Exercice1 $\supset$

a)Exprimez la phrase suivante par une formule bien formée en logique propositionnelle. Définissez clairement la signification de chaque atome.

a- ***Ou bien la grève continuera, ou bien l'examen d'INF aura lieu.***

Sol.

A : la grève continuera

B : l'examen d'INF4200 aura lieu

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

b) Exprimez la phrase suivante par une formule bien formée en logique prédicative de premier ordre. Définissez clairement la signification de chaque objet, fonction ou prédicat. Mieux vaut plus de prédicats que pas assez.

Tous les hommes corrompus ne sont pas forcément politiciens.

Sol.

Homme(x) : x est un homme

Corrompu(x) : x est corrompu

Politicien(x) : x est politicien

$\neg\ [(\forall\ x) Homme(x)\ \wedge Corrompu(x)\ ==>\ Politicien(x)]$

$(\exists x)\ Homme\ (x) \wedge Corrompu(x) \wedge\ \neg\ Politicien(x)$

Forme clausale :

Homme(a)

Corrompu(a)

$\wedge\ \neg\ \boldsymbol{Politicien(a)}$

c) Exprimez la phrase suivante par une formule bien formée en logique propositionnelle. Définissez clairement la signification de chaque atome.

- **Chaque année divisible par 4 est bissextile ; toutefois, chaque année divisible par 100 n'est pas bissextile, à moins qu'elle soit également divisible par 400.**

Sol.

Année(x) : x est une année

Bissextile(x) : x est bissextile

Divisible(x, y) : x est divisible par y

$(\forall x) Annee(x) \wedge\ Divisible(x,4) \wedge\ (\neg Divisible(x,100) \vee\ Divisible(x,400))\ ==>\ Bissextile(x)$

Exercice 2 :

Un système comporte les deux règles ci-dessous. Exprimez la base de connaissances correspondante sous la forme normale conjonctive. ($\supset$ **signifie** $\Rightarrow$ **)**

$$(\forall x)\,\{P(x)\wedge[Q(x,A)\vee(\forall y)\,R(y,A)]\}\supset S(x)$$
$$(\forall x)\neg\{P(x)\wedge[Q(x,A)\vee(\forall y)\,R(y,A)]\}\vee S(x)$$
$$(\forall x)\,\{\neg P(x)\vee\neg[Q(x,A)\vee(\forall y)\,R(y,A)]\}\vee S(x)$$
$$(\forall x)\,\{\neg P(x)\vee[\neg Q(x,A)\wedge\neg(\forall y)\,R(y,A)]\}\vee S(x)$$
$$(\forall x)\,\{\neg P(x)\vee[\neg Q(x,A)\wedge(\exists y)\neg R(y,A)]\}\vee S(x)$$
$$(\forall x)\,\{\neg P(x)\vee[\neg Q(x,A)\wedge\neg R(sk(x),A)]\}\vee S(x)$$
$$\{\neg P(x)\vee[\neg Q(x,A)\wedge\neg R(sk(x),A)]\}\vee S(x)$$
$$\neg P(x)\vee[\neg Q(x,A)\wedge\neg R(sk(x),A)]\vee S(x)$$
$$\begin{cases}\neg P(x)\vee\neg Q(x,A)\vee S(x)\\ \neg P(x)\vee\neg R(sk(x),A)\vee S(x)\end{cases}$$

$$(\forall x,y)\,P(x)\supset[Q(y,x)\supset R(x,A)]$$
$$(\forall x,y)\neg P(x)\vee[\neg Q(y,x)\vee R(x,A)]$$
$$\neg P(x)\vee\neg Q(y,x)\vee R(x,A)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\neg P(x_1)\vee\neg Q(x_1,A)\vee S(x_1)\\ \neg P(x_2)\vee\neg R(sk(x_2),A)\vee S(x_2)\\ \neg P(x_3)\vee\neg Q(x_4,x_3)\vee R(x_3,A)\end{array}\right\}$$

Exercice 3 :

a)

Pour chacun des couples de termes **(t_1,t_2)** suivants examiner si t_1 et t_2 sont unifiables :

1. $t_1 : p(x, f(y), g(f(u), w))$ et $t_2 : p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$
2. $t_1 : p(x, f(x), g(f(y), x))$ et $t_2 : p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$
3. $t_1 : p(x, f(x), g(f(x), x))$ et $t_2 : p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$

sol.

1.ok.

2.ok

3. non

b)

Pour chaque paire de formules, donnez l'unificateur le plus général s'il existe:

1. p(a,c,c);p(x,y,z)

2. q(y,G(a,b));q(G(x,x),y)

3. plus_jeune(fils(y),y);plus_jeune(fils(x),moha)

4. connait(fils(y),y);connait(x,x)

Sol :
1.ok
2.non
3.ok
4.non

Exercice 4 : Résolution

1) a : constante ; x,y,w,z : variables. Donner la réfutation de l'ensemble de clauses suivant:

$(1)\neg E(x) \vee V(x) \vee S(x, f(x))$, $(2)\neg E(x) \vee V(x) \vee C(f(x))$, $(3)P(a)$, $(4)E(a)$,
$(5)\neg S(a, y) \vee P(y)$, $(6)\neg P(z) \vee \neg V(z)$, $(7)\neg P(w) \vee \neg C(w)$

Solution.

Voici une réfutation :

(8) $\neg V(a)$ 3,6, RES
(9) $V(a) \vee C(f(a))$ 2,4, RES

(10) $C(f(a))$ 8,9, RES
(11) $V(a) \vee S(a, f(a))$ 1,4, RES
(12) $S(a, f(a))$ 8,11, RES
(13) $P(f(a))$ 12,5, RES
(14) $\neg C(f(a))$ 13,7, RES
(15) $\emptyset$ 10,14, RES

2)

Le langage considéré comprend un symbole de relation binaire q et un symbole de fonction unaire f. On considère les formules suivantes :

1. $\forall v_0 (\exists v_1 q(v_0, v_1) \rightarrow q(v_0, f(v_0))$
2. $\forall v_2 \, \exists v_3 q(v_2, v_3)$
3. $\forall v_4 \, q(f(f(v_4)), v_4)$
4. $\exists v_5 \, \exists v_6 \, \exists v_7 (q(v_5, v_6) \wedge q(v_6, v_7) \wedge q(v_7, v_5)$

Montrer, à l'aide de la méthode de résolution, que la formule 4 est conséquence logique de l'ensemble des autres trois formules. (*Suggestion : on a le droit d'utiliser une clause donnée plus qu'une fois).*

La mise en forme clausale des formules 1-3 et de la négation de 4 donne lieu aux clauses suivantes :

1. $\neg q(v_0, v_1) \ \vee \ q(v_0, f(v_0))$
2. $q(v_2, g(v_2))$
3. $q(f(f(v_4)), v_4)$
4. $\neg q(v_5, v_6) \ \vee \ \neg q(v_6, v_7) \ \vee \ \neg q(v_7, v_5)$

Voici une réfutation de cet ensemble de clauses, où chaque inférence est une application de la règle RES :

$$\begin{array}{c} 3 \qquad 4 \\ \hline \neg(v_4, v_6) \ \vee q(v_6, f(f(v_4)) \qquad 1 \\ \hline \neg q(f(v_4), f(f(v_q) \ \vee \ \neg q(v_4, v_1) \qquad 2 \\ \hline \neg q(f(v_4, f(f(v_4)) \qquad 1 \\ \hline \neg q(f(v_4), v_1) \qquad 2 \\ \hline \emptyset \end{array}$$

Les couples de littéraux "coupés" par les applications de RES, sont, respectivement, en lisant l'arbre du haut vers le bas :

$$q(f(f(v_4)), v_4), \quad \neg q(v_7, v_5)$$
$$\neg q(v_4, v_6), \quad q(v_0, f(v_0))$$
$$\neg q(v_4, v_1), \quad q(v_2, g(v_2))$$
$$\neg q(f(v_4)), f(f(v_4))), \quad q(v_0, f(v_0))$$
$$\neg q(f(v_4), v_1), \quad q(v_2, g(v_2))$$

Voici une autre réfutation de cet ensemble de clauses :

5. $\neg q(v_4,v_6) \vee \neg q(v_6,f(f(v_4)))$	**3-4 RES ; $\{ v_7 \leftarrow f(f(v_4))\ ;\ v_5 \leftarrow v_4 \}$**
6. $\neg q(v_4,v_1) \vee \neg q(f(v_4),f(f(v_4)))$	**1-5 RES ; $\{ v_4 \leftarrow v_0\ ;\ v_6 \leftarrow f(v_0) \}$**
7. $\neg q(f(v_4),f(f(v_4)))$	**2-6 RES ; $\{ v_1 \leftarrow g(v_2)\ ;\ v_2 \leftarrow v_4 \}$**
8. $\neg q(f(v_4),v_1)$	**1-7 RES ; $\{ v_0 \leftarrow f(v_4) \}$**
9. $\oslash$	**2-8 RES ; $\{ v_1 \leftarrow g(v_2)\ ;\ v_2 \leftarrow f(v_4) \}$**

EXERCICE 5

Prouver en utilisant la résolution (réfutationcomplete) que "Tigres mangent les zèbres" à partir des phrases suivantes :

a) les carnivores mangent les animaux.
b) les tigres sont des carnivores.
c) les zèbres sont des animaux.

SOLUTION :

$\forall$ x tigre(x) $\rightarrow$ carnivore(x)
$\forall$ y zebre(y) $\rightarrow$ animal(y)
$\forall$ x $\forall$ y ((carnivore(x) $\wedge$ animal(y)) $\rightarrow$ mange(x,y))
$\forall$ x $\forall$ y ((tigre(x) $\wedge$ zebre(y)) $\rightarrow$ mange(x,y))

Forme Clausale (avec négation de la dernière phrase) :
1. ¬Tigre(x) $^{\vee}$ Carnivore(x)
2. ¬Zebre(y) $^{\vee}$ Animal(y)
3. ¬Carnivore(x1) $^{\vee}$ ¬Animal(y1) $^{\vee}$ mange(x1,y1)
4. Tigre(a)
5. Zebre(b)
6. ¬mange(a,b)

Voici une réfutation de ces clauses :

7. Carnivore(a)	**1-4 RES {x ← a}**
8. Animal(b)	**2-5 RES {y ← b}**
9. ¬Animal(y1) $^{\vee}$ mange(a,y1)	**3-7 RES {x1 ← a}**
10. mange(a,b)	**8-9 RES {y1 ← b}**
11. ⊘	**6-10 RES**

Exercice 6: Considérez les phrases suivantes:

(1) Il y a des patients qui aiment tous les docteurs.
(2) Aucun patient n'aime les charlatans.
(3) Aucun docteur n'est un charlatan.

- Traduisez ces phrases en formules de la logique du premier ordre.
- Démontrez par la méthode des tableaux (réfutation) que la phrase (3) est une conséquence des autres phrases (1) et (2).

Solution:

On choisit les prédicats et constantes suivants pour la représentation:
Prédicats
P(x) x est un patient
C(x) : x est un charlatan
D(x) : x est un docteur
A(x, y) : x aime y

1 $\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow A(x, y)))$
2 $\forall x(C(x) \rightarrow \neg\exists y(P(y) \wedge A(y, x)))$
3 $\forall x(D(x) \rightarrow \neg C(x)))$

Sous forme clausale avec la négation de 3):

1- P(a)
2- ¬D(y) $^{\vee}$ A(a, y)
3- ¬C(x) $^{\vee}$ ¬P(y) $^{\vee}$ ¬A(y, x)
4- D(b)
5- C(b)

Résolution

6- A(a, b) : 2) et 4) { y ← b }
7- ¬P(y) $^{\vee}$ ¬A(y, b) : 3) et 5) { x ← b }
8- ¬A(a, b) : 1) et 7) { y ← a }

9- $\oslash$: 6) et 8)

EXERCICE 7

Dans cet exercice, on s'intéresse à ces interprétations correspondant à des graphes orientés non vides (i.e. ayant au moins un sommet), où chaque sommet peut avoir ou pas une (ou plusieurs)
parmi trois propriétés P 1 , P 2 , P 3 . On utilise les symboles de prédicat suivants :

* arc, binaire. arc(x, y) va être lu comme : un arc va du sommet x au sommet y.
* p 1 , unaire. p1(x) va être lu comme : le sommet x a la propriété P1 .
* p 2 , unaire. p2(x) va être lu comme : le sommet x a la propriété P2.
* p 3 , unaire. p3 (x) va être lu comme : le sommet x a la propriété P3.

1. Formaliser par une formule F1 du calcul des prédicats l'énoncé : **Tout sommet ayant la propriété P1 a aussi la propriété P2** .

$\forall x(p_1(x) \to p_2(x))$

2. Formaliser par une formule F2 du calcul des prédicats l'énoncé : **Il n'existe pas de sommet ayant la propriété P1 mais n'ayant pas la propriété P3 .**

$\forall w(p_1(w) \to \ p_3(w))$

3. Formaliser par une formule F3 du calcul des prédicats l'énoncé : **Si un sommet n'est pas le point d'arrivée d'aucun arc, alors ce sommet a forcement la propriété P3**

$\forall z(\neg\exists v\ arc(v,z) \to p_3(z)).$

4. Formaliser par une formule F4 du calcul des prédicats l'énoncé:
Si s et s0 sont des sommets quelconques tels que il existe un arc de s à s0 , alors : si s a la propriété P2 alors s0 a la propriété P3 , et si s0 a la propriété P1 alors s a la propriété P2 .

$\forall x\forall y(arc(x,y) \to ((p_2(x) \to p_3(y)) \ \wedge (p_1(y) \to p_2(x))))$

5. Utiliser le système de résolution pour montrer que F2 est une conséquence logique de {F1 , F3, F4 }.

- Clause pour F_1 : $\neg p_1(x) \vee p_2(x)$.
- Clause pour F_3 : $arc(a,z) \vee p_3(z)$ où a est une constante de Skolem.
- Clauses pour F_4 : $\neg arc(x,y) \vee (\neg p_2(x) \vee p_3(y)$ et $\neg arc(x,y) \vee \neg p_1(y) \vee p_2(x)$
- Clauses pour $\neg F2$: $p_1(w)$ et $\neg p_3(w)$

Voici une réfutation de l'ensemble de clauses issu de:

$\{F_1, F_3, F_4, \neg F_2\}$

1 $p_1(w)$

2 $\neg p_1(x) \vee p_2(x)$

3 $p_2(w)$ (par RES appliquée à 1 et 2)

4 $\neg arc(x, y) \vee \neg p_2(x) \vee p_3(y)$

5 $\neg arc(x, y) \vee p_3(y)$ (par RES appliquée à 3 et 4)

6 $arc(a, z) \vee p_3(z)$

7 $p_3(z) \vee p_3(z)$ (par RES appliquée à 4 et 5)

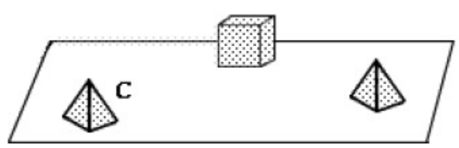
8 $p_3(z)$ (par FACT appliquée à 7)

9 $\neg p_3(w)$

10 $\emptyset$ (par RES appliquée à 8 et 9)

Exercice 8 :

La résolution en logique des prédicats :
Le “monde de Tarski” est un logiciel qui permet de tester la validité d’une information par rapport à une configuration choisie dans l’univers des blocs.
Dans l’exemple ci-dessous,
- deux prédicats à un argument servent à identifier le type d’objet :
Cube(x) si x est un cube, **Pyramide(y)** si y est une pyramide
- une relation binaire **“Gauchede”** permet de décrire la position relative d’un objet par rapport à un autre (on se limitera à une seule direction)



Des formules de la logique des prédicats permettent d’exprimer certaines propriétés de la configuration. Par exemple :
- Pyramide(C)
- $\forall$t [Cube(t) $\rightarrow$ Gauchede(C, t)]
- $\exists$y $\exists$z [Cube(y) $^\wedge$ Pyramide(z) $^\wedge$ Gauchede(y, z)]
- $\forall$u $\forall$v $\forall$w [(Gauchede(u, v) $^\wedge$ Gauchede(v,w)) $\rightarrow$ Gauchede(u,w)]
On se propose de <u>déduire qu’il existe une pyramide à droite de C</u>, c’est-à-dire l’énoncé :
E : $\exists$x [Pyramide(x) $^\wedge$ Gauchede(C, x)]

a) Préparer les formes clausales et mettre en place la méthode de réfutation (on notera A le cube et B la pyramide du modèle ci-dessus).
b) Appliquer la règle de résolution avec unification pour démontrer que l’énoncé **E** peut se déduire des informations données.

(on se limitera à utiliser les seules résolutions qui permettent d'aboutir le plus vite à la contradiction).

Sol.

- **¬cube(t) ˅ gauchede(C,t)**
- **cube(A) ˄ pyramide(B) ˄ gauchede(A,B)**
- **¬gauchede(u, v) ˅ ¬gauchede(v,w)) ˅ gauchede(u,w)**
- **pyramide(B) ˄ pauchede(C,B)**

1. ¬cube(t) ˅ gauchede(C,t)
2. cube(A)
3. pyramide(B)
4. gauchede(A,B)
5. ¬gauchede(u, v) ˅ ¬gauchede(v,w) ˅ gauchede(u,w)

6. ¬pyramide(x) ˅ ¬gauchede(C,x)

resol.

7. gauchede(C,A)	**(1 et 2 : A/t)**
8. ¬gauchede(C,B)	**(3 et 6 : B/x)**
9. ¬gauchede(A,w) ˅ gauchede(C,w)	**(5 et 7 : A/v et C/u)**
10. ¬gauchede(A,B)	**(8 et 9 : B/w)**
11. VIDE	**(4 et 10)**