Primer Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(2 puntos)**

Dados los lenguajes y homomorfismo:

$$L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ |x|_a \text{ mód } 2 = 0\},\qquad \begin{cases} h(0) = ba \\ h(1) = aa \\ h(2) = b \end{cases}$$
$$L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ ab \notin Seg(x)\}$$

(a) Enumere las primeras siete palabras en orden canónico de $L_1 \cap L_2$.

Solución:
$\lambda, b, aa, bb, baa, bbb, aaaa.$

(b) Describa el lenguaje L_2^*.

Solución:
$L_2^* = \{a,b\}^*.$

(c) Describa el lenguaje $(ab)^{-1}L_1$.

Solución:
$(ab)^{-1}L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ |x|_a \text{ mód } 2 = 1\}.$

(d) Describa el lenguaje $h^{-1}(L_2)$.

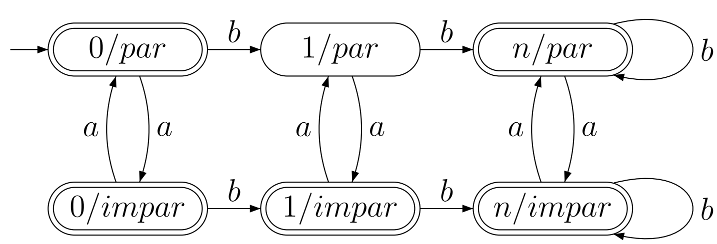
Solución:
$h^{-1}(L_2) = \{2\}^*\{\lambda, 0\}\{1\}^*.$

Ejercicio 2 **(3 puntos)**

Proporcione un AFD para cada uno de los siguientes lenguajes:

(a) $L = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ |x|_b \neq 1 \vee |x|_a \text{ mód } 2 = 1\}.$

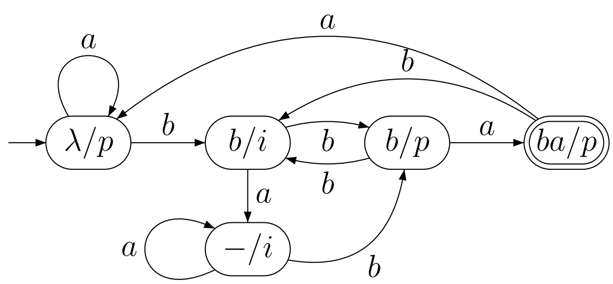
Solución:



Nombramos cada estado con información acerca del número de símbolos b analizados y la paridad del número de símbolos a analizados.

(b) $L = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ ba \in Suf(x) \wedge |x|_b \text{ mód } 2 = 0\}$.

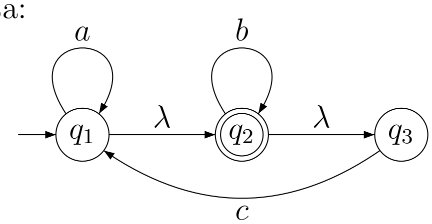
Solución:



Los nombres de los estados se han escogido para representar el qué parte del sufijo deseado se ha analizado y la paridad (p/i) del número de símbolos b analizados.

Ejercicio 3 **(1 punto)**

Dado el siguiente autómata:



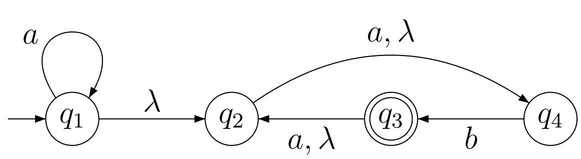
Enumere las dos primeras palabras en orden canónico del lenguaje $\overline{L(A)}$.

Solución:

ba, aba

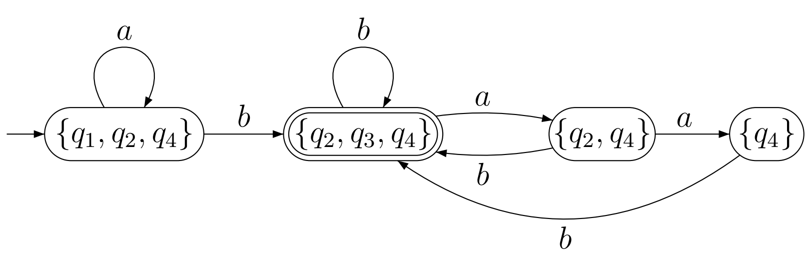
Ejercicio 4 **(2 puntos)**

Obtener un AFD equivalente al siguiente autómata:

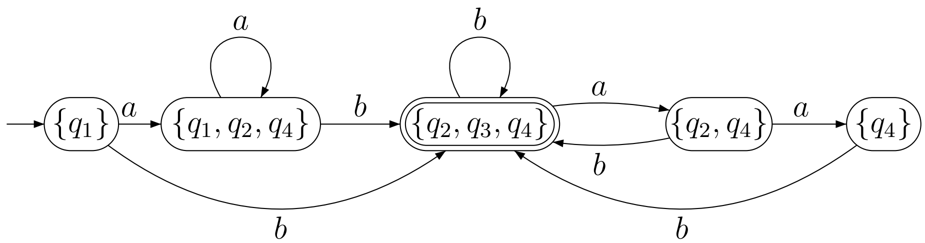


Solución:

Aplicando los algoritmos vistos en clase, se obtiene el siguiente autómata:



o este otro si se obtiene como paso intermedio un AFN equivalente al AFλ del ejercicio:



Ejercicio 5 **(2 puntos)**

(a) Proporcione dos lenguajes L_1 y L_2 distintos entre si tales que $L_1 \cup L_2 \subseteq L_1L_2$.

Solución:
Tomando $L_1 = \{\lambda, a\}$ y $L_2 = \{\lambda, b\}$ se obtiene:

$$L_1 \cup L_2 = \{\lambda, a, b\}$$
$$L_1L_2 = \{\lambda, a, b, ab\}$$

por lo tanto se cumple la condición.

(b) Proporcione dos lenguajes L_1 y L_2 distintos entre si tales que $L_1L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$.

Solución:
Tomando $L_1 = \{a\}$ y $L_2 = \emptyset$ se obtiene:

$$L_1 \cup L_2 = \{a\}$$
$$L_1L_2 = \emptyset$$

por lo tanto se cumple la condición.

Segundo Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(2 puntos)**

Determine si el lenguaje $L = \{xabx \;:\; x \in \{a,b\}^*\}$ es o no regular.

Solución:

Sea el lenguaje infinito $C = \{b^n \;:\; n \geq 1\}$, y considerese un par cualesquiera de palabras de C distintas $u = b^i$ y $v = b^j$ $(i \neq j)$.

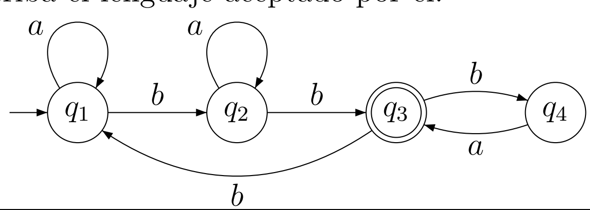
Independientemente de las palabras escogidas, existe una palabra $w = abb^i$, tal que $uw = b^i abb^i$ pertenece al lenguaje L pero donde $vw = b^j abb^i$ no pertenece a L.

Por lo tanto, en un posible autómata finito para L, el análisis de las palabras u y v debería alcanzar estados distintos. Dado que la elección de las palabras es indistinta y que el tamaño de C es infinito, no es posible que el autómata para el lenguaje tenga un número finito de estados, por lo que el lenguaje no es regular.

De forma equivalente, por el mismo argumento, cada una de las palabras de C pertenece a una clase distinta de la relación R_L, por lo que esta relación no es de índice finito, llegando a la misma conclusión de que L no es regular.

Ejercicio 2 **(2 puntos)**

Utilice el método visto en clase para analizar el siguiente autómata y obtener una expresión regular que describa el lenguaje aceptado por él.



Solución:

El sistema de ecuaciones en expresiones regulares asociado al autómata es:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 \\ X_2 = aX_2 + bX_3 \\ X_3 = bX_1 + bX_4 + \lambda \\ X_4 = aX_3 \end{cases}$$

sustituyendo en el sistema el valor de X_4 obtenemos:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 \\ X_2 = aX_2 + bX_3 \\ X_3 = bX_1 + baX_3 + \lambda \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en la tercera ecuación se obtiene que:

$$X_3 = (ba)^*(bX_1 + \lambda) = (ba)^*bX_1 + (ba)^*,$$

sustituyendo en el sistema el valor de X_3 obtenemos:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 \\ X_2 = aX_2 + b((ba)^*bX_1 + (ba)^*) \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en la segunda ecuación se obtiene que:

$$X_2 = a^*b((ba)^*bX_1 + (ba)^*) = a^*b(ba)^*bX_1 + a^*b(ba)^*,$$

con lo que sustituyendo en la ecuación de X_1 se obtiene:

$$X_1 = aX_1 + ba^*b(ba)^*bX_1 + ba^*b(ba)^* = (a + ba^*b(ba)^*)bX_1 + ba^*b(ba)^*$$

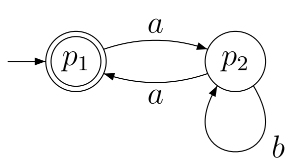
y aplicando por última vez el lema de Arden se obtiene:

$$X_1 = ((a + ba^*b(ba)^*)b)^*ba^*b(ba)^*.$$

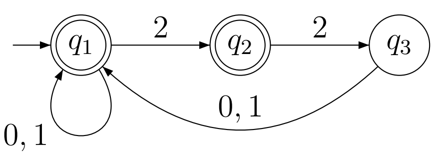
Ejercicio 3 **(2 puntos)**

Dados los autómatas y el homomorfismo:

A_1



A_2

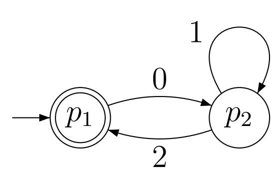


$$\begin{cases} h(0) = ab \\ h(1) = bb \\ h(2) = ba \end{cases}$$

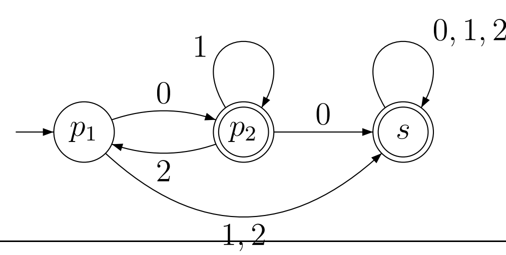
obtenga un AFD que acepte el lenguaje $\overline{h^{-1}(L(A_1))} \cap L(A_2)$.

Solución:

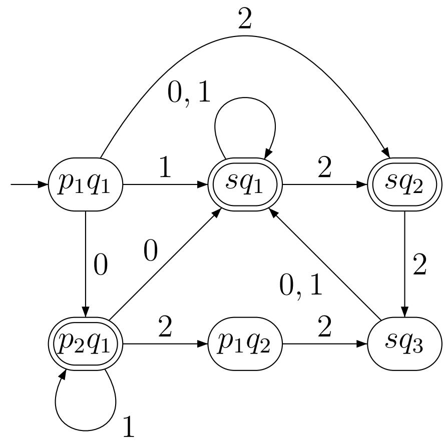
Obtenemos primero un autómata para $h^{-1}(L(A_1))$.



consideramos este último, lo hacemos completamente especificado y obtenemos un autómata para el lenguaje $\overline{h^{-1}(L(A_1))}$.

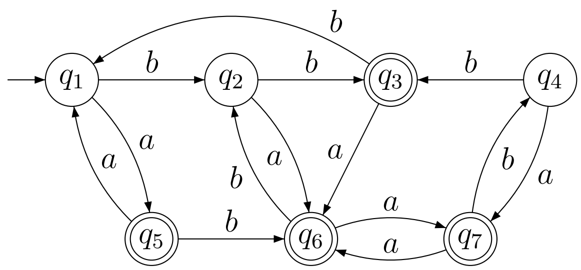


y finalmente aplicamos la construcción para la interesección, obteniendo la solución al ejercicio:



Ejercicio 4 **(2 puntos)**

Obtener el AFD mínimo equivalente al siguiente autómata:



Solución:

Una traza del algoritmo de minimización de Moore para el autómata del ejercicio es la siguiente:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_2, q_4\}, \{q_3, q_5, q_6, q_7\}\}$$

	π_0	a	b
$[1]_{\pi_0}$	q_1	$[2]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_2	$[2]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$
	q_4	$[2]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$
$[3]_{\pi_0}$	q_3	$[2]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_5	$[1]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$
	q_6	$[2]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_7	$[2]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$

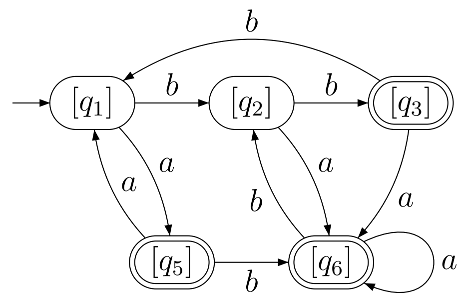
$$\pi_1 = \{\{q_1\}, \{q_2, q_4\}, \{q_3, q_6, q_7\}, \{q_5\}\}$$

	π_1	a	b
$[1]_{\pi_1}$	q_1	$[5]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
$[2]_{\pi_1}$	q_2	$[3]_{\pi_1}$	$[3]_{\pi_1}$
	q_4	$[3]_{\pi_1}$	$[3]_{\pi_1}$
$[3]_{\pi_1}$	q_3	$[3]_{\pi_1}$	$[1]_{\pi_1}$
	q_6	$[3]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
	q_7	$[3]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
$[5]_{\pi_1}$	q_5	$[1]_{\pi_1}$	$[3]_{\pi_1}$

$$\pi_2 = \{\{q_1\}, \{q_2, q_4\}, \{q_3\}, \{q_5\}, \{q_6, q_7\}\}$$

	π_2	a	b
$[1]_{\pi_2}$	q_1	$[5]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
$[2]_{\pi_2}$	q_2	$[6]_{\pi_2}$	$[3]_{\pi_2}$
	q_4	$[6]_{\pi_2}$	$[3]_{\pi_2}$
$[3]_{\pi_2}$	q_3	$[6]_{\pi_2}$	$[1]_{\pi_2}$
$[5]_{\pi_2}$	q_5	$[1]_{\pi_2}$	$[6]_{\pi_2}$
$[6]_{\pi_2}$	q_6	$[6]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
	q_7	$[6]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$

con lo que el autómata mínimo equivalente es el siguiente:



Ejercicio 5 **(2 puntos)**

Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, se define la operación $f : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ como:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{si } a \in Pref(x_1) \cap Pref(x_2) \\ x_1^r & \text{si } b \in Pref(x_1) \\ \lambda & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta operación se extiende a lenguajes como:

$$f(L) = \{f(x_1, x_2) \; : \; x_1, x_2 \in L\}.$$

¿Es la operación f cerrada en la clase de los lenguajes regulares?

Ejemplo: Dado $L = \{\lambda, a, ab, bbbba\}$, se obtiene $f(L) = \{\lambda, aa, aab, aba, abab, abbbb\}$.

Solución:

La operación es de cierre en la clase de los lenguajes regulares. En efecto, considerando los lenguajes regulares:

$$L_a = \{ax \; : \; x \in \{a, b\}^*\}$$
$$L_b = \{bx \; : \; x \in \{a, b\}^*\}$$
$$\{\lambda\}$$

Siguiendo la definición de la función, puede definirse el resultado de la función cuando las palabras x_1, x_2 tienen prefijo a como:

$$(L \cap L_a)^2$$

El resultado de la función en el caso que x_1 tenga prefijo b se puede definir como

$$(L \cap L_b)^r.$$

Por último, en el caso que ambas x_1 y x_2 tomaran el valor λ, la función puede definirse como:

$$L \cap \{\lambda\}.$$

Por lo que, considerando la unión de todos los posibles casos se obtiene:

$$f(L) = (L \cap L_a)^2 \cup (L \cap L_b)^r \cup (L \cap \{\lambda\})$$

Como la definición puede hacerse como composición, sobre lenguajes regulares, de operaciones de cierre para la clase de lenguajes regulares. Con esto puede concluirse que la operación f es cerrada en la clase de los lenguajes regulares.