Anàlisi Matemàtica

UT5 - Sèries Numèriques

◊ AMA

Contingut

Conceptes generals
- Sumes parcials. Convergència i divergència
- La sèrie harmònica. Generalització

Sèries numèriques de suma exacta
- Geomètriques (Sumes finites i infinites)
- Telescòpiques i reductibles a telescòpiques

Criteris de Convergència
- Condició del residu
- Criteri de Leibniz per a sèries alternades

Obtenció d'algunes sumes aproximades

Objectius

Conceptes generals (1S)
- Identificar la successió de sumes parcials associada a una sèrie
- Distingir entre sèries convergents i divergents

Sèries numèriques de suma exacta (1S)
- Trobar la suma parcial de geomètriques
- Sumar geomètriques i telescòpiques

Obtenció de sumes aproximades (1S)
- Conéixer el criteri de Leibniz per a sèries alternades
- Aproximar la suma d'algunes sèries

Conceptes generals

Problema: Donada la successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} + a_{101} + \cdots = ? \quad (\text{suma de } \textbf{tots} \text{ els seus termes})$$

La solució no és evident: $s = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ?$

$$s = (1+(-1)) + (1+(-1)) + (1+(-1)) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$$s = 1 + ((-1)+1) + ((-1)+1) + ((-1)+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

$$s - 1 = (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots = -s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}$$

Associativitat, commutabilitat, etc... no són (en general) vàlides

- ♦ Quan podem sumar?
- ♦ Com sumem quan és possible?

$1+2+3+\cdots = ?$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = ?$

Sumes parcials. Convergència i divergència:

A partir de la successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definim la de *sumes parcials*

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Recurrentment, $\begin{cases} s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \\ s_1 = a_1 \end{cases}$

Definim la *sèrie numèrica de terme general* a_n per

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n\geq 1} a_n = \lim s_n = \sum a_n \text{ (notació simplificada)}$$

La serie convergeix/divergeix quan ho fa la successió $\{s_n\}$

La sèrie suma $s = \lim s_n$ (quan existeix s i és real)

Casos de divergència interessants: $\sum_{n\geq 1} a_n = \pm\infty$, segons siga $s_n \to \pm\infty$

Exemple: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$

$\{s_n\} = \{1,0,1,0,1,0,1,0,\ldots\}$ (divergent)

La sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ és divergent (oscil.lant, no parlem de suma)

Exemple: $\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots$

$\{s_n\} = \{1,4,9,16,25,36,\ldots\} = \{n^2\}$ (divergent a $+\infty$)

La sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)$ divergeix a $+\infty$ (podem dir que suma $+\infty$)

Exemple: $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$

$\{s_n\} = \{0,0,0,0,0,\ldots\} = \{0\}$ (convergeix a 0)

La sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ convergeix i la seua suma és 0

Exemple: $\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots$

$$s_1 = \log\left(\frac{2}{1}\right) = \log(2) \ , \ s_2 = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\right) = \log(3) \ , \ \ldots$$

$$s_n = \log\left(\frac{2}{1}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

$\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ divergeix a $+\infty$

Exemple: $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$

$$\{s_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \to 1$$

La sèrie $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ convergeix i la seua suma és 1

Propietats:

- $\sum_{n\geq p} a_n$ té el mateix caràcter que $\sum_{n\geq p} a_n$ (encara que diferent suma)
- $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n \ ; \ \sum (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \left(\sum a_n\right) \ , \ \alpha \neq 0$
- En sèries convergents podem agrupar termes (posar claus, no reordenar)
- $\sum |a_n|$ convergent $\Rightarrow \sum a_n$ convergent

Sèrie harmónica (divergent)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots \qquad \begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_n \text{ és creixent } \left(s_{n+1}-s_n=\frac{1}{n+1}>0\right) \\ s_n \text{ no està acotada superiorment} \end{array}\right\} \Rightarrow \{s_n\}\to+\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} \text{ divergeix } (\text{a } +\infty)$$

$$\boxed{\text{Justificació: } \lim \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log(n)}=1 \Rightarrow s_n\approx\log(n) \Rightarrow \{s_n\}\to+\infty}$$

(UT5)

Sèrie harmònica generalitzada ($\alpha>0$)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{divergeix si } \alpha\leq 1 \\ \text{convergeix si } \alpha>1 \end{cases}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[7]{n^4}}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{4/7}} \ ; \ \alpha=\frac{4}{7}<1 \ ; \ \text{divergent}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{7/4}} \ ; \ \alpha=\frac{7}{4}>1 \ ; \ \text{convergent}$$

Sèries numèriques de suma exacta

Sumarem (en forma exacta) dues tipus de sèries:

(A més de les que siguen reductibles a elles aplicant propietats generals)

- Geomètriques: $\sum_{n\geq p} a_n$ quan $\{a_n\}$ és una progressió geomètrica

  Estudiarem $\sum_{n\geq p} r^n=r^p+r^{p+1}+\cdots+r^{p+k}+\cdots=r^p\cdot\left(1+r+r^2+\cdots+r^k+\cdots\right)$

- Telescòpiques: $\sum_{n\geq p} a_n$ si podem expressar a_n com $a_n=\pm(b_{n+1}-b_n)$

Sèrie geomètrica: $\sum_{n\geq p} r^n=r^p+r^{p+1}+r^{p+2}+\cdots+r^{p+k}+\cdots \quad (r=\text{raó})$

$$s_n=r^p+r^{p+1}+r^{p+2}+\cdots+r^{p+n-1}$$

$$r\cdot s_n=r^{p+1}+r^{p+2}+r^{p+3}+\cdots+r^{p+n}$$

Restant, $\left.\begin{array}{l} s_n-r\cdot s_n=r^p-r^{p+n} \\ (1-r)\cdot s_n=r^p-r^{p+n}\end{array}\right\} \Rightarrow s_n=\begin{cases}\dfrac{r^p-r^{p+n}}{1-r}, \text{ si } r\neq 1 \\ n, \text{ si } r=1\end{cases}$

Prenent límits, $\lim s_n=s=\dfrac{r^p}{1-r}$ si i només si $|r|<1$

En consequència,

$$\boxed{\text{La sèrie convergeix si i només si } |r|<1 \text{ i } s=\frac{r^p}{1-r}}$$

Exemple: $\sum_{n\geq 3}\dfrac{6^n}{2\cdot 5^{n+1}}=\dfrac{1}{10}\sum_{n\geq 3}\left(\dfrac{6}{5}\right)^n$, geomètrica amb $r=\dfrac{6}{5}>1$ (divergeix)

Exemple: $\sum_{n\geq 2}\dfrac{(-2)^{n+1}}{5\cdot 3^{n-1}} = -\dfrac{6}{5}\sum_{n\geq 2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$, geomètrica amb $r=-\dfrac{2}{3}$ (convergeix)

$$s=-\frac{6}{5}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{8}{25}$$

Exemple: $\sum_{n\geq 3}\dfrac{2^{3n+1}}{5\cdot 3^{2n-1}}=\dfrac{6}{5}\sum_{n\geq 3}\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^n$, geomètrica amb $r=\dfrac{8}{9}$ (convergeix)

$$s=\frac{6}{5}\cdot\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^3}{1-\frac{8}{9}}=\frac{1024}{135}$$

Exercici : Classificar (i sumar, en el seu cas) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n \cdot (\alpha+1)^n}{6^{n+1}}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$

Podem reescriure la sèrie en la forma $\displaystyle \frac{1}{6}\sum_{n\ge 1}\left(-\frac{(\alpha+1)}{6}\right)^n$

En conseqüència, és geomètrica de raó $r = -\dfrac{(\alpha+1)}{6}$

D'ací, la sèrie convergeix si i només si $\dfrac{|\alpha+1|}{6} < 1 \Leftrightarrow \alpha \in \left]-7,5\right[$ i suma

$$\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n \cdot (\alpha+1)^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6}\left(\frac{-\frac{(\alpha+1)}{6}}{1+\frac{(\alpha+1)}{6}}\right) = -\frac{(\alpha+1)}{6(\alpha+7)}$$

Exemple: Corba de Koch (floc de neu)

Sèries Telescòpiques: $\displaystyle\sum_{n\ge p} a_n$ amb $a_n = b_{n+1} - b_n$ ó $a_n = b_n - b_{n+1}$

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n = \pm(b_{n+1} - b_p)$$

$$s = \lim s_n = \pm \lim(b_{n+1} - b_p)$$

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ convergeix i suma $\dfrac{1}{2}$

$$s_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\{s_n\} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right\} \to \frac{1}{2} = s$$

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\ge 4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ convergeix i suma $\dfrac{1}{5}$

$$\{s_n\} = \left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{n+2}\right\} \to \frac{1}{5} = s$$

Sèries reductibles a Telescòpiques

Algunes sèries del tipus $\displaystyle\sum_{n\ge p}\frac{P(n)}{Q(n)}$ amb $grad(Q(n)) \ge grad(P(n)) + 2$

poden transformar-se en telescòpiques, prèvia descomposició en fraccions simples

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\left(\frac{4}{4n^2-1}\right)$ convergeix i suma 2

$$\frac{4}{4n^2-1} = \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$$

$$s_n = \left(2 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}\right) = 2 - \frac{2}{2n+1}$$

$$\{s_n\} = \left\{2 - \frac{2}{2n+1}\right\} \to 2 = s$$

Criteris de convergència

1) Condició del residu: $\sum a_n$ convergent $\Rightarrow \lim a_n = 0$

$\boxed{\lim a_n \ne 0 \;\Rightarrow\; \sum a_n \text{ divergent}}$. La sèrie $\displaystyle\sum \frac{3^n}{2^n+1}$ divergeix ja que $\displaystyle\lim \frac{3^n}{2^n+1} = +\infty$

$\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ convergent. $\left\{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right\} \to 0$ i $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = +\infty$ (divergeix)

$\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ divergent. $\left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right\} \to 0$ i $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ (convergeix)

2) Sèries harmòniques: $\displaystyle\sum_{n\ge p}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases}\text{divergeix si } \alpha \le 1\\ \text{convergeix si } \alpha > 1\end{cases}$

3) Geomètriques: $\displaystyle\sum_{n\ge p} r^n \begin{cases}\text{convergeix si } |r| < 1\\ \text{divergeix si } |r| \ge 1\end{cases}$

2) Criteri de Leibniz per a sèries alternades:

Una *serie* és *alternada* si té la forma $\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ o $\sum_{n\ge1}(-1)^{n}\cdot a_n$ $\quad (a_n>0)$

$(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots)$ o $(-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6+\cdots)$

$$\sum(-1)^{n+1}\cdot a_n=-\sum(-1)^{n}\cdot a_n$$

Criteri de Leibniz :

$$\boxed{\{a_n\}\text{ decreix i tendeix a zero }\Rightarrow\sum(-1)^{n+1}\cdot a_n\text{ convergeix}}$$

(A més a més, $0<s_2<s_4<s_6<s_8<\cdots<s<\cdots<s_7<s_5<s_3<s_1$)

Exemples : $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergeix $\left(\text{alternada, } a_n=\frac{1}{n}\right)$

$\sum\frac{(-1)^{n}}{n^2}$ convergeix $\left(\text{alternada, } a_n=\frac{1}{n^2}\right)$

$\sum\frac{(-1)^{n}\cdot\sqrt{n}}{2n+5}$ convergeix $\left(\text{alternada, } a_n=\frac{\sqrt{n}}{2n+5}\right)$

Obtenció d'algunes sumes aproximades

Si $\sum_{n\ge1}A_n$ convergeix i suma $s=\underbrace{A_1+A_2+\cdots+A_N}_{s_N}+\underbrace{A_{N+1}+\cdots}_{s-s_N\text{ (cua)}}$

Aproximació : $s\cong s_N$ (per a N "prou gran")

Cota d'error :

$$E_N=|s-s_N|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}A_n-\sum_{n=1}^{N}A_n\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}A_n\right|\le\sum_{n=N+1}^{+\infty}|A_n|\le ?$$

Cas 1:

$A_n=(-1)^{n+1}a_n$ en les condicions de Leibniz $\quad E_N\le a_{N+1}$

Cas 2:

$|A_n|\le c\cdot K^n$, $K<1$ (geomètrica convergent) $\quad E_N\le\sum_{n=N+1}^{+\infty}c\cdot K^n=\frac{c\cdot K^{N+1}}{1-K}$

Exemple: Aproximar $s=\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ amb dos decimals exactes, almenys

La sèrie és alternada, amb $A_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

$$E_N=|s-s_N|\le a_{N+1}=\frac{1}{N+1}<10^{-3}\Rightarrow N\ge1000$$

$s=\log(2)=0.69314718\ldots$

$$s\cong s_{1000}=1-\frac12+\frac13-\frac14+\cdots-\frac{1}{1000}=0.\underline{69}264743\ldots$$

Exemple: Aproximar $s=\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot2^n}$ amb tres decimals exactes, almenys

La sèrie és alternada, amb $A_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot2^n}$

$$E_N=|s-s_N|\le a_{N+1}=\frac{1}{(N+1)2^{N+1}}<10^{-4}\Rightarrow N\ge9$$

$$s\cong s_9=\frac12-\frac18+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{9\cdot2^9}=0.\underline{4055}323\ldots$$

$s=\log(3/2)=0.4054651081\ldots$

Exemple: Aproximar $s\overset{?}{=}\sum_{n\ge1}\frac{n}{(2n+1)5^n}$ a partir de s_4 i amb sis decimals exactes

$$|A_n|=\frac{n}{(2n+1)5^n}<\frac12\left(\frac15\right)^n\Rightarrow E_N=|s-s_N|<\frac12\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac15\right)^n=\frac12\frac{\left(\frac15\right)^{N+1}}{1-\frac15}=\frac{1}{8\cdot5^N}$$

- $E_4<\frac{1}{8\cdot5^4}=0.0002\Rightarrow\quad s\cong s_4=\sum_{n=1}^{4}\frac{n}{(2n+1)5^n}=0.\underline{086}8\ldots$ (tres decimals exactes)
- $E_N<\frac{1}{8\cdot5^N}<10^{-7}\Rightarrow n\ge9$ i $\quad s\cong s_9=\sum_{n=1}^{9}\frac{n}{(2n+1)5^n}=0.\underline{086988}76\ldots$

Exemple: Aproximar $s\overset{?}{=}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}$ amb cinc decimals exactes, almenys

$$E_N=\cdots=\frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)(N+3)}+\cdots\right)<\frac{1}{(N+1)!}\left(1+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\cdots\right)<\frac{2}{(N+1)!}$$

$$E_N<\frac{2}{(N+1)!}<10^{-6}\Rightarrow n\ge9\text{ i }\quad s\cong s_9=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{9!}=1.\underline{71828}1525\ldots$$

$s=e-1=1.\underline{718281}828\ldots$