Capítol 0

Introducció

Objectius

- Conèixer la forma correcta de presentar el valor d'una magnitud fent ús del Sistema Internacional.
- Comprendre la representació vectorial d'una magnitud i el significat d'un sistema de referència.
- Conèixer els fonaments del càlcul vectorial necessaris per a cursar l'assignatura de Fonaments Físics de la Informàtica.
- Comprendre el significat físic de la derivada o de la integral d'una funció que representa una magnitud física.
- Conèixer els fonaments de càlcul diferencial necessaris per a cursar l'assignatura de Fonaments Físics de la Informàtica.

0.1 Magnitud, mesura i Sistema d'Unitats

Anomenem *magnitud* a una propietat de la natura que és *observable* i *quantificable*. L'observació pot ser directa (com és el cas del volum d'un cos, la seua posició o la seua velocitat) o indirecta (com pot passar amb l'energia cinètica o l'acceleració, que les tenim en compte a partir de l'observació de la seua massa i la seua velocitat o d'un canvi en la velocitat d'un cos, respectivament).

Així mateix, una magnitud s'ha de poder quantificar i això implica que ha de ser possible assignar-li un nombre que ens indique la quantitat que en tenim. Conèixer la quantitat que en tenim d'una magnitud suposa realitzar una *mesura*, és a dir, comparar la quantitat de magnitud present al sistema amb una quantitat estàndard o *unitat*. La mesura serà el nombre de vegades que la magnitud mesurada conté la quantitat estàndard o unitat.

> Per exemple, per a mesurar el pes d'un cos en una balança, el comparem amb unes peses que ens diuen el nombre de grams que en conté cadascuna. El resultat final és el nombre de vegades que conté un gram el cos pesat. Si aquest conté dues-centes vegades un gram, diem que pesa dos-cents grams: el nombre dos-cents és la quantitat mesurada i el "gram" la unitat de mesura.

Perquè la quantitat d'una magnitud estiga ben descrita és necessari que conste tant el resultat de la mesura com la unitat de referència utilitzada: el nombre no vol dir res si no ve acompanyat de la unitat.

Ara bé, quan escrivim una mesura, amb la seua unitat, és perquè alguna altra persona ha de llegir-la i interpretar-ne amb facilitat el resultat. Per fer-nos una idea, podem agafar el sistema de mesura vigent a València a mitjans del segle XIX:

Valencia. *La vara* tiene 0,906 metros; *el metro* 1 vara, 3 pulgadas y 8,821 líneas, ó bien 1 vara y 1,660 cuartas: *la libra* 0,355 kilógramos; *el kilógramo* 2 libras, 9 onzas y 3,211 cuartas: *el cántaro de vino* 10,77 litros; *el litro de vino* 1,486 cuartillos: la *arroba de aceite* 11,93 litros; *el litro de aceite* 0,335 azumbres: *la barchilla para áridos* 16,75 litros; *el litro de grano* 0,955 cuartillos: *la fanega superficial de* $1012\frac{1}{2}$ *varas cuadradas* 8,310964 áreas; *la área* 24,065 brazas reales.

Si afegim que, en canviar de província, el valor d'unitats amb el mateix nom canviava, el conflicte el teníem assegurat. Així, per exemple: a diferència de València, a Pontevedra, el quilogram era "1 libra, 14 onzas y 8,677 adarmes", mentre que a Tarragona es corresponia amb "2 libras y 6 onzas". Indubtablement, calia una normalització i aquesta es va trobar al sistema mètric decimal.

En l'actualitat, a nivell internacional, hi ha acord per tal de normalitzar l'ús de les unitats de les diferents magnituds físiques, per la qual cosa es va seleccionar un conjunt de magnituds independents (és a dir, no existeix cap equació física o llei física que les relacione entre si) que van rebre el nom de **magnituds fonamentals**. El seu nombre és tal que per a qualsevol altra magnitud podem trobar una equació que relacione aquesta última amb les magnituds del conjunt o sistema d'unitats seleccionat.

El sistema recomanat és el **Sistema Internacional**, que en mecànica i electricitat té com a **magnituds fonamentals** la longitud (L), la massa (M), el temps (T) i la intensitat de corrent (I), que són les magnituds fonamentals que utilitzarem al llarg del curs. Si ampliem la física a estudiar, caldria incorporar-ne altres com són la temperatura, la quantitat de substància o la intensitat lluminosa. Així mateix, a cada Magnitud del Sistema Internacional se li ha assignat una unitat de mesura:

Sistema Internacional							
Magnitud Fonamental	Longitud	Massa	Temps	Intensitat de corrent	Temperatura	Quantitat de substància	Intensitat lluminosa
Símbol	L	M	T	I	θ	N	J
Unitat	metre	quilogram	segon	ampere	kelvin	mol	candela
Símbol	m	kg	s	A	K	mol	cd

Qualsevol altra magnitud es pot posar en funció de les magnituds fonamentals. Si en aquesta relació substituïm els símbols que apareixen en l'equació pels símbols corresponents a les magnituds fonamentals, obtindrem **l'equació de dimensions** de la magnitud.

Exemple 0-1

Escriu les equacions de dimensions de les magnituds següents: força i potència
Solució:

Força: M, L i T (massa, longitud i temps són magnituds fonamentals del Sistema Internacional, amb el qual treballarem al llarg del curs.
Per a determinar les equacions de dimensions, hem de trobar l'equació de la força, que relaciona aquesta magnitud amb les magnituds fonamentals:
L'equació de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$
on l'acceleració és: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$; llavors: $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$
La força apareix en funció de les tres magnituds fonamentals. Només queda substituir cada magnitud pel seu símbol corresponent:
Les dimensions de massa: $[m] = M$
Les dimensions del doble diferencial de x són les de la magnitud x: $[d^2\vec{x}] = L$
Les dimensions del diferencial del temps, les d'un temps: $[dt] = T$
D'aquesta forma, l'equació de dimensions de la força queda:

$$[\vec{F}] = m\vec{a} = [m]\frac{[d^2\vec{x}]}{[dt]^2} = M\frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$$

Potència: Si es coneix l'equació de dimensions d'una magnitud no fonamental present en l'expressió, es pot utilitzar aquest coneixement per a simplificar-ne el càlcul. Així, per exemple, la potència és la variació d'energia o del treball per unitat de temps: $P = \frac{dW}{dt}$, on W és el treball, que es pot expressar com el producte de la força per l'espai: W=F.e

Com sabem que $[F] = MLT^{-2}$, l'equació de dimensions de la potència queda:

$$[P] = \frac{[F].[e]}{[dt]} = \frac{MLT^{-2}L}{T} = ML^2T^{-3}$$

Per a determinar l'equació de dimensions d'una magnitud, podem emprar qualsevol equació o llei física que relacione aquesta magnitud amb altres magnituds. El resultat és independent del camí triat per al seu càlcul, sempre que aquest camí siga correcte.

0.2 Magnituds escalars i vectorials

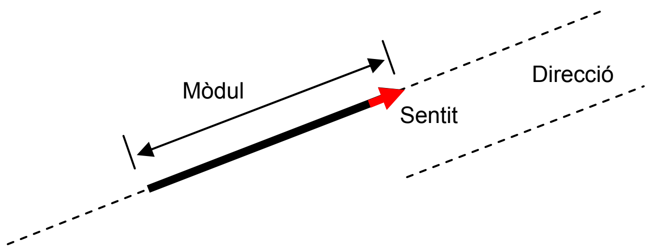
Anomenarem *magnituds escalares* aquelles que quedem ben definides amb un nombre acompanyat de la unitat. Per exemple, la temperatura, l'energia, una distància de separació entre dos cossos, etc.

Però trobem magnituds que, perquè estiguen ben definides, no n'hi ha prou a conèixer la quantitat present en el sistema: és necessari donar-hi més informació, com són la direcció i el sentit en què aquestes estan actuant. Per exemple, la velocitat o la força són magnituds vectorials:

> La velocitat d'un cotxe que travessa Nules a 50 km/h en sentit Barcelona no és la mateixa que si ho fa, també a 50 km/h, en sentit València. Tampoc és el mateix fer un força de 600 N empenyent cap al terra una taula, que si l'apliquem cap amunt o si ho fem horitzontalment. Els resultats en ambdós exemples són diferents segons considerem la direcció i el sentit de la magnitud: en el primer cas, el cotxe s'allunyarà o s'acostarà a València i en el segon cas, la taula aguantarà estàtica la nostra acció (si no es trenca), s'alçarà del terra o es desplaçarà horitzontalment com a conseqüència de l'acció.

0.3 Representació gràfica d'una magnitud vectorial. El vector

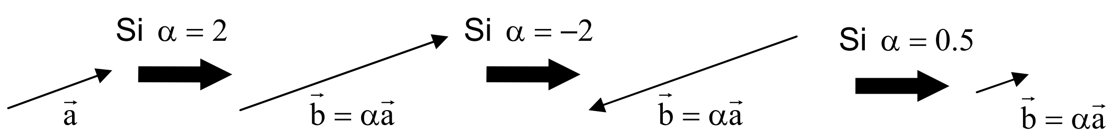
Llavors, una magnitud vectorial es representarà fent ús d'un *vector*. La representació gràfica d'un vector és una *fletxa*: la seua longitud s'anomena *mòdul* i és la quantitat de magnitud que hi ha, que ha de venir a-



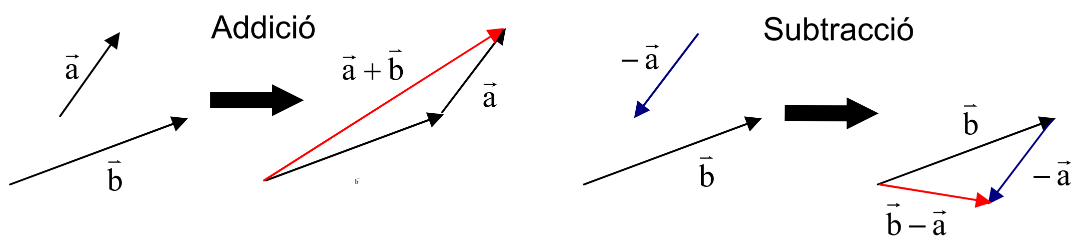
companyada de la unitat a què fa referència (p. e. 50 km/h); la recta que el conté és la *línia d'acció* i qualsevol recta paral·lela és la *direcció* (p. e. qualsevol línia nord-sud representa la direcció nord-sud); per últim, el punt inicial de la fletxa és l'*origen* del vector i l'extrem final (la punta de la fletxa) indica el *sentit* en què actua la magnitud.

Per representar una magnitud vectorial, escriurem el seu símbol amb una fletxa damunt. També se sol escriure amb el símbol en negreta: per exemple, la velocitat es representa per la lletra v, que com a vector quedaria $\vec{v}$ o **v**. Per la seua banda el mòdul de una magnitud vectorial es representa com el seu símbol, sense més afegits, o situant el vector entre barres. És a dir, per a la velocitat seria v o $|\vec{v}|$.

El càlcul vectorial ens permet realitzar operacions amb vectors. Així, *si multipliquem un vector per un escalar*, el vector resultant tindrà les característiques següents: El valor del seu mòdul serà el mòdul del vector multiplicat pel valor absolut de l'escalar; la direcció serà la mateixa que la del vector i el sentit serà el mateix si l'escalar és un nombre positiu i canviarà si, pel contrari, és negatiu.



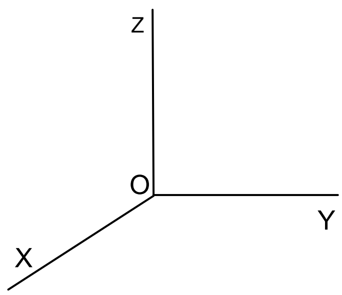
Per sumar gràficament dos vectors, n'hi ha prou a col·locar l'origen d'un d'ells a l'extrem de l'altre. El vector suma resulta d'unir amb un vector l'origen del primer amb l'extrem del segon:



L'ús de la representació gràfica dels vectors, si bé moltes vegades és útil per a simplificar càlculs, està molt limitat a l'hora de fer càlculs amb un mínim de complexitat. Tanmateix, la *representació numèrica d'un vector* ens permetrà fer ús de totes les eines del càlcul vectorial per a treballar-hi.

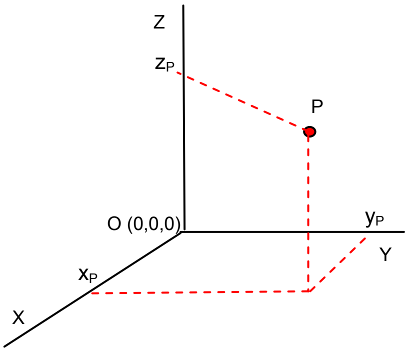
0.4 Representació numèrica d'un vector. Sistema de referència

Per representar numèricament un vector, en primer lloc, fixarem un *sistema d'eixos coordinats*. La seua elecció és, en principi, arbitrària, encara que buscarem sempre aquell sistema que ens facilite el càlcul. El sistema d'eixos més habitual i amb el que treballarem al llarg d'aquest curs és el *sistema ortogonal cartesià a dretes*, que estan format per tres eixos perpendiculars entre si, que coincideixen en un punt i que anomenem X, Y i Z, segons les posicions relatives indicades a la figura:



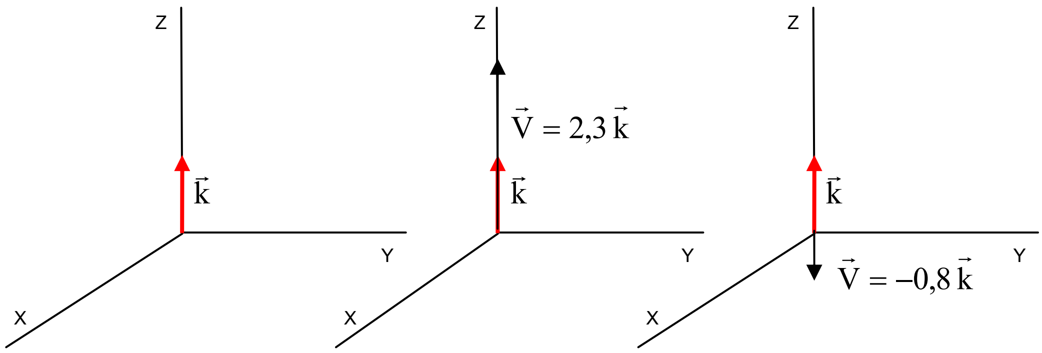
Cada eix és una recta de nombres reals, amb el valor zero situat en el punt de coincidència de totes elles, que s'anomena *origen de coordenades* i se sol representar per la lletra O.

Un punt qualsevol de l'espai es representarà a partir de tres valors, que són el resultat de mesurar la seua projecció en cadascun dels eixos coordinats. Així, a la figura, el punt P té com a valor numèric la terna (x_p, y_p, z_p), mentre que l'origen de coordenades en té (0,0,0).



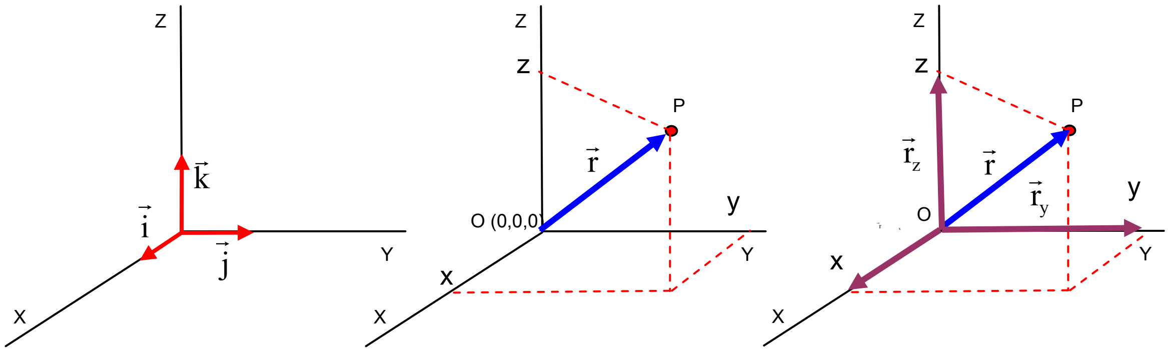
El vector amb origen al punt O i l'extrem al punt P, s'anomena *vector de posició* del punt P respecte aquest sistema de coordenades i el representarem com a suma dels tres vectors que resulten de projectar el vector sobre els eixos coordinats. Però abans de continuar, hem de veure com es representa cadascun d'aquests vectors de la projecció.

En primer lloc, definirem el *vector* $\vec{k}$. El mòdul d'aquest vector té per valor la unitat (és un *vector unitari*), la seua direcció és l'eix *Z* i el seu sentit és el sentit positiu de l'eix *Z*. Qualsevol altre vector que seguesca la direcció de l'eix *Z* podrà representar-se com un nombre multiplicat pel vector $\vec{k}$. Aquesta xifra serà la quantitat de vegades que el vector conté el vector $\vec{k}$. A la figura s'han indicat dos exemples:

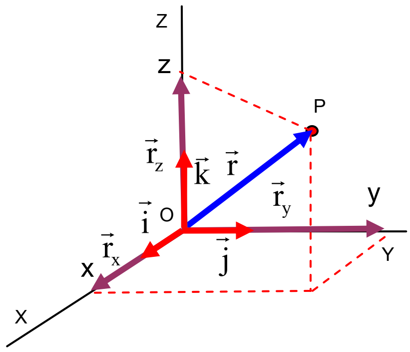


De la mateixa forma, podem assignar un vector unitari per a l'eix X, el *vector* $\vec{i}$, i per a l'eix Y, el *vector* $\vec{j}$. D'aquesta manera, qualsevol vector que tinga qualsevol de les tres direccions dels eixos es pot representar com un nombre multiplicat per l'unitari corresponent.

A la figura de l'esquerra (a la figura següent), es mostren els tres vectors unitaris assignats a cadascun les eixos coordinats. Així mateix, a la dreta s'ha representat el vector de posició, $\vec{r}$, del punt P respecte als eixos coordinats que hem traçat:

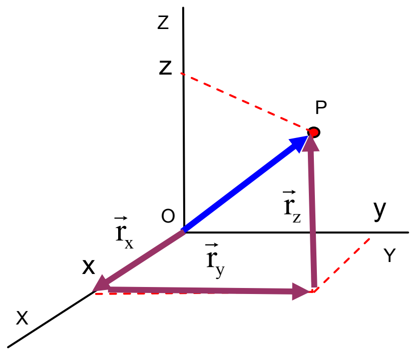


La projecció del vector de posició $\vec{r}$ sobre l'eix Z, el vector $\vec{r}_z$, va des del punt O (0,0,0) fins al punt (0,0,Z_p): Açò és, el seu mòdul és la distància z_p, la direcció és l'eix Z i el sentit depén del sentit del vector $\vec{r}$. Així mateix podem conèixer la projecció sobre l'eix X, el vector $\vec{r}_x$, i la projecció sobre l'eix Y, el vector $\vec{r}_y$.



Fent-hi ús de l'operació "producte per un escalar", podem relacionar cadascun dels vector $\vec{r}_x, \vec{r}_y$ i $\vec{r}_z$ amb els corresponents vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$.

Així, el vector $\vec{r}_x$ té per mòdul el valor x_p (podem escriure $r_x = x_p$). Com que té la mateixa direcció i sentit que el vector unitari $\vec{i}$, podem dir que $\vec{r}_x$ és x_p vegades el vector $\vec{i}$. És a dir, $\vec{r}_x = x_p\vec{i}$. De la mateixa forma, podem escriure que $\vec{r}_y = y_p\vec{j}$ i que $\vec{r}_z = z_p\vec{k}$.

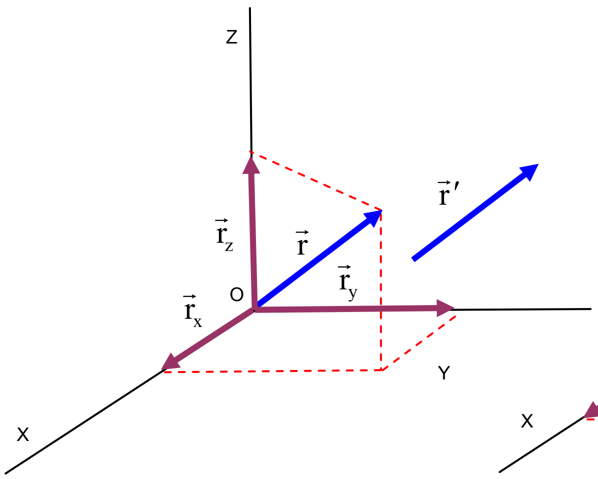


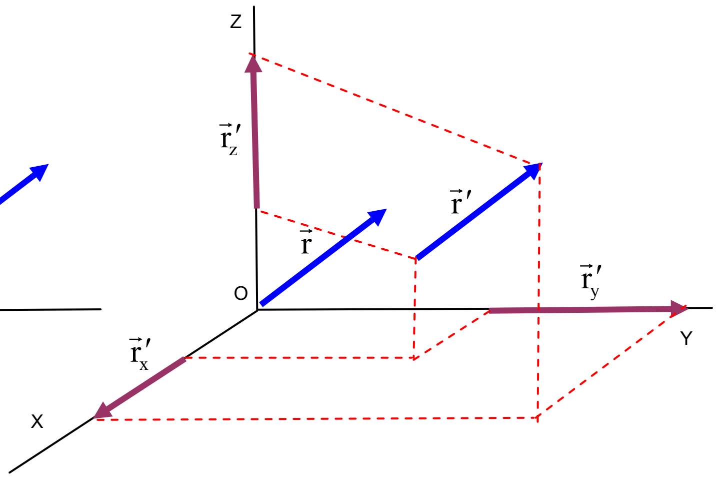
Si sumem els tres vectors $\vec{r}_x, \vec{r}_y$ i $\vec{r}_z$, el resultat és el vector $\vec{r}$, tal com es pot observar a la figura. Llavors podem escriure que el vector $\vec{r}$ és:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{k}$$

Aquesta és l'expressió numèrica d'un vector, que ve definit per tres valors, x_p, y_p i z_p, que es corresponen amb les seues projeccions sobre els eixos X, Y i Z, respectivament. Aquests tres valors s'anomenen *components del vector*.

És important tenir en compte que l'expressió del vector $\vec{r} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j} + z_p\vec{k}$ es correspon amb el vector $\vec{r}$ o qualsevol altre paral·lel a ell que tinga el mateix mòdul, direcció i sentit, com es pot observar a la figura següent en el cas del vector $\vec{r}\,'$:





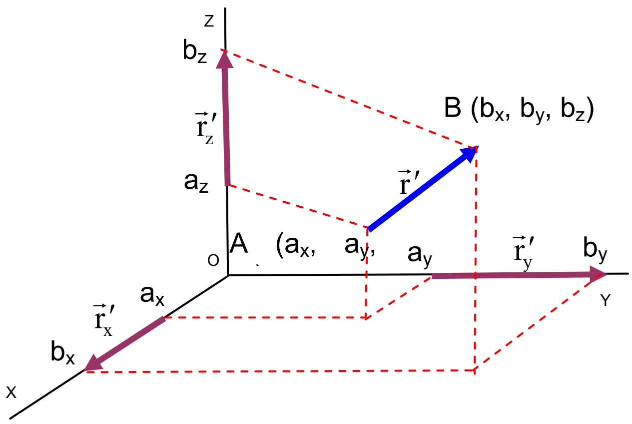
Si definim vector $\vec r\,'$ a partir de les coordenades del punt origen, A(a_x, a_y, a_z) i de l'extrem B (b_x, b_y, b_z), les components del vector seran:

$$r'_x = b_x - a_x$$
$$r'_y = b_y - a_y$$
$$r'_z = b_z - a_z$$

i el vector serà:

$$\vec r\,' = (b_x - a_x)\vec i + (b_y - a_y)\vec j + (b_z - a_z)\vec k$$

El vector $\vec r\,'$ es pot representar també com $\overrightarrow{AB}$, on A és el punt d'origen i B, l'extrem del vector



Coneguda l'expressió d'un vector, podem *calcular el seu mòdul* tan sols calculant l'arrel quadrada de la suma de les seues components elevada al quadrat:

Si $\vec r = x_p \vec i + y_p \vec j + z_p \vec k \;\rightarrow\; |\vec r| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$ (*Mòdul del vector*)

Per entendre-ho, n'hi ha prou a considerar que, en el cas d'un vector de posició (és a dir, amb origen en (0,0,0)), el mòdul és la diagonal principal d'un paral·lelepípede d'aristes r_x, r_y, i r_z.

Un vector de mòdul unitat s'anomena *vector unitari*.

0.5 Operacions amb vectors. Càlcul vectorial

Una vegada sabem com escriure un vector en forma numèrica, podem aplicar totes les possibilitat que ens ofereix el càlcul vectorial per a les distintes operacions: addició i subtracció, producte per un escalar, producte escalar i producte vectorial. Un bon coneixement d'aquestes operacions és important per tal de treballar amb magnituds vectorials.

Addició: Si tenim dos vectors, el vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i el vector $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, el vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ resulta de sumar les components respectives dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$, el qual serà:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

Subtracció: Si tenim dos vectors, el vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i el vector $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, el vector $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ resulta de sumar a les components del vector $\vec{a}$ les components respectives del $\vec{b}$ canviades de signe:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} \neq \vec{b} - \vec{a}$$

Producte per un escalar: Si multipliquen un vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ per un nombre real qualsevol, α, el resultat de l'operació serà el vector que resulta de multiplicar totes les components del vector $\vec{a}$ per l'escalar:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha = \alpha\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \alpha a_x\vec{i} + \alpha a_y\vec{j} + \alpha a_z\vec{k}$$

Si $\alpha < 0$, el vector resultant tindrà sentit oposat al del vector $\vec{a}$.

La divisió per un nombre real seria, evidentment, el resultat de dividir cada component per l'escalar, com es pot deduir de:

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}}{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\vec{a}$$

Vector unitari d'un vector: Anomenem vector unitari d'un vector al vector de mòdul unitat que té la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector a què fa referència. S'obté dividint el vector pel seu mòdul.

Així, si tenim el vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, el seu mòdul és $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Llavors, l'unitari del vector $\vec{a}$ és:

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}\vec{i} + \frac{a_y}{|\vec{a}|}\vec{j} + \frac{a_z}{|\vec{a}|}\vec{k}$$

Cal tenir em compte que un vector es pot expressar com el producte del seu mòdul pel seu unitari i, de fet, és bastant habitual fer-ho així:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{u}_{\vec{a}}$$

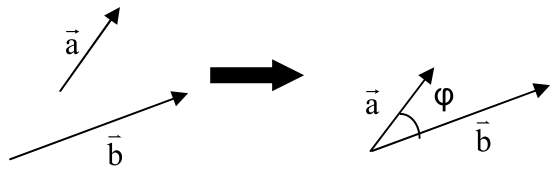
Producte escalar: Si tenim dos vectors, el vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i el vector $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, el producte escalar d'ambdós és una operació que dóna per resultat un escalar, el valor del qual és el resultat de sumar el producte de les components respectives:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

El símbol del producte escalar és un punt situat a mitjana altura entre els dos vectors.

Es pot demostrar que l’operació anterior dóna el mateix resultat que si la calculem de la forma següent:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$



on φ és l’angle existent entre els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ en fer coincidir els seus orígens.

El producte escalar compleix la propietat distributiva respecte de la suma:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

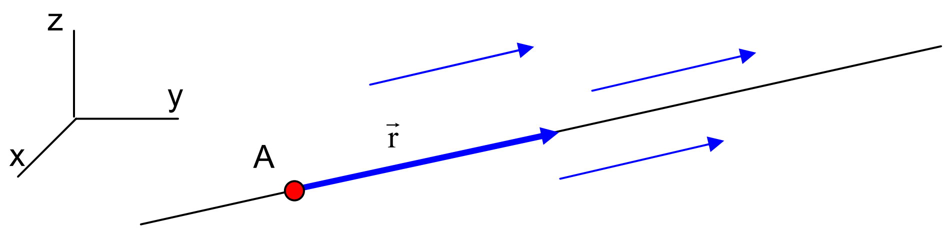
Si la representació numèrica d’un vector depén dels eixos de referència, el seu mòdul, que és la quantitat de magnitud que n’hi ha, és independent d’aquests. Passa el mateix amb el producte escalar de dos vectors que té el mateix valor, tan se val quin siga el sistema de referència elegit per a representar-los numèricament.

Angle entre dos vectors: Si igualem les dues expressions existents per al producte escalar, podem calcular l’angle format per dos vectors:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad\rightarrow\quad \cos\varphi=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_y b_y}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

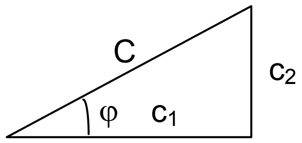
Si $\vec{a}$ i $\vec{b}$ són perpendiculars, el producte escalar serà nul ($\cos\varphi=0$) i serà màxim quan els vectors siguen paral·lels ($\cos\varphi=1$).

Projecció d’un vector en una direcció o una recta donada: Amb un punt i un vector $\vec{r}$ tenim definida una recta:



Qualsevol vector paral·lel a l'anterior ens indica la direcció de la recta, inclòs el vector unitari del vector $\vec{r}$.

La projecció d'un vector sobre una recta resulta de traçar les perpendiculars del vector sobre la recta i és equivalent a calcular la projecció sobre la direcció indicada per la recta. (A la dreta de la figura següent s'ha incorporat un requadre amb les relacions fonamentals existents en un triangle rectangle).

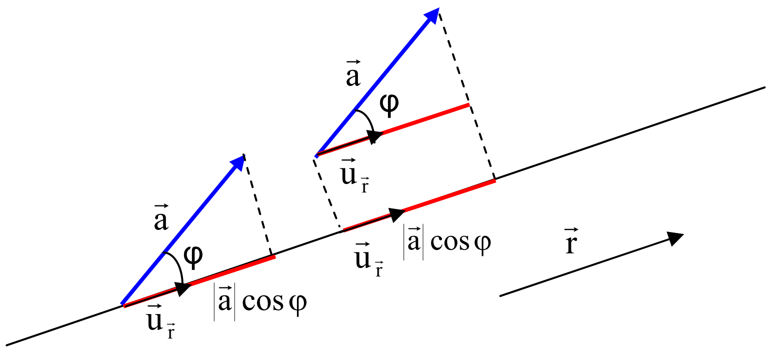


$$h^2 = c_1^{\,2} + c_2^{\,2}$$

$$\cos\varphi = \frac{c_1}{h} \rightarrow c_1 = h\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{c_2}{h}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c_2}{c_1}$$

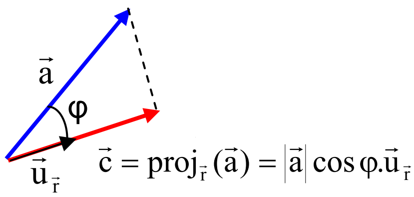


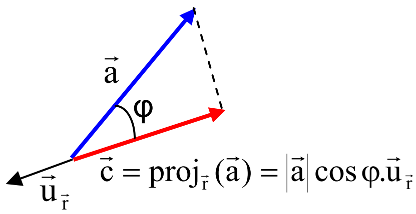
Per calcular vectorialment la projecció del vector $\vec{a}$ sobre la direcció indicada pel vector $\vec{r}$ ($\mathrm{proj}_{\vec{r}}\vec{a}$, indicada en color roig en la figura), es realitzarà el producte escalar del vector $\vec{a}$ per l'unitari en la direcció del vector $\vec{r}$, $\vec{u}_{\vec{r}}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_{\vec{r}} = |\vec{a}||\vec{u}_{\vec{r}}|\cos\varphi = |\vec{a}|\cos\varphi = \mathrm{proj}_{\vec{r}}\vec{a}$$

Si el resultat és negatiu, això tant sols indica que l'angle φ és major de 90º. Per al valor de la projecció n'hi ha prou amb considerar-ne el valor absolut.

Si el que volem és el vector projecció en la direcció del vector $\vec{r}$, multiplicarem la projecció calculada per l'unitari $\vec{u}_{\vec{r}}$:





Producte vectorial: Si tenim dos vectors, el vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i el vector $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, el producte vectorial d'ambdós és una operació que dóna per resultat el vector que resulta de realitzar l'operació següent:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i}-\left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j}+\left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

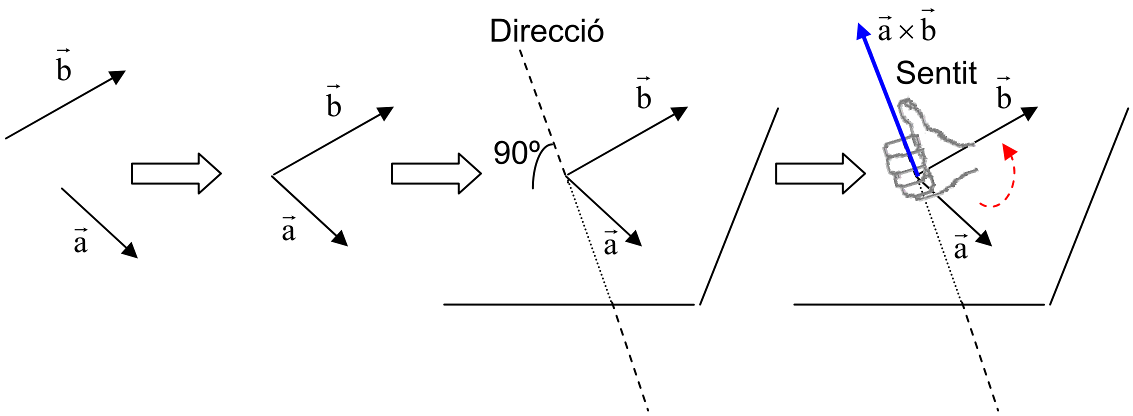
Per representar el producte escalar, s'utilitza el símbol $\times$ o el símbol $\wedge$. Qualsevol dels dos és vàlid. Es pot verificar que el vector $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ té les característiques següents:

- Mòdul: es pot calcular a partir de l'expressió: $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

  on φ és l'angle existent entre els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ en fer coincidir els seus orígens.

- Direcció: ortogonal a ambdós vectors o, el que és el mateix, perpendicular al pla definit per ambdós vectors quan fem coincidir els seus orígens.

- Sentit: si dibuixem ambdós vectors fent coincidir els seus orígens i amb els dits de la mà dreta (exceptuant-ne el polze) indiquem el gir que caldria seguir per fer coincidir el vector $\vec{a}$ amb el vector $\vec{b}$ pel camí més curt; el polze ens assenyalarà el sentit del vector $\vec{a}\times\vec{b}$.



Es fàcil deduir que el producte vectorial no compleix la propietat commutativa, ja que $\vec{a}\times\vec{b}\neq-\vec{b}\times\vec{a}$. Així mateix, el producte vectorial de dos vectors paral·lels és nul: es pot comprovar tenint que compte que el determinant d'una matriu amb dues files proporcionals és nul o que el $\sin(0)=0$.

El producte vectorial compleix la propietat distributiva respecte de la suma:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

Doble producte vectorial: consisteix en el producte vectorial d'un vector pel resultat del producte vectorial d'altres dos vectors. No aporta cap operació nova, ja que coneixem com operar el producte vectorial, però hi ha una regla que en simplifica el càlcul.

Així, si tenim tres vectors, el vector $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, el vector $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ i el vector $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, el doble producte vectorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ es pot calcular a partir del determinant:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \end{vmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

El resultat és un vector coplanari als vectors $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Producte mixt: El producte mixt consisteix en el producte escalar d'un vector pel resultat del producte vectorial d'altres dos vectors. No aporta cap operació nova, ja que coneixem com operar tant el producte escalar com el producte vectorial, però hi ha una regla que en simplifica el càlcul.

Així, si tenim tres vectors, el vector $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, el vector $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ i el vector $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, el producte mixt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ es pot calcular a partir del determinant:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Com que el producte escalar té la propietat commutativa, llavors: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$

A partir de les propietats dels determinants, és fàcil demostrar que:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 0$$

Exemple 0-2

El vector $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ té el seu origen al punt (2,2,-1). On en té l'extrem?

Solució:

Tenint en compte que quan un vector està definit per dos punts, les seues components són la diferència entre les coordenades del punt extrem menys les del punt origen, obtindríem:

Si anomenen $P(P_x,P_y,P_z)$ al punt extrem i $O(O_x,O_y,O_z)$ a l'origen, obtenim:

$$\left.\begin{array}{lllll} a_x = P_x - O_x & \rightarrow & 3 = P_x - 2 & \rightarrow & P_x = 5 \\ a_y = P_y - O_y & \rightarrow & 4 = P_y - 2 & \rightarrow & P_y = 6 \\ a_z = P_z - O_z & \rightarrow & -2 = P_x + 1 & \rightarrow & P_x = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{El punt extrem és P(5,6,-3)}$$

Exemple 0-3

Si tenim el vectors: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = 6\vec{i} + 5\vec{k}$

a) Calculeu el vector $\vec{d}$ que, sumat als altres tres vectors, done com a resultat el vector nul.

b) Calculeu el producte escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$

c) Calculeu l'angle que formen els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$

d) Calculeu el vector unitari del vector $\vec{a}$

e) Calculeu el valor de la protecció del vector $\vec{a}$ sobre la direcció del vector $\vec{b}$

f) Calculeu el producte vectorial $\vec{a} \times \vec{c}$

g) Calculeu el doble producte vectorial $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c})$

h) Calculeu l'operació $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$

a) **Calculeu el vector $\vec{d}$ que, sumat als altres tres vectors, done com a resultat el vector nul.**

Considerem el vector $\vec{d}$ de la forma $\vec{d} = x_d\vec{i} + y_d\vec{j} + z_d\vec{k}$ i plantegem l'operació suma:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} &= (3 - 6 + 6 + x_d)\vec{i} + (4 + 2 + 0 + y_d)\vec{j} + (-2 - 4 + 5 + z_d)\vec{k} = \\ &= (3 + x_d)\vec{i} + (6 + y_d)\vec{j} + (-1 + z_d)\vec{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

El vector nul, $\vec{0}$, té nul·les totes les seues components: $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

De la igualtat anterior: $(3 + x_d)\vec{i} + (6 + y_d)\vec{j} + (-1 + z_d)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, es dedueix que s'han de complir tres igualtats:

$$\left.\begin{array}{lll} 3 + x_d = 0 & \rightarrow & x_d = -3 \\ 6 + y_d = 0 & \rightarrow & y_d = -6 \\ -1 + z_d = 0 & \rightarrow & z_d = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{d} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$

b) **Calculeu el producte escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$**

Apliquem l'operació producte escalar: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\times(-6)+4\times(2)+(-2)\times(-4) = -18+8+8 = -2$$

c) Calculeu l'angle que formen els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$

El mòdul del vector $\vec{a}$ és:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$

El mòdul del vector $\vec{b}$ és:

$$b = |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}$$

L'angle que formen ambdós vectors:

$$cos\,\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{29}\sqrt{56}} \approx -0.0496 \;\rightarrow\; \varphi \approx \arccos(-0.0496) \approx 94{,}845^0 = 1{,}62\ \text{rad}$$

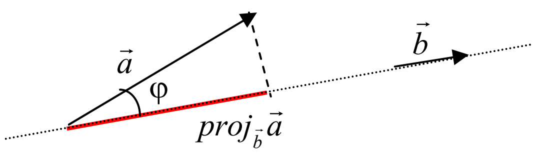
d) **Calculeu el vector unitari del vector** $\vec{a}$

El vector unitari d'un vector és un vector amb la mateixa direcció i sentit, i de mòdul unitat. Es calcula dividint el vector pel seu mòdul:

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{k}$$

e) Calculeu el valor de la protecció del vector $\vec{a}$ sobre la direcció del vector $\vec{b}$

El vector $\vec{a}$ i la seua projecció sobre una recta paral·lela a $\vec{b}$ formen un angle φ igual al que formen ambdós vectors. El vector $\vec{a}$ i la seua projecció defineixen un triangle rectangle, on el cosinus de l'angle que formen és igual a la relació entre el catet contigu i la hipotenusa. D'ací, es dedueix que:



$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\,cos\,\varphi \approx \sqrt{59}\times(-0.046) = -0.353$$

El signe negatiu tant sols indica que, al nostre cas, en ser l'angle entre els nostres vectors major de 90º, la projecció estaria al costat oposat al sentit assenyalat pel vector $\vec{b}$. Podríem agafar perfectament el valor positiu com a solució. Les unitats d'aquesta longitud dependran de les unitats amb què estem treballant. En aquest cas, en no haver cap indicació al respecte, no les considerarem.

Podríem haver calculat la projecció vectorialment de la forma següent:

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\, cos\,\varphi = |\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\vec{u}_{\vec{b}}$$

i hauríem arribat a la mateixa solució.

f) **Calculeu el producte vectorial** $\vec{a}\times\vec{c}$

Apliquem l'operació producte vectorial:

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 27\vec{j} - 24\vec{k}$$

g) **Calculeu el doble producte vectorial** $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c})$

Calculat, a l'apartat anterior, el resultat del producte $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{h}$, que hem anomenat $\vec{h}$, obtenim el producte $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{h}$ tornant a aplicar l'operació producte vectorial:

$$\vec{\mathrm{a}}\times\vec{\mathrm{h}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \mathrm{a_x} & \mathrm{a_y} & \mathrm{a_z} \\ \mathrm{h_x} & \mathrm{h_y} & \mathrm{h_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ 3 & 4 & -2 \\ 20 & -27 & -24 \end{vmatrix} = \vec{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -27 & -24 \end{vmatrix} - \vec{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 20 & -24 \end{vmatrix} + \vec{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 20 & -27 \end{vmatrix} =$$

$$= -150\vec{\mathrm{i}} + 32\vec{\mathrm{j}} - 161\vec{\mathrm{k}}$$

També el podríem haver calculat fent ús de l'expressió del doble producte vectorial:

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{c}$$

Els productes escalares es calculen amb més facilitat:

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 3\times 6 + 4\times 0 + (-2)\times 5 = 8$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 = 29$$

si substituïm:

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{c} = 8\left(3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}\right) - 29\left(6\vec{i} + 5\vec{k}\right) = -150\vec{i} + 32\vec{j} - 161\vec{k}$$

h) **Calculeu l'operació** $\mathbf{b}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\times\mathbf{c})$

Conegut el valor del vector $\vec{h} = \vec{a} \times \vec{c}$ n'hi haurà prou amb aplicar l'operació producte escalar:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{h} = b_x h_x + b_y h_y + b_z h_z = (-6) \times 20 + 2 \times (-27) + (-4) \times (-24) = -78$$

També el podríem haver calculat fent ús de l'expressió del producte mixt:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-120 - 24 + 0) - (-96 + 30 + 0) = -78$$

Exemple 0-4

A partir dels resultats obtinguts, en el seu cas, a l'**exemple 0-3** i fent ús dels vostres coneixements de les propietats dels vectors, resoleu el següent:

a) Calculeu el producte escalar $\vec{b} \cdot \vec{a}$
f) Calculeu l'operació $(\vec{c} \times \vec{a})$
g) Calculeu el doble producte vectorial $(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{a}$
h) Calculeu el doble producte vectorial $\vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{a})$
i) Calculeu el doble producte vectorial $(\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{c}$
j) Calculeu l'operació $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$
k) Calculeu l'operació $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

Solució:

a) **Calculeu el producte escalar** $\vec{b} \cdot \vec{a}$

Com que el producte escalar té la propietat commutativa: $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ (resolt a l'apartat b)

b) **Calculeu l'operació** $(\vec{c} \times \vec{a})$

Si bé el producte vectorial no té la propietat commutativa, en canviar l'ordre del producte, el resultat tant sols es veu afectat per un signe negatiu:

$\vec{c} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) = -(20\vec{i} - 27\vec{j} - 24\vec{k}) = -20\vec{i} + 27\vec{j} + 24\vec{k} =$
(a partir de la solució de l'apartat f)

c) **Calculeu el doble producte vectorial** $(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{a}$

A l'apartat g hem calculat $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c})$. Si modifiquem la posició dels vectors, el nostre producte serà:

$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{a} = -(-\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c})) = \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c}) = -150\vec{i} + 32\vec{j} - 161\vec{k}$

d) **Calculeu el producte mixt** $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

Com que el vector resultant del producte vectorial $\vec{c}\times\vec{a}$ és perpendicular a ambdós vectors, també ho és al vector $\vec{a}$. El producte escalar de dos vectors perpendiculars dóna el valor nul:

$$(\vec{c}\times\vec{a})\perp\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = 0$$

i) **Calculeu el doble producte vectorial** $(\vec{a}\times\vec{a})\times\vec{c}$

$(\vec{a}\times\vec{a})\times\vec{c} = \vec{0}$, ja que el producte escalar de dos vectors paral·lels és nul.

j) **Calculeu l'operació** $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$

A l'apartat h de l'exercici anterior, hem obtingut que $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = -78$

Com que el producte escalar té la propietat commutativa: $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = -78$

k) **Calculeu l'operació** $(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

Com que $\vec{c}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{c}) \rightarrow (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = 78$
(resolt a l'apartat h de l'exercici anterior)

Exemple 0-5

Si tenim el vector $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, i els vectors $\vec{b} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + b\vec{k}$ i $\vec{c} = 6\vec{i} + c_1\vec{j} + c_2\vec{k}$

a) Calculeu, en el seu cas, el valor de b perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ siguen paral·lels.
b) Calculeu, en el seu cas, el valor de b perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ siguen perpendiculars.
c) Calculeu, en el seu cas, el valor de b perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{c}$ siguen paral·lels.
d) Calculeu, en el seu cas, el valor de b perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{c}$ siguen perpendiculars.

Solució:

a) **Calculeu, en el seu cas, el valor de b perquè els vectors** $\vec{a}\text{ i }\vec{b}$ **siguen paral·lels**

Ho `podem raonar, almenys, de dues formes:

a) Perquè siguen paral·les, les components dels vectors han de ser proporcionals, ja que l'unitari és el mateix:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=|\vec{a}|\vec{u}\\ \vec{b}=|\vec{b}|\vec{u}\end{array}\right\}\rightarrow \vec{b}=|\vec{b}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\rightarrow \vec{b}\text{ és proporcional a }\vec{a}\rightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$$\text{Com que }\frac{3}{-6}\neq\frac{4}{2}\text{, els vectors }\vec{a}\text{ i }\vec{b}\text{ no poden ser paral·lels}$$

b) **Si** $\vec{a}\text{ i }\vec{b}$ **són paral·lels, el seu producte vectorial ha de ser nul:**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & -2\\ -6 & 2 & b\end{vmatrix}=(4b+4)\vec{i}-(3b-12)\vec{j}+(6+24)\vec{k}\neq 0$$

Ja que la component en $\vec{k}$ és distinta de zero, llavors, els vectors $\vec{a}\text{ i }\vec{b}$ no poden ser paral·lels.

b) Calculeu, en el seu cas, el valor de b perquè els vectors $\vec{a}\text{ i }\vec{b}$ siguen perpendiculars.

El producte escalar de dos vectors perpendiculars és nul. Si apliquem aquesta condició als vectors $\vec{a}\text{ i }\vec{b}$, obtenim el següent:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=3\times(-6)+4\times 2-2b=0\rightarrow -18+8-2b=0\rightarrow b=-5$$

El vector $\vec{b}=-6\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ és perpendicular al vector $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

c) **Calculeu, en el seu cas, el valor de c_2 i c_3 perquè els vectors** $\vec{a}\text{ i }\vec{c}$ **siguen paral·lels.**

Apliquem, per exemple, el criteri que el producte vectorial ha de ser nul:

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & -2\\ 6 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=(4c_3+2c_2)\vec{i}-(3c_3+12)\vec{j}+(3c_2-24)\vec{k}=0$$

Perquè el vector $\vec{a}\times\vec{c}$ siga nul, també ho han de ser totes les seues components:

$$\left.\begin{array}{l} 4c_3 + 2c_2 = 0 \\ 3c_3 + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = -4 \\ 3c_2 - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 8 \end{array}\right\} \text{i verifiquen la primera component} : 4c_3 + 2c_2 = -4\times 4 + 2\times 8 = 0$$

En conseqüència, el vector $\vec{c} = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$ és paral·lel al vector $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

d) **Calculeu, en el seu cas, el valor de c_2 i c_3 perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{c}$ siguen perpendiculars**

Apliquem la condició $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$:

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 3\times 6 + 4c_2 - 2c_3 = 18 + 4c_2 - 2c_3 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{2c_3 - 18}{4} = \frac{1}{2}(c_3 - 9)$$

Qualsevol vector $\vec{c}$ que complesca la condició $c_2 = \frac{1}{2}(c_3 - 9)$ serà perpendicular al vector $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Per exemple, si $c_3 = 9 \rightarrow c_2 = 0$, el vector $\vec{c} = 6\vec{i} + 9\vec{k}$ és perpendicular a $\vec{a}$

Exemple 0-6

Si a l'exercici anterior, $b = -4$, quin és l'angle entre $\vec{a}$ i $\vec{b}$?

Solució:

Per calcular l'angle entre dos vectors, fem ús de les dues formes del producte escalar:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

El mòdul del vector $\vec{a}$:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$

El mòdul del vector $\vec{b}$, $(\vec{b} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k})$:

$$b = |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}$$

Llavors:

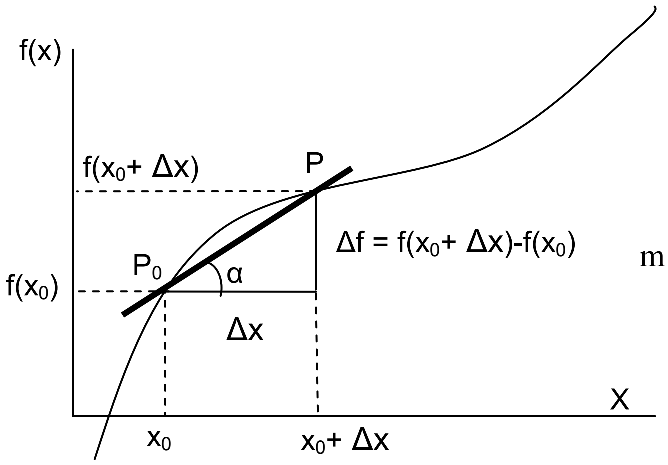
$$cos\,\varphi = \frac{-3\times 6+4\times 2+2\times 4}{\sqrt{29}\sqrt{56}} \approx \frac{-18+8+8}{5{,}39\times 7{,}48} \approx \frac{-2}{40{,}30} \approx -0{,}0496 \rightarrow \varphi \approx 92.84^0 = 1{,}62\ \text{rad}$$

0.6 Concepte de derivada d'una funció

El concepte de derivada es relaciona amb la variació d'una funció a l'entorn d'un punt.

Així, si considerem una funció continua f(x) com la de la figura i analitzem com varia la funció entre el punt P_0 i un altre punt pròxim P, veurem que a una variació Δx del valor de x es correspon una variació de la funció $\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Això es pot representar com un triangle rectangle on la hipotenusa representa el canvi de P_0 a P i és una recta[1] de pendent m = tg(α) que passa per ambdós punts.

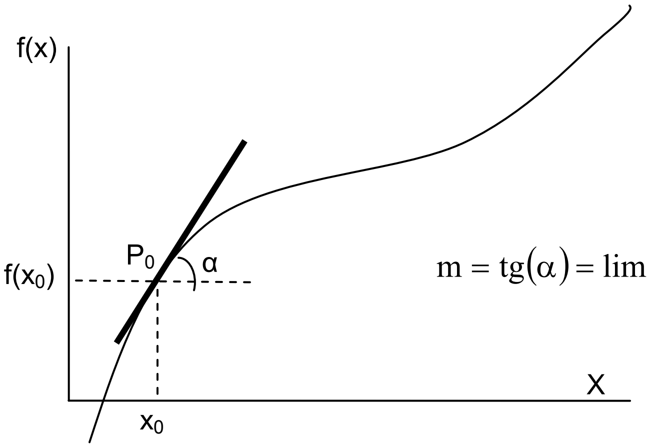
El pendent m és la variació de f(x) per unitat de x que ha ocorregut per passar de P_0 a P:



$$m = tg(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Però, per tal de conèixer la variació de la funció f(x) a l'entorn d'un punt, ens interessa que Δx siga un valor el més petit possible, és a dir "infinitament petit". En aquestes circumstàncies, la recta P_0P serà la recta tangent a la corba f(x) al punt P_0 i tg(α), el seu pendent:

[1] Cal recordar que una recta plana es pot representar per l'expressió y = mx+n, on m és el pendent de la recta i n el valor de y quan la recta talla l'eix d'ordenades.



$$m = tg(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

El valor del pendent es pot representar de la forma següent:

$$m = tg(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) = f'(x_0)$$

Ara el pendent m ens dona el valor de la variació per unitat de x de la funció f(x) a l'entorn immediat del punt P_0.

El símbol Δ vol dir "*increment*". Quan l'Δ tendeix a un valor infinitament petit, es diu que es un valor *diferencial* (per exemple: dx, df).

A la relació entre la variació diferencial de la funció en x_0, $df(x_0)$, i el diferencial de x aplicat es denomina "*derivada de f en x_0*", s'expressa com $f'(x_0)$ i el seu valor és el pendent de la recta tangent a la funció f(x) en el punt x_0.

Si el mateix càlcul que em fet per al punt x_0, el fem fer a tots el punts[2] de f(x), obtindríem la funció derivada f'(x), que es correspon amb l'evolució del valor del pendent de la recta tangent a f(x) en relació al valor de x.

La derivada de la funció derivada (f') d'una funció (f) la podem expressar com f''. La derivada de f'' serà f''' i així successivament.

Pot ser important recordar algunes idees respecte a la derivada d'una funció:

- Si la derivada és positiva en un punt, la funció és *creixent* en aquest punt. I al contrari, si la derivada és negativa, la funció és *decreixent*.

- Si la derivada d'una funció en un punt és nul·la, aquest punt es correspon amb un *màxim*, un *mínim* o un *punt d'inflexió*. Per saber de què es tracta tornaríem a derivar:

  - Si la segona derivada és positiva, la funció presenta un mínim en aquest punt.

  - Si la segona derivada és negativa, la funció presenta un màxim en aquest punt.

[2] Perquè siga possible la derivació per a qualsevol valor de x, la funció f(x) ha de ser contínua i no ha presentar canvis sobtats de pendent.

- Si la segona derivada és nul·la es tracta d'un punt d'inflexió.

A partir de la definició de derivada es poden deduir les *regles de derivació* següents:

	Regla	Exemple
Constant	$\frac{d}{dx}[k]=0$, on k=cnt	
Suma	$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x)$	$\frac{d}{dx}[x^3+5x+1]=3x^2+5$
Producte	$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$\frac{d}{dx}[x\cdot\cos(x)]=\cos(x)-x\sin(x)$
Divisió	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{-1}{x^2}$
Composició	$\frac{d}{dx}(f(g(x)))=g'(x)\cdot f'(g(x))$	$\frac{d}{dx}\cos(x^3)=3x^2(-\sin(x^3))=-3x^2\sin(x^3)$
Potència	$\frac{d}{dx}[f(x)^n]=f'(x)\cdot n\cdot f(x)^{n-1}$	$\frac{d}{dx}[x]=1$ $\frac{d}{dx}[5x^3]=15x^2$
Trigonomètriques	$\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$ $\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)$ $\frac{d}{dx}tg(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+tg^2(x)$	
Exponencials	$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$ $\frac{d}{dx}e^x=e^x\ln e=e^x$	
Logarítmiques	$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$ $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x\ln e}=\frac{1}{x}$	

Sens dubte, la taula pot ser més extensa, però ací limitem les regles de derivació a aquelles que podem fer falta per tal de cursar l'assignatura Fonaments Físics de la Informàtica.

Alguns exemples resolts:

a) $$\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{5x}\right)=1.\sqrt{5x}+x\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}=.\sqrt{5x}+\frac{\sqrt{5x}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{x}$$

b) $$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\cos^2(x)\right)=2e^{2x}\cos^2(x)-e^{2x}2\sin(x)\cos(x)$$

c) $$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

d) $$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{5x^3}\right]=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{5}x^{3/2}\right)=\sqrt{5}.\frac{3}{2}x^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{x}$$

e) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(5x)^3}\right]=\frac{d}{dx}\left[(5x)^{-3}\right]=5(-3)(5x)^{-3-1}=\frac{-15}{(5x)^4}$$

0.7 Derivada d'una funció vectorial

Quan una magnitud vectorial és depenent d'una altra magnitud, aquesta dependència es manifesta a través de tres equacions, una per a cada component del vector. Així, un vector que depenga del temps, per exemple la velocitat, vindria representat per *una funció vectorial* que té la forma:

$$v(t)=v_x(t)\vec{i}+v_y(t)\vec{j}+v_z(t)\vec{k}$$

on $v_x(t)$, $v_y(t)$ i $v_z(t)$, són *funcions escalars* de la variable t.

La *derivada de la funció vectorial* serà el resultat de derivar cadascuna de les tres funcions escalars, operant tal com s'ha indicat anteriorment:

$$\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}v_x(t)\vec{i}+\frac{d}{dt}v_y(t)\vec{j}+\frac{d}{dt}v_z\vec{k}$$

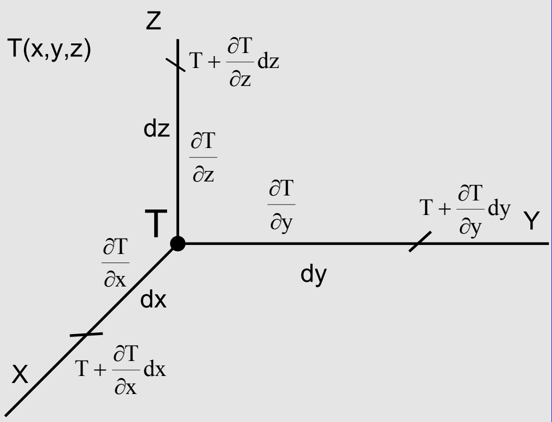
La derivada d'una funció vectorial és una altra funció vectorial el significat físic de la qual dependrà de les magnituds que hi participen. En aquest cas, en tractar-se d'una velocitat, la funció derivada és la magnitud acceleració.

La derivada direccional. El gradient

Les derivades que hem vist ara fan referència a funcions que varien respecte a una variable i ens permeten conèixer com varia aquella funció, en variar la variable a l'entorn d'un valor. Però en la natura trobem moltes vegades magnituds escalars que ocupen tot l'espai, de tal forma que la variació de la magnitud depén de la direcció en que ens movem. Així, hi ha la temperatura, la pressió del aire, la humitat, el potencial elèctric i l'energia potencial, el nombre de partícules en suspensió, el nombre de portadors de càrrega en un semiconductor i un llarg etcètera.

Per exemple, la temperatura a les proximitats d'una llar encesa variarà de manera molt diferent si ens hi acostem o si ens movem mantenint-hi la distància. Per estudiar com varia la temperatura a l'entorn d'un punt, hem d'anar una mica més enllà en el càlcul de derivades que hem vist fins ara:

Suposem un espai on està definida la temperatura T, que depén de la posició de cada punt, T(x,y,z). Si considerem un punt qualsevol, de temperatura T, podem estudiar com varia la temperatura en cada una de les direccions marcades pels eixos coordinats.



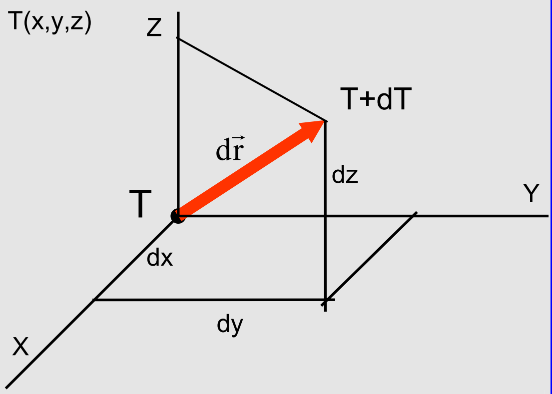
Així, en la direcció de l'eix X, la variació per unitat de longitud està donada per la derivada respecte de x, ja que y i z són constants. Aquesta derivada s'anomena *derivada parcial* i s'expressa de la forma $\partial T/\partial x$. Es deriva com hem vist fins ara: considerant, a l'hora de derivar, la resta de variables, y i z, com a constants. Llavors, la variació de T quan fem un desplaçament dx serà:

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx$$

El mateix passarà si ens desplacem en les direccions dels altres dos eixos:

per a l'eix Y, $\frac{\partial T}{\partial y}dy$,

i per a l'eix Z, $\frac{\partial T}{\partial z}dz$



Quan considerem un desplacem diferencial al llarg d'una direcció qualsevol, representada pel vector $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$, la variació de la temperatura serà deguda a cadascun dels tres desplaçaments diferencials que són component del vector $d\vec{r}$:

$$dT=\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial y}dy+\frac{\partial T}{\partial z}dz$$

Aquesta expressió es pot representar com el producte escalar de dos vectors, el vector $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ i el vector $\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$, que s'anomena *vector gradient* de temperatures i s'expressa com gradT o ∇T

Aleshores, la variació diferencial de la temperatura en un desplaçament $d\vec{r}$ és:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz = \nabla T \cdot d\vec{r}$$

Però dT és la variació de temperatura davant un desplaçament determinat. Ens interessaria més conèixer la variació per unitat de longitud, que seria la quantitat equivalent a una derivada: És a dir, dT/dr. Si la calculem:

$$\frac{dT}{dr} = \nabla T \cdot \frac{d\vec{r}}{dr} = \nabla T \cdot \vec{u}_{\vec{r}}$$

on $\vec{u}_{\vec{r}}$ és l'unitari en la direcció i sentit de $d\vec{r}$. Al producte escalar $\nabla T \cdot \vec{u}_{\vec{r}}$ se li anomena *derivada direccional* de T en la direcció $d\vec{r}$ i, si ens fixem un mica, observarem que es tracta de la projecció del vector gradient en la direcció del vector $\vec{r}$.

El càlcul del gradient, que no es massa complicat, ens permet conèixer com varia una funció escalar, en aquest cas la temperatura, en l'entorn de qualsevol punt de l'espai. És, per tant, un vector molt potent i dóna molta informació sobre una funció escalar coneguda en una regió de l'espai on estiga definida.

El vector gradient és pot escriure de la forma:

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)T = \nabla T$$

on $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ no és un vector. S'anomena *operador nabla* i té un significat matemàtic. És un "element" matemàtic que aplicat a una funció escalar dóna com a resultat el seu gradient. Pot aplicar-se a qualsevol funció escalar definida en una regió de l'espai i que complesca la condició de ser derivable en cada punt. Si la funció escalar és el potencial electrostàtic, V:

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V = \nabla V$$

La derivada direccional de la funció potencial en un punt qualsevol és:

$$\frac{dV}{dr} = \nabla V \cdot \frac{d\vec{r}}{dr} = \nabla V \cdot \vec{u}_{\vec{r}}$$

i la variació en un desplaçament $d\vec{r}$, és:

$$dV = \nabla V \cdot d\vec{r}$$

Sabem per electrostàtica que la relació entre la funció potencial i el camp elèctric és:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Comparant ambdues equacions, arribem a la conclusió que el gradient de la funció potencial canviat de signe és el camp elèctric: $\vec{E} = -\nabla V$

Llavors, si és conegut el potencial electrostàtic en una regió de l'espai, es pot calcular amb molta facilitat el vector camp elèctric en qualsevol punt.

El vector gradient es pot aplicar a altres magnituds físiques. Al nostre curs, trobarem el gradient a l'hora de parlar de l'energia potencial electrostàtica i en materials semiconductors, quan parlem de difusió de partícules carregades (ja que ens permetrà conèixer la densitat de corrent de difusió).

Deixant de banda que un bon coneixement de les funcions que intervenen en qualsevol sistema físic facilita la seua comprensió, en moltes ocasions és molt més fàcil calcular-ne la funció escalar (per exemple el potencial) i determinar-ne, a partir del gradient d'aquesta, la funció vectorial associada (en l'exemple, el camp elèctric), que calcular directament la funció vectorial.

Al llarg del present curs de física, parlarem únicament de la funció gradient a l'hora de relacionar camp elèctric i potencial, i per introduir el corrent de difusió en materials semiconductors. No està en els objectius del curs aplicar l'operador gradient a una funció escalar per calcular el seu valor. Tanmateix, serà útil veure un exemple que mostre com és de fàcil treballar-hi:

EXEMPLE: En una regió de l'espai, el potencial electrostàtic compleix la funció: V=XYZ+YZ+XY+XZ+X V. Determineu-ne el camp elèctric i el potencial al punt (1,2,3).

El potencial és immediat. N'hi haurà prou amb substituir el punt en la seua expressió:
V(1,2,3)=1x2x3+2x3+1x2+1x3=17 V

Per calcular el camp elèctric, tindrem en compte que

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = YZ + Y + Z + 1 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = XZ + Z + X \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = XY + Y + X$$

Llavors, el camp elèctric en un punt qualsevol serà:

$$\vec{E} = -\nabla V = -(YZ + Y + Z + 1)\vec{i} - (XZ + Z + X)\vec{j} - (XY + Y + X)\vec{k}$$

en el punt (1,2,3) $\vec{E} = -(6+2+3+1)\vec{i} - (3+3+1)\vec{j} - (2+2+1)\vec{k} = -12\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$

0.8 Integrals indefinides

L'operació inversa de la derivada és *la integral*. És a dir, la integral de la funció f(x) seria aquella funció F(x) la derivada de la qual donaria com a resultat f(x). Això és:

$$\text{Si } f(x)=\frac{dF(x)}{dx} \rightarrow dF(x)=f(x)dx \quad \rightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

F(x) s'anomena *primitiva* de f(x). El símbol $\int$ representa la integral del que ve darrere i la variable amb un valor diferencial, que sempre ha d'aparèixer dins de la integral, és la *variable d'integració*.

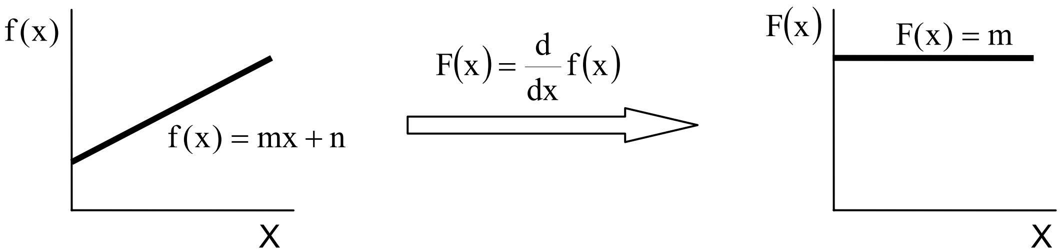
Si a la funció F(x) li sumem una constant qualsevol, la funció resultant també compleix la condició de ser la integral de f(x), ja que la derivada d'una costant dóna un resultat nul.

$$\text{Si } \frac{dF(x)}{dx}=f(x) \rightarrow \frac{d(F(x)+C)}{dx}=f(x) \text{ , per a tota constant C.}$$

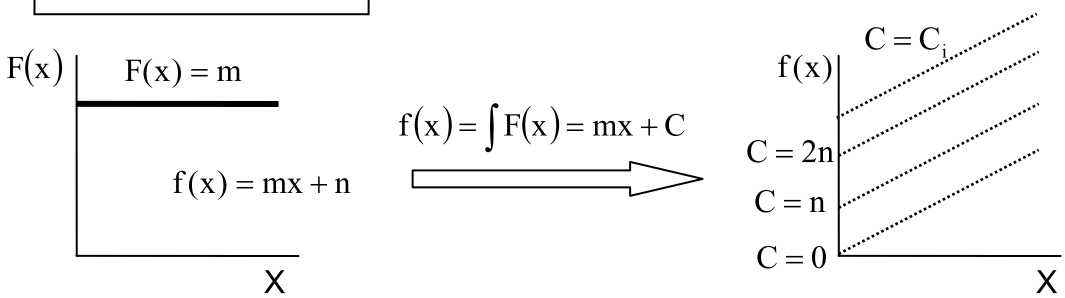
Llavors, així com la derivada d'una funció dóna un resultat únic, la integral té infinites solucions, tantes com valors podem donar a la constant C. A aquest tipus d'integral se li denomina *integral indefinida.*

Per exemple, agafem un cas molt senzill: una recta de pendent m f(x)=mx+n

La seua derivada



La integral de F(x)



El resultat final de la integral dependrà del valor de C. Per calcular C i determinar quina de totes les corbes n'és la solució, caldrà aplicar alguna condició del problema, com és el valor de f(x) en un punt. Si no tenim aquesta condició, el resultat queda indeterminat en funció de C.

Tenint en compte les regles de derivació, és possible fer una taula de les integrals immediates, és a dir, aquelles funcions que es podem integrar sense realitzar operacions complementàries:

	Regla
Suma	$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
producte per un cnt	$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$
Composi-ció	$\int g'(x)\cdot f'(g(x))dx = f(g(x)) + C$
Potència	$\int f'(x)\cdot f(x)^n\, dx = \dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$ (si n$\neq$-1)
Inversa	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
Trigono-mè-triques	$\int f'(x)\sin f(x)dx = -\cos f(x) + C$ $\int f'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x) + C$ $\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \mathrm{tg}\, f(x) + C$ $\int f'(x)\mathrm{tg}\, f(x)dx = \int f'(x)\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln\lvert\cos f(x)\rvert + c$
Exponen-cials	$\int f'(x)a^{f(x)}dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$ $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$

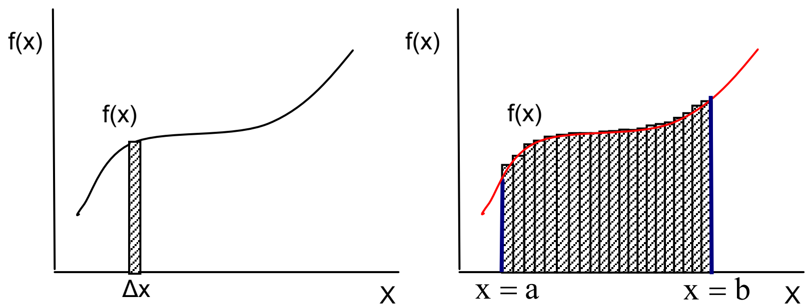
Sens dubte, la taula pot ser més extensa, però ací limitem les regles d'integració a aquelles que ens poden caldre al curs de física.

També cal tenir en compte que no totes les integrals són immediates i que moltes vegades cal recórrer a diferents tècniques d'integració. En aquest curs de física, totes les integrals seran immediates, exceptuant-ne algun cas en què serà necessari realitzar un canvi de variable.

0.9 Integrals definides

A banda de ser la inversa de la derivada, la integral té algun significat físic?

Si recordem, a l'hora d'integrar el valor de f(x) apareix multiplicat per dx. Si tracem la corba f(x) respecte de x, el producte f(x)Δx és l'àrea d'un rectangle, sota la corba f(x). Si considerem un tram, des que x=a fins que x=b, l'àrea total sota la corba f(x) la podem calcular, de forma aproximada, com la suma de tots el rectangles d'amplària Δx compresos entre ambdós valors:



$$\text{Àrea} \approx \sum_i f(x_i)\Delta X_i$$

Si considerem valors d'Δx tan petits com siga possible, cada rectangle tindrà l'amplària d'un punt i el sumatori anterior coincidirà amb l'àrea sota f(x) entre a i b. I precisament aquest sumatori de valors diferencials és la *integral definida* de la funció f(x):

$$\text{Àrea} = \text{Lím}_{\Delta X_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta X_i = \int_a^b f(x)dx$$

Aquesta integral es resol calculant la primitiva, exactament igual que en les integrals indefinides, però, en aquest cas, el resultat és un nombre i no existeix cap indefinició. Això es manifesta en posar la solució de la forma següent (Regla de Barrow):

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

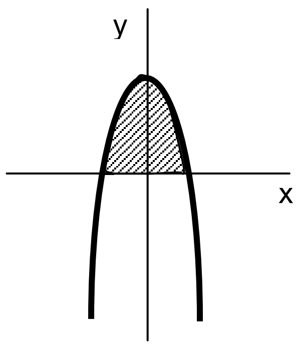
Si ens fixem, hem incorporat al símbol $\int$ dos valors, tot indicant l'interval d'integració de la variable x. El resultat de la integració serà el valor de la funció primitiva aplicada al punt final menys el seu valor aplicat al punt inicial: per tant, si els punts inicial i final són nombres, el resultat també ho és.

Exemple 0-7

Calculeu l'àrea definida per la corba $y = -x^2 + 4$ **i l'eix X,.**

Solució:

Per calcular els punt de tall de la corba amb l'eix X, cal fer y=0 en la expressió de la funció i determinar els valor de x:



$$0 = -x^2 + 4 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm 2$$

El límits de la integral estaran en x = -2 i x = 2

L'àrea es calcularà de la forma següent:

$$\text{àrea} = \int_a^b f(x)dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^2 + 4\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = -\frac{2^3}{3} + 8 - \left(\frac{2^3}{3} - 8\right) = \frac{32}{3}$$

.

A l'hora de treballar amb integrals definides, cal tenir-ne en compte algunes propietats:

$$\int_a^a f(x) = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Si $f(x) > 0$ i continua en [a,b] $\int_a^b f(x)dx > 0$

Si $f(x) < 0$ i continua en [a,b] $\int_a^b f(x)dx < 0$

De les dues últimes propietats es dedueix que una integral d'una funció serà positiva en els trams que la funció estiga per damunt de l'eix X i negativa si hi està per sota. Això caldrà tenir-ho en compte segons el que hi estiguem buscant.

Podem utilitzar la integració per determinar àrees i volums. Però també tindrem magnituds físiques que resulten d'una integral, com és el treball d'una força, la diferència de potencial entre dos punts o la intensitat elèctrica.

Hi ha dues integrals d'ús molt comú en Física, que són la integral de línia o circulació i la integral de superfície o flux. Exemples d'aquest tipus d'integral es realitzaran a classe.

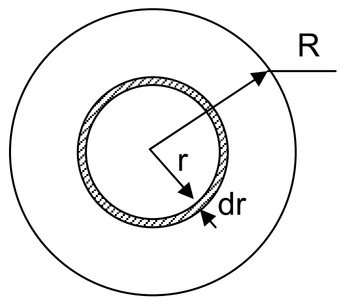
0.10 Exemples d'integrals definides

Exemple 0-8

Calculeu l'expressió de l'àrea d'un cercle de radi R.

Solució:

Considerem el cercle com a suma d'anells diferencials d'espessor dr . La superfície d'un anell, tenint en compte que dr →0 tindrà un valor diferencial i igual a: $ds = 2\pi r dr$



que és la superfície d'un rectangle de base 2πr i espessor dr.

La superfície del cercle serà:

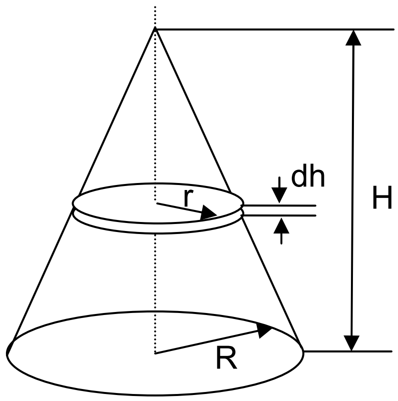
$$S = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

resultat que, com cabia esperar, coincideix amb l'expressió que ja coneixem.

Exemple 0-9

Fent ús del resultat de l'exemple anterior, calculeu el volum d'un con recte, d'altura h i radi de la base R.

Solució:



El volum del con serà la suma de discs d'espessor dh amb el radi de la base variable. El seu volum serà un valor diferencial d'expressió:

$$dV = \pi r^2 dh$$

El volum total serà el resultat d'integrar:

$$V = \int_0^H \pi r^2 dh$$

on la variable d'integració és h i varia entre 0 i H.

Per poder integrar, hem de trobar la relació entre r i h, ja que el valor de r depén del valor de h. Aquesta relació és una recta que passa pels punts $(r = 0, h = H)$ i $(r = R, h = 0)$. És fàcil demostrar que la recta és: $r = -\frac{R}{H}h + R$

Si substituïm en la integral:

$$V = \int_0^H \pi\left(-\frac{R}{H}h + R\right)^2 dh = \pi\int_0^H\left(\frac{R^2}{H^2}h^2 - 2\frac{R^2}{H}h + R^2\right) = \pi\left[\frac{R^2}{3H^2}h^3 - \frac{R^2}{H}h^2 + R^2h\right]_0^H =$$

$$= \pi\left(\frac{R^2}{3H^2}H^3 - \frac{R^2}{H}H^2 + R^2H\right) = \pi\left(\frac{1}{3}R^2H - R^2H + R^2H\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Com cabia esperar, el resultat és el volum conegut del con: un terç de l'àrea de la base per l'altura.

0.11 Flux. Integral de superfície

Un tipus d'integral molt habitual en sistemes físics és la integral de superfície, habitualment associada al concepte de flux. El flux està associat intuïtivament amb la idea d'una quantitat que travessa una superfície imaginària i, dins d'aquesta idea, s'utilitza per conèixer l'intercanvi que, d'una magnitud, en té una regió de l'espai amb una altra limítrofa. El càlcul de flux es realitza a partir del producte vectorial d'una magnitud amb un vector perpendicular a la superfície per tal de conèixer la quantitat de magnitud per unitat de superfície que la travessa. Així, parlem de flux d'energia, de matèria, de llum, etc.

Però no totes les magnituds vectorials expressen moviment a través d'una superfície, com succeeix quan parlem de camp elèctric o de camp magnètic. Llavors, per extensió, s'anomena flux al resultat de l'operació matemàtica següent, independentment de si el seu significat implica o no intercanvi d'una magnitud a través de la superfície:

$$\phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

on S és una superfície imaginària, $\vec{F}$ és una funció vectorial definida en S i $d\vec{s}$ és un vector perpendicular a la superfície. El mòdul de $d\vec{s}$ és el valor del diferencial de superfície on està definida $\vec{F}$ i el seu sentit és arbitrari encara que sempre cap al mateix costat de la superfície.

En el cas de superfícies tancades, s'adopta per conveni que el sentit del vector de superfície serà cap a l'exterior del volum definit per la superfície. D'aquesta forma, serà positiu el flux eixint i negatiu el flux entrant al volum.

Exemple 0-10

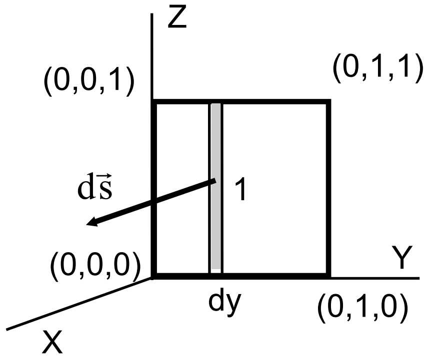
Calculeu el flux de la Funció Vectorial $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$ a través de la superfície quadrada que té com a vèrtexs els punts: (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1) y (0,0,1).

Solució:

El flux ve donat per l'expressió:

$$\phi = \int_S \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s}$$

on $d\vec{s}$ és un vector perpendicular a la superfície (direcció eix x) i sentit arbitrari (considerem x positiu). Llavors:



$$d\vec{s} = ds\vec{i} \quad \rightarrow \quad \phi = \int_S \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s} = \int_S \left(y\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}\right) \cdot \left(ds\vec{i}\right) = \int_S y ds$$

El vector $d\vec{s}$ pot representar qualsevol vector diferencial de superfície. No hi ha, a priori, cap condicionament respecte a la seua forma. Aleshores, prenem un element de superfície que simplifique la resolució de l'exercici.

En la integral apareix com a única variable la "y". Això ens permetrà elegir un element ds que siga funció únicament de l'element "dy". D'aquesta forma, la integral de superfície quedarà com una integral simple, amb una sola variable d'integració.

Si prenem l'element diferencial de la figura: un rectangle de base dy i altura unitat: ds=1.dy=dy:

$$\phi = \int_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = \int_o^1 y dy = \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

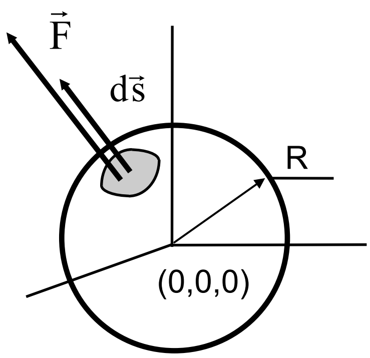
on els límits d'integració es corresponen amb els límits de la variable "y".

Exemple 0-11

Calculeu el flux de la funció vectorial $\vec{F} = Kr\vec{u}_r$ on el vector $\vec{r}$ és el vector de posició des del punt de l'espai $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ respecte als eixos coordinats, a través d'una superfície esfèrica de radi R i centrada a l'origen de coordenades.

Solució:

Si representem el sistema, observem que la funció vectorial $\vec{F}$, en ser radial, és perpendicular a la superfície esfèrica.



El vector $d\vec{s}$, per definició, és també perpendicular a la superfície esfèrica en cada punt i, per tant, paral·lel a la funció vectorial $\vec{F}$. Per altra banda, en tractar-se d'una superfície tancada, el sentit del vector $d\vec{s}$ serà cap l'exterior de l'esfera; llavors:

$$d\vec{s} = ds\,\vec{u}_r$$

El flux:

$$\phi = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_S (Kr\vec{u}_r)\cdot(ds\vec{u}_r) = \int_S Krds$$

ja que el producte escalar $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$.

Com que la integral està estesa al punts de l'esfera de radi R, en tots ells el mòdul de la funció vectorial és $F = KR$, que és un valor constant i independent de l'element ds de què es tracte. Llavors, si substituïm i integrem, obtenim:

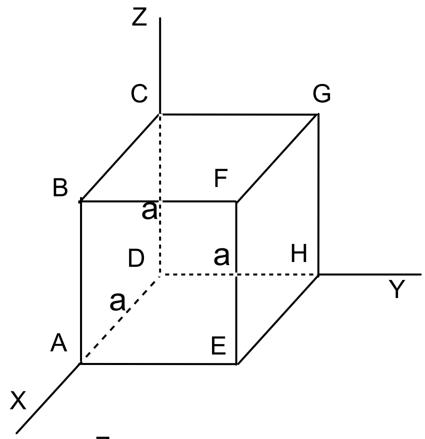
$$\phi = \int_S \mathrm{Krds} = \int_S \mathrm{KRds} = \mathrm{kR}\int_S \mathrm{dS} = \mathrm{kRS} = \mathrm{KR}4\pi\mathrm{R}^2 = \mathrm{K}4\pi\mathrm{R}^3$$

Exemple 0-12

Si tenim la funció vectorial $\vec{F} = 8\vec{i} + 3y^2z^2\vec{j}$, definida en una regió de l'espai, calculeu el flux de $\vec{F}$ a través de la superfície d'un cub les arestes del qual són paral·leles als eixos coordinats, i dos dels seus vèrtexs són els punts (0,0,0) i (a,a,a).

Solució:

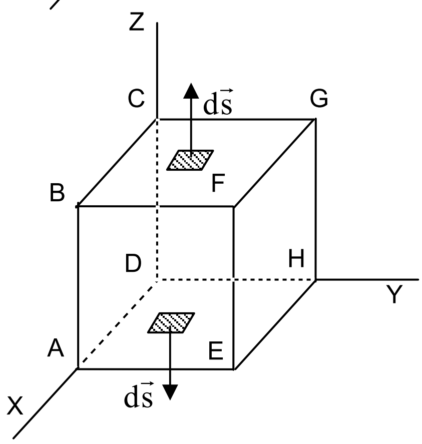
La superfície indicada és el cub representat en la figura on, per a més comoditat, s'hi han assignat lletres als seus vèrtexs. El flux de la funció vectorial a través d'aquesta superfície serà la suma del flux a través de cadascuna de les seues cares. Per ser una superfície tancada, el vector diferencial de superfície tindrà sentit cap l'exterior del volum definit pel cub.



- Flux a través de la cara BCGF:

En tots els punts d'aquesta cara es compleix que *z* = a. Llavors, la funció vectorial serà:

$$\forall(x,y,z) \in \mathrm{BCGF} \rightarrow \vec{F}(x,y,z) = 8\vec{i} + 3a^2y^2\vec{j}$$



Per altra banda, qualsevol element diferencial associat a aquesta àrea serà paral·lel a l'eix Z: $d\vec{s} = ds\vec{k}$ i serà, per tant, perpendicular a la funció vectorial:

$$\Phi_{\mathrm{BCGF}} = \int_{\mathrm{BCGF}} \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s} = \int_{\mathrm{BCGF}} \left(8\vec{i} + 3a^2y^2\vec{j}\right)\cdot ds\vec{k} = 0$$

En conseqüència, no hi ha flux a través de la superfície BCGF.

- Flux a través de ADHE :

En aquest cas, com *z* = 0, llavors: $\vec{F}(x,y,z) = 8\vec{i}$

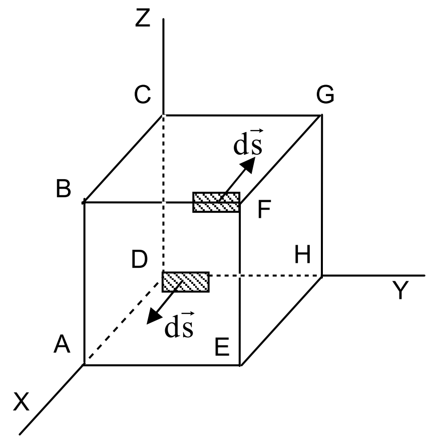
El vector diferencial de superfície és: $d\vec{s} = -ds\vec{k}$

Per tant, el flux també serà nul:

$$\Phi_{ADHE} = \int_{ADHE} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s} = \int_{ADHE} 8\vec{i} \cdot \left(-ds\vec{k}\right) = 0$$

- Flux a través de BAEF:

En aquesta superfície $x = a$, la qual cosa no afecta a la funció vectorial: $\vec{F}(x,y,z) = 8\vec{i} + 3y^2 z^2 \vec{j}$



El vector de superfície és: $d\vec{s} = ds\vec{i}$

Si en calculem el flux:

$$\Phi_{BAEF} = \int_{BAEF} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s} = \int_{BAEF} \left(8\vec{i} + 3y^2 z^2 \vec{k}\right) \cdot ds\vec{i} = \int_{BAEF} 8.ds = 8 \int_{BAEF} ds = 8.S_{BAEF} = 8a^2$$

on la integral ha eixit fàcil d'integrar, ja que el flux tant sols depén de la component perpendicular a la superfície de la funció vectorial i, en aquest cas, aquest valor és constant.

- Flux a través de CGDH:

De forma anàloga al cas anterior, la funció vectorial en cada punt d'aquesta superfície (on $x = 0$), adopta l'expressió:

$$\vec{F}(x,y,z) = 8\vec{i} + 3y^2 z^2 \vec{j},$$

tenint en compte que el vector diferencial de superfície és $d\vec{s} = -ds\vec{i}$, el flux serà:

$$\Phi_{CGDH} = \int_{CGDH} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s} = \int_{CGDH} \left(8\vec{i} + 3y^2 z^2 \vec{j}\right) \cdot \left(-ds\vec{i}\right) =$$
$$= -\int_{CGDH} 8.ds = -8 \int_{CGDH} ds = -8.S_{CGDH} = -8a^2$$

- Flux a través de EFGH:

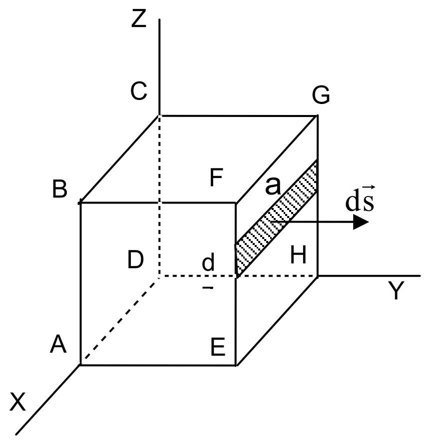
En aquest cas, en tots el punt de la superfície es compleix que $y = a$; per tant, la funció vectorial queda de la forma següent:

$$\vec{F}(x,y,z) = 8\vec{i} + 3a^2 z^2 \vec{j}$$

El vector diferencial de superfície és $d\vec{s} = ds\vec{j}$.

$$\Phi_{EFGH} = \int_{EFGH} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{s} = \int_{EFGH} \left(8\vec{i} + 3a^2 z^2 \vec{j}\right) \cdot \left(ds\vec{j}\right) = \int_{EFGH} 3a^2 z^2 ds$$

En els càlculs anteriors, arribàvem a una integral de superfície on la funció a integrar era nul·la o constant; llavors, la forma de l'element diferencial de superfície ens era indiferent. En aquest cas, apareix la variable z com a variable dins de la integral. Per poder integrar, necessitarem conèixer la relació entre la variable z i la superfície S.



Si elegim la forma d'un element diferencial de superfície de manera que la seua expressió matemàtica siga funció únicament de la variable z, haurem simplificat el procés d'integració. En el cas contrari, hauríem de realitzar una integral doble (veg. la nota al final del problema):

Si agafem un rectangle d'altura dz i d'amplària d'un costat a l'altre del quadrat, haurem obtingut un element de superfície que, sense deixar de ser diferencial, depén únicament de la variable z:

$$ds = adz$$

Si integrem:

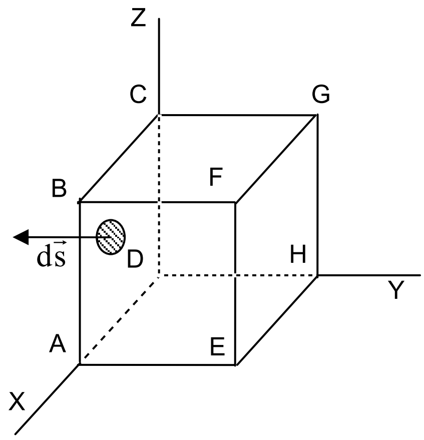
$$\Phi_{EFGH} = \int_{EFGH} 3a^2 z^2 ds = \int_0^a 3a^2 z^2 adz = 3a^3 \left(\frac{z^3}{3}\right)_0^a = a^6$$

- Flux a través de BCAD:

En tots els punt de la superfície es compleix que $y = 0$ i, per tant, la funció vectorial quedarà: $\vec{F}(x, y, z) = 8\vec{i}$

El vector diferencial de superfície és: $d\vec{s} = -ds\vec{j}$

Per tant, el flux serà:



$$\Phi_{BCAD} = \int_{BCAD} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_{BCAD} \left(8\vec{i}\right) \cdot \left(-ds\vec{j}\right) = 0$$

El flux de la funció vectorial a través de la superfície del cub serà la suma de tots els fluxos obtinguts a través de les seues cares:

$$\phi = \phi_{FGEH} + \phi_{ABCD} + \phi_{BFAE} + \phi_{CGHD} + \phi_{FGEH} + \phi_{ADHE} = 8a^2 - 8a^2 + a^6 = a^6$$