PROBLEMAS RESUELTOS

TEMA 3.3. ALGORITMO SIMPLEX REVISADO + 2 FASES

3.3.1 Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \text{s.a:} & [\text{R1}]\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & [\text{R2}]\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & [\text{R3}]\ 2x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} (\text{P}).$$

a) Obtén la tabla de la **solución básica inicial** a partir de la cual se aplicaría el algoritmo Simplex revisado. **[0,5 puntos]**

b) La siguiente tabla corresponde a una Solución Básica obtenida mediante la aplicación del algoritmo Simplex al problema (P), (donde h_2 es la variable de holgura de la restricción [R2]):

v.básicas	B^{-1}			x_B
x_3	1	0	-1/2	1
h_2	-1	1	0	6
x_1	0	0	1/2	3
$c_B^t B^{-1}$				

Determina si esta solución **es o no solución óptima** para el problema (P) **y en caso de que no lo sea, realiza las iteraciones necesarias hasta alcanzar la solución óptima**.

3.3.2 Dado el siguiente programa lineal:

Min 3 X1 + 2 X2

s.a:

[R_1] 2 X1 + X2 ≤ 10

[R_2] -3 X1 + 2 X2 = 6

[R_3] X1 + X2 ≥ 6

X1, X2 ≥ 0

a) Obtener la solución óptima del problema aplicando el **Algoritmo Simplex y el Método de las 2 Fases**.

b) En el proceso iterativo del **algoritmo Simplex**, explica cómo se identifican las siguientes situaciones:

i. Solución no acotada.
ii. Soluciones óptimas alternativas
iii. Problema sin solución factible

3.3.3 Calcula la solución óptima del siguiente programa lineal aplicando el método de las 2 fases:

MIN $z = 2\,x1 + 3\,x2$
s.a:
$2\,x1 + x2 \geq 4$
$x1 - x2 \geq -1$
$x1, x2 \geq 0$

Soluciones Problemas Tema 3.3

3.3.1

Dado el modelo:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \text{s.a:} & [\text{R1}]\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & [\text{R2}]\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & [\text{R3}]\ 2x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Para obtener la tabla de la solución básica factible inicial a partir de la cual se aplicaría el algoritmo simplex es necesario expresar el modelo en forma estándar y a continuación añadir las variables artificiales de modo que obtendremos el modelo ampliado. En este caso:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \text{s.a:} & [\text{R1}]\ x_1 + x_2 + x_3 - h_1 + a_1 = 4 \\ & [\text{R2}]\ x_1 + 2x_2 + x_3 + h_2 = 10 \\ & [\text{R3}]\ 2x_1 + x_2 + a_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, a_1, a_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Es necesario aplicar el método simplex de 2 fases y la fase 1 supone la siguiente función objetivo:

Min $\boldsymbol{z = a_1 + a_3}$

De modo que la SB_0 a partir de la cual comenzaría la aplicación del simplex de 2 fases es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
a_1	1	0	0	4
h_2	0	1	0	10
a_3	0	0	1	6
$c_B^t\ B^{-1}$	1	0	1	10

b) A partir de la tabla de la solución básica dada:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x_3	1	0	-1/2	1
h_2	-1	1	0	6
x_1	0	0	1/2	3
$c_B^t B^{-1}$				

En primer lugar, necesitamos completar la tabla Simplex. Dado que la SBF dada no incluye variables artificiales, se trata de una solución de la Fase 2 del algoritmo de modo que la función objetivo a considerar es la del problema original, es decir:

$$\text{Max } z = 3x_1 + x_2 + \frac{1}{2} x_3$$

Que usaremos para completar la tabla:

$$c_B^t B^{-1} = (½, 0, 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (½, 0, \mathbf{5/4});$$

$$Z = c_B^t X_B = (½, 0, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{19/2}$$

Para determinar si esta solución es óptima es necesario calcular cj-zj para las variables no básicas:

$$c_{x2} - z_{x2} = 1 - (½, 0, 5/4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (1/2 + 5/4) = -3/4$$

$$c_{h1} - z_{h1} = 0 - (½, 0, 5/4) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + ½ = ½$$

Por tanto, la solución actual no cumple el criterio de optimalidad para un problema de maximización ya que todavía es posible mejorar más el valor de la función objetivo. La variable que entra en la base es $\boldsymbol{h_1}$ y su vector Y_{h1} es:

$$Y_{h1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v.básicas	B^{-1}			x_B	Y_{h1}
x_3	1	0	-1/2	1	-1
h_2	-1	1	0	6	1
x_1	0	0	1/2	3	0
$c_B^t B^{-1}$	1/2	0	5/4	19/2	

Y la **variable que sale de la base** es $\boldsymbol{h_2}$ (es la única que alcanza el valor 0 cuando entra en la solución h_1).

La nueva solución es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x_3	0	1	-1/2	7
h_1	-1	1	0	6
x_1	0	0	1/2	3
$c_B^t B^{-1}$	0	1/2	5/4	25/2

Para comprobar la optimalidad de esta solución calculamos los cj-zj de las variables no básicas:

$$c_{x2} - z_{x2} = 1- (0, ½, 5/4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 – (1 + 5/4) = -5/4$$

$$c_{h2} - z_{h2} = 0 - (0, ½, 5/4) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - ½ = -½$$

Por tanto, la solución actual cumple el criterio de optimalidad ya que los cj-zj de las variables no básicas son no positivos y estamos en un problema de maximización.

Sol. óptima: $(x_1^* = 3\,,\ x_2^* = 0\,,\ x_3^* = 7\,,\ h_1^* = 6,\ h_2^* = 0\,)$.

Valor óptimo de la función objetivo: $z^* = 25/2$

3.3.2

MODELO AMPLIADO
Min Z=3x1 + 2x2
Sujeto a:
R1: 2x1+x2+h3 = 10
R2: -3x1+2x2+a4 = 6
R3: x1+x2+a5-1h6 = 6

FASE 1 Min: a4 + a5

Tabla SB0 Fase 1

v.básicas	B inversa	XB	Yx2	XB/Yx
h3	1 0 0	10	1	10
a4	0 1 0	6	2	3
a5	0 0 1	6	1	6
CtBBinv	0 1 1	Z=12		

*Variables no básicas: x1,x2,h6
(Cx1=0)-(Zx1=-2) = 2
(Cx2=0)-(Zx2=3) = -3
(Ch6=0)-(Zh6=-1) = 1

JE: x2 IS: a4

Tabla SB1 Fase 1

v.básicas	B inversa	XB	Yx1	XB/Yx
h3	1 -0.5 0	7	3.5	2
x2	0 0.5 0	3	-1.5	-
a5	0 -0.5 1	3	2.5	1.2
CtBBinv	0 -0.5 1	Z=3		

*Variables no básicas: x1,a4,h6
(Cx1=0)-(Zx1=2.5) = -2.5
(Ca4=1)-(Za4=-0.5) = 1.5
(Ch6=0)-(Zh6=-1) = 1

JE: x1 IS: a5

Tabla SB2 Fase 1

v.básicas	B inversa	XB	Yh6	XB/Yx
h3	1 0.2 -1.4	2.8	1.4	2
x2	0 0.2 0.6	4.8	-0.6	-
x1	0 -0.2 0.4	1.2	-0.4	-
CtBBinv	0 0 0	Z=0		

*Variables no básicas: a5,a4,h6
(Ca5=1)-(Za5=0) = 1
(Ca4=1)-(Za4=0) = 1
(Ch6=0)-(Zh6=0) = 0

FASE 2 Min: 3x1 + 2x2

Tabla SB3 Fase 2

v.básicas	B inversa	XB	Yh6	XB/Yx
h3	1 0.2 -1.4	2.8	1.4	2
x2	0 0.2 0.6	4.8	-0.6	-
x1	0 -0.2 0.4	1.2	-0.4	-
CtBBinv	0 -0.2 2.4	Z=13.2		

*Variables no básicas: h6
(Ch6=0)-(Zh6=-2.4) = 2.4

SOLUCIÓN ÓPTIMA ENCONTRADA

x1=1.2
x2=4.8
Z=13.2

b)

Solución no acotada: Se identifica en la tabla simplex porque en la columna correspondiente a la variable entrante todos sus coeficientes son no positivos.

Soluciones óptimas alternativas: Se identifica en la tabla simplex óptima porque una variable no básica tiene su cj-zj igual a cero.

Problema sin solución factible: Se identifica en la tabla simplex porque al menos una variable artificial permanece en la base y al realizar iteraciones no es posible sacarla de la base.

3.3.3

MIN Z = 2 x1 + 3 x2
s.a:
2 x1 + x2 ≥ 4
x1 – x2 ≥ -1
x1, x2 ≥ 0

→

MIN Z = 2 x1 + 3 x2
s.a:
2 x1 + x2 ≥ 4
-x1 + x2 ≤ 1
x1, x2 ≥ 0

→

MIN Z = 2 x1 + 3 x2
s.a:
2 x1 + x2 -x3 + a1 = 4
-x1 + x2 + x4 = 1
x1, x2, x3, x4, a1 ≥ 0

FASE 1: Min a1

V.Básicas	B^{-1}		x_B
$a1$	1	0	4
$x4$	0	1	1
$c_B^t\ B^{-1}$	1	0	Z = 4

MIN Z = 2 x1 + 3 x2
s.a:
2 x1 + x2 -x3 + a1 = 4
-x1 + x2 + x4 = 1
x1, x2, x3, x4, a1 ≥ 0

$z_{x1} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x1} = (1,\ 0)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 2 \rightarrow c_{x1}\text{-}z_{x1} = -2$ ←

$z_{x2} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x2} = (1,\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \rightarrow c_{x2}\text{-}z_{x2} = -1$

$z_{x3} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x3} = (1,\ 0)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1 \rightarrow c_{x3}\text{-}z_{x3} = 1$

$Y_{x1} = B^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

SB0:

V.Básicas	B^{-1}		x_B	Yx1
$a1$	1	0	4	2
$x4$	0	1	1	-1
$c_B^t\ B^{-1}$	1	0	Z = 4	

SB1:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
$x1$	1/2	0	2
$x4$	1/2	1	3
$c_B^t\ B^{-1}$	0	0	Z = 0

FIN FASE 1

FASE 2: Min 2x1 + 3x2

SBF0:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
$x1$	1/2	0	2
$x4$	1/2	1	3
$c_B^t\ B^{-1}$	**1**	**0**	**Z = 4**

$z_{x2} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x2} = (1,\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \rightarrow c_{x2}\text{-}z_{x2} = 3\text{-}1 = 2$

$z_{x3} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x3} = (1,\ 0)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1 \rightarrow c_{x3}\text{-}z_{x3} = 0\text{-}(-1) = 1$

$(c^t_B\ B^{-1}) = (2,\ 0)\begin{pmatrix}1/2 & 0\\1/2 & 1\end{pmatrix} = (1, 0)$

La SBF actual es SOLUCIÓN ÓPTIMA
X1=2; x2=0; Z=4