TEMA 2: Matrius

1. Matrius inverses

• **Definició 2**. Una matriu quadrada A es diu que és **regular** o **invertible** (o no singular) si existeix una altra matriu quadrada B de la mateixa grandària tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

A la matriu B (que és única si existeix) se li anomena **inversa** de A es denota per A^{-1}. Si la matriu A no posseeix inversa direm que A és **singular**.

Nota Realment és prou comprovar que $A \cdot B = I$ (o $B \cdot A = I$) doncs si es compleix una igualtat, es compleix també l'altra.

※Exemple 1. La matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ és invertible i la seua inversa és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ així que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

※Exemple 2. La matriu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és singular donat que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Teorema 1 (Propietats de les matrius invertibles)**. *Si A i B són matrius quadrades de la mateixa grandària, llavors:*

1. *Si A és invertible, llavors A^{-1} també és invertible i $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$*
2. *Si A és invertible i λ és un nombre real no nul, llavors la matriu $\lambda \cdot A$ és invertible i $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$*
3. *Si A i B són invertibles, llavors $A \cdot B$ és invertible i $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$*

   I en general, $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^{-1} = {A_n}^{-1} \cdots {A_2}^{-1} \cdot {A_1}^{-1}$
4. *Si A és invertible llavors A^n també ho és i $\left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$ (a voltes es denota per A^{-n} aquesta matriu)*
5. *Si A és invertible i $A \cdot B = A \cdot C$ llavors $B = C$*

   (anàlogament si $B \cdot A = C \cdot A$ llavors $B = C$)

• **Teorema 2 (Inverses de las matrius elementals)**. *Totes les matrius elementals són invertibles i a més les seues inverses són del mateix tipus. Concretament:*

1. $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$
2. $(E_i(\lambda))^{-1} = E_i(\frac{1}{\lambda})$ *(recordeu que $\lambda \neq 0$)*
3. $(E_{ij}(\lambda))^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

El resultat anterior és fàcil de deduir si pensem en termes d'operacions elementals: la inversa d'una matriu elemental serà una altra matriu que multiplicada per ella a esquerra de la matriu identitat. Per tant, estem cercant realitzar una operació elemental que "desfaça" l'operació associada a aquesta matriu.

※Exemple 3. Calcula les inverses de les següents matrius elementals:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Teorema 3 (Caracterització de matrius invertibles)**. *Siga A una matriu quadrada d'ordre n. Són equivalents:*

1. *A és invertible.*
2. *Per a qualsevol B, el sistema $AX = B$ és compatible determinat.*
3. *$rg(A) = n$.*
4. *Qualsevol forma escalonada de A és del tipus*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad amb \quad a_{ii} \neq 0 \quad per\ a\ tot \quad i.$$

5. *Qualsevol forma escalonada principal de A és del tipus*

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *La forma escalonada reduïda de A és I_n .*
7. *A es pot transformar en I mitjançant operacions elementals.*
8. *A és producte de matrius elementals.*

Algorisme per a calcular la inversa d'una matriu

1. Troba la forma escalonada reduïda de la matriu A però escalonant alhora A i la matriu identitat, és a dir, escalonant $(A \mid I)$.

2. Si la forma escalonada reduïda és $(I \mid B)$ llavors $B = A^{-1}$. En cas contrari, A no és invertible.

※**Exemple 4**.

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{13}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right). \qquad \text{Aleshores } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

※**Exemple 5**. Calcula, si és possible, la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Matrius diagonals.

• **Definició 3**. Un matriu quadrada es diu que és **diagonal** si tots els nombres que no estiguen en la diagonal principal són nuls, és a dir, si $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$.

⁎Exemple 6. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{Matriu diagonal}}$

⁎Exemple 7. La matriu diagonal d'ordre n amb uns en la diagonal es diu **matriu identitat** d'ordre n. La denotarem per I_n (o I quan tinguem clar el seu ordre).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Matrius triangulars

- **Definició 4**. Siga A una matriu quadrada.
  - A és **triangular superior** si $a_{ij} = 0$, per a tot $i > j$ (és a dir, per sota de la diagonal principal hi ha zeros).
  - A és **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$, per a tot $i < j$ (és a dir, per sobre de la diagonal principal hi ha zeros).

⁎Exemple 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ Triangular superior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ Triangular inferior

Nota

Les matrius diagonals són, en particular, matrius triangulars superiors i triangulars inferiors.

• **Teorema 4 (Propietats de les matrius triangulars).** *Siguen A i B dues matrius quadrades d'ordre n i λ un nombre real. Si A i B són matrius triangulars superiors (triangulars inferiors (diagonals)) llavors:*

(i) $A+B$, $\lambda \cdot A$, *i* $A \cdot B$ *són triangulars superiors (triangulars inferiors (diagonals)).*

(ii) A *és invertible si i només si* $a_{ii} \neq 0$, *per a tot* $1 \leq i \leq n$. *A més,* A^{-1} *és també triangular superior (triangular inferior (diagonal)).*

Nota

- Les matrius elementals de tipus 2, $E_i(\alpha)$, són diagonals,
- Les matrius elementals de tipus 3, $E_{i,j}(\alpha)$, són triangulars superiors quan $i < j$ i triangulars inferiors quan $i > j$.
- Les matrius elementals de tipus 1, $E_{i,j}$, no són triangulars.

※EXEMPLE 9.

$$E_2(3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{diagonal}} \quad E_{12}(3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{triangular}\\ \text{superior}}} \quad E_{21}(3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{triangular}\\ \text{inferior}}} \quad E_{12} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{no és}\\ \text{triangular}}}$$

4. Transposada d'una matriu

• **Definició 5**. Si A és una matriu de grandària $m \times n$ es diu **matriu transposada de** A a la matriu A^t de grandària $n \times m$ l'element (i, j) de la qual és a_{ji}, per a tot $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ (és a dir, és la matriu que s'obté canviant files per columnes en A).

※EXEMPLE 10.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• **Teorema 5 (Propietats de la transposada)**. *Sean A i B dues matrius de grandària $m \times n$, C una matriu de grandària $n \times k$ i λ un nombre real. Llavors*

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
4. $(A \cdot C)^t = C^t \cdot A^t$ *(i en general* $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^t = {A_n}^t \cdots {A_2}^t \cdot {A_1}^t$*).*
5. *Si A és invertible, també ho és A^t i* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

6. *La transposada d'una matriu diagonal és ella mateixa, $A^t = A$, la transposada d'una triangular superior (inferior) és triangular inferior (superior).*

7. *Les transposades de matrius elementals són també matrius elementals i del mateix tipus.*

5. Matrius simètriques i antisimètriques

• **Definició 6**.
Una matriu A es diu que és **simètrica** si $A = A^t$ (és a dir $a_{ij} = a_{ji}$).

Necessàriament, les matrius simètriques són quadrades.

⁎Exemple 11.

Per exemple, les matrius

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \mathrm{i}^3 \\ 2 & 0 & -1 \\ \mathrm{i}^3 & -1 & \pi \end{bmatrix}$$

són simètriques.

• **Definició 7**.
Una matriu es diu que és **antisimètrica** si $A = -A^t$ (és a dir, $a_{ij} = -a_{ji}$, i per tant $a_{ii} = 0$).

Necessàriament, les matrius antisimètriques són quadrades.

※**Exemple 12**. Les següents matrius són antisimètriques:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\mathrm{i}^3 \\ -2 & 0 & 1 \\ \mathrm{i}^3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Matrius ortogonals

• **Definició 8**. Una matriu real Q és *ortogonal* si $Q^tQ = I$, és a dir, si és invertible i la inversa de Q és la seua transposada Q^t.

※EXEMPLE 13.

1. La matriu identitat és ortogonal, perquè $I^tI = II = I$ i la matriu

2. $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

   també és ortogonal

Nota Aquestes matrius es diuen ortogonals perquè les seues columnes (i les seues files) són un sistema de vectors ortonormals (és a dir són vectors ortogonals dos a dos i de norma un). Observar que en multiplicar Q^t per Q realment estem realitzant els productes escalars entre les columnes de Q, aleshores que el resultat siga la identitat, indica que el producte de dos vectors diferents és nul i que els vectors tenen norma un.