**Matemática discreta** **28 de octubre de 2019**
**Primer parcial** **1:45 horas**

---

**Cuestión 1 (2 pt)** (a) Demuestra que la conclusión se deduce de las premisas en el siguiente argumento. Escribe las propiedades que utilizas en cada paso de las inferencias.

P1: $P \to Q$
P2: $S \vee \rceil T \to \rceil Q$
P3: $T \to Q \wedge U$
P4: $\rceil U$
C: $\rceil P$

*Solución:*

(a) Método directo:

| | | |
|---|---|---|
| **P1:** | $P \to Q$ | |
| **P2:** | $S \vee \rceil T \to \rceil Q$ | |
| **P3:** | $T \to Q \wedge U$ | |
| **P4:** | $\rceil U$ | |
| **P5:** | $\rceil(Q \wedge U) \to \rceil T$ | Transposición(3) |
| **P6:** | $\rceil Q \vee \rceil U \to \rceil T$ | Leyes de De Morgan (5) |
| **P7:** | $\rceil Q \vee \rceil U$ | Adición (4) |
| **P8:** | $\rceil T$ | Modus Ponens (6,7) |
| **P9:** | $S \vee \rceil T$ | Adición (8) |
| **P10:** | $\rceil Q$ | Modus Ponens (2,9) |
| **C:** | $\rceil P$ | Modus Tollens (1,10) |

(b) Reducción al absurdo:

| | | |
|---|---|---|
| **P1:** | $P \to Q$ | |
| **P2:** | $S \vee \rceil T \to \rceil Q$ | |
| **P3:** | $T \to Q \wedge U$ | |
| **P4:** | $\rceil U$ | |
| **P5:** | $P$ | Premisa auxiliar |
| **P6:** | $Q$ | Modus Ponens (1,5) |
| **P7:** | $\rceil(S \vee \rceil T)$ | Modus Tollens (2,6) |
| **P8:** | $\rceil S \wedge T$ | Leyes de De Morgan (7) |
| **P9:** | $T$ | Simplificación(8) |
| **P10:** | $Q \wedge U$ | Modus Ponens (3,9) |
| **P11:** | $U$ | Simplificación (10) |
| **P12:** | $U \wedge \rceil U$ | Ley de la Unión (4,11) |
| **C:** | $\emptyset$ | |

(b) Sócrates dijo: "Si soy culpable debo ser castigado. No soy culpable. Luego no debo ser castigado."¿Es este argumento lógicamente correcto? Escríbelo simbólicamente y deduce lógicamente la conclusión si es correcto o razona porqué no lo es en caso contrario.

*Solución:*
La representación lógica del argumento sería la siguiente:
**P1:** $P \to Q$
**P2:** $\rceil P$
**C:** $\rceil Q$
Demostrar la validez del argumento sería equivalente a demostrar que $P1 \wedge P2 \Rightarrow C$, es decir que $P1 \wedge P2 \to C$ es una tautología. Si construimos la tabla de verdad correspondiente:

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\rceil P$ | $\rceil Q$ | $\wedge$ | $\to$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Por tanto no obtenemos una tautología y el argumento dado no es válido.

**Cuestión 2 (2 pt)** (a) Representa formalmente las siguientes expresiones en el universo de las personas:

(i) "'Todos los actores invitados a la fiesta llegaron tarde".
(ii) "Hay una persona que no llegó tarde".
(iii) "Hay al menos una persona invitada a la fiesta que no es actor ni periodista".
(iv) "No todos los actores están invitados a la fiesta".

*Solución:* Utilizaremos los siguientes predicados:

$A(x)$ : $x$ es actor $P(x)$ : $x$ es periodista
$I(x)$ : $x$ está invitado a la fiesta $T(x)$ : $x$ llegó tarde

Estas expresiones se pueden formalizar como:

(i) $\forall x \left(A(x) \wedge I(x) \to T(x)\right)$

(ii) $\exists x \left(\rceil T(x)\right)$

(iii) $\exists x \left(I(x) \wedge \rceil A(x) \wedge \rceil P(x)\right)$

(iv) $\rceil \forall x \left(A(x) \to I(x)\right)$

(b) Determina si son correctos o no los siguientes razonamientos. Si son correctos demuéstralos por inferencia, y si no lo son justifica el porqué:

(i) P1: $\rceil \exists x \ (P(x) \wedge R(x))$
P2: $\exists x \ (P(x) \wedge Q(x))$
C: $\exists x \ (Q(x) \wedge \rceil R(x))$

(ii) P1: $\exists x \ (P(x))$
P2: $\exists x \ (Q(x))$
C: $\exists x \ (P(x) \wedge Q(x))$

*Solución:*

(a)

| | | |
|---|---|---|
| **P1:** | $\rceil \exists x \ (P(x) \wedge R(x))$ | |
| **P2:** | $\exists x \ (P(x) \wedge Q(x))$ | |
| **P3:** | $\forall x \ (\rceil P(x)) \vee \rceil R(x))$ | L. Morgan Gen.(1) |
| **P4:** | $P(a) \wedge Q(a)$ | E. existencial(2) |
| **P5:** | $\rceil P(a) \vee \rceil R(a)$ | E. universal(3) |
| **P6:** | $P(a)$ | Simplificación(4) |
| **P7:** | $Q(a)$ | Simplificación (4) |
| **P8:** | $\rceil R(a)$ | Tollendo Ponens(5,6) |
| **P9:** | $Q(a) \wedge \rceil R(a)$ | Ley de la Unión (7,8) |
| **C:** | $\exists x \ (Q(x) \wedge \rceil R(x))$ | Gen. existencial (9) |

(b) Este razonamiento no es correcto. Tanto en la premisa 1 como en la 2 aparece el cuantificador existencial, por lo que al especificar no podemos asegurar que el objeto con el que trabajamos es el mismo en ambas y por tanto no podríamos llegar a la conclusión.

**Cuestión 3 (1.5 pt)** (a) Simplifica la forma proposicional siguiente, indicando en cada paso las propiedades empleadas:

$$((p \to q) \wedge \rceil q) \to \rceil p$$

*Solución:*

$$\begin{aligned}
\left((p \to q) \wedge \rceil q\right) \to \rceil p &\equiv \left((\rceil p \vee q) \wedge \rceil q)\right) \to \rceil p && \text{(Condicional-disyunción)}\\
&\equiv \left((\rceil p \wedge \rceil q) \vee (q \wedge \rceil q)\right) \to \rceil p && \text{(Prop. Distributiva)}\\
&\equiv \left((\rceil p \wedge \rceil q) \vee \emptyset\right) \to \rceil p && \text{(Elementos Complementarios)}\\
&\equiv \left(\rceil p \wedge \rceil q \to \rceil p\right) && \text{(Elemento neutro)}\\
&\equiv \rceil(\rceil p \wedge \rceil q)) \vee \rceil p && \text{(Condicional disyunción)}\\
&\equiv (p \vee q) \vee \rceil p && \text{(Leyes de De Morgan)}\\
&\equiv \left(p \vee \rceil p\right) \vee q && \text{(Conmutativa y asociativa)}\\
&\equiv \tau \vee q && \text{(Elementos complementarios)}\\
&\equiv \tau && \text{(Propiedad absorbente)}
\end{aligned}$$

(b) Sabiendo que $p$ es falsa, y $q$ y $r$ son verdaderas, ¿cuáles serían los valores de verdad de las expresiones lógicas siguientes?:

(i) $(p \to \neg q) \vee \neg(r \wedge q)$

(ii) $\neg p \vee \neg q \to p \vee \neg r$

*Solución:* Recordemos que un condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

(i) Sabemos que una disyunción es verdadera cuando alguna de las dos proposiciones es verdadera. En este caso, como $p$ es falsa, el condicional es verdadero y la proposición es verdadera.

(ii) En este caso el antecedente es verdadero, ya que $\rceil p$ lo es, y por otro lado, el consecuente es falso puesto que es una disyunción de dos proposiciones falsas. Por tanto el condicional será falso.

**Cuestión 4 (1 pt)** Prueba por inducción que $n^2 - n$ es un número par (múltiplo de 2), para todo $n \geq 2$.
*Solución:* En primer lugar hemos de probar que la fórmula es cierta para $n = 2$:

Si $n = 2$, $n^2 - n = 2$. Por tanto la propiedad es cierta.

A continuación, vamos a probar que si la propiedad es cierta para un $n$ entonces, también se cumple para $n + 1$. Es decir, suponiendo que: $n^2 - n = 2s,\ s \in \mathbb{Z}$ hemos de deducir que

$$(n + 1)^2 - (n + 1)$$

es también un múltiplo de 2.

Comprobémoslo:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n+1) &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 \\ &= n^2 - n + 2n \text{ (Hipótesis de inducción)} \\ &= 2s + 2n\end{aligned}$$

Que claramente es un múltiplo de 2. Por tanto la propiedad es cierta.

**Cuestión 5 (1.5 pt)** (a) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{e, f, g\}$ consideremos la correspondencias $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$, cuyos grafos son $F = \{(a, e), (b, e), (c, f)\}$ y $G = \{(e, c), (f, b)\}$. Responde las siguientes cuestiones, **justificando las respuestas**:

1) ¿Es $f$ una aplicación?
2) Calcula el grafo de la composición $g \circ f\colon A \to A$.
3) ¿Es $g \circ f$ aplicación? En caso negativo, añade el mínimo número de pares a su grafo de forma que lo sea.

*Solución:*

1) $f$ no es aplicación, ya que el elemento $d \in A$ no tiene imagen.
2) $G \circ F = \{(a, c), (b, c), (c, b)\}$.
3) $g \circ f$ definida de $A$ en $A$ no es aplicación, ya que el elemento $d \in A$ no tiene imagen. Si añadimos por ejemplo el par $(d, b)$ a su grafo, la correspondencia resultante sí sería aplicación.

(b) ¿Para qué números enteros $a \in \mathbb{Z}$ es biyectiva la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = ax$? ¿Cuál sería la aplicación inversa de $f$ en esos casos?

*Solución:* Veamos en primer lugar cuándo es inyectiva la aplicación $f$. Supongamos que $f(x) = f(y)$, siendo $x, y \in \mathbb{Z}$. De aquí $ax = ay$. Por tanto para todo $a \neq 0$ se obtiene $x = y$ y la aplicación es inyectiva. Para ver en qué casos $f$ es suprayectiva, supongamos que $y \in \mathbb{Z}$ y veamos cuándo existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = y$. De aquí se tiene que ax=y, por tanto si $a \neq 0$, $x = y/a$. Así, $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vendría definida por $f^{-1}(x) = x/a$. Ahora bien, $x/a$ es un número entero para todo $x \in \mathbb{Z}$ si $a = 1$ o $a = -1$. Por tanto $f$ es biyectiva si y solo si $a = 1$ o $a = -1$. En estos casos la aplicación inversa $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vendría definida por $f^{-1}(x) = x$ y $f^{-1}(x) = -x$, respectivamente.

**Cuestión 6 (2 pt)** (a) Determinar los conjuntos $A$ y $B$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

(i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
(ii) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.
(iii) $1 \notin A \setminus B$.
(iv) $2 \notin B \setminus A$.

*Solución:* Por (iii), sabemos que $1 \notin A \cap B^c$, luego 1 pertenece al complementario de dicho conjunto, es decir, $1 \in A^c \cup B$. Como $1 \in A \cup B$, deducimos que $1 \in B$. De forma análoga utilizando (iv), obtenemos que $2 \in A$. Por tanto teniendo en cuenta (i) y (ii) obtenemos que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

(b) Dados $A$ y $B$ dos subconjuntos de un conjunto universal $E$.

(i) Calcula $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$ indicando las propiedades utilizadas.
(ii) ¿Es la familia $\{A \cap B,\ A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c\}$ un recubrimiento del conjunto $E$? ¿Y una partición? Justifica tus respuestas.

*Solución:*

(i)

$$\begin{aligned}
\big(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B^c) = \\
&= \big((A\cup A^c)\cap B)\cup((A\cup A^c)\cap B^c) && \text{(Propiedad distributiva)}\\
&= \big((E\cap B)\cup(E\cap B^c) && \text{(Elementos complementarios)}\\
&= \big(B\cup B^c) && \text{(Elemento neutro)}\\
&= E && \text{(Elementos complementarios)}
\end{aligned}$$

(ii) Según hemos visto en el apartado (i), la familia de conjuntos dada constituye un recubrimiento de $E$ y su unión es exactamente igual a $E$. Por otro lado, teniendo en cuenta que para cualquier conjunto $X$, se tiene que $X\cap X^c=\emptyset$, es inmediato observar que los conjuntos de dicha familia son disjuntos dos a dos. Por tanto la familia constituye una partición del conjunto $E$.