Minimización de autómatas y operaciones sobre los lenguajes regulares

U.D. Computación

DSIC - UPV

2017-18

Indice

- Operaciones de cierre
- Minimización de AFDs

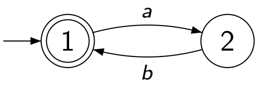
Operaciones de cierre

- Un conjunto C es cerrado bajo una operación $\cdot$ si y solamente si para cualquier elementos $x, y \in C$, $x \cdot y \in C$.
- Ejemplos
  - Sea $C = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ es finito } \}$ entonces la unión y la intersección son operaciones de cierre para C, mientra que la operación complementario no lo es.

Operaciones de cierre

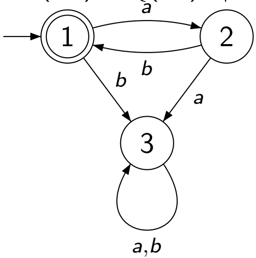
Para estudiar las operaciones de cierre, haremos operaciones sobre los siguientes autómatas.

AFD A_1 no completo. $L(A_1) = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$.

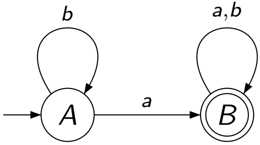


Operaciones de cierre

AFD A_2 completo. $L(A_2) = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$.



AFD A_3 completo. $L(A_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|_a > 0\}$.



Intersección

Los lenguajes regulares son cerrados con respecto a la intersección.

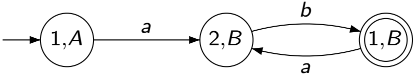
Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, entonces existen dos AFDs A_1, A_2 tales que $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$, donde $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i), i = 1, 2$
Construimos $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = [q_1, q_2]$
- $F = F_1 \times F_2$
- $\delta([p_1, p_2], a) = [\delta_1(p_1, a), \delta_2(p_2, a)]$, $p_1 \in Q_1, p_2 \in Q_2, a \in \Sigma$

$$L(A') = L_1 \cap L_2$$

Intersección

AFD para $L(A_1) \cap L(A_3)$.



Unión

Los lenguajes regulares son cerrados con respecto a la unión.

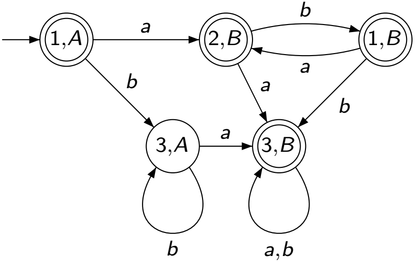
Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, entonces existen dos AFDs completos A_1, A_2 tales que $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$, donde $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i), i = 1, 2$
Construimos $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = [q_1, q_2]$
- $F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$
- $\delta([p_1, p_2], a) = [\delta_1(p_1, a), \delta_2(p_2, a)]$, $p_1 \in Q_1, p_2 \in Q_2, a \in \Sigma$

$$L(A') = L_1 \cup L_2$$

Unión

AFD para $L(A_2) \cup L(A_3)$.



Complementación y Diferencia

Los lenguajes regulares son cerrados con respecto a la Complementación.

Sea $L \in \mathcal{L}_3$, entonces existe un AFD completo A tal que $L = L(A)$ donde $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Definimos el autómata $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q\text{-}F)$.

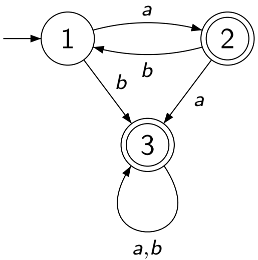
$$L(A') = \overline{L}$$

Los lenguajes regulares son cerrados con respecto a la Diferencia.

Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$. Nótese que $L_1\text{-}L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$.

Complementación

AFD para $\overline{L(A_2)}$.



Reverso

Los lenguajes regulares son cerrados con respecto al Reverso.

Sea $L \in \mathcal{L}_3$, entonces existe un autómata $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ tal que $L(A) = L$.

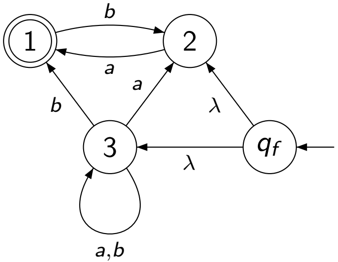
Si $|F| > 1$ puede modificarse el autómata para que posea un único estado final.

Construimos $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_f, \{q_0\})$ donde:
$q \in \delta(p, a) \leftrightarrow p \in \delta'(q, a)$ para $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$.

$$L(A') = L^r$$

Reverso

Autómata para $(\overline{L(A_2)})^r$.



Concatenación

Los lenguajes regulares son cerrados con respecto a la Concatenación.

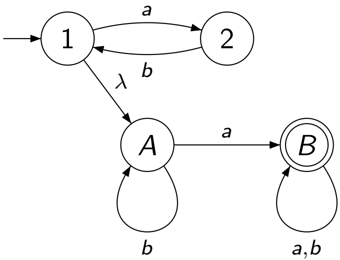
Sean $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, entonces existen dos autómatas A_1, A_2 tales que $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$ donde $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i), (i = 1, 2)$ y tales que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$
Construimos $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_1, F_2)$ donde:

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- $\delta' = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta''$ donde $q_2 \in \delta''(p, \lambda)$, $\forall p \in F_1$

$$L(A') = L_1 \cdot L_2$$

Concatenación

Autómata para $L(A_1) \cdot L(A_3)$.



Clausura

Los lenguajes regulares son cerrados con respecto a la Clausura.

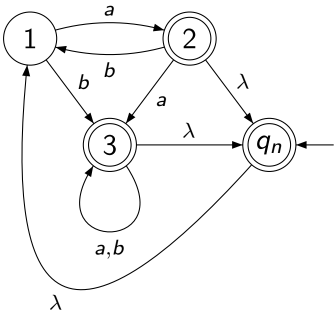
Sea $L \in \mathcal{L}_3$, entonces existe un autómata A tal que $L = L(A)$ donde $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ Construimos $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_n, F')$ donde:

- $Q' = Q \cup \{q_n\}$, $q_n \notin Q$
- $F' = F \cup \{q_n\}$
- $\delta'(p, a) = \delta(p, a)$, para todo $p \in Q$ y para todo $a \in \Sigma$
- $q_n \in \delta'(p, \lambda)$, para todo $p \in F$
- $\delta'(q_n, \lambda) = \{q_0\}$

$$L(A') = L^*$$

Clausura

Autómata para $(\overline{L(A_2)})^*$.



Homomorfismo Inverso

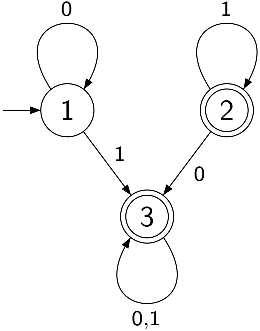
Los lenguajes regulares son cerrados con respecto a Homomorfismo Inverso.

Sea $h : \Sigma \to \Delta^*$ un homomorfismo y $L \subseteq \Delta^*, L \in \mathcal{L}_3$.
Existe un AFD A tal que $L = L(A)$, $A = (Q, \Delta, \delta, q_0, F)$.
Construimos $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ donde:
$\delta'(p, a) = \delta(p, h(a))$, $\forall p \in Q$, $\forall a \in \Sigma$

$$L(A') = h^{-1}(L)$$

Homomorfismo Inverso

Sea $h : \{0, 1\} \to \{a, b\}^*$ un homomorfismo tal que $h(0) = ab$, $h(1) = ba$. El autómata para $h^{-1}(\overline{L(A_2)})$ es:



Cociente (per la derecha) de un lenguaje por una cadena

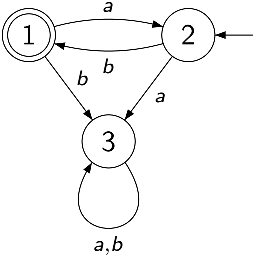
Los lenguajes regulares son cerrados respecto del cociente por una cadena.

Sea $u \in \Sigma^*$ i $L \in \mathcal{L}_3$, entonces existe un AFD completo A tal que $L = L(A)$ y donde $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Construimos $A' = (Q, \Sigma, \delta, \delta(q_0, u), F)$ donde:

$$L(A') = u^{-1}L$$

Cociente (per la derecha) de un lenguaje por una cadena

$\Sigma = \{a, b\}$, $u = aba$. Autómata para $u^{-1}L(A_2)$.



Un AFD $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es accesible si para todo $q \in Q$ existe una palabra $x \in \Sigma^*$ tal que $\delta(q_0, x) = q$

Relación de indistinguibilidad en Q

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD completo y accesible.
Definimos la relación de indistiguibilidad $\sim$ en Q como:

$$\forall q, q' \in Q : (q \sim q' \leftrightarrow \forall x \in \Sigma^* \ (\delta(q, x) \in F \leftrightarrow \delta(q', x) \in F))$$

Autómata cociente

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD completo y accesible y sea la relación de indistiguibilidad $\sim$.
Se define el autómata cociente $A/\sim = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$ como:

- $Q = \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$
- $q_0 = [q_0]_\sim$
- $F = \{[q] \mid q \in F\}$
- $\delta'([q]_\sim, a) = [\delta(q, a)]_\sim$

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD completo y accesible y sea la relación de indistiguibilidad $\sim$.
El automata $A/\sim$ es el AFD mínimo que acepta $L(A)$.

Minimización de AFDs

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD completo y accesible y sea un entero $k \geq 0$. Se define la relación de k-indistinguibilidad $\sim_k$ como:

$$\forall q, q' \in Q : (q \sim_k q' \leftrightarrow \\ \forall x \in \Sigma^*, |x| \leq k, (\delta(q,x) \in F \leftrightarrow \delta(q',x) \in F))$$

Se cumple que:

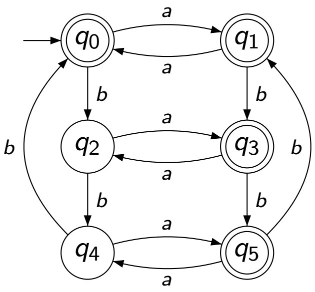
- para cualquier $k \geq 0, p \sim_{k+1} q \rightarrow p \sim_k q$
- para cualquier $k \geq 0, p \sim q \rightarrow p \sim_k q$
- para cualquier $k \geq 0, p \sim_{k+1} q \leftrightarrow p \sim_k q$ y para cualquier $a \in \Sigma, \delta(p,a) \sim_k \delta(q,a)$

Minimización de AFDs

Algoritmo de minimización de AFD:

- 1. $\pi_0 = \{Q - F, F\}$
- 2. Obtener π_{k+1} a partir de π_k $B(p, \pi_{k+1}) == B(q, \pi_{k+1})$ si y solo si
  - $B(p, \pi_k) == B(q, \pi_k)$
  - y para todo $a \in \Sigma, B(\delta(p, a), \pi_k) == B(\delta(q, a), \pi_k)$
- 3. Si π_{k+1} es distinta a π_k ir a 2

Ejemplo de minimización 1.



Minimización de AFDs

π_0 :

		a	b
B_0	q_0	B_0	B_1
	q_1	B_0	B_0
	q_3	B_1	B_0
	q_5	B_1	B_0
B_1	q_2	B_0	B_1
	q_4	B_0	B_0

Minimización de AFDs

π_1 :

		a	b
B_0	q_0	B_1	B_3
$B1$	q_1	B_0	B_2
$B2$	q_3	B_3	B_2
	q_5	B_4	B_1
B_3	q_2	B_2	B_4
B_4	q_4	B_2	B_0

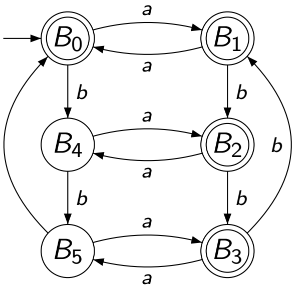
Minimización de AFDs

π_2 :

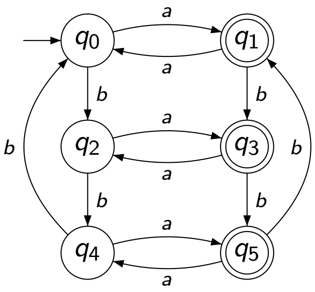
		a	b
B_0	q_0	B_1	B_4
$B1$	q_1	B_0	B_2
$B2$	q_3	B_4	B_3
$B3$	q_5	B_5	B_1
B_4	q_2	B_2	B_5
B_5	q_4	B_3	B_0

Minimización de AFDs

$\pi_3 = \pi_2$



Ejemplo de minimización 2.



Minimización de AFDs

π_0 :

		a	b
B_0	q_1	B_1	B_0
	q_3	B_1	B_0
	q_5	B_1	B_0
B_1	q_0	B_0	B_1
	q_2	B_0	B_1
	q_4	B_0	B_1

Minimización de AFDs

$\pi_1 = \pi_0$