DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (etsinf)

AMA - Primer Parcial 12-11-2012 Duración prevista: 2h

---

1. (0.3p) Halla el valor de $x \in \mathbb{R}$ para que el número complejo $= \dfrac{(x+2)-xi}{x-i}$ sea real.

Reescribimos z en forma binómica

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{(x+2)-xi}{x-i} = \frac{[(x+2)-xi]\,(x+i)}{(x-i)\,(x+i)} = \frac{x(x+2)+(x+2)i-x^2i-xi^2}{x^2+1^2} = \\
&= \frac{[x(x+2)+x]+(-x^2+x+2)i}{x^2+1} = \frac{(x^2+3x)}{x^2+1} + \frac{(-x^2+x+2)}{x^2+1}i
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$$

debemos hallar $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$-x^2+x+2=0$$

Por tanto, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que z es real serán

$$
\begin{aligned}
x &= -1 \quad \text{(en este caso, } z=-1\text{)} \\
x &= 2 \quad \text{(en este caso, } z=5\text{)}
\end{aligned}
$$

---

2. (0.5p) Encuentra el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\log(2x-5)}$.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^2-4 \ \geq 0 \quad , \quad 2x-5>0 \quad , \quad \log(2x-5) \neq 0 \right\}$$

Ahora bien,

$$x^2-4 \ \geq 0 \iff x^2 \geq 4 \iff |x| \geq 2 \iff x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[$$

Alternativamente, se llega a la misma conclusión razonando que x^2-4 es una parábola con las ramas hacia arriba, que se anula en ± 2. Respecto a la segunda desigualdad,

$$2x-5>0 \iff x > \frac{5}{2} \iff x \in \left]\frac{5}{2},+\infty\right[$$

Por otro lado,

$$\log(2x-5)=0 \iff 2x-5=1 \iff 2x=6 \iff x=3$$

En resumen,

$$D(f) = \left(\left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[\right) \cap \left]\frac{5}{2},+\infty\right[\cap (\mathbb{R} \sim \{3\}) = \left]\frac{5}{2},+\infty\right[\sim \{3\}$$

---

3. (0.7p) A partir del estudio de la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}$, determina las regiones de crecimiento y decrecimiento así como los puntos en los que alcanza máximos y/o mínimos relativos.

El dominio de la función $f(x)$ será

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0 \ \} = [0,+\infty[$$

Por otro lado, su derivada

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x^2}(-2x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x^2} = \left(-2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^{-x^2} = \left(\frac{1-4x^2}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^{-x^2}$$

está definida en $]0,+\infty[$. El signo de f'coincidirá con el de $1-4x^2$, al ser el denominador de f' y la exponencial siempre positivas.
Así, teniendo en cuenta que $1-4x^2$ es una parábola con las ramas hacia abajo que se anula en $x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=\frac{1}{2}$, tenemos un posible extremo relativo en $x_2=\frac{1}{2}$, ya que $x_1=-\frac{1}{2}\notin D(f)$ y, además,

$$\begin{array}{rcl} 1-4x^2 & > & 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\\ 1-4x^2 & < & 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\end{array}$$

Como la función f sólo está definida en $[0,+\infty[$, podemos concluir que f es estrictamente creciente en $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ y es estrictamente decreciente en $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. Además, podemos decir que en $x_2=\frac{1}{2}$ la función alcanza un máximo relativo. También puedes utilizar el signo de la derivada segunda para justificar ésto último.

---

4. a)$_{(0.5\text{p})}$ Calcula el valor exacto de $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$.

b)$_{(0.7\text{p})}$ Aproxima, mediante la regla de Simpson, el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3}\,dx$ dividiendo el intervalo de integración en 4 partes iguales.

c)$_{(0.3\text{p})}$ Acota el error cometido en la aproximación del apartado b) sabiendo que $M_4=2$. ¿Qué precisión obtienes?

d)$_{(0.3\text{p})}$**OPCIONAL (sube nota)** Calcula el valor exacto de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3}dx$. Aproxímalo y verifica la precisión que obtienes en c) comparando con este resultado.

---

a)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx &= \left[\begin{array}{ccc} \sqrt{x}=t & \Longleftrightarrow & x=t^2 \\ & dx=2t\ dt & \\ x\in[1,4] & \Longleftrightarrow & t\in[1,2]\end{array}\right] = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t}2tdt = 2\int_1^2\frac{1}{t+1}dt = \\ &= 2\log(t+1)]_1^2 = 2\left(\log(3)-\log(2)\right) = 2\log\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

b) Para la aproximación pedida consideremos $h=\frac{1}{4}$ y la partición $P=\left\{\ 0\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{2}{4}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ 1\ \right\}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3}dx &\simeq S_4=\frac{\frac{1}{4}}{3}\left[f(0)+4\cdot\left(f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right)+2\cdot f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(1\right)\right]= \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left[\frac{1}{0^2+3}+4\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2+3}+\frac{\frac{3}{4}+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+3}\right)+2\cdot\frac{\frac{2}{4}+1}{\left(\frac{2}{4}\right)^2+3}+\frac{1+1}{(1)^2+3}\right]= \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}+4\cdot\left(\frac{20}{49}+\frac{28}{57}\right)+2\cdot\frac{6}{13}+\frac{1}{2}\right)=0.4461646331...\end{aligned}$$

c) Aplicando la cota de error de Simpson correspondiente a la aproximación

$$\left|\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3}\,dx - S_4\right| \leq \frac{(1-0)^5}{180\cdot 4^4}\cdot 2 = \frac{1}{23040} = 4.34\cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

que garantiza, al menos, tres decimales.

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3}dx &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3}dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \\
&= \frac{1}{2}\log\left(x^2+3\right)\Big]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\log\left(x^2+3\right)\Big]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^1 = \\
&= \frac{1}{2}\left(\log(4)-\log(3)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = 0.4461409302...
\end{aligned}$$

por lo que, en efecto, la aproximación obtenida en **c**) proporciona, al menos, tres decimales correctos.