Лекция 4

1 Производная по направлениям и градиент

Пусть $f : E \to \mathbb{R}, \quad E \in \mathbb{R}^2, E$ — открытое множество. При изучении дифференцируемости f, мы рассматривали полное приращение функции Δu, а также частные приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_y u$, то есть по направлениям осей O_x и O_y.

Мы пришли таким путём к дифференциалу du и частным производным $\dfrac{\delta u}{\delta x}$ и $\dfrac{\delta u}{\delta y}$.

Попробуем проделать аналогичную операцию с произвольным направлением l. Зададим направление l единичным вектором $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Точки M, расположенные на луче, имеют вид $M = (x_0 + \cos\varphi\Delta r, y_0 + \sin\varphi\Delta r)$.

Составим приращение функции $\Delta_l f$ вдоль направления l.

$$\Delta_l f = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta r\cos\varphi, y_0 + \Delta r\sin\varphi) - f(M_0)$$

Предел отношения $\dfrac{\Delta_l f}{\Delta r}$ при $\Delta r \to 0$ называют производной от f по направлению l и обозначают $\dfrac{\delta u}{\delta l}(M_0)$.

Итак, $\dfrac{\delta f}{\delta l} \quad =:: \quad \lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{\Delta_l f}{\Delta r} \quad = \quad \lim\limits_{\Delta r\to 0}\dfrac{f(x_0 + \Delta r\cos\varphi, y_0 + \Delta r\sin\varphi) - f(x_0, y_0)}{\Delta r} \quad =$
$= \quad [\dfrac{0}{0}, \quad \text{Лопиталь}] \quad = \quad \dfrac{\delta f}{\delta x}\cos\varphi + \dfrac{\delta f}{\delta y}\sin\varphi;$

$$\left.\frac{\delta f}{\delta l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{M_0}\cos\varphi \quad + \quad \left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{M_0}\sin\varphi \qquad\qquad (*)$$

Получим формулу для вычисления производной по направлению.

Вектор $(\dfrac{\delta f}{\delta x}, \dfrac{\delta f}{\delta y})$ называют градиентом функции f и обозначают $gradf$.

Из формулы $(*)$ следует, что

$$\frac{\delta f}{\delta l} = (gradf, \vec{l}) = |gradf|\cos\alpha,$$

где α — угол, который $gradf$ образует с $\vec{l}$.

Из этого равенства следует, что $\dfrac{\delta u}{\delta l}$ принимает наибольшее значение, когда направление l совпадает с направлением градиента, наименьшее, когда указанные направления противоположны и равны нулю в направлении, перпендикулярном $gradf$.

Производная по направлению характеризуют скорость изменения функции в данном направлении.

1.1 Касательная плоскость к поверхности

$f : E \to \mathbf{R}, \ \ E \subset \mathbf{R}^2$
График $\Gamma_f = \{(x, y, z)| \ \ (x, y) \in E, \ \ z = f(x, y)\}$
В большинстве случаев это поверхность в $\mathbf{R}^3$.

Пусть $Z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ — плоскость в $\mathbf{R}^3$. Эту плоскость называют касательной плоскостью к графику Γ_f или к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), если $Z - f(x, y) = o(g)$ при $g \to 0$ $\qquad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$

Для существования касательной плоскости указанного вида в точке (x_0, y_0, z_0) необходимо и достаточно, чтобы f была дифференцируемой в точке (x_0, y_0).

Это следует из того, что

$$Z - z_0 = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) - f(x, y) = \underset{\rho \to 0}{o(\rho)}$$

или

$$f(x, y) - f(x - 0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$$

в котором легко узнать условия дифференцируемости.

Отсюда следует также, что $A = dfrac\delta f \delta x(M_0)$, $B = dfrac\delta f \delta y(M_0)$.

Таким образом, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z = z_0 + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

или

$$z = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

Если касательная плоскость существует, то дифференциал $df(x_0, y_0)$ функции f в точке (x_0, y_0) соответствует приращению $(x - x_0, y - y_0)$ — это приращение аппликаты касательной плоскости.

Если пересечь поверхность $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$, то угловой коэффициент касательной к кривой пересечения есть $\dfrac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0)$