DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Primer parcial **24-11-2014** **Duración: 2 horas**

Nombre: **Grupo:**

1.(2.p) a) Escribe en forma binómica el siguiente número complejo:

$$z = \frac{2ai}{1+i}, \quad a \in \mathbb{R}$$

b)¿Qué valor/valores debe tener a para que $z \in \mathbb{R}$?

c)¿Qué valor/valores debe tener a para que z esté en la bisectriz del primer cuadrante?

d)¿Qué valor/valores debe tener a para que z esté en la bisectriz del tercer cuadrante?

---

a) Multiplicamos numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador y simplificamos:

$$z = \frac{2ai}{1+i} = \frac{2ai(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2ai - 2ai^2}{1^2 - i^2} = \frac{2ai+2a}{1+1} = \frac{2ai+2a}{2} = a + ai$$

b) Para que $z \in \mathbb{R}$ su parte imaginaria tiene que ser 0, por tanto $a = 0$ y $z = 0$

c) En este caso, z está en la bisectriz del primer-tercer cuadrante porque parte real e imaginaria son iguales. Para que z este en la bisectriz del primer cuadrante solo necesitamos que a sea positivo.

d) Para que esté en la bisectriz del tercer cuadrante solo necesitamos que a sea negativo.

---

2. (1.5p) Encuentra el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\log(3 - |x-2|)}$$

Para resolver este ejercicio tenemos que tener encuenta 3 factores:

a) En el numerador de la función tenemos una raiz cúbica, su dominio son todos los reales.

b) En el denominador tenemos un logaritmo y el dominio de la función logaritmo son $x \in]0, +\infty[$, es decir tenemos que exigir que $(3 - |x-2|) > 0$.

c) Por otra parte, este logaritmo está en el denominador por lo que tenemos que excluir del dominio los puntos donde $\log(3 - |x-2|) = 0$.

Vamos a analizar las condiciones b) y c) ya que la a) no excluye ningún punto.

b)

$$(3-|x-2|) > 0 \leftrightarrow 3 > |x-2| \leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \leftrightarrow -3+2 < x < 3+2 \leftrightarrow -1 < x < 5 \leftrightarrow x \in]-1, 5[.$$

c) Ahora vamos a calcular los puntos donde el logaritmo se hace cero para excluirlos del dominio:

$$\log(3-|x-2|) = 0 \leftrightarrow 3-|x-2| = 1 \leftrightarrow 2 = |x-2| \leftrightarrow \{2 = x-2 \ \text{ó} \ -2 = x-2\} \leftrightarrow \{x = 4 \ \text{ó} \ x = 0\}$$

Entonces la solución final es la solución del apartado b) donde excluimos estos dos puntos

$$x \ \in]-1,0[\cup]0,4[\cup]4,5[$$

---

3. (1.5p) A partir del estudio de la derivada de la función $f(x) = x \cdot e^{(2-\frac{3}{x})}$ determina las regiones de crecimiento y decrecimiento así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

Esta función esta definida $\forall \ x \ \in \mathbb{R} - \{0\}$, ya que en $x = 0$ se anula el denominador de la exponencial. Por lo tanto tendremos que estudiar lo que ocurre en este dominio.
Primero calculamos la derivada de la función

$$f'(x) = e^{(2-\frac{3}{x})} + x \cdot e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (-3)(-1) \cdot x^{-2} = e^{(2-\frac{3}{x})} + 3 \cdot \frac{x}{x^2} \cdot e^{(2-\frac{3}{x})} = e^{(2-\frac{3}{x})}(1 + \frac{3}{x})$$

igualamos a cero y resolvemos:

$$e^{(2-\frac{3}{x})}(1 + \frac{3}{x}) = 0 \ \leftrightarrow \ (1 + \frac{3}{x}) = 0 \ \leftrightarrow \ 1 = -\frac{3}{x} \ \leftrightarrow \ x = -3$$

la posible solución para máximo o mínimo local es $x = -3$.
Calculamos la derivada segunda (este apartado se puede resolver también estudiando el signo de la derivada primera). Utilizamos la fórmula de la derivada del producto de dos funciones:

$$f''(x) = e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (1 + \frac{3}{x})(-3)(-1)x^{-2} + e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (3)(-1)x^{-2} = e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot (\frac{3}{x^2} + \frac{9}{x^3} - \frac{3}{x^2}) = e^{(2-\frac{3}{x})} \cdot \frac{9}{x^3}$$

Comprobamos que

$$f''(-3) = e^{(2+1)} \cdot \frac{9}{-27} = \frac{-1}{3} \cdot e^3$$

la derivada segunda tiene signo negativo en $x = -3$, por lo que en $x = -3$ tenemos un máximo local.
Como en $x = 0$ tenemos un punto de discontinuidad, puede cambiar la tendencia de la función, por lo que tenemos que ver lo que ocurre con la derivada primera en el intervalo $]0, +\infty[$. Podemos tomar un punto cualquiera, por ejemplo $x = 1$, y ver que la derivada primera es positiva, por lo que la función es creciente en $]0, +\infty[$.
Entonces, resumiendo tenemos que es creciente en $]-\infty, -3[$, tiene un máximo local en $x = -3$, es decreciente en $]-3, 0[$, el punto $x = 0$ no pertenece al dominio y es creciente en $]0, +\infty[$.

---

4. (2 p) Calcula el valor exacto de

$$\int_{-1}^{(\pi^2-1)} \sin(\sqrt{x+1})dx$$

Hacemos el cambio de variable $t^2 = x + 1$ y calculamos dx para sustituirlo en la integral:

$$2tdt = dx$$

ahora calculamos los nuevos valores de los límites de integración:
para $x = -1 \ \rightarrow \ t = 0$ y
para $x = \pi^2 - 1 \ \rightarrow \ t = \sqrt{\pi^2 - 1 + 1} = \pi$,
sustituyendo en la integral:

$$\int_{-1}^{(\pi^2-1)} \sin(\sqrt{x+1})dx = 2\int_0^\pi t \cdot \sin(t)dt$$

Esta integral se puede hacer por partes tomando:
$u = t$ y $\sin(t)dt = dv$,
por lo que $du = dt$ y $v = \int \sin(t)dt = -\cos(t)$

utilizamos la fórmula de integración por partes

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$2\int_0^{\pi} t{\cdot}\sin(t)dt = 2\left[t \cdot (-\cos(t))\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \cos(t)dt = 2\left[-t \cdot \cos(t)\right]_0^{\pi} + 2\left[\sin(t)\right]_0^{\pi} = 2((-\pi{\cdot}\cos(\pi) - 0) + 2{\cdot}(\sin(\pi) - \sin(0)) = 2\pi$$

donde hemos utilizado que: $\cos(\pi) = -1,\ \sin(0) = 0,\ y\ \sin(\pi) = 0$

---

5. (1.5p) **a**) Aproxima, mediante la regla de Simpson, el valor de la integral siguiente dividiendo el intervalo de integración en 4 partes iguales.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

(1.5p) **b**) ¿Cuál sería el mínimo número de subdivisiones necesarias para que el error calculado utilizando la fórmula de los trapecios sea menor que 10^{-4}?

---

a) La fórmula se Simpson es:

$$S_n f = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a + (2k+1)h) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a + 2kh) + f(b)\right)$$

en nuestro caso $n = 4$, $a = 0$, $b = 1$ y $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, los puntos que marcan los subintervalos son :

$$P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

la fórmula de Simpsom queda:

$$S_4 f = \frac{1}{12}\left(e^{0^2} + 4 \cdot (e^{(\frac{1}{4})^2} + e^{(\frac{3}{4})^2}) + 2 \cdot (e^{(\frac{1}{2})^2}) + e^{1^2}\right) = 1.4637107604$$

b) El error calculado con la fórmula de los trapecios es:

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2\ ;\ con\ \ M_2 \geq \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

primero tenemos que calcular la derivada segunda:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$

La exponencial al cuadrado es una función creciente y $2x^2 + 1$ es creciente en el intervalo de integración $]0, 1\,[$. Como es una función creciente en un intervalo cerrado, el máximo lo alcanza en el extremo superior del intervalo:

$$M2 = f"(1) = 6e$$

Sustituimos todo en la fórmula del error y obtenemos:

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{(1)^3}{12n^2} 6e < 10^{-4}$$

Ahora despejamos el valor de n:

$$\frac{1}{2n^2} \cdot e < 10^{-4} \ \leftrightarrow\ \frac{1}{2} \cdot e \cdot 10^4 < n^2 \ \leftrightarrow\ \sqrt{\frac{1}{2} \cdot e \cdot 10^4} < n \ \leftrightarrow\ \sqrt{\frac{10^4}{2} \cdot e} < n$$

$$\leftrightarrow 116.582 < n \ \leftrightarrow\ 117 \leq n$$