^n}{6^{2n+1}}$

   b) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1+2i}{3}\right)^n$

   *c) Calcula $\sum_{n\geq 1} c_n$, si c_n és el complex que es troba en la intersecció de la bisectriu del primer quadrant amb la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 2^{1-2n}$.

2. A partir d'un triangle equilàter de costat $1m$, connectem els punts mitjans dels tres costats per a obtenir un nou triangle. Repetint el procés obtindrem una successió decreixent de triangles. Calcula el valor de la suma de les àrees de tots.

3. Una granota intenta creuar un estany. El seu primer bot és de $1m$ i, com a conseqüència del cansament, la longitud de cada bot és la meitat de l'anterior. Determina el nombre de bots que necessitarà per a creuar l'estany, de $1.95m$ de diàmetre. Quina serà la màxima amplària que pot recòrrer la granota?

4. Expressa en forma de fracció el nombre decimal $q = 0,324242424... = 0.3\widehat{24}$. Suggerència: comença per expressar q com una suma infinita. Suma després la sèrie geomètrica corresponent.

*5. Calcula la suma de la sèrie $\sum\limits_{n\geq 2} \log\left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)$. Suggerència: comença per simplificar a_n fent ús de les propietats del logaritme.

*6. Calcula la suma de la sèrie (aritmètico-geomètrica) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$. Suggerència: aplica la tècnica que permet trobar la suma de una sèrie geomètrica.

7. Raona com en l'exercici anterior i calcula la suma de les sèries:

   a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$

   b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{3^n}$

   c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$

   d) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{2n+3(-1)^{n+1}}{5^n}$.

8. Suma las sèries (reductibles a telescòpiques):

   a) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$

b) $\sum_{n\geq 2} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

*9. Sabem que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .Determina el valor de $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \ ... = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

*10. a) Sabent que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$ i tenim en compte que $n^2 + 1 = n(n-1) + n + 1$, comprova que $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n!} = 3e - 1$.

b) A partir de factoritzacions semblants dels numeradors, calcula la suma de les sèries:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} \quad \text{i} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{3n^2-1}{(n+1)!}.$$

*11. Es conegut que la sèrie $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+3}{6n-5}\right)^n$ és convergent

a) Troba $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n < \frac{1}{2^n}$

b) Utilitza la desigualtat de a) per tal d'acotar l'error comés en aproximar la suma de la sèrie mitjançant la suma parcial s_{10}.

*12. Troba n per tal d'aproximar la suma, $s = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n(3n-1)}$, mitjançant s_N amb tres decimals exactes, almenys. Com a suggerència, acota previament la cua de la sèrie:

$$|s - s_N| = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

per una sèrie geomètrica convergent adequada. Efectua l'aproximació en qüestió.