Tema 1: Resolució de sistemes d'equacions lineals mitjançant operacions elementals. Matrius escalonades.

Bloc 2: Sistemes d'equacions lineals

1 Sistemes d'equacions lineals

2 Matrius escalonades

3 Matrius elementals

4 Algorisme de Gauss-Jordan
- Aplicació a la resolució de sistemes

5 Algorisme de Gauss

Equació lineal i les seues solucions

Definició

Una *equació lineal* amb incògnites $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és una equació del tipus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

amb $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ escalars (nombres reals o complexos). Els valors a_i s'anomenen *coeficients* i el valor b s'anomena *terme independient*.

Una *solució* d'aquesta equació lineal és una n-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) tal que

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b.$$

Exemple: Els coeficients de l'equació lineal $3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$ són 3, -2, 1 i 1; el seu terme independent es 1. Una solució d'aquesta equació és el punt $(1, 1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$.

Equacions paramètriques

Considerem l'equació lineal $x - 2y + z = 3$. Cóm podem obtenir el conjunt de totes les seues solucions? Si aïllem una incògnita (per exemple x) obtenim:

$$x = 3 + 2y - z.$$

Açò vol dir que les solucions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de l'equació s'obtenen donant valors arbitraris a les incògnites(o variables) y i z (ja que el valor de x està determinat per aquestos). Així, les variables y, z actuen com a paràmetres, i un punt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ és una solució de l'equació si i sols si

$$\begin{cases} x = 3 + 2\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aquestes expressions constitueixen les *equacions paramètriques* de les solucions de l'equació lineal.
El conjunt de solucions és infinit i és el següent:

$$\{(3, 0, 0) + \alpha(2, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$(3, 0, 0)$ n'és una solució particular.

Sistema d'equacions lineals

Definició

Un *sistema de m equacions lineals amb n incògnites* $x_1, x_2, \dots, x_n$ és una família d'equacions lineals:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Els valors a_{ij} s'anomenen *coeficients* i els valors b_i s'anomenen *termes independents*.

Una *solució* és una n-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) que és solució de totes les equacions del sistema.

Exemples

Exemple 1: El sistema de dues equacions amb dues incògnites:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

té com a única solució $(1, 1)$.

Exemple 2: Considera el següent sistema de dues equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$(1, 1, 1)$ i $(2, 1, 0)$ són solucions. $(2, 2, 1)$ no és solució. Es pot comprovar que té infinites solucions.

Exemple 3: El següent sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

no té cap solució.

Classificació d'un sistema de equacions lineals

Atenent al nombre de solucions, els sistemes d'equacions lineals es classifiquen de la següent manera:

Un sistema d'equacions lineals es diu:

1. Incompatible si no té cap solució.
2. Compatible si té alguna solució.
   Els sistemes compatibles poden ser:
   - Compatibles determinats, quan tenen solució única.
   - Compatibles indeterminats , quan en tenen més d'una (i, en aquest cas, tenen infinites solucions).

Sistemes homogenis

Definició

Un sistema d'equacions lineals es diu *homogeni* si tots els termes independents són nuls.

Exemple: El sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

és homogeni.

Com tot sistema homogeni té al vector nul $(0, 0, \dots, 0)$ com a solució, tenim el següent resultat:

Propietat

Tot sistema d'equacions lineals homogeni és compatible.

Equivalència de sistemes d'equacions

Definició

Dos sistemes d'equacions es diu que són *equivalents* si tenen les mateixes solucions.

Donat un sistema d'equacions el nostre objectiu serà trobar-ne un altre que siga equivalent, però més senzill de resoldre. Per a això, farem servir les anomenades *operacions elementals*, que són les següents:

- Tipus 1: Intercanviar l'ordre de dues equacions (és a dir, permutar-les).
- Tipus 2: Multiplicar una equació per un escalar no nul.
- Tipus 3: Sumar-li a una equació un múltiple d'un altra.

Operacions elementals i sistemes equivalents

Propietat

Si efectuem un nombre finit d'operacions elementals sobre les equacions d'un sistema, el sistema d'equacions que s'obté és equivalent a l'inicial.

Aquesta propietat assenyalada serà la base dels mètodes de resolució de sistemes d'equacions que veurem.

OBSERVACIÓ: Les operacions elementals que es realitzen sobre les equacions d'un sistema són, de fet, operacions entre nombres, ja que s'apliquen sobre els coeficients i termes independents.

Aquestes operacions es reflecteixen de manera molt senzilla utilitzant les matrius associades a un sistema d'equacions.

Expressió matricial d'un sistema d'equacions

Un sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

equival a la següent igualtat matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matrius associades a un sistema d'equacions

Vector de incògnites:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vector de termes independents:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriu de coeficients:

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriu ampliada:

$$A|\vec{b} := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Abreujadament, l'expressió matricial del sistema d'equacions és

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Resoldre el sistema equival a resoldre l'equació matricial anterior, amb incògnita $\vec{x}$.

Operacions elementals en la matriu ampliada

Aplicar operacions elementals a un sistema d'equacions equival a aplicar operacions elementals (per files) a la seua matriu ampliada, que són les següents:

- Tipus 1: Permutar dues files.
- Tipus 2: Multiplicar una fila per un escalar no nul.
- Tipus 3: Sumar-li a una fila un múltiple d'un altra.

Esta senzilla observació ens permetrà, per a resoldre un sistema d'equacions, treballar directament amb la seua matriu ampliada.

1. Sistemes d’equacions lineals
2. **Matrius escalonades**
3. Matrius elementals
4. Algorisme de Gauss-Jordan
   - Aplicació a la resolució de sistemes
5. Algorisme de Gauss

Matrius escalonades

Definició

Una matriu és escalonada si

1. Les files nul·les, si en té, estan per baix de les no nul·les.
2. El primer element no nul (per l'esquerra) de cada fila (anomenat *element principal*) es troba més a la dreta que el primer element no nul de la fila anterior (en altres paraules, per baix del primer element no nul de cada fila només hi ha zeros).

Si la matriu escalonada S s'obté fent operacions elementals sobre la matriu A, direm que S és una forma escalonada de A.

Matrius escalonades

Definició

Una matriu és escalonada principal si és *escalonada* i tots els seus *elements principals són iguals a 1*.

Si una matriu escalonada principal P s'obté fent operacions elementals sobre la matriu A, direm que P és una forma escalonada principal de A.

Definició

Una matriu és escalonada reduïda si és *escalonada principal* i *tots els elements situats per damunt dels uns principals són nuls*.

Si una matriu escalonada reduïda R s'obté fent operacions elementals sobre la matriu A, direm que R és una forma escalonada reduïda de A.

Exemple 1

La següent matriu és escalonada, però no és escalonada principal (i, per tant, tampoc és escalonada reduïda):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Els elements assenyalats en roig són els elements principals.

Exemple 2

La següent matriu és escalonada principal, però no és escalonada reduïda (hi ha elements no nuls, assenyalats en verd, por damunt dels uns principals):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3

La següent matriu és escalonada reduïda ja que, a més de ser escalonada, els elements principals són iguals a 1 i tots els elements situats per damunt d'aquestos (assenyalats en blau) són zeros:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 4

Les matrius

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

són, respectivament, formes escalonada, escalonada principal i escalonada reduïda de la matriu

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Equivalència (per files) de matrius

Definició

Dues matrius A i B de les mateixes dimensiones es diuen *equivalents per files* si B pot obtenir-se a partir d'A mitjançant l'aplicació successiva d'operacions elementals (per files).

Una matriu té moltes formes escalonades, i pot tenir diverses formes escalonades principals, però la forma escalonada reduïda és única. En altres paraules:

Propietat

Qualsevol matriu A és equivalent (per files) a una única matriu escalonada reduïda, *la forma escalonada reduïda* de A.

Objectiu

OBSERVACIÓ: Dos sistemes d'equacions lineals amb matrius ampliades equivalents per files són sistemes equivalents (es a dir, tenen les mateixes solucions).

Objectiu

Donada la matriu ampliada d'un sistema d'equacions, trobar-ne una equivalent que siga escalonada, escalonada principal o escalonada reduïda, per a resoldre'l de manera més senzilla.

1 Sistemes d'equacions lineals

2 Matrius escalonades

3 Matrius elementals

4 Algorisme de Gauss-Jordan
- Aplicació a la resolució de sistemes

5 Algorisme de Gauss

Matrius elementals

Definició

Les matrius elementals són aquelles que s'obtenen efectuant una operació elemental (per files) sobre una matriu identitat.

TIPUS DE MATRIUS ELEMENTALS:

- Tipus 1: E_{ij} és la matriu que resulta de permutar les files i i j de la matriu identitat.
- Tipus 2: $E_i(\alpha)$ és la matriu que resulta de multiplicar la fila i de la matriu identitat per un escalar no nul α.
- Tipus 3: $E_{ij}(\alpha)$ és la matriu que resulta de sumar, a la fila i de la matriu identitat, la fila j multiplicada per α ($i \neq j$).

Exemples de matrius elementals

Exemples en $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

$$E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2(1/5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observació interessant

La matriu $E_{ij}(\alpha)$ s'obté substituint per α, en la matriu identitat, el zero que apareix en el lloc (i, j).

Importància de les matrius elementals

Propietat

Siga A una matriu $m \times n$ i E una matriu elemental d'ordre m. Aleshores la matriu producte EA és igual a la matriu que resulta d'aplicar a A la operació elemental corresponent a E.

Exemple: Considerem la matriu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ i la matriu elemental $E_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Aleshores:

$$E_{21}(2)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1 Sistemes d'equacions lineals

2 Matrius escalonades

3 Matrius elementals

4 Algorisme de Gauss-Jordan
- Aplicació a la resolució de sistemes

5 Algorisme de Gauss

Algorisme de Gauss-Jordan

En què consisteix?

El mètode o algorisme de Gauss-Jordan és un procés que permet transformar una matriu qualsevol en un altra equivalent (mitjançant operacions elementals) que siga escalonada reduïda.

Si apliquem aquest procés a la matriu ampliada d'un sistema d'equacions, veurem que és molt senzill esbrinar si és o no compatible i, en cas de que ho siga, resoldre'l.

Algorisme de Gauss-Jordan: Notació

Definició

Direm que una fila de la matriu A està *pivotada* si la submatriu de A formada per les primeres columnes de A fins la que conté el primer element no nul és escalonada.

Exemples:

La matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

té les dues primeres files pivotades, però la tercera i la quarta no ho estan.

La matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

té totes les files pivotades i, per tant, és escalonada.

Algorisme de Gauss-Jordan

Siga $S = A$. Fins que S siga escalonada

Pas 1 Entre totes les files no nul·les no pivotades de S, elegir la que tinga el primer element no nul més a l'esquerra. Si n'hi ha més d'una, elegir-ne una qualsevol. Aquesta és la *fila pivot*. El seu primer element no nul és el *pivot*.

Pas 2 Si la fila pivot no és la primera entre les no pivotades, intercanviar-les (operacions elementals del tipus 1).

Pas 3 Anul·lar els elements situats per baix del pivot mitjançant operacions del tipus 3.

Fi (fins que)

S `és una forma escalonada de` A

Siga $P = S$.

Pas 4 Dividir cada fila no nul·la pel seu primer element no nul (operació elemental del tipus 2).

P `és una forma escalonada principal de` A

Siga $R = P$. Des del darrer pivot de R fins el segon

Pas 5 Anul·lar els elements situats per damunt del pivot mitjançant operacions elementals del tipus 3.

Fi (des de)

R `és la forma escalonada reduïda de` A

Algorisme de Gauss-Jordan

En altres paraules, el procediment per a l'obtenció de la forma escalonada reduïda d'una matriu és el següent:

Escalonament: S'elegeix un "pivot" (pas 1) i es situa en la primera fila (pas 2) (utilitzant, si cal, operacions elementals de tipus permutació o tipus 1) . "Es fan zeros" tots els elements situats per baix del pivot, mitjançant operacions elementals de tipus 3 (pas 3). Es repeteix el procés en les següents files, fins obtenir una matriu escalonada.

Normalització: Es divideix cada fila no nul·la pel seu element principal, per a aconseguir que tots els elements principals siguen iguals a 1 (pas 4).

Reducció: Mitjançant operacions elementals de tipus 3, s'aconsegueix que els elements situats per damunt (en les corresponents columnes) dels uns principals siguen zeros (pas 5).

Exemple 1: escalonament

Considerem la següent matriu i anem a aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan per a calcular la seua forma escalonada reduïda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Elegirem com a "pivot" el primer element no nul (per la esquerra) de la primera fila (es a dir, 1) per a "fer zeros" en els elements de la seua columna situats per baix d'ell. Per a fer-ho restarem a la segona fila tres vegades la primera , i a la tercera fila dues vegades la primera (operacions elementals de tipus 3). Açò equival a pre-multiplicar la matriu donada per les matrius elementals corresponents.

$$E_{31}(-2)E_{21}(-3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{bmatrix}$$

Exemple 1: escalonament

Ara elegirem com a “pivot” el primer element no nul (per l’esquerra) de la segona fila (és a dir, 3) per a “fer zeros” en els elements de la seua columna situats per baix d’ell. Per a fer-ho, restarem a la tercera fila, la segona multiplicada per $2/3$ (operació elemental de tipus 3).

$$E_{32}(-2/3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriu obtinguda ja és escalonada.

Exemple 1: normalització

Per a convertir la matriu escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

en escalonada principal dividim les files 2 i 3 entre els seus elements principals.

$$E_3(3)E_2(1/3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -11/3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriu obtinguda és escalonada principal.

Exemple 1: reducció

Per a convertir la matriu escalonada principal anterior en escalonada reduïda, efectuem les operacions elementals de tipus 3 pertinents, considerant com a primer "pivot" el 1 principal de la tercera fila, per a "fer zeros" en les posicions assenyalades en blau.

$$E_{13}(-2)E_{23}(11/3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -11/3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Per a "fer un zero" en la posició ocupada pel 1 assenyalat en blau hem de considerar com a "pivot" l'u principal de la segona fila i hem de restar-li, a la primera fila, la segona.

$$E_{12}(-1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriu obtinguda és ja la forma escalonada reduïda de la matriu inicial.

Exemple 2

Anem a calcular la forma escalonada reduïda de la matriu A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Intercanviem la primera i la segona fila:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Fem ara zeros per baix del pivot de la primera fila :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Exemple 2

I ara fem zeros per baix del pivot de la segona fila:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(5/2)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquesta és una forma escalonada de A. Multipliquem ara la primera equació per $1/2$, la segona per $-1/2$ i la tercera per 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_3(2)E_2(-1/2)E_1(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aquesta és una forma escalonada principal de A.

Exemple 2

Anem a fer zeros ara per damunt dels uns principals, començant pel darrer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{13}(6)E_{23}(7/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{12}(5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aquesta és la forma escalonada reduïda de A.

Aplicació de Gauss-Jordan a la resolució de sistemes

Considerem un sistema d'equacions lineals amb matriu ampliada $[A|b]$. Aplicarem l'algorisme de Gauss-Jordan per a calcular la forma escalonada reduïda de $[A|b]$. Si R és aquesta forma escalonada reduïda, aleshores el sistema original és equivalent al sistema que té com a matriu ampliada R.

Per a resoldre aquest sistema, anomenarem:

Definició

Les variables associades als uns principals de la forma escalonada reduïda de $[A|b]$ s'anomenen variables principals.
Les que no són principals s'anomenen variables lliures.

Aplicació de Gauss-Jordan a la resolució de sistemes

Discussió i resolució d'un sistema a partir de la forma escalonada reduïda

Siga R la forma escalonada reduïda de la matriu ampliada d'un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$

- si R té algun 1 principal a la darrera columna, el sistema és incompatible, perquè conté l'equació

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1;$$

- En cas contrari, el sistema és compatible i:
  - Si totes les variables són principals, el sistema és compatible determinat.
  - Si hi ha alguna variable lliure, el sistema és compatible indeterminat i es resol aïllant les variables principals, passant totes les variables lliures al segon membre de les equacions, i substituint-les per paràmetres.

Exemple

Considerem el següent sistema de equacions:

$$\begin{cases} 3x + 6y - 5z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$$

La seua matriu ampliada és:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

En un exemple anterior (exemple 1) hem vist que la seua forma escalonada reduïda es la següent:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Observem que totes les variables són principals.

Exemple

Les equacions associades a aquesta matriu són:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat que té com a solució única

$$x = 1, \; y = 2, \; z = 3.$$

Exemple

Considerem el següent sistema de equacions:

$$\begin{cases} -2x_3 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

La seua matriu ampliada és:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

En un exemple anterior (exemple 2) hem vist que la seua forma escalonada reduïda es la següent:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

donçs les variables x_1, x_3, x_5 són principals i x_2, x_4 són lliures.

Exemple

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

El sistema és compatible indeterminat i la solució general és

$$x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4, \quad x_3 = 1, \quad x_5 = 2$$

o, en forma paramètrica,

$$x_1 = 7 - 2\lambda - 3\mu, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \mu, \quad x_5 = 2.$$

Rang de una matriu

La unicitat de la forma escalonada reduïda ens permet donar la següent definició:

Definició

Anomenem *rang* d'una matriu A, denotat per rang A al nombre de files no nul·les de la seua forma escalonada reduïda (és a dir, al nombre d'uns principals).

OBSERVACIÓ IMPORTANT: Del mètode per a l'obtenció de la forma escalonada reduïda es dedueix que el rang d'una matriu A coincideix amb el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent (per files) a A.

Teorema de Rouché-Frobenius

Les observacions anteriors es sintetitzen en el següent teorema, que permet classificar un sistema d'equacions lineals per simple inspecció dels rangs de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada:

Teorema de Rouché-Frobenius

Siguen A i $[A|b]$ les matrius de coeficients i ampliada, respectivament, d'un sistema d'equacions lineals.

- El sistema és compatible si i sols si $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$.
- Si és compatible, el sistema és compatible determinat si i només si $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) =$ nombre d'incògnites.

1 Sistemes d'equacions lineals

2 Matrius escalonades

3 Matrius elementals

4 Algorisme de Gauss-Jordan
- Aplicació a la resolució de sistemes

5 Algorisme de Gauss

Algorisme de Gauss

En què consisteix?

El mètode o algorisme de Gauss és un procediment que permet transformar una matriu qualsevol en un altra equivalent a ella (mitjançant operacions elementals) que siga escalonada.

Consisteix a aplicar els tres primers passos (escalonament) de l'algorisme de Gauss-Jordan que ja hem descrit.

Si apliquem aquest procés a la matriu ampliada d'un sistema d'equacions, serà immediat determinar si és o no compatible.

Si és compatible, a partir de les equacions representades per la matriu escalonada obtinguda, i mitjançant substitució regressiva, resulta senzill obtenir l'expressió paramètrica de les solucions del sistema d'equacions.

Algorisme de Gauss

Anem a recordar els passos de l'algorisme:

Algorisme de Gauss

Siga $S = A$. Fins que S siga escalonada

Pas 1 Entre totes les files no nul·les no pivotades de S, elegiu la que tinga el primer element no nul més a l'esquerra. Si n'hi ha més d'una, elegiu-ne una qualsevol. Aquesta és la *fila pivot*. El seu primer element no nul és el *pivot*.

Pas 2 Si la fila pivot no és la primera entre les no pivotades, intercanvieu-les (operacions elementals del tipus 1).

Pas 3 Anul·leu els elements situats per baix del pivot mitjançant operacions del tipus 3.

Fi (fins que)

S `és una forma escalonada de` A

En qualsevol moment del procés podeu fer una operació elemental de tipus 2 (escalat). En particular, si voleu obtenir una forma escalonada principal, al final del procés dividiu totes les files no nul·les pels seus pivots (Pas 4).

Algorisme de substitució regressiva

Aquest algorisme resol el sistema lineal (compatible) $S\vec{x} = \vec{b}$ quan S és una matriu escalonada.

Algorisme de substitució regressiva

Pas 1: *Aïlleu la incògnita principal en cada equació.*

Pas 2: *Substituïu cada equació en totes les anteriors.*

Pas 3: *Substituïu les incògnites lliures per paràmetres.*

Exemple 1

Considerem el següent sistema de 3 equacions amb 3 incògnites:

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 3x+6y-5z=0 \\ 2x+4y-3z=1 \end{cases}$$

La seua matriu ampliada és la següent:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

i aplicant l'algorisme de Gauss obtenim la següent matriu escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right]$$

Exemple 1

El sistema de equacions que té a la matriu obtinguda com a matriu ampliada es:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ \quad 3y - 11z = -27 \\ \qquad \frac{1}{3}z = 1 \end{cases}$$

Anem a fer servir l'algorisme de substitució regressiva per a resoldre'l:

Pas 1 Aïllem la variable principal en cada equació

$$\begin{cases} x = 9 - y - 2z \\ y = \dfrac{1}{3}(-27 + 11z) = -9 + \dfrac{11}{3}z \\ z = 3 \end{cases}$$

Exemple 1

Pas 2 Substituïm en cada equació totes les anteriors:

$$\begin{cases} x = 9 - y - 2z = 9 - 2 - 6 \quad = 1 \\ y = -9 + \dfrac{11}{3}z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Totes les variables són principals (no s'aplica el pas 3). Per tant, el sistema d'equacions té una única solució (es a dir, és compatible determinat), que és la següent:

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

Exemple 2

Considerem ara el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ -2x + y \quad = -3 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

La seua matriu ampliada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Elegim 1 com a "pivot" i "fem zeros" per baix d'ell (en la seua columna).

$$E_{31}(-3)E_{21}(2)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \end{array}\right]$$

Exemple 2

Observem que, per a obtenir una matriu més senzilla, podem multiplicar la segona fila per $1/5$ i la tercera per $1/8$ (operacions elementals de tipus 2):

$$E_3(1/8)E_2(1/5)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Considerem ara el primer element de la segona fila (és a dir, 1) com a “pivot” i “fem un zero” per baix d’ell sumant-li, a la tercera fila, la segona.

$$E_{32}(1)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriu obtinguda ja és escalonada.

Exemple 2

El sistema d'equacions que té la matriu obtinguda com a matriu ampliada es:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ \qquad\ \ y - 2z = 1 \end{cases}$$

De la darrera equació podem aïllar y en funció de z: $y = 1 + 2z$. Substituint en la primera equació i aïllant x obtenim: $x = 2 + z$. L'expressió paramètrica de les solucions és:

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

amb $\alpha \in \mathbb{R}$. El sistema es, per tant, compatible indeterminat (té infinites solucions).

Exemple 3

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \\ x - 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

Escalonant la seua matriu ampliada s'obté:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

La darrera equació del sistema corresponent a aquesta matriu és $0 = 6$, per tant aquest és un sistema incompatible (sense solucions).