11.-

(b) Base de F(A)

L'espai fila es el generat per les files de A, per tant per a obtindre una base, escalonem A i ens quedem amb els vectors no nuls de l'escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(1),\ E_{4,1}(-2)]{E_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{4,3}(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant els tres primers vectors són lliures i

$$F(A) = \langle \underbrace{(1,1,-2,1),(0,-2,5,1),(0,0,5,3)}_{\text{Base de } F(A).} \rangle$$

Base de $F(A^t) = C(A)$ Transposem A i fem el mateix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,1}(2),\ E_{4,1}(-1)]{E_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{2,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{3,2}(-5)]{E_{4,2}(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{4,3}\left(\frac{6}{10}\right)} \left.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{Base de } F(A^t)$$

Nuc(A)

Hem de resoldre el sistema homogeni associat a A, però com que ja hem escalonat abans A, podem agafar la matriu que ja hem escalonat i resoldre el sistema homogeni associat, es a dir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El Sist. é Comp. Indeterminat

per tant: $t = \lambda$

$5z = -3\lambda \rightarrow z = -\frac{3\lambda}{5}$

$-2y + 5z + t = 0 \rightarrow 2y = -3\lambda + \lambda = -2\lambda \rightarrow y = -\lambda$

$x + y - 2z + t = 0 \rightarrow x = \lambda - \frac{6}{5}\lambda - \lambda = -\frac{6\lambda}{5}$

$(x,y,z,t) = \left(-\frac{6\lambda}{5}, -\lambda, -\frac{3\lambda}{5}, \lambda\right) = \lambda\left(-\frac{6}{5}, -1, -\frac{3}{5}, 1\right)$

Per tant:

$\mathrm{Nuc}(A) = \left\langle \left(-\frac{6}{5}, -1, -\frac{3}{5}, 1\right) \right\rangle$ Base de Nuc(A)

Nuc(A^t)

Farem ara el mateix amb la matriu A^t que ja la teniem també escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sist. Comp. Indet.

$t = \lambda$

$z = -\lambda$

$y + 2z + 3t = 0 \rightarrow y = 2\lambda - 3\lambda = -\lambda$

$x + 2y - z + 2t = 0 \rightarrow x = 2\lambda - \lambda - 2\lambda = -\lambda$

Per tant: $(x,y,z,t) = (-\lambda, -\lambda, -\lambda, \lambda) = \lambda(-1,-1,-1,1)$

$\rightarrow \mathrm{Nuc}(A^t) = \langle(-1,-1,-1,1)\rangle$

Base de Nuc(A^t)