

# Propositionnel – Exercices

**Exercice 1 : soit la table de vérité suivante :**

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

- 1- Compléter la table
- 2- Quelles sont les formules valides, inconsistantes et consistantes ?
- 3- Donner les formules équivalentes

## Exercice 2

- (1) Personne n'a ri, ou même souri.  
poser  $p$  : « quelqu'un a ri » ;  $q$  : « quelqu'un a souri »
- (2) Georges ne viendra que si Albert et Lucienne ne viennent pas.  
poser  $p$  : « Georges vient » ;  $q$  : « Albert vient » ;  $r$  : « Lucienne vient »
- (3) Continue comme ça, et tu vas t'en prendre une.  
poser  $p$  : « tu continues comme ça » ;  $q$  : « tu t'en prends une »

## Exercice 3 : Exemple de système formel

Soit le système « peu »

alphabet = l'ensemble des trois symboles "p", "e", et "u"

p.f.e (procédure de formation d'expression). = concaténation

axiome =  $upueuu$

règles :

**R1** : si une expression de la forme  $AeB$  est un théorème (où "A" désigne n'importe quelle suite de "u", de "p", et de "e", et B de même), alors l'expression  $uAeBu$  est aussi un théorème

**R2** : si une expression de la forme  $AeB$  est un théorème, alors l'expression  $AueuB$  est aussi un théorème

Questions

- Q1 =  $uupuueuuuu$  est-il un théorème?
- Q2 =  $upuueuuuu$  ?
- Q3 =  $upupueuuu$  ?

## Exercice 4

On suppose que l'on a les règles et faits suivants:

- Si Anass rate son tournoi alors Anass sera déprimé.
  - S'il fait beau alors Anass ira à la piscine.
  - Si Anass ne va pas à la piscine il sera déprimé.
  - A la piscine, Anass ne s'entraîne pas.
  - Anass ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.
- Modéliser l'énoncé à l'aide de formules de la logique propositionnelle.
  - Prouver que Anass sera déprimé à l'aide de la résolution.

## SOLUTIONS

**Exercice 1 : soit la table de vérité suivante :**

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

- 4- Compléter la table
- 5- Quelles sont les formules valides, inconsistantes et consistantes ?
- 6- Donner les formules équivalentes

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

2- Dernière valide, pas d'inconsistante, toutes consistante

3-  $p \rightarrow q$ ,  $\neg p \vee q$ ,  $\neg(p \wedge \neg q)$

### Exercice 2

- (4) Personne n'a ri, ou même souri.  
poser p : « quelqu'un a ri » ; q : « quelqu'un a souri »  
 $\neg(p \vee q)$  ou  $(\neg p \wedge \neg q)$
- (5) Georges ne viendra que si Albert et Lucienne ne viennent pas.  
poser p : « Georges vient » ; q : « Albert vient » ; r : « Lucienne vient »  
 $(p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$
- (6) Continue comme ça, et tu vas t'en prendre une.  
poser p : « tu continues comme ça » ; q : « tu t'en prends une »  
 $(p \rightarrow q)$

### Exercice 3 : Exemple de système formel

Système « peu »

alphabet = l'ensemble des trois symboles "p", "e", et "u"

p.f.e (procédure de formation d'expression). = concaténation

axiome = upueuu

règles :

R1 : si une expression de la forme  $AeB$  est un théorème (où "A" désigne n'importe quelle suite de "u", de "p", et de "e", et B de même), alors l'expression  $uAeBu$  est aussi un théorème

R2 : si une expression de la forme  $AeB$  est un théorème, alors l'expression  $AueuB$  est aussi un théorème

Questions

Q1 = upuueuuuuu est-il un théorème?

Q2 = upuueuuuu ?

Q3 = upupueuuu ?

Q1, Oui Preuve : l'arbre

Q2, non : il y a un nombre impair de "u", ce qui n'est pas possible

Q3, non : il y a deux "p"

Ce système est semi-décidable car on possède une procédure infallible pour décider Théorème mais pas non-Théorème.

#### Exercice 4

On suppose que l'on a les règles et faits suivants:

- Si Anass rate son tournoi alors Anass sera déprimé.
  - S'il fait beau alors Anass ira à la piscine.
  - Si Anass ne va pas à la piscine il sera déprimé.
  - A la piscine, Anass ne s'entraîne pas.
  - Pierre ratera son tournoi s'il ne s'entraîne pas.
- Modéliser l'énoncé à l'aide de formules de la logique propositionnelle.
  - Prouver que Anass sera déprimé à l'aide de la résolution.

1. (a)  $R \Rightarrow D$

(b)  $B \Rightarrow P$

(c)  $\neg P \Rightarrow D$

(d)  $P \Rightarrow \neg E$

(e)  $\neg E \Rightarrow R$

2. (a) Montrons que  $R \Rightarrow D, B \Rightarrow P, \neg P \Rightarrow D, P \Rightarrow \neg E, \neg E \Rightarrow R \models D$ . Soit  $I$  une interprétation qui satisfait les hypothèses, montrons que  $I$  satisfait  $D$ . Si  $I(P) = 1$  alors  $I(\neg E) = 1$  donc  $I(R) = 1$  donc  $I(D) = 1$ . Sinon  $I(P) = 0$  donc  $I(\neg P) = 1$  donc  $I(D) = 1$ . (b) Posons  $\Gamma = R \Rightarrow D, B \Rightarrow P, \neg P \Rightarrow D, P \Rightarrow \neg E, \neg E \Rightarrow R$ .