# DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (etsinf)

**AMA - Segundo Parcial  07-01-2020  Duración prevista: 2h**

---

**1. a)**$_{(1p)}$ Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones $a_n$ y $b_n$ definidas por

$$a_n = n \cdot \sqrt{n}$$
$$b_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n-1}$$

**b)**$_{(1p)}$ Analiza la diferencia entre términos consecutivos y comprueba que es estrictamente creciente la sucesión

$$\left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{n+n} \right\}$$

---

**a)** Para comparar el orden de magnitud necesitamos calcular el límite del cociente

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n \cdot \sqrt{n}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n-1}} = \left( \text{es una indeterminación del tipo } \tfrac{+\infty}{+\infty} \right)$$

Como la sucesión $\{b_n\}$ es creciente, podemos usar el criterio de Stolz

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}{\left(1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n-1}\right) - \left(1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}\right)} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

y para resolver este último límite multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\left((n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}\right)\left((n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\left((n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}\right)} = \lim \frac{(n+1)^3 - n^3}{\sqrt{n}\left((n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}\right)} = ... = \lim \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

Como alternativa, si ordenamos las potencias de $n$ y simplificamos antes de usar el conjugado,

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 + \lim \frac{n\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1 + \lim \frac{n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}} =$$
$$= 1 + \lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 1 + \lim \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = 1 + \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Una vez probado que $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R} - \{0\}$ podemos afirmar que las sucesiones tienen el mismo orden de magnitud.

**b)** Los primeros términos de la sucesión son:

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad , \quad a_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \quad , \quad a_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

y si calculamos las diferencias entre términos consecutivos para los primeros valores de $n$ obtenemos

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 - a_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \quad , \quad a_4 - a_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \quad , \quad a_5 - a_4 = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$$

En el caso general:

$$a_{n+1} - a_n = \left( \frac{1}{(n+1)+1} + ... + \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \right) - \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \right) =$$
$$= \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

y por tanto, al ser $a_{n+1} > a_n$ en todos los casos, la sucesión es creciente.

**2.** Considera la recurrencia lineal de segundo orden definida por

$$a_{n+2} = a_n + 4n$$

**a)**$_{(1\mathrm{p})}$ Encuentra la solución general de la recurrencia homogénea asociada a ella.

**b)**$_{(1\mathrm{p})}$ Determina los valores de $A$ y $B$ necesarios para que $a_n^P = An^2 + Bn$ sea una solución particular de la recurrencia completa.

**c)**$_{(1\mathrm{p})}$ Deduce de a) y b) la solución correspondiente a las condiciones iniciales $a_1 = 3$ y $a_2 = 2$.

---

**a)** La recurrencia homogénea correspondiente es

$$a_{n+2} - a_n = 0$$

y su ecuación característica

$$r^2 - 1 = 0$$

que tiene por soluciones $r = 1$ y $r = -1$.

Por tanto, la solución general de la recurrencia homogéna puede escribirse en la forma

$$a_n^H = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-1)^n = c_1 + c_2 \cdot (-1)^n \qquad ; \qquad \boxed{a_n^H = c_1 + c_2 \cdot (-1)^n}$$

**b)** Para que $a_n^P = An^2 + Bn$ sea solución de la ecuación completa, debe de verificarse la igualdad $a_{n+2}^P - a_n^P = 4n$

$$\left.\begin{array}{r} a_n^P = An^2 + Bn \\ a_{n+2}^P = A(n+2)^2 + B(n+2) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_{n+2}^P - a_n^P = 4An + 2B + 4A$$

por lo que la iguialdad se cumple si

$$4An + 2B + 4A = 4n \quad \Leftrightarrow \quad 4(A-1)n + 2(B+2A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} A = 1 \\ B = -2 \end{array} \quad ; \quad \boxed{a_n^P = n^2 - 2n}$$

**c)** Usando los dos apartedos anteriores,

$$a_n = a_n^H + a_n^P = c_1 + c_2 \cdot (-1)^n + n^2 - 2n$$

y para que se cumplan las condiciones iniciales el valor de $a_1$ debe de ser 3 y el de $a_2$ debe de ser 2

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = c_1 - c_2 + 1 - 2 = 3 \\ a_2 = c_1 + c_2 + 4 - 4 = 2 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} c_1 = 3 \\ c_2 = -1 \end{array} \quad ; \quad \boxed{a_n = 3 - (-1)^n + n^2 - 2n}$$

---

**3. a)**$_{(1\mathrm{p})}$ Previa descomposición en fracciones simples, calcula la suma exacta de la serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{3}{n^2 + 3n + 2}$$

**b)**$_{(1\mathrm{p})}$ Determina el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+2}}{4^{n+1}}$$

y calcula su suma para los valores de $x$ en dicho intervalo.

---

**a)**

$$\sum_{n\geq 2}\frac{3}{n^2+3n+2}=\sum_{n\geq 2}\frac{3}{(n+2)(n+1)}=\sum_{n\geq 2}\left(\frac{3}{n+1}-\frac{3}{n+2}\right)$$

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{3}{n^2+3n+2}=\left(\frac{3}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{6}\right)+...+\left(\frac{3}{N+1}-\frac{3}{N+2}\right)=\frac{3}{3}-\frac{3}{N+2}=1-\frac{3}{N+2}$$

$$S=\lim S_N=\lim\left(1-\frac{3}{N+2}\right)=1-0=1$$

**b)** Se trata de una serie geométrica ya que

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+2}}{4^{n+1}}=\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\cdot\left(x^2\right)^n\cdot x^2}{4\cdot 4^n}=\sum_{n\geq 2}\frac{x^2}{4}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^n=\frac{x^2}{4}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^n$$

La razón es $r=\dfrac{-x^2}{4}$ y, en consecuencia, el intervalo de convergencia es $]-2,2[$

$$|r|<1\quad\Leftrightarrow\quad\left|\frac{-x^2}{4}\right|<1\quad\Leftrightarrow\quad x^2<4\quad\Leftrightarrow\quad x\in\,]-2,2[$$

Para los valores de $x$ en el intervalo de convergencia, la serie es sumable y su suma es

$$\frac{x^2}{4}\frac{\left(\frac{-x^2}{4}\right)^2}{1-\dfrac{-x^2}{4}}=\frac{x^2}{4}\frac{\dfrac{x^4}{4^2}}{1+\dfrac{x^2}{4}}=\frac{x^6}{16(4+x^2)}$$

demodo que

$$f(x)=\frac{x^6}{16(4+x^2)}\quad\text{para}\quad x\in\,]-2,2[$$

---

**4.** Considera la función definida como serie de potencias $f(x)=\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}$

**a)**$_{(1p)}$ Deriva $f(x)$ y suma la serie obtenida, para comprobar que $f(x)=\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$

**b)**$_{(1p)}$ Usando la serie obtenida en a) y el criterio de Leibniz, aproxima el valor de $f\left(\frac{-1}{9}\right)=\log(0.9)$ con un error menor que $10^{-6}$

**c)**$_{(1p)}$ A partir del desarrollo en serie de la función exponencial,

$$e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....$$

encuentra una serie de potencias, $g(x)$, para la función $\dfrac{e^x-1}{x}$. ¿Cuál es el valor de $g^{vi}(0)$?

---

$$f(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+....$$

**a)** Derivando tendremos

$$f'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{n\cdot x^{n-1}}{n}=\sum_{n\geq 1}x^{n-1}$$

y sumando la serie (geométrica de razón $x$) que hemos obtenido

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}$$

Integrando los dos miembros de la última igualdad y sustituyendo para $x = 0$

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) + C \quad \text{y} \quad C = f(0) = 0$$

por lo que

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

**b)** Si le damos a $x$ el valor $\dfrac{-1}{9}$ podemos, usando $f(x)$, expresar $\log(0.9)$ como la suma de una serie alternada

$$\log(0.9) = f\left(\frac{-1}{9}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{(\frac{-1}{9})^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}$$

y si usáramos esta serie para aproximar la suma mediante la suma parcial $S_N$

$$\log(0.9) \approx S_N = \frac{-1}{9} + \frac{1}{2\cdot 9^2} + \frac{-1}{3\cdot 9^3} + ... + \frac{(-1)^N}{N\cdot 9^N}$$

el error que cometeríamos vendrá dado por

$$E_N < \frac{1}{(N+1)\cdot 9^{N+1}}$$

Para conseguir que el error sea menor que $10^{-6}$ necesitamos que $N$ sea igual o superior a 5

$$\frac{1}{(N+1)\cdot 9^{N+1}} < 10^{-6} \qquad \Leftrightarrow \qquad (N+1)\cdot 9^{N+1} > 10^6 \qquad \Leftrightarrow \qquad N \geq 5$$

y la aproximación, tomando $N = 5$, sería

$$\log(0.9) \approx S_5 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{2\cdot 9^2} - \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{4\cdot 9^4} - \frac{1}{5\cdot 9^5} = -\frac{124429}{1180980} = -0.1053608020...$$

**c)** Restando 1 y dividiendo por $x$ en la serie de potencias la función exponencial obtenemos la de $g(x)$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ....$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + .... = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$$

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + .... = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Como el desarrollo en serie de potencias es único y las sumas parciales son los polinomios de McLaurin, el coeficiente de $x^6$ en el desarrollo tiene que ser $\dfrac{g^{vi}(0)}{6!}$

$$g(x) = ... + \frac{g^{vi}(0)}{6!}x^6 + ... \quad \Rightarrow \quad \frac{g^{vi}(0)}{6!} = \frac{1}{7!} \quad \Rightarrow \quad g^{vi}(0) = \frac{1}{7}$$

por lo cual, el valor pedido es $g^{vi}(0) = \dfrac{1}{7}$