Sistemas Inteligentes

Escuela Técnica Superior de Informática

Universitat Politècnica de València

Tema B2T5:
Representación estructurada. Modelos de Markov.

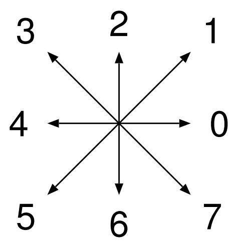
Índice

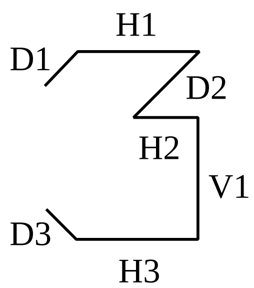
Objetos estructurados en reconocimiento de formas

- La representación de objetos en un espacio vectorial puede suponer una importante pérdida de información en algunos problemas:
  - Reconocimiento del habla
  - Reconocimiento de texto manuscrito
  - Identificación de la lengua
  - Reconocimiento de actitud o predilección en texto o habla
  - Identificación del tema de un documento
  - Reconocimiento de cromosomas
  - Reconocimiento de escenas en imágenes o vídeos
  - ...
- Solución: una representación estructurada:
  - Secuencias de longitud variable de vectores o de símbolos
  - Árboles, grafos, etc.
- Modelización: Modelos estructurales, por ejemplo, gramáticas estocásticas o modelos ocultos de Markov

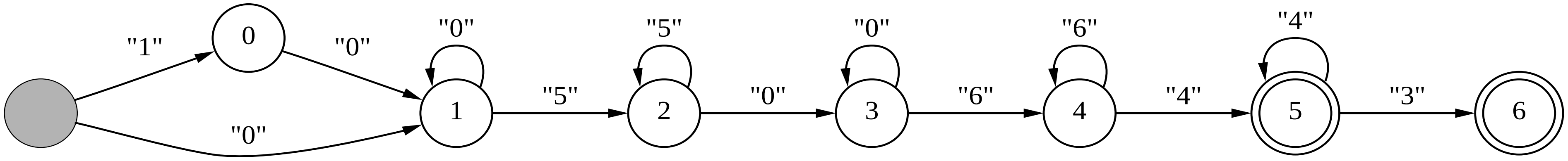
Secuencias de trazos y su modelado gramatical

MO E A O SI T TI O E TRA A O E U

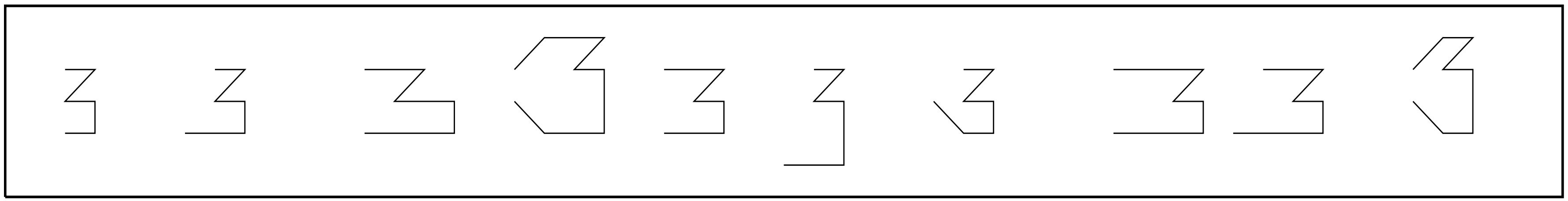





```
S    -->  D1 H1 D2 H2 V1 H3 D3
D1   -->   "1"   |    λ
H1   -->   "0"   |   "0" H1
D2   -->   "5"   |   "5" D2
H2   -->   "0"   |   "0" H2
V1   -->   "6"   |   "6" V1
H3   -->   "4"   |   "4" H3
D3   -->   "3"   |    λ
```



tres.gr

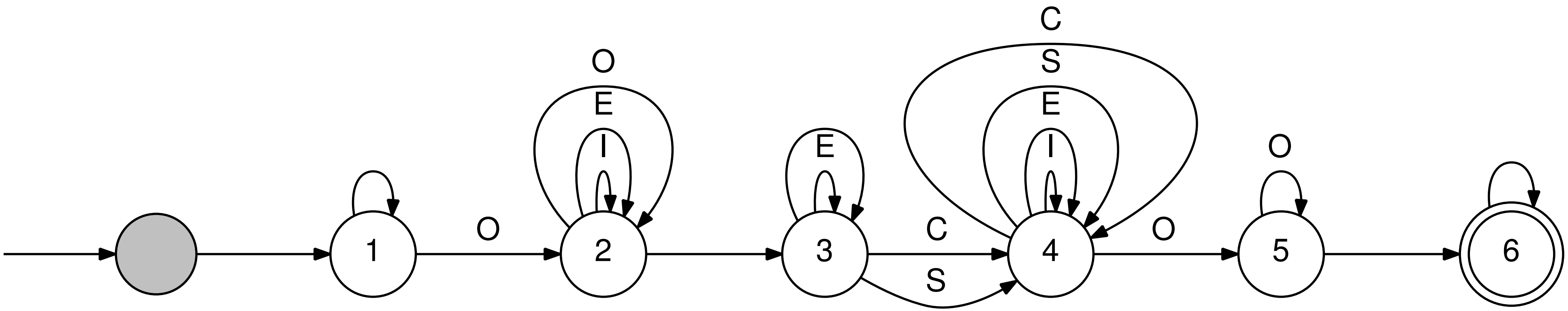


Trazados de treses generados por la gram tica tres.gr

Modelado sintáctico de pronunciaciones de palabras aisladas

Ejemplos de pronunciaciones de la palabra “ocho”,
representadas mediante cadenas de símbolos acústicos

```
######OOEIO##ECEEOOOO######
#####OOOEI###ECCEEOOO#####
#####OOOE###SCEOOOO######
######OOOIO###CCEOOOO######
######OOEIO##SCCEOOOO######
#####OOOEIE##ECCIEOOOO######
#####OOEO###CCIEOOOO######
######OOOE###ECCEIEOO#####
#####OOOEO##SCCIEEOO######
######OOOEO##SCSCCIEEOOO######
#####OOOEO##ECSCCEIOOOO#####
                . . .
```

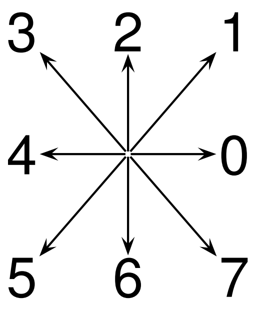


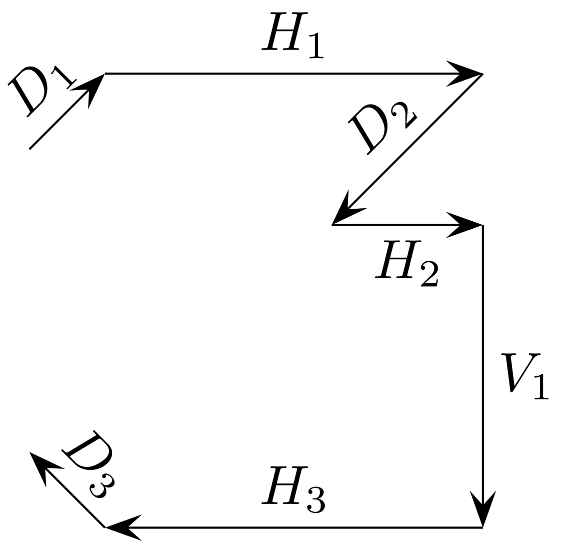
Una gramática que modela estas pronunciaciones

Índice

Un clasificador sintáctico para trazados de dígitos

Volvamos al modelado sintáctico del trazado de un “3”:





$$
\begin{array}{rcl}
S & \Rightarrow & D_1 \\
D_1 & \Rightarrow & 1\,H_1 \mid H_1 \\
H_1 & \Rightarrow & 0\,H_1 \mid 0\,D_2 \\
D_2 & \Rightarrow & 5\,D_2 \mid 5\,H_2 \\
H_2 & \Rightarrow & 0\,H_2 \mid 0\,V_1 \\
V_1 & \Rightarrow & 6\,V_1 \mid 6\,H_3 \\
H_3 & \Rightarrow & 4\,H_3 \mid 4\,D_3 \\
D_3 & \Rightarrow & 3 \mid \lambda
\end{array}
$$

Supongamos que hay una gramática como ésta, G_c, para cada dígito c.

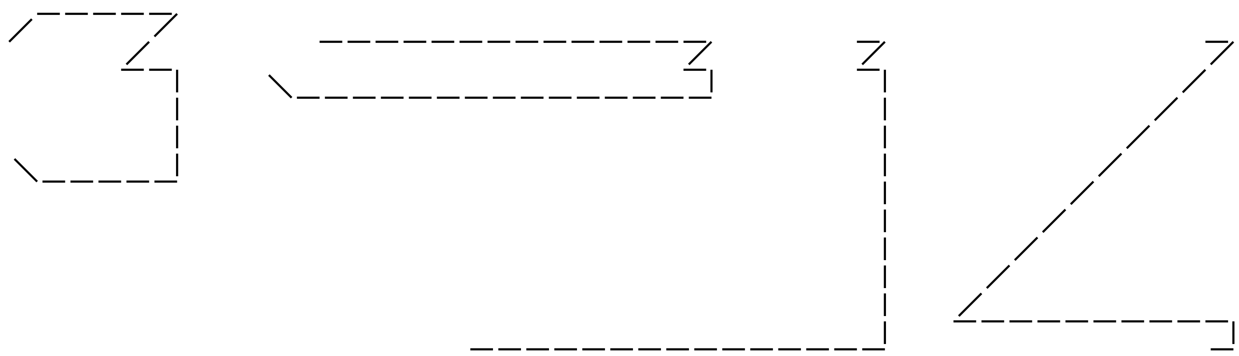
Si $x \in \{0, 1, \ldots, 7\}^+$ representa el trazado de un dígito, podemos decidir a qué dígito corresponde mediante un ***clasificador sintáctico “puro”***:

$$
c(x) = \begin{cases} c & \text{si } G_c \text{ es la única gramática que genera } x \\ \text{“rechazo”} & \text{si ninguna gramática genera } x \\ \text{“duda”} & \text{si hay más de una gramática que genera } x \end{cases}
$$

Incovenientes de las gramáticas convencionales y la clasificación sintáctica “pura”

- La necesidad de incluir las clases “rechazo” y “duda” es un claro incoveniente.

- Otro incoveniente claro es que las gramáticas convencionales generan tanto cadenas naturales como cadenas “indeseable”; p.e.:



La solución generalmente adoptada consiste en introducir probabilidades, es decir, emplear ***gramáticas estocásticas***.

Gramáticas estocásticas

- Una ***Gramática Estocástica*** G' es una gramática G con probabilidades asociadas a sus reglas:

$$G' = (G, p), \quad G = (N, \Sigma, R, S), \; p : R \to [0, 1]$$

- Una gramática *incontextual* (o *regular*) es ***propia*** si:

$$\forall A \in N \quad \sum_{\forall \beta : A \to \beta \in R} p(A \to \beta) = 1$$

- ***Probabilidad de una cadena*** y generada por G':

$$\forall y \in \Sigma^* \quad p(y|G') = \sum_{d \in D_G(y)} p(d), \qquad p(d) = \prod_{(A \to \beta) \in d} p(A \to \beta)$$

- Una gramática Estocástica G' es ***consistente*** si:

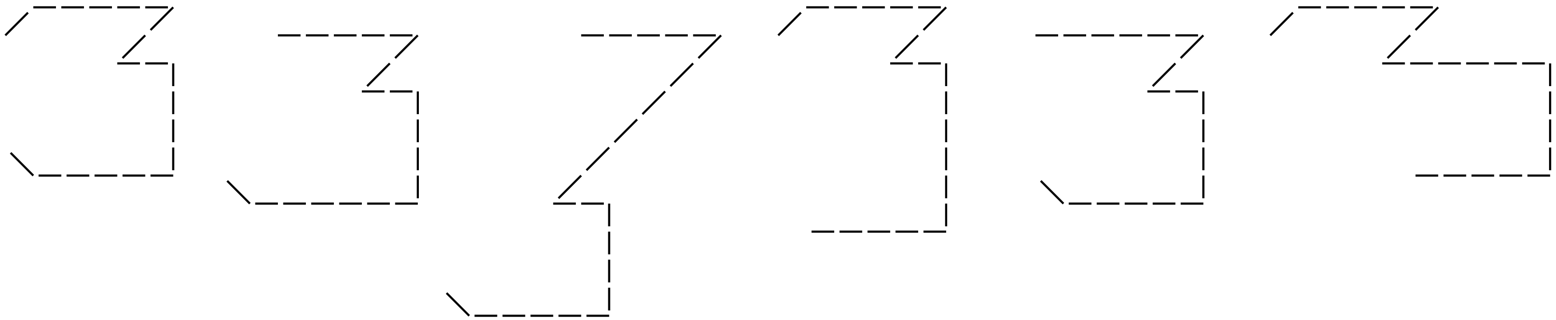
$$\sum_{y \in \Sigma^*} p(y|G') = 1$$

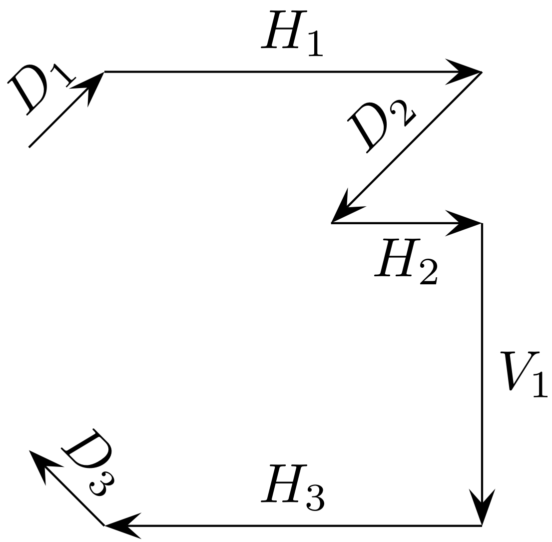
Aprendizaje de gramáticas estocásticas

- Determinación de las *reglas* o su estructura típica (*“topología”*):
  - Generalmente difícil de automatizar
  - Aproximación: topología pre-definida $\Rightarrow$ ***Modelos de Markov***

- Aprendizaje de las probabilidades: *estimación*
  - ***Gramáticas incontextuales (o Regulares) No-ambiguas*** G' **:**
    Estimación por máxima verosimilitud a partir de las frecuencias de uso de las reglas en el análisis de una secuencia de cadenas de entrenamiento supuestamente generadas por G'.
    Estas estimaciones se aproximan a las verdaderas probabilidades cuando el número de cadenas de entrenamiento $\to \infty$.
  - ***Gramáticas Regulares ambiguas y/o modelos de Markov:***
    Estimación localmente óptima mediante ***“reestimación por Viterbi”*** o, mejor, mediante el algoritmo “Backward-Forward”

Ejemplo de aprendizaje de las probabilidades





$$S \xrightarrow{6/6} D_1$$

$$D_1 \xrightarrow{3/6} 1\,H_1 \qquad D_1 \xrightarrow{3/6} H_1$$

$$H_1 \xrightarrow{25/31} 0\,H_1 \qquad H_1 \xrightarrow{6/31} 0\,D_2$$

$$D_2 \xrightarrow{10/16} 5\,D_2 \qquad D_2 \xrightarrow{6/16} 5\,H_2$$

$$H_2 \xrightarrow{10/16} 0\,H_2 \qquad H_2 \xrightarrow{6/16} 0\,V_1$$

$$V_1 \xrightarrow{20/26} 6\,V_1 \qquad V_1 \xrightarrow{6/26} 6\,H_3$$

$$H_3 \xrightarrow{25/31} 4\,H_3 \qquad H_3 \xrightarrow{6/31} 4\,D_3$$

$$D_3 \xrightarrow{4/6} 3 \qquad D_3 \xrightarrow{2/6} \lambda$$

Índice

Índice

Modelos de Markov

Un *modelo de Markov* es una quíntupla $M = (Q, \Sigma, \pi, A, B)$ donde:

- Q es un ***conjunto de estados***
  - En cada instante $t = 1, 2, \ldots,$ M está en uno de sus estados, denotado q_t
  - Q incluye un *estado final* F

- Σ es un ***conjunto de símbolos "observables"***
  En cada instante $t = 1, 2, \ldots,$ M emite un símbolo, que se denota con y_t

- $\pi \in \mathbb{R}^Q$ es un ***vector de probabilidades iniciales***:
  M elige q_1 según π

- $A \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$ es una ***matriz de probabilidades de transición (entre estados)***:
  M elige q_{t+1} basándose en q_t y A: $A_{q,q'} = P(q_{t+1} = q' | q_t = q)$

- $B \in \mathbb{R}^{Q \times \Sigma}$ es una ***matriz de probabilidades de emisión (de símbolos)***:
  M elige y_t basándose en q_t y B: $B_{q,\sigma} = P(y_t = \sigma \mid q_t = q)$

Modelos de Markov (cont.)

Condiciones de normalización para π, A, B:

- Probabilidad de estado inicial:

  $0 \leq \pi_q \leq 1, \quad \sum_{q \in Q} \pi_q = 1, \quad \pi_F = 0$

- Probabilidades de Transición entre estados:

  $0 \leq A_{q,q'} \leq 1, \quad \sum_{q' \in Q} A_{q,q'} = 1, \quad A_{F,q} = 0$

- Probabilidades de emisión de observables:

  $0 \leq B_{q,\sigma} \leq 1, \quad \sum_{\sigma \in \Sigma} B_{q,\sigma} = 1, \quad B_{F,\sigma} = 0$

Modelos de Markov: ejemplo

Q 1,2,3,F ;   Σ   a,b,c ; $\pi_1 = 1; \quad \pi_2 = \pi_3 = \pi \quad = 0$

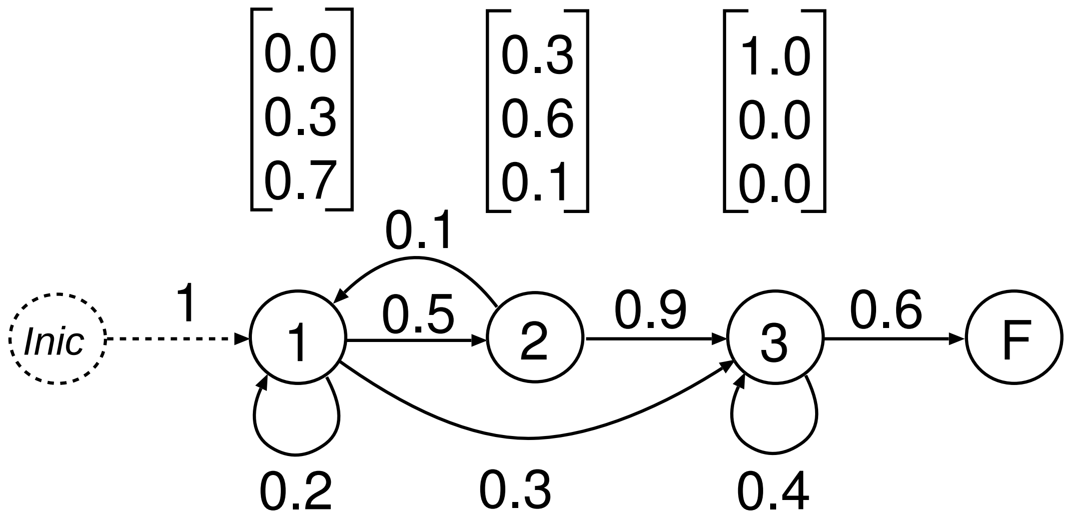
p(q q) ➡ ≡ A(q,q)

	1	2	3	F
1	0.2	0.5	0.3	0.0
2	0.1	0.0	0.9	0.0
3	0.0	0.0	0.4	0.6

p(σ q) ➡ ≡ B(q,σ)

	a	b	c
1	0.0	0.3	0.7
2	0.3	0.6	0.1
3	1.0	0.0	0.0

Representaci n Gr fica Equivalente:



Proceso Markoviano generador de cadenas

Sea $M = (Q, \Sigma, \pi, A, B)$ un modelo de Markov con estado final q_F

1. *Elegir un estado inicial* $q \in Q$ según $P(q) \equiv \pi_q$
2. *Seleccionar una observación* $\sigma \in \Sigma$ según $P(\sigma|q) \equiv B_{q,\sigma}$; emitir σ
3. *Elegir un estado siguiente* $q' \in Q$ según $P(q'|q) \equiv A_{q,q'}$
4. Si $q = q_F$ *terminar*; sino, ***ir a paso 2***

Sean:

- $y = y_1, y_2, \ldots, y_m \in \Sigma^+$: secuencia de observaciones producida por M
- $z = q_1, q_2, q_m, \ldots, q_F \in Q^+$: secuencia de estados que genera a y

La probabilidad de que M produzca y mediante z es:

$$P(y, z) = P(z) \cdot P(y \mid z) = P(q_1) \prod_{t=2}^{m} P(q_t \mid q_{t-1}) \, P(q_F \mid q_m) \cdot \prod_{t=1}^{m} P(y_t \mid q_t)$$

Probabilidad de generar una cadena con un modelo de Markov

Probabilidad de que M genere la cadena $y = y_1 \dots y_m \in \Sigma^+$:

$$P(y \mid M) = \sum_{z \in Q^+} P(y, z)$$

$$= \sum_{q_1,\dots,q_m \in Q^+} P(q_1) \prod_{t=2}^{m} P(q_t \mid q_{t-1}) \; P(q_F \mid q_m) \cdot \prod_{t=1}^{m} P(y_t \mid q_t)$$

$$= \sum_{q_1,\dots,q_m \in Q^+} \pi_{q_1} B_{q_1,y_1} \left(\prod_{t=2}^{m} A_{q_{t-1},q_t} B_{q_t,y_t} \right) A_{q_m,q_F}$$

Se cumple: $0 \leq P(y|M) \leq 1, \qquad \sum_{y \in \Sigma^+} P(y|M) = 1$

Probabilidades calculadas con el modelo del ejemplo

$$
\begin{array}{rcllll}
P(\texttt{cba}|M) & = & (\pi_1 \cdot B_{1,\texttt{c}}) & (A_{1,2} \cdot B_{2,\texttt{b}}) & (A_{2,3} \cdot B_{3,\texttt{a}}) & A_{3,F} \\
 & + & (\pi_1 \cdot B_{1,\texttt{c}}) & (A_{1,1} \cdot B_{1,\texttt{b}}) & (A_{1,3} \cdot B_{3,\texttt{a}}) & A_{3,F} \\
 & = & (1 \cdot 0.7) & (0.5 \cdot 0.6) & (0.9 \cdot 1) & 0.6 \\
 & + & (1 \cdot 0.7) & (0.2 \cdot 0.3) & (0.3 \cdot 1) & 0.6 \quad = \quad 0.1134 + 0.00756 \\
 & & & & & \quad\quad\;\; \approx \quad 0.12
\end{array}
$$

$$P(\texttt{bcbaa}|M) = P(y, z_1) + P(y, z_2) + P(y, z_3) + P(y, z_4) + P(y, z_5)$$

$$
\begin{array}{rccccccl}
y = & \texttt{b} & \texttt{c} & \texttt{b} & \texttt{a} & \texttt{a} & & \\
z_1 = & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & F & \\
P(y, z_1) = & (1 \cdot 0.3) & (0.2 \cdot 0.7) & (0.2 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.3) & (0.9 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000204 \\
z_2 = & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & F & \\
P(y, z_2) = & (1 \cdot 0.3) & (0.2 \cdot 0.7) & (0.2 \cdot 0.3) & (0.3 \cdot 1) & (0.4 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000181 \\
z_3 = & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & F & \\
P(y, z_3) = & (1 \cdot 0.3) & (0.2 \cdot 0.7) & (0.5 \cdot 0.6) & (0.9 \cdot 1) & (0.4 \cdot 1) & 0.6 & = 0.002722 \\
z_4 = & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & F & \\
P(y, z_4) = & (1 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.1) & (0.1 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.3) & (0.9 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000036 \\
z_5 = & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & F & \\
P(y, z_5) = & (1 \cdot 0.3) & (0.5 \cdot 0.1) & (0.1 \cdot 0.3) & (0.3 \cdot 1) & (0.4 \cdot 1) & 0.6 & = 0.000032 \\
 & & & & & & P(y|M) & = 0.003175
\end{array}
$$

Equivalencia entre modelos de Markov y gramáticas regulares estocásticas

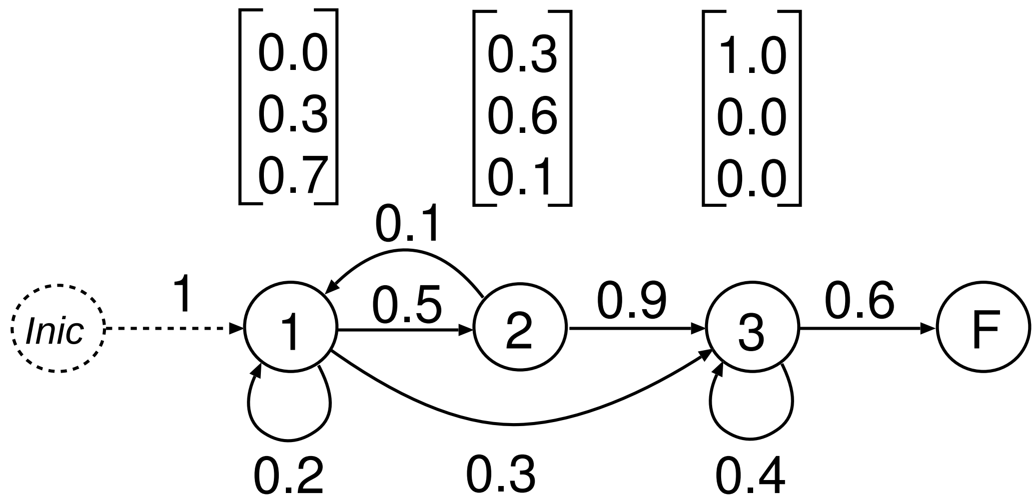
Dado un modelo de Markov M, existe una gramática regular estocástica G tal que $P(y|M) = P(y|G)\ \forall y \in \Sigma^*$

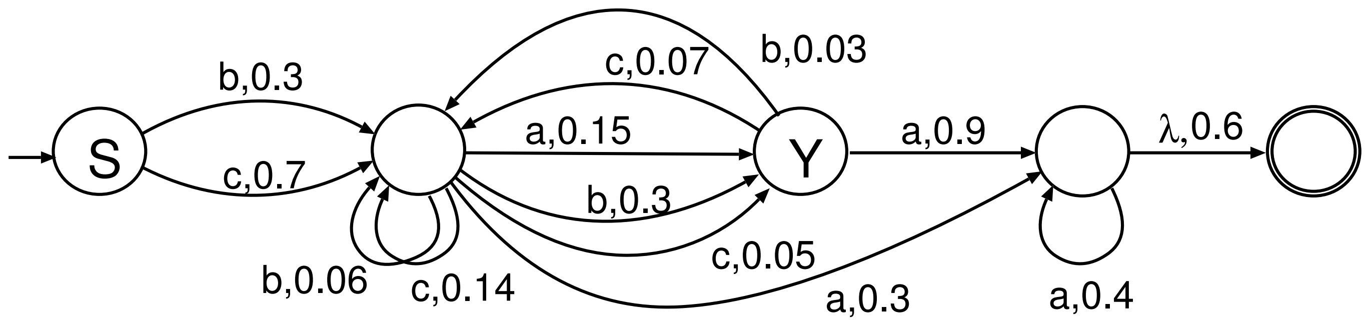
Se demuestra fácilmente por construcción.

Dada una gramática regular estocástica G, existe un modelo de Markov M tal que $P(y|M) = P(y|G)\ \forall y \in \Sigma^*$ (salvo casos degenerados)

Se demuestra por construcción (algo más compleja que la anterior).

Equivalencia entre modelos de Markov y gramáticas estocásticas





0.3: S - b	0.06: - b	0.90: Y - a	0.4: - a	
0.7: S - c	0.14: - c	0.03: Y - b	0.6: -	λ
	0.15: - aY	0.07: Y - c		
	0.30: - bY			
	0.05: - cY			
	0.30: - a			

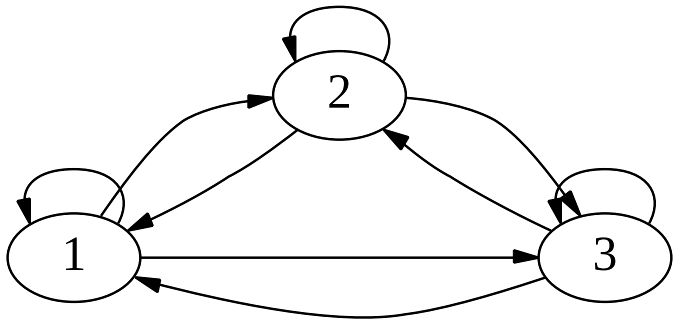
Estructura o “topología” de un modelo de Markov

La Topología de un Modelo de Markov: es la forma del grafo subyacente. Viene determinada por la estructura (número y ubicación de ceros) de la matriz de transición entre estados A. Topologías más comunes:

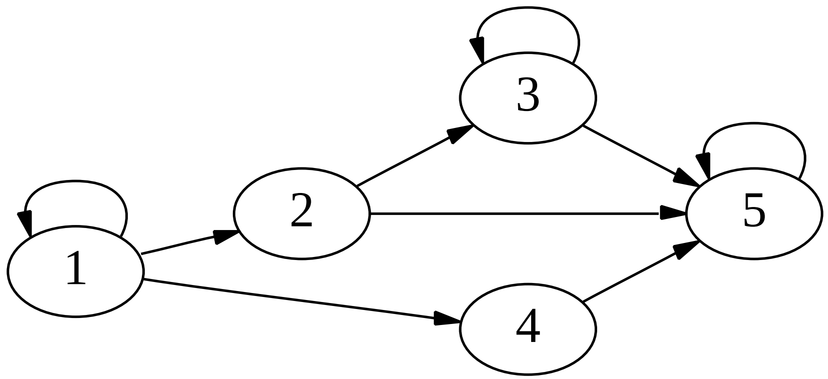
- ***Ergódica:*** grafo completo, no hay ceros en A.
- ***Izquierda-derecha:*** el grafo es *dirigido y acíclico* (DAG), aunque pueden haber bucles individuales en los estados. A es triangular.
- ***Lineal:*** el grafo es un DAG (con posibles bucles en estados) restringido en el que las transiciones que salen del estado $i-$ésimo sólo pueden alcanzar a los estados $i+1, \ldots, i+k$. Los elemetos no nulos de A están en $k+1$ diagonales adyacentes. Estas transiciones se denominan *“saltos”* o *“skips”*.
- ***Estrictamente Lineal:*** el grafo es una concatenación de estados, (con posibles bucles en estados). Los elemetos no nulos de A están en dos diagonales adyacentes.

Ejemplos de topologías de modelos de Markov

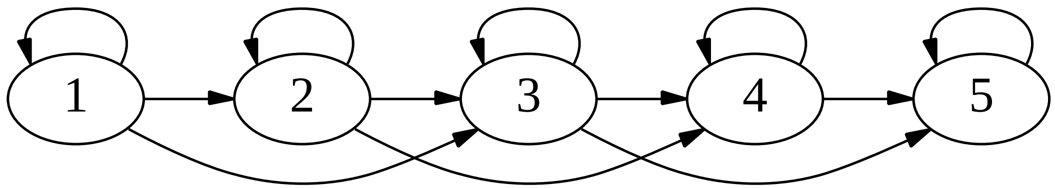
Ergódica



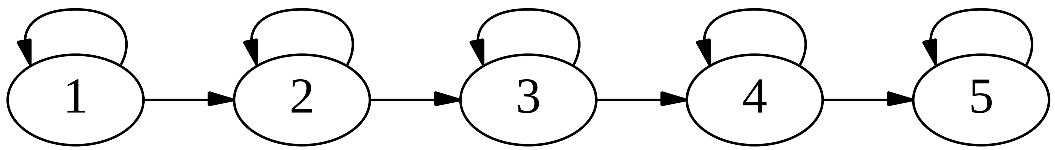
Izquierda-Derecha



Lineal



Estrictamente Lineal



Ejercicio

Sea M un modelo de estados $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 0$; y probabilidades de transición y de emisión:

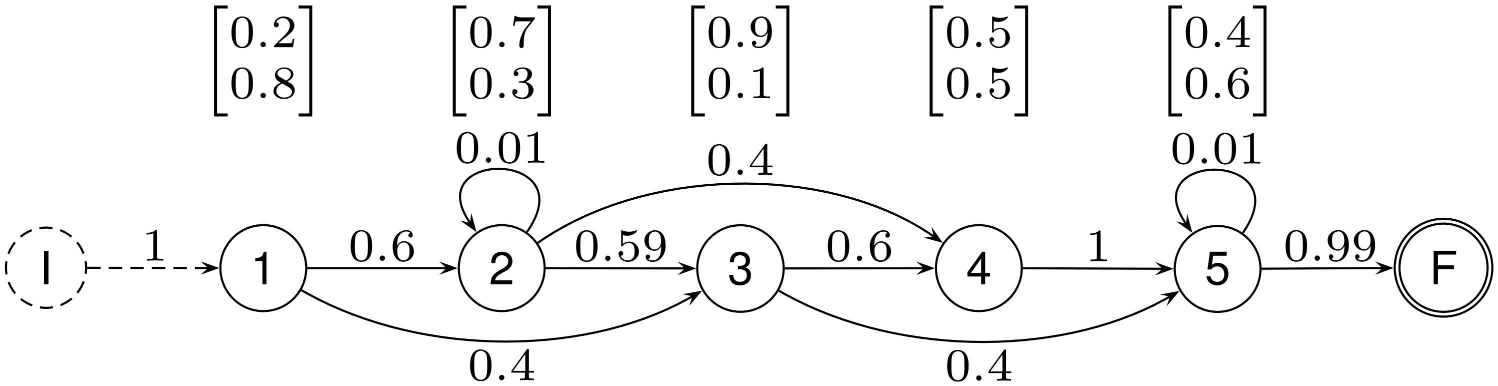
A	1	2	3	4	5	F
1		0.6	0.4			
2		0.01	0.59	0.4		
3				0.6	0.4	
4					1.0	
5					0.01	0.99

B	a	b
1	0.2	0.8
2	0.7	0.3
3	0.9	0.1
4	0.5	0.5
5	0.4	0.6

1. Representa gráficamente este modelo.
2. Calcula la probabilidad de que M genere una cadena de 3 símbolos.
3. ¿Puede decirse que las cadenas más probables tienden a ser las cadenes de longitudes comprendidas entre 3 y 5 símbolos?

Ejercicio (solución)

1)



2) Hay 8 cadenas de longitud $L = 3$: $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$. Cada una de ellas se genera mediante una única secuencia de estados: $1, 3, 5, F$.

$$
\begin{aligned}
P(L = 3 \mid M) &= \sum_{y\in\{a,b\}^3} P(y \mid M) = \sum_{y\in\{a,b\}^3} \pi_1\, B_{1,y_1} \left(A_{1,3}\, B_{3,y_3}\ A_{3,5}\, B_{5,y_5}\right) A_{5,F} \\
&= \pi_1\, A_{1,3}\, A_{3,5}\, A_{5,F} \sum_{y\in\{a,b\}^3} (B_{1,y_1}\, B_{3,y_3}\, B_{5,y_5}) \\
&= 0.1584\, (B_{1,a}\, B_{3,a}\, B_{5,a} + B_{1,a}\, B_{3,a}\, B_{5,b} + \cdots + B_{1,b}\, B_{3,b}\, B_{5,b}) \\
&= 0.1584\, (B_{1,a} + B_{1,b})\, (B_{3,a} + B_{3,b})\, (B_{5,a} + B_{5,b}) \\
&= 0.1584 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ = \ \mathbf{0.1584}
\end{aligned}
$$

3) ***Sí***. Los productos que incluyen $A_{2,2}$ o $A_{5,5}$ (ambas $= 0.01$) influyen de forma despreciable en las sumas. a) $P(L = l \mid M) = \mathbf{0}\ \forall l < 3$; b) $P(L = 4 \mid M) = 1\cdot 0.6\cdot 0.4\cdot 1\cdot 0.99 + 1\cdot 0.4\cdot 0.6\cdot 1\cdot 0.99 + 1\cdot 0.6\cdot 0.59\cdot 0.4\cdot 0.99 + \ldots \approx \mathbf{0.62}$; c) $P(L = 5 \mid M) = 1\cdot 0.6\cdot 0.59\cdot 0.6\cdot 1\cdot 0.99 + \ldots \approx \mathbf{0.21}$; d) $\forall l \geq 6$, $P(L = l \mid M) < \mathbf{0.005}$ y disminuye exponencialmente con l de forma muy acusada.

Índice

Gramáticas

- ***Monoide Libre*** Σ^****:*** Dado un conjunto finito Σ, Σ^+ es el conjunto de todas las cadenas de longitud finita formadas por elementos de Σ. Además, $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$ (la *cadena vacia*).

- ***Gramática:*** $G = (N, \Sigma, R, S)$
  - N: Conjunto finito de *No-Terminales*
  - Σ: Conjunto finito de *Terminales o Primitivas*
  - $S \in N$: Símbolo No-Terminal inicial o *"Axioma"*
  - $R \subset (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$: conjunto de *Reglas*.

    A regla se escribe como:

    $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\beta}, \quad \alpha \in (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^*, \ \ \beta \in (N \cup \Sigma)^*$

    Si varias reglas comparten su parte izquierda, pueden abreviarse como:

    $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \ \boldsymbol{\beta_1} \mid \boldsymbol{\beta_2} \mid \cdots$

Gramáticas y lenguajes

- ***Derivación Elemental : $\underset{G}{\Longrightarrow}$:***

  $\mu\,\alpha\,\delta \underset{G}{\Longrightarrow} \mu\,\beta\,\delta$ sii $\exists(\alpha \rightarrow \beta) \in R, \;\; \mu, \delta \in (N \cup \Sigma)^*$

- ***Derivación $\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$:***

  Es una *secuencia finita de derivaciones elementales*. Una derivación d puede escribirse como la secuencia correspondiente de reglas de G.

  El *conjunto de derivaciones* de $y \in \Sigma^*$ (tales que $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} y$) se denota como $D_G(y)$.

  Una gramática G es *ambigua* si $\exists y \in \Sigma^*$ tal que $|D_G(y)| > 1$

- ***Lenguaje generado por una gramática G, $\mathcal{L}(G)$:***

$$\mathcal{L}(G) = \{\, y \in \Sigma^* \;\mid\; S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} y \,\}$$

Tipos de gramáticas y lenguajes

Jerarquía de Chomsky para lenguajes recursivos

0: No-restringidos

1: Contextuales

$\alpha \to \beta$, $\qquad |\alpha| \leq |\beta|$

2: Incontextuales

$B \to \beta$, $\qquad B \in N$

3: ***Regulares o de "Estados-Finitos"***

$A \to aB$ o $A \to a$, $\quad A, B \in N, \; a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$

Gramáticas regulares y autómatas finitos

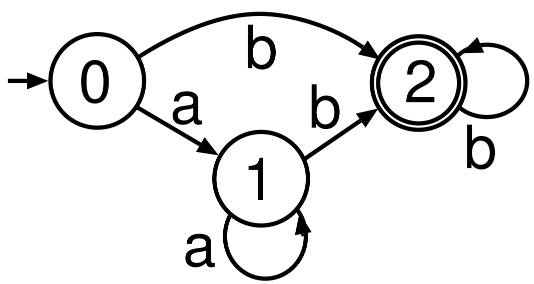
- ***Gramáticas Regulares:*** $G = (N, \Sigma, R, S)$,
  Reglas de R de la forma: $A \rightarrow aB \;\vee\; A \rightarrow a, \quad A, B \in N, \quad a \in \Sigma$

- ***Autómatas Finitos:*** $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), \quad q_0 \in Q, \quad F \subseteq Q, \quad \delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

- ***Equivalencia:*** Para cada Gramática Regular existe un Autómatas Finito que reconoce el mismo lenguaje. (*¡Ojo: la inversa no es siempre cierta en el caso de lenguajes* **estocásticos** *!*).

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
G &= (N, \Sigma, R, S);\\
\Sigma &= \{a, b\};\; N = \{S, A_1, A_2\};\\
R &= \{\; S \;\rightarrow aA_1 \mid bA_2 \mid b,\\
&\qquad A_1 \rightarrow aA_1 \mid bA_2 \mid b,\\
&\qquad A_2 \rightarrow bA_2 \mid b\}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\};\\
Q &= \{0, 1, 2\},\\
\Sigma &= \{a, b\},\\
q_0 &= 0,\;\; F = \{2\}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{L}(G) = \{b, ab, bb, aab, abb, bbb, \ldots, aaabbbb, \ldots\} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$$