

EJERCICIOS DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución exponencial

1. Si la duración de un sistema, en años, sigue una distribución exponencial de media $E(X)=6$ meses,
- ¿Cuál será la función de densidad de la v.a. X ?
 - ¿Y la desviación típica?
 - ¿Cuál será la probabilidad de que el sistema funcione por lo menos durante 1 año?

Sol: b) $\sigma = 1/2$ c) 0'1353

2. Si el tiempo de vida de una máquina sigue una distribución exponencial, siendo el tiempo medio entre fallos (MTBF) de 200 horas ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran más de 200 horas sin que se produzca una avería? **Sol: 0'37**

3. Un componente electrónico tiene una vida que se puede modeliza mediante una v.a. exponencial. La vida media del componente es de 2500 horas. Tras 900 horas de funcionamiento el equipo funciona correctamente. ¿cuál es la probabilidad de que el componente siga funcionando durante 2500 horas más? **Sol: $1/e$**

4. El tiempo transcurrido entre el tratamiento y la recidiva de cierto tipo de cáncer se distribuye exponencialmente con media $E(T)$. Determinar que valor ha de tener $E(T)$ para que haya un 50% de probabilidad de que el tumor se haya reproducido en un plazo de 693 días. **Sol: 999.8**

5. Los fallos de fluido eléctrico en una estación de trabajo siguen una distribución de Poisson, con un promedio de 2'5 fallos al mes. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo fallo ocurra antes de 2 meses? **Sol: 0'99326**

6. Los fallos de fluido eléctrico en una estación de trabajo siguen una distribución de Poisson y tienen un promedio de 1'5 fallos al mes.

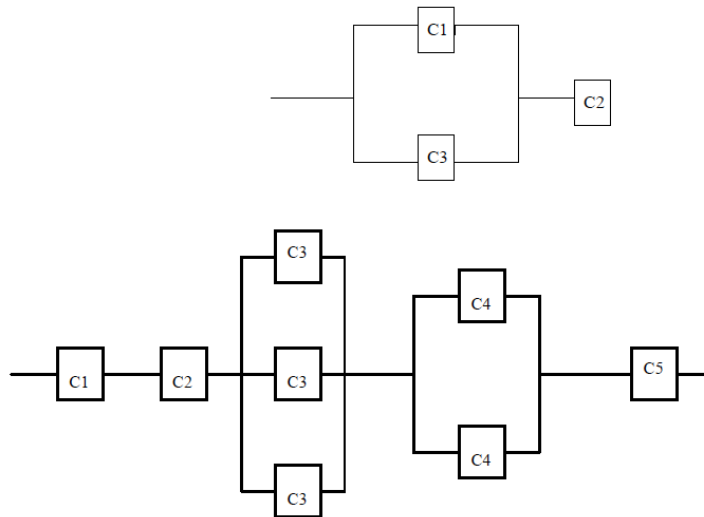
- ¿cuál es el número de fallos esperado en un año?
- ¿cuál es la probabilidad de que se produzcan más de 20 fallos en un año?
- ¿cuál es la probabilidad de que el próximo fallo ocurra antes de 2 meses?
- ¿cuál es la probabilidad de que ocurra antes de tres meses pero no antes de 2 meses?

Sol: a)18 b)0'2776 c)0'9502 d)0'0387

7. Un sistema serie es aquel que falla si falla una de sus componentes. Un sistema paralelo es aquel que falla si y solo si fallan todas sus componentes. Llamamos fiabilidad de una componente a la probabilidad de que esta funcione adecuadamente. Supongamos que tenemos un sistema formado por cinco componentes mutuamente independientes. Si el tiempo de vida de las componentes sigue una distribución exponencial de media 20.000 horas,

- ¿Cuál será la probabilidad de que el sistema supere las 10.000 horas si las componentes están en serie?
- ¿Y si están en paralelo?

8. Dado los esquemas siguientes,



y sabiendo que el tiempo de vida de las componentes siguen las siguientes distribuciones de probabilidad:

- Componente 1: Exponencial de media 20.000 horas.
- Componentes 2 y 3: Exponencial de media 10.000 horas.
- Componentes 4 y 5: Exponencial de media 5.000 horas.

¿Cual es la probabilidad de que el sistema supere las 10.000 horas de funcionamiento?

Distribución normal

9. Los límites medios de tolerancia de un interruptor son 40 ± 0.5 amperios. Si un interruptor dispara a una intensidad menor de 39.5 o mayor de 40.5 se considera defectuoso. Si los puntos de ruptura de los interruptores de una partida se distribuyen normalmente con media 39.5 y desviación típica 0.2 ¿cuál será el porcentaje de interruptores defectuosos en esa partida? **Sol: 0.5**

10. El tiempo medio de CPU necesario para la ejecución de una clase de programas en un ordenador central es 2.52 minutos y la desviación típica es 0.37 minutos. Si el tiempo de ejecución se distribuye normalmente, ¿cuál es la probabilidad de que un programa seleccionado aleatoriamente requiera entre 2 y 4 minutos de CPU? ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia en valor absoluto entre el tiempo de ejecución y la media sea menor o igual que 1 minuto? **Sol: 0.92, 0.9931**

11. La altura A de los camiones que circulan por una autopista sigue aproximadamente una distribución normal con media 3.5m y desviación típica 0.5m. Averiguar el galibo G que debe tener un túnel para que la probabilidad de que pase un camión sea 0.99 **Sol: 4.66**

12. En la producción de piezas para un motor de combustión interna, los pesos presentan bastante dispersión. Una dispersión demasiado grande provoca un mal funcionamiento. Supongamos que un fabricante concreto desea rechazar el 3% de los cojinetes de menor peso y el 3% de los cojinetes de

mayor peso. Si el peso medio es 4'72 Kg, la desviación típica es 0'006 kg y la distribución de los pesos es normal, determinar el peso máximo y el peso mínimo para que una pieza sea aceptada. **Sol: 4'7087 y 4'7313**

13. Dada una v.a. normal X tal que $P(X \leq 15) = 0'1$ y $P(X \leq 20) = 0'95$, calcular:

- a) $P(X \leq 13)$
- b) un valor a tal que $P(X \leq a) = 0.05$
- c) un valor b tal que $P(X > b) = 0.5$.

14. El tiempo de vida en años de los tubos de televisión se distribuye normalmente. Un estudio de la producción de un fabricante muestra que el 5% de los tubos falla antes de los 2 años, mientras que el 5% dura mas de 6 años. Hallar la probabilidad de que el tiempo de vida de un tubo exceda de 4 años. **Sol: 0'5**

15. La duración de unos circuitos electrónicos puede ser estimada por un modelo normal con un valor medio de 2500 horas. Si el 95% de los circuitos debe durar por lo menos 2400 horas ¿cuál es la máxima varianza que puede tener la distribución?. **Sol: 3695**

16. El volumen (en ml) colocado en una botella por una máquina embotelladora sigue una distribución normal de media μ y varianza σ . Durante un período largo de tiempo se ha observado que el 5% de las botellas contiene menos de 31'5 ml, mientras que el 1'5% contiene mas de 32'3ml. ¿Qué proporción de botellas contiene mas de 32'2 ml?. **Sol: 0'045**

17. Se admite que la retribución anual de las personas que trabajan en cierta empresa es aproximadamente normal. Por las relaciones del IRPF se sabe que, la retribución del 2% de dichas personas es superior a 70.000€ y que la retribución del 1% de las mismas es inferior a 20.000€ ¿Qué porcentaje de dicho personal recibe mas de 40.000€ anuales?. **Sol: 0'72**

18. El diámetro de una pieza es una v.a. $N(32,0'07)$ mm. Una pieza es defectuosa cuando el diámetro está fuera de tolerancia, siendo estas $[31'85, 32'1]$ mm. Un equipo contiene 5 de estas piezas. Cuando el equipo contiene alguna pieza defectuosa éste no funciona correctamente siendo, por tanto defectuoso. Calcular el porcentaje de equipos defectuosos. **Sol: 0'3848**

Aproximaciones al modelo normal

19. La dimensión principal de cierta pieza producida en una fábrica se distribuye normalmente con media 150 y varianza 0'16. Se sabe que las piezas son aceptables si la longitud se halla comprendida entre 149'2 y 150'4. Calcular la probabilidad de que al menos el 90% de las piezas de un lote sea correctas

- a) en el caso de que el tamaño del lote sea 10
- b) en el caso de que el tamaño del lote sea 100

Sol: a) 0'4342 ; b) 0'0239

20. En un proceso de fabricación se sabe que el número de unidades defectuosas producidas diariamente sigue una distribución de Poisson de valor medio 10. Determinar la probabilidad de que en 150 días, el número de unidades defectuosas producidas supere 1475 unidades. **Sol: 0'7356**

Combinación lineal de normales independientes

21. Dadas dos v.a. X e Y , indica cuantas de las siguientes afirmaciones son VERDADERAS:

- Si X e Y son independientes su covarianza es igual a 0
- Si $\text{Cov}(X,Y)=0 \Rightarrow X$ e Y son independientes
- La covarianza de X e Y no depende de las unidades de medida de las variables

22. Dadas dos v.a. INDEPENDIENTES X e Y , indica cuantas de las siguientes afirmaciones son VERDADERAS:

- $\text{Var}(X+Y)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)$
- $E(XY)=E(X)E(Y)$
- $\text{Var}(XY)=\text{Var}(X)\text{Var}(Y)$

23. El peso neto de una bombona de butano sigue una distribución normal de media 3 kg y desviación típica 0'1 kg. El peso del gas es una variable normal e independiente de la anterior, de media 10 kg y desviación típica 0'15 kg. Si el butanero pesa 86'94 kg. Y el montacargas no soporta más de 100 kg. Calcular la probabilidad de que el montacargas suba. **Sol: 0'6293**

24. La resistencia interna de un equipo de la marca A se distribuye según una $N(765,16)$ Ω y los equipos de la marca B como una normal $N(761,12)$ Ω . Ambas variables son independientes. Calcular la probabilidad de que un equipo de la marca A elegido al azar tenga una resistencia mayor que un equipo de la marca B elegido al azar. **Sol: 0'5793**

25. Una planta de distribución de leche envasa su producto en botellas de vidrio cuyo peso neto medio es de 500g y su desviación típica es de 50 g. La cantidad de leche que una máquina vierte en una botella sigue una distribución normal de media 1.000g y desviación típica 40 g. Las botellas se distribuyen en cajas de 12 unidades. El peso de cada caja sigue una distribución normal de media 2.500g y desviación típica 500g. Las cajas con la leche se transportan en avión y por razones de seguridad la probabilidad de que la carga supere los 2.000 kg. no debe ser mayor de 0'05 ¿Cuál es el número máximo de cajas que pueden cargarse en un avión ? **Sol: 97**

26. Los pesos de las pastillas de jabón elaboradas por una determinada fábrica, se distribuyen normalmente con desviación típica 0'78g. El peso nominal de una pastilla es 65g., pero debido a variaciones aleatorias en el proceso de producción, el 0'4% de las pastillas producidas caen por debajo del peso estipulado. Las pastillas tienen un envoltorio de papel cuyo peso sigue una distribución $N(10g,1g)$ Para transportar las pastillas disponemos de cajas para 100 unidades. Si el peso de la caja sigue una distribución $N(250g, 20g)$, hallar la probabilidad de que el peso de la caja llena supere los 7'9 kg. **Sol: 0'9918**

27. Un servicio de mantenimiento de aviones realiza diferentes tipos de reparaciones. Las solicitudes de reparación para una categoría particular recibidas en un período de tiempo puede considerarse que constituyen un proceso de Poisson. Concretamente:

CATEGORIA	NUMERO MEDIO DE REPARACIONES EN UNA SEMANA
motor	$\alpha_M=2.0$
diseño	$\alpha_D=0.5$
hidráulica	$\alpha_H=1.3$
tren de aterrizaje	$\alpha_{TA}=0.2$

¿Cuál es la probabilidad de que el número total de reparaciones solicitadas en una semana sea mayor o igual que tres y menor o igual que 7? **Sol: 0'7108**

Si el promedio de reparaciones de diseño se duplica y el promedio de reparaciones de motor se reduce a la mitad ¿Cuál es la probabilidad de que en dos semanas el número total de reparaciones sea menor o igual que 8? **Sol: 0'7291**

28. Las máquinas se rompen en 5 fábricas diferentes con una frecuencia media de 1.2, 3.2, 0.7, 3.5 y 2.4 al día. Los procesos de rotura en los diferentes sitios son independientes, y cada proceso se asume que satisface las condiciones de un experimento de Poisson ¿cuál es la probabilidad de que el número total de roturas en un día dado exceda de 12 unidades? **Sol: 0'32636**

29. Un ingeniero de proyectos que está colaborando en el diseño de una refinería petroquímica. Se deben realizar cuatro actividades secuencialmente y sin solapamiento. Las duraciones de las actividades se supone que son v.a. independientes normalmente distribuidas:

ACTIVIDAD	MEDIA	DESV.TÍPICA
a	50 días	5 días
b	20 días	3 días
c	70 días	10 días
d	40 días	4 días

¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total necesario para que se elaboren las cuatro actividades no supere los 200 días?. **Sol: 0'9485**

30. Los diámetros de los ejes fabricados para una determinada aplicación están distribuidos normalmente con una media de 3'810 cm y una desviación típica de 0'051. Las arandelas de los ejes tienen diámetros interiores que están normalmente distribuidos con una media de 3'942 cm y una desviación típica de 0'025. Dados un eje y una arandela seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la arandela no entre en el eje? **Sol: 0'0102**

31. El peso neto de un paquete es una v.a. $N(20,2)$ y el del envase es una v.a. $N(1, 0'2)$. Colocamos 13 de estos paquetes sobre un soporte de madera que pesa 50 Kg. ¿Cuál es la probabilidad de que al ponerlos en un montacargas cuya carga límite es de 300 Kg. éste no arranque? **Sol: 0'9990**