Àlgebra (Grau en Enginyeria Informàtica)
Solucions dels exercicis de la lliçó 2
Robert Fuster

Exercici 2.1. *(Operacions amb matrius)*

Donades les matrius $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ *calculeu* $\mathsf{A}+\mathsf{B}$, $3\mathsf{A}$ *i* $\mathsf{A}-2\mathsf{B}$.

$$\mathsf{A}+\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$3\mathsf{A}+ = 3\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\mathsf{A}-2\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercici 2.2. *(Operacions amb vectors)*

Considerem els vectors de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = (1,-1,2), \vec{u}_2 = (0,1,-3), \vec{u}_3 = (-1,3,-8)$$

Calculeu (a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, *(b)* $3\vec{u}_3$ *i (c)* $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

(a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (1,-1,2) + (0,1,-3) = (1,0,-1)$

(b) $3\vec{u}_3 = 3(-1,3,-8) = (-3,9,-24)$

(c) $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (1,-1,2) - 2(0,1,-3) + (-1,3,-8) = (0,0,0)$

Exercici 2.3. *(Combinacions lineals)*

Expresseu, si és possible, les matrius $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *com a combinació lineal de les matrius* $\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. En el cas de A sí que és possible:

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3$$

Però la matriu B no és combinació lineal d'aquestes tres matrius, perquè, si ho fora,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 - \alpha_3 \end{bmatrix}$$

a la segona fila tenim les igualtats

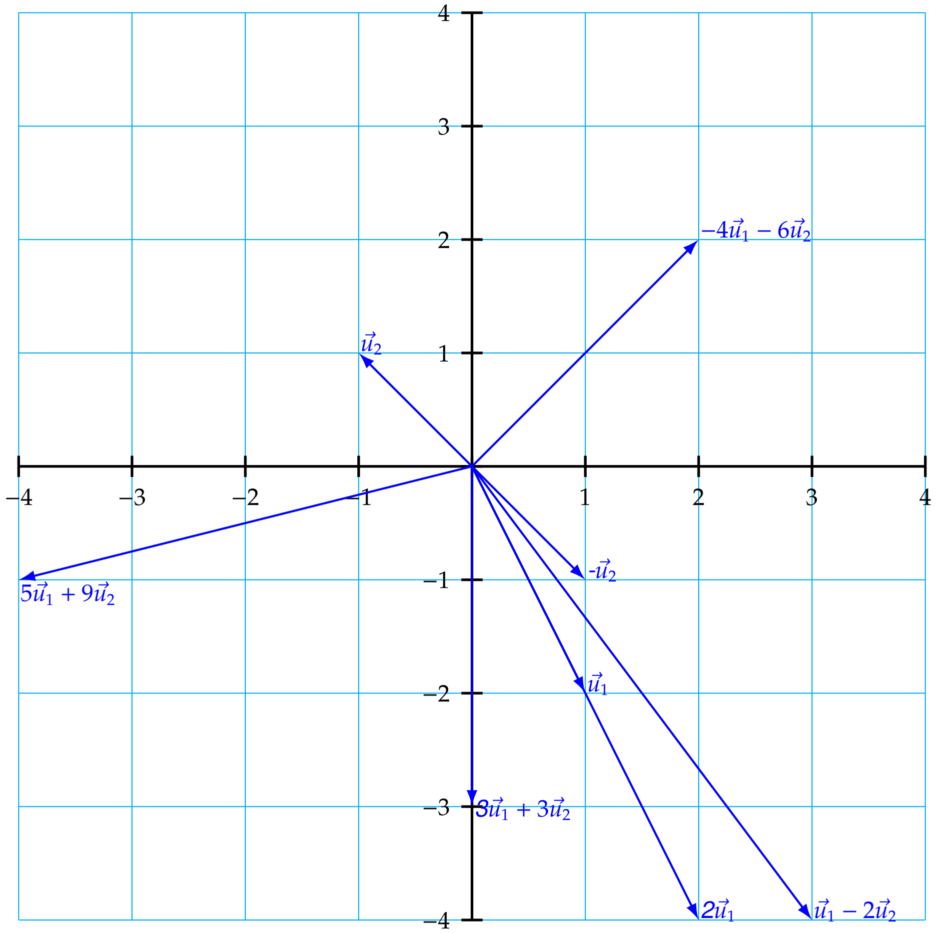
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 2$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = 2$$

així que $\alpha_2 = 2$ i $\alpha_3 = 0$ i, substituint a la primera fila,

$$\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{r} \alpha_1 = 2 \\ -\alpha_1 = 0 \end{array}$$

(contradicció).

Exercici 2.4. *(Representació gràfica dels vectors en $\mathbb{R}^2$)*
Siguen $\vec{u}_1 = (1, -2)$ i $\vec{u}_2 = (-1, 1)$. Representeu gràficament els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $2\vec{u}_1$, $-\vec{u}_2$, $3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$, $\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $5\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2$ i $-4\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2$.



Exercici 2.5. *(Combinacions lineals)*

(a) Proveu que qualsevol vector de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u} = (a, b)$, és combinació lineal de $\vec{u}_1 = (1, 1)$ i $\vec{u}_2 = (1, -1)$.

(b) És cert que qualsevol vector de $\mathbb{R}^3$ és combinació lineal de $(2, -1, -1)$, $(-1, 2, -1)$ i $(-1, -1, 2)$?

(a) $(a, b) = \dfrac{a+b}{2}(1, 1) + \dfrac{a-b}{2}(1, -1)$.

(b) Suposem que el vector (x, y, z) és combinació lineal d'aquests tres vectors,

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= x \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= y \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= z \end{aligned}$$

i, sumant aquestes tres igualtats,

$$0 = x + y + z$$

així que, si un vector (x, y, z) és combinació lineal d'aquests tres vectors, ha de complir l'equació $x + y + z = 0$. Llavors, no tots els vectors en són combinació. Per exemple, $(1, 1, 1)$ no ho és.

Exercici 2.6. *(Norma d'un vector)*
Calculeu les longituds dels vectors $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$, $\vec{u} = (3, 4)$ *i* $\vec{v} = (-1, 2)$.

(a) $\left\|\vec{e}_1\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

(b) $\left\|\vec{e}_2\right\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

(c) $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(d) $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Exercici 2.7. *(Angle entre dos vectors)*
Calculeu l'angle entre les següents parelles de vectors:

1. $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *i* $\vec{v} = (0, 1)$

   Les normes dels dos vectors són $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{3 + 1} = 2$ i $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{0 + 1} = 1$ i el producte escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$ així que el cosinus del angle que formen aquests dos vectors és

   $$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

   així que l'angle és $\pi/3$ (o 60º).

2. $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ *i* $\vec{v} = (2, 2)$

   $$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\|} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2 + 1 \cdot 2}{\sqrt{3 + 1}\sqrt{4 + 4}} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2}}$$

   En aquesta expressió pot ser difícil reconèixer l'angle, però si ens fixem que l'angle que formen aquests dos vectors amb l'horitzontal és $\pi/6$ i $\pi/4$ (30º i 45º), aleshores és fàcil veure que $\alpha = \pi/12$ (15º).

3. $\vec{u} = (1,2,3)$ *i* $\vec{v} = (1,2,6)$ *(ací podeu fer servir la calculadora)*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 6}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{1+4+36}} = \frac{23}{\sqrt{574}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{23}{\sqrt{574}} \approx 0{,}2838$$

4. $\vec{u} = (1,2,1,2)$ *i* $\vec{v} = (2,-1,-2,1)$

   En aquest cas $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ així que els dos vectors són ortogonals.

Exercici 2.8. *(**Conjunts ortogonals**)*

Digueu si els conjunts següents són ortogonals, ortonormals o cap de les dues coses.

1. $A = \{(1,1,1),(1,-1,0),(-1,-1,2)\}$
2. $B = \left\{\frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(-1,-1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)\right\}$
3. $C = \{(-1,1,1),(1,-1,2),(1,-1,-1)\}$

1. Si anomenem $\vec{a}_1 = (1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,0)$, $\vec{a}_3 = (-1,-1,2)$ els tres vectors del conjunt A, llavors els productes escalars entre aquests vectors són:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 &= 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 0\\ \vec{a}_1\cdot\vec{a}_3 &= 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 0\\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_3 &= 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 2 = 0\end{aligned}$$

   Per tant, el conjunt A és ortogonal. No és ortonormal, perquè, per exemple, la norma del vector $\vec{a}_1$ és $\|a_1\| = \sqrt{2}$, així que aquest vector no és unitari.

2. Posem $\vec{b}_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)$, $\vec{b}_3 = \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)$. Aquests tres vectors són unitaris, perque tots tenen com a norma $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$. A més a més, els productes escalars són

$$\begin{aligned}\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 &= \frac{1}{4}\Big(1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\Big) = 0\\ \vec{b}_1\cdot\vec{b}_3 &= \frac{1}{4}\Big(1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\Big) = 0\\ \vec{b}_2\cdot\vec{b}_3 &= \frac{1}{4}\Big((-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1)\Big) = 0\end{aligned}$$

   de manera que aquest conjunt és ortonormal.

3. Siguen $\vec{c}_1 = (-1,1,1)$, $\vec{c}_2 = (1,-1,2)$, $\vec{c}_3 = (1,-1,-1)\}$. El vector $\vec{c}_2$ és ortogonal a $\vec{c}_1$ i a $\vec{c}_3$, però això no implica que el conjunt C siga ortogonal, perquè $\vec{c}_1\cdot\vec{c}_3 = -3$. Per tant, el conjunt C no és ortogonal (i, en conseqüència, tampoc ortonormal).

Exercici 2.9. *Trobeu tots els vectors de* $\mathbb{R}^2$ *que són ortogonals a* $(1,2)$ *i interpreteu-los geomètricament.*
Un vector (x,y) és ortogonal a $(1,2)$ si el producte escalar $(x,y)\cdot(1,2)$ és zero, és a dir, si $x+2y = 0$ o, de manera equivalent, si $x = -2y$. Per tant, els vectors que són ortogonals a $(1,2)$ són tots els de la forma $\alpha(-2,1)$.

L'equació $x+2y = 0$ representa la recta perpendicular al vector $(1,2)$ que passa per l'origen.

Exercici 2.10. ***(Producte escalar complex)***

1. *Calculeu el producte escalar* $(1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}) \cdot (2, \mathrm{i})$.
2. *Comproveu que els vectors* $\vec{u} = (-2+3\mathrm{i}, 1+5\mathrm{i})$ *i* $\vec{v} = (1-\mathrm{i}, \mathrm{i})$ *són ortogonals.*

1. $(1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}) \cdot (2, \mathrm{i}) = \overline{(1+\mathrm{i})}2 + \overline{(1-\mathrm{i})}\mathrm{i} = (1-\mathrm{i})2 + (1+\mathrm{i})\mathrm{i} = 2-2\mathrm{i}-1+\mathrm{i} = 1-\mathrm{i}$

2. Hem de provar que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$:

$$\begin{aligned}(-2+3\mathrm{i}, 1+5\mathrm{i}) \cdot (1-\mathrm{i}, \mathrm{i}) &= \overline{(-2+3\mathrm{i})}(1-\mathrm{i}) + \overline{(1+5\mathrm{i})}\mathrm{i} \\ &= (-2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) + (1-5\mathrm{i})\mathrm{i} \\ &= -5-\mathrm{i}+5+\mathrm{i} \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercici 2.11. ***(Ortogonalitat entre vectors complexos)***
(a) Siguen $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *dos vectors de* $\mathbb{C}^n$*. Proveu que si* $\vec{u}$ *és ortogonal a* $\vec{v}$*, llavors* $\vec{v}$ *és ortogonal a* $\vec{u}$*. (b) Trobeu tots els vectors de* $\mathbb{C}^2$ *que són ortogonals al vector* $(1, \mathrm{i})$.

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n = 0 \iff \overline{\overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + \cdots + \overline{u_n}v_n} = 0 \iff \overline{v_1}u_1 + \overline{v_2}u_2 + \cdots + \overline{v_n}u_n = 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{u} = 0.$

(b) $(x, y) \perp (1, \mathrm{i}) \iff \overline{x} + \overline{y}\mathrm{i} = 0 \iff \overline{\overline{x} + \overline{y}\mathrm{i}} = 0 \iff x - y\mathrm{i} = 0 \iff x = y\mathrm{i}.$

Els vectors ortogonals a $(1, \mathrm{i})$ són tots els de la forma $\alpha(i, 1)$.

Exercici 2.12. ***(Vectors unitaris)***
Si $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *són vectors unitaris (de longitud 1), calculeu els productes escalars*

$$\vec{u} \cdot (-\vec{u}) \qquad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \qquad (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$$

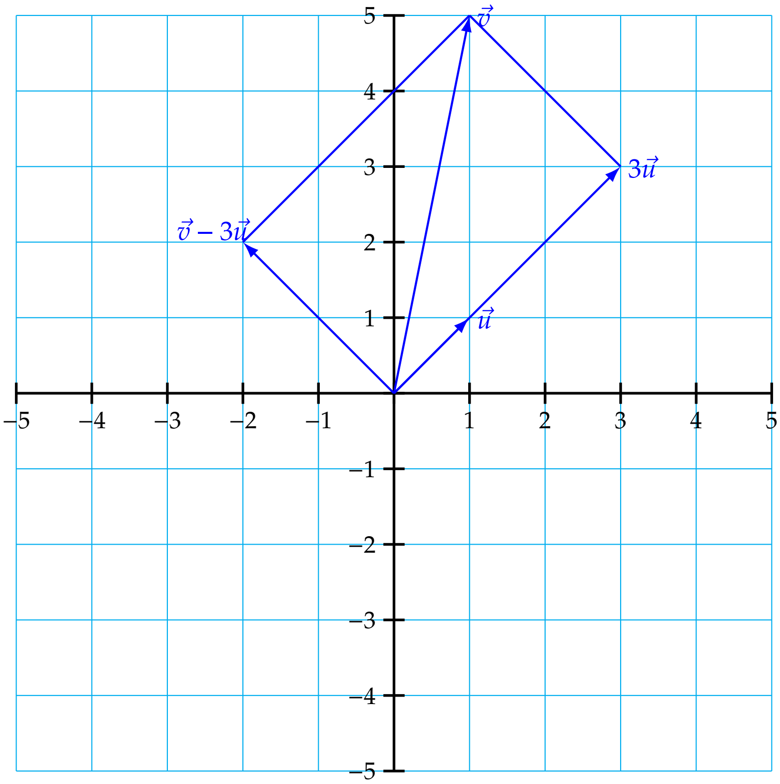
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (-\vec{u}) &= -\vec{u} \cdot \vec{u} = -1 \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 2 \\ (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 4\vec{v} \cdot \vec{v} = 5\end{aligned}$$

Exercici 2.13. ***(Projecció ortogonal)***
Donats els vectors $\vec{u} = (1, 1)$ *i* $\vec{v} = (1, 5)$*, trobeu el valor de* α *perquè el vector* $\vec{v} - \alpha\vec{u}$ *siga ortogonal a* $\vec{u}$*. Representeu sobre un diagrama cartesià els vectors* $\vec{u}$*,* $\vec{v}$*,* $\vec{v} - \alpha\vec{u}$ *i* $\alpha\vec{u}$*.*

$$(\vec{v} - \alpha\vec{u}) \perp \vec{u} \Leftrightarrow (\vec{v} - \alpha\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|u\|^2}$$

Així que

$$\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|u\|^2} = \frac{(1,5) \cdot (1,1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$


$\vec{v}$
$3\vec{u}$
$\vec{v}-3\vec{u}$
$\vec{u}$
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5