ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT5 - Problemas propuestos: CONCEPTOS GENERALES Y SUMA DE SERIES

1. Para la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ determina la sucesión de sumas parciales y su suma.

2. Considera la serie $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$:

   a) Halla las sumas parciales s_3 y s_4

   b) A partir del concepto de suma parcial, verifica que la serie converge y suma -1

3. Se sabe que $s_n = \frac{3n+2}{n+4}$ es la sucesión de sumas parciales asociada a la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$:

   a) Encuentra el término a_1

   b) Calcula el término general a_n

   c) Suma la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$, si converge

4. Justifica la respuesta a cada una de las cuestiones:

   a) Si $a_n \to 0$, ¿puede ser convergente $\sum_{n\geq 1} a_n$? ¿Y divergente?

   b) Si $s_n \to 0$, ¿puede ser divergente $\sum_{n\geq 1} a_n$?

   c) Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es de términos positivos, ¿cómo se comporta la sucesión de sumas parciales s_n?

   d) Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, ¿puede ser convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}+1}{2-a_n}$? ¿Y divergente?

5. A partir de cada s_n, halla la suma de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$, en caso de convergencia:

   a) $s_n = \frac{2n}{3n+1}$

   b) $s_n = \frac{n^2}{n+1}$

   c) $s_n = \frac{1}{3^n}$

   d) $s_n = 3^n$

   e) $s_n = \log(2n+1)$.

6. Calcula la suma de las series (geométricas o reducibles a ellas):

   a) $\sum_{n\geq 2} \frac{2^n + (-1)^{n+1} 3^n}{6^n}$

   b) $\sum_{n\geq 2} \frac{2^n + 1}{3^{n-1}}$

   c) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{5}{4^n} - \frac{4}{5^n} \right)$

   d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{7^{2n}}$

7. Suma las series (reducibles a telescópicas):

   a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$
   c) $\sum_{n\geq 1} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$

8. Justifica la convergencia o divergencia de cada una de las series:

   a) $\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{1+2^n}$
   c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2n}{(n+1)!}$
   d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 3^n}{5^{n-1}}$
   e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-1}$
   f) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n-2}$

9. Considera las series alternadas:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3^n n^3}.$$

   Aproxima la suma de cada serie con tres decimales exactos, al menos, e indica si la aproximación es por defecto o por exceso. Calcula, además, el máximo error cometido cuando la suma de cada una de ellas se aproxima mediante s_{30}. ¿Cuál converge más rápidamente? ¿Por qué?

10. Usando la cota de error asociada al teorema de Leibniz, obtén el valor de N necesario para que la suma parcial s_N nos proporcione dos decimales exactos de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$$

   y calcula esa suma parcial.

11. Considera la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{3^{n+1}}$:

   a) Verifica que la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{3^{n+1}}\right\}_{n\geq 1}$ es decreciente.
   b) Comprueba, mediante el criterio de Stolz, que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$.
   c) Deduce de los apartados anteriores que la serie inicial es convergente.
   d) Determina el valor de N necesario para que la suma parcial s_N aproxime la suma de la serie con (al menos) dos cifras decimales correctas. Efectua tal aproximación.

12. Un ciclista en plena marcha retira los pies de los pedales. La rueda delantera gira 200 veces durante los primeros 10 segundos. Posteriormente, en cada periodo de 10 segundos, la rueda gira 4/5 partes de las veces que giró en el periodo anterior.

   a) ¿Cuántas veces gira la rueda durante los primeros 30 segundos posteriores a la retirada de los pies de los pedales?
   b) ¿Cuánto tiempo será necesario para que la rueda gire 900 veces?
   c) ¿Cuántas veces girará la rueda antes de parar?

13. Encuentra el valor de N necesario para que la suma parcial s_N proporcione cinco decimales exactos de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{5^{n+1}}$$

   y calcula la suma exacta.

14. Encuentra el valor de N necesario para que la suma parcial s_N proporcione cinco decimales exactos de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1} \cdot 3^n}$$

y calcula la suma exacta.

15. Encuentra el valor de N necesario para que la suma parcial s_N proporcione tres decimales exactos de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^{2n}}$$

y calcula el valor exacto de esta suma.

16. Considera la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^\alpha}{2^{n+1}}\beta^n$, dependiente de los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$

    a) Suma la serie cuando $\alpha = 0$ y β cualquiera de los valores que la hacen convergente, que encontrarás previamente.

    b) Si $\alpha = -2$ y $\beta = -1$, encuentra el valor de n necesario para aproximar la suma de la serie mediante la suma parcial s_n, con tres decimales exactos, al menos. Calcula dicha aproximación.

17. Considera la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \alpha^n}{2^n(3n-1)}$, según $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$, encuentra n tal que la suma parcial s_n aproxime la suma de la serie con tres decimales exactos, al menos. Calcula la aproximación en cada caso.

ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT5 - Ejercicios adicionales: CONCEPTOS GENERALES Y SUMA DE SERIES

1. Estudia el carácter, y calcula la suma cuando sea posible, de las series:

   a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(\alpha+1)^n}{6^{2n+1}}$

   b) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1+2i}{3}\right)^n$

   *c) Calcula $\sum_{n\geq 1} c_n$, si c_n es el complejo que se encuentra en la intersección de la bisectriz del primer cuadrante con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2^{1-2n}$.

2. A partir de un triángulo equilátero de lado $1m$, conectamos los puntos medios de los tres lados para obtener un nuevo triángulo. Repitiendo el proceso obtendremos una sucesión decreciente de triángulos. Calcula el valor de la suma de las àreas de todos ellos.

3. Una rana intenta cruzar un estanque. Su primer salto es de $1m$ y, como consecuencia del cansancio, la longitud de cada salto es la mitad del anterior. Determina el número de saltos que necesitará para cruzar el estanque, de $1.95m$ de diámetro. ¿Qué anchura máxima sería capaz de cruzar la rana?

4. Expresa en forma de fracción el número decimal $q = 0,324242424... = 0.3\widehat{24}$. Sugerencia: comienza por expresar q como una suma infinita. Suma después la serie geométrica correspondiente.

*5. Calcula la suma de la serie $\sum\limits_{n\geq 2} \log\left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)$. Sugerencia: comienza por simplificar a_n haciendo uso de las propiedades del logaritmo.

*6. Calcula la suma de la serie (aritmético-geométrica) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$. Sugerencia: aplica la técnica que permite encontrar la suma de una serie geométrica.

7. Razona como en el ejercicio anterior y suma las series (aritmético -geométricas) siguientes:

   a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$

   b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{3^n}$

   c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$

   d) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{2n+3(-1)^{n+1}}{5^n}$.

8. Suma las series (reducibles a telescópicas):

   a) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$

   b) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

*9. Sabemos que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Determina el valor de $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \ ... = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

*10. a) Sabiendo que $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$ y teniendo en cuenta que $n^2 + 1 = n(n-1) + n + 1$, comprueba que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n!} = 3e - 1$.

   b) A partir de factorizaciones parecidas de los numeradores, calcula la suma de les series:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{3n^2-1}{(n+1)!}.$$

*11. Se sabe que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{n+3}{6n-5}\right)^n$ es convergente

a) Encuentra $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n < \frac{1}{2^n}$

b) Utiliza la desigualdad de a) para acotar el error cometido al aproximar la suma de la serie mediante la suma parcial $s_{10.}$

*12. Encuentra n necesario para aproximar la suma, $s = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n(3n-1)}$, mediante s_N con tres decimales exactos, al menos. Como sugerencia, acota previamente la cola de la serie:

$$|s - s_N| = a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

por una serie geométrica convergente adecuada. Efectúa la aproximación en cuestión.