Problemes del Tema 5: Diagonalització de matrius

1. Calcula els valors i vectors propis de les següents matrius:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Demostra que la matriu $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ no té valors propis reals quan $0 < \alpha < \pi$.

3. Esbrina quines de les matrius del problema 1 són diagonalitzables com a matrius reals i com a matrius complexes.

4. Estudia per a quins valors de $a \in \mathbb{R}$ són diagonalitzables les següents matrius, com a matrius reals:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & -a & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{bmatrix}$$

5. Determina els valors de a i b necessaris perquè la següent matriu siga diagonalitzable:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

   En tal cas, troba una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de A.

6. Obtín una matriu real d'ordre 3 que tinga com a valors propis $\lambda_1 = 2$, amb multiplicitat doble, i $\lambda_2 = 5$ amb multiplicitat simple, sent els subespais propis corresponents $S_1 = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$ i $S_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

7. Comprova que la següent matriu real és diagonalitzable i calcula dues matrius P i D que satisfacen la igualtat $A = PDP^{-1}$. Calcula també les potències n-èsimes de la matriu A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Calcula els valors propis de A^9 sent

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$