ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Problemas propuestos: GENERALIDADES Y CÁLCULO DE LÍMITES

1. Para las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ definidas mediante

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \quad , \quad \begin{cases} c_n = 4n + c_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

   determina los valores de a_2, a_4, b_1, b_4, c_3 y c_5.

2. A partir de las subsucesiones de los términos pares e impares de la sucesión $a_n = [(-1)^n + 1]\cos(n\pi)$, deduce si $\{a_n\}$ converge o diverge.

3. Calcula los límites de las sucesiones:

   a) $\frac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}$
   b) $\frac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7}$
   c) $\sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n+4}}$
   d) $\sqrt{2n^2+3} - \sqrt{n^2-n}$
   e) $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+3}$
   f) $\sqrt{n^2+n} - n$
   g) $\frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}}$
   h) $\frac{2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 4^{n-1}}{3^n + 2^{2n}}$

4. Encuentra los límites de las sucesiones que siguen. La fórmula de Euler puede ayudarte:

   a) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$
   b) $\left(\frac{1+3n}{5+3n}\right)^{\frac{n^2}{4n-2}}$
   c) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$

5. Haciendo uso del criterio de Stolz, encuentra los límites de las sucesiones:

   a) $\frac{1+4+\cdots+n^2}{5+8+\cdots+(n^2+4)}$
   b) $\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)^n$
   c) $\frac{1+2+\cdots+n+(n+1)\cdots+2n}{n^2}$

6. Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones:

   a) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $b_n = log(n)$
   b) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $b_n = \sqrt{n}$
   c) $a_n = \sqrt{n}$ y $b_n = log(n)$
   d) $a_n = 2^n$ y $b_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$
   e) $a_n = n^2 + \log(n)$ y $b_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
   f) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ y $b_n = n^2$
   g) $a_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ y $b_n = n^3$
   h) $a_n = n!$ y $b_n = 1! + 2! + \cdots + n!$

7. Ordena, según su magnitud y justificando el resultado, las sucesiones: $\sqrt{n}$, n, $\log(n)$, n^2, e^n, n^3 y $n!$. Selecciona, de entre ellas, las que tengan el mismo orden de magnitud que cada una de las que siguen:

   a) $n^2 + \sqrt{n+1}$
   b) $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

c) $\frac{\sqrt{n^7}-\sqrt{n^3+1}}{5+2\sqrt{n}}$

*d) $\log\left(n^5+e^{2n}\right)$

8. Ordena, de menor a mayor magnitud, las tres sucesiones

$$3\sqrt{n^5+n}-n^2 \quad , \quad \log(n) \quad , \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ ...\ +\frac{1}{n}$$

ANÀLISI MATEMÀTICA (AMA)

UT4 - Ejercicios Adicionales: GENERALIDADES Y CÁLCULO DE LÍMITES

1. Calcula el término general de las sucesiones:

   a) $-1\ ,\ +2\ ,\ -3\ ,\ +4\ ,\ -5\ ,\ +6\ ,\ ...$
   b) $\frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{4}{27}\ ,\ \frac{5}{81}\ ,\ ...$
   c) Una progresión aritmética de diferencia d y primer término $a_1 = a$
   d) Una progresión geométrica de razón r y primer término $a_1 = a$. Calcula también $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

2. Verifica, a partir de las definiciones correspondientes, que:

   a) La sucesión $a_n = \frac{10-n^2}{n+2}$ es decreciente y está acotada superiormente por 3
   b) La sucesión $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ decrece y, además, $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$
   c) La sucesión que satisface $a_{n+1} = 4a_n$ es creciente sólo si $a_1 > 0$. ¿En qué caso está acotada?
   d) La sucesión $a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n}{n+7}$ con $a_1 = 7$ es decreciente y acotada.

3. Verifica que $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ es estrictamente creciente y está acotada superiormente.

4. Estudia el crecimiento/decrecimiento y si son o no acotadas las sucesiones:

   a) $\begin{cases} 2a_{n+1} = 2 + a_n \\ a_1 = 0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} a_{n+2} = n + a_{n+1} \\ a_1 = 10 \end{cases}$

*5. Determina el valor del límite de la sucesión $\sqrt{n^2+n-1} - nx$, según los valores de $x \in \mathbb{R}$.

6. Encuentra los valores de los parámetros α y β tales que:

   a) $\lim_n \left(\frac{1-\alpha n^2}{3n^2-2}\right)^{1-\beta n^2} = \sqrt{e}$
   b) $\lim_n \left(\frac{n+\alpha}{n+2}\right)^{\alpha n+\beta} = \lim_n \left(\frac{n+\beta}{n+2}\right)^{2n+\alpha}$

7. Compara los ódenes de magnitud de las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ ...\ + \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad \text{y} \quad b_n = \log(n)$$

8. Teniendo en cuenta que $x = e^{\log(x)}$, aplica logaritmos y el criterio de Stolz para hallar los límites de las sucesiones:

   a) $\sqrt[n]{n}$
   b) $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$

*9. Definimos la sucesión de puntos $\{P_n\}$ a partr de $P_0 = (0,0)$ de manera que P_1 se encuentra al norte de P_0 y a una distancia de 1, P_2 se encuentra al oest de P_1 y a una distancia de $\frac{1}{2}$, P_3 está al norte de P_2 y a una distancia de $\frac{1}{4}$, P_4 está al oeste de P_3 y a una distancia de $\frac{1}{8}$, y así sucesivamente. Determina las coordenadas del punto P_n y el límite de la sucesión. (Sol: $P_n \to \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$)

*10. Para los valores $a = 1+\sqrt{2}$ i $b = 1-\sqrt{2}$, definimos la sucesión de término general $a_n = a^n - b^n$. Calcula el límite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

11. Comprueba si las sucesiones recurrentes que siguen son crecientes/decrecientes o acotadas:

    a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{3+2a_n}{4}$
    b) $b_1 = \sqrt{2}\ ,\ b_{n+1} = \sqrt{2b_n}$

    Además, encuentra sus expresiones explícitas respectivas y, a partir de sus expresiones calcula el límite de cada sucesión.

*12. Verifica que las sucesiones recurrentes que siguen son divergentes a $+\infty$:

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$

b) $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n + 3n$

Hallar explícitamente el término general en cada caso consiste en resolver una recurrencia lineal de primer orden.

*13. Considera la sucesión de Fibonacci

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad a_1 = a_2 = 1$$

y define a partir de ella $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Encuentra la relación entre b_{n+1} y b_n y, sabiendo que $\{b_n\}$ es convergente, calcula su límite.