Математический анализ

Конспект по 4-му семестру специальности
«прикладная математика»
(лектор: С. А. Мазаник)

Оглавление

Глава 1

Комплексные числа

1.1 Комплексные числа

Вы с ними уже знакомы с комплексными числами из курса алгебры, и в анализе они нам уже встречались. Обычно комплексные числа вводятся как пара действительных чисел (x, y), если для них определены понятия равенства, сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа $(x_1,\, y_1)$ и $(x_2,\, y_2)$ считаем равными тт. $x_1 = x_2,\, y_1 = y_2$
2. Суммой двух комплексных числео (x_1, y_1) и (x_2, y_2) назовём комплексное число $(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2)$
3. Произведение чисел $(x_1,\, y_1)$ и $(x_2,\, y_2)$ есть число $(x_1x_2 - y_1y_2,\, x_1y_2 + x_2y_1)$

Для обозначения операций над комплексными числами используются те же знаки, что и для действительных чисел.

Множество всех комплексных чисел обозначаем символом $\mathbb{C}$

Комплексное число (0,1) называют **мнимой единицей** и обозначают i, т.е. (0,1)=i.

Комплексное число (1,0) отождествляем действительной единицей (1,0)=1.

Очевидно:

$$(x, 0) = x, \quad (0, y) = iy$$

Вычислим i^2 :

$$i^2 = (0,1)*(0,1) = (-1,0) = -1; \quad \text{т.е. } i^2=-1$$

Любое комплексное число $(x,\, y)$ можно представить в виде

$$(x,\, y) = (x,\, 0)+(0,y) = x + iy$$

Этот вид называют алгебраической формой комплексного числа.

Операции над комплексными числами, записанными в алгебр. форме более наглядны и соответствуют мнимым представлениям об этих операциях над действительными числами.

Например:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Комплексное число принято обозначать одной буквой $z = x + iy$
x - **действительная часть** к.ч. $z = x + iy$
y - **мнимая часть** к.ч. $z = x + iy$

$$x = Re(x + iy) = Re\, z$$

$$y = Im(x + iy) = Im\, z$$

Комплексное число $x - iy$ называется сопряжённым числу $x + iy$ и обозначается $\overline{Z}$

. $$\overline{Z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

Очевидны следующие свойства:

$$\overline{(\overline{z})} = z; \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** к.ч. $z = x + iy$ и обозначает $|z|$

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Свойства:

1) $|z| \geqslant 0, |z| = 0 \iff z = 0$

2) модуль действительного числа совпадает с его абсолютной величиной

3) $|\overline{z}| = |z|$

4) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

5) $z\overline{z} = |z|^2$

Числа 0 и 1 во множестве $\mathbb{C}$ играют ту же роль, что и в $\mathbb{R}$

Разность двух комплексных чисел — вычитание — действие обратное сложению.
Деление — действие обратное умножению. Однако практически оно выполняется умножением числителя и знаменателя на сопряжённое к знаменателю.

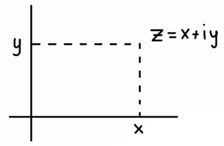
Примеры:

1) $\frac{1}{i} = \frac{1i}{ii} = -i;$

2) $\frac{1+i}{i-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2-(i^2)} = \frac{1+2i-1}{2} = i$

1.1.1 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Если взять прямоугольную декартову систему координат на плоскости, то между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается биекция, если к.ч. $(x, y) = x + iy$ трактовать как точку плоскости с координатами $(x,\ y)$. Обозначать эту точку будем на плоскости Z. Действительные числа представляются точками оси Ox, поэтому и всю ось называют - действительной. Часть мнимую числа изображается точками оси Oy и эту ось называют мнимой осью. Плоскость, на которой отображают комплексные числа, называют комплексной плоскостью.



Комплексные числа z и $-z$ симметричны относительно начала координат. Числа z $\overline{z}$ ассиметричны относительно действительной оси.

Комплексные числа можно трактовать также, как вектор с началом в точке $O(0,0)$ и концом в Z, т.е. радиус вектор точки (x,y). Это точка биекция.

Число $z_1 + z_2$ - вектор равный сумме векторов z_1 и z_2
$z_1 - z_2$ - вектор равный разности

Очевидно, что число $|z_1 - z_2|$ - представляет собой расстояние между точками z_1 и z_2
Отметим, что из геометрической интерпретации к.ч. вытекают неравенства:

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Пример 1 : Множество точек комплексной плоскости удовлетворяющих соотношению $|z - z_0| = R$ есть окружность раудиуса R с центром в точке $|z_0|$. Обозначаем $S(z_0; R)$

Пример 2 : $\{z|z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$ открытый круг радиуса R с центром в точке Z_0: $B(z_0; R)$

Замкнутый круг $\overline{B}(z_0; R) = \{z|z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant R\}$

Кольцо $B(z_0; 2; R) = \{z|z \in \mathbb{C}, 2 < |z - z_0| < R\}$

1.1.2 Тригонометрическая и показательная формы к.ч.

Точки на плоскости можно задать не только через декартовы, но и через полярные координаты z, ϕ, где $z = |z|$ - модуль расстояния от 0 до z, а ϕ - угол между положительным направлением действительной оси и вектором z (3 искомых угла по общему правилу) этот угол называют аргументом комплексного числа z : $(z \neq 0)$ и обозначают $\phi = Arg\, z$.

Для $\quad z = 0 \quad Arg\, z$ не вводится.

Значение аргумента определяется с точностью до целого числа (кратного 2n)

Чтобы устранить эту неоднозначность, условились что:

$$\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 + 2\pi$$

т.е. выбирают аргумент на промежутке длинны 2π. Выбор ϕ_0 - произволен. Чаще всего $-\pi < \phi \leqslant \pi$ либо $0 \leqslant \phi < 2\pi$. Выбранный таким образом аргумент называют **главным значением аргумента** и обозначают его $arg\, z$

Таким образом $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ из связи декартовых и вытекает, что:

$$x = \rho\, cos\varphi, \quad y = \rho\, sin\varphi, \quad \text{поэтому } z = x + iy = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$$

Эта форма к.ч. называется **тригонометрической формой**.

В другом виде

$$z = |z|(cosArg\, z + isinArg\, z)$$

Аргумент $\varphi = Arg\, z$ удовлетворяет соотношению

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

но не все значения φ являются аргументом. А именно:

$$Argz = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, x > 0 \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, x < 0, y \geqslant 0 \\ \text{-}\pi + arctg\frac{y}{x}, x < 0, y < 0 \end{cases} \qquad \text{если } -\pi < \varphi \leqslant \pi$$

На практике эта формула не используется, а $arg\, z$ выбирают с учётом знакопостоянства z на плоскости.

Пример: найти модуль и аргумент числа $z = 1 - i$ и записать число в тригонометрической форме.

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad argz = arctg(-1) = \begin{cases} \frac{-\pi}{4}, & -\pi < \varphi \leqslant \pi \\ \frac{7\pi}{4}, & 0 \leqslant \varphi < 2\pi \end{cases}$

$1 - i = \sqrt{2}(cos(\frac{-\pi}{4}) + isin(\frac{-\pi}{4}))$

Вы уже знакомы с формулами Эйлера

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

Поэтому, очевидно, что к.ч. z может быть представимо в виде (экспотенциальная формула к.ч.)

$$z = \rho\, e^{i\varphi} = |z|e^{iargz} = |z|e^{iArgz}$$

ρ – модуль, φ – аргумент

Отметим: $e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, e^{\frac{-\pi i}{2}} = -i$

$|e^{i\varphi}| = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа очень удобны при умножении и делении:

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1}|z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 e^{i\varphi_1}}{z_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Отсюда вытекают равенства:

$$argz_1 z_2 = argz_1 + argz_2$$

$$arg\frac{z_1}{z_2} = argz_1 - argz_2$$

с точностью до 2π

Формула Муавра

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

или

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi$$

Тригонометрическая и показательная формулы позволяют легко вычислить корни из к.ч.

$z^n = c,\ c \in \mathbb{C},\ c \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

Поставим задачу найти все комплексные корни z этого уравнения.

Пусть $c = z_0 e^{i\varphi_0},\ z = ze^{i\varphi}$
Тогда $z^n = z_0,\ n\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$
Поэтому $z = \sqrt[n]{z_0};\ \varphi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$
Значения k можно брать из всего $\mathbb{Z}$, но всего n различных.
На комплексной плоскости эти значения находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{z_0}$

Пример. $\sqrt[n]{1} = \{1, -1, i, -i\}$

1.1.3 Последовательности комплексных чисел

Рассмотрим последовательность (z_n) к.ч.

Число $c \in \mathbb{C}$ называют **пределом последовательности** (z_n), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon) > 0 \quad \forall n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - c| \leqslant \varepsilon$$

или

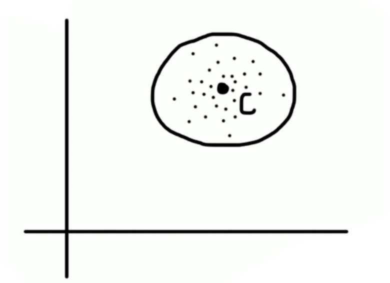
$$\forall V_\varepsilon(c) \quad \exists \nu_\varepsilon > 0 \quad \forall n \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow z_n \in V_\varepsilon(c)$$

или

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - c| = 0 \text{ – действительная последовательность}$$

Обозначения стандартные: $\lim_{n\to\infty} z_n = c, \quad \lim z_n = c, \quad z_n \to c, \quad n \to \infty$

Геометрический смысл

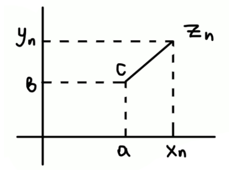


Последовательность имеющую классический предел назовём **сходящейся**

Каждой последовательности к.ч. (z_n) соответствуют две последовательности действительных чисел
(x_n) и (y_n), где $z_n = x_n + iy_n$

Теорема: *Существование предела $lim\, z_n = c$ равносильно существованию двух пределов $limx_n$ и $limy_n$, при этом $lim\, z_n = lim\, x_n + ilim\, y_n$*

♦ Пусть $c = a + ib$
$\Rightarrow \quad lim\, z_n = c$



$|x_n - a| \leqslant |z_n - c| \leqslant \varepsilon$ (катет меньше или равен гипотенузе)
$|y_n - b| \leqslant |z_n - c| \leqslant \varepsilon$

$\Leftarrow \quad |z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| \leqslant 2\varepsilon$
(Сторона треугольника меньши суммы двух других) ■

Из определения предела и доказанной теоремы вытекают общие свойства:

1) Критерий Коши сходимости

2) Принцип выбора

3) Арифметика пределов

4) $limz_n = c \quad \Rightarrow \quad lim|z_n| = |c|$, $(||z_n| - |c|| \leqslant |z_n - c|)$

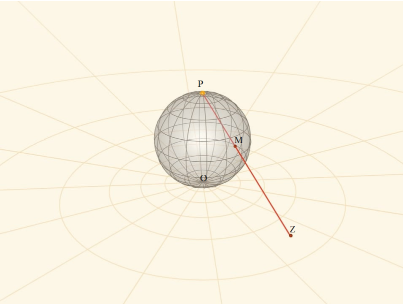
5) $limz_n = z_0,\ lim\varphi_n = \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad limz_n = z_0 e^{i\varphi_0}$

1.1.4 Расширенная комплексная плоскость

Последовательность комплексных чисел называется **сходящейся к бесконечности**, если $limz_n = +\infty$.
Запись: $lim\, z_n = \infty$
Другими словами: $\forall\varepsilon > 0, \exists\nu_\varepsilon, \forall n \geqslant \nu_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |z_n| \geqslant \varepsilon$
Геометрически это означает, что z_n лежит вне круга радиуса ε. Это множество называют **окрестностью бесконечности** и обозначать будем $B(0;\ \varepsilon;\ +\infty)$.
Следовательно, точка $z = \infty$ является пределом последовательности (z_n), если в $\forall$ окрестности точки $z = \infty$ содержатся все члены этой плоскости, за исключением конечного их числа.
Таким образом, символу $z = \infty$ ставится в соответствие символическая бесконечно удалённая точка.

Определение: комплексную плоскость, дополненную бесконечно удалённой точкой называют **расширенной комплексной плоскостью**.

Наглядное представление расширенной комплексной плоскости даёт следующая геометрическая интерпретация:



Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в т. O. Обозначим через P точку сферы, диаметрально противоположную точке O. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы с отрезком, соединяющим Z и P

Ясно, что при этом последовательности Z_n, сходящейся к ∞, соответствует последовательность точек сферы S, сходящаяся к P. Поэтому точке P поставим в соответствие точку $z = \infty$.

Такое соответствие между точками комплексной плоскости и точками сферы S является взаимно однозначными. Оно называется **стереографической проекцией**, а сфера S называется **сферой Римана**.

Комплексные числа (включая $z = \infty$) можно изображать точками сферы Римана. При этом, сходящиеся последовательности к.ч. изображаются на сфере Римана сходящимися последовательностями.

При стереографической проекции окружности переходят в окружности, угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана.

В такой интерпретации $z = \infty$ выступает как обычная точка, однако $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{0}{0}$ не будем рассматривать.

Иногда будем употреблять обозначения:

1. $]-\infty,\ +\infty[$ – действительная ось
2. $]-i\infty,\ +i\infty[$ – мнимая ось
3. $]\alpha - i\infty,\ \alpha + i\infty[$ – $Re\, z = \alpha$
4. $]\beta i - \infty,\ \beta i + \infty[$ – $Im\, z = \infty$

Утверждение. Расширенная комплексная плоскость - есть замкнутое множество (даже больше — компакт).

Прямая в расширенной комплексной плоскости замкнута.

1.2 Комплексные функции действительного аргумента

Пусть $z = \sigma(t)$ определена на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и принимает комплексные значения, т.е $\sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Такую функцию можно представить в виде:

$$\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t) \tag{1.1}$$

где $\xi(t) = \mathrm{Re}\ \sigma(t)$; $\eta(t) = \mathrm{Im}\ \sigma(t)$ — действительные функции.

Многие свойства действительных функций переносятся на комплексно-значные функции:

Предел функции $\sigma(t) = \xi(t)+i\eta(t)$ определяем формулой $\lim\limits_{t\to t_0}\sigma(t) = \lim\limits_{t\to t_0}\xi(t)+i\lim\limits_{t\to t_0}\eta(t)$.

Таким образом предел $\sigma(t)$ существует, если существуют пределы функций $\xi(t), \eta(t)$. Это определение эквивалентно такому утверждению:

$$\lim_{t\to t_0}\sigma(t) = a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ t, 0<|t-t_0|\le\delta_\varepsilon \implies |\sigma(t)-a|\le\varepsilon \tag{1.2}$$

Функцию $\sigma(t)$ назовем **непрерывной в точке (на отрезке)**, если в этой точке (на этом отрезке) непрервыны функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Нетрудно увидеть, что это определенние равносильно следующему утверждению:
$\sigma(t)$ - непрерывна в точке $t_0 \iff \lim\limits_{t\to t_0}\sigma(t) = \sigma(t_0)$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ t, |t-t_0|\le\ \delta_\varepsilon \implies |\sigma(t)-\sigma(t_0)|\le\varepsilon$

Сумма, разность, произведение, частное (со знаменателем, отличным от нуля) непрерывных функций, есть функция непрерывная.

Если $\sigma(t)$ непрерывна на отрезке, то она **ограничена** на этом отрезке, т.е. $\exists$ M такое, что $|\sigma(t)|\le M\ \forall t$

Производная вычисляется по формуле (имеют место основные правила вычисления производных)

$$\sigma'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}{\Delta t} \tag{1.3}$$

Однако не все теоремы действительного анализа переносятся на комплексно-значные функции: например не имеют места т. Ролля и Лагранжа.

Пример. $\sigma(t) = e^{it}$ дифференцируема на $[0, 2\pi]$
$\sigma' = ie^{it}$, но $|\sigma'(t)| = |ie^{it}| = 1$ для $t\in[0,2\pi]$ хотя $\sigma(0) = \sigma(2\pi) = 1$

Определение интеграла: $\int\limits_\alpha^\beta \sigma(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta \xi(t)dt + i\int\limits_\alpha^\beta \eta(t)dt$
Это определение экивалентно определению с помощью интегральных сумм.

Имеют место обычные формулы:

1. $\int\limits_\alpha^\beta (a_1\sigma_1(t)+a_2\sigma_2(t))dt = a_1\int\limits_\alpha^\beta \sigma_1(t)dt\ +\ a_2\int\limits_\alpha^\beta \sigma_2(t)dt$

2. $\int\limits_\alpha^\beta \sigma(t)dt = -\int\limits_\beta^\alpha \sigma(t)dt$

3. Аддитивность: $\int\limits_\alpha^\gamma \sigma(t)dt + \int\limits_\gamma^\beta \sigma(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta \sigma(t)dt$

4. Формула Ньютона-Лейбница

5. $|\int\limits_\alpha^\beta \sigma(t)dt| \le \int\limits_\alpha^\beta |\sigma(t)|dt$

Но не верна теорема о среднем.
На комплексно-значную функцию можно смотреть как на вектор-функцию.

1.3 Кривые в $\mathbb{C}$

На кривую l в комплексной плоскости можно смотреть как на кривую в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\sigma : |\alpha, \beta| \to \mathbb{R}^2$, представление кривой l.

Тогда $\vec{\eta} = \sigma(t), t \in |\alpha, \beta|$ - её векторно -приближенное уравнение, которое можно записать так:

$$\begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \end{cases} \quad t \in |\alpha, \beta|, \text{где } \xi(t) \text{ и } \eta(t) \text{ - координатные функции } \sigma$$

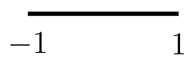
Но мы знаем, что между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости устанавливаются взаимно-однозначное соответствие $z = x + iy$.
Поэтому $z = x(t) + iy(t) = \xi(t) + i\eta(t) =:: \sigma(t), t \in [\alpha, \beta], \sigma$ - комплексно-значная функция.

Уравнение $z = \sigma(t), t \in |\alpha, \beta|$ называют **параметрическим уравнением кривой** l **на комплексной плоскости**.
Незамкнутую кривую l всегда будем считать ориентированной в направлении возрастания параметра t, и это направление будем называть **положительным**, а противоположное ему **отрицательным**.
$\sigma(\alpha)$ - начало кривой, $\sigma(\beta)$ - конец кривой.

Пример:

1. $z = \cos t, \pi < t \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 0 \end{cases}$$



2. $z = e^{it}, 0 \leq t < 2\pi$ - окружность, $|z| = 1$ ориентированная так, что направление движения против часовой стрелки.

3. $z = z_0 + e^{it}, 0 \leq t < 2\pi, |z - z_0| = 1$

4. $z = z_0 + Re^{it}, 0 \leq t < 2\pi, |z - z_0 = R|$

Для кривой в $\mathbb{C}$ сохраняются все определения для плоских кривых.
Например, **кривая простая**, если она не имеет самопересечений, т.е $t_1 \neq t_2 \implies \sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$. Если начало и конец совпадают, то это не самопересечение.

Спрямляемая кривая - имеющая длину $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2} dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\sigma'(t)| dt$

Гладкая кривая
$\sigma(t)$ – непрерывно-дифференцируема и σ'(t) $\neq 0$, t $\in |\alpha, \beta|$, $\sigma'(t)$ – вектор касательной.

1.4 Области в $\mathbb{C}$

Все определния сохраняются как и в $\mathbb{R}^2$.

Область — открытое связное множество.

Компакт — замкнутое ограниченное множество.

Дальше рассматриваем область, границы которой состоят из конечного числа кусочно-гладких кривых и изолированных точек.
Ориентация границы ∂D области D считаем **положительной**, если при движении по границе ∂D область останется слева.

Примеры:

1. $B(z_0, 0, R)$ - круг с выколотой точкой, проколотая окрестность точки z_0, центрированная окрестность $0 < |z - z_0| < R$
2. круг с разрезом
3. кольцо $B(z_0; r; R)$
4. Расширенная комплексная плоскость — односвязна
5. Расширенная комплексная плоскость с выброшенной точкой — односвязна

1.5 Функции комплексного переменного

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ (множество комплексных элементов), и каждому $z \in D$ поставленно в соответствие одно или несколько комплексных чисел w. Тогда говорят, что на D задана функция.

$f : D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{C}$ или $f : z \mapsto w, w = f(z),\ x + iy \longmapsto u + iv$

Комплексному числу ставится в соответствие комплексное число.
$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = Re\, w(z), v(x, y) = Im\, w(z)$ — действительные функции.

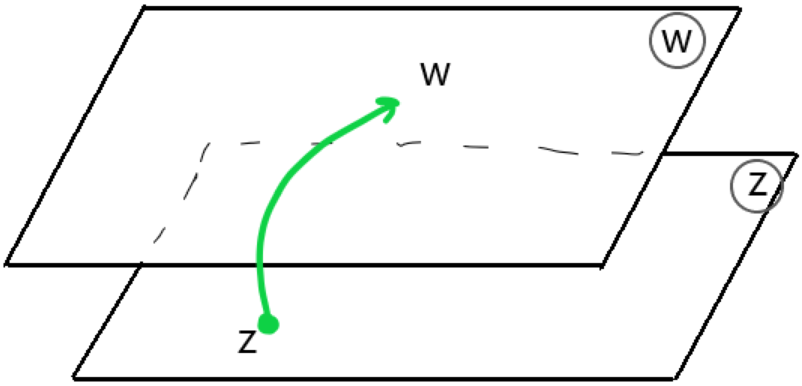
Таким образом комплексную функцию можно рассматривать как пару действительных функций действительных аргументов x, y.

Многие свойства ФКП можно получить исходя из такой связи.
Если каждому z отвечает одно значение w, то функцию $w = f(z)$ называют **однозначной**.
Если же некоторым z соответствует более одного w, то f называют **многозначной**.

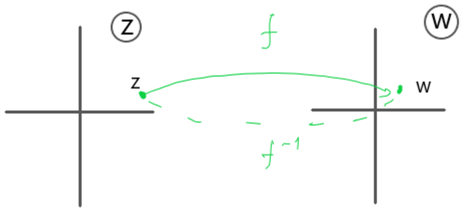
Если $f : D \to G$, то можно поставить вопрос об обратной функции $f^{-1} : G \to D$, $z = f^{-1}(w)$.

Если обратная функция неоднозначна, то функцию f называют **неоднолистной**. Если f^{-1} — однозначна, то f — **однолистна.**
Другими словами, f — **однолистна** на множестве D, если $\forall z_1, z_2 \in D$ равенство $f(z_1) = f(z_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $z_1 = z_2$.

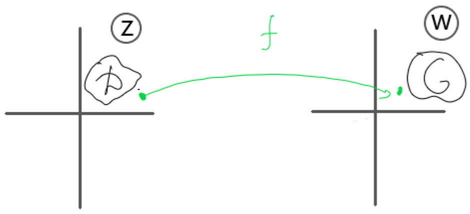
Геометрически будем интерпретировать следующим образом: график функции комплексного переменного изобразился бы некоторой поверхностью в трёхмерном пространтве x, y, u, v. Однако неявно это трудно представить, поэтому обычно поступают так: интерпретируют геометрически f как отображение множеств на разных плоскостях. Так хорошо, но трудно рисовать и плохо видно.



поэтому будем рисовать иначе

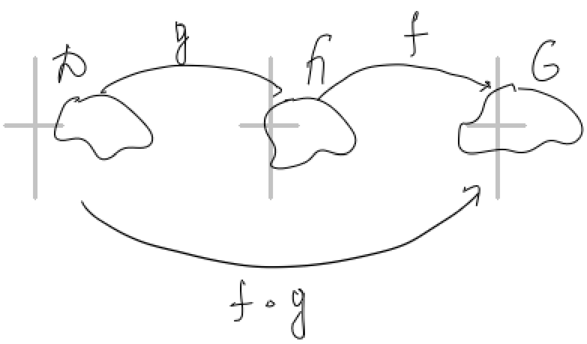


Иногда плоскости z и w совмещают (как полярные и декартовы координаты).



$w = f(z)$, то w называют **образом точки** z **при отображении** f, а z **прообразом**. Аналогично G — **образ**, D — **прообраз**.

Композиция: $f \circ g$:



Примеры:

$w = arg\ z$ - однозначная, обратная неоднозначная.

$w = Arg\ z$ - неоднозначна, неоднолистна.

$w = z^2$ - однозначна, неоднолистна.

$w = \sqrt{z}$ - неоднозначна.

$w = \bar{z}$ - однозначна, однолистна.

1.6 Предел функции комплексной переменной

Пусть точка z_0 является предельной точкой множества D. Число A называется **пределом** функции f при $z \to z_0$, если:

$$\forall\ V(A)\ \exists\ \dot{U}(z_0) \qquad f(\dot{U}(z_0)) \subset V(A) \tag{1.4}$$

Другими словами:A — предел f, если

$$\forall\ \varepsilon\ > 0\ \exists\ \ \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall z \in B(z_0, 0, \delta_\varepsilon) \cap D \implies f(z) \in B(A; \varepsilon) \tag{1.5}$$

или

$$A = \lim_{z \to z_0} f(z), \text{если}\ \forall\ \varepsilon\ > 0\ \exists\ \ \delta_\varepsilon > 0\ \ \forall\ z \in D,\ \ 0\ < |z - z_0| \leq\ \delta_\varepsilon \implies |f(z) - A| \leq \varepsilon \tag{1.6}$$

или

$$A = \lim_{z \to z_0} f(z), \text{если} \lim_{z \to z_0} |f(z) - A| = 0$$

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \exists\ \text{два предела} \lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} u(x, y) \lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} v(x, y)$$

$$\text{причём} \lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) + i \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) \tag{1.7}$$

Имеет место **критерий Гейне**:
Для того чтобы $f(z) \to A$ при $z \to z_0 \iff \forall (z_n), z_n \in D,\ z_n \neq z_0, z_n \to z_0 \implies f(z_n) \to A$, при $n \to \infty$.

Из изложенных фактов вытекает, что на предел ФКП можно перенести простейшие предложения, относящиеся к пределам функций двух действительных переменных (суммы, произведения, частного и т.д.).
В теории ФКП используют символы Ландау (o, O) которые имеют тот же смысл, что и в действительном анализе.

1.7 Непрерывность функций коплексной переменной

Пусть $z_0 \in D$ и $f : D \to \mathbb{C}$
f называют **непрерывной** в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Исходя из определения предела и непрерывности, заключаем, что можно привести множество равносильных формулировок:

1. f непрерывна в точке z_0, если
   $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall z, \quad |z - z_0| \leq \delta(\varepsilon) \implies |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$
   Непрерывность f в точке z_0 равносильна непрерывности $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0)
   Это позволяет перенести на ФКП многие свойства Ф2П. Например аримфметики непрерывных функций.
   Функцию f назовем **непрерывной** на множестве D, если она непрерывная в каждой точке этого множества.
   Аналогично, как и в действительном анализе вводятся понятия о **равномерной непрерывности**.

Примеры:

1. z, Rez, Imz, $\bar{z}$, |z| - непрерывны на $\mathbb{C}$.

2. P(z) непрерывна на $\mathbb{C}$.

3. $\frac{P(z)}{Q(z)}$ - непрерывны там, где заданы и $Q(z) \neq 0$.

Отметим также и **свойства**:

1. $f \in C(D)$ и f - биекция D на G, то D - область $\implies$ G - область и $f^{-1} \in C(G)$

2. Если $f \in C(\bar{D}), \bar{D}$ - ограничена в D, т.е $\exists M > 0$, что $|f(z)| \leq M \ \forall z \in D$, причём $|f(z)|$ достигнет в $\bar{D}$ своих наибольшего и наименьшего значений(следствие т.Вейерштрасса для Ф2П и $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$). Имеет место аналог т. Кантора.

Аналогично определяется непрерывность f в бесконечно удалённой точке $z_0 = \infty$: f – непрерывна в $z_0 = \infty$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(\infty)$

1.8 Элементарные функции комплексного переменного

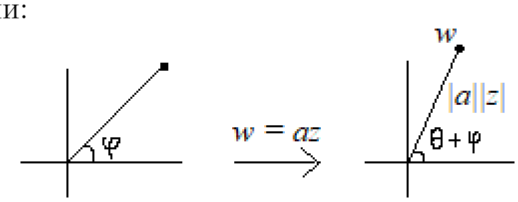
1.8.1 Линейная функция

$w = f(z) = az$, a $\in \mathbb{C}$ — непрерывна на $\mathbb{C}$.

Если $a \neq 0$, то она биективна и для нее существует обратная функция $z = \frac{1}{a}w$ и имеет обозначение $w = f^{-1}(z) = \frac{1}{a}z$ - тоже линейная. Поскольку обратная однозначная, то исходная однолистна.

$w = f(z) = az = |a|\,|z|\,e^{i(\theta+\varphi)}$, где $a = |a|\,e^{i\theta}, z = |z|\,e^{i\varphi} \Rightarrow |w| = |a|\,|z|$
$arg\, w = arg\, a + arg\, z$

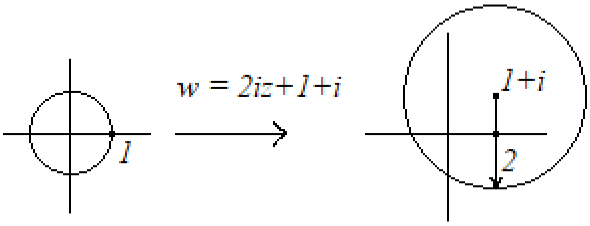
Из этих двух соотношений следует способ построения образа при линейном отображении:



Таким образом функция $w = f(z) = az$ осуществляет растяжение в $|a|$ раз и поворот на угол $\theta = argz$.

Функцию $w = az + b$ тоже называют линейной функцией. Образ, получившийся при отображении $w = az$ ещё отличается на вектор b.

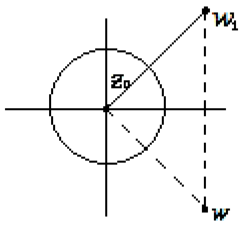
Пример. Найти образ $|z| < 1$ при отображении $w = 2iz + 1 + i$



1.8.2 Степенная функция

1) $w = f(z) = \frac{1}{z}$

Непрерывная для $z \neq 0$, биективная, обратимая.
$f^{-1} = \frac{1}{z},\ w = \rho e^{i\theta},\ z = re^{i\varphi}$
Тогда $\rho\, e^{i\theta} = \frac{1}{r\, e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{r},\ \theta = -\varphi$. То есть, $|w| = \frac{1}{|z|},\ arg\, w = -arg\, z$.
Геометрическая картинка:



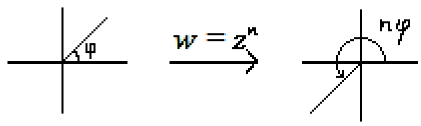
Точки внутри круга отображются в точки вне круга и наоборот (инверсия относительно единичной окружности, затем зеркальное отображение относительно действительной оси). Внутренность круга отображается во внешность и наоборот. Лучи в лучи. Окружности в окружности.

2) $w = z^n, n \in \mathbb{N}$

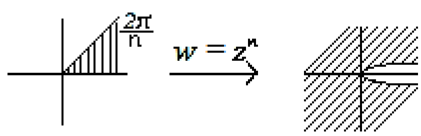
Функция непрерывная. Определена в $\mathbb{C}$. Однозначна, но не однолистна.
$z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\theta}$
$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi} \Rightarrow \rho = r^n$, т.е. $|w| = |z|^n$, $arg\, w = n\, arg\, z$ (с точностью до $2k\pi$).

Функция необратима на всей плоскости, т. $z, z = \sqrt[n]{w}$, и для каждого w получаем n значений z, т.е. функция $w = z^n$ не инъективна или, по-другому, неоднолистная во всей плоскости.

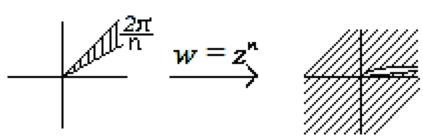
Найдем множество однолистности



То есть луч поворачивается на угол $n\varphi$. Сектор разворота $\frac{2\pi}{n}$ и нулём в центре переходит в плоскость с разрезом.



Каждый из секторов разворота $\frac{2\pi}{n}$ отображается на всю плоскость.



3) $w = \sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}$

Это функция обратная степенной. Приходится выбирать ветки. Это делается исходя из формулы:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ и достигается выбором k.

Т.е. функция $w = \sqrt[n]{z}$ многозначна, но можно выбрать k однозначных ветвей. Действие обратное степенной.

1.8.3 Экспонента

$$w = e^z$$

Может быть определена формулой

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$
$$\text{Re } e^z = e^x \cos y$$
$$\text{Im } z = e^x \sin y$$

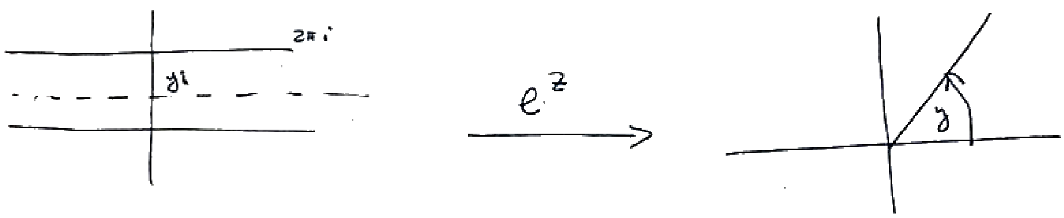
Отсюда вытекают следующие свойства:

1. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $e^{z+2k\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

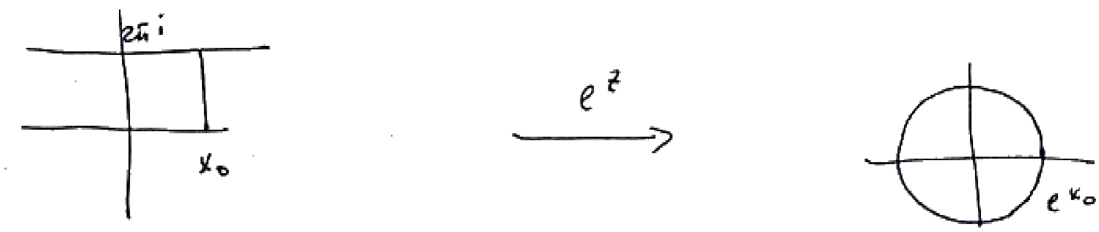
   т.е. функция e^z — периодическая с периодом $2k\pi i$

   Поэтому функция e^z неоднолистна (хотя и однозначна). В точках $z{+}2k\pi i$ она принимает одинаковые значения.
3. e^z непрерывна во всей комплексной плоскости.
4. $|e^z| = e^x, \quad Arg e^z = y{+}2k\pi$

Из этих соотношений вытекает геометрический характер отображения:

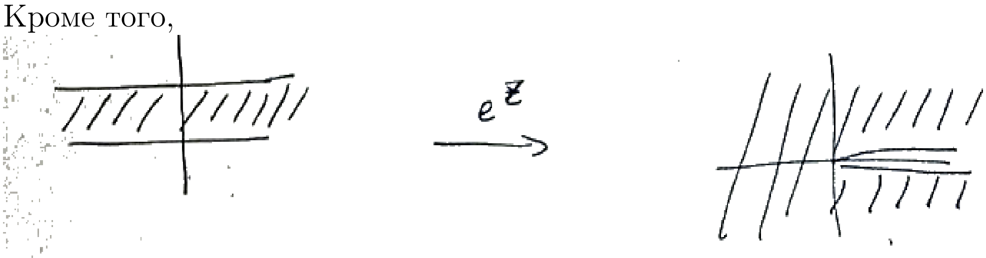


$-\infty < x < +\infty \quad \Rightarrow \quad 0 < e^x < +\infty, \qquad\qquad |w| \in \,]0, +\infty[, \quad \arg e^z = y$



$z = x_0 + iy, \quad 0 < y < 2\pi, \qquad\qquad |w| = e^{x_0}, \quad 0 < \arg w < 2\pi$

Кроме того,



1.8.4 Логарифм

$$w = Ln\, z$$

Это функция, обратная экспоненте.

$w = e^z \quad \Rightarrow \quad z = Ln\, w, \quad w = Ln\, z$

$w = u + iv, \quad z = \rho e^{i\phi}$

$z = e^w \quad \Rightarrow \quad \rho\, e^{i\phi} = e^{u+iv} = e^u e^{iv} \quad \Rightarrow \quad \rho\, e^u,\ \phi = v \pm 2k\pi$

Или в других обозначениях: $u = ln|z|, \qquad v = arg\, z + 2k\pi$

Итак,

$$Ln\, z = ln|z| + iarg\, z + 2k\pi i$$

Функция многозначна. Выбор ветвей определяется выбором k. Однозначную функцию при $k = 0$ называют **главным значением** логарифма и обозначают lnz.

Таким образом

$ln\, z = ln|z| + iarg\, z$

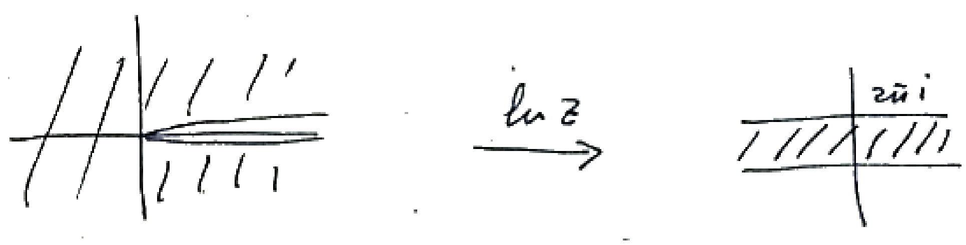
$Ln\, z = ln\, z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

Пример

$ln\, 1 = 0; \quad ln\, i = \frac{\pi}{2} i$

$Ln\, 1 = 2k\pi i, \quad Ln\, i = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$

С геометрической точки зрения действие обратно экспоненте



и т.д.

1.9 Тригонометрические и гиперболические функции. Свойства и конформные отображения.

1.9.1 Тригонометрические функции.

Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$ определяются следующими формулами:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Основные свойства $\sin z$, $\cos z$:

1. $\sin z$ и $\cos z$ непрерывны на $\mathbb{C}$.

2. $\sin z$ и $\cos z$ принимают все комплексные значения, то есть уравнения $\sin z = a$ и $\cos z = a$ имеют решения $\forall a \in \mathbb{C}$.

   В частности, отсюда следует, что $\sin z$ и $\cos z$ неограничены в $\mathbb{C}$.

3. Все формулы элементарной тригонометрии, справедливые для действительного аргумента, имеют место и для комплексных значений. В частности, функции $\sin z$ и $\cos z$ периодичны с периодом $2\pi i$.

   $$\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

4. $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$

   $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

5. Связь тригометрических и гиперболических функций

   $\sin z = -i \operatorname{sh} iz \quad \cos z = \operatorname{ch} iz$

   $\sin iz = i \operatorname{sh} z \quad \cos iz = \operatorname{ch} z$

6. $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

1.9.2 Гиперболические функции.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} h$ определяются следующими формулами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

Для них справедливы те же формулы, что и для действительного аргумента. В частности,

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

.

1.10 Обратные тригонометрические и гиперболические функции. Выражение их через логарифм.

Определяются, как функции обратные к соответствующим тригонометрическим функциям. Рассмотрим, например, $w = \operatorname{Arcsin} z$

Для этого рассмотрим функцию $w = \sin z$

$$w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad e^{iz} = \tau$$
$$2iw = \tau - \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau^2 - 2iw\tau - 1 = 0$$
$$\tau^2 - 2iw\tau + (iw)^2 + w^2 - 1 = 0$$
$$(\tau - iw)^2 = 1 - w^2$$
$$\tau - iw = \sqrt{1 - w^2}$$
$$\tau = iw + \sqrt{1 - w^2} \Rightarrow e^{iz} = iw + \sqrt{1 - w^2} \Rightarrow$$
$$z = -i \operatorname{Ln}\left(iw + \sqrt{1 - w^2}\right)$$

Переобозначив, получим:

$$\boxed{\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)}$$

Аналогично:

$$\boxed{\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)}$$

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad e^{iz} = \tau$$
$$2w = \tau - \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau^2 - 2w\tau + 1 = 0$$
$$(\tau - w)^2 = (w^2 - 1) \Rightarrow$$
$$e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1} \Rightarrow$$
$$z = -i \operatorname{Ln}\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)}$$

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{(e^{iz} + e^{-iz})i}, \quad e^{iz} = \tau$$
$$iw = \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1} \Rightarrow \tau^2 - 1 = iw\tau^2 + iw \Rightarrow$$
$$(1 - iw)\tau^2 - iw - 1 = 0 \Rightarrow \tau^2 = \frac{1 + iw}{1 - iw}$$
$$e^{2iz} = \frac{1 + iw}{1 - iw} \Rightarrow z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + iw}{1 - iw}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{Arcctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left(\frac{iz+1}{iz-1} \right)}$$

$$w = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}, \quad e^{2iz} = \tau$$
$$-iw = \frac{\tau+1}{\tau-1} \Rightarrow \tau(1+iw) = iw - 1$$
$$e^{2iz} = \frac{iw-1}{iw+1} \Rightarrow z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left(\frac{iw-1}{iw+1} \right)$$

Точно так же обратные гиперболические:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2+1} \right)$$
$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2-1} \right)$$
$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$
$$\operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)$$

Все вышеупомянутые функции являются многозначными, поэтому можно рассматривать главные ветви этих функций, которые получаются выбором главных ветвей функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt{z}$.

1.11 Дифференцируемость ФКП

Понятие дифференцируемости функции комплексного переменного вводится аналогично понятию дифференцируемости действительной функции.

Пусть функция f определена, однозначна и конечна в окрестности $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Функцию f называют **дифференцируемой в точке** z_0, если существует такое C $\in \mathbb{C}$, что:

$$\forall \Delta z, z_0 + \Delta z \in U(z_0) \Rightarrow f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + C\Delta z + \alpha(\Delta z)|\Delta z|.$$

где C - комплексное число, $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0, \alpha(0) = 0$.
Число C называют **производной функции** f в точке z_0.
Производную функции обозначают любым из следующих способов:

$$f'(z_0), \ \frac{df(z_0)}{dz}, \ \left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$$

Выражение CΔz называют **дифференциалом** $df(z_0)$ функции f в точке z_0.
Из определения дифференциала следует, что дифференциал независимой переменной z совпадает с приращением этой переменной. Поэтому $dz = \Delta z$ для независимой переменной z, и дифференциал функции f в точке z_0 равен $f'(z_0)dz$, таким образом:

$$df = f'(z_0)\,dz$$

Из определения производной следует, что производную функции в точке можно вычислить как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{C\Delta z+\alpha(\Delta z)|\Delta z|}{\Delta z} = C = f'(z_0)$$

Верно и обратное утверждение:

Теорема. *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = C.$$

то функция f дифференцируема в точке z_0 и её производная $f'(z_0) = C$.

♦ Из существования предела следует, что

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = C + \alpha_1(\Delta z)$$

где $\alpha_1(\Delta z) \to_{\Delta z\to 0} 0$, откуда

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = C\Delta z + \alpha_1(\Delta z)\Delta z$$

Полагая

$$\alpha(\Delta z) = \begin{cases} \frac{\alpha_1(\Delta z)\Delta z}{|\Delta z|}, \text{ при } \Delta z \neq 0, \\ 0, \text{ при } \Delta z = 0. \end{cases}$$

Получаем

$$f(z_0+\Delta z) = f(z_0) + C\Delta z + \alpha(\Delta z)|\Delta z|$$

где $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$, $\alpha(0) = 0$. Полученное равенство, в силу определения,

и означает дифференцируемость функции f в точке z_0. ■

Таким образом, дифференцируемость функции f в точке z_0 равносильна существованию конечного предела отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Из определения дифференцируемоти вытекает, что функция, дифференцируемая в точке, является непрерывной в этой точке.

На ФКП распространяются все правила дифференциирования функций действительного аргумента. Имеют место следующие утверждения:

Теорема. *Если функции f и g - дифференциируемы в точке z_0, то дифференциируемыми в этой точке так же являются:*

1) линейная комбинация функций f и g с любыми комплексными коэффицентами a и b, при этом:

$$(af(z)+bg(z))'|_{z=z_0} = af'(z_0)+bg'(z_0);$$

2) произведение $f(z)g(z)$ функций f и g, при этом:

$$(f(z)g(z))'|_{z=z_0} = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0);$$

3) частное $f(z)/g(z)$ функций f и g со знаменателем отличным от нуля, при этом:

$$(\frac{f(z)}{g(z)})'\Big|_{z=z_0} = \tfrac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)};$$

1.12 Условия Коши-Римана

Непрерывность функции f равносильна непрерывности её действительной и мнимой частей. Но для дифференциируемости функции f не достаточно диффференциируемости ей действительной и мнимой частей. Имеет место следующая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, заданная в окрестности точки $z=x+iy$, была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y)
2) в точке (x,y) выполнены условия ***Коши-Римана****:*

$$\tfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \tfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \tfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\tfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad (1)$$

При выполнении уловия теоремы производная функции f может быть вычислена по любой из следующих формул:

$$f'(z) = \tfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\tfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \qquad f'(z) = \tfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\tfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\ ,$$

$$f'(z) = \tfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} - i\tfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \qquad f'(z) = \tfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} + i\tfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}\ (2)$$

♦ $\Rightarrow$) Пусть функция f дифференцируема в точке $z=x+iy$. Тогда

$$\Delta f = f(z+\Delta z)-f(z) = f'(z)\Delta z+\alpha(\Delta z)|\Delta z|.\ (3)$$

где $\alpha(\Delta z)\to_{\Delta z\to 0} 0, \alpha(0)=0$.
Приращение $\Delta f(z)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f(z) = \Delta u(x,y)+i\Delta v(x,y).$$

Положим

$$f'(z) = A + iB, \rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

$$\alpha(\Delta z) = \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y).$$

причём

$$\underset{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0}{lim} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \underset{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0}{lim} \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

$$\alpha_1(0,0) = \alpha_2(0,0) = 0.$$

Тогда (3) примет вид:

$$\Delta u(x,y) + i\Delta v(x,y) = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y))\rho.$$

Что равносильно системе:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\rho \\ \Delta v(x,y) = A\Delta y + B\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\rho \end{cases}$$

которая и означает дифференцируемость u и v в точке (x,y).
Из этой системы вытекает, что:

$$A = \tfrac{\partial u}{\partial x}, -B = \tfrac{\partial u}{\partial y},$$

$$A = \tfrac{\partial v}{\partial y}, B = \tfrac{\partial v}{\partial x}.$$

откуда и следует (1). Т.к. $f'(z) = A + iB$, то из этих же равенств следует (2) для производной функции f.

$\Leftarrow$) Так как функции u и v дифференцируемы в точке (x,y), то для них выполнены равенства:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\rho \\ \Delta v(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\rho \end{cases}$$

где

$$\underset{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0}{lim} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \underset{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0}{lim} \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

$$\alpha_1(0,0) = \alpha_2(0,0) = 0.$$

Из выполнения условий Коши-Римана (1) следует, что

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\rho \\ \Delta v(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\rho \end{cases}$$

Умножая второе равенство на i и складывая с первым получим:

$$\Delta u(x,y) + i\Delta v(x,y) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)\Delta x - \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)\Delta y +$$

$$+(\alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y))\rho,$$

откуда

$$\Delta u(x,y) + i\Delta v(x,y) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) +$$

$$+(\alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y))\rho.$$

Поэтому

$$\Delta f(z) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y)\Delta z + \alpha(\Delta z)|\Delta z|,$$

где функция $\alpha(\Delta z) = \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ удоволетворяет условиям

$$\lim_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0, \alpha(0) = 0,$$

что и означает дифференциируемость функции f в точке z и выполнение равенства

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Из этой формулы с помощью условий Коши-Римана (1) получаются остальные формулы (2) для производной f' функции f.

1.13 Сопряженные гармонические функции

Выясним, может ли произвольная действительная функция $u(x, y)$, дифференцируемая в точке (x, y), быть действительной (или мнимой) частью некоторой дифференцируемой функции $f(z)$.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z = (x + iy)$ и u и v имеют непрерывные частные производные до 2-ого порядка включительно. Тогда из условия Коши–Римана имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Дифференцируя по x и y, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \Delta v = 0$$

Следовательно, функции u и v должны удовлетворять условию Лапласа.

Функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа и дважды непрерывно дифференцируемы, называются **гармоническими функциями.**

Действительная и мнимая части дифференцируемой ФКП являются гармоническими функциями.

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные между собой условиями Коши-Римана, называются **сопряженными**.

Таким образом, действительная и мнимая части дифференцируемой в области D функции являются в этой области сопряженными гармоническими функциями.

Верно и обратное: Если в области D есть две сопряженные гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема в обсласти D. Это следует из критерия дифференцируемости.

Теорема. *Функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема в области D $\iff$ $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряженными гармоническими в этой области.*

Зная одну из сопряженных гармонических функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$, всегда можно восстановить и другую.

Теорема. *Для всякой функции $u(x, y)$, гармонической в односвязной области D, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию, определяемую с точностью до произвольного постоянного слагаемого.*

♦ Т.к. $u(x, y)$ – гармоническая в области D, то имеет место уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})$$

И, следовательно, выражение

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = Pdx + Qdy$$

является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $v(x, y)$, определяемой формулой

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \ + C \tag{1}$$

Из (1) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Откуда следует, что $v(x, y)$ – гармоническая в области D функция, сопряженная с $u(x, y)$. ■

На практике, при восстановлении функции f иногда удобнее вычисление криволинейного интеграла заменить на использование условия Коши–Римана.

Пример. Найти $f(z)$, если $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ и $f(0) = 0$

1 способ
по формуле (1)

$$v(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (-3y^2 + 3x^2)dx - 6xydy = \int\limits_0^x 3x^2\,dx - \int\limits_0^y 6xy\,dy = x^3 - 3xy^2 + C$$

$$f(z) = y^3-3x^2y+ix^3-3ixy^2+Ci = i(x^3+3x^2yi+3xy^2+i^3y^3)+iC = i(x+iy)^3+iC = iz^3+iC$$

И т.к. $f(0) = 0 \quad => \quad f(z) = iz^3$

2 способ

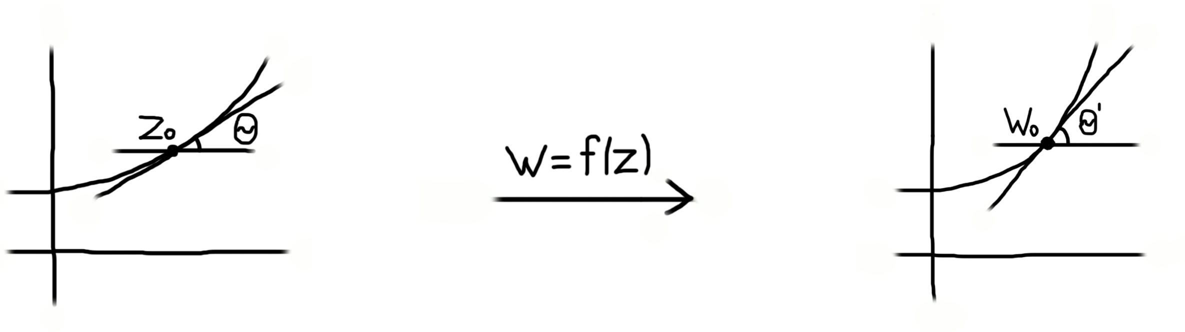
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy \quad => \quad v(x, y) = -3xy^2 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 \quad => \quad \varphi'(x) = 3x^2 \quad => \quad \varphi(x) = x^3 + C$$

$$v = -3xy^2 + x^3 + C$$

1.14 Геометрический смысл производной аргумента ФКП

Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0, и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим в плоскости гладкую кривую l, уравнение которой $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, проходящую через точку z_0, $z_0 = \sigma(t_0)$, $t_0 \in]\alpha, \beta[$. Обозначим через θ угол, образуемый



кривой l в точке z_0 с положительным направлением действительной оси, т.е. θ - угол между Ox и касательной.

Тогда, как нам уже известно

$$\theta = arg\, \sigma'(t_0)$$

Функция f отображает окрестность точки z_0 на некоторую окрестность точки $w_0 = f(z_0)$ плоскости w, и при этом $l \to L$, т.е. $L = f(l)$.

Мы можем написать уравнение L:

$$w = w(t) = (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

По правилу дифференцирования композиций

$$w'(t_0) = f'(\sigma(t_0)) \cdot \sigma'(t_0) = f'(z_0)\sigma'(t_0), \quad \alpha \leq t \leq \beta \qquad (*)$$

Т.к. кривая l гладкая, и поэтому $\sigma'(t_0) \neq 0$, а $f'(z_0) \neq 0$ по условию, то из $(*)$ следует, что $w'(t_0) \neq 0$, что означает гладкость кривой L в точке w_0. Поэтому в точке w_0 существует касательная к L.

Обозначим угол, образованный касательной к кривой L и положительным направлением оси Ox через θ':

$$\theta' = arg\, w'(t_0)$$

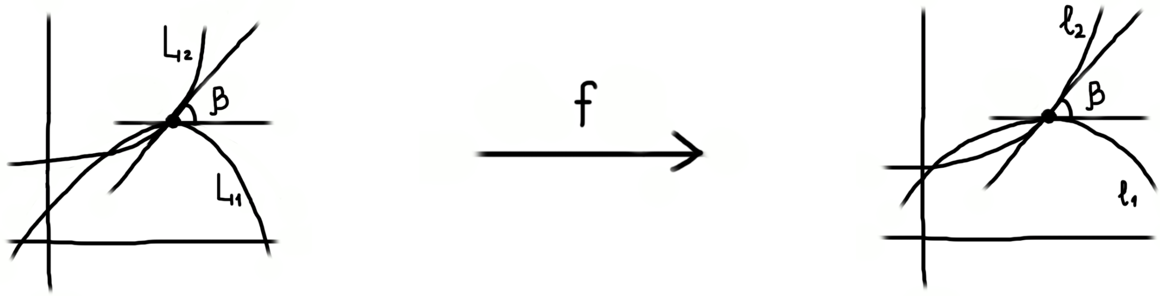
Из $(*)$ вытекает, что

$$\theta' = arg\, w'(t_0) = arg\, f'(z_0) + arg\, \sigma'(t_0)$$

Обозначим $\alpha := arg\, f'(z_0)$

Тогда предыдущее равенство перепишем в виде

$$\theta' = \alpha + \theta \quad \text{или} \quad \theta' - \theta = \alpha$$



Величина $\theta' - \theta$ называется **углом поворота кривой** l в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Из рассмотренного видно, что если $f'(z_0) \neq 0$, то угол поворота в точке z_0 не зависит от вида и направления кривой и равен $\alpha = arg\, f'(z_0)$.

Это означает, что все кривые, проходящие через точку z_0, поворачиваются при отображении $w = f(z)$ на один и тот же угол, равный аргументу производной в точке z_0.

Таким образом, отображение $w = f(z)$, где f дифференцируемая в окрестности точки z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$ сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z_0, не только по величине, но и по направлению отсчёта.

Рассмотрим теперь в прежних предположениях (f - дифференцируема в т. z_0 и $f'(z_0) \neq 0$) произвольную точку $z = z_0 + \Delta z$, расположенную в достаточно малой окрестности т. z_0.

Тогда $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = w - w_0 \quad \Rightarrow \quad w = w_0 + \Delta w$.

Известно, что $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Отсюда вытекает:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)|$$

$$\text{или } |\Delta w| = |f'(z_0)||\Delta z| + o(|\Delta z|)$$

Пусть $|z - z_0| = \rho$, где ρ - fix и достаточно мало. Тогда последняя формула говорит, что:

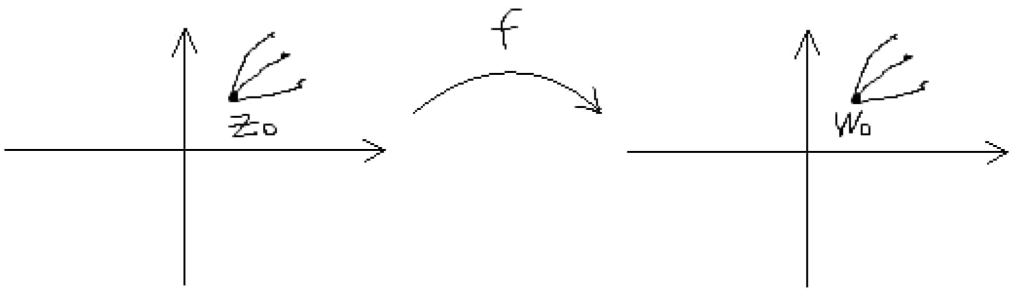
$$|\Delta w| = |f'(z_0)|\rho + o(|\Delta z|)$$

Другими словами, окружность $|z - z_0| = \rho$ при отображении f переходит в замкнутую кривую, которая мало отличается от окружности $|w - w_0| = |\Delta w| = \rho \cdot |f'(z_0)| + o(|\Delta z|)$

Иначе говоря, отображение f с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $|\Delta z|$, растягивает круг $|\Delta z| \leq \rho$ в $|f'(z_0)|$ раз.

Величина $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| = k$ называется **коэффициентом линейного растяжения** элемента $z - z_0 = \Delta z$ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Таким образом, линейное растяжение в точке z_0 не зависит от положения элемента $z_0 + \Delta z$ и всегда равно $f'(z_0)$ (f - дифференцируема и $|f'(z_0)| \neq 0$). Это свойство называют **свойством постоянства растяжения**.



1.15 Конформные отображения

Пусть $f : D \to C, D \in C$.

Отображение f называют **конформным в точке** $z_0 \in D$, если оно сохраняет угол между кривыми и обладает постоянством растяжения.

Геометрический смысл производной говорит о том, что если f дифференцируемая в некоторой окрестности точки $z_0, f'(z_0) \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ является конформным в точке z_0.

Отметим, что условие $f'(z) \neq 0$ является существенным. Оно означает, что Якобиан отображения отличен от нуля. Действительно, отображение $w = f(z)$ можно трактовать как действительное отображение:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

области D на некоторой область G. Якобиан этого отображения в точке (x_0, y_0) можно выписать следующим образом:

$$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right] = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

Если отображение взаимно-однозначно и конформно в каждой точке области D, то его называют **конформным в области** D.

Из сказанного вытекает, что если:

1. f - однозначны и однолистны в D
2. f - дифференциируема в D
3. $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$

то $f(z)$ конформно в D.

Иногда рассматривают конформные отображения, которые сохраняют углы, но меняют направления на противоположные. Их называют **конформными отображениями 2-го рода.**

Например $w = \overline{z}$. Она не дифференциируема нигде, однако

$$z = \rho e^{i\phi}; \quad w = r \cdot e^{i\psi} \quad \Rightarrow \quad \psi = -\phi \quad \text{и} \quad r = \rho$$

Очевидно, что конформным отображением 2 рода будет и отображение $f(\overline{z})$, если f обладает свойствами 1-3.

Пример:

1. $w = \frac{1}{z}$, $w' = -\frac{1}{z^2}$ отображение конформно во всех точках (кроме м.б. $z = 0$, и $z = \infty$)
2. $w = z^2$ - конформно во всех точках пространства за исключением точки $z = 0$: $\arg w = 2 \arg z$

1.15.1 Вычисление площадей и длин дуг образов фигур

Пусть f дифференцируема в замыкании $\overline{D}$, ограниченной в области D и G - образ D при отображении $w = f(z)$. G также область, так как f непрерывно равн. Функцию f предполагаем однозначной и однолистной в области D и пусть l-изменяемая кривая в D, а L ее образ.

Тогда(площадь G) = $\iint\limits_D (|f'(z)|^2) dx\, dy$.

(Дл. L)=$\int\limits_l |f'(z)||dz|$

♦

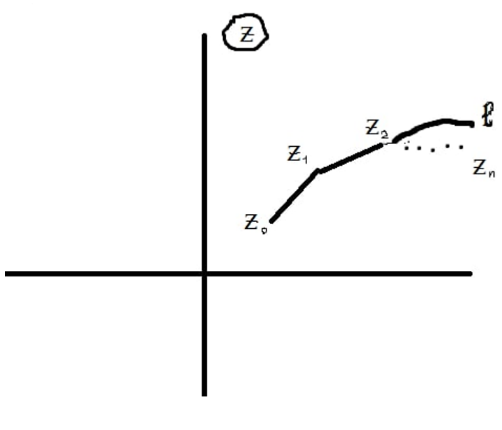
1. Площадь G=$\iint\limits_G du\, dv = \iint\limits_D (|J(x,y)|) dx\, dy = \int\limits_D \int (|f'(z)|^2) dx\, dy$
2. Пусть уравнение $l : z = \sigma(t), t \in |\alpha, \beta|$, дл.$l = \int\limits_\alpha^\beta |\sigma'(t)| dt$

   Тогда $L : z = (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), t \in (\alpha, \beta)$

   дл.$L = \int\limits_\alpha^\beta |f'(\sigma(t))| dt = \int\limits_\alpha^\beta |f'(\sigma(t))||\sigma'(t)| dt = \int\limits_\alpha^\beta |f'(Z)||\sigma'(t) dt| = \int\limits_l |f'(z)| ds = \int\limits_l |f'(z)||dz|$

■

1.16 Интеграл ФКП



Пусть на комплексной плоскости Z некоторая ориентированная кусочно-гладкая кривая l. Пусть также на l определена функция комплексного переменного z: $w = f(z)$. Разобьем кривую l точками $z_0, z_1, ..., z_n$, где z_0 - начало кривой, z_n - конец кривой, на n частей.

Введем обозначения:

$\Delta z_k ::= z_k - z_{k-1}$, $\delta = \max |\Delta z_k|$

Если l_k - участок кривой между точками z_{k-1} и z_k , что выберем точку $\zeta_k \in l_k$

Составим интегральную сумму $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

Если существует $\lim\limits_{\delta\to 0}\sigma$ и он не зависит ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек ζ_k, то его называют **интегралом от функции f(z) по кривой l** и обозначают символ $\int\limits_l f(z)dz$

Таким образом $\int\limits_l f(z)dz = \lim\limits_{\delta\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

Теперь встаёт вопрос о существовании интеграла и его вычислении.

Пусть
$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$
$z_k = x_k + iy_k, \quad x_k - x_{k-1} = \Delta x_k, \quad y_k - y_{k-1} = \Delta y_k,$
$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k.$

Тогда линейную сумму можно представить в виде

$\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(u(\xi_k, \eta_k)+iv(\xi_k, \eta_k))(\Delta x_k+i\Delta y_k) = \sum\limits_{k=1}^{n}(u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k)+ i\sum\limits_{k=1}^{n}(u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k)$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\delta \to 0$ получим

$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_l v(x, y)dx + u(x, y)dy$

Таким образом, существование интеграла $\int_l f(z)dz$ равносильно существованию двух КРИ-2, и при этом имеет место равенство, написанное выше.

Эту формулу удобно запомнить в следующем виде:

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l (u + iv)(dx + idy)$$

1.17 Вычисление интеграла ФКП и его свойства

Пусть $z = \sigma(t) = x(t) + iy(t)$ — уравнение кривой l, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

Тогда $\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l udx - vdy + i\int\limits_l vdx + udy = \left[\text{сведём к ОИ}\right] = \int\limits_\alpha^\beta(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t))dt+i\int\limits_\alpha^\beta(v(x(t), y(t))x'(t)+u(x(t), y(t))y'(t))dt = \int\limits_\alpha^\beta(u(x(t), y(t))+iv(x(t), y(t))(x'(t)+ iy'(t))dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)dt$

Итак $\boxed{\int\limits_{l} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt}$

То есть интеграл ФКП сводится к вычислению интеграла от комплекснозначной функции (определенного).

Все свойства интеграла ФКП вытекают из свойств КРИ-2 и определения интеграла ФКП. Поэтому ограничимся их простым перечислением:

1. Линейность
   $\int\limits_{l}(\alpha f_1 + \beta f_2)dz = \alpha \int\limits_{l} f_1 dz + \beta \int\limits_{l} f_2 dz$, где α_1, α_2-комплексные постоянные
2. Изменение ориентации (меняем знак)
   $\int\limits_{l^+} f(z)dz = -\int\limits_{l^-} f(z)dz$
3. $\int\limits_{z_0}^{z} d\xi = z - z_0$
4. Если $\exists M, |f(z)| \leqslant M \quad \Rightarrow \quad |\int\limits_{l} f(z)dz| \leqslant M \cdot$ дл.l
5. Аддитивность
   $\int\limits_{l_1 v l_2} f(z)dz = \int\limits_{l_1} f(z)dz + \int\limits_{l_2} f(z)dz$
6. $|\int\limits_{l} f(z)dz| \leqslant \int\limits_{l} |f(z)|ds = \int\limits_{l} |f(z)||dz|$

♦ $|\sigma| = |\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\ \Delta z_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|$
Δs_k — интегральная сумма для КРИ-1. Переходя к пределу и получаем требуемое. ■

Пример. $\int\limits_{l} Re\, zdz$, $l : z = (1+i)t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$
$\int\limits_{l} Rezdz = \int\limits_{0}^{1} t(1+i)t(1+i)dt = \int\limits_{0}^{1} t(1+i)dt = \frac{(1+i)t^2}{2}|_0^1 = \frac{(1+i)}{2}$

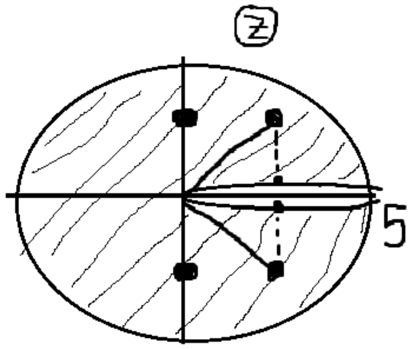
1.18 Непрерывность ФКП в плоскости, вплоть до границы

Пусть a, b — внутренние или граничные точки области D.

Расстоянием между a и b будем называть величину $\rho_D(a,b) = \underset{\gamma}{inf}$дл.$\gamma$, где дл. γ — длина кривой γ, а инфимум берётся по всем кривым, соединяющим точки a и b и лежащим в области D.

Очевидно, что $\rho_D(a,b) \geq |a-b|$ и $\rho_D(a,b) = |a-b|$, если отрезок $[a,b] \in D$.

Отметим, что если a и b — различные точки граничной кривой области D, то $\rho_D(a,b) > 0$ даже в том случае, если a и b совпадают как точки плоскости.



$\rho_D(a, 1-i) = 1 + sqrt(2)$

Пример.

$D = B(0;5)$ с разрезом
$\rho_D(-i, i) = 2$,
$\rho_D(1-i, 1+i) = 2\sqrt{2}$.
$a = 1$ — точка на верхнем береге разреза;
$b = 1$ — точка на нижнем береге разреза.
$\rho_D(a, b) = 2$,
$\rho_D(a, 0) = 1$,

Пусть D — ограниченная область, граница которой ∂D состоит из конечного числа замкнутых кривых $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$. Пусть функция f определена на $D \cup \partial D$.

Функцию $f(z)$ будем называть **непрерывной в области D вплоть до границы ∂D**, если для каждой точки $a \in D \cup \partial D$ имеет место равенство $f(a) = \lim\limits_{\rho_D(z,a)\to 0} f(z)$.

Если a — внутренняя точка, или a не является точкой самопересечения граничной кривой, то $\lim\limits_{\rho_D(z,a)\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to a} f(z)$, т.е. понятие непрерывности в такой точки обычное.

Таким образом, если граница ∂D области D состоит из простых кривых (замкнутых), то непрерывность f вплоть до границы равносильна непрерывности f в $\overline{D} = D \cup \partial D$. Но если ∂D не является простой, то из непрерывности f вплоть до границы не следует непрерывность f на $\overline{D}$.

Пример. $f(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\phi}{2}}$, где $z = \rho \cdot e^{i\phi}$, $\quad 0 < \phi < 2\pi$.

Доопределим f в каждой граничной точке a области как на рисунке вначале параграфа по формуле: $f(a) = \lim\limits_{\rho_D(z,a)\to 0}$. Эта функция непрерывна в D вплоть до границы. В частности, если $z = x > 0$ на верхнем береге разреза, то

$$\lim_{\rho_D(z,a)\to 0} f(z) = \lim_{z\to x, Im(z)>0} f(z) = f(x + 0\cdot i) = \sqrt{x}$$

На нижнем береге разреза $z = x > 0$, получаем

$$\lim_{\rho_D(z,a)\to 0} f(z) = \lim_{z\to x, Im(z)<0} f(z) = f(x - 0\cdot i) = -\sqrt{x}$$

Отсюда следует, что $f(z)$ не является непрерывной в $\overline{D}$.

1.19 Интегральная теорема Коши

Продолжим разговор об интегралах. Речь пойдёт об интегральной теореме Коши — одном из наиболее важных результатов в теории ФКП.

Теорема. *Пусть f однозначна и дифференцируема в конечной односвязной области D и пусть её производная f'(z) непрерывна в D. Тогда интеграл от f(z) по любой замкнутой кривой l, целиком лежащей в D, равен нулю:*

$$\int_l f(z)\,dz = 0$$

♦ Воспользуемся формулой

$$\int\limits_l f(z)\,dz = \int\limits_l u\,dx - v\,dy + i\int\limits_l v\,dx + u\,dy$$

Так как f обладает непрерывной производной в области D, то все частные производные первого порядка функции $u(x,y),\ v(x,y)$ — непрерывны в области D и в этой области удовлетворяют условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Но эти условия для КРИ-2 представляют собой условия независимости от пути интегрирования, и, значит, КРИ равны 0.

Поэтому и $\int\limits_l f(z)\,dz = 0.$ ■

Иногда эту теорему формулирую в следующем виде:

Если f(z) непрерывно дифференцируема в односвязной конечной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром ∂D и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \partial D$ (или вплоть до границы), то $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$

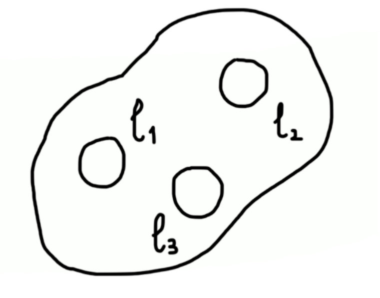
Отмечу также, что теорема верна и в случае, если f — дифференцируема (непрерывность не обязательна!). Есть доказательство Гурса (см., например, Сидоров и др.)

Теорему можно распространить и на неодносвязную область.

Теорема. *Пусть граница ∂D многосвязной области D состоит из замкнутой кусочно-гладкой кривой l_0 и попарно непересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $l_1,\ l_2, \ldots,\ l_n$, расположенных внутри l_0 и пусть функция f(z) дифференцируема в области D и непрерывна в $\overline{D}$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0\ ,$$

где каждый из контуров обходится в положительном направлении, то есть так, что область остаётся слева.



♦ Для доказательства проводим разрезы так, чтобы получившаяся область была связной по теореме Коши для односвязных областей.

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Интегралы по разрезам уничтожаются. ■

Следствие 1. В условиях теоремы Коши $\int\limits_{l_1} f(z)\,dz = \int\limits_{l_2} f(z)\,dz$, если $l_1 \subset D,\ l_2 \subset D$ и имеют одни и те же концы.

Следствие 2. $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$, если γ_1 и γ_2 замкнуты, $\gamma_1 \subset D,\ \gamma_2 \subset D$ и γ_1 и γ_2 охватывают одни и те же лакуны.

1.20 Неопределённый интеграл

Пусть $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D. Обозначим

$$\Phi(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi,$$

где z_0 — фиксированная точка области D, z — произвольная точка области D.

Функция Φ является однозначной функцией z, поскольку в силу теоремы Коши (см. Следствие 1) интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$ не зависит от формы пути интегрирования. Тем самым оправдана форма записи интеграла.

Теорема. *Пусть функция f определена и непрерывна в конечной односвязной области D и интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру, лежащему в D, равен нулю. Тогда функция $\Phi(z)$ дифференцируема в области D и $\Phi'(z) = f(z)$, то есть*

$$\left(\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi) d\xi\right)' = f(z)$$

⧫ Φ однозначна в D, поскольку интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Составим отношение:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = \frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi\right) = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\, d\xi,$$

так как интеграл не зависит от формы пути интегрирования. Здесь предполагается, что $z + \Delta z \in D$.

Возьмём в качестве пути интегрирования отрезок, принадлежащий D. Так как D — область, то все точки внутренние и $\exists U(z) \in D$. Считаем, что $z + \Delta z \in U(z)$.

Оценим теперь следующую величину

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, d\xi\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)| d\xi \leqslant \otimes$$

Так как f непрерывна в D, в частности в точке z, то $\forall \epsilon > 0,\ \exists\delta(\epsilon) > 0,\ \forall\xi,\ |\xi - z| \leqslant \delta \Rightarrow |f(z) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon$

$$\otimes \leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} \varepsilon\xi d\xi = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z| = \varepsilon$$

Причём, это неравенство выполняется для $\forall\xi \in [z,\ z+\Delta z]$, если $|\Delta z| \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Итак, существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = f(z)$, то есть $\Phi'(z) = f(z)$. ■

Доказанная теорема позволяет ввести понятие первообразной и неопределенного интеграла ФКП.

Пусть f определена в области D и F — дифференцируема в D. Если $F'(z) = f(z)$, для всех $z \in D$, то $F(z)$ называют **первообразной функции** f **в области** D.

Совокупность всех первообразных в D называют **неопределённым интегралом от** f.

Из доказанной теоремы вытекает, что, если f непрерывна в односвязной области D, и интеграл по любому замкнутому контуру из D равен нулю, то f обладает первообразной $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$.

В частности, если f дифференцируема в конечной односвязной области D, то она имеет в этой области первообразную. Действительно, в этом случае f удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, поскольку, по теореме Коши, интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, и, поэтому, $\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ является первообразной для f. Отметим, что, если $\Phi(z)$ — первообразная, то и всякая функция вида $\Phi(z) + C$ также будет первообразной (C — произвольное комплексное число). Верно и обратное.

Теорема. *Совокупность всех первообразных функции f(z) в области D определяется формулой F(z) + C, где F — какая-нибудь первообразная функции f, а C — произвольная комплексная постоянная.*

♦ $\mathrm{F}_1(z)$ и $F_2(z)$ — две первообразные функции f в области D. Тогда функция $F(z) = F_1(z) - F_2(z) = u + iv$ есть постоянная в области D. Действительно по условию $F'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$ для всех $z \in D$. Отсюда следует, что

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = C_1,\ v = C_2 \quad \Rightarrow \quad F(z) = C_1 + iC_2 = C$$

■

Техника вычисления неопределённого интеграла такая же, как и для действительных функций.

Например:

$$\int e^z\,dz = e^z + C, \qquad \int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

Имеет место формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,d\xi = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$

Доказательство.

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi + C \quad \Rightarrow \quad \Phi(z_0) = C,$$

$$\Phi(z_1) = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,d\xi + C = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,d\xi + \Phi(z_0) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,d\xi = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$

■

Справедлива формула интегрирования по частям.

Если область D неодносвязна, то всё усложняется. Функция $\Phi(z)$ может быть уже неоднозначной, интеграл зависит от пути интегрирования.

Например:

$$\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln z + 2k\pi i = Ln\, z$$

Этот интеграл в области $Re\, z > 0$ не зависит от пути интегрирования, так как там функция дифференцируема и область односвязна. Если же в качестве контура интегрирования взять окружность $|z| = 1$, то $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$. Получаем, что интеграл не равен нулю по замкнутому контуру. Всё потому, что функция разрывна в точке $z = 0$ (в области, ограниченной окружностью). Но мы можем считать её дифференцируемой в двусвязной области, получающейся, если у круга $|z| \leqslant 1$ выбросить точку $z = 0$.

Пример 1. $I = \int\limits_0^i z \sin z\, dz.$

Подынтегральная функция однозначна и дифференцируема во всей плоскости, значит интеграл не зависит от пути интегрирования. Можно интегрировать по частям:

$$\begin{array}{ll} u = z & dv = \sin z\, dz \\ du = dz & v = -\cos z \end{array} \quad \Rightarrow \quad I = -z\cos z\Big|_0^i + \sin z\Big|_0^i = -i\cos i + 0 + \sin i - 0 =$$

$$= -i(\cos i + i \sin i) = -ie^{i\cdot i} = -ie^{-1};$$

Пример 2. $\int\limits_{-1}^{1} \bar{z}\, dz$ — по верхней полуокружности $|z| = 1$. Функция не дифференцируема, не зависит от пути интегрирования (вообще говоря, сводим к ОИ:

$$z = e^{i\phi},\ \bar{z} = e^{-i\phi},\ dz = ie^{i\phi}d\phi \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-1}^{1} \bar{z}\, dz = \int\limits_{\pi}^{0} e^{-i\phi} \cdot ie^{i\phi}\, d\phi = -\pi i.$$

1.21 Интегральная формула Коши

Доказанная теорема Коши позволяет установить ряд важных следствий, в частности позволяет установить определённую связь между значениями дифференцируемой функций во внутренних точках области её дифференцируемости и граничными значениями этой функции. А именно, имеет место следующая теорема.

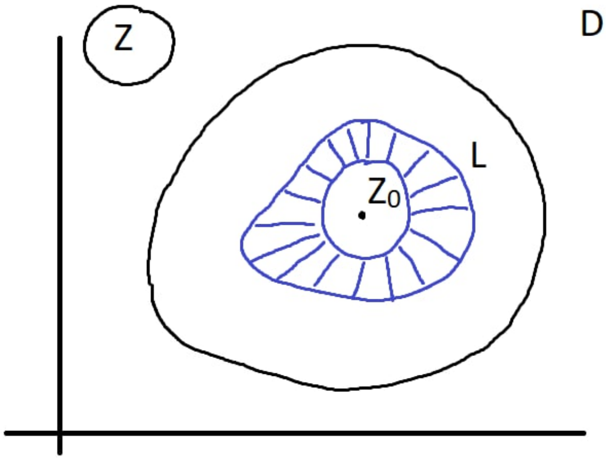
Теорема. *Пусть функция f дифференцируема в односвязаной области D и L - простой замкнутый контур целиком лежащий в D, z_0 - точка из D, лежащая внутри контура L. Тогда:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

где L обходится в положительном направлении.

Эта формула называется **интегральной формулой Коши**, а интеграл - **интегралом Коши**

♦ Построим $\gamma_\rho ::= S(z_0, \rho)$ так, чтобы γ_ρ принадлежала области, ограниченной контуром L.



Тогда, на основании теоремы Коши для многосвязных областей, получим:

$$\oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Рассмотрим модуль разности:

$$|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)| = |\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}|\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz| \leq \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dz$$

Так как f непрерывна в точке z_0:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0, \forall\rho \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| \leq \varepsilon$$

Имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dz \leq \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{\varepsilon}{|z-z_0|}dz < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}\oint\limits_{\gamma_\rho} dz = \frac{\epsilon}{2\pi\rho}\cdot 2\pi\rho = \varepsilon$$

Так как разность между двумя величинами не зависит от ρ за счёт выбора ρ может быть сделана сколь угодно малой, что это разность есть 0, то есть:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)$$

■

1.22 Замечания и следствия формулы Коши

1. Теорема может быть сформулирована в следующем виде:
   Если f дифференцируема в односвязной области D и непрерывна в $\overline{D}$, то
   $$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)$$
   Согласно этой формуле, на интеграл Коши можно смотреть как на интеграл зависящий от параметра.

2. Теорема остается справедливой и для многосвязной области D. При этом, при выводе формулы в качестве γ_ρ следует взять окружность, которая может быть стянута в точку z_0, всё время оставаясь в D.
   $$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{z - z_0}dz = f(z_0)$$

3. В условиях теоремы
   $$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{z - z_0}dz = \begin{cases} f(z_0), z_0 \in D \\ 0, z_0 \notin \overline{D} \\ \nexists, z_0 \in \partial D \end{cases}$$

4. Интегральная формула Коши даёт решение краевой задачи для дифференцируемой функции: разыскать дифференцируемую в области D функцию по её значениям на границе этой области.

5. **Теорема о среднем.** *Пусть f дифференцируема в круге $B(z_0; R)$ и непрерывна в $\overline{B}(z_0; R)$. Тогда значение этой функции в центре круга равно среднему арифметическому её значений на окружности $\gamma_R = S(z_0; R) = \partial B(z_0; R)$. То есть:*
   $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint\limits_{\gamma_R} f(z)ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\phi})d\phi$$
   Доказательство.
   $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z - z_0}dz = [z = z_0 + Re^{i\phi}] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + Re^{i\phi})}{Re^{i\phi}} \cdot Rie^{i\phi}d\phi =$$
   $$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\phi})d\phi = [\text{Для круга имеем:} Rd\phi = ds] = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\gamma_R} f(z)ds$$
   ∎

   Эту теорему ещё называют и **теоремой Гаусса.**

Как следствие, получаем теорему о среднем для гармонической функции:

Теорема (о среднем для гармонической функции). *Пусть $u(x_0, y_0)$ - гармоническая в кругу $B(z_0; R)$ и непрерывна в $\overline{B}(z_0; R)$. Тогда:*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + Rcos\phi, y_0 + Rsin\phi)d\phi$$

♦ Построим $f(z)$ так, чтобы $u(x, y) = Ref(z)$ и f - дифференцируема в $B(z_0; R)$. Тогда:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\phi})d\phi, \text{ где } 0 < \rho < R$$

Приравняем действительные части:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + \rho cos\phi, y_0 + Rsin\phi)d\phi$$

Перейдем к приделу где $\rho \to R$ и получим требуемое. ■

1.23 Принцип максимума модуля дифференцируемой ФКП

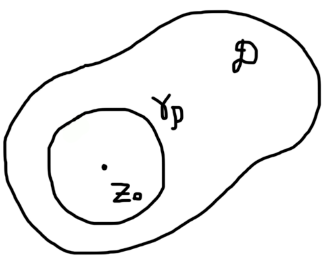
Теорема. *Пусть f дифференцируема в области D и непрерывна в $\overline{D}$.Тогда или $|f(z)| \equiv const$ в области D, или максимальное значение $|f(z)|$ достигается только на границе ∂D области D.*

♦ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Поэтому $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ непрерывна в $\overline{D}$ и на основании теоремы Вейерштрасса о достижении точных границ она достигает максимума в $\overline{D}$. Обозначим через z_0 точку максимума:

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$$

Предположим, что $z_0 \in D$(т.е. z_0 внутренняя точка области D, $z_0 \notin \partial D$).



Построим окружность $\gamma_g = S(z_0, \rho)$ так, чтобы $\overline{\gamma_\rho} \in D$. Тогда по теореме о среднем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi g}\int_{\gamma_\rho} f(z)ds$$

Отсюда следует:

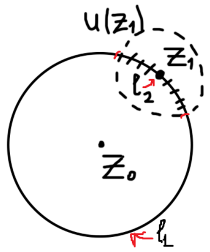
$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho} |f(z)|ds \leqslant \frac{1}{2\pi\rho}\max_{\gamma_\rho} |f(z)| * 2\pi\rho = \max_\gamma |f(z)|$ (1)

С другой стороны, согласно выбору точки $z_0 : |f(z_0)| \geqslant |f(z)| \quad \forall z \in \overline{D}$

Отсюда следует, что: $\max_{\gamma_\rho} |f(z)| \leq |f(z_0)|$ (2)

Из (1) и (2) следует, что $\max_{\gamma_\rho} |f(z)| = |f(z_0)|$, т.е. $\exists z^* \in \gamma_\rho, \quad |f(z^*)| = |f(z_0)|$

Покажем теперь, что $\forall z \in \gamma_\rho, |f(z)| = |f(z_0)|$



Предположив, что в какой-то точке $z_1 \in \gamma_\rho$ выполняется $|f(z_1)| < |f(z_0)|$, мы найдем такую окрестность $U(z_1)$ точки z_1, что в силу непрерывности функции f(z):

$$\forall z \in U(z_1) \cap \gamma_\rho \quad |f(z)| < |f(z_0)|$$

А тогда:

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho} |f(z)|ds = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{l_1} |f(z)|ds + \frac{1}{2\pi\rho}\int_{l_2} |f(z)|ds < \frac{1}{2\pi\rho}|f(z_0)| * \text{дл. } l_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi\rho}|f(z_0)| * \text{дл. } l_2 = |f(z_0)|$$

Таким образом

$$|f(z_0)| > \tfrac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho} |f(z)|ds$$

На основании же теоремы о среднем вытекает, что

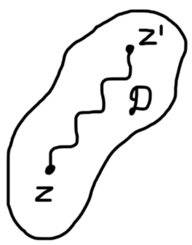
$$|f(z_0)| \leqslant \tfrac{1}{2\pi\rho}\int_{\gamma_\rho} |f(z)|ds$$

Получаем противоречие.

Значит, $\forall z \in \gamma_\rho |f(z)| = |f(z_0)|$

Отсюда вытекает, что на окружности γ_ρ функция |f(z)| имеет постоянное значение, равное своему максимальному значению в $\overline{D}$. Аналогичным образом рассуждая для γ_{ρ_1}, где $\rho_1 < \rho$, приходим к выводу, что $|f(z)| = |f(z_0)| \quad \forall z \in \overline{B}(z_0, \rho)$

Покажем теперь, что и в любой точке $\forall z' \in D \quad |f(z')| = |f(z_0)|$ С этой целью соединим точки z_0 и z' спрямляемой кривой l, целиком лежащей в D.



$d ::= \rho(l, \partial D) \geq 0$

Разобьем l точками $z_0, z_1, ..., z_n = z'$ на дуги $l_1, l_2, ..., l_n$ таким образом, чтобы длина l_k была меньше $\frac{d}{2}$.

Построим систему кругов $B(z_k, \frac{d}{2})$. Тогда $\bigcup\limits_{k=0}^{n} B(z_k, \frac{d}{2}) \subset D$,

l $\in \bigcup\limits_{k=0}^{n} B(z_k, \frac{d}{2})$

Действительно, если $z \in l_k$, то $|z - z_k| \leqslant$ дл. $\quad l_k < \frac{d}{2}$, т.е. дуга $l_k \in B(z_k, \frac{d}{2})$ и $\gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n} B(z_k, \frac{d}{2})$

Так как $z_1 \in B(z_0, \frac{d}{2}) \subset B(z_0, \rho)$ и $|f(z_1)| = |f(z_0)|$, то в круге $B(z_1, \frac{d}{2}) \quad |f(z)| = |f(z_0)|$ и т.д. пока не придем к точке z' и $|f(z')| = |f(z_0)|$

Значит, из предположения, что $|f(z)|$ достигает максимума во внутренней точке области D следует, что $|f(z)| = const$. А поскольку известно, что $|f(z)| \neq const$,то получаем противоречие. Следовательно, $|f(z)|$ не может достигать своего максимума во внутренней точке области D. Но так как максимум существует, то он обязательно лежит на ∂D. ■

Замечания:

1. *Имеет место и принцип минимума модуля: если f дифференцируема в D, непрерывна в $\overline{D}$ и $f(z) \neq 0$ ни в одной точке области D, то минимум $|f(z)|$ достигается на ∂D.*

   ⧫ Для доказательства достаточно применить принцип максимума модуля к функции $\frac{1}{|f(z)|}$. ■

2. *Аналогичная теорема имеет место и для гармонических функций: гармоническая в области D функция, не являющаяся постоянной, принимает свои максимальные и минимальные значения на границе области D.*

3. *Если f дифференцируема и $|f| = C \quad \forall z \in D$, то $f(z) = const$*

   ⧫ Функция $lnf(z)$ имеет постоянную действительную часть $ln|f(z)|$. На основании условий Коши-Римана дифференцируемая функция с постоянной действительной частью постоянна, а значит и $f(z)$ постоянна. ■

1.24 Ряды с комплексными членами(числовые, функциональные, степенные)

1.24.1 Числовые ряды

Ряд $\sum z_k$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$

При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют **суммой ряда**.

Ряд $\sum z_k$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |z_k|$. Если же $\sum z_k$ сходится, а $\sum |z_k|$ расходится, то говорят, что $\sum z_k$ сходится **неабсолютно(условно)**.

Из свойств сходящихся последовательностей вытекают следующие свойства рядов:

1. *Для сходимости ряда $\sum z_k$, где $z = x + iy$, необходима и достаточна сходимость рядов $\sum x_k$ и $\sum y_k$. При этом: $\sum z_k = \sum x_k + i \sum y_k$*

2. *Из сходимости ряда $\sum z_k$ следует сходимость ряда $\sum az_k$, где $a \in \mathbb{C}$, и при этом выполняется равенство:*
$$\sum az_k = a \sum z_k$$

3. *Если сходятся ряды $\sum z_k$ и $\sum \xi_k$, то сходится и ряд $\sum(z_k + \xi_k)$, и при этом $\sum z_k + \sum \xi_k = \sum(z_k + \xi_k)$*

4. *Критерий Коши сходимости*:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon) > 0 \quad \forall n, m \geqslant \nu(\varepsilon) \quad \left| \sum_{k=n}^{m+n} z_k \right| \leqslant \varepsilon$$

5. *Если $\sigma = \sum \xi_k$, $s = \sum z_k$, и если хотя бы один из рядов сходится абсолютно, то и их произведение сходится, при этом $\sum z_k \sum \xi_k = \sum c_k$, где $c_k = \sum\limits_{n=1}^{k} z_n \xi_{k-n+1}$ и $\sum c_k = \sigma s$*

1.25 Ряды функций

Изучаются по той же схеме, что и ряды с действительными членами. Вспомним основные определения для действительных рядов:

1. Последовательность функций $(f_n(z))$ называется **сходящейся** к функции $f(z)$ на множестве D, если
$$\forall z \in D \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

2. Последовательность функций $(f_n(z))$ называется **равномерно сходящейся** к функции $f(z)$ на множестве D, если
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon) \quad \forall n \geqslant \nu(\varepsilon) \quad \forall z \in D \quad |f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$$

3. Ряд $\sum f_k(z)$ **сходится(поточечно)** на множестве D, если он сходится как числовой ряд в каждой точке D.

4. Ряд $\sum f_k(z)$ **сходится равномерно** на множестве D, если последовательность его частных сумм сходится равномерно на D.

Для рядов функций справедливы следующие утверждения, которые доказываются так же, как это было в действительных рядах:

1. **Критерий Коши**

   Для того, чтобы ряд $\sum f_k(z)$ сходился равномерно на множестве D, необходимо и достаточно, чтобы:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu(\varepsilon) \quad \forall n \geqslant \nu(\varepsilon) \quad \forall p \geqslant 0 \quad \forall z \in D \quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(z)\right| \leqslant \varepsilon$$

2. **Признак Вейерштрасса**

   Если для ряда $\sum f_k(z)$ существует сходящаяся числовая мажоранта, то он сходится равномерно на D: $\forall k \quad \forall z \in D \quad |f_k(z)| \leqslant c_k \quad , \sum c_k \longrightarrow$, то $\sum f_k(z) \rightrightarrows$

3. **Непрерывность суммы и почленное интегрирование**

   Если $f_k(z)$ непрерывны в области D, а ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно в D и f(z) есть его сумма, то:

   (a) f(z) непрерывна в D;

   (b) ряд можно интегрировать почленно вдоль любой кусочно-гладкой кривой l из D, т.е. $\int\limits_l f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_l f_k(z)dz$

1.26 Степенные ряды

Степенной ряд – это ряд вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k,$$

где $c_k, z_0 \in \mathbb{C}$, z-комплексная переменная.

Множество сходимости степенного ряда – множество точек из $\mathbb{C}$, для которых ряд сходится. Для комплексных степенных рядов справедливы все утверждения, сформулированные ранее для действительных рядов, лишь слово "интервал"следует заменить на "открытый круг". Каждый степенной ряд обладает **радиусом сходимости** R таким, что в открытом круге $B(z_0;R)$ степенной ряд сходится, а вне круга $\overline{B}(z_0;R)$ расходится. Этот круг в отдельных случаях может вырождаться в точку или быть всей комплексной плоскостью.

Находится радиус сходимости по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, если он существует

В круге $B(z_0;R)$ степенной ряд сходится абсолютно и локально равномерно, т.е. он сходится равномерно в любой замкнутой области $\overline{D} \subset B(z_0;R)$

Сумма степенного ряда является функцией, непрерывной в круге сходимости.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

Коэффициенты c_k степенного ряда связаны с функцией f следующим образом:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

т.е. степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Разложение функции в степенной ряд единственно. Степенной ряд можно дифференцировать(и почленно интегрировать) в круге сходимости нужное число раз.

Примеры: $\sum z^n, \sum \frac{z^n}{n}, \sum \frac{z^n}{n^2}$

1. $\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = (1+z+z^2+...+)' = 1'+z'+(z^2)'+... = 1+2z+3z^2+4z^3+... = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$

2. $ln(1+z) = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z} = \int\limits_0^z (1-z+z^2-z^3+...)dz = \int\limits_0^z dz - \int\limits_0^z zdz + \int\limits_0^z z^2dz - ... = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ... = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^k}{k}$

1.27 Регулярные функции

1.27.1 Связь регулярных и дифференцируемых функций (критерий регулярности функции)

Пусть функция f определена в окрестности точки $z \neq \infty$ и представима в этой окрестности степенным рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = f(z)$, сходящимся в некотором круге $B(z_0;\rho)$, $\rho > 0$. Тогда функцию f называют **регулярной** в точке z_0.

Функцию f называют **регулярной в области** D, если она регулярна в каждой точке области D.

Синонимы к "регулярная": голоморфная, однозначная аналититческая.

Теорема. *f регулярна в области $D \Longleftrightarrow$ она дифференцируема в D.*

♦ $\Rightarrow$

Дано: f - регулярная в D.

Возьмём $\forall z_0 \in D$ и покажем, что f дифференцируема в т. z_0.

В силу регулярности f в точке z_0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

и ряд сходится к f в некотором круге $B(z_0;\rho)$, где $\rho > 0$.

Отсюда вытекает, что $f(z_0) = c_0$.

Рассмотрим $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ при $z \neq z_0$. Из разложения в ряд $f(z_0) = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(z-z_0)^{k-1}$ (степень уменьшилась на 1 из-за деления на $z-z_0$)

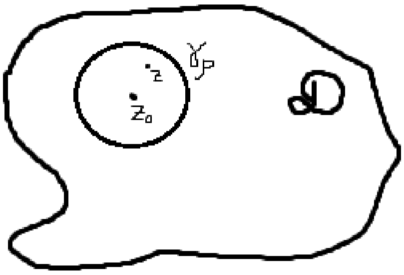
Т.к. ряд справа имеет радиус сходимости $\rho > 0$, то его сумма есть функция непрерывная в $B(z_0.;\rho)$ и можно перейти к пределу при $z \to z_0$. В итоге получим:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) = c_1$$

Т.е. функция f дифференцируема в точке z_0. Т.к. изначально мы брали точку z_0 как произвольную точку из D, то это справедливо для всей области $D \Rightarrow f$ дифференцируема в области D.

$\Leftarrow$ Пусть z_0 — произвольная точка области D. Рассмотрим круг $B(z_0;\rho) \subset D, \rho > 0$.

Т.к. D — область, то такой круг существует. Обозначим, как и раньше, $\gamma_\rho = S(z_0;\rho)$ — окружность с радиусом $\rho > 0$ с центром в z_0.



Пусть z — произвольная точка круга: $z \in B(z_0;\rho)$. На основании интегральной формулы Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = f(z_0)$$

Разложим фукнцию $\dfrac{1}{\xi - z}$ в степенной ряд по степеням $z - z_0$:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Если $\xi \in \gamma_\rho$, то $|\xi - z_0| = \rho$; $|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}| = \dfrac{|z - z_0|}{\rho} < 1$ и, значит, полученный ряд сходится равномерно на окружности γ_ρ как ряд от ξ.

Ряд $\dfrac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\cdot(z - z_0)^n(*)$ сходится на γ_ρ равномерно по ξ в силу признака Вейерштрасса (f непрерывна $\Rightarrow |f| \le M$).

Тогда $|\dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\cdot(z - z_0)^n| \le \dfrac{M}{\rho}\cdot|\dfrac{z - z_0}{\rho}|^n = \dfrac{M}{\rho}\cdot q^n$ - мажоранта. Поэтому этот ряд можно почленно проинтегрировать на γ_ρ.

Проинтегрируем (*):

$$\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi\cdot(z - z_0)^n$$

Учитывая итегральгую формулу Коши, получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z - z_0)^n(2),\ \text{где}\ c_n ::= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi(3)$$

Ряд (2) сходится в круге $B(z_0;\rho)$, а это и означает, что $f(\xi)$ регулярна в точке z_0. В силу проивола в выборе z_0 следует регулярность f в D. ■

Замечание 1. Понятия дифференцируемости и регулярности функции в области D равносильны, поэтому на регулярные функции автоматически переносятся все свойства функций, дифференцируемых в области, например: линейная комбинация регулярных функций в области есть функция регулярная в той же области, композиция регулярных функций есть функция регулярная и т.д.

Замечание 2. Во всех доказательствах и теоремах выше выражение "функция дифференцирума в области D"можно теперь заменить на выражение "фукнция регулярна в области D". Например, интегральную теорему Коши можно теперь сформулировать следующим образом: *Если функция f регулярна в области D и непрерывна в $\overline{D}$, то* $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Замечание 3. Следует иметь в виду, что понятие регулярности и дифференцируемости функции в итоге не равносильны. А именно: если функция f регулярна в точке z_0, то она дифференцируема в этой точке. Это вытекает из доказательства необходимости в теореме. Обратное же не верно. Функция $f(z) = \overline{z}^2$ дифференцируема в точке 0, но не регулярна в этой точке. Для того, чтобы функция была регулярной в точке, нужно чтобы она была дифференцируема как в самой точке, так и в некоторой окрестности этой точки.

Замечание 4. Из доказательства теоремы следует, что ряд (2) заведомо сходится в круге $B(z_0, R)$, где R - расстояние от точки z_0 до границы области дифференцируемости функции f (до ближайшей точки недифференцируемости) и не может сходится в большем круге, ибо сумма степенного ряда - функция дифференцируемая в круге сходимости.

Замечание 5. Регулярность функции в бесконечно удалённой точке определяется следующим образом: $f(z)$ называют регулярной в точке $z = \infty$, если функция $g(\xi) = f(\frac{1}{\xi})$ регулярна в точке $\xi = 0$. Отсюда вытекает, что f(z) определённая в некоторой окрестности точки $z = \infty$ будет регулярной в точке $= \infty$ в том и только в том случае, если она представима некоторой окрестности точки $z = \infty$ сходящимся рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^b}$$

1.27.2 Интегральное представление для произвольной регулярной функции

Теорема. *Если f регулярна в области D, то она бесконечное число раз дифференцируема в этой области, причём имеет место формула ($\gamma_\rho = S(z; \rho) \subset D$):*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

♦ Возьмём $\forall z_0 \in D$. Т.к. f голоморфна в точке z_0, то $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, где ряд сходится в некотором круге $B(z_0; \rho) \subset D$. Но степенной ряд можно любое число раз дифференцировать в круге сходимости и коэффициенты этого ряда вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

поскольку степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

С другой стороны, при доказательстве предыдущей теоремы было получено, что:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (3)$$

В силу единственности разложения функции в степенной ряд получим:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Учитывая произвол в выборе точки z_0:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad \blacksquare$$

Замечание 1. Если f дифференцируема один раз в некоторой окрестности точки z_0, то она дифференцируема сколько угодно раз в этой окрестности.

Замечание 2. Формула для вычисления n-й производной функции f может быть получена формальным дифференцированием интегральной формулы Коши, причём дифференцирование производится под знаком интеграла.

Замечание 3. Если функция f дифференцируема в окрестности точки z_0, то она регулярная в точке z_0 и представима степенным рядом, который является рядом Тейлора для f. Таким образом, формальный ряд тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ для функции f, дифференцируемой в окрестности точки z_0 сходится к f в некоторой окрестности точки z_0.

Аналогичное утверждение для функции действительного переменного не имело место.

Например:

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ 0\text{,x} = 0\end{cases}$$

всюду дифференцируема и имеет, в частности, все производные в точке $x=0$ равные 0 и, значит, все коэффициенты Тейлора в точке $x=0$ тоже равны 0, однако $f(x)$ тождественно не равна 0.

Замечание 4. Теореме можно придать следующую формулировку:
Если f регулярна в D и непрерывна в $\overline{D}$, то $\exists f^{(n)}(z), \forall z \in D$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

Доказательство вытекает из доказанной теоремы и следствия 2 к теореме Коши.

1.27.3 Теорема Лиувилля

Теорема. *Если f ограничена по модулю и регулярна во всей плоскости комплексного переменного, то f(z) = const, $\forall z$*

♦ Поскольку f регулярна во всей плоскости комплексного переменного, то она дифференцируема при $\forall z$ и производную можно вычистить по формуле:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi;\ \gamma_\rho=S(z_0;\rho), \rho>0$$

Оценим $f'(z)$ по модулю, учитывая, что $\forall z: |f(z)|\leq M$:

$$|f'(z)|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{|f(\xi)|}{\rho^2}d\xi\leq\frac{M}{2\pi\rho^2}\cdot 2\pi\rho=\frac{M}{\rho}$$

Т.к. интеграл не зависит от ρ, то ρ можно выбрать сколь угодно большим $\Rightarrow |f'(z)|=0$.
В силу произвола в выборе точки z получаем $|f'(z)|=0, \forall z\Rightarrow f'(z)=0\Rightarrow f(z)=const$.
■

Следствие (Основная теорема алгебры): *Пусть $P_n(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+...+c_1z+c_0, n\geq 1, c_k\in C, c_n\neq 0$ — некоторый многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Тогда $P_n(z)$ имеет по крайней мере 1 комплексный корень.*

♦ Докажем от противного. Пусть $P_n(z)\neq 0, \forall z$.

Функция $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$ будет голоморфной во всей комплексной плоскости. $P_n(z) \to \infty$ при $z \to \infty \Rightarrow f(z) \to 0$ при $z \to \infty \Rightarrow \exists M : |f(z)| \le M, \forall z$. По теореме Лиувилля $\Rightarrow f(z) = const \Rightarrow P_n(z) = const$. Это противоречит тому, что $c_n \neq 0$. ■

Пример. $sinz, cosz$ в силу теоремы Лиувилля не ограничены в плоскости комплексных чисел.

1.27.4 Теорема Мореры

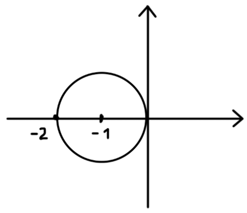
Теорема. *Если f непрерывна в односвязной области D и интеграл от f по любому замкнутому контуру, лежащему в D, равен 0 ($\int\limits_l f(z)dz = 0$), то функция f регулярна в области D.*

♦ Как известно, непрерывная в области D функция, интеграл от которой по любому замкнутому контуру равен нулю, обладает в этой области первообразной, т.е. $\exists F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$. По критерию регулярности $F(z)$ - регулярна в D и, следовательно, её производная регулярна в D, т.е. $F'(z) = f(z)$ - регулярна в D. ■

Замечание. Эта теорема в некотором смысле является обратной к интегральной теореме Коши. Она даёт достаточные условия регулярности функции.

Пример.

1) Вычислить $J = \int\limits_{|z+1|=1} \dfrac{z^2}{z^2+4z+3}dz$



$$J = \int\limits_{|z+1|=1} \frac{z^2}{(z+1)(z+3)}dz = \int\limits_{|z+1|=1} \frac{\frac{z^2}{z+3}}{(z+1)}dz = 2\pi i \frac{z^2}{z+3}\bigg|_{z=-1} = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

1.27.5 Первая теорема Вейерштрасса

Как мы уже имели возможность убедиться, регулярные функции обладают свойствами, которым нет аналога у действительных функций. В частности, может быть значительно усилена и теорема о дифференцировании рядов функций по сравнению с соответствующей теоремой для действительных рядов. Напомним, что мы уже отмечали, что теорема о непрерывности суммы ряда функций и теоремы об интегрировании звучали так же.

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). *Если f_n регулярны в области D, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой области $\overline{G}$, где $G \subset D$, то:*

1. $f = \sum f_n$ *- есть функция регулярная в D*
2. *Ряд можно дифференцировать почленно в D любое число раз,*

   т.е. $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), k \in N;$
3. *Ряд из производных $\sum f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой области $\overline{G} \subset D$ (сходится локально-равномерно в D).*

♦ 1) По теореме, являющейся аналогом теоремы Стокса-Зейделя, f является функцией непрерывной в любой замкнутой области $\overline{G} \subset D$, откуда следует, что она непрерывна в D, поскольку любая точка $z \in D$ является внутренней и поэтому может быть заключена в некоторую $\overline{G} \in D$. На основании теоремы о почленном интегрировании ряд можно интегрировать почленно по любой спрямляемой кривой из C. В частности:

$$\int\limits_l f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_l f_n(z)dz,$$

где l - замкнутый спрямляемый контур из D. Т.к. функции $f_n(z)$ регулярны в D, то $\int\limits_l f_n(z)dz = 0$ для $\forall n \in N$ и поэтому и $\int\limits_l f(z)dz = 0$. По теореме Мореры, $f(z)$ регулярна в D.

2) Зафиксируем любую точку $z \in D$ и построим круг $B(z;\rho)$ так, чтобы $\overline{B}(z;\rho) \subset D; \gamma_\rho ::= S(z;\rho)$, тогда на основании интегральной формулы Коши для производной поскольку все $f_n(z)$ и $f(z)$ регулярны в $\overline{B}(z;\rho)$, то:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \ (1)$$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \ (2)$$

$$k \in N, k - fix$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)$ сходится равномерно на γ_ρ, то на γ_ρ сходится равномерно и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$. Действительно, для остатка этого ряда, учитывая, что $|\xi - z| = \rho$ будем иметь следующую оценку ($r_n(\xi)$ - остаток первого ряда, $R_n(\xi)$ - остаток исследуемого ряда):

$$|R_n(\xi)| = \frac{1}{|\xi - z|^{k+1}} |r_n(\xi)| = \frac{1}{\rho^{k+1}} |r_n(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^{k+1}},$$

где ρ, k - постоянные, $\forall \xi \in \gamma_\rho$.

Следовательно, указанный ряд можно интегрировать почленно на γ_ρ. Проинтегрируем тождество

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$$

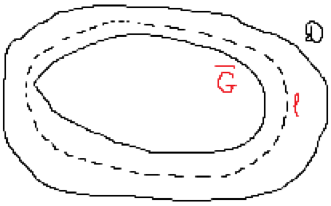
вдоль γ_ρ. Получим:

$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$$

Учитывая (1) и (2) в итоге получаем:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

3) Покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно $\forall \overline{G} \in D$. Действительно, поместим $\overline{G}$ в контур l так, чтобы $l \in D$.



Обозначим за P область, ограниченную контуром l. Обозначим $d ::= \rho(\overline{G}, l) > 0$. Тогда $\forall \xi \in l, \forall z \in \overline{G} : |\xi - z| \geq d$. Т.к. $r_n(z)$ — остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ есть функция регулярная (т.к. $r_n(z) = f(z) - \sum\limits_{p=1}^{n} f_p(z)$, $f(z)$ регулярна по пункту 1 теоремы, а $\sum\limits_{p=1}^{n} f_p(z)$ регулярна как сумма конечного числа регулярных функций), то $\forall z \in \overline{G}$ имеет место равенство:

$$r_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_l \frac{r_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

По условию, ряд $\sum f_n(z)$ сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром l, поэтому $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu(\varepsilon), \forall z \in \overline{D} \Rightarrow |r_n(z)| \leq \varepsilon$.

Пусть теперь $n \geq \nu(\varepsilon)$. Тогда $|r_n^{(k)}| = \dfrac{k!}{2\pi} |\int\limits_l \dfrac{r_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi| \leq \dfrac{k!}{2\pi} \int\limits_l \dfrac{|r_n(\xi)|}{|\xi - z|^{k+1}} d\xi \leq \dfrac{k! \cdot \varepsilon}{2\pi \cdot d^{k+1}} \cdot$дл$l =$ $k \cdot \varepsilon$, что и доказывает равномерную сходимость ряда $\sum f_n^{(k)}(z)$ в области $\overline{G}$. ■

Замечание 1. Теорема, очевидно, имеет место, если потребовать равномерную сходимость ряда $\sum f_n(z)$ в $\overline{D}$.

Замечание 2. Как показывает простой пример, из равномерной сходимости ряда $\sum f_n(z)$ в $\overline{D}$ не следует равномерная сходимость в $\overline{D}$ ряда из производных:

$\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ сходится равномерно в $\overline{B}(0;1)$, а ряд $\sum \dfrac{z^{n-1}}{n}$ уже не будет равномерно сходящимся в круге $\overline{B}(0;1)$, т.к. он и вовсе расходится при $z = 1$. Другими словами, заключение 3) теоремы не может быть, вообще говоря, расширено.

1.27.6 Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса) *Если $f_n(z)$ регулярны в D, непрерывны в $\overline{D}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно на ∂D, то он сходится равномерно и в $\overline{D}$.*

♦ Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости.

Т.к. $\sum f_n(z)$ сходится равномерно на ∂D, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \geq \nu(\varepsilon), \forall p \geq 0, \forall \xi \in \delta D \quad \Rightarrow \quad |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(\xi)| \leq \varepsilon$$

.

Рассмотрим функцию $g(z) = \sum\limits_{k=n}^{n+p} f_k(z)$. Эта функция регулярна в D и непрерывна в $\overline{D}$ как сумма конечного числа функций, обладающих этими же свойствами. По теореме о максимуме модуля регулярной функции:

$$|g(z)| = |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(z)| \leq \max_{s \in \partial D} |\sum_{k=n}^{n+p} f_k(z)| \leq \varepsilon$$

Т.е. для $\sum f_n(z)$ в $\overline{D}$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости. ■

1.27.7 Разложение регулярных функций в ряды Тейлора

Как уже отмечалось, дифференцируемая в некоторой окрестности точки z_0 (включая саму z_0) функция f может быть представлена рядом Тейлора:

$$f(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n могут быть вычислены по формулам:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

либо

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

$\gamma_\rho = S(z_0;\rho)$ лежит в области регулярности f. Радиус сходимости ряда может быть вычислен **по формулам Коши-Адамара**:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}, \text{ либо } R = \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Отметим, что на границе круга сходимости функция не может быть регулярной во всех точках, ибо допуская противное, окажется, что каждая точка окружности обдалает окрестностью, в которой функция регулярна, а тогда можно доказать, что $\exists r$, что f будет регулярна в круге радиуса $R + r$ с центром в точке z_0, что противоречит тому, что R - радиус сходимости. Кстати, это согласуется и с замечанием к теореме о связи регулярных и дифференцируемых функций, где утверждалось, что радиус сходимости равен расстоянию от точки z_0 до границы области дифференцируемости (до ближайшей точки недиффиренцируемости).

Точку, в которой f регулярна, называют **регулярной (обыкновенной, правильной)** точкой функции f. Все остальные точки будем называть **особыми**. Например, $w = \ln(z), z = 0$ — особая, все остальные — регулярные.

Итак: *Если z_0 — правильная точка для f, то f может быть представлена степенным рядом с центром в этой точке: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, причём радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции f.*

Примеры:

1. В области действительных чисел не совсем ясно было, почему ряд $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ расходится вне интервала $]-1;1[$, в то время как $\dfrac{1}{1+x^2}$ определена, непрерывна и дифференцируема сколько угодно раз на всей действительной оси, причём точки $x = \pm 1$ для неё не являются особыми.

   Теперь картина ясна: у функции $\dfrac{1}{1+x^2}$ точки $z = \pm i$ являются особыми, а поэтому радиус сходимости $R = 1$.

2. $\sum \dfrac{z^n}{n^2}, R = 1$ и хотя в $\overline{B}(0;1)$ ряд сходится равномерно, на $S(0;1)$ лежит по крайней мере одна особая точка функции, являющейся суммой этого ряда.

   Отметим в заключение, что для элементарных функций $\sin(z), \cos(z), \ln(1+z), \operatorname{sh}(z), \operatorname{ch}(z)$, $e^z, \dfrac{1}{1+z}$ имеют место основные разложения в ряды Тейлора, знакомые нам с действительного анализа.

1.27.8 Нули регулярной функции

Точка $z = z_0$ называется **нулём** функции $f(z)$, регулярной в этой точке, если $f(z) = 0$.

Пусть z_0 — нуль функции $f(z)$ и $z_0 \neq \infty$. Представим f степенным рядом в окрестности точки $z = z_0$, что возможно, поскольку f голоморфна в этой точке:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Поскольку z_0 — нуль функции f, то $f(z_0) = c_0 = 0$. Пусть c_m — первый отличный от нуля коэффициент в написанном разложении, т.е.:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + ..., c_m \neq 0$$

Тогда число m называют **порядком** или **кратностью** нуля $z = z_0$ функции f.

Т.к. $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, то порядок нуля равен наименьшему порядку производной функции f в этой точке, отличной от нуля.

Функцию f можно переписать иначе:

$$f(z) = (z - z_0)^m (c_m + c_{m+1}(z - z_0) + ...)$$

где ряд $c_m + c_{m+1}(z - z_0) + ... =:: g(z)$ сходится в том же круге, что и ряд для f. Поэтому его сумма, т.е. функция $g(z)$ регулярна в точке z_0 и $g(z_0) = c_m \neq 0$.

Таким образом, если $z = z_0$ — нуль регулярной функции $f(z)$ порядка m, то справедливо представление:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), g(z_0) \neq 0, g \text{ — регулярна в точке } z = z_0.$$

Нетрудно видеть, что справедливо и обратное утверждение. Отсюда получаем четыре маленьких следствия:

Следствие 1. Нули регулярной функции всегда имеют целый порядок.

Следствие 2. Для того, чтобы z_0 была нулём функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы при $z \to z_0 : f(z) \sim A \cdot (z - z_0)^m$

Следствие 3. Если $z = z_0$ — нуль порядка m функции f, то для $(f(z))^k, k \in N, z_0$ является нулём порядка $m \cdot k$.

Следствие 4. Если z_0 — нуль порядка m функции f, то для $f' z_0$ будет нулём порядка $m - 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $z = \infty$ — нуль функции $f(z)$, т.е. $f(\infty) = 0$ и функция f регулярна в точке $z = \infty$. Тогда, как мы знаем, в окрестности $z = \infty$ функция f может быть представлена рядом:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

Если c_m — первый отличный от нуля коэффициент в этом разложении, то m называют порядком или кратностью нуля $z = \infty$ функции f.

Тогда $f(z) = \dfrac{1}{z^m}(c_m + \dfrac{c_{m+1}}{z} + ...) = \dfrac{1}{z^m}\phi(z)$, где $\phi(z)$ — функция, регулярная в бесконечно удалённой точке и $\phi(\infty) = c_m \neq 0$.

Верно и обратное: если f представима в виде $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{z^m}$, где $\phi(z)$ - регулярная и $\phi(\infty) \neq 0$, то $z = \infty$ является нулём кратности m функции f.

Отметим, что и в этом случае нули имеют целый порядок, а так же, при $z \to \infty f(z) \sim \dfrac{B}{z^m}$.

Примеры. Найти нули и определить их порядок:

1. $f(z) = \sin(z)$. $z = 0$ - нуль первого порядка, т.к. $\sin(z) \sim z$ при $z \to 0$. Также $z = k\pi, k \in Z$ — нули первого порядка, т.к. $f'(k\pi) = cos(k\pi) \neq 0, \forall k \in Z$

2. $\dfrac{(z^3+1)^4}{(z^2+7)^11} e^{\frac{1}{z}} \sim_{z\to\infty} \dfrac{z^{12}}{z^{22}} = \dfrac{1}{z^{10}} \quad \Rightarrow \quad z = \infty$ — нуль 10-го порядка.

3. $(e^z - 1)^3 \sim z^3 \quad \Rightarrow \quad z = 0$ — нуль третьего порядка.

Для нулей регулярных фукнций имеет место одна очень интересная теорема:

Теорема. *Пусть f регулярна в точке z_0 и $f(z_0) = 0$. Тогда, либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z_0, либо $\exists$ такая окрестсность точки z_0, в которой нет нулей функции $f(z)$, отличных от z_0 (т.е. обязательно будет существовать такая окрестность точки z_0, в которой не будет таких точек z (кроме неё самой), в которых функция f обащается в нуль).*

♦ $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, z \in B(z_0; \rho), \rho > 0$.

Возможны два случая:

1) Все $c_k = 0, k \in N \Rightarrow f(z) = 0, \forall z \in B(z_0; \rho)$

2) $\exists m \geq 1$ такое, что $c_0 = c_1 = ... = c_{m-1} = 0, c_m \neq 0$. Тогда z_0 — нуль кратности m функции f и $f(z) = (z-z_0)^m g(z), g(z_0) \neq 0, g$ — регулярна в точке z_0. В силу непрерывности функции в некоторой окрестности z_0 из условия $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Итак, $\exists$ окрестность точки z_0, в которой нет других нулей функции f, кроме самой z_0. ■

Короче теорему можно сформулировать так: *нули регулярной функции изолированы.*

1.28 Множество сходимости ряда Лорана

Рядом Лорана называют ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{1}$$

Где z_0 - фиксированная точка комплексной плоскости, c_n - комплексные числа, зависящие от n и не зависящие от z. Суммирование ведётся как по положительным так и по отрицательным значениям индекса n.

В развёрнутой форме ряд Лорана можно исследовать как сумму двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = f_1(z) \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} = f_2(z) \tag{3}$$

и тогда:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Ряд (1) называется сходящимся в точке z, если в этой точке одновременно сходятся ряды (2) и (3) и в случае сходимости под суммой ряда понимают:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

Исследование сходимости ряда Лорана сводится к исследованию сходимости двух степенных рядов.

Ряд (2), как известно, сходится в круге $B(z_0, R) = \{z \mid |z-z_0| < R\}$ где R - радиус сходимости $R = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$

Рассмотрим ряд (3). Сделав замену $\frac{1}{z-z_0} = \xi$ приходим к степенному ряду по степеням ξ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\xi^n$$

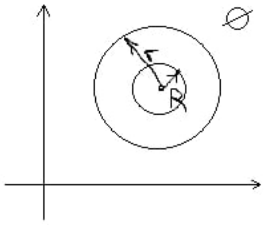
Он сходится в круге $B(0, \frac{1}{r})$, где через $\frac{1}{r}$ обозначен радиус сходимости:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}}$$

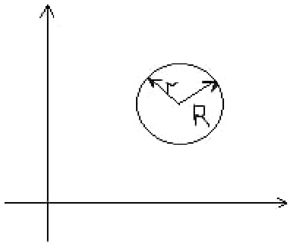
Т.е. ряд сходится для таких ξ, что $|\xi| < \frac{1}{r}$ и, следовательно, для ряда (3) получаем:

$|\xi| = \frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r} \Rightarrow |z-z_0| > r$. Ряд сходится вне круга $B(z_0, r)$.

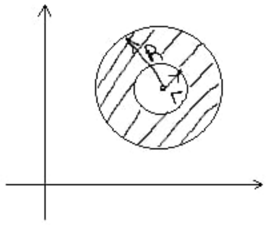
Т.к. ряд Лорана сходится, когда одновременно сходятся ряды (2) и (3), то возможны три случая:



1) $r > R$



2) $r = R$



3) $r < R$

В первом случае — пустая область (r > R), во втором — окружность (r = R), в 3-м — кольцо (r < R).

Т.е. область сходимости ряда Лорана - кольцо:

$$B(z_0; r; R) = \{z \,|\, r < |z - z_0| < R\}$$

В каждой точке $\mathbb{C} \setminus B(z_0; r, R)$ ряд Лорана расходится, поскольку расходится один из его рядов (2) или (3)

Если $r = 0$ то $B(z_0; 0, R) = B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$

В граничных точках кольца ряд Лорана может как сходиться, так и расходиться. Ряд Лорана сходится абсолютно и локально равномерно в кольце $\Rightarrow$ его сумма в кольце сходимости - голоморфная функция.

1.29 Представление функций рядом Лорана

Теорема. *Функция f голоморфная в кольце $B(z_0; r, R)$ представима в этом кольце сходимости рядом Лорана:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{4}$$

где коэффиценты c_n определяются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \tag{5}$$

$\gamma_\rho = S(z_0, \rho) \subset B(z_0; r, R)$ $n \in \mathbb{Z}$ *, обход в положительном направлении.*

♦ Возьмём $\forall z \in B(z_0; r, R)$ и построим кольцо $B(z_0; r_1, R_1)$ так, чтобы $z \in B(z_0; r_1, R_1)$ и $\overline{B}(z_0; zr_1, R_1) \subset B(z; r, R)$. В силу интегральной теоремы Коши для неодносвязной области получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \tag{6}$$

где

$$\gamma_{R_1} = S(z_0, R_1),\ \gamma_{r_1} = S(z_0, r_1)$$

и обе окружности обходятся против часовой стрелки.
Рассмотрим каждый из интегралов в отдельности:

$$\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \tfrac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \tfrac{f(\xi)}{\xi - z_0}\cdot\tfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\,d\xi =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \tfrac{f(\xi)}{\xi - z_0}\cdot\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^n} = \text{[можно проинтегрировать ряд почленно в силу равномерной сходимости]} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{7}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi \tag{8}$$

Отметим, что, вообще говоря, мы не можем написать $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, т.к. $f(z)$ не регулярна в круге $B(z_0, z)$.

В силу теоремы коши для неодносвязной области:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi \tag{9}$$

где $\gamma_\rho = S(z_0, \rho) \subset B(z_0; r, R)$.
Рассмотрим второй интеграл из (6):

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}\,d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(z-z_0)^n}\cdot(z-z_0)^{n-1}\,d\xi = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{10}$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\,d\xi$$

или

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi$$

В силу теоремы Коши для многосвязных областей:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi \tag{11}$$

Объединяя всё вместе, получаем:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi$$

В силу произвольного выбора точки z разложение имеет место в кольце $B(z_0; r, R)$. ■

1.30 Свойства ряда Лорана

1. *Если f голоморфна в круге $B(z_0; R)$, то все $c_{-n} = 0$ в силу т. Коши и ряд Лорана становится рядом Тейлора. Ряд Тейлора - частный случай ряда Лорана.*

2. *Разложение в ряд Лорана функции f голоморфной в кольце $B(z_0; r, R)$ единственно.*

   ♦ Предположим, что на ряду с представлением

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

в этом же кольце имеет место представление

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Умножим это равенство на $(z-z_0)^{-m-1}$ и проинтегрируем по $\varrho_\rho = S(z_0, \rho) \subset B(z_0, r, R)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-m-1}$$

Учитывая, что $\int_{\varrho_\rho} \frac{1}{(z-z_0)^k}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, k=1 \\ 0, k \in \mathbb{Z}\setminus\{1\} \end{cases}$ получим $2\pi i c_m = 2\pi i a_m \Rightarrow c_m = a_m$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ ■

Отсюда следует, что коэффиценты разложения в ряд Лорана не зависят от того, каким способом это разложение получено. На практике стремятся обойтись без вычисления c_n с помощью интегралов. я хачу питсу

3. *Кольцо сходимости ряда Лорана для функции f, его размеры, зависят от особых точек функции f. Поскольку ряд Лорана можно трактовать как сумму двух степенных рядов, то такими же рассуждениями, как и для ряда Тейлора, можно показать, что каждая из окружностей, являющаяся границей кольца максимальной ширины, внутри которого функцию можно разложить в ряд Лорана, содержит хотя бы одну особую точку функции f.*

4. ***Неравенство коши для коэффицентов ряда Лорана***

   Пусть f голоморфна в кольце $B(z_0, r, R)$, тогда коэффиценты c_n ряда Лорана для f в этом кольце удоволетворяют неравенствам:

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

где

$$M = \max_{\gamma_\rho} |f(\xi)|, \gamma_\rho = S(z_0, \rho) \subset B(z_0; r, R)$$

♦ $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi \Rightarrow |c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\rho} \frac{|f(\xi)|}{|\xi-z_0|^{n+1}}\,d\xi \leq \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$ ■

5. *Разложение одной и той же функции f в ряд Лорана возможно в разных областях и эти разложения различны.*

Пример

$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ – разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$. f голоморфна в областях 1) $B(0,1)$, 2) $B(0,1,2)$, 3) $B(0,2,+\infty)$.

1) т.к. f регулярна в круге $B(0,1)$, то ряд Лорана - это ряд Тейлора:

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$$

2) $B(0,1,2)$

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{2^{n+1}}$$

3) $B(0,1,+\infty)$

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-2^n)}{z^{n+1}}$$

1.31 Ряд Лорана в окрестности особой точки

1) Если f регулярна в кольце $(z_0; 0, R)$, и точка z_0 — особая для f (f нерегулярна в этой точке), то f в данном кольце можно представить рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Это разложение называют **разложением в ряд Лорана в окрестности особой точки**, при этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называют **главной частью**, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ — **правильной частью**.

2) Если f представима в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. в $B(0,R,+\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0;R)$ сходящимся рядом: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

то этот ряд называют **рядом Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки**, при этом:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — главная часть

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ — правильная часть

Пример:

$$z^3 e^{1/z} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + ... + \frac{1}{n! z^n} + ...\right) = z^3 + z^2 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} + \frac{1}{24z} + ... + \frac{1}{n! z^{n-3}} + ...$$

где $z \in B(0;0,\infty)$

На это разложение можно смотреть двояко: как на разложение в ряд Лорана в окрестности нуля и на разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

1.32 Классификация особых точек

Пусть однозначная функция f регулярна в окрестности конечной точки z_0,т.е. в некотором кольце $B(z_0, 0, R)$, а в самой точке z_0 не является регулярной(может быть и неопределена в этой точке). Тогда точку z_0 называют **изолированной особой точкой однозначного характера для функции f.**

Дальше для краткости будем говорить «изолированная особая точка», или просто особая точка.

В сделанных предположениях на функцию f, в окрестности точки z_0, т.е. в $B(z_0, 0, R)$ ее можно представить рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

При этом возможны 3 случая:

1. В разложении отсутствует главная часть, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

   в этом случае z_0 называют **устранимой особой точкой.**

2. Главная часть содержит конечное число членов:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m+1}} + ... + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_{-m} \neq 0$$

   тогда z_0 называют **полюсом порядка m**. Полюс первого порядка называют еще **простым полюсом**.

3. Разложение содержит бесконечно много членов главной части

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

   тогда z_0 называют **существенной особой точкой.**

Примеры: Точка $z = 0$ для следующих функций:

$\frac{e^z - 1}{z}$ — устранимая особая точка.

$\frac{e^z}{z}$ — простой полюс.

$\frac{cos(z)}{z^{10}}$ — полюс 10-го порядка.

$e^{1/z}$ — существенная особая точка.

1.33 Поведение функции в окрестности УОТ(устранимой особой точки)

Критерий. *Точка z_0 есть УОТ для функции f <=> f ограничена в некоторой окрестности этой точки z_0.*

♦ $\Rightarrow$ Представим f рядом Лорана в окрестности особой точки z_0:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + c_n(z - z_0)^n + ... \quad z \in B(z_0, 0, R)$$

В этом разложении справа — степенной ряд, f непрерывна и регулярна в $B(z_0, 0, R)$, следовательно, в этом равенстве можно перейти к пределу при $z \to z_0$, =>
=> $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$.

Раз существует конечный предел, то f ограничена в окрестности z_0.

$\Leftarrow$ |f(z)|$\leqslant M$ для $z \in B(z_0, 0, R)$. Тогда, поскольку f регулярна в данном кольце, ее можно представить рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Для коэффициентов этого ряда c_k имеет место неравенство Коши:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n}, \quad \forall \rho \in B(z_0, 0, R)$$

или $|c_n| \leqslant M * \rho^{-n}$

Рассмотрим $n < 0$. Устремим ρ к нулю, благо это возможно. Правая часть неравенства стремится к нулю, а левая от ρ не зависит, => $c_n = 0, \quad n = -1, -2, ...$ => $c_{-n} = 0, \ n \in \mathbb{N}$

Это значит, что в разложении f в ряд Лорана в окрестности z_0 отсутствует главная часть, что по определению и говорит о том, что z_0 — УОТ. ■

Замечание. Из доказательства следует, что для того, чтобы z_0 была УОТ, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Точку z_0 называют устранимой особой точкой потому, что, доопределив или переопределив значение функции f в точке z_0, положив ее равной значению предела в этой точке, получим, что f регулярна в z_0. Этим устранимые особые точки ФКП отличаются от устранимых особых точек действительных функций. Там, доопределяя, получали непрерывную функцию, которая в самой точке могла оказаться и недифференцируемой. Здесь же только из ограниченности f (и регулярности в окрестности) вытекает не только существование конечного предела и непрерывность, но и дифференцируемость, т.е. регулярность.

Сказанное позволяет иногда не обращать внимания на УОТ и смотреть на нее как на правильную точку.

Примеры:

$$\frac{sin(z)}{z}, \quad \frac{1 - cos(z)}{(1 - e^{-z})^2}$$

1.34 Полюс

Теорема. *Точка* $z_0 \neq \infty$ — *полюс функции* $f \iff \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

♦ $\Longrightarrow$) Пусть z_0 - полюс порядка m.
Тогда

$$f(z) = \tfrac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \tfrac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, C_{-m} \neq 0.$$

или

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}(C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\dots)=\frac{\Psi(z)}{(z-z_0)^m}$$

где $\Psi(z)$ регулярна в окрестности точки z_0 и $\Psi(z_0)=C_{-m}\neq 0$.

При $z\to z_0 \implies \Psi(z)\to C_{-m}, (z-z_0)^m\to 0 \implies f(z)\longrightarrow\infty$.

$\Longleftarrow$) Пусть $f(z)\longrightarrow\infty$ при $z\to z_0$.

Тогда для $\forall M>0$, $\exists$ такая окрестность $U(z_0)$ точки z_0, что $\forall z\in U(z_0) \implies |f(z)|\geq M$.

Рассмотрим $g(z)=\frac{1}{f(z)}$.

В окрестности $U(z_0)$ функция $g(z)$ регулярна и ограничена: $|g(z_0)|\leq\frac{1}{M}$. Следовательно точка z_0 для $g(z)$ является устранимой особой точкой и, поэтому:

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=b_0+b_1(z-z_0)+\dots$$

Поскольку $g(z)\to 0$ при $z\to z_0 \quad\implies\quad b_0=0$.

Пусть $b_m, m\geq 1$ первый отличный от нуля коэффицент в этом разложении, $b_m\neq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{f(z)}=b_m(z-z_0)^m+\dots=(z-z_0)^m(\underbrace{b_m+b_{m+1}(z-z_0)+\dots}_{\varphi(z)})=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ регулярна и $\varphi(z_0)=b_m\neq 0$.

Тогда

$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=[\frac{1}{\varphi(z)}$ - регулярна$]=\frac{1}{(z-z_0)^m}(\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\dots)=|\alpha_0\neq 0|=\frac{\alpha_0}{(z-z_0)^m}+\frac{\alpha_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots$

Это означает, что z_0 - полюс порядка m для f. ■

Следствие 1. z_0 — полюс порядка m функции $f \iff f$ представлена в виде $f(z)=\frac{\Psi(z)}{(z-z_0)^m},\ m\in\mathbb{N}$, где Ψ - регулярна, $\Psi(z_0)\neq 0$, $z\in B(z_0,0,R)$.

Следствие 2. z_0 — полюс порядка m функции $f \iff$ для $\frac{1}{f(z)}$ точка z_0 — нуль кратности m.

Следствие 3. z_0 — полюс порядка m функции $f \iff f(z)\sim\frac{A}{(z-z_0)^m}$, $z\to z_0$

Следствие 4. Если две функции не имеют в некоторой области других особых точек, кроме полюсов, то их сумма, произведение и частное могут иметь в этой области особыми точками только полюса и УОТ.

Примеры:

1. Исследовать характер особой точки функции $tg\frac{1}{z}$ в конечной части плоскости.

   Особые точки будут там, где tg не ограничен. Это точки $\frac{1}{z} = \frac{(2k+1)\pi}{2}. \implies z_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$.
   Исследуем одну из них, например $z = \frac{2}{\pi}$;
   Ясно, что остальные будут иметь такой же характер в силу переодичности функции tg
   Для этого рассмотрим $g(z) = \frac{1}{tg\frac{1}{z}} = ctg\frac{1}{z}$
   $g(\frac{2}{\pi} = 0; g'(\frac{2}{\pi}) = -\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{z})}(\frac{-1}{z^2})\Big|_{z=\frac{2}{\pi}} \neq 0 \implies \frac{2}{\pi}$ - простой нуль для $g \implies \frac{2}{\pi}$ простой полюс для f. Точка $z = 0$ также является особой для $tg\frac{1}{z}$. Но она не будет изолированной, поскольку в любой её окрестности есть простые полюса. Такие точки мы не рассматриваем. В таком случае говорят, что 0 является предельной точкой для полюсов функции.

2. $\frac{sin^2 z}{(z-e^z)^3}$. 0 — простой полюс $z = 2k\pi i$; $k \neq 0$ - полюса третьего порядка.

3. $\frac{1-cosz}{z^5} \implies z = 0$ — полюс 3 порядка

1.35 Существенно особая точка (СОТ)

На вопрос о поведении функции в окрестности существенно особой точки(СОТ) даёт ответ теорема, которую в зарубежной литературе называют т.Вейерштрасса, а в отечественной — т.Сохоцкого.

Вейерштрасс опубликовал её в 1876г, Сохоцкий — в 1868. Иногда т. Сохоцкого - Вейерштрасса.

Теорема Сохоцкого. *Если z_0 - СОТ функции f, то для $\forall$ комплексного A существует последовательность (z_n) сходящаяся к z_0 и такая, что $f(z_n) \to A, n \to \infty$*
♦

1. $A = \infty$

   Функция f не может быть ограниченной в окрестности точки z_0, иначе z_0 была бы устранимой особой точкой.

   Отсюда вытекает, что для каждого натурального n в кольце $B(z_0; 0; \frac{1}{n})$ найдётся точка z_n такая, что $|f(z_n)| \geq n$.

   Построенная последовательность (z_n) и является искомой, т.к $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$ и $f(z_n) \to \infty$.

2. $A \neq \infty$.

   Будем доказывать методом от противного.

   Пусть для $\forall$ последовательности (z_n) $z_n \to z_0$ $f(z_n) \not\to A$. Тогда $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $\exists\ \delta_0 > 0, \forall z \in B(z_0; 0; \delta_0) \implies |f(z) - A| \geq \varepsilon_0$
   (В противном случае, если построить отрицание этого утверждения, получим, что $\exists (z_n), f(z_n) \to A$).

   Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$. Функция $\varphi(z)$ регулярна в окрестности z_0, как частное двух регулярных функций, со знаменателем не равным нулю.

   φ - ограничена, поскольку $|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)-A|} < \frac{1}{\varepsilon_0}$.

Следовательно для φ точка z_0 является устранимой особой точкой и, поэтому, существует $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z) =:: B$.

А тогда $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ и $\implies$ $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A + \frac{1}{B}$.

Этот предел конечен, если $b \neq 0$, и бесконечен если $B = 0$, т.е. z_0 либо УОТ для f, либо полюс, что равным образом противоречит условию теоремы. ■

Замечание 1. В СОТ не может существовать ни конечный, ни бесконечный предел f, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) - \nexists$ обратное тоже верно: если $\lim f$ не существует, то это СОТ. (для функции регулярной в некоторой окрестности точки z_0)

Замечание 2. Есть более тонкая теорема Пикара характеризующая поведение функции в окрестности СОТ, которую только сформируем:

В сколько угодно малой окрестности СОТ функция f принимает бесконеное число раз $\forall$ комплексное значение, за исключением, быть может, одного.

Замечание 3. Поскольку у функции не бывает изолированных особых точек однозначного характера, то мы можем для изучения и определения характера этих точек не прибегать к разложению в ряд Лорана, а исследовать поведение функции в окрестности особой точки, т.е находить $\lim\limits_{z_0} f(z)$.

Замечание 4. В отличие от рассмотренных особых точек $\exists$ изолированные особые точки многозначного характера. Например: $\sqrt{z}, z = 0$ — точка ветвления второго порядка, $Lnz, z = 0$ - логарифмическая точка ветвления. Кроме того бывают и неизолированные особые точки. Такие точки мы не рассматриваем в нашем курсе.

Примеры:

1. $e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} \implies z = 0$ — СОТ

2. Если f и g регулярны в точке z_0, то для $\frac{f}{g}$ z_0 — либо правильная, либо устранимая, либо полюс. В частности, рациональная функция $\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ может иметь в качестве особых точек либо УОТ, либо полюса.

3. Если z_0 — существенно особая точка для f, то для $\frac{1}{f}$ z_0 — СОТ либо неизолированная особоая точка (предельная точка полюсов)

1.36 Исследование бесконечно удалённой точки

Бесконечно удаленная точка называется **изолированной особой точкой функции** f, если существует такое R в области $B(0, R, +\infty)$, f регулярна, а $z = \infty$ - особая для f. При этих предположениях f в области $B(0, R, +\infty)$.

Можно представить сходящимся рядом Лорана:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot z^n}_{\text{главная часть}}$$

∞ — УОТ, если в разложении отсутствует главная часть
∞ — полюс, если главная часть - конечное число членов
∞ — СОТ, если главная часть - бесконечное число членов

Здесь справедливы все теоремы об изолированных особых точках.

В частности, если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ и он конечен то:
$z = \infty$ — УОТ. Верно и обратное.

∞_0 — полюс $\iff \lim\limits_{z_0} f(Z) = \infty$
∞_0 — полюс $\iff f(z) = \varphi(z) \cdot z^m, \quad \Psi$ — рег., $\lim\limits_{z \to \infty} \Psi(Z) = a, \quad a \neq 0, a \neq \infty$
∞ — полюс $\iff z = \infty$ нуль для $\frac{1}{f}$
∞ — полюс $\iff f(z) \sim Az^m, \quad z \to \infty$

Для $z = \infty$ — СОТ теорема повторяется дословно.

1.37 Целые и мероморфные функции

Функцию, регулярную в конечной части плоскости (не имеющую конечных особых точек) называют **целой функцией**.

У нас уже есть достаточный опыт работы с такими функциями:

$$e^z, \ sin\, z, \ cos\, z, \ sh\, z, \ ch\, z, \ P_n(z)$$

Из свойств регулярных функций следует, что если f и g — целые функции, то таковыми будут и $\alpha f + \beta g$, fg, $f \circ g$.

Разложим целую функцию в ряд Тейлора в точке $z = 0$ (0 - правильная!)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Поскольку f регулярна во всей комплексной плоскости, то этот ряд сходится во всей плоскости, и поэтому на это разложение можно смотреть и как на разложение в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$, причём главная часть разложения $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ правильная — c_0. Единственной особой точкой у целой функции может быть $x = \infty$. Из вида главной части вытекает, что если $z = \infty$ - полюс порядка n, то f — многочлен степени n.

Целая функция, для которой $z = \infty$ является существенной особой точкой, называется **целой трансцендентной функцией**. (e^z, $sin\, z$, $cos\, z$)

Если целая функция имеет точку $z = \infty$ — УОТ или правильную, то она постоянная.

Функция $f(z)$ называется **мероморфной**, если она регулярна в каждой ограниченной части плоскости за исключением конечного числа полюсов.

Во всей комплексной плоскости число полюсов может быть и бесконечным: $tg\, z$, $\frac{1}{sin\, z}$, $\frac{1}{e^z}$ — мероморные функции.

Теорема. *Всякая рациональная функция является мероморфной и имеет во всей комплексной плоскости лишь конечное число полюсов.*

Верно и обратное: Мероморфная функция, имеющая во всей комплексной плоскости лишь конечное число полюсов $z_1, z_2, ..., z_n$ *(*$z = \infty$ *также может быть полюсом) является рациональной и представима в виде*

$$f(z) = A_0 + f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

где f_0 и f_k *— главные части ряда Лорана для* f *в окрестности точек* $z = \infty$ и z_k *соответственно.*

♦ Пусть $f_k(z) = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \frac{a_{jk}}{(z-z_0)^j}$ и $f_0(z) = A_1 z + ... + A_M z$

Тогда $g(z) = f(z) - f_0(z) - \sum\limits_{k=1}^{M} f_k(z)$ — регулярна во всей расширенной комплексной плоскости и ограничена

=> по теореме Луивилля $g = A_0$ — постоянная. ■

Замечание 1. Теорема дает разложение рациональной функции на сумму простейших дробей.

Замечание 2. Всякая мероморфная функция представима в виде отношения двух целых.

Теорема Пикара. *Любая мероморфная функция* $\neq const$ *принимает все комплексные значения за исключением, быть может, двух (исключительные пикаравские значения).*

Например, $tg\, z$ — два исключительных значения $\pm i$ $\quad tg\, z \neq \pm i$

Для целых функций имеет место обобщенная теорема Луивилля.

Теорема (обобщённая Луивилля). *Если целая функция* $f_k(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *удовлетворяет в кольце* $B(0, R, +\infty)$ *неравенству*

$|f(z)| \le M \cdot |z|^m \quad (m \in \mathbb{N}_0)$, *то* $f(z)$ *— многочлен степени не выше* m.

♦ Для $\rho > R \quad |c_n| = |\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, dx| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M \cdot \rho^m}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = M\rho^{n-m}$

Если $n > m$ => $c_n = 0$, т.к. ρ можно взять сколь угодно большим, а c_n от ρ не зависит. =>

=> $c_{m+1} = c_{m+2} = ... = 0$

=> $f(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_m z^m$ ■

1.38 Вычеты

1.38.1 Определение вычета

Пусть f регулярна в некоторой окрестности точки z_0, т.е. в кольце $B(z_0, 0, R)$. Тогда z_0 либо правильная точка функции f, либо изолированная особая точка. В любом случае f можно представить в $B(z_0, 0, R)$ сходящимся рядом Лорана.

Вычетом функции f **в точке** z_0 называется коэффициент C_{-1} ряда Лорана для f в окрестности точки z_0.

Обозначают вычет функции f в точке z_0 одним из следующих символов:

$$\text{Выч}(f(z), z_0),\ \underset{z=z_0}{\text{Выч}} f(z),\ \text{Res}(f(z), z_0),\ \underset{z=z_0}{Res} f(z),\ Res f(z_0).$$

Мы будем обозначать вычет символами:

$$\underset{z=z_0}{res} f(z), \ \underset{z_0}{res} f.$$

Поскольку у нас есть формула для вычисления коэффициентов ряда Лорана через интегралы (см. *Представление функций рядом Лорана)

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \quad \gamma_\rho \in B(z_0, 0, R),$$

то из этой формулы при $n = -1$ получим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta) \, d\zeta, \quad \gamma_\rho = S(z_0, \rho)$$

$$\text{т.е.} \quad \underset{z_0}{res} f = \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_{\gamma_\rho} f(z) \, dz$$

Иногда эту формулу берут за определение вычета функции f в точке z_0. Тогда моментально следует, что $\underset{z_0}{\operatorname{res}} f = C_{-1}$. Понятие вычета принадлежит Коши. Им же указаны различные приложения вычетов к многочисленным вопросам анализа.

К понятию вычета Коши, по-видимому, отыскивая разность между двумя интегралами, взятыми по путям с общим началом и общим концом, между которыми (путями) заключены полюса функции. Этим и объясняется выбор названия "вычет".

Сразу же отметим очевидный факт, который вытекает из определения вычета:

Если z_0 — правильная или устранимая особая точка, то вычет функции f относительно z_0 равен нулю.

Конечно, ведь в этом случае в разложении f в окрестности точки z_0 в ряд Лорана отсутствует главная часть, что означает, что $C_{-1} = 0$.

Примеры.

1. $\underset{z=0}{res}\, e^{\frac{1}{z}} \quad e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + ... \Rightarrow \underset{z=0}{\operatorname{res}}\, e^{\frac{1}{z}} = 1.$

2. $\underset{z=0}{res} \frac{\sin z}{z^5} = 0$

3. $\underset{z=0}{res} \frac{\sin z}{z^2} = 1$

4. $\underset{z=0}{res} \cos \frac{1}{1-z} = 0$

В приведенных примерах достаточно просто было написать ряд Лорана в окрестности особой точки и, как следствие, вычет находился достаточно быстро.

Однако для большинства функций это достаточно трудоемкая операция — разложение в ряд Лорана. Хорошо бы найти какие-либо более простые приемы отыскания вычета. Приступим к этой задаче.

1.38.2 Вычисление вычета в точке

1. Пусть z_0 - простой полюс функции f.

Тогда разложение f в ряд Лорана в окрестности z_0 имеет вид:

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + ...$$

Отсюда следует, что

$$C_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$\text{т.е} \quad \underset{z_0}{res}\, f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Примеры.

1. $\underset{z=i}{res} \frac{z+1}{z^2+1} = \lim_{z \to i} \frac{(z+1)(z-i)}{z^2+1} = \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2}(1 - i)$

2. $\underset{z=-i}{res} \frac{z+1}{z^2+1} = \lim_{z \to -i} \frac{(z+1)(z+i)}{z^2+1} = \frac{-i+1}{-2i} = \frac{1}{2}(1 + i)$

В частности, если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ и ψ регулярны в точке z_0, причём $\varphi(z_0) \neq 0$, а для ψ точка z_0 является простым нулём, т.е. $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то z_0 - простой полюс для f и тогда получаем

$$\underset{z_0}{res}\, f = \underset{z_0}{res} \frac{\varphi}{\psi} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)(z - z_0)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Итак, в случае простого полюса

$$\underset{z=z_0}{res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)}$$

Предыдущие примеры по этой формуле вычисляются следующим образом:

1. $\underset{z=i}{res} \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{i+1}{2i}$

2. $\underset{z=-i}{res} \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{-i+1}{-2i}$

2. Пусть z_0 - полюс порядка m функции f.

Тогда ряд Лорана в окрестности z_0 для f имеет вид:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + ... + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + ...$$

Наша задача с помощью простых операций получить C_{-1} выраженное через f.

Умножим обе части на $(z - z_0)^m$:

$$(z - z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + ... + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + C_0(z - z_0)^m + ...$$

Продифференцируем $(m - 1)$ раз:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z)) = (m - 1)! C_{-1} + m! C_0(z - z_0) + ...,$$

разделим на $(m-1)!$ и перейдем к пределу, откуда и получим C_{-1}, т.е. $\underset{z_0}{res}\, f$:

$$\underset{z_0}{res}\, f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)$$

В частности, если $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, где g - регулярна в точке z_0 и $g(z_0) \neq 0$, то из предыдущей формулы вытекает:

$$\underset{z_0}{res}\, \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{1}{(m-1)!} g^{m-1}(z_0)$$

Примеры.

1. $\underset{z=1}{res}\, \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} = \frac{1}{2!} (\sin 2z)''|_{z=-1} = -2\sin(-2)$
2. $\underset{k\pi}{res}\, \operatorname{ctg} z = \underset{k\pi}{res}\, \frac{\cos z}{\sin z} = 1$

Вычисление вычета в существенно особой точке

Задача. Выяснить, что произойдёт, если мы примем полюс порядка m за полюс большего порядка. В каких случаях можно получить правильный ответ.

Нет других алгоритмов, кроме разложения в ряд Лорана, либо вычисления интеграла.

Примеры.

1. $\underset{z=0}{res}\, z^5 \sin \frac{1}{z^2}$
   $z^5 \sin \frac{1}{z^2} = z^5 (\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3! z^6} + ...) \quad \Rightarrow \quad \underset{0}{res}\, f = -\frac{1}{6}$
2. $f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \underset{0}{res}\, f = 0$
3. $f(z) = z^3 \ln(1 + \frac{1}{z})$ $f(z) = z^3 (\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{4z^4} + ...) \quad \Rightarrow \quad \underset{0}{res}\, f = -\frac{1}{4}$.

1.38.3 Вычет в бесконечно удалённой точке

Пусть f голоморфна в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки, т.е. в $B(0, R, +\infty)$. Тогда $z = +\infty$ либо изолированная особая точка, либо правильная. В любом случае f можно представить рядом Лорана в окрестности $z = +\infty$

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots$$

Вычетом функции f **в точке** $z = \infty$ называют коэффицент при $\frac{1}{z}$ взятый с обратным знаком, т.е.:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1}$$

Вспоминая выражение коэффицентов ряда Лорана через интегралы, можно записать:

$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\, dz$, $\gamma_\rho = S(0, \rho)$ - обход против часовой стрелки

Поэтому

$$\underset{\infty}{res} f = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz$$

либо, можем поменять направление:

$$\underset{\infty}{res} f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz \text{ - обход по часовой стрелке}$$

Отметим, что формулу для вычисления вычета с помощью интеграла можно объединить в одну формулу как для конечной, так и для бесконечно удалённой точки.

Действительно, если f голоморфна в окрестности $U(z_0)$, z_0 - конечная или бесконечная, то в любом случае:

$$\underset{\infty}{res} f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz$$

где $\gamma_\rho \subset U(z_0)$ и γ_ρ обходится так, что точка z_0 остаётся слева.

Следует так же иметь в виду, что в отличие от конечных особых точек, вычет относительно бесконечно удалённой особой точки может быть отличен от нуля в случае, если она правильная или УОТ.

Пример. $\underset{\infty}{res}(3+\frac{8}{z}) = -8$, ∞ - правильная.

Если $z=\infty$ является нулём функции f кратности m, то, как известно:

$$f(z) \sim \frac{A}{z^m}$$

тогда:

$$\text{при } m=1, \text{ т.е. } f(z) \sim \frac{A}{z} \Rightarrow \underset{\infty}{res} f = -A$$
$$\text{при } m>1, \text{ т.е. } f(z) \sim \frac{A}{z^m} \Rightarrow \underset{\infty}{res} f = 0$$

Примеры:

1. $\underset{\infty}{res}\frac{z}{z^2+1}$

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z}(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\dots) \quad \Rightarrow \quad \underset{\infty}{res} f = -1$$

$$\text{либо} \quad \frac{z}{z^2+1} \sim \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \underset{\infty}{res} f = -1$$

2. $\underset{\infty}{res}\frac{z}{z^2+1}\sin\frac{1}{z}$

$$(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}+\dots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}+\dots) \quad \Rightarrow \quad \underset{\infty}{res} f = 0$$

$$\text{либо} \quad \frac{z}{z^2+1}\sin\frac{1}{z} \sim \frac{1}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \underset{\infty}{res} f = 0$$

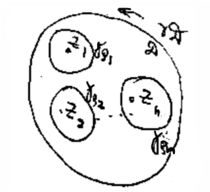
1.39 Основная теорема о вычетах и её следствия.

Теорема. *Пусть f регулярна в ограниченной односвязной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром ∂D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k, k = \overline{1,n}$ и непрерывна в $\overline{D}$ (за исключенем точек z_k).*

Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f,$$

где ∂D обходится в положительном направлении.



♦ Построим окружности $\gamma_{\rho_k} = S(z_k;\rho_k) \subset D$ так, чтобы $B(z_k,\rho_k)$ не содержали других особых точек, кроме z_k. На основании теоремы Коши для многосвязных областей:

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{\rho_k}} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \underset{z_k}{res} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f$$

■

Замечание 1. Теорема справедлива и для неодносвязных областей, причём под ∂D понимаем совокупность кривых, составляющих границу D, причём все кривые обходятся так, что область остается слева.

Замечание 2. Практическое значение теоремы состоит в том, что во многих случаях значительно проще вычислить вычет, чем интеграл, посему эта теорема может быть использована для вычисления интегралов ФКП.

Теорема. *Пусть f регулярна во всей расширенной плоскости комплексного переменного за исключением конечного числа изолированных особых точек. Тогда сумма вычетов функции, включая и вычет относительно бесконечно удаленной точки, равен нулю.*

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f + \underset{\infty}{res} f = 0$$

♦ Выберем R так, чтобы все конечные особые точки функции f лежали в круге B(0,R).

По основной теореме о вычетах

$$\int_{S(0,R)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f,$$

С другой стороны

$$\int_{S(0,R)} f(z)\,dz = -2\pi i \underset{\infty}{res} f,$$

Вычитая и получим требуемое.

■

Следствие. В условиях теоремы

$$\underset{\infty}{res} f = -\sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f$$

т.е. вычет функции f относительно бесконечно удалённой точки равен сумме вычетов f, взятых с обратным знаком, относительно всех особых точек. Это обстоятельство используют при вычислении $\underset{\infty}{res} f$ и при вычислении интегралов.

1.40 Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt$

$R(u, v)$ — рациональная функция своих переменных, причём предполагается, что на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $R(\sin t, \cos t)$ не имеет особых точек.
Сделаем замену переменных, полагая $z = e^{it}$, то есть вводим комплексный аргумент. Тогда

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$
$$\sin t = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$
$$dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

И в результате получим

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{z}$$

Подынтегральная функция является рациональной функцией z, значит, в круге $B(0, 1)$ она голоморфна, за исключением, может быть, конечного числа изолированных особых точек, являющихся полюсами, либо УОТ. Поэтому интеграл может быть вычислен с помощью теоремы о вычетах.

Интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin t, \cos t)dt$ вычисляется по той же формуле. Указанным методом может быть вычислен и интеграл $\int_0^{\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} R(\sin t, \cos t)dt$

Пример.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t}, \quad |a| > 1$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \quad z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

1. $a > 1$. В круге $B(0, 1)$ лежит корень $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$, поэтому
   $I = \frac{1}{i}2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi\frac{1}{2\left(-a + \sqrt{a^2 - 1}\right) + 2a} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$

2. $a < -1$. В круге $B(0, 1)$ лежит корень $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$
   $I = \frac{2\pi}{2\left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right) + 2a} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$

Ответ: $I = \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - 1}}$

1.41 Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Здесь будем рассматривать НИ-1, то есть предполагается, что $f(x)$ не имеет конечных особых точек на действительной оси.

Введем в рассмотрение функцию комплексного аргумента $f(z)$, которая совпадает с $f(x)$ при $z = x$ и предположим, что в верхней полуплоскости $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек $z_1, \dots, z_n$.

Лемма. *Если существуют такие положительные постоянные R_0, M, δ, что для всех точек верхней полуплоскости $Im z > 0$, удовлетворяющих условию $|z| > R_0 \quad (z \in B(0, R_0, \infty) \cap \{z \mid Im z > 0\})$ имеет место неравенство $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$,* то

$$\int_{C_\rho} f(z)dz \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0, \tag{1.8}$$

где C_ρ — полуокружность $|z| < \rho, Im z > 0, \rho > R_0$

♦ $\left|\displaystyle\int_{C_\rho} f(z)dz\right| \leqslant \displaystyle\int_{C_\rho} |f(z)||dz| \leqslant \int_{C_\rho} \frac{M}{\rho^{1+\delta}}|dz| = \frac{M}{\rho^{1+\delta}} \int_{C_\rho} |dz| = \frac{M}{\rho^{1+\delta}}\,\pi\rho = \frac{M\pi}{\rho^\delta} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0$ ■

Замечание 1. Если условия леммы выполнены в секторе $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$, то формула (1.8) имеет место, но в (1.8) C_ρ - дуга окружности $S(0, \rho)$, лежащая в секторе.

Замечание 2. Условия леммы заведомо выполняются, если $z = \infty$ есть нуль порядка 2 или выше, а в окрестности $z = \infty$ функция регулярна.

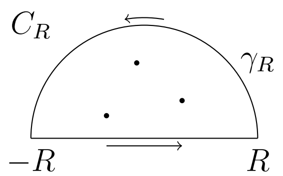
♦ $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{z^2}; \quad |\psi(z)| \leqslant M, \quad \delta = 1$ ■

В частности, если $f(z)$ рациональная функция $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, P_n, Q_m — многочлены, то для выполнения леммы нужно потребовать $m > n + 1$

Теорема. *Если функция $f(z)$ не имеет особых точек на действительной оси и имеет лишь конечное число изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$ в верхней полуплоскости, причём $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы* (1.8)
и интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) \tag{1.9}$$

♦ Построим контур C_R, состоящий из полуокружности γ_R в верхней полуплоскости и отрезка $[-R, R]$ действительной оси так, чтобы все особые точки попали в область ограниченную этим контуром.



По основной теореме о вычетах $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$

Но $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{[-R,R]} f(z)dz$

Перейдем к пределу при $R \to \infty$. Используя лемму, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$$

$\blacksquare$

Следствие. Если $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ и на оси нет особых точек, то для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{x^{m-n}} \quad \Rightarrow \quad m-n>1$ и тогда автоматически выполняются условия леммы, а, значит, и теоремы.
Другими словами сходящийся НИ-1 от рациональной функции может быть всегда вычислен указанным методом.

Замечание. Аналогично доказывается

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z),$$

где z_k - особые точки функции $f(z)$ в нижней полуплоскости.

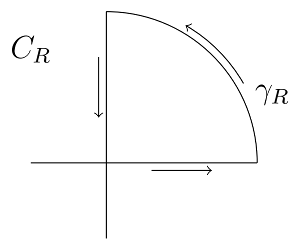
Пример. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

В силу следствия можно воспользоваться формулой теоремы.

Особые точки: $z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{\frac{i\pi+2k\pi i}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}$
То есть: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}, \quad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}, \quad z_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)}$
В верхней полуплоскости 2 особые точки: z_1 и z_2.

Поэтому $I = \dfrac{1}{2} 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z_1} \dfrac{1}{z^4+1} + \operatorname*{res}_{z_2} \dfrac{1}{z^4+1} \right) = \pi i \left(\dfrac{1}{4z_1^3} + \dfrac{1}{4z_2^3} \right) = \pi i \left(\dfrac{z_1}{4z_1^4} + \dfrac{z_2}{4z_2^4} \right) = -\dfrac{\pi i}{4}(z_1+z_2) = -\dfrac{\pi i}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\dfrac{\pi i}{4} i\sqrt{2} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Этот же интеграл можно вычислить по-другому.

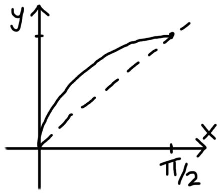


$\displaystyle\int_{\gamma_R} \to 0$ по лемме.
$$\int_{C_R} = \int_{\gamma_R} + \int_0^R \frac{dx}{1+x^4} - \int_0^{iR} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1} \frac{1}{1+z^4} = 2\pi i \frac{z_1}{4z_1^4} = -\frac{2\pi i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$
$$\int_0^{iR} \frac{dz}{1+z^4} = [x=0, y=y \quad z=iy] = \int_0^{iR} \frac{idy}{1+y^4};$$

Перейдя к пределу
$$I - iI = -\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

1.42 Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx$, лемма Жордана

Лемма 1. $sin\, x \geq \frac{2}{\pi}x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



♦ Функция sin выпукла вверх на $[0, \frac{\pi}{2}]$, поэтому её график лежит выше хорды, соединяющей её концы.
уравнение хорды $\quad y = \frac{2}{\pi}x \quad =>$
$sin\, x \geq \frac{2}{\pi}x, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ■

Лемма Жордана. *Пусть $f(z)$ регулярна в верхней полуплоскости $Im\, z \geq 0$ за исключением конечного числа изолированных особых точек, и $\max\limits_{\gamma_R}|f(z)| \underset{R\to\infty}{\to} 0$, где $\gamma_R ::= S(0, R) \cap \{z | Im\, z \geq 0\}$.*

Тогда, при $fix\, \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0$

♦ Т.к. $\max\limits_{\gamma_R}|f(z)| \to 0$ при $R \to \infty \quad \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists R_0(\epsilon),\ \forall z \in \gamma_{R_0} \Rightarrow |f(z)| \leq \varepsilon$

Рассмотрим

$$\int\limits_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = \begin{bmatrix} z = Re^{i\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\pi} e^{i\alpha\varphi Re^{i\varphi}} f(Re^{i\varphi}) Rie^{i\varphi}\, d\varphi$$

Возьмём $R > R_0$. Тогда

$$|\int\limits_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\, dz| \ \leq \ R\int\limits_0^{\pi} |e^{i\alpha R(cos\,\varphi + isin\,\varphi)}| \cdot |f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi \ \leq \ R\int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R sin\,\varphi} \cdot \varepsilon\, d\varphi \ =$$

$$2R\varepsilon \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R sin\,\varphi}\, d\varphi \ \leq$$

$$[\text{по лемме } 1] \leq \ 2R\varepsilon \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}\varphi}\, d\varphi \ = \ -\frac{2R\varepsilon\pi}{2R\alpha} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}\varphi} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \ = \ \frac{\pi\varepsilon}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \ \leq \ \frac{\pi}{\alpha}\varepsilon \quad ■$$

Замечание. Если $\alpha < 0$, а f удовлетворяет условию леммы Жордана в некоторой полуплоскости, то заключение леммы имеет место по дуге окружности в нижней полуплоскости:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} e^{-i\beta z} f(z)\, dz, \quad \beta > 0$$

Аналогичное утверждение имеет место для правой полуплоскости:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} e^{-\beta z} f(z)\, dz, \quad \beta > 0$$

для левой полуплоскости:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} e^{\beta z} f(z)\, dz, \quad \beta > 0$$

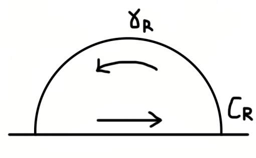
Теорема. *Пусть $f(z)$:*

1. *регулярна в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n$
2. *не имеет особых точек на действительной оси*
3. $|f(z)| \to 0$ *при* $z \to \infty, \quad Im\, z \geq 0$

Тогда при $\alpha > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{1}^{\infty} \underset{z_k}{res}(f(z) e^{i\alpha z})$$

♦ $\int\limits_{C_R} = \int\limits_{\gamma_R} + \int\limits_{-R}^{R} = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z) e^{i\alpha z}$



Переходя к пределу и используя при этом лемму Жордана, получаем требуемое.■

Замечание 1. Для $\alpha < 0, \ \alpha = -\beta, \ \beta > 0$ с учётом леммы Жордана имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\beta x} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z) e^{-i\beta z}$$

где z_k — особоая точка в нижней полуплоскости.

Замечание 2. Теорема даёт возможность вычислять интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) cos\, x\, dx = Re \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) sin\, x\, dx = Im \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx$$

Пример. Вычислить интегралы Лапласа

$$I_1 = \int\limits_{0}^{+\infty} \tfrac{cos\, \alpha x}{x^2+a^2}\, dx, \quad I_2 = \int\limits_{0}^{+\infty} \tfrac{x\, sin\, \alpha x}{x^2+a^2}\, dx, \quad a > 0, \alpha > 0$$

$$I_1 = \tfrac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{cos\, \alpha x}{x^2+a^2}\, dx, = \tfrac{1}{2} Re \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}\, dx = \tfrac{1}{2} Re(2\pi i\ \underset{ia}{res} \tfrac{e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}) = \tfrac{1}{2} Re(2\pi i\ \tfrac{e^{-\alpha a}}{2ai}) = \tfrac{\pi}{2a} e^{-\alpha a}$$

Аналогично

$$I_2 = \tfrac{1}{2} Im \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{x\, e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}\, dx = \tfrac{1}{2} Im(2\pi i\ \underset{ia}{res} \tfrac{z\, e^{i\alpha z}}{z^2+a^2}) = \tfrac{1}{2} Im(2\pi i\ \tfrac{ai\, e^{-\alpha a}}{2ai}) = \tfrac{\pi}{2} e^{-\alpha a}$$

1.43 $v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx, \alpha > 0.$

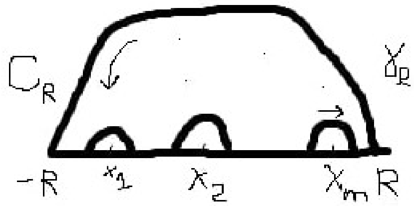
Пусть $f(z)$:

1. Голоморфна в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1 \ldots, z_n$

2. Имеет на оси Ox простые полюса $x_1, \dots, x_m$

3. $|f(z)| \to 0, z \to \infty, Imz \geq 0$

При этих условиях интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx$ расходится, но может существовать в смысле главного значения.



Построим C_R так, чтобы все особые точки попали в область им ограниченную, а $\gamma_{k\rho}$ не имели общих точек. Другими словами, C_R контур изображений на рисунке.

Тогда:

$$\int\limits_{C_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = \int\limits_{\gamma_R} + \int\limits_{-R}^{x_1-\rho} + \int\limits_{x_1+\rho}^{x_2-\rho} + \dots + \int\limits_{x_m+\rho}^{R} + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma} {}_{k\rho} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} e^{i\alpha z} f(z)$$

Рассмотрим каждый интеграл в отдельности в левой части этого равенства.

$\int\limits_{\gamma_R} \underset{R\to\infty}{\to} 0$ в силу леммы Жордана

$$\int\limits_{-R_1}^{x_1-\rho} + \dots + \int\limits_{x_m+\rho}^{R} \underset{R\to\infty;\rho\to 0}{\longrightarrow} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$$

$\int\limits_{\gamma_{k\rho}} f(z)e^{i\alpha z}dz = \int\limits_{\gamma_{k\rho}} (\frac{C_{-1}^{(k)}}{z-x_k} + C_0^{(k)} + C_1^{(k)}(z-x_k) + \dots)dz = |\int\limits_{\gamma_{k\rho}} (z-x_k)^n dz| = [z = x_k + \rho e^{i\phi}] = \int\limits_{\pi}^{0} \rho^n e^{i\phi} i d\phi = -i\rho^{n+1} \int\limits_{0}^{} \pi e^{i(n+1)\phi} d\phi \to 0$ для $\forall n \geqslant 0$.

$\int\limits_{\gamma_{k\rho}} \dfrac{dz}{z-x_k} = -\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{\rho e^{i\phi} i}{\rho e^{i\phi}} d\phi = -\pi i.$

Поэтому,

$$\int\limits_{\gamma_{kg}} f(z)e^{i\alpha z}dz = -\pi i C_{-1}^{(k)} = -\pi \underset{z=x_k}{res} f(z)e^{i\alpha z}$$

Переходя к пределу при $R \to \infty, \rho \to 0$ окончательно получаем: $v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} e^{i\alpha z} f + \pi \sum\limits_{k=1}^{m} \underset{x_k}{res} f e^{i\alpha x}$

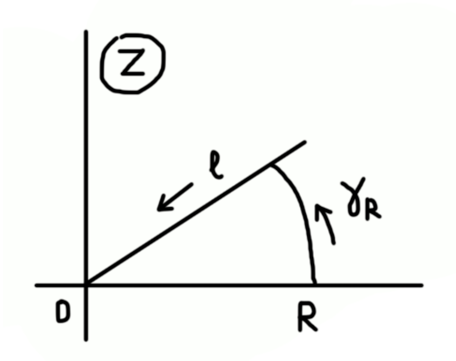
Примеры:

1. Интеграл Дирихле $\beta > 0$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{sin\beta x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin\beta x}{x}dx = \frac{1}{2} Im \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta x}}{x}dx = \frac{1}{2} Im\, \pi\, i \underset{z=0}{res} \frac{e^{i\beta z}}{z} = \frac{\pi}{2}$$

2. Интеграл Френеля

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} cosx^2dx,\ I_2 = \int\limits_0^{+\infty} sinx^2dx$$



Рассмотрим $\int\limits_{C_R} e^{iz^2}dx = \int\limits_0^R e^{ix^2}dx + \int\limits_{\gamma_R} e^{iz^2}dz + \int\limits_{e} e^{iz^2}dz = 0$

1) $\int\limits_0^R e^{ix^2}dx \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$

2) $\int\limits_{\gamma_R} e^{iz^2}dz = |z = Re^{i\phi}| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2i\phi}} R\ i\ e^{i\phi}d\phi => |\int\limits_{\gamma_R} e^{iz^2}dz| \leqslant R\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 sin2\phi}d\phi \leqslant R\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{\pi}{4}\phi}d\phi = -R\frac{\pi}{4R^2}e^{-R^2\frac{4}{\pi}\phi}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{R^2} \to 0)$, при $R \to 0$.

3) $\int\limits_{e} e^{iz^2}dz = |z \underset{0\leqslant t\leqslant R}{=} te^{i\frac{\pi}{4}}| = -\int\limits_0^R e^{it^2e^{i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}dt = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^R e^{-t^2}dt \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} -e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Переходя к пределу, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}dx - \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 0 \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} cosx^2dx = \int\limits_0^{+\infty} sinx^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

1.44 Логарифмический вычет

Пусть в области D задана функция f регулярная за исключением конечного числа изолированных особых точек, являющихся полюсами $a_1, a_2, \ldots, a_\phi$. Составим функцию $lnf(z)$.

Функцию $\phi(z) ::= (lnf(z))' = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ назовем **логарифмической производной функции** f. Вычеты функции $\phi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ относительно ее особых точек будем называть **логарифмическими вычетами** f.

Какие же точки могут быть особыми для ϕ? Нетрудно видеть, что таковыми будут нули и полюса функции f. Других особых точек быть не может. Исследуем эти точки:

1. Пусть точка $z = b \in D$ является нулем кратности n для функции f. Тогда f в некоторой окрестности точки b, т.е. в $B(b, 0, \zeta)$ можно представить в виде

$$f(z) = (z-b)^n g(z)$$

где g-голоморфна в $z = b$ и $g(b) \neq 0$.

Тогда $g(z) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки b (нам известно, что нули голоморфной функции изолированы). Поэтому, в $B(b, 0, \zeta)$

$$lnf(z) = nln(z-b) + lng(z)$$

$$\phi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-b} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

где $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ регулярна в $B(b, 0, \zeta)$ и ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки b не будет содержать главной части. Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-b} + C_0 + C_1(z-b) + C_2(z-b)^2 + \dots$$

Отсюда следует, что

$$\underset{z=b}{res}\frac{f'(z)}{f(z)} = n$$

т.е. в нуле кратности n логарифмическая производная голоморфной функции f имеет полюс первого порядка и логарифмический вычет f равен кратности нуля.

2. Пусть $z = a$ - полюс порядка p функции f, тогда

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^p}$$

$\psi(z)$ регулярна в а и $\psi(a) \neq 0 \Rightarrow \psi(a) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки а.

$$lnf(z) = -p\,ln(z-a) + ln\psi(z)$$
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \quad \Rightarrow \quad \underset{a}{res}\frac{f'(z)}{f(z)} = -p.$$

Таким образом, в полюсе порядка р логарифмическая производная функции f имеет простой полюс и логарифмический вычет в этом полюсе равен порядку полюса с обратным знаком.

1.45 Принцип аргумента

В дальнейшем, если не оговорено противное, условимся каждый нуль и полюс считать столько раз, каков его порядок и употреблять в этом случае выражения "полное число нулей"и "полное число полюсов".

Теорема. *Пусть f голоморфна в односвязной замкнутой области D за исключением конечного числа полюсов $a_1, a_2, ...a_k$ порядков $p_1, p_2, ...p_k$ соответственно. Пусть $b_1, b_2, ...b_m$ - нули функции f, порядки которых $n_1, n_2, ...n_m$ соответственно.*
Если f не имеет ни нулей, ни полюсов на границе ∂D области D, то $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$

где $N = \sum\limits_{j=1}^{m} n_j$ - полное число нулей, а $P = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j$ - полное число полюсов, а ∂D обходится в положительном направлении.

♦ Интеграл теоремы может быть вычислен с помощью основной теоремы о вычетах

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_k res_{z_k}\frac{f'(z)}{f(z)}$$

где z_k — особые точки подинтегральной функции. Учитывая результаты исследования предыдущего пункта, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n_1 + n_2 + ... + n_m - p_1 - p_2 - ... - p_k = N - P$$

■

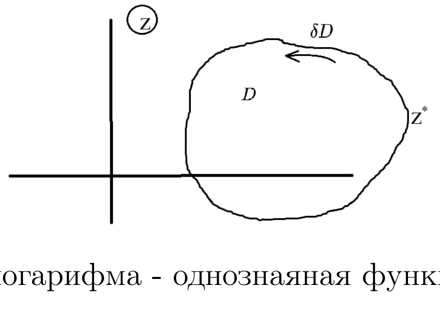
Замечание. Теорема имеет место и для неодносвязной области.

Доказанной теореме можно дать удобную геометрическую трактовку.

Представим $f(z) = Re^{i\Phi}$, где $R = |f(z)|$, $\Phi = \arg f(z)$ тогда $\ln f(z) = \ln R + i\Phi$
Поэтому $d\ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}dz = d\ln R + id\Phi$ и , следовательно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} d\ln R + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} d\Phi = N - P$$

Рассмотрим каждый из интегралов в отдельности



Выберем на ∂D произвольным образом точку z^+, каждую будем считать начальной точкой при интегрировании. Она же будет и конечной.

Функция f на ∂D регулярна, а значит, однозначна. Она не имеет на ∂D ни нулей, ни полюсов. Следовательно, однозначной будет и функция $\ln R = \ln|f(z)|$, так как это уже взята главная ветвь логарифма - однозначная функция.

$ln|f(z)|$ - непрерывна на контуре ∂D в силу указанных выше обстоятельств. В силу непрерывности $\int\limits_{\partial D} dln|f(z)|$ можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, а в силу однозначности, при обходе контура ∂D точкой z функция $ln|f(z)|$ возвращается к первоначальному значению.

Таким образом, получаем:

$$\int\limits_{\delta D} d\ln R = \int\limits_{\delta D} d\ln|f(z)| = \ln|f(z)|\Big|_{z^*}^{z^*} = 0$$

Величина же $\Phi = \arg f(z)$ может при обходе контура ∂D измениться. Обозначим изменение аргумента при обходе контура ∂D через $\Delta_{\partial D}\arg f(z)$

тогда

$$\int\limits_{\delta D} d\phi = \int\limits_{\delta D} d\arg f(z) = \phi_1 - \phi_2 = \Delta_{\delta D}\arg f(z).$$

И тогда равенство из теоремы можно записать в следующем виде

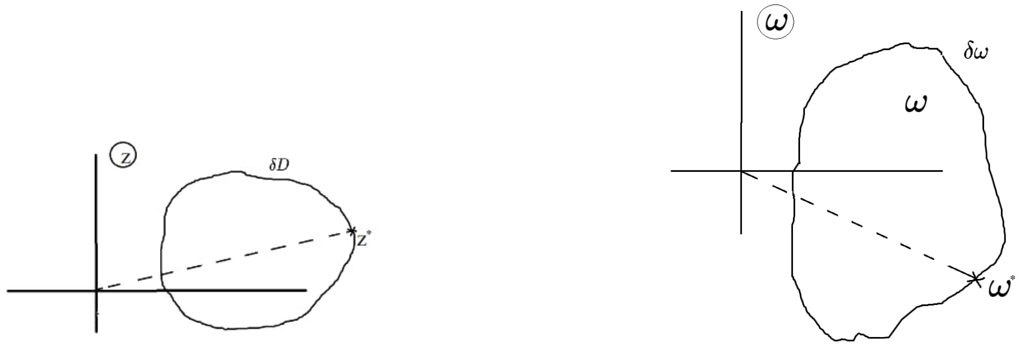
$$\boxed{N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg f(z)}$$

Это равенство и называют принципом аргумента.

В условиях теоремы разность между полным числом нулей и полным числом полюсов функции f в области D равна деленому на 2π изменению аргумента этой функции при обходе точкой z граница области ∂D в положительном направлении.

Замечание. Принцип аргумента имеет место и в случае, когда $f(z)$ голоморфна в D за исключением конечного числа полюсов и непрерывна в $\overline{D}$.

Изучим геометрический смысл принципа аргумента.



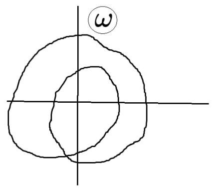
Т.к. f непрерывна в $\overline{D}$, то образом области D при отображении $\omega = f(z)$ является некоторая область в плоскости ω. При этом $\partial D \to \partial\omega$.

При этом возможны два случая:

1. точка $\omega = 0 \notin \omega$ Проследим в этом случае за изменением $\arg f(z) = \arg\omega$. Это изменение определяется числом полных оборотов вектора $o\omega$ при полном обходе точкой z контура ∂D. Нетрудно видеть, что в этом случае $\Delta_{\partial D}\arg f(z) = \Delta_{\partial D}\arg\omega = 0$, то есть $N = P$.
   Если известно о f чуть больше, скажем, что она голоморфна в D, то сразу же следует, что и нулей у неё в этом случае в D нет.

2. точка $\omega = 0 \in D$

   Тогда $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg \omega$ даёт полное число обротов, которое совершает вектор $o\omega$ при обходе контура $d\omega$, то есть $N-P$ показывает изменение $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg f(z)$



Движение может быть как в положительном, так и в отрицательном направлении. Это зависит от свойств f. На рисунке $N - P = 2$

1.46 Теорема Руше

Соображения, восказанные в предыдущем пункте, часто оказывается удобными при подсчёте полного числа нулей функции f регулярной в заданной области, на основании вышеизложенного, если f голоморфна в $\overline{D}$, то

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\delta D} \arg f(z)$$

Однако во многих случаях вычисления можно упростить, используя следующую теорему:

Теорема Руше. *Пусть функция f и g регулярны в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$, причём на границе ∂D этой области выполняется $|f(z)| > |g(z)|$.*
Тогда полное число нулей функции f в области D равно полному числу нулей функции $f + g$ в этой области

♦ Так как $|f(z)| > |g(z)| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(z)$ не обращается в 0 на ∂D.

Так как $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \quad \Rightarrow \quad f + g$ не обращается в 0 на ∂D.

Применим к f принцип аргумента

$$N_f = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg f(z)$$

Сделаем то же для функции $f + g$
$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg(f(z)+g(z)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg f(z)(1+\frac{g(z)}{f(z)}) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg f(z)+\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg(1+\frac{g(z)}{f(z)}) = N_f + \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg(1 + \frac{g(z)}{f(z)})$

Теперь осталось показать, что последнее слагаемое равно 0. Для этого рассмотрим функцию

$$\omega = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

$$\omega - 1 = \frac{g(z)}{f(z)} \quad \Rightarrow \quad |\omega - 1| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$$

то есть $|\omega - 1| < 1$.

Это неравенство говорит о том, что приобходе точкой z контура ∂D точка $\omega = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ описывает замкнутую кривую ∂G, целиком лежащую в круге $B(1, 1)$, то есть контур не охватывает точку $\omega = 0$, то есть $\omega = 0 \notin G$. Тогда на основании принципа аргумента

$$\Delta_{\partial D} \arg(1 + \frac{g(z)}{f(z)}) = 0$$

окончательно $N_f = N_{f+g}$ ■

1.47 Следствие: Основная теорема алгебры

Теорема
Всякий многочлен $P_n(z) = C_n z^n + C_{n-1}z^{n-1} + \cdots + C_1 z + C_0,\ C_n \neq 0$, степени n с комплексными коэффициентами имеет в компактной плоскости ровно n косплексных корней.

Доказательство. Представим $P_n(z)$ в виде $P_n(z) = f(z)+g(z)$, положив $f(z) = C_n z^n,\ g(z) = C_{n-1}z^{n-1} + \cdots C_0$. Так как $\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{C_{n-1}}{C_n} \cdot \frac{1}{z} + \cdots + \frac{C_0}{C_n} \cdot \frac{1}{z^n} \longrightarrow_{z\to\infty} 0$, то $\exists R_0$ такое, что $\forall z,\ |z| \geqslant R_0 \Rightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \leqslant 1$. Возьмём некоторое $R > R_0$. Тогда для $\forall z \in S(0,R) \Rightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \Rightarrow |f(z)| > |g(z)|$

На основании теоремы Руше $N_{P_n} = N_f$. Но $f = a_n z_n$ имеет в круге $B(0,R)$ n нулей, поэтому полное число нулей функции $f+g = P_n(z)$ также равно и в круге $B(0,R)$, а вне круга $P_n(Z)$ не может иметь нулей в силу неравенства $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$. ■

Пример 1. Найти число нулей функции $F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ в круге $B(0,1)$. $f = -4z^5;\ g = z^8 + z^2 - 1;$ на $S(0,1):\ |f(z)| = 4,\ g(z) \leqslant 3 \Rightarrow |f| > |g|$. Так как $N_f = 5 \Rightarrow N_F = 5$.

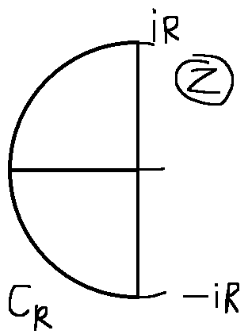
Пример 2. $F(z) = z^8 + 6z + 10$ в $B(0,1)$

$$f = 10,\ g = z^8 + 6z;\ |f| = 10,\ |g| \leqslant 7 \Rightarrow N_F = 0.$$

Пример 3. $F(z) = z^5 + z^2 + 1$ в $B(0,2)$

$$f = z^5;\ g = z^2 + 1;\ |f| = 2^5;\ |g| \leqslant 5 \Rightarrow N_F = 5.$$

Пример 4. Показать, что в полуплоскости $Re\, z < 0$, уравнение $z + \lambda - e^z = 0,\ \lambda > 1$, имеет единственный корень.



Построим замкнутый контур C_R (см. рисунок). Положим $f(z) = z + \lambda,\ g(z) = -e^z$. На отрезке $[-iR, iR]$ имеем

$$\left.\begin{array}{r}|f(z)| = |\lambda + z| = |\lambda + iy| \geqslant \lambda > 1\\ |g(z)| = |e^{iy}| = 1\end{array}\right\} \Rightarrow |f| > |g|$$

По теореме Руше $N_f = N_g + f$. Так как $N_f = 1,\ (z = -\lambda$, то и исходное уравнение в области, ограниченной контуром C_R, имеет один корень. Ясно, что больше корней быть не может, так как $|f| > |g|$ выполняется для ... /дальше текста не видно. Решите сами, упражнение для читателя/

1.48 Определение конформного отображения

При определении геометрического смысла модуля и аргумента производной ФКП было дано определение конформного отображения.

Определение
Взаимно однозначное отображение области D комплексной плоскости Z на области из комплексной плоскости W называется конформным, если это отображение во всех точках $z \in D$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Слова "взаимно однозначное отображение"означают, что f — биекция, то есть отображение должно быть однозначным (каждому z отвечает только одно w) и инъективным: различным z_1 и z_2 соответствуют и различные w_1 и w_2. Инъективные отображения в т ФКП, как мы уже знаем,называют однолистными, и мы эту терминология тоже сохраним.

Если внимательно проанализировать определение, то можно сделать вывод, что конформное отображение — это отображение, сохраняющее формы малых фигур.

В этой же лекции (о геометрическом смысле производной) было показано, что если функция $w = f(z)$ является однозначной (в дальнейшем рассматривать будем только однозначные функции) однолистной голоморфной в точке z_0, причём $f'(z_0) \neq 0$, то отображение осуществляемое функцией f будет конформным в окрестности точки z_0.

Угол между двумя любыми гладкими кривыми, проходящими через точку z_0 при отображении $w = f(z)$ не меняется ни по величине, ни по направлению отсчёта, а линейные элементы в точке z_0 преобразуются подобным образом.

Отметим, простейшие свойства конформных отображений, вытекающих непосредственно из определения и свойств однолистных и обратных функций.

Свойства:

1. Отображение, обратное к конформному, также является конформным.
2. Композиция двух конформных отображений представляет собой конформное отображение.
3. Функция f, осуществляющая конформное отображение области D на область W может иметь в качестве особой точки не более одного полюса в D.

Понятие конформности отображения вводится и для бесконечно удалённой точки.

Углом между кривыми γ_1 и γ_2, **проходящими через точку** $z = \infty$, называется угол между образами этих кривых при отображении $\xi = \frac{1}{z}$ в точке $\xi = 0$.

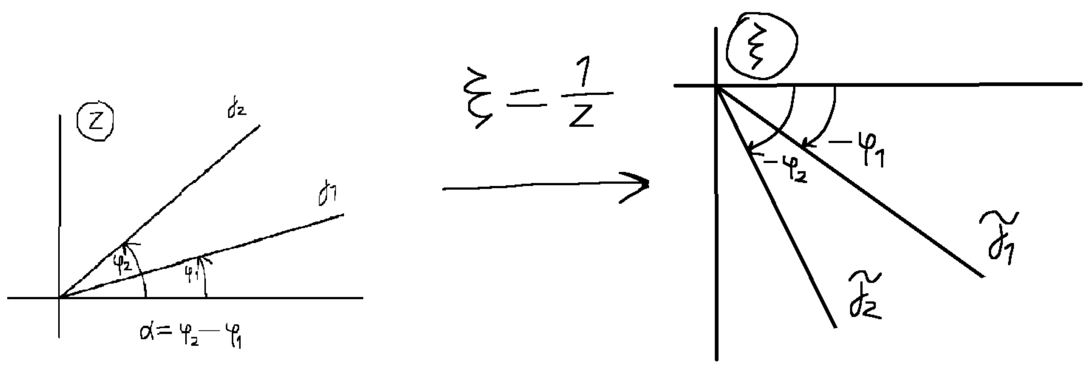
Из этого определения и определения конформного отображения вытекает, что отображение $w = \frac{1}{z}$ сохраняет углы между кривыми в каждой точке расширенной комплексной плоскости.

Под конформностью в бесконечно удалённой точке ($z_0 \to \infty$ или $\infty \to w_0$ понимают отображение, которое только сохраняет углы между кривыми.

Отображение $w = \frac{1}{z}$ конформно во всех точках расширенной комплексной плоскости.

Пример. Пусть два луча выходят из одной и той же конечной точки z_0. Тогда угол между этими лучами в точке $z = \infty$ равен углу в точке z_0, взятому с обратным знаком.

Действительно, для простоты ограничимся случаем $z_0 = 0$.



Угол между $\tilde{\gamma}_2$ и $\tilde{\gamma}_1$ в точке $\xi = 0$ равен $(-\phi_2) - (-\phi_1) = -(\phi_2 - \phi_1) = -\alpha$

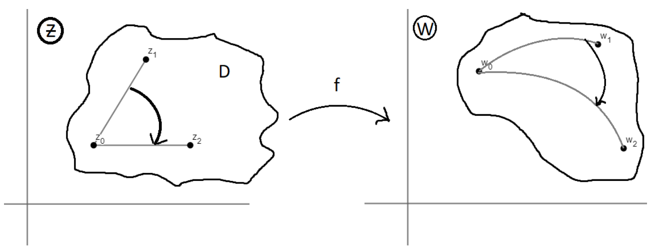
1.49 Необходимое и достаточные условия конформности

Достаточные условия конформности (Нам уже известны)

Если функция $w = f(z)$ является однозначной и однолистной голоморфной функцией в области D и $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$, то отображение $w = f(z)$ конформно в области D

Необходимые условия конформности *Пусть функция $w = f(z)$ осуществляет конформные отображения области D комплексной плоскости z на область из комплексной плоскости w и ограничена в D. Тогда функция $f(z)$ является однолистной и голоморфной в D, причем $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$*

Доказательство. Поскольку отображение конформно, то функция $w = f(z)$ однозначна и однолистна.



Возьмём две точки z_1 и z_2 в области D, лежащей в некоторой окрестности фиксированной точки z_0:

$$z_0 : \ z_0 \xrightarrow{f(x)} w_0, \ z_1 \xrightarrow{f(x)} w_1, \ z_2 \xrightarrow{f(x)} w_2$$

Так как отображение конформно, что углы между кривыми сохраняются.

Следовательно, $arg\Delta z_2 - arg\Delta z_1 = arg\Delta w_2 - arg\Delta w_1$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка чем Δz

$$(\text{Здесь } \Delta z_1 = z_1 - z_0, \ \Delta z_2 = z_2 - z_0, \ \Delta w_1 = w_1 - w_0, \ \Delta w_2 = w_2 - w_0)$$

отсюда следует, что:

$$arg\Delta w_2 - arg\Delta z_2 = arg\Delta w_1 - arg\Delta z_1$$

или

$$arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} =:: \alpha$$

Причём равенство справедливое с точностью до бесконечно малых более высокого порядка чем Δz.

В силу же постоянства растяжений:

$$\frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} = \frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} =:: k \neq 0$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка чем Δz. Поэтому, объединяя, получим:

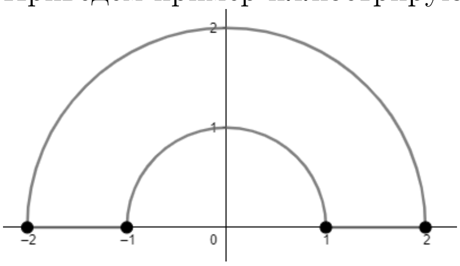
$$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} =:: k \cdot e^{i\alpha} \neq 0$$

В силу произвола выбора точек z_1, z_2 отсюда следует, что $\frac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha} + o(\Delta z)$ это означает что что проведенное рассуждение годится для $\forall z_0 \in D$, значит f - голоморфна в D и $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$ ■

Замечание 1. Следует отметить, что условие голоморфности f с $f(z) \neq 0$ являются необходимыми, но недостаточными условиями голоморфности.

Если f голоморфна и $f'(z) \neq 0$, но f неоднолистна, то отображение f не является конформным.

Приведём пример иллюстрирующий это утверждение:



Функция $w = z^4$ заданная в полукольце $1 \leq z \leq 2,\ 0 \leq arg\, z \leq \pi$. Функция голоморфна: $w' = 4z^3 \neq 0$. Функция отображает полукольцо на кольцо $B(0,\ 1,\ 16)$, $0 \leq arg\, w \leq 4\pi$. Нарушается взаимно-однозначное и, следовательно, отображение не может быть конформным.

Замечание 2. Поскольку отображение $w = \frac{1}{z}$ комфортно в точке $z = 0$, а композиция конформных отображений конформно, то если функция $w = f(z)$ даёт конформное отображение, то $w = f(\frac{1}{z})$ тоже комфортно. Это говорит о том, что функция дающий конформное отображение области D на область G должна быть голоморфной в области D за исключением может быть особой точки, в которой может быть полюс первого порядка.

1.50 Принцип взаимно-однозначного соответствия

Теорема *Пусть функция $w = f(z)$ является однозначной и голоморфной в области D и осуществляет взаимно-однозначное отображение области D на область G. Тогда это отображение будет конформным в области D*

Доказательство. Следует показать, что f - однолистная функция и $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$. Однолистность следует из того, что f - взаимно-однозначная, то есть биекция.

Докажем, что $f'(z) \neq 0$ в D.

Предположим от противного, что $\exists z_0 \in D$, что $f'(z_0) = 0$. Так как f голоморфна в D, то её разложение в ряд по степеням $z - z_0$ имеет вид:

$$f(z) = c_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + ..., \text{ где } k > 1 \text{ и } c_k \neq 0$$

Точка z_0не может быть предельной точкой нулей функции $f'(z)$, так как нули голоморфной функции изолированны, а $f'(z) \neq const$, в силу условий теоремы. Поскольку z_0 изолированный ноль функции $f'(z)$, то:

$$\exists \delta_1 > 0,\ f'(z) \neq 0,\ \forall z \in \overline{B}(z_0, 0, \delta_1)$$

Рассмотрим функцию $\phi(z) ::= c_k + c_{k+1}(z - z_0) + ...$ Так как $c_k \neq 0$, то в силу непрерывности функции $\phi(z)$:

$$\exists \delta_2,\ \phi(z) \neq 0,\ \forall z \in \overline{B}(z_0, \delta_2)$$

Обозначим $\delta ::= min\,\{\delta_1, \delta_1\}$

Тогда в кольце $\overline{B}(z_0, 0, \delta)$ одновременно выполняются оба условия, то есть $f'(z) \neq 0$ и $\phi(z) \neq 0$.

Обозначим $m ::= \min\limits_{z \in S(z_0, \delta)} |(z - z_0)^k \phi(z)| > 0$

Возьмем произвольное комплексное число α, удовлетворяющее условию $|\alpha| < m$. Тогда функции $(z - z_0)^k \phi(z)$ и $((z - z_0)^k \phi(z) - \alpha = f(z) - c_0 - \alpha$ голоморфны в замкнутом круге $\overline{B}(z_0, \delta)$ и на его границе $S(z_0, \delta_2)$ удовлетворяют условию:

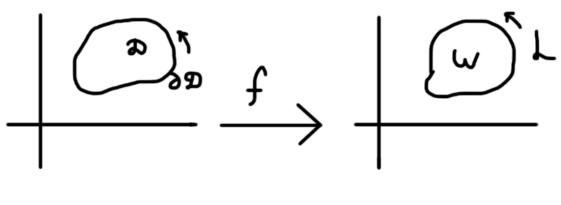
$$|(z - z_0)^k \phi(z)| \geq m > |\alpha|$$

На основании теоремы Руше функции $(z - z_0)^k \phi(z)$ и $f(z) - c_0 - \alpha$ имееют в круге $B(z_0, \delta)$ одинаковое число нолей, а именно, к нолей, а именно, к нолей где $k > 1$. То есть: уравнение $f(z) - c_0 - \alpha$ имеет k корней в круге $B(z_0, \delta)$, причём все эти корни простые, так как $z = z_0$ не является корнем этого уравнения, а $f'(z) \neq 0$ во всех точках $B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Это означает, что в различных точках круга $B(z_0, \delta) \subset D$ функция f принимает одно и то же значение а именно $c_0 + \alpha$, что противоречит условию взаимной однозначности отображения $f:\ D \to G$. ∎

1.51 Принцип соответствия границ

При решении конкретных задач на конформные отображения чаще всего достаточно выяснить, во что переходят при отображении границы и не обязательно исследовать все внутренние точки. Это возможно в силу так называемого **принципа соответствия границ:**

Пусть в конечной области D, ограниченной простым замкнутым контуром ∂D, задана голоморфная функция $w = f(z)$, непрерывная в $\overline{D}$, которая осуществляет взаимно-однозначное отображение контура ∂D на некоторый контур L комплексной плоскости ⓦ. Если при этом сохраняется направление обхода контуров, то f конформно отображает область D на область G, ограниченную контуром $L = \partial G$.



Доказательство. Воспользуемся принципом взаимно-однозначного соответствия. Тогда для доказательства теоремы достаточно показать, что f устанавливает взаимно-однозначное соответствие между областями D и G, т.е.:

1. Каждому $z \in D$ f ставит в соответсвие некоторую точку $w \in G$
2. Для каждого $w_1 \in G$ найдется единственная точка $z_1 \in D$ такая, что $f(z_1) = w_1$.

Возьмем 2 произвольные точки, $w_1 \in G$ и $w_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и построим в области D две функции:

$$F_1(z) = f(z) - w_1, z \in D$$

$$F_2(z) = f(z) - w_2, z \in D$$

Посчитаем число нулей для этих функций в области D. Для этого воспользуемся принципом аргумента. Отметим сначала,что F_1, F_2 не обращаются в ноль на контуре ∂D, т.к. при $z \in \partial D$ точка $w = f(z) \in L$, а мы взяли $w_1 \in G$ и $w_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$

$$N_{F_1} = N_{f-w_1} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\ arg(f(z) - w_1) = \frac{1}{2\pi}\Delta_L\ arg(w - w_1) = 1$$

$$N_{F_2} = N_{f-w_2} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\ arg(f(z) - w_2) = \frac{1}{2\pi}\Delta_L\ arg(w - w_1) = 0$$

Из первого соотношения получаем, что уравнение $f(z) = w_1$ имеет лишь один корень, т.е. $\exists! z \in D$, такая, что $f(z) = w_1$.

Второе соотношение показывает, что уравнение $f(z) = w_2$ не имеет корней в области D, следовательно, у точки w_2 нет прообраза в D, т.е. $\{f(z) | z \in D\} \subset G$

Все это вместе и означает биекцию, и по предыдущему пункту f конформно. ∎

Замечание 1. Если f регулярна в D за исключением точки z_0, в которой она имеет простой полюс, и $\partial D \to \partial G$ с изменением направления обхода, то D отображается конформно на внешность ∂G.

Замечание 2. Имеет место и такое утверждение:

Если f отображает конформно D в G, а D, G – конечные области(граница G не содержит бесконечно удаленную точку), то f непрерывна на ∂D и осуществляет непрерывное и взаимно-однозначное соответствие между точками контуров, причем направление обхода сохраняется.

Замечание 3. Теорема имеет место и в случае, когда D и G – неограниченные области.

1.52 Оригинал и изображение

Преобразование Лапласа возникло из так называемого символического исчисления, которое было ещё популярным в прошлом веке. В его основе лежали формальные операции над символом $p = \dfrac{d}{dt}$. Например. положительная степень n символа p означала $n-$ую производную функции $p^n \cdot x = \dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$, а отрицательная степень - интеграл:

$$\frac{1}{p}x = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$$

Применение этого символа к функции $x(t) \equiv 1$ приводит к равенствам:

$$\frac{1}{p} \cdot 1 = \int\limits_0^t dt = t; \frac{1}{p^2} = \int\limits_0^t \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2}, ..., \frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$$

Популяризовал его инженер-электрик Оливер Хевисайд. Как оно применялось практически? К примеру, уравнение $\frac{dx}{dt} - x = 1$ с условиями $x(0) = 0$ заменялось символическим уравнением $px - x = 1$. Отсюда $x = \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + ... + \frac{1}{p^n} + ...) =$ $\int\limits_0^t (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!} + ... + \frac{\tau^n}{n!} + ...)d\tau = \int\limits_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1.$

Можете проверить, что ответ получится правильным.

Метод работы над символом p не обосновывался, но иногда приводил к неверным результатам. Лишь в 20-ые годы 20-го века математикам надоело такое положение вещей и метод получил обоснование в работах Бромвича и Карсона и стал называтся операционным методом.

Суть его в том, что дифференцирование и интегрирование заменяются алгебраическими операциями, диффиренциальные уравнения — алгебраическими и т.д.

Основан операционный метод на преобразовании Лапласа, которое ставит в соответствие функции $f(t)$ действительного переменного t функцию $F(p)$ комплексного переменного p с соотношения:

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt(1)$$

p — комплексный параметр, $p = x + iy$.

Интеграл в правой части (1) — интеграл Лапласа функции f, а функция $F(p)$ — преобразование Лапласа или первообразная по Лапласу. Иногда преобразованием Лапласа называют процесс нахождения функции F.

Мы будем пользоваться следующей терминологией: $f(t)$ — оригинал, $F(p)$ — изображение. Для обозначения того, что F изображение оригинала f употребляются записи $F(p) \to f(t), F(p) \to Lf(t), f(t) = L^{-1}F(p), F(p) \dot{\to} f(t)$. Мы будем использовать:

$$f(t) \risingdotseq F(p), F(p) \risingdotseq f(t)$$

Примеры:

1. $f(t) = 1,\ F(p) = \int\limits_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pr}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$ Т.е. $1 \risingdotseq \frac{1}{p}.$

   Заметим, однако, что это верно, если $Re(p) = x > 0$. При $x \leq 0$ интеграл не существует. Однако, функция $\frac{1}{p}$ регулярна во всей области комплексного переменного p, за исключением $p = 0$ и её значения для $Re(p) < 0$ можем рассматривать как значения изображения $F(p)$ при $Re(p) < 0$. Тогда равенство $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$ будет иметь место $\forall p$ (аналогично тому, как мы рассматривали Γ функцию для отрицательных значений аргумента).

2. $f(t) = e^{t^2}$.

   Функция не имеет изображения, т.к. при достаточно больших t $e^{t^2} \cdot e^{-pt} > 1$. При действительных p и интеграл Лапласа расходится.

Примеры показывают, что изображение может существовать, а может и не существовать. Поэтому важно уметь выделять классы функций, являющихся оригиналами.

В операционном исчислении принято рассматривать функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $f(t)$ задана на R, причём $f(t) = 0, \forall t < 0$

2. $f(t)$ — кусочно-непрерывна на R, т.е. на любом конечном промежутке имеет не более конечного числа точек разрыва, причём только первого рода

3. При $t \to \infty$ функция f имеет ограниченную степень роста, т.е. существуют такие постоянные α и $M = M(\alpha)$, что $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t > 0$.

Точная нижняя грань всех α, для которых выполняется последнее неравнество, т.е. число $\alpha_0 = inf \alpha$ называется **показателем степени роста** f.

Отметим, что при $\alpha = \alpha_0$ неравенство может и не выполняться. Например, $f(t) = t$. $t \leq e^{\alpha t}, \forall \alpha > 0, \alpha_0 = 0, t \leq 1??$ — неверно. Однако, оно будет справедливым $\forall \alpha > \alpha_0$.

В дальнейшем эти условия, которые мы накладываем на f будет называть **О – условиями** и называние 'оригинал' употреблять только для функций, удовлетворяющих О — условиям. Хотя, как будет отмечено в дальнейшем, функция может быть оригиналом и не удовлетворять О – условиям. Дело в том, что для функций, удовлетворящим О — условиям, всегда существует изображение и оно обладает широким спектром свойств.

Пример. $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ не удовлетворяет О – условиям, однако, интеграл (1) сходится, т.е. $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ является оригиналом.

Таким образом, как мы покажем ниже, О – условия являются лишь достаточными условиями для существования изображения, но не необходимыми.

Эти условия хороши тем, что их выполнение гарантирует справедливость ряда теорем, составляющих основное содержание операционного исчисления.

В приложениях операционное исчисление используется главным образом для решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих некоторым начальным условиям. Т.к. за начальный момент всегда можно принять момент $t = 0$, а что происходит до начального момента, физиков чаще всего не интересует, то условие $f \equiv 0, t < 0$ не является обременительным, а условия 2, 3 для функций, используемых в приложениях, чаще всего выполняются.

Одной из простейших функций, удовлетворящющих О – условиям, является функция Хевисайда.

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{t} \geq 0 \\ 0 & \text{t} < 0 \end{cases}$$

Показатель роста $\alpha_0 = 0$. Изображение её, по сути, мы нашли в примере 1:

$$1(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$$

1.53 Достаточные условия существования изображения

Теорема. *Всякий оригинал $f(t)$, удовлетворяющий O — условиям, имеет изображение. Это изображение $F(p)$ есть фукнция регулярная в полуплоскости $Re(p) > \alpha_0$, где α_0 - показатель степени роста f.*

Доказательство. Пусть f — оригинал, удовлетворяющий O — условиям и α_0 — его показатель степени роста. Рассмотрим p такое, что $Re(p) > \alpha_0, p = x + iy$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $x = Re(p) > \alpha_0 + \varepsilon$. Тогда справедлива оценка:

$$|F(p)| = |\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt| \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}|f(t)|dt \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} M e^{(\alpha_0+\varepsilon)t}dt = M \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{(-x+\alpha_0+\varepsilon)t}dt = \frac{Me^{(-x+\alpha_0+\varepsilon)t}}{\alpha_0 - x + \varepsilon}\Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{x-\alpha_0-\varepsilon} (2)$$

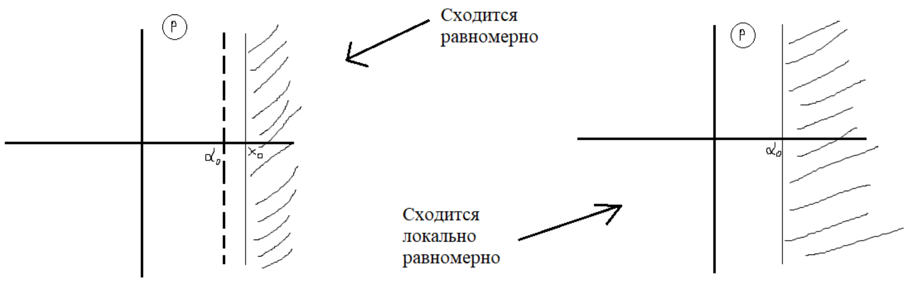
Из неравенства (2) вытекает, что функция $F(p)$ мажорируется абсолютно сходящимся интегралом, что означает сходимость, т.е. существование изображения $F(p)$.

Если же $x \geq x_0 > \alpha_0$, то согласно (2) приходим к оценке:

$$|F(p)| < \frac{M}{x_0 - \alpha_0 - \varepsilon} = \left[\varepsilon := \frac{x_0 - \alpha_0}{2}\right] = \frac{M_1}{x_0 - \alpha_0}$$

что означает равномерную сходимость интеграла Лапласа $\forall p$, удовлетворяющих условию $Re(p) \geq x_0 > \alpha_0$.

Другими словами, интеграл Лапласа сходится локально равномерно в полуплоскости $Re(p) > \alpha_0$



Далее разобъём $[0; +\infty)$ точками $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < ..., n \to \infty$ на отрезки $[t_{k-1}, t_k]$, на которых функция f непрерывна, и представим $F(p)$ в виде ряда:

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} F_k(p)$$

Этот ряд сходится локально равномерно в полуплоскости $Re(p) > \alpha_0$, т.к. там сходится локально равномерно соответствующий интеграл. Члены этого ряда являются функциями регулярными в этой полуплоскости. Действительно:

$$F'_k(p) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{F_k(p + \Delta p) - F(p)}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{1}{\Delta p} (\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)e^{-(p+\Delta p)t})dt - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)e^{-pt} =$$

$$= \lim_{\Delta p \to 0} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)e^{-pt} \frac{e^{-\Delta pt} - 1}{\Delta p} dt = \lim_{\Delta p \to 0} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)e^{-pt} \frac{-\Delta pt}{\Delta p} dt = -\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} tf(t)e^{-pt}dt$$ — есть непрерывная функция p. Это означает, что производная F'_k существует и непрерывна $\Rightarrow F_k$ регулярная функция p.

По теореме Вейерштрасса и сумма ряда будет функцией регулярной в $Re(p) > \alpha_0$ ■

Замечания

1. Можно показать, что если интеграл Лапласа сходится при $p = p_0$, то $F(p)$ — регулярна в полуплоскости $Re(p) > Re(p_0)$
2. Фукнцию $F(p)$ регулярную при $Re(p) > \alpha_0$ чаще всего можно аналитически продолжить на более широкую область. Обычно $F(p)$ оказывается регулярной во всей комплексной плоскости за исключением некоторого числа изолированных особых точек, причём все они лежат в полуплоскости $Re(p) \leq \alpha_0$
3. Из формулы (2) следует, что $|F(p)| \to 0$ при $Re(p) \to \infty$
4. Из теоремы следует, что не всякая функция $F(p)$ может служить изображением какой-либо функции, являющейся оригиналом. Например, $tg(p)$ имеет бесконечное множество полюсов $p_k = \dfrac{2k-1}{2}\pi$ и нельзя указать полуплоскости $Re(p) > \alpha$, где $tg(p)$ — изображение. Или $p, p^2, sqrt(p), sin(p)$ не изображения, т.к. не стремятся к нулю при $p \to \infty$
5. Преобразование Хевисайда: $F^*(p) = pF(p)$

1.54 Изображения некоторых функций

1) $1(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$

В дальнейшем под функцией $f(t)$ будем понимать функцию $1(t) \cdot f(t)$, т.е. равную нулю для $t < 0$ и равную $f(t)$ для $t > 0$. Для удобства $1(t)$ писать не станем.

2) *Экспонента* $f(t) = e^{at}$

Показатель степени роста, очевидно, $Re\ p > Re\ a$.
$\mathcal{F}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt = \dfrac{1}{p-a}, Rep > Rea$

$$e^{at} \risingdotseq \tfrac{1}{p-a},\ Re\ p > Re\ a.$$

3) *Степенная функция* $f(t) = t^\nu$, $\nu \in \mathbb{R}$

Показатель степени роста $\alpha_0 = 0$.

$\mathcal{F}(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^\nu e^{-pt}\,dt.$

Сначала предположим, что p - действительное. Тогда:

$\mathcal{F}(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^\nu e^{-pt}\,dt = \left[pt = \tau, dt = \frac{d\tau}{p}\right] = \frac{1}{p^{\nu+1}} \int\limits_0^{+\infty} \tau^\nu e^{-\tau}\,d\tau = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}},\ p > 0.$

Отметим, что $\mathcal{F}(p)$ существует для для $\nu > -1$, хотя $f(t) = t^\nu$, $\nu > -1$ и не удовлетворяет O - условиям.

Анализируя $\mathcal{F}(p)$, видим, что $\mathcal{F}(p)$ существует для $\forall p > 0$, т.е. $\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$ голоморфна для $\forall p > 0$. Такую функцию называют аналитическим продолжением $\mathcal{F}(p)$ с действительной оси и впоследствии мы покажем, что в такой ситуации формула справедлива для $\forall p$ таких, что $Re\ p > 0$. Итак:

$$t^\nu \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}},\ Re\ p > 0,\ \nu > -1$$

если $\nu = n \in \mathbb{N}$, то

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}},\ Re\ p > 0$$

1.55 Свойства изображений

1) Линейность изображения

Если

$$f_1 \risingdotseq \mathcal{F}_1,\ Re\ p > \alpha_1$$
$$f_2 \risingdotseq \mathcal{F}_2,\ Re\ p > \alpha_2,$$

то:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 \risingdotseq c_1 \mathcal{F}_1 + c_2 \mathcal{F}_2\ ,\ Re\ p > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

♦ Следует из линейности интеграла Лапласа ■

Примеры:

$$1)\ \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1}$$

$$2)\ \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}$$

$$3)\ \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$4)\ \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1}$$

2)Теорема подобия

Если

$$f(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p),\ Re\ p > \alpha_0 \text{ и } \lambda > 0$$

то:

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}\left(\frac{p}{\lambda}\right),\ Re\ p > \alpha_0 \lambda$$

$\blacklozenge \quad f(\lambda t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt}\, dt = \left[\lambda t = \tau, dt = \frac{d\tau}{\lambda} \right] = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p\tau}{\lambda}}\, d\tau = \frac{1}{\lambda} \mathbb{F}(\frac{p}{\lambda}) \quad \blacksquare$

Примеры:

1. $\cos \omega t \risingdotseq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\frac{p^2}{\omega^2}+1} = \frac{p}{p^2+\omega^2}$
2. $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
3. $\operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
4. $\operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}$

3) Теорема запаздывания

Если

$$f(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p),\ Re\ p > \alpha_0$$

то:

$$f(t-a) \risingdotseq e^{-pa}\mathcal{F}(p), \text{ где } f(t-a) \equiv 0,\ t < a$$

$\blacklozenge \quad f(t-a) \risingdotseq \int\limits_a^{+\infty} f(t-a) e^{-pt}\, dt = \left[t - a = \tau \right] = \int\limits_0^{+\infty} f(\tau) e^{-ap} e^{-p\tau}\, d\tau = e^{-ap}\mathcal{F}(p) \quad \blacksquare$

4) Теорема смещения

Если

$$f(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p),\ Re\ p > \alpha_0$$

то:

$$e^{\beta t} f(t) \risingdotseq \mathcal{F}(p-\beta),\ \beta \in \mathbb{C},\ Re\, p > \alpha_0 + Re\, \beta$$

$\blacklozenge \quad e^{\beta t} f(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{\beta t} e^{-pt}\, dt = \mathcal{F}(p-\beta) \quad \blacksquare$

5) Изображение производной

Если $f(t) \risingdotseq F(p), Rep > \alpha_0$ и $f'(t)$ *является оригиналом, то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0)$$

Доказательство. $f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt}\, dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt} & dv = f'(t)dt \\ du = -pe^{-pt}dt & v = f(t) \end{bmatrix} = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt = pF(p) - f(+0)$ $\blacksquare$

Следствие 1. Если $f^{(n)}(t)$ оригинал, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - p f^{(n-2)}(+0) - f(+0)$$

Формула доказывается по индукции.

В частности
$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - p f(+0) - f'(+0)$$

Следствие 2. $\lim\limits_{|p|\to\infty} pF(p) = f(+0)$

6) Интегрирование оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p),\ Rep > \alpha_0,$ то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau = \dfrac{F(p)}{p}, Rep > \alpha_0.$

Доказательство. $\phi(t) ::= \int\limits_0^t f(\tau)d\tau\alpha \geq 0$

$\phi(t)$- оригинал с тем же показателем роста , что и $f(t)$. Первые два условия очевидны. Третье:

$$|\phi(t)| \leq \int\limits_0^t |f(\tau)|d\tau \leq M \int\limits_0^t e^{\alpha\tau}d\tau = \frac{M}{\alpha} e^{\alpha\tau}\Big|_0^t \leq M_1 e^{\alpha t}$$

Обозначим $\Phi(p) = \phi(t),\ \phi(0) = 0$. Воспользуемся изображением производной

$$\phi'(t) = p\,\Phi(p) - \phi(+0)$$

т.к. $\phi(t) = f(t)$, получим

$$f(t) \risingdotseq F(p) = p\Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

■

Пример: $1 = \dfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\frac{1}{p}}{p} = \dfrac{1}{p^2}$

7) Дифференцирование изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p),\ Rep > \alpha_0$, то

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t),\ Rep > \alpha_0$$
$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t),\ Rep > \alpha_0$$

Поскольку F – регулярна, то возможно дифференцирование по правилу Лейбница.

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} (-t\ f(t))e^{-pt}dt = -tf(t)$$

Дальше по индукции.

Пример. $sint = \dfrac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad -sint = -\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$

8) Интегрирование изображения

Если $\dfrac{f(t)}{t}$-оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p), Rep > \alpha_0$, то $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(s)ds$, причем путь интегрирования лежит в полуплоскости $Rep \geq x_0 > \alpha_0$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{f(t)}{t} = J(p) = \int\limits_{f(t)}^{\tau} e^{-pt}dt.$$

$J(p)$ регулярна в $Rep > \alpha_0$, причем $J(\infty) = 0$.

По теореме о дифференцировании изображения

$$J'(p) = (-t)\frac{f(t)}{t} = -f(t).$$

Но $f(t) = F(p)$. Поэтому $J'(p) = -F(p)$

т.е. $I(p)$ -есть из первообразныхдля функции $-F(p)$, причем та, которая на ∞ обращается в нуль. Это означает, что

$$\int\limits_p^\infty (-F(s))ds = J(\infty) - J(p) = -J(p)$$

Отсюда следует:

$$J(p) = \int\limits_p^{+\infty} F(s)ds,$$

т.е.

$$\frac{f(t)}{t} = \int\limits_p^{+\infty} F(s)ds.$$

■

Пример:

1. $\dfrac{sint}{t} = \int\limits_p^{+\infty} \dfrac{ds}{1+s^2} = \dfrac{\pi}{2} - arctg\ p = arctg\ p$

2. $\int\limits_0^t \dfrac{sint}{t}dt = \dfrac{arctg\ p}{p}$

1.56 Свертка функций

Сверткой функций f и g на $[0, +\infty)$, обозначаемой $(f * g)$ называется функция

$$\phi(t) = (f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Свертка функций не зависит от порядка свертываемых функций f и g, т.е. $f * g = g * f$

$(f*g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = |t-\tau = u| = -\int\limits_t^0 f(t-u)g(u)du = \int\limits_0^t g(u)f(t-u)du = (g*f)(t)$

Таким образом, свертка функций симметрична

Лемма: *Если функции f и g являются оригиналами с показателями степени роста* α_0 и β_0 *соответственно, то их свертка также оригинал с показателем степени роста* $\gamma_0 = max\{\alpha_0, \beta_0\}$

Доказательство. Нам нужно проверить О-условия. Два первых очевидны.

Посмотрим третье.

$|(f*g)(t)| = |\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau| \leq \int\limits_0^t |f(\tau)|\cdot|g(t-\tau)|d\tau \leq \int\limits_0^t M_1e^{(\alpha_0+\epsilon_1)\tau}\cdot M_2e^{(\beta_0+\epsilon_2)(t-\tau)}d\tau =$

$M_1M_2e^{(\beta_0+\epsilon_2)t}\int\limits_0^t e^{(\alpha_0-\beta_0+\epsilon_1-\epsilon_2)\tau}d\tau = M_1M_2e^{(\beta_0+\epsilon_2)t}\dfrac{e^{(\alpha_0-\beta_0+\epsilon_1-\epsilon_2)\tau}}{\alpha_0-\beta_0+\epsilon_1-\epsilon_2}\Bigg|_0^t =$

$= \dfrac{M_1M_2}{\alpha_0-\beta_1+\epsilon_1-\epsilon_2}e^{(\beta_0+\epsilon_2)t}(e^{(\alpha_0-\beta_0+\epsilon_1-\epsilon_2)t}-1) = \dfrac{M_1M_2}{\alpha_0-\beta_0+\epsilon_1-\epsilon_2}(e^{(\alpha_0+\epsilon_1)t}-e^{(\beta_0+\epsilon_2)t}) \leq$

$$\leq \begin{cases} M_3e^{(\alpha_0+\epsilon_1)t}, \alpha_0 \geq \beta_0 \\ M_4e^{(\beta_0+\epsilon_2)t}, \alpha_0 < \beta_0 \end{cases}$$

Эта оценка и доказывает лемму. ■

Теорема Бореля(Изображения, свертки) *Если f и g оригиналы и $f \risingdotseq F, g \risingdotseq G$, то*

$$(f*g)(t) \risingdotseq F(p)\cdot G(p)$$

Доказательство. $\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int\limits_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau =$

$=$|изменяем порядок интегрирования|$= \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int\limits_\tau^{+\infty} e^{-pt}g(t-\tau)dt =$

$=$|По теореме запаздывания внутренний интеграл равен $e^{-p\tau}G(p)$|$=$

$= \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}G(p)d\tau = G(p)\cdot F(p)$ ■

Пример: найти оригинал по изображению

$\dfrac{p^2}{(1+p^2)^2}$; $\quad \dfrac{p}{1+p^2} = cost \Rightarrow$

$\dfrac{p^2}{(1+p^2)^2} = \int\limits_0^t cos\tau\cdot cos(t-\tau)d\tau = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^t(cost+cos(2\tau-t))d\tau = \dfrac{1}{2}(\tau cost+\dfrac{1}{2}sin(2\tau-t))\Bigg|_0^t =$

$= \dfrac{1}{2}(tcost+\dfrac{1}{2}sint+\dfrac{1}{2}sint) = \dfrac{1}{2}(tcost+sint)$

1.57 Интеграл Дюамеля

В приложениях операционного исчисления часто приходится иметь дело со случаем, когда изображения функций имеют вид $p(F(p)\cdot G(p))$, причем оригиналы для $F(p)$ и $G(p)$ известны. Оказывается, что с помощью оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ можно найти оригинал и для изображения $pF(p)\cdot G(p)$. Действительно, запишем это выражение в виде:

$pF(p)\cdot G(p) = f(+0)\cdot G(p) + (pF(p)-f(+0))G(p)$ или в виде
$pF(p)\cdot G(p) = g(+0)\cdot F(p) + (pG(p)-g(+0))G(p)$

На основании свойства "изображение производной"имеют место соотношения:

$$pF(p) - f(+0) = f'(t), pG(p) - g(+0) = g'(t)$$

Применяя теперь свойство линейности, теорему Бореля и учитывая, что симметричность свертки, получаем, что оригинал изображения $pF(p)G(p)$ можно представить в одном из четырех видов:

$pF(p) \cdot G(p) = f(+0)g(t) + \int\limits_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau$

$pF(p) \cdot G(p) = f(+0)g(t) + \int\limits_0^t g(t)f'(t-\tau)d\tau$

$pF(p) \cdot G(p) = g(+0)f(t) + \int\limits_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau$

$pF(p) \cdot G(p) = g(+0)f(t) + \int\limits_0^t f(t)g'(t-\tau)d\tau$

Эти формулы и называют интегралами Дюамеля.

1.58 Формула Меллина

Как найти изображение по оригиналу нам известно: следует вычислить интеграл Лапласа или воспользоваться свойствами изображения. Сейчас нас будет интересовать обратная задача: по заданному изображения найти оригинал.

1. Есть различные таблицы изображений, наиболее часто встречающихся в приложениях функций, так что при решении конкретных задач часто удается найти в справочнике оригинал для полученного изображения.

2. Приведенные ранее свойства в некоторых случаях позволяют решить и обратную задачу построения оригинала по известному изображению.

Однако это способы подбора и они не всегда применимы. Сейчас мы перейдем к изложению общего метода построения оригинала по изображению.

Теорема. *Пусть голоморфная функция F(p), заданная в области Rep $> \alpha_0$ является изображением кусочно-гладкой функции f(t), удовлетворяющий O-условиям с показателем роста α_0. Тогда имеет место формула:*

$$\text{f(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \qquad \text{x} > \alpha_0, \qquad (1)$$

называемая ***формулой Меллина.***

Доказательство. Отметим прежде всего, что кроме O-условий, *f(t)* предполагается кусочно-дифференцируемой.

Пусть x $> \alpha_0$,. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = e^{-xt}f(t)$$

Функция φ(t) - кусочно-непрерывная, поскольку таковой является *f(t)*. Кроме того, φ(t) - абсолютно интегрируема. Действительно, $|\varphi(\text{t})| = \text{e}^{-xt}|f(t)| \leq \text{M}e^{-xt}e^{(\alpha_0+\epsilon)t} = Me^{(-x-\alpha_0-\epsilon)t}$.

Выберем ϵ так, чтобы $x - \alpha_0 - \epsilon > 0$. Так как $x > \alpha_0$, то это всегда возможно. Тогда ясно, что $\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|dt$ существует.

В этих условиях $\varphi(t)$ можно представить интегралом Фурье.

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{iq(t-\tau)} d\tau, \qquad (2)$$

Причем в точках разрыва φ интеграл сходится к $\frac{\varphi(t_0+0)+\varphi(t_0-0)}{2}$.
Подставим в (2) $\varphi = e^{-xt} f(t), \quad x > \alpha_0$:

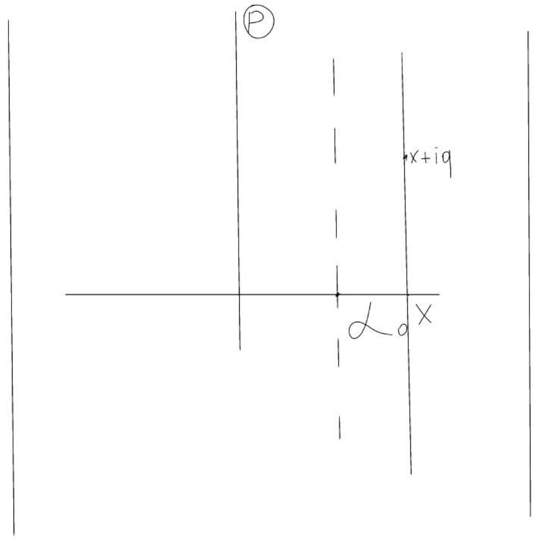
$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\tau} f(\tau) e^{iq(t-\tau)} d\tau = [f(\tau) = 0, \tau < 0] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} dq \int_{0}^{+\infty} f(\tau) e^{-(x+iq)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt} F(x+iq) dq.$$

Умножим обе части на e^{xt}:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iqt)} F(x+iq) dq =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+iqt)} F(x+iq) d(x+iq) = [x+iq = p] = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$



В интеграле q - действительное, меняется от -∞ до + ∞, то есть q пробегает всю действительную ось. При замене x+iq=p как будет меняться p?

iq пробегает мнимую ось, а $x + iq$ - вертикальная прямая, проходящая через точку x действительной оси, ■

Замечание 1. Интеграл в правой части формулы Меллина понимается как

$$\lim_{A\to\infty}\int_{x-iA}^{x+iA} e^{pt} F(p) dp$$

то есть в смысле главного значения. Это следует из того, что так понимается интеграл Фурье, который мы использовали.

Замечание 2. Левая часть ($f(t)$) в формуле Меллина не зависит от х, и все рассуждения теоремы справедливы для любого х $> \alpha_0$. Отсюда следует, что и стоящий справа в (1) интеграл Меллина также не зависит от х, то есть интегрирование можно вести по любой прямой, параллельной мнимой оси, и расположенной в полуплоскости $Rep > \alpha_0$.

Замечание 3. Формула Меллина определяет функцию $\tau(t)$ только в точках ее непрерывности, так как интеграл Фурье, используемый в доказательстве, сходиться к значению функции только в точках непрерывности.

Замечание 4. Из теоремы вытекает единственность. Если 2 оригинала $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ имеют одно и тоже изображение *F(p)*, то в точках непрерывности они совпадают, потому что они выражаются через *F(p)* с помощью одного и того же интеграла.

Следствие (изображение произведения). Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $Rep{>}\alpha_o$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, $Rep{>}\beta_0$. Тогда произведение *fg* также является оригиналом с показателем роста $\alpha_0 + \beta_0$ и имеет местро формула

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(q)G(p-q)dq = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} G(q)F(p-q)dq.$$

♦ f(t)g(t)=::h(t) удовлетворяет О-условиям и ее показатель роста равен $\alpha_0 + \beta_0$. Это очевидно. Изображение *h(t)* можно найти по формуле

$$f(t)g(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-pt}dt.$$

Заменим стояющую под интегралом функцию f по формуле Меллина:

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(q)e^{tq}dq =$$

= (поменям порядок интегрирования, что возможно а силу равномерной сходимости обоих интегралов) $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(q)dq \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}e^{qt}dt =$
$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(q)G(p-q)dq.$

Поменяя местами f *и* g, получим другую из формул, ■.

1.59 Условия существования оригинала

При выводе формулы Меллина мы предполагали, что *F(p)* является изображением некоторого оригинала, то есть теорема утверждает, что если *f(t)* является оригиналом и *F(p)* - его изображение и вдобавок *f(t)* кусочно-гладкая, то имеет место формула Меллина.

Что касается обратного утверждения, то у нас нет никаких оснований утверждать, что для произвольной функции *F(p)* функция *f(t)*, определяемая интегралом Меллина,будет удовлетворять условиям, налагаемым на оригинал и, следовательно, преобразованию Лапласа. Но если на *F(p)* наложить некоторые дополнительные условия, то это утверждение будет иметь место.

Следующая теорема дает достаточные условия того, что *F(p)* является изображением некоторог оригинала *f(t)*.

Теорема обращения. *Пусть F(p) удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$F(p)$ голоморфна в полуплоскости $Rep > \alpha_0$.*

2. *В области $Rep > \alpha_0$ равномерно относительно $argp \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \longrightarrow \infty$.*

3. *$F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой прямой $Rep = x, x > \alpha_0$, то есть сходится интеграл $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|dp$.*

Тогда при $Rep > \alpha_0$ функция F(p) является изображением функции f(t), определяемой интегралом Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \qquad x > \alpha_0 \qquad (*)$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что интеграл (*) существует. В силу условия 3):

$$|f(t)| = |\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |e^{(x+iy)t}||F(p)|dp \leq$$

$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{xt}|e^{iyt}||F(p)|dp \leq$ [В силу 3) последний интеграл сходится,$\exists M_1$]$\leq \frac{e^{xt}}{2\pi}\mathrm{M}_1 = Me^{xt}$.

Отсюда следует, что интеграл Меллина в данном случае сходится, причем $\forall t \in [0, \tau]$ сходимость равномерная.

Кроме того, полученная оценка говорит о том, что формула f(t) имеют ограниченную степень роста, которая равна α_0.

Для доказательства того, что определяемая по формуле (*) функция $f(t)$ является оригиналом, нам следует показать, что:

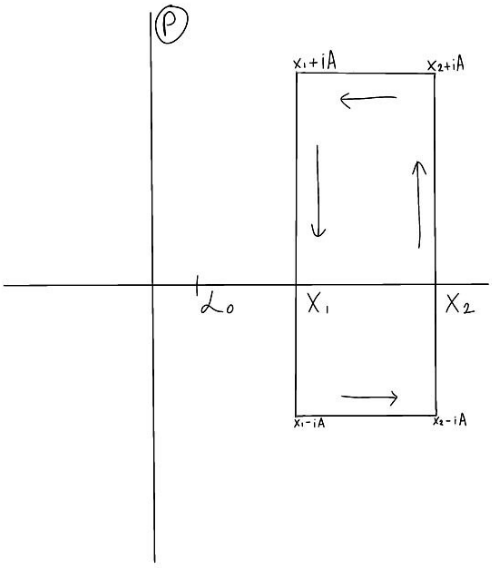
1. интеграл (*) не зависит от x и определяет только функцию t,

2. $f(t) \equiv 0$ для t < 0,

3. изображение $f(t)$ есть $F(p)$.

В таком порядке и будем доказывать.

1. Построим в $Rep > \alpha_0$ замкнутый контур Г, изображенный на чертеже. Здесь x_1, x_2 - произвольные различные действительные числа, $x_1 > \alpha_0, x_2 > \alpha_0$. A > 0, A - постоянная.



Так как функция $F(p)$ голоморфна в $Rep > \alpha_0$, то $F(p)e^{pt}$ также голоморфна и по теореме Коши $\int\limits_{\Gamma} e^{pt}F(p)\,dp = 0$

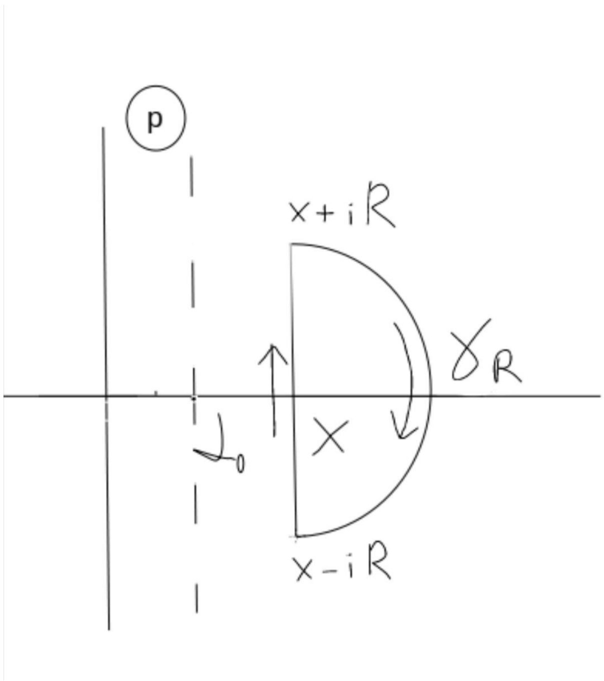
Устремим A к $+\infty$ при фиксированных x_1, x_2. В силу условия 2) теоремы интегралы по горизонатльным отрезкам стремятся к нулю, поэтому

$$\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

что в силу произвола в выборе x_1, x_2 означает, что интеграл (*) не зависит от x и определяет только функцию переменной t.

2. Покажем теперь, что $f(t) \equiv 0$ для $t < 0$.

   Построим закмнутый контур C_R, изображенный на чертеже, расположенный в $Rep > \alpha_0$.



По теореме Коши $\int\limits_{C_R} e^{pt}F(p)\,dp = 0$ для любого t, в частности и для отрицательных.

Этот интеграл запишем в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_{\gamma_R} e^{pt}F(p)\,dp + \int_{x-iR}^{x+iR} e^{pt}F(p)\,dp$$

Устремим R к бесконечности. К первому интегралу применима лемма Жордана при $t<0$:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} e^{pt}F(p)dp = 0$$

(t играет роль $\alpha, t=-\beta, \beta>0$, см. замечания к лемме Жордана)

Тогда

$$\lim_{R\to\infty}\int_{x-iR}^{x+iR} e^{pt}F(p)dp = \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp = 0 \Longrightarrow f(t)=0, \forall t<0$$

3. Осталось доказать, что изображение $f(t)$, определяемое формулой (*), и есть $F(p)$.

   Построим изображение этой функции и рассмотрим ее значение при некотором произвольном значении $p_0, Rep_0 > \alpha_0$.

$$f(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-p_0t}f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-p_0t}dt\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \otimes.$$

   Внутренний интеграл не зависит от x, поэтому выберем x так, чтобы выполнялось условие $\alpha_0 < x < Rep_0$ и поменяем порядок интегрирования, что возможно в силу равномерной сходимости интегралов.

   Получим:

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)dp\int_0^{+\infty} e^{-p_0-p}f(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{F(p)}{-p+p_0}dp =$$

$-2\pi i \ \dfrac{1}{2\pi i} \ \underset{p_0}{res} \ \dfrac{F(p)}{p_0 - p} = F(p_0)$

Возьмем контур из пукнта 2. и рассмотрим

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{F(p)}{p-p_0}dp = -F(p_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{x-iR}^{x+iR}\frac{F(p)}{p-p_0}dp - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R}\frac{F(p)}{p-p_0}dp$$

Второй интеграл стремится к 0 в силу условия 2) теоремы, а первый стремится к $F(p)$.

Таким образом, изображение Лапласа определяемой формулой (*) функции $f(t)$ в произвольной точке p_0 есть $F(p_0) \Longrightarrow f(t) \risingdotseq F(p)$

■

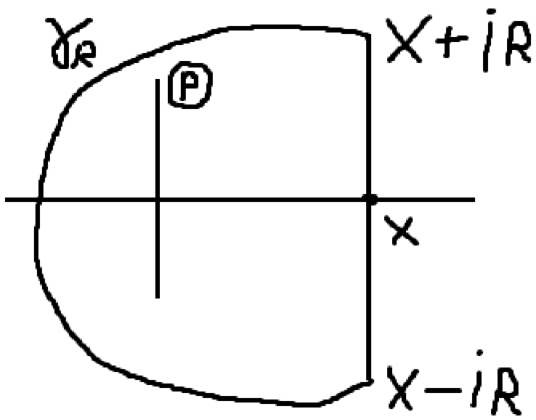
1.60 Вычисление интеграла Меллина

Будем вести разговор о том, как вычислить интеграл Меллина в случае, если известно, что $F(p)$ — изображение.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \quad x > \alpha_0, t > 0$$

Во многих случаях интеграл Меллина, дающий выражение оригинала через известное изображение, может быть вычислен с помощью вычетов.

Предположим, что функция $F(p)$, заданная первоначально в полуплоскости $Re(p) > \alpha_0$ аналитически продолжима на всю плоскость компактного переменного и имеет лишь конечное число изолированных особых точек.



Рассмотрим замкнутый контур $C_R = \gamma_R \cup [x-iR, x+iR]$ так, чтобы все особые точки попали в область, ограниченную контуром.

Тогда $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} e^{pt}F(p)dp = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} e^{pt}F(p)dp + \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-iR}^{x+iR} e^{pt}F(p)dp.$

Т.к. особых точек конечное число, то можно так подобрать R, что все они попадут внутрь контура C_R и тогда $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} e^{pt}F(p)dp = \sum\limits_{k=1}^{n} res_{p_k}(F(p)e^{pt}).$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ и учитывая, что при $F(p) \to 0$ к интегралу по γ_R можно применить лемму Жордана ($t > 0$) и $\int\limits_{\gamma_R} e^{pt}F(p)dp \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ (см. следствие к лемме Жордана), получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \sum_{k=1}^{n} res_{p_k} e^{pt}F(p) \text{ или } f(t) = \sum_{k=1}^{n} res_{p_k} e^{pt}F(p)$$

Результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема

Если функция $F(p)$ удовлетворяет условиям теоремы обращения, аналитически продолжима на всю плоскость (p), имеет при этом лишь конечное число изолированных особых точек $p_k, k = \overline{1,n}$ и $F(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$ для $Re(p) < \alpha_0$, то для $t > 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \sum_{k=1}^{n} res_{p_k} e^{pt}F(p)$$

Пример: Найти оригинал, если $F(p)\dfrac{1}{p^2(p^2-1)}$

Функция удовлетворяет всем условиям теоремы, особые точки $p = 0, p = \pm 1$.

$f(t) = res_{p=0}\dfrac{e^{pt}}{p^2(p^2-1)} + res_{p=1}\dfrac{e^{pt}}{p^2(p^2-1)} + res_{p=-1}\dfrac{e^{pt}}{p^2(p^2-1)} = (\dfrac{e^{pt}}{p^2-1})'_{p=0} + \dfrac{e^t}{2} + \dfrac{e^{-t}}{-2} = -t + sht$

1.61 Теоремы разложения

Будут рассмотрены частные случаи функции $F(p)$, когда определение оригинала по изображению производятся особенно просто.

I теорема разложения *Пусть $F(p)$ аналитически продолжима на всю плоскость комплексного переменного (p) и точка $p = \infty$ является правильной точкой для $F(p)$, т.е. $F(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{C_n}{p^n}$. Тогда оригинал для $F(p)$ определяется формулой $f(t) = 1(t)\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}(*)$.*

Доказательство. Т.к. $F(p) \xrightarrow[|p|\to\infty]{} 0 \Rightarrow C_0 = 0$ и $F(p) = \dfrac{1}{p}(C_1 + \dfrac{C_2}{p} + \dfrac{C_3}{p^2} + ...) = \dfrac{1}{p}\psi(p) \Rightarrow |F(p)| \le \dfrac{M}{R}$, для $|p| \ge R, M - const$.

Поэтому $|c_n| = |\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} F(p)p^{n-1}dp| \le \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_R}|F(p)||p|^{n-1}dp \le \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{M}{R}R^{n-1}2\pi R = M \cdot R^{n-1}, R - fix.$

Из этой оценки следует сходимость ряда $(*)$.

Действительно:

$$|\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\frac{t^n}{n!}| \le \sum_{n=0}^{\infty}|C_{n+1}|\frac{|t|^n}{n!} \le M\cdot\sum_{n=0}^{\infty}R^n\frac{t^n}{n!} = M\cdot e^{R|t|}$$

Отсюда вытекает абсолютная сходимость $\forall t$. Кроме того отсюда следует, что ряд $(*)$ представляет собой функцию с ограниченной степенью ряда и ряд $(*)$ сходится равномерно в любом круге конечного радиуса как степенной ряд, определяя тем самым непрерывную функцию.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\frac{t^n}{n!} =:: \widetilde{f}(t), \forall t$$

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} \sum C_{n+1}\dfrac{t^n}{n!} & t < 0 \\ f(t) & t > 0 \end{cases}$$

Осталось показать, что изображение $\widetilde{f}(t) \cdot 1(t)$ есть $F(p)$. Для этого умножим обе части на e^{-pt} и проинтегрируем по t в пределах от 0 до $+\infty$. Это можно сделать, т.к. ряд сходится равномерно (проинтегрировать почленно).

Получим: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{C_{n+1}}{n!} \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{C_{n+1}}{n!} \dfrac{n!}{p^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{C_{n+1}}{p^{n+1}} = F(p) \Rightarrow f(t) = F(p)$ ∎

II теорема разложения *Пусть $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$ — рациональная функция, т.е. частное двух многочленов, причём $degF_1 < degF_2$. В этом случае оригинал для $F(p)$ можно найти вычислив интеграл Меллина с помощью вычетов.*

Однако, ещё проще оригинал для $F(p)$ найти разложив дробь $F(p)$ на простейшие и воспользовавшись формулами, которые следуют из свойств оригиналов и изображений.

$$\frac{A}{p-\alpha} \risingdotseq B\frac{t^{n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!}$$

Выделим два случая:

1. Все корни знаменателя простые: $p_1, ..., p_n \Rightarrow f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} res_{p_k} \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{F_1(p_k)}{F_2(p_k)} e^{p_k t}$

2. Знаменатель имеет корни p_k кратности $m_k, k = \overline{1,l}$ (m_k все, либо некоторые могут быть равны и 1, т.е. пункт 1 выходит от сюда как частный случай). Тогда вычисляя интеграл Меллина с помощью вычетов приходим к формуле:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} res_{p_k} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} F(p)(p-p_k)^{m_k} e^{pt}$$

Можно использовать и другую формулу:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{A_{k\nu}}{(m_k-\nu)!} t^{m_k-\nu} e^{p_k t}$$

где $A_{k\nu} = \dfrac{1}{(\nu-1)!} \lim\limits_{p \to p_k} \dfrac{d^{\nu-1}}{dp^{\nu-1}} F(p)(p-p_k)^{m_k} e^{pt}$

1.62 Некоторые приложения операционного исчисления

1.62.1 Решение СТЛОД-n

Рассмотрим уравнение:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_n x = f(t) \qquad \mathbf{(1)}$$

с начальными условиями: $x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = \overline{0, ..., n-1}$

Здесь $a_1, ..., a_n, x_0, ..., x_{n-1}$ – заданные постоянные, f(t) – заданная функция t.

Если f(t) и $x^{(k)}(t)$ являются оригиналами, то для решения уравнения (1) применяют преобразование Лапласа.

Делается это следующим образом:

Обозначим $x(t) \risingdotseq X(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p)$

По свойству дифференцирования оригинала:

$x' \risingdotseq px(p) - x_0, \quad x'' \risingdotseq p^2x(p) - px_0 - x_1$

- -

$x^{(n)}(t) \risingdotseq p^nx(p) - x_0p^{n-1} - x_1p^{n-2} - ... - x_{n-2}p - x_{n-1}$

Поэтому, преобразуя (1) по Лапласу, получим:

$p^nx(p) - x_0p^{n-1} - x_1p^{n-2} - ... - x_{n-2}p - x_{n-1} + a_1(p^{n-1}x(p) - x_0p^{n-2} - ... - x_{n-2}) + ... + a_nx(p) = F(p)$

или

$$Z(p) * X(p) - \Psi(p) = F(p),$$

где $Z(p) = p^n - a_1p^{n-1} - ... - a_n$ — характеристический многочлен.

$$X(p) = \frac{F(p) + \Psi(p)}{Z(p)}$$

$\Psi(p)$ — многочлен степени, не превышающей n-1, зависящий от начальных условий.

После этого по изображению восстанавливается оригинал x(t), который и является решением:

$$x(t) \risingdotseq \frac{F(p) + \Psi(p)}{Z(p)}$$

Задача упрощается в случае нулевых начальных условий.

Здесь $\Psi(p) = 0$ и $X(p) = \frac{F(p)}{Z(p)}$

Примеры:

1. $x'' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 1 \ x(t) \risingdotseq X(p) \quad x'' \risingdotseq p^2X(p) - p - 1$

   $p^2X(p) - p - 1 - X(p) = \frac{1}{p^2} => X(p) = \frac{p+1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} \risingdotseq cos(t) + t$

2. $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$

   $p^2Y(p) - 4pY + 4Y = \frac{6}{(p-2)^4}$

   $Y(p) = \frac{6}{(p-2)^6} \risingdotseq \frac{6}{5!}x^5e^{2x} = \frac{x^5}{20}e^2x$

3. $x^{(4)} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

   $x(t) = -\frac{t^2}{2} - 1 + ch(t)$

Продемонстрированным выше способом среди всех решений мы находим частное нужное решение, в то время как при применении классических методов нужно сначала найти общее решение, а лишь потом частное, таким образом, данный метод облегчает нам работу.

Операционный метод позволяет также найти и общее решение, для чего достаточно считать, что $x_k = c_{k+1}, \quad k = \overline{0, 1, ..., n-1}$

Пример:

$x'' + 4x = 8sin(2t), \quad x(0) = C_1, \ x'(0) = C_2$

$p^2X(p) - pC_1 - C_2 - 4X(p) = \frac{16}{p^2+4}$

$X(p) = \frac{C_1p+C_2}{p^2+4} + \frac{16}{(p^2+4)^2} \risingdotseq C_1cos(2t) + \frac{C_2}{2}sin(2t) + sin(2t) - 2tcos(2t)$

1.63 Применение интеграла Дюамеля

Он чаще всего находит применение при решении СТЛОД-n с нулевыми начальными условиями

$$L[x] = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_n x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (1)$$

если известно решение этого уравнения y(t) с нулевыми же начальными условиями и правой частью(неоднородостью), равной 1.

$$L[y] = 1, \quad y^{(k)}(0) = 0, \ k = \overline{0, ..., n-1} \qquad (2)$$

Предполагая, что функции f(t),x(t),y(t) являются оригиналами, обозначая их изображения соответственно через F,X,Y, запишем (1) в операторной форме:

$$X(p)(p^2 + a_1 p^{n-1} + ... + a_n) = F(p)$$

То же проделаем и с (2):

$$Y(p)(p^2 + a_1 p^{n-1} + ... + a_n) = \frac{1}{p}$$

Разделив одно на другое, приходим к соотношению:

$$X(p) = pY(p)F(p)$$

Применив интеграл Дюамеля, приходим к искомому решению в виде:

$$x(t) = \int\limits_0^t y'(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

или в виде:

$$x(t) = y(t)f(0) + \int\limits_0^t f'(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

Пример: $x'' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
Сначала решим $x'' + x = 1$
$p^2 x + x = \frac{1}{p} => X(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} \risingdotseq \int\limits_0^t sin(\tau) d\tau = 1 - cos(t)$
Поэтому:
$x(t) = (1 - cos(t)) * 0 + \int\limits_0^t 1 * (1 - cos(t-\tau)) d\tau = t + sin(t-\tau)|_0^t = t - sin(t)$

1.64 Решение ОД с переменными коэффициентами

Пример:
$tx'' + x' + tx = 0, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0$
$x \risingdotseq X, \qquad x' \risingdotseq pX(p) - 1, \qquad x'' \risingdotseq p^2 X(p) - p$
$tx \risingdotseq -X'(p), \qquad tx'' \risingdotseq -(p^2 X(p) - p)' = -2pX(p) - p^2 X'(p) + 1$
и уравнение в операционной форме принимает вид:

$$-2pX(p) - p^2 X'(p) + 1 + pX(p) - 1 - X'(p) = 0$$

$$(p^2+1)X'(p) = -pX(p) => \frac{x'(p)}{x(p)} = \frac{-p}{p^2+1}$$

Интегрируем:

$$ln\ |x(p)| = -\frac{1}{2}ln\ (p^2+1) + ln\ C => X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}$$

$$X(p) = \frac{C}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \frac{C}{p}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n*n!*p^{2n}}\right) =$$

$$= \frac{C}{p} + C*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n*n!*p^{2n+1}} \risingdotseq C\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n*n!}*\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$= C\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n*n!*(2n-1)!!}*\frac{t^{2n}}{n!*2^n}\right) = C\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n*t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right) =$$

$$C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n*t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = x(t)$$

т.к. $x(0)=1, => \ C=1$

Сумма полученного ряда обозначается $J_0(t)$ и называется функцией Бесселя нулевого порядка

$J_0(t) \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

1.65 Решение СтЛОД

Пример 1.

$$\begin{cases} x'+x-y=e^t \\ y'+3x-2y=2e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} pX(p)-1+X(p)-Y(p) = \dfrac{1}{p-1} \\ pY(p)-1+3X(p)-2Y(p) = \dfrac{2}{p-1} \end{cases} \Rightarrow X(p)=Y(p)=\tfrac{1}{p-1}$$

$X(t)=Y(t)=e^t$

Пример 2.

$$\begin{cases} x''-+3y''-x=0 \\ x^{\cdot}+2y^{\cdot}-2y=0 \end{cases}$$

$x(0)=x^{\cdot}(0)=y(0)=0$
$y^{\cdot}(0)=-\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} p^2X(p)+3(p^2Y(p)+\dfrac{2}{3})-x(p)=0 \\ px(p)+2pY(p)-2Y(p)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow X(p) = \frac{3p-2}{(p+2)(p-\frac{1}{2})}; Y(p) = \frac{2p}{(p+2)(p-\frac{1}{2})}$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{16}{5}e^{-2t} - \dfrac{1}{5}e^{\frac{t}{2}} \\ y(t) = \dfrac{8}{5}e^{-2t} + \dfrac{2}{5}e^{\frac{t}{2}} \end{cases}$$

Отметим, что если начальные условия заданы в точке t_0, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, ... , то задача сводится к рассмотренной замкнутой $t - t_0 = \tau$

Пример:
$x'' - 3x' + 2x = te^{3t}, x(1) = x'(t) = 1$
$\tau := t - 1, x(t) = x(1 - \tau) ::= y(\tau)$,
причём считаем что, так как нас интересует $t > 1$.

Тогда $y''(\tau) - 3y'(\tau) + 2y(\tau) = (1 + \tau)e^{3(\tau+1)}, y(0) = y'(0) = 1$
Перейдем к изображению $p^2Y(p) - p - 1 - 3(pY(p) - 1) + 2Y(p) = e^3(\frac{1}{p-3} + \frac{1}{(p-3)^2})$
$Y(p) = \frac{p-2}{p^2-3p+2} + e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}^2 = \frac{1}{p-1} + \frac{e^3}{4}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-3} + \frac{2}{(p-3)})^2 = e^\tau + \frac{e^3}{4}(e^\tau - e^{3\tau} + 2\tau e^{3\tau})$

1.66 Решение интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки

С помощью преобразования Лапласа хорошо решаются интегральные уравнения Вольтерра второго рода типа свёртки.

$$x(t) = f(t) + \int\limits_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (1)$$

и интегральные уравнения Вольтерра типа свёртки первого рода

$$\int\limits_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (2)$$

Будем предпологать, что $f(t)$ и $K(t)$ - оригиналы. Тогда $x(t)$ - тоже оригинал. Применяя к обеим частям уравнений (1) и (2) преобразование Лапласа и учитывая формулу изображение свёртки, будем иметь соответственно

$$X(p) = F(p) + K(p)X(p) \quad (3)$$

и

$$K(p)X(p) = F(p) \quad (4)$$

Находим $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)} \quad (5)$$

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)} \quad (6)$$

Находя оригинал для $X(p)$, получаем решение исходной задачи.

Примеры:

1) $x(t)=\sin t+\int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$
$X(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p-1}*X(p)\Rightarrow X(p)=\frac{p-1}{(p^2+1)(p-2)}$
$\Rightarrow x(t)=\frac{e^{2t}}{5}-\frac{\cos t}{5}+\frac{3}{5}\sin t$

2) $\int\limits_0^t(t-\tau)^2x(\tau)d\tau=sht-\sin t$
$\frac{2}{p^3}X(p)=\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2+1}\Rightarrow X(p)=\frac{p^{3-p+p}}{2(p^2-1)}-\frac{p^{3+p-p}}{2(p^2+1)}=\frac{p}{2}+\frac{p}{2(p^2-1)}-\frac{p}{2}+\frac{p}{2(p^2+1)}=\frac{1}{2}(cht+\cos t)$

3) Решить интегро-дифференциальное уравнение:

$y'-2\int\limits_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau=0$, $y(0)=1$
$pY(p)-1-2\frac{1}{p-1}Y(p)=0\Rightarrow(p-\frac{2}{p-1})Y(p)=1\Rightarrow Y(p)=\frac{p-1}{p^2-p-2}=\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}\Rightarrow y(y)=\frac{-2}{-3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}$

Проверка:
$-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}-2\int\limits_0^t e^{t-\tau}(\frac{2}{3}e^{-\tau}+\frac{1}{3}e^{2\tau})d\tau=-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{t-2\tau}\Big|_0^t-\frac{2}{3}e^{t+\tau}\Big|_0^t=-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{t}-\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{t}=$ Все слагаемые сокращаются $=0$

4) $y''+\int\limits_0^x\sin(x-\tau)(y''(\tau)+y(\tau))d\tau=2\cos x$, $y(0)=0y'(0)=0$
$p^2Y(p)+\frac{1}{p^2+1}(p^2Y(p)+Y(p))=\frac{2p}{p^2+1}$
$Y(p)=\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-(\frac{1}{p^2+1})'=t\sin t$

Системы решаются аналогично

1.67 Вычисление несобственных интегралов

Имеет место формула Парсеваля

$$\int\limits_0^{+\infty}f(t)G(t)dt=\int\limits_0^{+\infty}g(t)F(t)dt$$

где $f\risingdotseq F,\ g\risingdotseq G$ Доказательство этой формулы произведем проверкой
Доказательство.

$$\int\limits_0^{+\infty}f(t)G(t)dt=\int\limits_0^{+\infty}f(t)dt\int\limits_0^{+\infty}g(\tau)e^{-t\tau}d\tau=[\text{Меняем порядок интегрирования}]\implies$$

$$\implies\int\limits_0^{+\infty}g(\tau)d\tau\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-t\tau}dt=\int\limits_0^{+\infty}g(t)F(t)dt$$

■

Пример 1.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Обозначим $f(t) = \sin t,\ G(t) = \frac{1}{t}$, тогда $F(t) = \frac{1}{t^2+1}, g(t) = 1$. То есть имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Пример 2.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax - a\sin x}{x^2} dx$$

Обозначим $f(t) = \sin ax - a\sin x,\ G(t) = \frac{1}{x^2}$, тогда $F(t) = \frac{a}{x^2+a^2} - \frac{a}{x^2+1}, g(t) = x$. То есть имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{at}{x^2+a^2} - \frac{at}{x^2+1}\right) dt = \left[\frac{a}{2}\ln\frac{t^2+a^2}{t^2+1}\Big|_0^{+\infty}\right] = \frac{-a}{2}\ln a^2$$

Пример 3.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2} dt$$

Обозначим $f(t) = 1 - \cos xt,\ G(t) = \frac{1}{t^2}$, тогда $F(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+x^2}, g(t) = x$. То есть имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{t^2+x^2}\right) dt = x^2 \cdot \frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\Big|_0^{+\infty} = x\cdot\frac{\pi}{2} sgn x = \frac{\pi}{2}|x|$$

Пример 4.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos z - e^{-z}}{z} dz$$

Обозначим $f(t) = \cos z - e^{-z},\ G(t) = \frac{1}{z}$, тогда $F(t) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p+1}, g(t) = 1$. То есть имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p+1}\right) dp = \frac{1}{2}\ln p^2 + 1 - \ln(p+1)\Big|_0^{+\infty} = \ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p+1}\Big|_0^{+\infty} = 0$$

1.68 Некоторые другие преобразования

Наряду с изученным преобразованием Лапласа, также рассматривают и другие преобразования среди которых упомяну:

- Преобразование Хевисайда
- Двустороннее преобразование Лапласа

- Преобразование Меллина
- Преобразование Гильберта
- Преобразование Ханкеля(Ганкеля)

Особо заслуживает быть упомянутым преобразование Фурье

1.69 Преобразование Фурье

Это преобразование следующего вида:

$$F(y) ::= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt \text{ (иногда } e^{-iyt}\text{)}$$

Функцию f считают действительной (или комплекснозначной)
Функция F - комплекснозначная.

$$f \xrightarrow{\Phi} F$$

f предполагается кусочно-непрерывной и абсолютно интегрируемой. Это преобразование во многом обладает свойствами сходными со свойствами преобразования Лапласа. Все основные теоремы, свойства и т.д. имеют свои аналоги, которые близки по форме.

Из интеграла Фурье в комплексной форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(t-x)}dt,$$

который может быть записан в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt)e^{-iyx}dy$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt = F(y)$, то:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y)e^{-iyx}dx$$

т.е. если известно преобразование Фурье F функции f, то f восстанавливается достаточно просто.

Последнюю формулу называют обратным преобразованием Фурье.

Наряду с этим преобразованием рассматривают косинус- и синус- преобразования Фурье:

$$\begin{cases} F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos ytdt \\ F_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin ytdt \end{cases}$$

Они рассматриваются для f=0 для t $<$ 0 и являются действительными для функции

1.70 Аналитическое продолжение

Теорема единственности

Пусть $f(z)$ голоморфна в конечной области D и $z_n \in D$ последовательность нулей функции f, причём все z_n различны, $f(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ и $z_n \to z_0 \in D$ при $n \to \infty$. Тогда $f(z) = 0, \forall z \in D$.

♦ 1) Представим f рядом Тейлора в окрестности точки z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^k$$

Предположим, что не все c_k равны нулю. Тогда либо $f(z_0) = 0$, либо $f(z) \neq 0$, но в любом случае $\exists$ окрестность точки z_0 такая, что для всех z из этой окрестности $f(z) \neq 0$, за исключением, быть может, точки z_0, но это противоречит тому, что $f(z_n) = 0$ и $z_n \to z_0$. Значит все коэффиценты этого ряда равны нулю, ряд сходится в круге $B(z_0, R_0)$, где R_0 - расстояние от точки z_0 до границы области D, т.е. $R_0 = \rho(z_0, \partial D$. Итак в $B(z_0, R_0)$ $f(z) \overset{D}{\equiv} 0$.

2) Пусть z^* произвольная точка области D. Соединим точки z^* и z_0 спрямляемой кривой ℓ, лежащей в D. Пусть $d = \rho(\ell, D)$ т.к. D - открытое множество, а $\ell \subset D$, то $d > 0$. Построим систему кругов $B(\zeta_k, \frac{d}{2})$, где ζ_k - точка пересечения $S(\zeta_{k-1}, \frac{\alpha}{2})$ и ℓ. Все круги принадлежат D. $\forall$ точку $B(z_0, R_0)$ можно считать предельной точкой нулей функции f, в том числе и ζ_1. По первой части теоремы следует, что $f(z) \equiv 0$ в круге $B(\zeta_1, \frac{\alpha}{2})$. За конечное число шагов приходим в точку $z^* \Rightarrow f(z^*) = 0 \Rightarrow f(z) \equiv 0$ ■

Следствие 1

Пусть f голоморфна в конечной области D и $f(z) = 0, \forall z \in \xi \subset D$, при чём ξ имеет предельную точку. Тогда $f(z) \overset{D}{\equiv} 0$.

♦ По определению предельной точки $\mathfrak{J}(z_k)$, z_k - различны, $z_n \in \xi$, $z_n \to z_0$, т.к. $f(z_n) = 0$ и $z_n \in D$, то по теореме $f(z) \overset{D}{\equiv} 0$. ■

Следствие 2

Пусть f и g голоморфны в конечной области D и совпадают на множестве $\xi \in D$, ξ обладает предельной точкой. Тогда $f(z) \overset{D}{\equiv} g(z)$.

♦ $h = f - g$ — голоморфные в D и $h(z) \overset{\xi}{\equiv} 0$. По следствию 1 $h \overset{D}{\equiv} 0$, т.е. f $\overset{D}{\equiv} g$. ■

Замечание 1

Функция $f \overset{D}{\not\equiv} 0$ и голоморфная в D в $\forall$ ограниченной области $\omega \subset D$ может иметь лишь конечное число нулей.

♦ Если бы число нулей в ω было бесконечно, то на основании принципа выбора из этой последовательности можно бы было выделить сходящуюся подпоследовательность. Поскольку ω замкнуто, то и предел выделенной последовательности лежал бы в ω. Тогда по теореме $f(z) \overset{\omega}{\equiv} 0 \Rightarrow f(z) \overset{D}{\equiv} 0$ ■

Замечание 2

Предельная точка нулей не может быть правильной для голоморфной функции (исключая случай $f(z) \overset{D}{\equiv} 0$*)*

♦ Действительно, если бы она была правильной, то $0 = f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(z_0) = 0$, а это противоречит тому, что нули голоморфной функции изолированы. ■

Пример

$f(z) = \sin\frac{1}{z}$ голоморфна и $f(z) \not\equiv 0, z \neq 0$, нули $z_n = \frac{1}{\pi n} \to 0$ при $n \to \infty$ т.е. точка $z = 0$ предельная для нулей и z_0 - особая точка. В данном случае существенно особая точка.

Замечание 3

Теорема единственности является одним из важнейших свойств голоморфных функций и лишний раз подчёркивает насколько сильно отличаются свойства голоморфных функций от я хачу питсу свойств дифференциируемых функций действительного переменного. Пусть, например $f(x)$ *и* $g(x)$ *бесконечное число раз дифференциируемы на* $[a, b]$ *и* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ *и* $f \overset{[\alpha,\beta]}{\equiv} g$*, то* f *и* g *не обязаны совпадать на* $[a, b]$

1.71 Понятие об аналитическом продолжении

Пусть f задана на множестве ϵ, функция F голоморфна в области D, содержащей множество $\epsilon(\epsilon \subset D)$ и $F \overset{\epsilon}{\equiv} f$. Тогда функцию F называют аналитическим продолжением функции f(с множества ϵ в область D.

Теорема. *Пусть множество* ϵ *имеет предельную точку* $z_0 \subset D$*. Тогда аналитическое продолжение функции* f *с множества* ϵ *в область* D *единственно*

Доказательство. Пусть f допускает два аналитических продолжения $T_1(z)$ и $T_2(z)$ с ϵ в D. Так как F $T_1(z) \overset{\epsilon}{\equiv} T_2(z) = f(z)$, то по теореме единственности $T_1(z) \overset{D}{\equiv} T_2(z)$. ■

Пример. Найдем аналитическое продолжение функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z^n$. Ряд сходится и является функцией, регулярной в круге $B(0, 1)$ и мы можем его просуммировать. В круге $B(0, 1)$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}, z \in B(0, 1)$

Рассмотрим в расширенной комплексной плоскости с выброженной точкой $z = 1$ регулярную функцию

$$F(z) = \frac{1}{1-z} \quad F(z) \overset{B(0,1)}{\equiv} f(z)$$

следовательно, $F(z) = \dfrac{1}{1-z}$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$ с множества $B(0, 1)$ в расширенную плоскость с выброшенной точкой.

1.72 Аналитическое продолжение элементарных функций

Теорема единственности голоморфной функции позволяет автоматически распространить на комплексную плоскость элементарные функции действительного переменного.

Если на отрезке (a, b) действительной оси задана непрерывная дифференциируемая функция $f(x)$ действительного переменного, что в некоторой области D комплексной плоскости, содержащей этот отрезок, может существовать лишь одна функция $f(z)$, голоморфная в D, которая принимает значения $f(x)$ на отрезке (a, b).

Если такая функция существует,то она называется аналитическим продолжением функции f действительной переменной x в комплексную плоскость.

Одним из практических способов распространения в комплексную область является следующий:$f(x)$ представляется степенным рядом с радиусом сходимости $R_x > 0$, затем полагают $x := z$ и получают функцию $f(z)-$ голоморфную, представленную степенным рядом с радиусом сходимости $R = R_x$(радиус сходимости определяется лишь набором коэффициентов.

Пример. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, R_x = \infty$

$e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ — сходится во всей плоскости комплексного переменного, следовательно, сумма ряда голоморфна при всех z. Если $z = x$, то $e^z = e^x$, т.к. ряды совпадают.

Таким образом,полученная функция и есть продолжение e^k в комплексную плоскость.

Аналогично продолжаются в комплексную плоскость и другие функции:

$$sinz, cosz, thz, ctgz, chz, tgz..., \text{ многочлены и т.д.и т.п.}$$

Теорема единственности позволяет продолжить в комплексную плоскость не только функции, но и соотношения,тождества, формулы, имеющие место для действительного переменного.

Например: для действительного переменного имеет место тождество $sin^2x + cos^2x = 1$. Естественно поставить вопрос, имеет ли место это тождество для комплексного аргумента? Рассмотрим функцию $F(z) = sin^2z + cos^2z - 1$ переменной z. $F(z)$ — регулярная во всей комплексной плоскости, причем для действительных z: $F(z) \equiv 0$. По теореме единственности $F(z) \overset{e}{\equiv} 0$, т.е. $sin^2z + cos^2z = 1$.

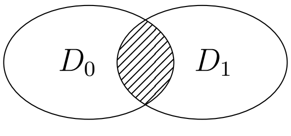
Аналогично доказываются и такие формулы:
$e^{z_1+z_2},\ sin(z + 2\pi) = sinz,\ ch_2z - sh^2z = 1,\ e^{lnz} = z,$
$\cos(\mathrm{z}_1 + z_2) = cosz,\ cosz_2 - sinz_1,\ sinz_e$ и т.д.

1.73 Аналитическое продолжение функций

1.73.1 Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей

С помощью аналитического продолжения получается обобщение голоморфной функции.

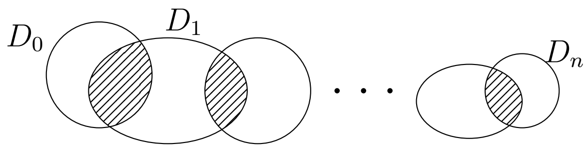
Пусть даны две области D_0 и D_1 и пусть их пересечение $D_{01} = D_0 \cap D_1$ не пусто и является областью. Пусть функции f_0 и f_1 голоморфны в областях D_0 и D_1 соответственно и совпадают в области D_{01}, то есть $f_0(z) \overset{D_{01}}{\equiv} f_1(z)$



Тогда $f_1(z)$ называется непосредственным аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D_1. Такое продолжение единственно на основании теоремы единственности.

Пусть теперь дана цепочка областей $D_0, D_1, \ldots, D_n$ таких, что $D_j \cap D_{j+1} = D_{jj+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ не пусто. Пусть существуют функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ такие, что каждая последующая функция f_{j+1} является непосредственным продолжением предыдущей f_j из области D_j в область D_{j+1}. Это значит, что функции f_j голоморфны в областях D_j и $f_j \overset{D_{jj+1}}{\equiv} f_{j+1}$.

Тогда функцию $f_n(z)$ называют аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ из области D_0 вдоль цепочки областей в область D_n. Такое продолжение единственно. Полученный набор функций

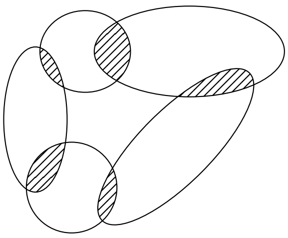


$$\{f_0, \ldots, f_n\} = \{f_j\}_{j=1}^n$$

определяет некоторую функцию $F(z)$ в области $D = \bigcup\limits_{j=0}^{n} D_j$

Её значения определяются по формуле

$$F(z) = f_j(z), \quad z \in D_j$$

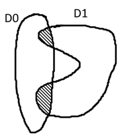


Эта функция может оказаться и неоднозначной, так как цепочка областей может пересекаться. Например, D_0 может замкнуться с D_n, а f_0 и f_n необязаны совпадать на этом пересечении.

Например, возможна и такая картинка.

$f_0 \overset{D_{01}}{\equiv} f_1(z)$, а на $\widetilde{D}_{01}$ значения f_0 и f_1 могут быть различны и тогда $F(z) = f_0(z)$, $z \in \widetilde{D}_{01}$, либо $F(z) = f_1(z)$, $z \in \widetilde{D}_{01}$

Многозначная (вообще говоря) функция $F(z)$ по построению склеена из однозначных элементов — голоморфных функций $f_0, \ldots, f_n$.



Аналитической функцией $F(z)$ называется набор таких элементов, полученных из исходного элемента $f_0(z)$ аналитическим продолжением по всем цепочкам областей, по которым продолжение возможно.

Эти элементы ещё называют голоморфными ветвями. По исходному элементу аналитическая функция строится однозначно.

1.73.2 Аналитическое продолжение с помощью степенных рядов

Одним из алгоритмов, реализующих аналитическое продолжение вдоль цепочки областей является аналитическое продолжение с помощью степенных рядов.

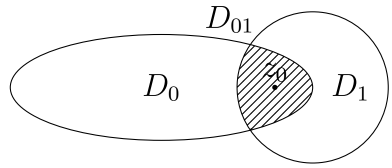
Пусть $f_0(z)$ задана в D_0 и голоморфна. Возьмём произвольную точку $z_0 \in D_0$ и представим $f_0(z)$ степенным рядом по степеням $z - z_0$.

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Для этого ряда существуют две возможности:

1. Радиус сходимости R_0 не превосходит расстояния от точки z_0 до границы ∂D_0 области D_0 при любом выборе точки $z_0 \in D_0$. Тогда аналитическое продолжение функции $f_0(z)$ из области D_0 невозможно.

2. Существует в области D_0 точка такая, что радиус сходимости ряда $R_0 > \rho(z_0, \partial D_0)$. В этом случае область $D_1 = B(z_0, R_0)$ имеет с D_0 общую часть D_{01}.



В области D_1 степенной ряд представляет собой регулярную функцию $f_1(z)$, которая в D_{01} сопадает с $f_0(z)$ и, следовательно, $f_1(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением $f_0(z)$. Далее строим таким образом аналитическое продолжение $f_0(z)$ вдоль цепочки кругов.

Вейерштрасс построил пример непродолжаемой функции: $f_0(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ — сходится в круге $B(0,1)$. На любой дуге $S(0,1)$, даже если она сколь угодно мала, лежит бесконечное число особых точек.

Следует отметить, что продолжение с помощью переразложения степенных рядов малоэффективно. Чаще всего используют другие приёмы.

1.73.3 Аналитическое продолжение через границу

В ряде случаев для аналитического продолжения функции $f_0(z)$, заданной в области D_0 используется следующий приём. Пусть области D_0 и D_1 имеют в качестве общего участка границы кусочно-гладкую кривую l_{01}. Пусть в D_0 задана голоморфная функция $f_0(z)$, а в D_1 — голоморфная функция $f_1(z)$, причём f_0 непрерывна в $D_0 \cup l_{01}$, а f_1 непрерывна в $D_1 \cup l_{01}$ и $f_0 \overset{D_{01}}{\equiv} f_1(z)$.

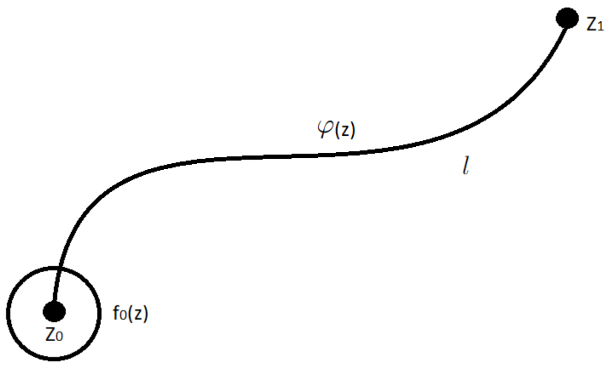
Тогда $F(z) = \begin{cases} f_0(z), & z \in D_0 \cup l_{01} \\ f_1(z), & z \in D_1 \end{cases}$ будет голоморфной в области $D_0 \cup l_{01} \cup D_1$.

То есть f_1 является непосредственным аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ в область D_1.

1.74 Аналитическое продолжение вдоль кривой.

Элементом в точке z_0 будем называть функцию $f_{z_0}(z)$, регулярную в некоторой окрестности этой точки. Два элемента называются **эквивалентными**, если они заданы в одной и той же точке и совпадают в некоторой окрестности этой точки. Далее всякий элемент будем рассматривать с точностью до эквивалентности.

Пусть на кривой l задана непрерывная функция $\varphi(z)$. Пусть, кроме того, в каждой точке $\zeta \in l$ задан элемент $f_\zeta(z)$ и этот элемент совпадает с $\varphi(z)$ на некоторой дуге кривой l, содержащей точку ζ.



Тогда элемент $f_{z_1}(z)$ в конечной точке z_1 кривой l называется **аналитическим продолжением** элемента $f_{z_0}(z)$ вдоль кривой l из точки z_0.

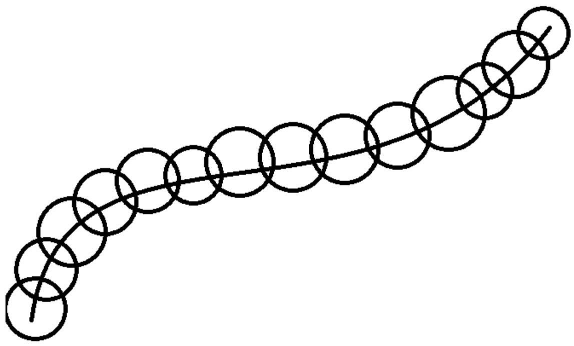
В этом случае говорят также, что элемент $f_{z_0}(z)$ аналитически продолжен вдоль кривой l или, что этот элемент допускает аналитическое продолжение вдоль кривой l.

Замечание 1. Функцию $\varphi(z)$, заданную на кривой l, считаем однозначной функцией точек кривой l. Под этим понимается следующее: если кривая l задана уравнением $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то каждой точке $z_t = \sigma(t)$ кривой l отвечает одно число $\varphi(z_t)$ – значение функции φ в точке z_t кривой l.

Однако функция $\varphi(z)$, как функция точек плоскости Z может быть и неоднозначной, если кривая l имеет самопересечения.

Функция $\varphi(z)$ связана с элементами на кривой следующим образом: если ζ - точка кривой l и $f_\zeta(z)$ - элемент в этой точке, то $\varphi(\zeta) = f_\zeta(\zeta)$.

Замечание 2. Если элемент $f_{z_0}(z)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой l, то его можно аналитически продолжить и вдоль цепочти областей, покрывающей кривую l.



Далее, элемент $f_{z_0}(z)$ можно аналитически продолжить вдоль любой кривой l' достаточно близкой к l и имеющей те же концы. В этом случае конечный элемент $f_{z_1}(z)$ получается тем же.

Верно и обратное! Если элемент $f_{z_0}(z)$ можно аналитически продолжить вдоль таких же областей, то его можно аналитически продолжить вдоль любой кривой, содержащейся в этой цепочке.

Без доказательства отметим, что: *Аналитическое продолжение данного элемента вдоль данной кривой единственно.*

Определение. Пусть в точке z_0 задан элемент $f(z)$. Продолжим его аналитически вдоль всех кривых с началом в точке z_0, по которым такое продолжение возможно. Полученное множество элементов называется **аналитической функцией, порожденной**

элементом $f(z)$. Множество всех таких кривых называется **множеством допустимых кривых**.

Такое определение аналитической функции ввел Вейерштрасс. Две аналитические функции по определению равны тогда и только тогда, когда их исходные элементы эквивалентны. В силу теоремы о том, что аналитическое продолжение единственно, существует только одна аналитическая функция, порожденная данным элементом.

Эквивалентные элементы порождают одну и ту же аналитическую функцию. Множество значений, которые принимает аналитическая функция $\mathcal{F}(z)$ в точке z совпадает с множеством тех значений, которые принимают все её элементы в этой точке.

1.75 Римановы поверхности.

Как уже отмечалось, аналитическая функция представляет собой функцию уже в несколько необычном понимании: а именно приходим к понятию многозначной функции, т.е. функции, которая в одной точке может принимать несколько значений.

В связи с этим, многозначные функции могут иметь изолированные особые точки нового типа по сравнению с теми, которые мы изучали – точки ветвления.

Определение. Пусть функция $\mathcal{F}(z)$ аналитическая в проколотой окрестности точки z_0 и z_0 является для неё особой точкой (либо $\mathcal{F}$ не определена в этой точке, либо у неё нет элеметна в этой точке) и неоднозначна в окрестности этой точки. Тогда z_0 называют **точкой ветвления функции** $\mathcal{F}(z)$.

При обходе по любой замкнутой кривой точки ветвления мы приходим к другому значению функции $\mathcal{F}$. При этом возможны два случая:

1. Через конечное число оборотов m мы вернемся к первоначальному значению элемента.

   Тогда z_0 называют **алгебраической точкой ветвления (порядка** m**)**

2. Каждый обход приводит к новому элементу, т.е. навое значение $\mathcal{F}(z)$

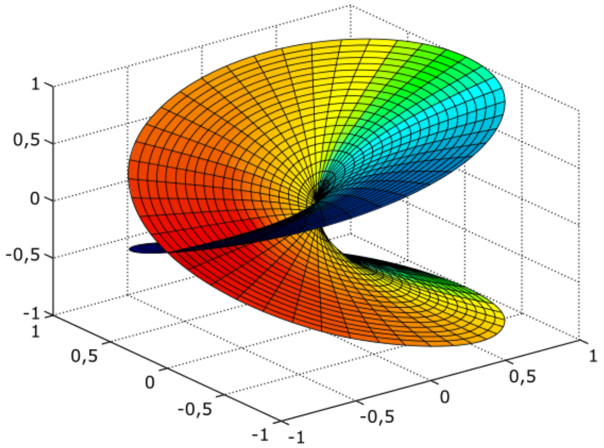
   z_0 – **логарифмическая точка ветвления**.

Аналитическую многозначную функцию иногда удобнее бывает трактовать как однозначную, но заданную на более сложном многообразии, чем первоначальное множество (область).

Пример. $\sqrt{z}$

В результате аналитического продолжения получаем двузначную функцию: в каждой точке два значения. Точки 0 и ∞ – точки ветвления. Для того, чтобы построить риманову поверхность функции $\sqrt{z}$, возьмем два экземпляра плоскости, разрезанной по лучу от $z = 0$ до $z = \infty$, например, по положительной части действительной оси. Наложим их друг на друга и склеим крест-накрест. При обходе вокруг точки $z = 0$, переходим с одной плоскости на другую. На полученном многообразии фунция $\sqrt{z}$ однозначна.

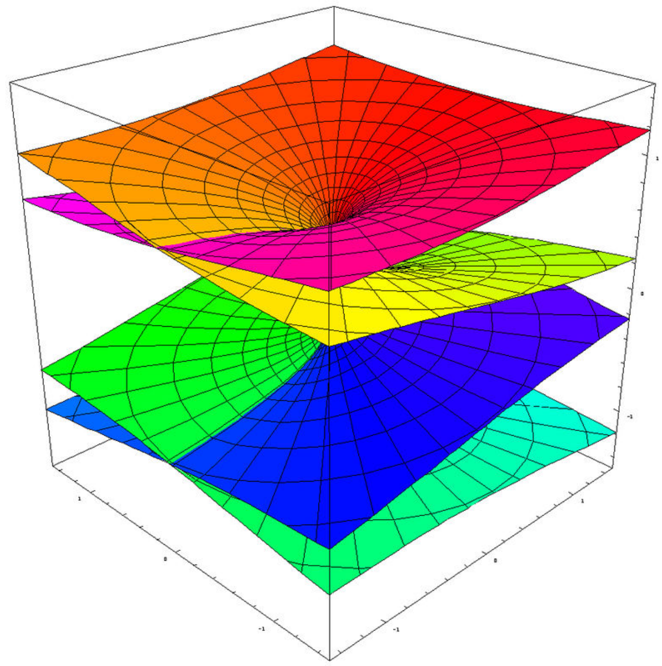
(Риманова поверхность для функции $\sqrt{z}$):



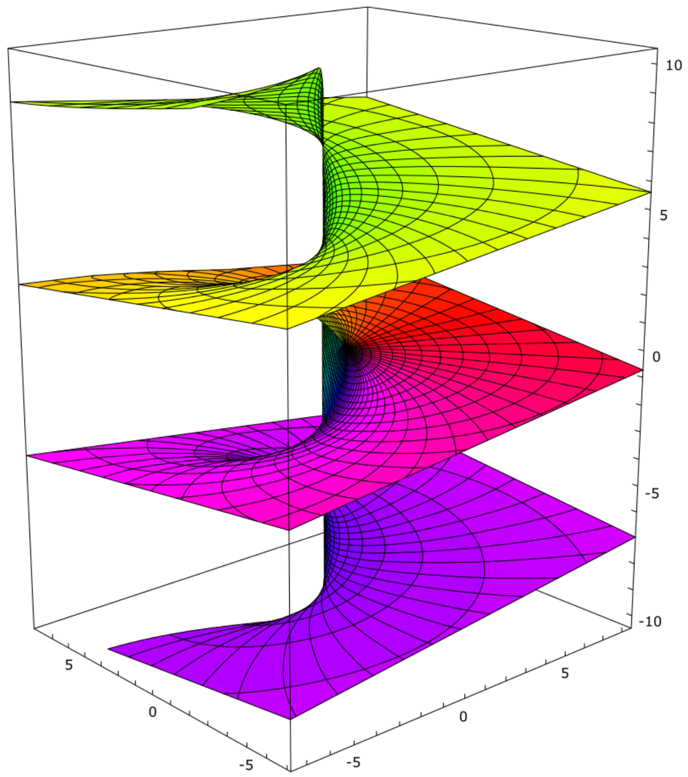
Аналогично строят риманову поверхность функции $\sqrt[n]{z}$, у которой точками ветвления являются так же 0 и ∞. Разрезы можно проводить как угодно.

$\sqrt{(z-1)(z-2)}$ – точки ветвления 1 и 2

(Риманова поверхность для функции $\sqrt[4]{z}$):



$Ln(z)$ – бесконечное число экземпляров плоскостей.
(Риманова поверхность для функции $Ln(z)$):


10
5
0
-5
-10
5
0
-5
-5
0
5