DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (E.I)

AMA - Convocatoria de Junio 01-07-2010 Duración prevista: 3h

1.- **BLOQUE I - Primer parcial (ut1 y ut2)**

a) $(1.0p)$ Considera los complejos $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $w = 1 - \sqrt{3}i$. Se pide:

a1) La forma polar de z y w

a2) La forma polar y binómica de $\dfrac{z}{w}$

b) $(0.5p)$ Encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\Big| 5\,|x-1| - 3 \Big| \leq 5$

c) $(1.5p)$ Considera la sucesión definida por

$$\begin{cases} a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \\ a_1 = -1 \ , \ a_2 = 6 \end{cases}$$

c1) $(0.2p)$ Encuentra el valor de a_3 haciendo uso de la relación de recurrencia.
c2) $(1.0p)$ Resuelve la recurrencia para encontrar a_n explícitamente
c3) $(0.3p)$ Calcula $\lim\limits_{n}(a_n)$, si existe.

---

a)

$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

$\alpha = \arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$, al ser α un ángulo del segundo cuadrante y $\tan(a) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

$|w| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\beta = \arg(z) = \dfrac{5\pi}{3}$, al ser β un ángulo del cuarto cuadrante y $\tan(\beta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

Por tanto: $z = 1_{\frac{3\pi}{4}}$ y $w = 2_{\frac{5\pi}{3}}$

Dividiendo en forma polar, $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1_{\frac{3\pi}{4}}}{2_{\frac{5\pi}{3}}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{\frac{-11\pi}{12}}$

y dividiendo en forma binomica, $\dfrac{z}{w} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{1 - \sqrt{3}i} = \dfrac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right)}{\left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right)} = -\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} + \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}i$

b)

$$\Big| 5\,|x-1| - 3 \Big| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq 5\,|x-1| - 3 \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq 5\,|x-1| \leq 8 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{5} \leq |x-1| \leq \frac{8}{5}$$

y como la desigualdad de la izquierda siempre es cierta,

$$\Big| 5\,|x-1| - 3 \Big| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| \leq \frac{8}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{8}{5} \leq x-1 \leq \frac{8}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{13}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{3}{5}, \frac{13}{5}\right]$$

c1) Dado que $a_1 = -1$ y $a_2 = 6$, tendremos

$$a_3 + 6a_2 + 9a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 + 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -27$$

c2) La ecuación característica asociada a la recurrencia es

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

que tiene una solucion real doble, $r = -3$.

La recurrencia corresponde pues al segundo caso y la solución general puede escribirse en la forma

$$a_n = C_1 \cdot (-3)^n + C_2 \cdot n \cdot (-3)^n$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales, tendremos

$$\begin{array}{lcl} \text{para } n = 1 & ; & a_1 = -3 \cdot C_1 - 3 \cdot C_2 = -1 \\ \text{para } n = 2 & ; & a_2 = 9 \cdot C_1 + 18 \cdot C_2 = 6 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = 0$ y $C_2 = \frac{1}{3}$. De aquí:

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (-3)^n = (-1)^n \cdot n \cdot 3^{n-1}$$

c3) $\lim a_n$ no existe.

2.- **BLOQUE II - Segundo parcial (ut3, ut4 y ut5)**

a) $(1p)$ Calcula la suma exacta de la series

$$\textbf{a1)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n-1}}{4^{2n+1}} \qquad , \qquad \textbf{a2)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{5^n}$$

b) $(1p)$ Considera la función $f(x) = \log(1 - x^2)$.

b1) Calcula su dominio.

b2) Desarrolla $f(x)$ en serie de potencias, sabiendo que $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ si $|x| < 1$.

b3) Obtén $f'(x)$ explícitamente y escríbela como serie de potencias.

c) $(1.5p)$ Encuentra el plano tangente a la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ en el punto $P = (0, 1, -1)$. Halla el punto en el que la recta normal en P corta al plano XZ $(y = 0)$.

---

a1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n-1}}{4^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-1}(3^2)^n}{4 \cdot (4^2)^n} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^n$ que es una serie geometrica de razón $\frac{9}{16}$ y, por tanto, suma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n-1}}{4^{2n+1}} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^n = \frac{1}{12} \cdot \frac{\frac{9}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3}{28}$$

a2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,n}{5^n} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\tfrac{-1}{5}\right)^n \cdot n$ que es aritmogeométrica de razón $\frac{-1}{5}$ y, por tanto, suma

$$-\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n \cdot n = -\left(\frac{2\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)^2}{1-\left(\frac{-1}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{-1}{5}\right)^{2+1}}{\left(1-\left(\frac{-1}{5}\right)\right)^2}\right) = \frac{-11}{180}$$

b1) $x \in D\left(f(x)\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1-x^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-1,1\right[$

b2) $\displaystyle f(x) = \log(1-x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$

b3) $\displaystyle f\prime(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n\cdot x^{2n-1}}{n}$

c) Consideremos $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$$\nabla F(x,y,z) = (\ 2x\ ,\ 2y\ ,\ -2z\ ) \quad ; \quad \nabla F(0,1,-1) = (\ 0\ ,\ 2\ ,\ 2\ )$$

La ecuación del plano tangente será

$$0(x-0)+2(y-1)+2(z+1)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2y-2z=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y-z=0$$

y la de la recta normal

$$r(t) = (0,1,-1)+t\cdot(0,2,2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad r(t) = (0,1+2t,-1+2t)$$

que corta al plano XZ en el punto $(0,0,-2)$

$$y=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+2t=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{-1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r\left(\frac{-1}{2}\right) = (0,0,-2)$$

3.- **BLOQUE III - Resto (ut6)**

a) $(0.5p)$ Calcula el valor exacto de $\displaystyle\int_1^{1.8} \frac{x}{x^2+2}\,dx$

b) $(1.0p)$ Aproxima, mediante la regla de Simpson, el valor de la integral del apartado a) con 4 decimales exactos, sabiendo que $M_4 = 1$ en $[1, 1.8]$.

---

a) Con algún cambio de variable, o de forma inmediata,

$$\int_1^{1.8} \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)\Big]_1^{1.8} = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{9}{5}\right)^2+2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1^2+2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{131}{75}\right) \approx 0.2788546...$$

b) Para conseguir cuatro decimales necesitamos

$$E_n = \left|\int_1^{1.8} \frac{x}{x^2+2}\,dx - S_n\right| \le \frac{(1.8-1)^5}{180\cdot n^4}\cdot 1 = \frac{0.32768}{180n^4} < 10^{-5} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \sqrt[4]{\frac{32768}{180}} \quad \Longleftrightarrow \quad n \ge 4$$

Tomando pues $n=4$, $h=\frac{1.8-1}{4}=0.2$, y la partición $P = \{\ 1\ ,\ 1.2\ ,\ 1.4\ ,\ 1.6\ ,\ 1.8\ \}$ obtendremos cuatro (en realidad cinco) decimales exactos

$$\int_1^{1.8} \frac{x}{x^2+2}\,dx \simeq S_4 = \frac{0.2}{3}\left(\frac{1}{1^2+2} + 4\cdot\frac{1.2}{(1.2)^2+2} + 2\cdot\frac{1.4}{(1.4)^2+2} + 4\cdot\frac{1.6}{(1.6)^2+2} + \frac{1.8}{1.8^2+2}\right) \approx 0.2788515...$$