DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA (ETSINF)

AMA - Primer parcial **9-11-2009** **Duración: 1h**

---

1. a)$_{(0.5p)}$ Determina el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left|x^2 - 2\right| \leq 1$.

b)$_{(0.5p)}$ Escribe $z = \dfrac{x-i}{1+xi}$, siendo $x \in \mathbb{R}$, en forma binómica.

Expresa el resultado en forma polar.

Calcula $z \cdot w$, donde $w = 2_{\frac{2\pi}{3}}$ y escribe el resultado en forma binómica.

---

a) Observa que

$$\left|x^2 - 2\right| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x^2 - 2 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq x^2 \leq 3 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow |x| \geq 1 \quad \wedge \quad |x| \leq \sqrt{3}$$

Ahora bien,

$$|x| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

y, por otro lado,

$$|x| \leq \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$$

Por tanto, la solución final será la intersección de estos dos conjuntos, es decir,

$$\left|x^2 - 2\right| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \left[-\sqrt{3}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{3}\right].$$

b) Reescribimos z en forma binómica

$$z = \frac{x-i}{1+xi} = \frac{(x-i)\,(1-xi)}{(1+xi)\,(1-xi)} = \frac{x - i - x^2 i + x i^2}{1+x^2} = -i$$

de donde $|z| = 1$ y $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$. La forma polar de z será

$$z = 1_{-\frac{\pi}{2}}$$

Teniendo en cuenta el producto de números complejos en forma polar

$$z \cdot w = (2 \cdot 1)_{\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}} = 2_{\frac{\pi}{6}}$$

que, a partir de la forma trigonométrica, puede esribirse como

$$z \cdot w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3} + i$$

2. $(1p)$ Compara los órdenes de magnitud de las sucesiones $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $b_n = \log(n)$

---

a) Aplicando el criterio de Stolz, podemos comprobar que $a_n \gg b_n$, ya que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\log(n)} = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\log(n+1) - \log(n)} =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)} = \lim \frac{1}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{\log\left(\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}}\right)} \underset{\text{Euler}}{=}$$

$$= \frac{1}{\log\left(e^{\lim\left(\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right)}\right)} = \frac{1}{\lim\left(\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right)} = \frac{1}{\lim\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)} = +\infty$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}} = 1^{\infty}$$

y podemos aplicar la fórmula de Euler para salvar esta indeterminación, esto es,

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}} = e^{\lim\left(\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\right)}.$$

---

3. $(1.0p)$ Considera la sucesión definida por

$$\begin{cases} 2a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 1 \end{cases}$$

a) $(0.3p)$ Escribe los cinco primeros términos de la sucesión.

b) $(0.7p)$ Halla explícitamente a_n resolviendo la recurrencia correspondiente.

---

a) La recurrencia puede expresarse en la forma

$$a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + a_n$$

y puesto que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, se tendrá

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{3}{2}a_2 + a_1 = \frac{3}{2} \\ a_4 &= \frac{3}{2}a_3 + a_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{13}{4} \\ a_5 &= \frac{3}{2}a_4 + a_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{4} + \frac{3}{2} = \frac{51}{8}. \end{aligned}$$

b) La recurrencia puede expresarse también en la forma

$$a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n = 0$$

por lo que la ecuación característica correspondiente será

$$r^2 - \frac{3}{2}r - 1 = 0$$

que tiene por solución dos raíces reales simples, $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = 2$.

La recurrencia corresponde pues al caso 1 y su solución general puede escribirse en la forma:

$$a_n = C_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot 2^n$$

Planteando las condiciones iniciales encontraremos las constantes. Así,

$$\begin{array}{lclcl} \text{para } n = 1 & ; & a_1 & = & -\frac{1}{2}C_1 + 2C_2 & = & 0 \\ \text{para } n = 2 & ; & a_2 & = & \frac{1}{4}C_1 + 4C_2 & = & 1 \end{array}$$

de donde, resolviendo el sistema, $C_1 = \frac{4}{5}$ y $C_2 = \frac{1}{5}$. De aquí,

$$a_n = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{5} \cdot 2^n$$