ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT2 - Problemas Propuestos: FUNCIONES ELEMENTALES

1. Determina los dominios de las funciones:

   a) $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

   b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

   c) $h\left(x\right) = \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}$

   d) $j(x) = \frac{\log(2-x)}{|x|+x}$

   e) $k(x) = \sqrt{1 - |x+2|} + \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

   f) $l(x) = \sqrt{\log\left(x^2 - x\right)}$

   g) $m(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x^2-2}\right)$.

2. Encuentra los dominios respectivos y determina qué funciones de las que siguen son pares, cuáles son impares y cuáles ni pares ni impares:

   a) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

   b) $g(x) = \sqrt{1+x-x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

   c) $h(x) = \sqrt{x^2-1} + x$

   d) $j(x) = \frac{x\cdot|x|}{2^x+2^{-x}}$

   e) $k\left(x\right) = \cos\left(\sin\left(x+\pi\right)\right)$

   f) $r(x) = ax^3 + b$, según a,$b \in \mathbb{R}$

   g) $s(x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x^2+1}$

   h) $u(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

   i) $v(x) = \frac{e^{x^2}+1}{x^3-x}$.

3. Calcula las derivadas de las funciones:

   a) $f(x) = x\sqrt{x}\left(3\log(x) - 2\right)$

   b) $g(x) = \log\left(e^{-x} + xe^{-x}\right)$

   c) $h(x) = \frac{x^3-3}{5-x^2}$

   d) $j(x) = 3\sin(x) - \cos^3(x)$

   e) $k(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$

   f) $m(x) = (x^2-2)\sin(x) + 2x\arctan(x)$

   g) $n(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{1+x^2}$.

4. a) Encuentra el valor de la derivada de la función $k(x)$ del problema anterior en el punto de abscisa $x = \pi$ y determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $k(x)$ en ese punto.

   b) La recta tangent a la gráfica de la función $h(x)$ del problema anterior en el punto $x = 1$ corta a la gráfica de $h(x)$ en un segundo punto. Determina la distancia entre los dos puntos de corte.

5. Mediante el uso de las derivadas correspondientes, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

   a) $f(x) = x^2\left(x-3\right)$

   b) $g(x) = \frac{x}{x-2}$

   c) $h(x) = x + sen(x)$

   d) $p(x) = x\log(x)$

   e) $q(x) = \frac{e^x}{x}$

f) $r(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{1-x}}$

6. Encuentra los dominios y determina (a partir del estudio de sus derivadas) las regiones de crecimiento y decrecimiento y los puntos en que toman máximos o mínimos relativos las funciones:

a) $f(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$

b) $g(x) = x^3 + 8x^2 + 4x - 48$

c) $h(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

d) $k(x) = \frac{e^x}{x^4}$

ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT2 - Ejercicios adicionales: FUNCIONES ELEMENTALES

1. Simplifica la expresión $\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}}$.

2. Resuelve las ecuaciones:

   a) $25^{x+1}+5^{x+2}=50$

   b) $\log(x)-\log(x-1)=\log(x+2)-\log(5)$.

3. Descompón en fracciones simples:

   a) $\frac{3x}{x^2-6x+8}$

   b) $\frac{x^4+x^2+x+2}{x^3-2x+4}$

   c) $\frac{x^2+1}{(x+2)^3}$.

4. Encuentra el dominio y la función inversa, si existe (donde exista), de cada una de las funciones:

   a) $f(x)=\frac{2x}{x-1}$

   b) $g(x)=\frac{x}{1+|x|}$

   c) $h(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

5. Determina los siguientes conjuntos.

   a) $A=\left\{\frac{1}{x}\ :\ x\in\mathbb{R}\right\}$

   b) $B=\{x\in[0,2\pi]\ :\ \sin x>0\}$

   c) $C=\{\log x\ :\ x\in\mathbb{R}\}$

   d) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ :\ \cos x\geq\frac{1}{2}\right\}$

   e) $E=\left\{x\in\mathbb{R}\ :\ x^3\leq 1\right\}$

6. Determina si son o no periódicas las funciones que siguen:

   a) $\sin(3x-\pi)$

   b) $|\cos(4x)|$

   c) $\tan\left(x^2\right)$

   d) $\sin^2(x)$

   e) $|x-[x]|$, donde $[x]$ es la parte entera de x; es decir, el major entero menor o igual que x.

   Encuentra también el período T de cada una de las periódicas.

7. Demuestra que las siguientes funciones son periódicas:

   a) $f(x) = 10sen(3x)$, de periodo $\frac{2\pi}{3}$.
   b) $h(x) = cos^2(x)$ de periodo π.

8. a) ¿Qué ángulo determinan las curvas $y = x^3$ e $y = \frac{1}{x^2}$ en el punto en el que se cortan sus gráficas?
   b) ¿En qué punto de la curva definida por $y^2 = 2x^3$ la recta tangente es perpendicular a la recta de ecuación $3y - 4x = 2$?

*9. Se definen las funciones hiperbólicas: seno, coseno y tangente por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Encuentra sus gráficas y justifica analíticamente que:

   a) sinh es impar y cosh es par. Ninguna de ellas es periódica
   b) $\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1 \quad , \quad \cosh^2(x) + senh^2(x) = \cosh(2x)$
   c) sinh y tanh soón crecientes en $\mathbb{R}$; cosh es creciente en $]0, +\infty[$. ¿Dónde son cóncavas o convexas?
   d) Sus inversas respectivas (encuentra también sus gráficas): *argsinh*, *argcosh* y *argctanh*, son, respectivamente:

$$\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ , x \in \mathbb{R}; \quad \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , x \geq 1; \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ , x \in [-1, 1].$$

*10. Determina la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \text{ si } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$
   b) $g(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   c) $h(x) = \begin{cases} x^3 - 2 \text{ si } x > -3 \\ 27x \text{ si } x \leq -3 \end{cases}$

11. Encuentra los dominios y determina (a partir del estudio de sus derivadas) las regiones de crecimiento y decrecimiento y los puntos en que toman máximos o mínimos relativos las funciones:

   a) $l(x) = \sin(x)\cos^2(x)$
   *b) $m(x) = x\cos(x)$

12. Calcula las segundas derivadas de las funciones:

   a) $f(x) = e^{x^2}$
   b) $g(x) = \sin^2(x)$
   c) $h(x) = \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

13. Determina las regiones de concavidad y convexidad de las funciones del ejercicio anterior.

14. Encuentra los máximos y mínimos absolutos de:

   a) $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$, en su dominio
   b) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, en $[-1, 5]$ y en $[-10, 12]$
   c) $h(x) = -\sin(3x)$ en $[-2, 2]$.

*15. Encuentra los máximos y los mínimos absolutos de $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$, en $\mathbb{R}$.

*16. Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ verifica que, para $x \in [0, 1]$:

$$|f''(x)| \leq 8 \ , \quad \left|f^{(iv)}(x)\right| \leq 384 \ , \quad |g''(x)| \leq 6 \ , \quad \left|g^{(iv)}(x)\right| \leq 76 \ .$$