ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA)

UT3 - Ejercicios Repaso. INTEGRACIÓN DE RIEMANN

A) INTEGRALES INMEDIATAS:

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^4}$ $\left(\textit{Sug:}\frac{1}{x^4} = x^{-4}; \quad \textit{Solución: } \frac{7}{24}\right)$

2 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+1}{x^5}dx$ $\left(\textit{Sug: } \frac{x^3+1}{x^5} = x^{-2} + x^{-5}; \quad \textit{Solución: } \frac{47}{64}\right)$

3. $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ $\left(\textit{Sug: } \sqrt{x} = x^{1/2}; \quad \textit{Solución: } -\frac{4}{3}\right)$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(4x+1)^2}$ $\left(\textit{Sug: } (4x+1)' = 4; \quad \textit{Solución: } \frac{1}{5}\right)$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ $\left(\textit{Sug: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \textit{Solución: } 2\right)$

B) INTEGRACIÓN POR PARTES:

1. $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$ $\left(\textit{Sug: } u = \ln(x),\ dv = x^2dx; \quad \textit{Solución: } \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}\right)$

2. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(\sqrt{x})dx$ $\left(\textit{Sug: } u = \ln(\sqrt{x}),\ dv = xdx; \quad \textit{Solución: } \ln(2) - \frac{3}{8}\right)$

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ $\left(\textit{Sug: } u = \ln(x),\ dv = \frac{1}{x^2}dx; \quad \textit{Solución: } \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}\right)$

4. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-\frac{x}{2}}dx$ $\left(\textit{Sug: } u = x,\ dv = e^{-\frac{x}{2}}dx; \quad \textit{Solución: } 4 - \frac{6}{\sqrt{e}}\right)$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx$ $\left(\textit{Sug: } u = x^2,\ dv = \cos(x)dx; \quad \textit{Solución: } \frac{\pi^2}{4} - 2\right)$

C) INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE:

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{5} - 1\right)^3 xdx$ $\left(\textit{Sug: } \frac{x^2}{5} - 1 = t; \quad \textit{Solución: } 0\right)$

2. $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4+x^3}dx$ $\left(\textit{Sug: } \sqrt{4+x^3} = t; \quad \textit{Solución: } \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{16}{9}\right)$

3. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x+1}dx$ $\left(\textit{Sug: } \sqrt{x+1} = t; \quad \textit{Solución: } \frac{8\sqrt{3}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+3)}{\sqrt{x}}dx$ $\left(\textit{Sug: } \sqrt{x} = t; \quad \textit{Solución: } \frac{22\sqrt{2}}{3} - \frac{20}{3}\right)$

5. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$ $\left(\textit{Sug: } \frac{1}{x} = t; \quad \textit{Solución: } e^2\right)$

ANÁLISIS MATEMÁTICO (AMA) **2012-2013**

UT3 - Problemas Repaso. INTEGRACIÓN DE RIEMANN Y APROXIMADA

1. Considera la integral $\displaystyle\int_1^2 \log\left(x^2\right)\, dx.$

   a) Calcula su valor exacto aplicando integración por partes.
   b) Aproxima su valor usando el método de Trapecios con $n = 5$.
   c) Calcula la cota de error del método de Trapecios para la aproximación anterior.

2. Considera la función $f(x) = 4x^2 - x^3$

   a) Calcula el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.
   b) Aproxima su valor usando el método de Simpson con $n = 4$.
   c) Compara el valor exacto con el aproximado. ¿Puedes explicar el resultado obtenido?

3. Considera la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2-x^2}\, dx.$

   a) Calcula su valor exacto.
   b) Aproxima su valor usando la regla de Simpson con el intervalo de integración dividido en seis partes. Verifica la precisión que obtienes comparando con el resultado de a).

4. Considera la integral $\displaystyle\int_6^{\pi^2-3} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x+3}\right)\, dx$

   a) Calcula su valor exacto.
   b) Calcula el área encerrada por la gráfica de $f(x) = x\left(x^2-1\right)$ y el eje de abscisas.

5. Considera la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\, dx.$

   a) Aproxima su valor usando el método de Simpson con $n = 6$.
   b) Acota el error cometido en la aproximación sabiendo que la derivada cuarta de $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ es, en módulo, menor que 25.

6. Considera la integral $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\cdot\log(x)}\, dx.$

   a) Calcula su valor exacto mediante algún cambio de variable.
   b) Aproxima su valor usando el método de Trapecios con $n = 4$.
   c) ¿Cuántas cifras decimales coinciden en los dos valores encontrados para la integral?

7. Considera la integral $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\, dx.$

   a) Aproxima su valor usando el método de Simpson con $n = 6$.
   b) Acota el error cometido en la aproximación sabendo que la derivada cuarta de $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x+1}$ es, en módulo, menor que 60.
   c) Es conocido que $I = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$. A partir de este resultado verifica que la aproximación que encuentras en a) es compatible con la precisión esperada en b).

8. Calcula, utilizando integración por partes, el valor exacto de la integral $\int_0^1 x\cos(\pi x)\, dx$ y aproxima el resultado mediante la calculadora.

   a) Aproxima el valor de la integral usando el método de Simpson con $n = 4$.
   b) Compara el valor exacto con el valor aproximado. ¿Cuántos decimales exactos obtienes?