Práctica

USO E INTERPRETACIÓN DE VARIABLES ARTIFICIALES

Resumen Simplex Revisado:

- Conocemos c_j, b_i, a_{ij} (*datos originales del problema*)
- Sabemos en la SOLUCIÓN BÁSICA ACTUAL cuales son las
  - VB
  - VNB

  $\longrightarrow$ Conocemos B y calculamos B^{-1} $\longrightarrow$ $\boxed{X_B = B^{-1}\, b}$

  $\longrightarrow$ $\boxed{Z = c^t_B\, X_B}$

❶ *Calcular* $c_j - z_j$ donde $\boxed{z_j = (c^t_B\, B^{-1})\, a_j}$ $\longrightarrow$ JE

❷ *Calcular* Y_{JE} asociado a la variable que entra en la base: $\boxed{Y_{JE} = B^{-1}\, a_j}$

❸ *Calcular* $\dfrac{X_B}{Y_{JE}}$ $\longrightarrow$ IS

- Sabemos en la NUEVA SOLUCIÓN BÁSICA cuales son las
  - VB
  - VNB

  $\longrightarrow$ Conocemos B y calculamos B^{-1} $\longrightarrow$ $X_B = B^{-1}\, b$

  $\longrightarrow$ $Z = c^t_B\, X_B$

Problema ❶

Un problema de Producción:

Una empresa de maquinaria produce en una de sus plantas 3 tipos de máquinas de precisión.
La planta de fabricación está dividida en dos secciones que son:
Sección 1: Mecanizado
Sección 2: Montaje
Para producir cada una de las máquinas de precisión, el número de horas necesario en cada sección y la capacidad de cada sección (en horas) es el siguiente:

	Sección Mecanizado (horas/unidad)	Sección Montaje (horas/unidad)
Máquina de precisión 1	4	6
Máquina de precisión 2	1	1
Máquina de precisión 3	2	2
Capacidad (horas)	160	180

Los beneficios unitarios por máquina son de 50, 25 y 20 unidades monetarias respectivamente.
Sabiendo que la empresa puede vender toda su producción semanal, determinar cuántas unidades de cada máquina debe fabricar semanalmente la empresa para maximizar su beneficio.

1. Formular el modelo matemático del problema.
   Una vez expresado en forma estándar,
   ¿Cuál es el valor de **n** y **m** en el problema?

X1 = Nº de máquinas tipo 1 a fabricar
X2 = Nº de máquinas tipo 2 a fabricar
X3 = Nº de máquinas tipo 3 a fabricar

En forma general:

MAX = 50*X1 + 25*X2 + 20*X3;
s.a:
[MEC] 4*X1 + X2 + 2*X3 ≤ 160;
[MONT] 6*X1 + X2 + 2*X3 ≤ 180;

En forma estándar:

Cx1 Cx2 Cx3 Cx4 Cx5

MAX = 50*X1 + 25*X2 + 20*X3 + 0*X4 + 0*X5;
s.a:
[MEC] 4*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 1*X4 + 0*X5 = 160;
[MONT] 6*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 0*X4 + 1*X5 = 180;

ax1 ax2 ax3 ax4 ax5 b

n = 5
m = 2

- **SOLUCIÓN BASICA 0:**

VB (X4, X5)
VNB (X1, X2, X3)

$$\begin{array}{llllll} & C_{x1} & C_{x2} & C_{x3} & C_{x4} & C_{x5} \\ \text{MAX} = & 50*X1 + & 25*X2 + & 20*X3 & + 0*X4 & + 0*X5; \end{array}$$

s.a:

$$\begin{array}{lllllll} [\text{MEC}] & 4*X1 + & 1*X2 + & 2*X3 & + 1*X4 & + 0*X5 & = 160; \\ [\text{MONT}] & 6*X1 + & 1*X2 + & 2*X3 & + 0*X4 & + 1*X5 & = 180; \\ & a_{x1} & a_{x2} & a_{x3} & a_{x4} & a_{x5} & b \end{array}$$

v.básicas	B^{-1}		x_B
X4	1	0	160
X5	0	1	180
$C_B^t\, B^{-1}$	0	0	$Z = 0$

SB_0: (0,0,0,160,180) ; Z = 0

JE: X1
IS : X5

Prueba Optimalidad:

$c_{X1}-z_{X1} = 50$
$c_{X2}-z_{X2} = 25$ → JE: X1
$c_{X3}-z_{X3} = 20$

Determinar IS:

$$Y_{x1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Cx1 Cx2 Cx3 Cx4 Cx5

MAX = 50*X1 + 25*X2 + 20*X3 + 0*X4 + 0*X5;

s.a:

[MEC] 4*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 1*X4 + 0*X5 = 160;

[MONT] 6*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 0*X4 + 1*X5 = 180;

ax1 ax2 ax3 ax4 ax5 b

oritmo Simplex Revisado.

las variables y

- **SOLUCIÓN BASICA 0:**

VB (X4, X5)

VNB (X1, X2, X3)

v.básic
X4
X5
C_B^t B

SB_0: (0,0

IS : X5

Prueba Optimalidad:

$c_{X2}-z_{X2} = 50/3$

$c_{X3}-z_{X3} = 10/3$ → JE: X2

$c_{X5}-z_{X5} = -50/6$

Determinar IS:

$$Y_{x2}=\begin{bmatrix}1/3\\1/6\end{bmatrix}$$

- **SOLUCIÓN BASICA 1:**

VB (X4, X1)

VNB (X2, X3, X5)

v.básicas	B^{-1}		x_B
X4	1	-2/3	40
X1	0	1/6	30
$C_B^t\ B^{-1}$	0	50/6	Z = 1500

SB_1: (30,0,0,40,0) ; Z = 1500

JE: X2

IS : X4

$$\text{MAX} = 50*X1 + 25*X2 + 20*X3 + 0*X4 + 0*X5;$$
(the coefficients 50, 25, 20, 0, 0 are labelled C_{x1}, C_{x2}, C_{x3}, C_{x4}, C_{x5})

s.a:

[MEC] 4*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 1*X4 + 0*X5 = 160;

[MONT] 6*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 0*X4 + 1*X5 = 180;

a_{x1} a_{x2} a_{x3} a_{x4} a_{x5} b

oritmo Simplex Revisado.

las variables y

- **SOLUCIÓN BASICA 2:**

VB (X2, X1)

VNB (X4, X3, X5)

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	3	-2	120
X1	-1/2	½	10
$C_B^t B^{-1}$	50	-25	Z = 3500

SB_2: (10,120,0,0,0); Z= 3500

JE: X5
IS : X1

Prueba Optimalidad:

$c_{X3}-z_{X3} = -30$

$c_{X4}-z_{X4} = -50$ → **JE: X5**

$c_{X5}-z_{X5} = 25$

Determinar IS:

$$Y_{x5}=\begin{bmatrix}-2\\1/2\end{bmatrix}$$

Cx1 Cx2 Cx3 Cx4 Cx5

MAX = 50*X1 + 25*X2 + 20*X3 + 0*X4 + 0*X5;
s.a:
[MEC] 4*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 1*X4 + 0*X5 = 160;
[MONT] 6*X1 + 1*X2 + 2*X3 + 0*X4 + 1*X5 = 180;

ax1 ax2 ax3 ax4 ax5 b

oritmo Simplex Revisado.
s las variables y

- **SOLUCIÓN BASICA 2:**
  VB (X2, X1)
  VNB (X4, X3, X5)

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	3	-2	120
X1	-1/2	½	10
$C_B^t B^{-1}$	50	-25	Z = 3500

SB_2: (10,120,0,0,0); Z= 3500

JE: X5
IS : X1

SOLUCIÓN BASICA 3:
VB (X2, X5)
VNB (X4, X3, X1)

v.básicas	B^{-1}		x_B
X2	1	0	160
X5	-1	1	20
$C_B^t B^{-1}$	25	0	Z = 4000

Cx1-Zx1= -50
Cx3-Zx3= -30
CX4-Zx4= -25

SB_3: (0,160,0,0,20); Z=4000

SOLUCIÓN ÓPTIMA

INFORME LINGO:

```
MAX = 50*X1 + 25*X2 + 20*X3;
[MEC]  4*X1 + X2 + 2*X3 < 160;
[MONT] 6*X1 + X2 + 2*X3 < 180;
```

Objective value: **4000.000**

Variable	Value	Reduced Cost
X1	**0**.000000	**50**.00000
X2	**160**.0000	0.000000
X3	**0**.000000	**30**.00000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	**4000**.000	**1**.000000
MEC	**0**.000000	**25**.00000
MONT	**20**.00000	**0**.000000

Problema ❷

Dado el siguiente programa lineal:

Min 3 X1 + 2 X2

s.a:

[R_1] 2 X1 + X2 ≤ 10

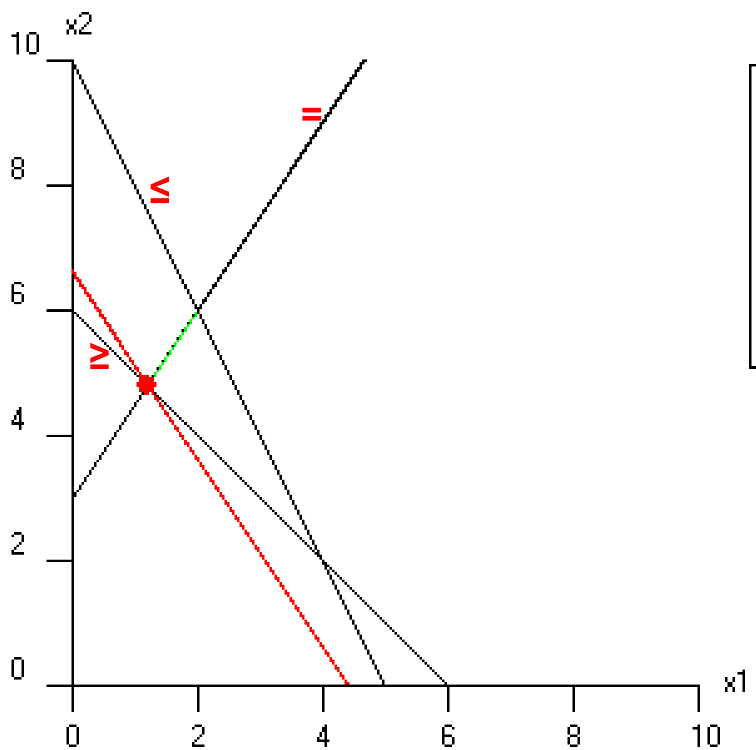
[R_2] -3 X1 + 2 X2 = 6

[R_3] X1 + X2 ≥ 6

X1, X2 ≥ 0

1. Obtener la solución óptima mediante el método gráfico. Identificar las restricciones, la región factible y la solución óptima.

Región factible



Solución

Tipo de solucion	:	Solución óptima
Funcion objetivo	:	13,2
Valor X1	:	1,2
Valor X2	:	4,8

2. Plantear el modelo matemático ampliado

Min 3 X1 + 2 X2

s.a:

[R_1] 2 X1 + X2 + X3 = 10
[R_2] -3 X1 + 2 X2 + Xa = 6
[R_3] X1 + X2 – X4 + Xb = 6

X1, X2, X3, X4, Xa, Xb ≥ 0

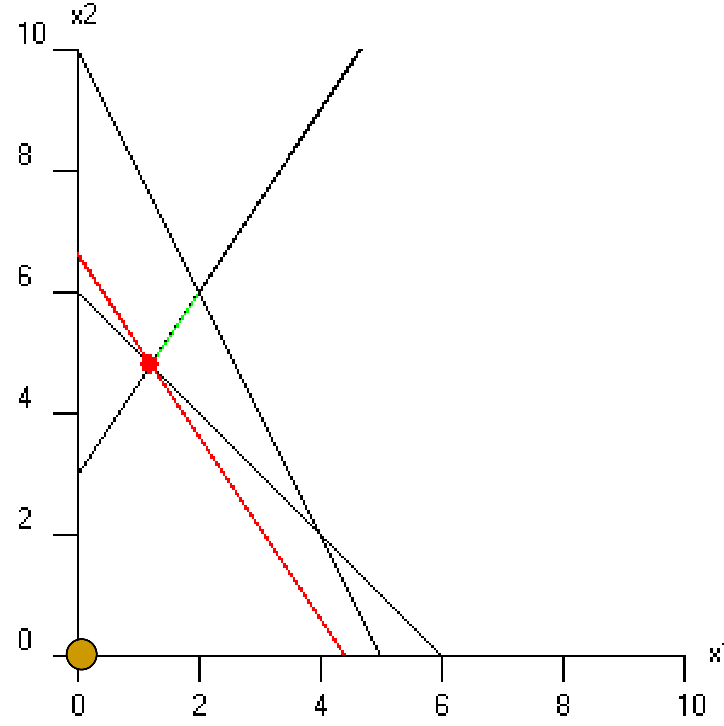
3. Obtener la solución óptima aplicando el método de las 2 fases.
Identifica sobre la solución gráfica la secuencia de soluciones básicas obtenida.

Fase 1: ***Min Xa + Xb***

SB_0:

V. Básicas	B^{-1}			X_B	Y_{X2}	X_B / Y_{X2}
X3	**1**	**0**	**0**	**10**	1	10
Xa	**0**	**1**	**0**	**6**	2	3
Xb	**0**	**0**	**1**	**6**	1	6
$C^t_B B^{-1}$	**0**	**1**	**1**	**Z = 12**		

Región factible



$C^t_B B^{-1} = (0, 1, 1)$

$C_{X1}-Z_{X1} = 0 + 2 = 2$
$C_{X2}-Z_{X2} = 0 - 3 = -3$
$C_{X4}-Z_{X4} = 0 + 1 = 1$

JE=X2 IS=Xa

3. Obtener la solución óptima aplicando el método de las 2 fases.
Identifica sobre la solución gráfica la secuencia de soluciones básicas obtenida.

Fase 1: ***Min* Xa + Xb**

SB_1:

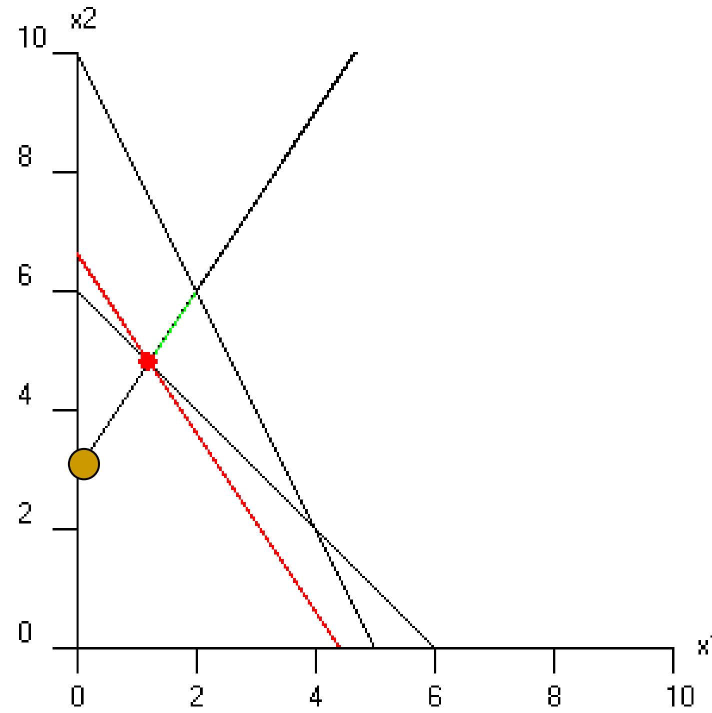
V. Básicas	B^{-1}			X_B	Y_{X1}	X_B/Y_{X1}
X3	1	-1/2	0	7	7/2	2
X2	0	1/2	0	3	-3/2	--
Xb	0	-1/2	1	3	5/2	6/5=1,2
$C^t_B B^{-1}$	0	-1/2	1	Z = 3		

$C^t_B B^{-1} = (0, -1/2, 1)$

$C_{X1}-Z_{X1} = 0 - 5/2 = -5/2$
$C_{X4}-Z_{X4} = 0 + 1 = 1$

JE=X1 IS=Xb

Región factible



3. Obtener la solución óptima aplicando el método de las 2 fases.
Identifica sobre la solución gráfica la secuencia de soluciones básicas obtenida.

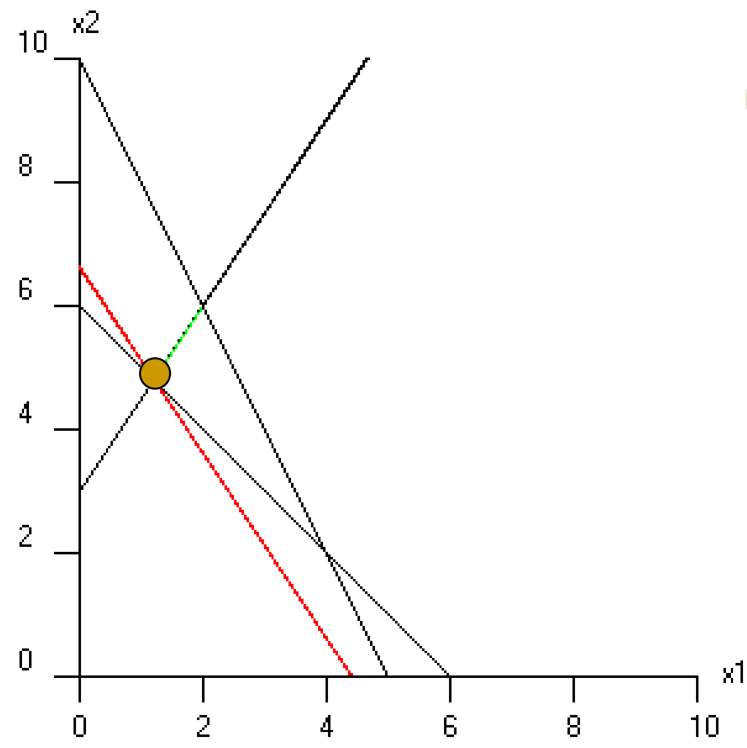
Fase 1: ***Min* Xa + Xb**

SB_2:

V. Básicas	B^{-1}			X_B
X3	1	1/5	-7/5	14/5 = 2.8
X2	0	1/5	3/5	24/5 = 4.8
X1	0	-1/5	2/5	6/5 = 1.2
$C^t_B B^{-1}$				Z = 0

SOLUCIÓN ÓPTIMA FASE 1

Región factible



3. Obtener la solución óptima aplicando el método de las 2 fases.
Identifica sobre la solución gráfica la secuencia de soluciones básicas obtenida.

Fase 2: **$\boxed{\text{Min } 3\,X1 + 2\,X2}$**

SB_2:

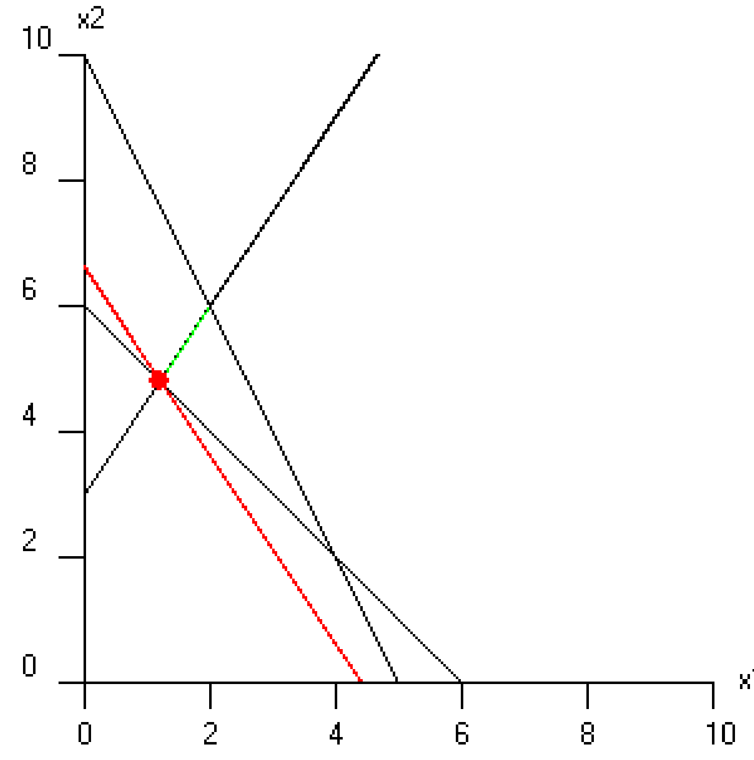
V. Básicas	B^{-1}			X_B
X3	1	1/5	-7/5	14/5 = 2.8
X2	0	1/5	3/5	24/5 = 4.8
X1	0	-1/5	2/5	6/5 = 1.2
$C^t_B B^{-1}$	0	-1/5	12/5	Z = 66/5 = 13,2

$C^t_B B^{-1} = (0, -1/5, 12/5)$

$C_{X4} - Z_{X4} = 0 + 12/5 = +12/5 = +2{,}4$

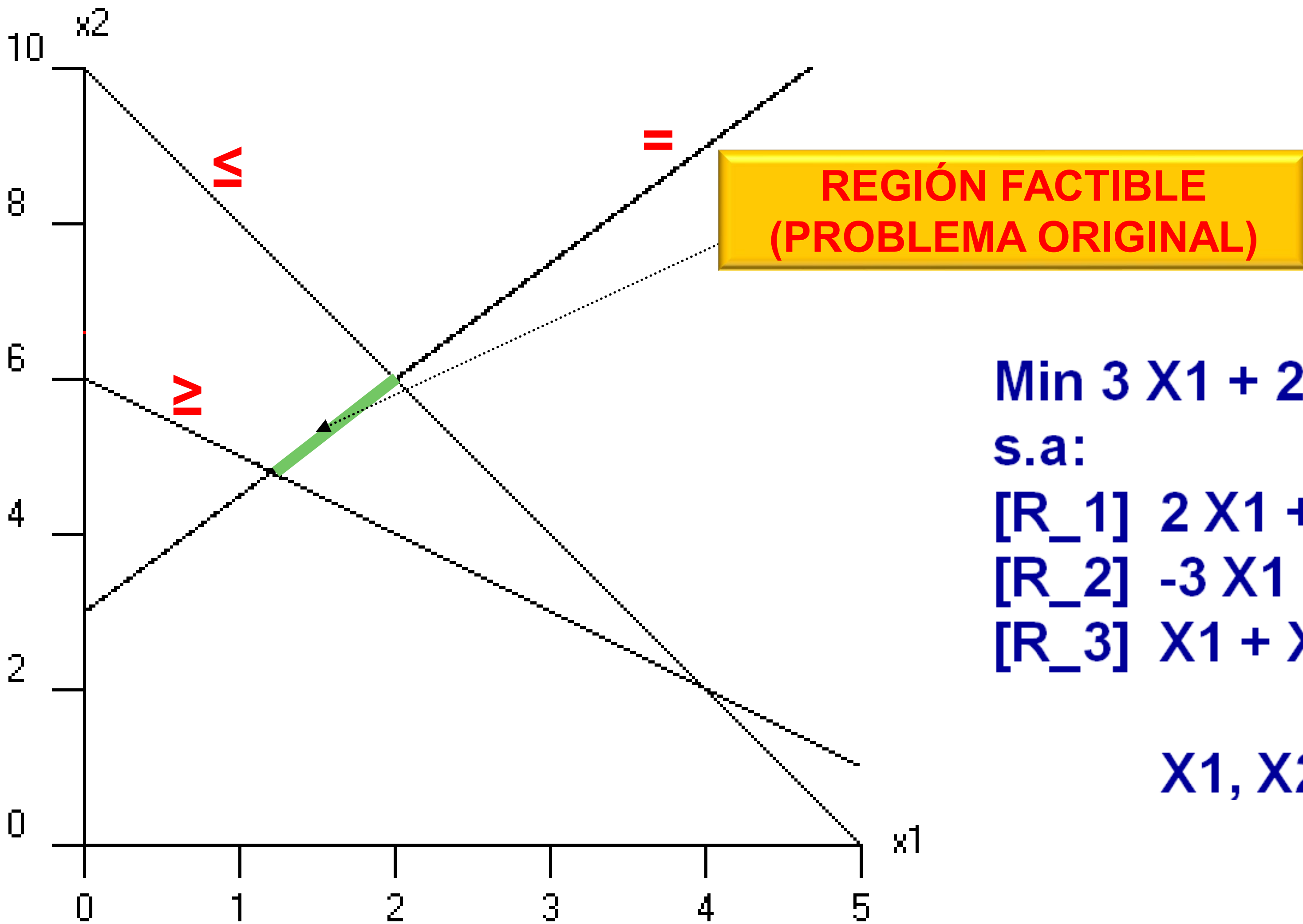
SOLUCIÓN ÓPTIMA

Región factible



4. A la vista de la secuencia de soluciones, ¿cuál es el efecto -sobre la región factible y sobre la factibilidad de cada solución- de haber añadido las variables artificiales al modelo matemático?

4.



Min 3 X1 + 2 X2

s.a:

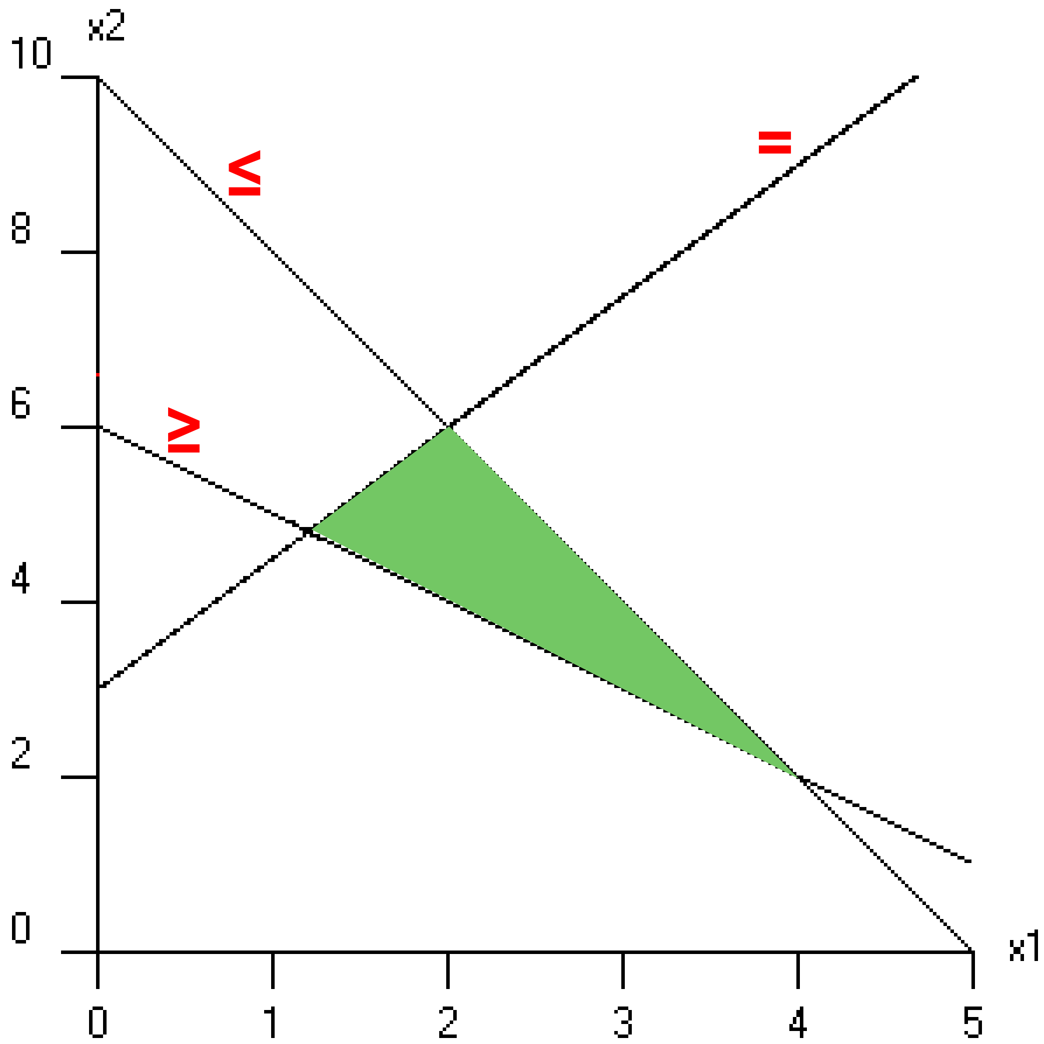
[R_1] 2 X1 + X2 ≤ 10

[R_2] -3 X1 + 2 X2 = 6

[R_3] X1 + X2 ≥ 6

X1, X2 ≥ 0

4.



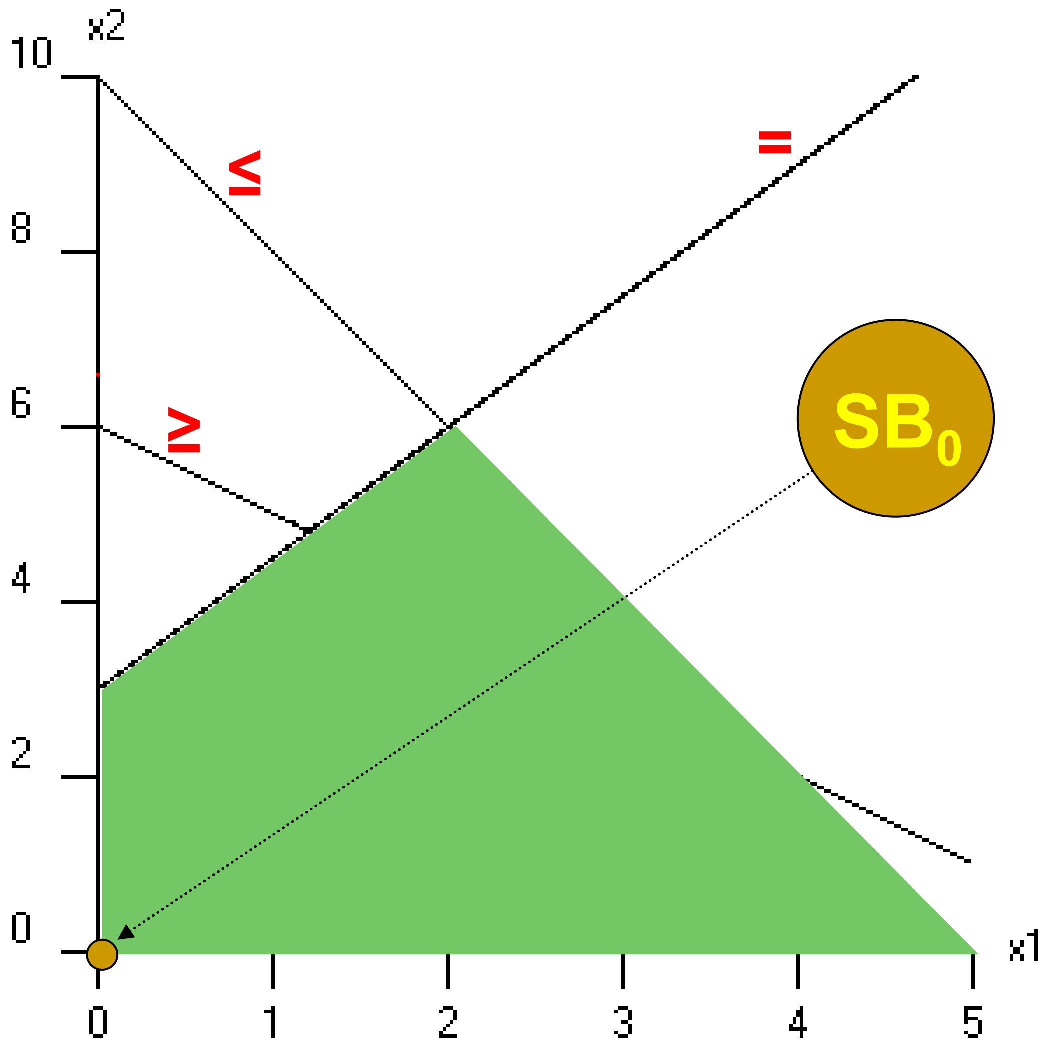
Efecto de añadir variables artificiales:

AUMENTAR LA REGIÓN FACTIBLE PARA QUE LA SB_0 (la solución trivial) SEA FACTIBLE

Restricción =:

Como si fuera ≤

4.



Efecto de añadir variables artificiales:

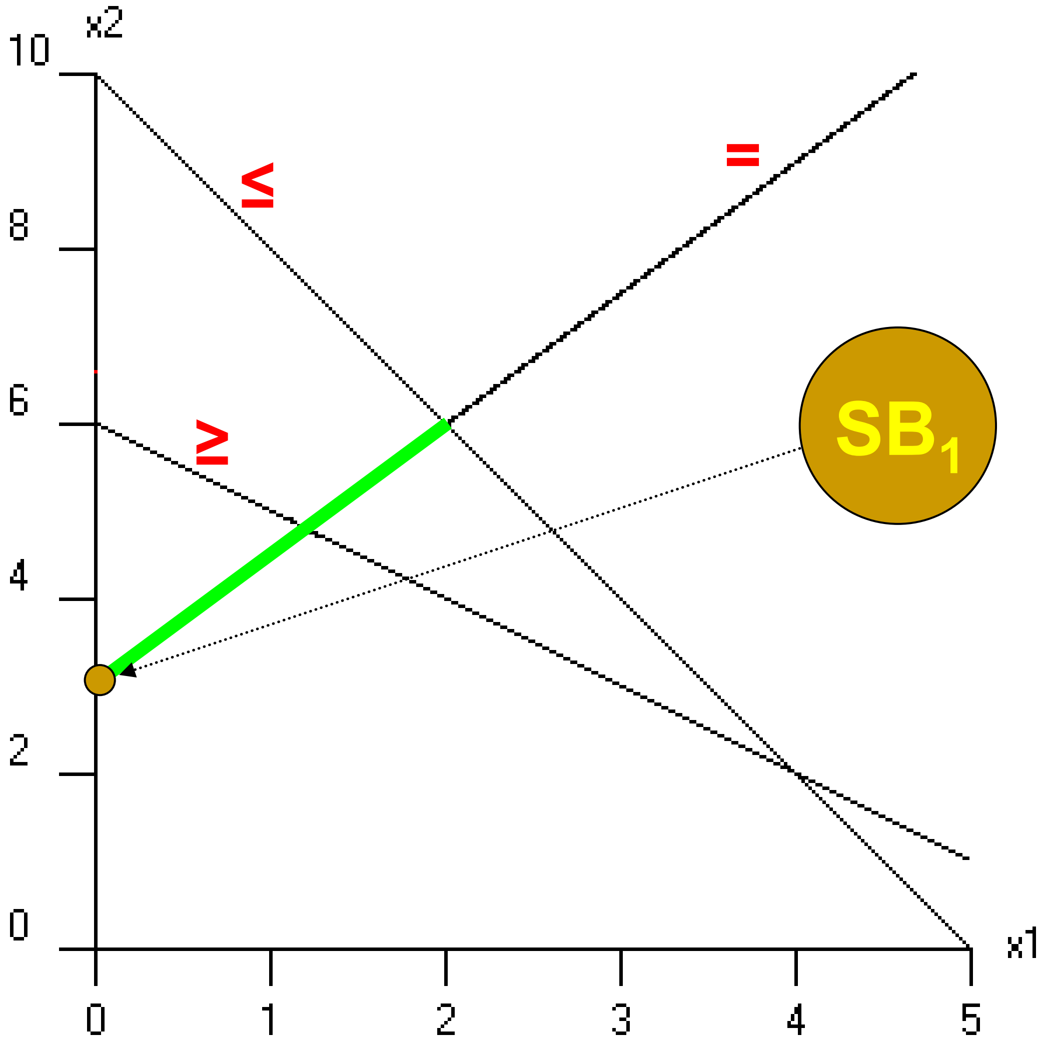
AUMENTAR LA REGIÓN FACTIBLE PARA QUE LA SB_0 (la solución trivial) SEA FACTIBLE

Restricción =:
Como si fuera ≤

Restricción ≥:
Como si no existiera

La solución SB_0 es FACTIBLE para el modelo ampliado y NO FACTIBLE para el modelo original

4.



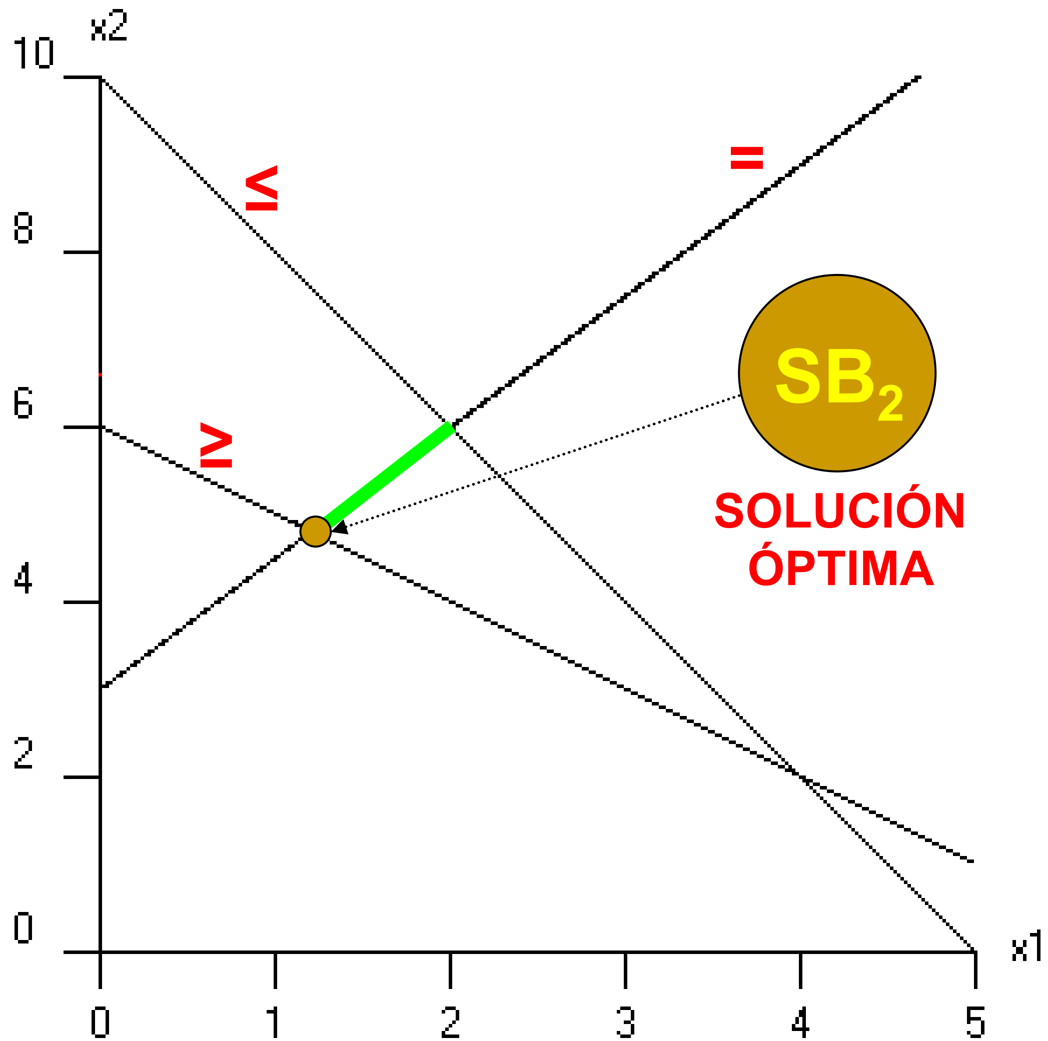
La variable artificial de la restricción = sale de la base:

SE REDUCE LA REGIÓN FACTIBLE AMPLIADA

A partir de esta iteración la restricción = tiene efecto

La solución SB_1 es FACTIBLE para el modelo ampliado y NO FACTIBLE para el modelo original

4.



La variable artificial de la restricción ≥ sale de la base:

SE REDUCE LA REGIÓN FACTIBLE AMPLIADA Y SE OBTIENE LA ORIGINAL

A partir de esta iteración la restricción ≥ tiene efecto

La solución SB_2 es FACTIBLE para el modelo original