# Дифференциальные уравнения

Конспект по 2 курсу специальности «прикладная математика»

(лектор А. В. Филипцов)

# Оглавление

# Глава 1

# Основные понятия. Простейшие дифференциальные уравнения.

## 1.1 Основные понятия.

• ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** *называется выражение вида*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1.1}$$

*где $F$ — некоторая функция $(n+2)$-ух переменных, определенная в некоторой области, $t$ — независимая переменная, $x = x(t)$ — неизвестная функция независимой переменной, $x', \ldots, x^{(n)}$ — производные функции $x(t)$, причем переменная $t$ и функции $F$ и $x$ действительны.*

• *Порядок старшей производной, присутствующей в уравнении* (1.1.1)*, называется* ***поряком*** *уравнения.*

• ***Решением*** *уравнения* (1.1.1) *называется функция, заданная и $n$ раз дифференцируемая на некотором промежутке (связном множестве) $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ и обращающая уравнение* (1.1.1) *в верное равенство.*

• *График решения дифференциального уравнения называется* ***интегральной кривой****.*

Если функция $x(t) : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ является решением уравнения (1.1.1) на промежутке $\mathbb{I}$, то $\forall I_1 \subseteq \mathbb{I}$ функция $x_1(t) : I_1 \to \mathbb{R}$ такая, что $x_1(t) = x(t) \quad \forall t \in I_1$, является решением на промежутке $I_1$. При этом функция $x_1(t)$ называется **сужением** функции $x(t)$ на промежутке $I_1$, а функция $x(t)$ называется **продолжением** функции $x_1(t)$ на промежутке $\mathbb{I}$.

• *Решение, которое нельзя продолжить, называется* ***непродолжаемым****, а промежуток, на котором оно определено, называется* ***максимальным интервалом существования****.*

Каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений.

• *Совокупность решений уравнения* (1.1.1) *вида $x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n)$, зависящая от $n$ существенно произвольных постоянных, называется* ***общим решением*** *уравнения* (1.1.1)*.*

Существенные постоянные — это постоянные, которые нельзя заменить на меньшее количество, не изменив совокупность решений, описанных общим решением.

• *Решение дифференциального уравнения, получающееся из общего решения при конкретных произвольных постоянных, называется* ***частным решением****.*

Возможны случаи, когда уравнение имеет решение, не входящее в общее решение.

• *Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется* ***полным решением****.*

Часто на практике математическая модель, содержащая дифференциальное уравнение, содержит также некоторые дополнительные условия необходимые для выбора единственного решения, описывающего моделируемый процесс.

• *Дополнительные условия накладываемые на неизвестную функцию называются* ***начальными****, если они относятся к одному значению аргумента, и* ***граничными****, если относятся к разным значениям аргумента.*

• *Начальная задача вида*

$$\begin{cases} F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \\ x|_{t=t_0} = \xi_0, x'|_{t=t_0} = \xi_1, \ldots, x^{(n-1)}|_{t=t_0} = \xi_{n-1}; \end{cases} \qquad t_0 \in \mathbb{I}$$

*называется* ***задачей Коши****.*

## 1.2 Простейшие дифференциальные уравнения.

Пусть $D$ — оператор дифференцирования, то есть $D : x \mapsto x'$. Тогда первую производную функции $x$ будем обозначать $Dx = x'$, вторую $D^2x = x''$ и так далее.

• ***Простейшим*** *называется дифференциальное уравнение вида*

$$D^n x = f(t), \ t \in \mathbb{I}, \tag{1.2.1}$$

*где $\mathbb{I}$ — некоторый промежуток в $\mathbb{R}$, $f(t)$ — непрерывная в $\mathbb{I}$ функция.*

**Теорема.** *Общее решение простейшего дифференциального уравнения первого порядка*

$$Dx = f(t), \ t \in \mathbb{I} \tag{1.2.2}$$

*имеет вид*

$$x(t) = \int f(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C,$$

*где $t_0 \in \mathbb{I}$, а $C$ — произвольная постоянная.*

⧫ Доказательство теоремы следует из курса математического анализа. ⊠

Заметим, что общее решение содержит все решения дифференциального уравнения (1.2.2). Следовательно, полученное общее решение является **полным** решением.

**Теорема.** *Задача Коши $Dx = f(t), \ x|_{t=t_0} = \xi_0$, где $t, t_0 \in \mathbb{I}$, имеет единственное решение*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + \xi_0.$$

♦ Подставим начальное условие в общее решение: $\xi_0 = x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0} f(\tau)d\tau + C \Rightarrow C = \xi_0$. ⊠

Решение простейшего дифференциального уравнения (1.2.1) можно свести к последовательному решению простейшего дифференциального уравнения первого порядка. Так как $D^n x = D(D^{n-1}x)$, то уравнение $n$-го порядка является уравнением первого порядка относительно функции $D^{n-1}x$. Следовательно, из первой теоремы получаем

$$D^{n-1}x = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + C_1.$$

Тогда аналогично

$$D^{n-2}x = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + C_1\Big)d\tau_2 + C_2 = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1\Big)d\tau_2 + C_1(t-t_0) + C_2.$$

Заметим, что семейство функций $C_1(t-t_0)+C_2$ описывает множество всех многочленов первой степени. Следовательно, это множество не изменится, если заменить его на $\widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0$. Тогда имеем

$$D^{n-2}x = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_2 \int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + \widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_n \int\limits_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + \widetilde{C}_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0.$$

**Теорема.** *Общее решение (полное) уравнения* (1.2.1) *имеет вид*

$$x(t) = \underbrace{\int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau}_{y_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{C}_i t^i}_{y_2}. \qquad (1.2.3)$$

♦ Доказательство можно провести двумя способами: по формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, или путем сведения кратных интегралов к повторным. Мы рассмотрим первый способ. Формула

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,\tau)d\tau\Big) = \beta'(t)f(t,\beta(t)) - \alpha'(t)f(t,\alpha(t)) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(t,\tau)d\tau$$

определяет производную от интеграла, зависящего от параметра. Тогда для нашего случая подставим вместо $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ соответственно $t, t_0$ и получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_{t_0}^{t} f(t,\tau)d\tau\Big) = f(t,t) + \int\limits_{t_0}^{t} f'_t(t,\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем $D^n y_2 = 0$. Вычислим $D^n y_1$:

$$Dy_1 = \frac{(t-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(n-1)(t-\tau)^{n-2}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-2}}{(n-2)!} f(\tau) d\tau;$$

$$D^2 y_1 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-3}}{(n-3)!} f(\tau) d\tau;$$

$$\dots$$

$$D^n y_1 = f(t).$$

⊠

**Теорема.** *Решение задачи Коши $D^n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$ ($D^0$ — тождественное отображение, то есть $D^0 x = x$), где $t, t_0 \in \mathbb{I}$, всегда существует, единственно и имеет вид*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i}{i!} (t-t_0)^i.$$

⧫ Разложим многочлен в общем решении простейшего дифференциального уравнения (1.2.3) по степеням $t - t_0$, то есть представим в виде

$$\widetilde{\widetilde{C}}_{n-1} (t-t_0)^{n-1} + \ldots + \widetilde{\widetilde{C}}_1 (t-t_0) + \widetilde{\widetilde{C}}_0,$$

где $\widetilde{\widetilde{C}}_i$ — произвольные постоянные, зависящие от $\widetilde{C}_i$.
Тогда $\xi_0 = x|_{t=t_0} = \widetilde{\widetilde{C}}_0$, $\xi_i = D^i x|_{t=t_0} = i! \cdot \widetilde{\widetilde{C}}_i \Rightarrow \widetilde{\widetilde{C}}_i = \dfrac{\xi_i}{i!}$. ⊠

• ***Комплекснозначной функцией действительного переменного*** *называется функция вида*

$$h(t) = f(t) + i \cdot g(t),$$

*где $f(t)$ и $g(t)$ — действительные функции, определенные на некотором промежутке $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$.*

Производные и интегралы комплекснозначной функции определяются следующим образом:

$$h'(t) = f'(t) + i \cdot g'(t);$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau + i \cdot \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau.$$

Кроме того для таких функций справедливы свойства производных:

1. $(\alpha u)' = \alpha u'$;
2. $(u+v)' = u' + v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$.

Рассмотрим комплексное простейшее дифференциальное уравнение $Dz = h(t)$, где $h(t) = f(t)+i\cdot g(t)$. Если комплекснозначаная функция $z(t) = x(t)+i\cdot y(t)$ является решением этого дифференциального уравнения, то подставим его в уравнение и получим $\begin{cases} Dx = f(t), \\ Dy = g(t). \end{cases}$ Следовательно, общее решение имеет вид

$$z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C_1 + i\cdot\Big(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau + C_2\Big) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Тогда решение задачи Коши $Dz = h(t)$, $z|_{t=t_0} = \xi_0$ сводится к решению двух задач Коши:

$$\begin{cases} Dx = Re(h(t)), \\ x|_{t=t_0} = Re(\xi_0); \end{cases} \qquad \begin{cases} Dy = Im(h(t)), \\ y|_{t=t_0} = \xi_0; \end{cases}$$

Заметим, что любое дифференциальное уравнение можно рассматривать как комплексное простейшее дифференциальное уравнение, у которого мнимая часть неоднородности равна нулю. Следовательно, можем говорить о существовании комплекснозначных решений действительных уравнений.

# Глава 2

# Линейные стационарные уравнения.

## 2.1 Линейные стационарные дифференциальные уравнения. Существование и единственность задачи Коши.

• ***Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка*** *называется уравнение вида*

$$D^n x + a_{n-1}(t)D^{n-1}x + \ldots + a_1(t)Dx + a_0(t)D^0 x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.1.1}$$

*где функции $a_i(t)$ и $f(t)$ непрерывны на промежутке $\mathbb{I}$.*

• *Если $f(t) = 0$, то уравнение называется* ***однородным****, в противном случае* ***неоднородным****.*

• *Если $a_i(t)$ является постоянным, то уравнение* ***стационарное****.*

Далее рассматриваем только стационарные линейные дифференциальные уравнения.

Обозначим через $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ оператор дифференцирования. Тогда уравнение (2.1.1) запишем в виде

$$L_n x = f(t). \tag{2.1.1}$$

Так как для любых дифференцируемых функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$

1. $D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) + D(\varphi_2)$,
2. $D(\alpha\varphi_1) = \alpha D(\varphi_1)$,

то оператор дифференцирования $D$ является линейным. Следовательно, оператор $L_n$ является результатом композиции суммы и произведения на действительное число линейных операторов, а значит $L_n$ — **линейный оператор**.

Кроме действительных стационарных уравнений будем также рассматривать комплексные стационарные уравнения вида $L_n z = h(t)$, где $L_n$ — линейный стационарный оператор с комплексными коэффициентами, а $h(t)$ — комплекснозначная функция.

• *Любой комплекснозначный линейный оператор $L_n$ можно представить в виде композиции (произведения) операторов вида $D - \lambda_0 D^0$. Такое представление линейного оператора*

*$L_n$ называется **факторизацией** оператора.*

Для факторизации оператора $L_n$ построим многочлен $\delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ с теми же коэффициентами, что и у оператора $L_n$. Найдем корни этого многочлена над полем $\mathbb{C}$.

• *При этом многочлен $\delta(\lambda)$ называется **характеристическим многочленом** для оператора $L_n$, а уравнение $\delta(\lambda) = 0$ — **характеристическим уравнением** для оператора $L_n$.*

Многочлен $\delta(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ с учетом кратности имеет столько корней, какова его степень. Обозначим эти корни через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда $\delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$ и, следовательно, $L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0)\ldots(D - \lambda_n D^0)$ — **факторизация** линейного оператора $L_n$.

**Лемма.** *Решение задачи Коши $Dz - \lambda_0 z = h(t)$, $z|_{t=t_0} = \xi_i$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ для любой комплекснозначной функции $h(t)$ и для любых комплексных чисел $\xi_i$ и $\lambda_0$ всегда существует и единственно.*

⧫ Домножим уравнение задачи Коши на ненулевую функцию $e^{-\lambda_0 t}$ и получим

$$e^{-\lambda_0 t} Dz \underbrace{-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}}_{D(e^{-\lambda_0 t})} z = h(t) e^{-\lambda_0 t},$$

$$D(e^{-\lambda_0 t} z) = h(t) e^{-\lambda_0 t}.$$

Полученное уравнение является простейшим относительно функции $e^{-\lambda_0 t} z$, следовательно, его общее решение имеет вид

$$e^{-\lambda_0 t} z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\lambda_0 \tau} h(\tau) d\tau + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_0 (t-\tau)} h(\tau) d\tau + C e^{\lambda_0 t}.$$

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим в общее решение начальные условия и получим $\xi = z|_{t=t_0} = C e^{\lambda_0 t_0} \Rightarrow C = \xi e^{-\lambda_0 t_0} \Rightarrow$

$$z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_0 (t-\tau)} h(\tau) d\tau + \xi e^{\lambda_0 (t - t_0)}.$$

⊠

**Теорема.** *Решение задачи Коши $L_n z = h(t)$, $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ для любой непрерывной комплекснозначной функции $h(t)$, для любых комплексных чисел $\xi_i$ и для любого комплексного линейного оператора $L_n$ всегда существует и единственно.*

♦ Факторизуем оператор $L_n$: $L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0)\dots(D - \lambda_n D^0)$ и обозначим через $L_{n-1}$ следующий оператор: $L_{n-1} = (D - \lambda_2 D^0)(D - \lambda_3 D^0)\dots(D - \lambda_n D^0)$. Тогда уравнение задачи Коши представимо в виде

$$(D - \lambda_1 D^0)(L_{n-1} z) = h(t).$$

Если обозначим $z_1 = L_{n-1} z$, то уравнение имеет вид $(D - \lambda_1 D^0) z_1 = h(t) \Rightarrow z_1|_{t=t_0} = (L_{n-1} z)|_{t=t_0} = \mu_1$, где $\mu_1$ — комплексное число, которое выражается через $\xi_i$.

По лемме решение задачи Коши всегда существует и единственно. Следовательно, функция $z(t)$ является решением задачи Коши $L_{n-1} z = z_1$, $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-2}$. Продолжая рассуждения аналогичным образом еще $(n-1)$ раз, получим функцию, которая является решением исходной задачи Коши. ⊠

**Следствие.** *Действительное решение задачи Коши $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ для любой непрерывной действительной функции $f(t)$, для любых действительных чисел $\xi_i$ и для любого действительного линейного оператора $L_n$ всегда существует и единственно.*

♦ Если рассматривать функцию $f(t)$ и числа $\xi_i$ как комплекснозначную функцию и комплексные числа с нулевой мнимой частью, то по теореме задача Коши имеет единственное комплексное решение $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ действительные. Но линейный оператор $L_n$ имеет действительные коэффициенты $L_n z = L_n x + i \cdot L_n y$.

Тогда, так как $z$ — решение задачи Коши, подставим:

$$\begin{cases} L_n x + i \cdot L_n y = f(t) + i \cdot 0, \\ (D^i x + i \cdot D^i y)|_{t=t_0} = \xi_i + i \cdot 0; \end{cases}$$

приравняем действительные части и получим, что функция $x(t) = Re(z(t))$ является единственным действительным решением задачи Коши. ⊠

## 2.2 Структура множества решений линейного однородного стационарного уравнения.

Рассмотрим линейное стационарное однородное уравнение

$$L_n x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.1}$$

Так как оператор $L_n$ является линейным, то для любых двух решений $x(t)$ и $y(t)$ уравнения (2.2.1) и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad L_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L_n x + \beta \cdot L_n y = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. Следовательно, функция $\alpha x + \beta y$ также является решением уравнения (2.2.1), а значит множество решений уравнения (2.2.1) является **линейным (векторным) пространством**.

Покажем, что пространство конечномерно и имеет размерность $n$ (равную порядку уравнения).

• *Функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ называются **линейно зависимыми**, если существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не обращающиеся в $0$ одновременно такие, что $\alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) = 0 \ \forall t$. В противном случае функции называются **линейно независимыми**.*

• *Пусть* $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ *— это* $(n-1)$ *раз дифференцируемые функции. Определитель*

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t)\\ D\varphi_1(t) & \ldots & D\varphi_n(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ D^{n-1}\varphi_1(t) & \ldots & D^{n-1}\varphi_n(t)\end{vmatrix}$$

*называется* ***определителем Вронского****, или* ***Вронскианом*** *этих функций.*

**Теорема.** *Если функции* $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ *линейно зависимые, то Вронскиан этих функций* $W(t)=0\ \forall t$.

⧫ Пусть функции $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ линейно зависимы. Тогда одна из этих функций линейно выражается через остальные. Пусть, например, это функция $\varphi_1(t)$, то есть $\varphi_1(t)=\beta_2\varphi_2(t)+\ldots+\beta_n\varphi_n(t)$. Тогда $D^i\varphi_1(t)=\beta_2D^i\varphi_2(t)+\ldots+\beta_nD^i\varphi_n(t)\quad\forall i=\overline{1,n-1}$. Следовательно, первый столбец Вронскиана $W(t)$ линейно выражается через остальные столбцы и, следовательно, $W(t)=0\ \forall t$. ⊠

**Теорема.** *Если* $n$ *решений* $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ *уравнения* (2.2.1) *линейно независимы, то Вронскиан этих функций* $W(t)\neq 0\ \forall t$.

⧫ От противного. Пусть $\exists t_0$, для которого $W(t_0)=0$. Тогда линейная однородная система алгебраических уравнений с матрицей $W(t_0)$ имеет ненулевое решение, то есть существует ненулевой столбец $X=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ такой, что $W(t_0)X=0$. Тогда

$$\begin{cases}\alpha_1\varphi_1(t_0)+\alpha_2\varphi_2(t_0)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t_0)=0,\\ \alpha_1D\varphi_1(t_0)+\alpha_2D\varphi_2(t_0)+\ldots+\alpha_nD\varphi_n(t_0)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_1D^{n-1}\varphi_1(t_0)+\alpha_2D^{n-1}\varphi_2(t_0)+\ldots+\alpha_nD^{n-1}\varphi_n(t_0)=0.\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t)=\alpha_1\varphi_1(t)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t)$. Так как функция $\varphi(t)$ является линейной комбинацией решений уравнения (2.2.1), то она также является решением этого уравнения. При этом $D^i\varphi(t)|_{t=t_0}=(\alpha_1D^i\varphi_1(t)+\ldots+\alpha_nD^i\varphi_n(t))|_{t=t_0}=0\ \forall i=\overline{0,n-1}$.

Но функция тождественно равная нулю также является решением, удовлетворяющим тем же начальными условиям. И, следовательно, по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши функция $\varphi(t)$ и функция тождественно равная нулю равны между собой, то есть $\varphi(t)=0\ \forall t\Rightarrow\alpha_1\varphi_1(t)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(t)=0\ \forall t$. Тогда функции $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. ⊠

**Теорема.** *Множество решений линейного стационарного однородного уравнения порядка* $n$ *является конечномерным линейным пространством размерности* $n$.

⧫ Рассмотрим $n$ задач Коши:

$$\begin{cases}L_nx=0,\\ x|_{t=t_0}=1,\\ Dx|_{t=t_0}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ D^{n-1}x|_{t=t_0}=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}L_nx=0,\\ x|_{t=t_0}=0,\\ Dx|_{t=t_0}=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ D^{n-1}x|_{t=t_0}=0;\end{cases}\qquad\ldots\ldots\ldots\qquad\begin{cases}L_nx=0,\\ x|_{t=t_0}=0,\\ Dx|_{t=t_0}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ D^{n-1}x|_{t=t_0}=1;\end{cases}\qquad(2.2.2)$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши каждая из этих задач Коши имеет единственное решение. Обозначим их через $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$. Заметим, что их Вронскиан при $t = t_0$ равен определителю единичной матрицы, то есть равен 1. Следовательно, эти функции линейно независимы.

Покажем, что любое решение уравнения (2.2.1) линейно выражается через эти функции. Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (2.2.1), и пусть $\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_0$, $D\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_1$, $\ldots$, $D^{n-1}\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_{n-1}$. Рассмотрим функцию $\psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}$. При этом $D^i\psi(t)|_{t=t_0} = (\xi_0 D^i\varphi_0 + \ldots + \xi_{n-1}D^i\varphi_{n-1})|_{t=t_0} = \xi_i \ \forall i = \overline{0, n-1}$. Следовательно, функция $\psi(t)$ является решением задачи Коши с теми же начальными условиями, что и функция $\varphi(t)$. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши

$$\varphi(t) = \psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}. \tag{2.2.3}$$

И, следовательно, произвольная функция $\varphi(t)$ линейно выражается через линейно независимые функции $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$. Значит функции $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ составляют базис пространства решений. ⊠

• *Базис пространства решений линейной однородной системы уравнений называется* ***фундаментальной системой решений****.*

• *Фундаментальная система решений, удовлетворяющая условиям* (2.2.2) *называется* ***нормированной*** *при $t = t_0$.*

Используя фундаментальную систему решений нормированную при $t = t_0$, задача Коши с произвольными начальными условиями может быть найдена по формуле (2.2.3).

• *Функция $\psi(t)$ называется* ***сдвигом*** *функции $\varphi(t)$ на $t = t_0$, если $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$.*

**Теорема о сдвиге.** *Если $\varphi(t)$ является решением задачи Коши $L_n x = 0$, $D^i x|_{t=0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$, то ее сдвиг $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$ является решением задачи Коши $L_n x = 0$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$.*

♦ Так как $\varphi(t)$ — решение уравнения (2.2.1), то $L_n\varphi(t) = 0 \ \forall t$, то есть

$$\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0\varphi(t) = 0 \ \forall t.$$

Так как равенство верно $\forall t$, оно останется верным, если заменить в нем $t$ на $t - t_0$, то есть

$$\frac{d^n\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)} + a_0\varphi(t-t_0) = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{d\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)} = \frac{d\varphi(t-t_0)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d(t-t_0)}{dt}} = \frac{d\varphi(t-t_0)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{dt} = D\psi(t) \Rightarrow \frac{d^i\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^i} = D^i\psi(t).$$

И, следовательно, $D^n\psi(t) + a_{n-1}D^{n-1}\psi(t) + \ldots + a_1 D\psi(t) + a_0\psi(t) = 0$. То есть $\psi(t)$ также является решением уравнения (2.2.1) и при этом $D^i\psi(t)|_{t=t_0} = D^i\varphi(t-t_0)|_{t=t_0} = D^i\varphi(t)|_{t=0} = \xi_i$. ⊠

**Следствие.** *Если $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений нормированная при $t = 0$, то $\varphi_0(t - t_0), \ldots, \varphi_{n-1}(t - t_0)$ — фундаментальная система решений нормированная при $t = t_0$.*

Следовательно, решение задачи Коши $L_n x = 0$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i \ \forall i = \overline{0, n-1}$ имеет вид $x(t) = \xi_0\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t - t_0)$.

## 2.3 Построение фундаментальной системы решений линейного стационарного однородного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$L_n x = 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.3.1}$$

И пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен оператора $L_n$, имеющего вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$.

**Теорема.** *Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — корни над полем $\mathbb{C}$ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности $k_1, \ldots, k_s$ соответственно, то совокупность функций*

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \ldots, t^{k_i - 1} e^{\lambda_i t},\ i = \overline{1, s} \tag{2.3.2}$$

*является системой линейно независимых решений уравнения* (2.3.1).

♦ Покажем, что функции совокупности (2.3.2) являются решениями уравнения (2.3.1). Так как $\lambda_i$ — корень характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности $k_i$, то линейный оператор $L_n$ при факторизации представим в виде

$$L_n = L_{n-k_i}(D - \lambda_i D^0)^{k_i},$$

где $L_{n-k_i}$ — дифференциальный оператор $(n - k_i)$-ого порядка.
Следовательно, функция, являющаяся решением дифференциального уравнения $L_n x = L_{n-k_i} \underbrace{(D - \lambda_i D^0)^{k_i} x}_{=0}$, является решением уравнения (2.3.1).
Подействуем оператором $(D - \lambda_i D^0)^{k_i}$ на функцию $t^m e^{\lambda_i t}$, где $m < k_i$:

$(D - \lambda_i D^0)^{k_i}(t^m e^{\lambda_i t}) = (D - \lambda_i D^0)^{k_i - 1}(D - \lambda_i D^0)(t^m e^{\lambda_i t}) = (D - \lambda_i D^0)^{k_i - 1}(m t^{m-1} e^{\lambda_i t} + \lambda_i t^m e^{\lambda_i t} - \lambda_i t^m e^{\lambda_i t}) = m(D - \lambda_i D^0)^{k_i - 1}(t^{m-1} e^{\lambda_i t}) = m(m-1)(D - \lambda_i D^0)^{k_i - 2}(t^{m-2} e^{\lambda_i t}) = \ldots = m(m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 (D - \lambda_i D^0)^{k_i - m}(e^{\lambda_i t}) = m!(D - \lambda_i D^0)^{k_i - m - 1} \underbrace{(\lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i e^{\lambda_i t})}_{=0} = 0.$

Следовательно, функции $t^m e^{\lambda_i t}$ являются решениями уравнения (2.3.1) при $m < k_i$.

Покажем, что функции совокупности (2.3.2) линейно независимые. От противного. Пусть функции линейно зависимые, тогда существует нетривиальная линейная комбинация равная нулю. Она имеет вид

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_s(t)e^{\lambda_s t} = 0,$$

где $P_i(t)$ — многочлен степени не выше $k_i - 1$.
Пусть $P_m(t)$, $m < s$ — последний ненулевой многочлен из многочленов $P_i(t)$. Тогда полученная линейная комбинация имеет вид

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_m(t)e^{\lambda_m t} = 0,\ P_m(t) \neq 0. \tag{2.3.3}$$

Домножим равенство (2.3.3) на функцию $e^{-\lambda_1 t}$ и получим

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \ldots + P_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} = 0.$$

Затем продифференцируем полуенное равенство $k_1$ раз:
$D^{k_1} P_1(t) = 0;$
$D^{k_1}(P_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) = D^{k_1 - 1}(DP_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + (\lambda_2 - \lambda_1)P_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) =$

$$= D^{k_1-1}(\underbrace{(DP_2(t) + (\lambda_2 - \lambda_1)P_2(t))}_{Q_2(t)} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-1}(Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-2}(\widetilde{Q}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) =$$

$= \ldots = \widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$, где $Q_2(t)$, $\widetilde{Q}_2(t)$, $\widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)$ — многочлены той же степени, что и $P_1(t)$. Тогда

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + \widetilde{\widetilde{Q}}_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} = 0.$$

Проведем с полученным равенством ту же процедуру, что и с равенством (2.3.3), то есть домножим на $e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}$, а затем продифференцируем $k_2$ раз. В результате получим равенство вида

$$\widetilde{\widetilde{R}}_3(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} + \ldots + \widetilde{\widetilde{R}}_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_2)t} = 0,$$

где многочлены $\widetilde{\widetilde{R}}_i(t)$ имеют ту же степень, что и многочлен $P_i(t)$.
Продолжим эту процедуру $(m-1)$ раз. В результате получим выражение вида

$$\widetilde{\widetilde{U}}_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t} = 0,$$

где многочлен $\widetilde{\widetilde{U}}_m(t)$ имеет ту же степень, что и многочлен $P_m(t)$.
Из последнего равенства следует, что $\widetilde{\widetilde{U}}_m(t) = 0$, но тогда и $P_m(t) = 0$, что противоречит выбору $P_m$. Значит функции линейно независимые. ⊠

**Следствие.** *Если характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ *над полем* $\mathbb{C}$ *имеет только действительные корни, то совокупность* (2.3.2) *является фундаментальной системой решений уравнения* (2.3.1).

⧫ Если все $\lambda_i \in \mathbb{R}$, то (2.3.2) — совокупность $n$ действительных линейно независимых решений уравнения (2.3.1). ⊠

Если среди корней $\lambda_i$ существует мнимый корень $\lambda = \alpha + \beta i$, то в совокупности (2.3.2) этому корню соответствуют комплекснозначные решения вида $t^m e^{(\alpha+\beta i)t}$. А так как многочлен $\Delta(\lambda)$ имеет действительный коэффициент, то существует сопряженное число $\lambda = \alpha - \beta i$, также являющееся корнем характеристического уравнения, и, следовательно, в совокупности (2.3.2) будут содержаться решения вида $t^m e^{(\alpha-\beta i)t}$.
Заменим в совокупности (2.3.2) пару функций на функции

1. $\dfrac{t^m e^{(\alpha+\beta i)t} + t^m e^{(\alpha-\beta i)t}}{2} = t^m e^{\alpha t}\cos\beta t = Re(t^m e^{(\alpha+\beta i)t})$;
2. $\dfrac{t^m e^{(\alpha+\beta i)t} - t^m e^{(\alpha-\beta i)t}}{2i} = t^m e^{\alpha t}\sin\beta t = Im(t^m e^{(\alpha+\beta i)t})$.

Заметим, что новые функции являются линейными комбинациями функций из совокупности (2.3.2), следовательно, они также являются решениями. При этом матрица перехода от исходной линейно независимой системы функций к новой системе имеет определитель равный произведению определителей вида $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2i} \neq 0$. Следовательно, полученная система функций также линейно независимая, так как матрица перехода невырожденная.

## 2.4 Неоднородные стационарные линейные уравнения. Метод Коши. Метод Лагранжа.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L_n x = f(t),\ t \in \mathbb{I} \tag{2.4.1}$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$L_n x = 0. \tag{2.4.2}$$

Пусть $f(t)$ — непрерывная на $\mathbb{I}$ функция, и пусть оператор $L_n$ имеет вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$.

***Свойства решений линейных неоднородных уравнений:***

1. *Если $x_1$ — решение уравнения* (2.4.1), *то* $\forall x_0$ *решения уравнения* (2.4.2) *функция* $x_1 + x_0$ — *решение уравнения* (2.4.1).

   ♦ $L_n(x_1 + x_0) = L_n x_1 + L_n x_0 = f(t) + 0 = f(t)$. Следовательно, функция $x_1 + x_0$ является решением. ⊠

2. *Если $x_1$ — решение уравнения* (2.4.1), *то* $\forall x_2$ *решения уравнения* (2.4.1) *функция* $x_2 - x_1$ — *решение уравнения* (2.4.2).

   ♦ $L_n(x_2 - x_1) = L_n x_2 - L_n x_1 = f(t) - f(t) = 0$. Следовательно, функция $x_2 - x_1$ является решением. ⊠

3. **Принцип суперпозиции:** *Если $x_1(t)$ — решение уравнения $L_n x = f_1(t)$, а $x_2(t)$ — решение уравнения $L_n x = f_2(t)$ с непрерывными функциями $f_1$ и $f_2$, то $x_1 + x_2$ — решение уравнения $L_n x = f_1(t) + f_2(t)$.*

Из свойств 1 и 2 следует, что все решения неоднородного линейного уравнения (2.4.1) можно получить, если прибавить к частному решению неоднородного уравнения (2.4.1) все решения однородного уравнения (2.4.2). То есть

$$x_{\text{ОН}} = x_{\text{ОО}} + x_{\text{ЧН}}.$$

• *Пусть $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2) *нормированная при $t = 0$. Тогда функция $\varphi_{n-1}(t)$ называется* ***функцией Коши*** *линейного оператора $L_n$.*

**Теорема** (Метод Коши)**.** *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $\mathbb{I}$ и пусть $\varphi_{n-1}(t)$ — функция Коши оператора $L_n$. Тогда функция*

$$x_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau \tag{2.4.3}$$

*является решением уравнения* (2.4.1) $\forall t_0 \in \mathbb{I}$.

♦ По формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, получаем

$$\Big(\int\limits_{t_0}^{t} F(t, \tau) d\tau\Big)' = F(t, t) + \int\limits_{t_0}^{t} F'_t(t, \tau) d\tau.$$

Отсюда получаем

$$Dx_1 = \underbrace{\varphi_{n-1}\underbrace{(t - t)}_{=0}}_{=0} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} D\varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau;$$

$$D^2x_1 = \underbrace{D\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int\limits_{t_0}^{t} D^2\varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D^{n-1}x_1 = \underbrace{D^{n-2}\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int\limits_{t_0}^{t} D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau;$$

$$D^n x_1 = \underbrace{\underbrace{D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-t)}_{=1} f(t)}_{f(t)} + \int\limits_{t_0}^{t} D^n\varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Подставим и получим

$$L_n x_1 = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(D^n\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_{n-1}D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau) + \ldots + a_1 D\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_0 D^0\varphi_{n-1}(t-\tau)\Big) f(\tau)d\tau =$$

$$= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (L_n\varphi_{n-1}(t-\tau))f(\tau)d\tau.$$

Так как функция $\varphi_{n-1}$ является функцией Коши оператора $L_n$, то эта функция является решением уравнения (2.4.2). А функция $\varphi_{n-1}(t-\tau)$ является сдвигом функции Коши на $\tau$, а значит также является решением уравнения (2.4.2). Тогда $L_n\varphi_{n-1}(t-\tau) = 0$. Отсюда $L_n x_1 = f(t)$, и, следовательно, $x_1$ является решением уравнения (2.4.1). ⊠

**Следствие.** *Функция* (2.4.3) *является решением задачи Коши* $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = 0$, $\forall i = \overline{0, n-1}$.

**Следствие.** *Если* $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2), *нормированная при* $t = 0$, *то задача Коши* $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$ *имеет решение*

$$x(t) = \xi_0\varphi_0(t-t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

**Теорема** (Метод Лагранжа)**.** *Пусть* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2). *Тогда функция*

$$x_1(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + u_n(t)\varphi_n(t)$$

*является решением уравнения* (2.4.1), *если функции* $u_i(t)$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} Du_1\varphi_1 + \ldots + Du_n\varphi_n = 0, \\ Du_1 D\varphi_1 + \ldots + Du_n D\varphi_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Du_1 D^{n-2}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-2}\varphi_n = 0, \\ Du_1 D^{n-1}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-1}\varphi_n = f(t); \end{cases} \qquad (2.4.4)$$

♦ Определитель матрицы системы (2.4.4) равен Вронскиану системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Следовательно, он ненулевой, и система имеет единственное решение. Причем из принципа Крамера следует, что это решение состоит из непрерывных функций ($\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta_i$ непрерывная, $\Delta$ непрерывная и ненулевая). Тогда функции $Du_i$ интегрируемые, а следовательно и дифференцируемые.

Покажем, что функция $x_1(t)$ с найденными таким образом функциями $u_i$ является решением уравнения (2.4.1):

$$Dx_1 = \underbrace{Du_1\varphi_1 + \ldots + Du_n\varphi_n}_{=0} + u_1 D\varphi_1 + \ldots + u_n D\varphi_n;$$

$$D^2x_1 = \underbrace{Du_1 D\varphi_1 + \ldots + Du_n D\varphi_n}_{=0} + u_1 D^2\varphi_1 + \ldots + u_n D^2\varphi_n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{n-1}x_1 = \underbrace{Du_1 D^{n-2}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-2}\varphi_n}_{=0} + u_1 D^{n-1}\varphi_1 + \ldots + u_n D^{n-1}\varphi_n;$$

$$D^n x_1 = \underbrace{Du_1 D^{n-1}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-1}\varphi_n}_{f(t)} + u_1 D^n\varphi_1 + \ldots + u_n D^n\varphi_n.$$

Теперь подставим и вычислим $L_n x_1$:

$$L_n x_1 = f(t) + u_1(t)\underbrace{L_n\varphi_1(t)}_{=0} + \ldots + u_n(t)\underbrace{L_n\varphi_n(t)}_{=0}.$$

Множители нулевые, так как являются решениями уравнения (2.4.1). Следовательно, $L_n x_1 = f(t)$, то есть $x_1$ — решение уравнения (2.4.1). ⊠

## 2.5 Стационарное линейное неоднородное уравнение со специальной правой частью. Метод Эйлера.

Пусть линейный оператор $L_n$ имеет вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$, и пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен этого оператора.

**Теорема.** *Уравнение*

$$L_n z = P(t)e^{\gamma t},$$

*где $L_n$ — оператор дифференцирования с комплесными коэффициентами, $P(t)$ — многочлен с комплексными коэффициентами степени $m$ и $\gamma$ — комплексное число (то есть $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, $\deg P(t) = m$, $\gamma \in \mathbb{C}$), имеет частное решение вида*

$$z_1(t) = t^k Q(t)e^{\gamma t},$$

*где $Q(t) \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$, $k$ — кратность корня $\gamma$ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ (если $\gamma$ не корень, то $k = 0$).*

♦

1. Пусть $\gamma = 0$ и пусть $\gamma$ не является корнем характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то есть кратность $k = 0$. Пусть $P(t) = b_m t^m + \ldots + b_1 t + b_0$. Подставим функцию $z_1(t) = d_m t^m + d_{m-1}t^{m-1} + \ldots + d_1 t + d_0$ и приравняем соответствующие коэффициенты у многочленов в полученном равенстве:
   $t^m : a_0 \cdot d_m = b_m$, так как $\gamma$ не является корнем, то $a_0 \neq 0$, следовательно, $d_m = \dfrac{b_m}{a_0}$.

$t^{m-1}: a_1 \cdot m \cdot d_m + a_0 \cdot d_{m-1} = b_{m-1}$ и $d_{m-1} = \dfrac{1}{a_0}(b_{m-1} + a_1 \cdot m \cdot d_m)$.
$t^{m-2}: a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m + a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} + a_0 \cdot d_{m-2} = b_{m-2}$
и $d_{m-2} = \dfrac{1}{a_0}(b_{m-2} - a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} \cdot a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m)$.
Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим коэффициенты многочлена, являющиеся решением уравнения, причем его степень не выше $n$.

2. Пусть $\gamma = 0$ и пусть число $\gamma$ является корнем характеристиеского уравнения кратности $k > 0$. Тогда оператор $L_n$ имеет вид
$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_k D^{k-1},$$
причем $a_k \neq 0$.

   Введем функцию $D^k z = u$. Тогда $\widetilde{L}_{n-k}u = P(t)$, где $\widetilde{L}_{n-k}$ — оператор дифференцирования порядка $n-k$, причем $\gamma = 0$ не является для него корнем характеристического уравнения. По доказанному выше это уравнение имеет частное решение вида $u_1(t) = Q(t)$, где $\deg Q(t) \leqslant m$. Следовательно, $D^k z_1 = Q(t)$. Тогда $z_1$ можно найти проинтегрировав полученное равенство $k$ раз. В результате получим $z_1 = \widetilde{Q}(t)$. где $\deg \widetilde{Q}(t) = n + k$. Причем эпоследние $k$ коэффициентов этого многочлена являются произвольными постоянными. Так как нужно найти лишь одно решение, выберем значения этих произвольных постоянных равные нулю. В результате полученное решение имеет вид $z_1 = t^k\widetilde{\widetilde{Q}}(t)$, где $\deg \widetilde{\widetilde{Q}}(t) \leqslant m$.

3. Пусть $\gamma \neq 0$. И пусть кратность корня $\gamma$ равна $k$. Сделаем замену неизвестных функций $z(t) = u(t)e^{\gamma t}$. Тогда
$Dz = Due^{\gamma t} + u\gamma e^{\gamma t}$;
$D^2 z = D^2 ue^{\gamma t} + 2Du\gamma e^{\gamma t} + u\gamma^2 e^{\gamma t}$;
$D^3 z = D^3 ue^{\gamma t} + 3D^2 u\gamma e^{\gamma t} + 3D^u\gamma e^{\gamma t} + u\gamma^3 e^{\gamma t}$;
И так далее.
Подставим полученные выражения в уравнение и сократим полученное равенство на $e^{\gamma t}$. В результате получим уравнение вида $\widetilde{L}_n u = P(t)$. При этом оператор $\widetilde{L}_n$ имеет следующие коэффициенты:
$u: a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \ldots = \Delta(\gamma)$;
$Du: a_1 + 2\gamma a_2 + 3\gamma^2 a_3 + \ldots = \Delta'(\gamma)$;
$D^2 u: a_2 + 3\gamma a_3 + 6\gamma a_4 + \ldots = \dfrac{1}{2!}\Delta''(\gamma)$;
$D^i u: \dfrac{1}{i!}\Delta^{(i)}(\gamma)$.
Так как $\gamma$ является корнем многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности $k$, то $\gamma$ является корнем и для всех $\Delta^{(i)}(\lambda)$ $\forall i < k$. Следовательно, все коэффициенты оператора $\widetilde{L}_n$ при $D^{(i)}u$ равны нулю, если $i < k$. Значит оператор $\widetilde{L}_n$ имеет корень характеристического уравнения равный нулю кратности $k$. Тогда по доказанному выше уравнение $\widetilde{L}_n u$ имеет решение вида $u(t) = t^k Q(t)$, где $\deg Q(t) \leqslant m$. И следовательно, решение исходного уравнения имеет вид $z_1(t) = t^k Q(t)e^{\gamma t}$.

⊠

**Следствие.** *Уравнение*
$$L_n x = P(t)e^{\gamma t},$$
*где $x(t)$ — неизвестная действительная функция, $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, $\deg P(t) = m$, $\gamma \in \mathbb{R}$, имеет частное решение вида*
$$x_1(t) = t^k Q(t)e^{\gamma t},$$

*где* $Q(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q(t) \leqslant m$, $k$ *— кратность корня* $\gamma$ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$.

♦ Рассмотрим комплексное уравнение

$$L_n z = P(t)e^{\gamma t} + i \cdot 0.$$

Тогда из теоремы следует, что это уравнение имеет частное решение вида

$$z_1 = t^k Q(t) e^{\gamma t},$$

где $Q \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$. Но оператор $L_n$ имеет действительные коэффициенты, следовательно $Re(z)$ является решением уравнения $L_n x = Re(P(t)e^{\gamma t} + i \cdot 0) = P(t)e^{\gamma t}$, то есть $Re(z)$ является решением исходного уравнения, то есть

$$x_1(t) = t^k \widetilde{Q}(t) e^{\gamma t},$$

где $\widetilde{Q}(t) = Re(Q(t))$ и $\deg \widetilde{Q}(t) \leqslant m$. ⊠

**Следствие.** *Уравнение*

$$L_n x = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)),$$

*где* $P_1(t), P_2(t) \in \mathbb{R}[t]$, *причем* $\max\{\deg P_1(t), \deg P_2(t)\} = m$, *и* $(\alpha + \beta i)$ *— корень многочлена* $\Delta(\lambda)$ *крастности* $k$ *имеет решение вида*

$$x_1(t) = t^k e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)),$$

*где* $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q_1(t) \leqslant m$, $\deg Q_2(t) \leqslant m$, $k$ *— кратность корня* $(\alpha + \beta i)$ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$.

♦ Рассмотрим уравнение

$$L_n z = (P_1(t) - iP_2(t))e^{(\alpha+\beta i)t}.$$

Тогда по теореме это уравнение имеет решение вида

$$z_1 = t^k Q(t) e^{(\alpha+\beta i)t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$. Так как $L_n$ имеет действительные коэффициенты, то $Re(z_1)$ является действительным решением уравнения

$$L_n = Re((P_1(t) - iP_2(t))e^{(\alpha+\beta i)t}).$$

При этом $Re((P_1 - iP_2)e^{(\alpha+\beta i)t}) = Re(P_1 - iP_2)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) = e^{\alpha t}(P_1\cos\beta t + P_2\sin\beta t)$. То есть $Re(z_1)$ является решением исходного ууравнения. Обозначим $Q_1(t) = Re(Q(t))$, $Q_2(t) = -Im(Q(t))$. Тогда

$$Re(t^k Q(t)e^{(\alpha+\beta i)t}) = Re(t^k(Q_1 - iQ_2)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)) = t^k e^{\alpha t}(Q_1\cos\beta t + Q_2\sin\beta t),$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q_1(t), \deg Q_2(t) \leqslant m$. ⊠

## 2.6 Непрерывная зависимость решений от начальных данных.

Рассмотрим уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.6.1}$$

с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$. Пусть $x_0(t)$ — решение задачи Коши $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

• *Тогда для любого решения $x(t)$ уравнения* (2.6.1) *сумма*

$$\Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)|$$

*называется **отклонением** решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$. А сумма*

$$\Delta_x(t_0) = \Delta_x(t)|_{t=t_0} = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0)|$$

*называется **начальным отклонением**.*

• *Решение $x_0(t)$ называется **непрерывно зависящим от начальных данных** на промежутке $\mathbb{I}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x(t) \ \Delta_x(t) < \delta \Rightarrow \Delta_x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}.$$

Пусть решение $x(t)$ при $t = t_0$ имеет начальные значения $D^i x(t)|_{t=t_0} = \xi_i + \Delta\xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда $\Delta_x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta\xi_i|$.

Если $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений нормированная при $t = 0$ соответствующего однородного уравнения $L_n x = 0$, то по правилу Коши

$$x_0(t) = \xi_0\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) = (\xi_0 + \Delta\xi_0)\varphi_0(t - t_0) + \ldots + (\xi_{n-1} + \Delta\xi_{n-1})\varphi_{n-1}(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) - x_0(t) = \Delta\xi_0\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \Delta\xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t - t_0).$$

Тогда с помощью этого выражения получим

$$\Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)| = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i(x(t) - x_0(t))| = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta\xi_0 D^i\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \Delta\xi_{n-1} D^i\varphi_{n-1}(t - t_0)|. \tag{2.6.2}$$

Из (2.6.2) следует, что отклонение решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$ не зависит от самого решения $x_0(t)$, а зависит лишь от начального отклонения решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$. Следовательно, все решения уравнения (2.6.1) будут либо одновременно зависеть от начальных данных, либо одновременно независеть.

Кроме того из уравнения (2.6.2) следует, что отклонение $x(t)$ от $x_0(t)$ зависит лишь от функций $\varphi_i(t)$, которые являются решениями уравнения $L_n x = 0$ и не зависят от неоднородности $f(t)$. Следовательно, непрерывная зависимость от начальных данных решений зависит лишь от оператора $L_n$.

**Теорема.** *Если промежуток $\mathbb{I}$ является отрезком, то любое решение уравнения* (2.6.1) *непрерывно зависит от начальных данных.*

♦ Каждая из функций $\varphi_i(t)$ является решением уравнения $L_n x = 0$. Следовательно, они и все их производные до $(n-1)$-го порядка непрерывны на всей числовой прямой. А так как функции непрерывные на замкнутом множестве ограничены, то

$$\exists M : |D^i \varphi_j(t)| \leqslant M \quad \forall i, j = \overline{0, n-1}.$$

Тогда из (2.6.2)

$$\Delta_x(t) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j| \cdot |D^i\varphi_j(t-t_0)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j| \cdot M = \sum_{i=0}^{n-1}(M \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j|) = n \cdot M \cdot \Delta_x(t_0).$$

Следовательно, если начальное отклонение $\Delta_x(t_0) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{n \cdot M}$, то $\Delta_x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}$. ⊠

• *Решение уравнения* (2.6.1) *называется* ***интегрально непрерывным*** *на промежутке $\mathbb{I}$, если оно непрерывно зависит от начальных данных на любом отрезке $I_1 \subset \mathbb{I}$.*

**Следствие.** *Любое решение уравнения* (2.6.1) *с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$ интегрально непрерывно на $\mathbb{I}$.*

## 2.7 Устойчивость решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.7.1}$$

с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$. Пусть $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$.

• *Решение $x_0(t)$ уравнения* (2.7.1) *называется* ***устойчивым по Ляпунову***, *если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$. То есть*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta : \forall x(t)\; \Delta_x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0)| < \delta \Rightarrow \Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0.$$

• *Если кроме того $\lim\limits_{t\to+\infty} \Delta_x(t) = 0$, то решение $x_0(t)$ называется* ***асимптотически устойчивым***. *Решение не являющееся устойчивым называется* ***неустойчивым***.

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных данных следует, что все решения уравнения (2.7.1) либо одновременно устойчивы, либо одновременно неустойчивы.

• *Уравнение называется* ***устойчивым***, *если все его решения устойчивы (аналогично неустойчивым и асимптотически устойчивым).*

Кроме того, так как непрерывная зависимость решений от начальных данных не зависит от неоднородности $f(t)$, то неоднородность не влияет на устойчивость уравнения. Следовательно, исследование устойчивости любого решения уравнения (2.7.1) можно заменить исследованием устойчивости нулевого решения соответствующего однородного уравнения $L_n x = 0$. Таким образом, уравнение (2.7.1) является устойчивым, если

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta : \forall x(t)\ \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0)| < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t)| < \varepsilon.$$

**Теорема.** *1. Уравнение* (2.7.1) *устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части корней характеристического уравнения оператора* $L_n$ *неположительны, причем корни с нулевой действительной частью имеют кратность* $k = 1$.

*2. Уравнение* (2.7.1) *асимптотически устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части корней характеристического уравнения отрицательны.*

♦ $\Rightarrow$)

1. Пусть среди корней характеристического уравнения существует корень $\lambda_0 > 0$ или $\alpha_0 + \beta_0 i$, где $\alpha_0 > 0$. Тогда среди решений уравнения $L_n x = 0$ есть решения $Ce^{\lambda_0 t}$ или $Ce^{\alpha_0 t}\cos(\beta_0 t)$, $Ce^{\alpha_0 t}\sin(\beta_0 t)$, где $C$ — некоторая постоянная.
   Выбирая постоянную $C$ достаточно малую, можно получить решение, имеющее сколь угодно малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом стремящееся к $\infty$ при $t \to +\infty$, что делает невозможным устойчивость решения.
   Если характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_0 = 0$ или $\beta_0 i$ кратности $k > 1$, то такими свойствами будут обладать решения вида $Ct$, $Ct\cos(\beta_0 t)$, $Ct\sin(\beta_0 t)$.

2. Если же корни характеристического уравнения $\lambda_0 = 0$ или $\beta_0 i$ имеют кратность $k = 1$, то уравнение имеет решения вида $C$, $C\cos(\beta_0 t)$, $C\sin(\beta_0 t)$, которые при подходящем выборе постоянной $C$ будут иметь малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом к нулю стремиться не будут, что делает невозможным асимптотическую устойчивость.

$\Leftarrow$) Общее решение однородного уравнения является линейной комбинацией функций вида $t^k e^{\lambda t}$, $t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ и $t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, где $\lambda$, $\alpha + \beta i$ — корни характеристического уравнения. Если $\lambda < 0$ и $\alpha < 0$, то все эти функции и их производные стремятся к нулю при $t \to +\infty$. А следовательно и все решения уравнения стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Следовательно, уравнение асимптотически устойчиво.
Если $\lambda = 0$ и $\alpha = 0$, причем эти корни имеют кратность 1, то среди решений уравнения будут также решения вида 1, $\cos(\beta t)$, $\sin(\beta t)$. Эти функции вместе со своими производными являются ограниченными на всей числовой прямой. Следовательно, за счет выбора малого начального отклонения мы можем получить малое отклонение этого решения $x(t)$ от этого отклонения. ⊠

**Теорема.** *Для устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были неотрицательны.*
*Для асимптотической устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были положительны.*

♦

1. Пусть линейное уравнение (2.7.1) является асимптотически устойчивым. Все корни характеристического уравнения имеют вид $-\lambda_i$, $\alpha_j \pm \beta_j i$, где $\lambda_i$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_i > 0$, $\alpha_j > 0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_i (\lambda + \lambda_i) \cdot \prod_j (\lambda + \alpha_j - \beta_j i)(\lambda + \alpha_j + \beta_j i) = \prod_i (\lambda + \lambda_i) \cdot \prod_j (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)$$

   — произведение многочленов с положительными коэффициентами. Следовательно, характеристический многочлен — многочлен с положительными коэффициентами.

2. Если уравнение (2.7.1) устойчиво, но не асимптотически, то среди корней могут быть корни $\lambda = 0$, $\pm\beta_k i$, причем кратности корней равны 1. Следовательно, характеристический многочлен имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \prod_i (\lambda + \lambda_i) \cdot \prod_j (\lambda^2 + 2\alpha_j\lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \beta_k^2)$$

— произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами. Следовательно, $\Delta(\lambda)$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами.

⊠

## 2.8 Фазовая плоскость.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.8.1}$$

И пусть $x(t)$ — некоторое решение этого уравнения.

• ***Фазовым графиком*** *решения $x(t)$ называется график параметрически заданной функции вида*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = Dx(t); \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

• *Плоскость $\mathbb{R}^2$, на которой изображен фазовый график, называется* ***фазовой плоскостью***.

В соответствии с теоремой о существовании и единственности задачи Коши для любой точки плоскости $(x_0, y_0)$ найдется решение $x(t)$, которое при некотором $t = 0$ удовлетворяет условию

$$\begin{cases} x|_{t=t_0} = x_0, \\ Dx|_{t=t_0} = y_0; \end{cases}$$

следовательно, через любую точкую на фазовой плоскости проходит фазовый график.

**Теорема.** *Два графика уравнения* (2.8.1) *либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

⧫ Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения уравнения (2.8.1), и предположим, что их фазовые графики проходят через точку $(x_0, y_0)$, то есть $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x_1|_{t=t_1} = x_1, \\ Dx_1|_{t=t_1} = y_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2|_{t=t_2} = x_0, \\ Dx_2|_{t=t_2} = y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{x}(t) = x_1(t - t_2 + t_1)$. Функция $\widetilde{x}(t)$ является сдвигом решения $x_1$, следовательно, функция $\widetilde{x}(t)$ также является решением уравнения (2.8.1). При этом

$$\widetilde{x}|_{t=t_2} = x_1(t_2 - t_2 + t_1) = x_1|_{t=t_1} = x_0;$$

$$D\widetilde{x}|_{t=t_2} = Dx_1(t_2 - t_2 + t_1) = Dx_1|_{t=t_1} = y_0;$$

то есть функция $\widetilde{x}(t)$ имеет те же значения, что и функция $x_2$, то есть начальные значения функции $\widetilde{x}$ при $t = t_2$ совпадают с начальными значениями функции $\widetilde{x}$. Следовательно, функция $x_2$ равна функции $\widetilde{x}$, и $x_2$ является сдвигом функции $x_1$. А значит фазовый график функций их сдвига совпадает. ⊠

• *Решение, сохраняющее постоянное значение при всех $t$, называется* ***стационарным***.

Фазовый график стационарного решения $x(t) \equiv C$ состоит из единственной точки $(C, 0)$.

• *Точка, являющаяся фазовым графиком стационарного решения, называется* ***точкой покоя*** *уравнения.*

Фазовые графики нестационарных решений являются параметрически заданными линиями. На таких линиях принято указывать направление движения точки с координатами $(x(t), y(t))$ при увеличении $t$. В дальнейшем под фазовым графиком будем понимать ориентированный фазовый график.

Пусть фазовый график решения $x(t)$ проходит через точку $(x_0, y_0)$. Следовательно, $\exists t_0$ : $y_0 = Dx(t_0)$. Если $y_0 > 0$, то $Dx(t_0) > 0$. И, следовательно, функция $x(t)$ в точке $t_0$ возрастает. Тогда направление фазового графика в точках верхней полуплоскости происходит слева направо. Аналогично двивжение по графикув точках нижней полуплоскости происходит справа налево. Так как угловой коэффициент в точке $(x(t), y(t))$ равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{D^2x(t)}{Dx(t)} = \frac{-a_1Dx - a_0x}{Dx} = \frac{-a_1y - a_0x}{y},$$

то в точках плоскости, для которых $-a_1y - a_0x = 0$, касательные к фазовым графикам параллельны оси $Ox$. А в точках, для которых $y > 0$ (ось $Ox$), фазовые графики имеют касательные параллельные оси $Oy$.

## 2.9 Классификация точек покоя.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9.1}$$

Любое уравнение вида (2.9.1) имеет стационарное решение $x(t) \equiv C$. Следовательно, точка $O(0, 0)$ является точкой покоя для этого уравнения. Построим фазовый график для других решений. Пусть $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — корни характеристического уравнения (2.9.1) записанные с учетом кратности.

**I группа.** Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
Тогда фазовые графики решений решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{2.9.2}$$

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Тогда, исключая из системы $t$, получим уравнение $y = \lambda_1x$. Причем, если $C_1 > 0$, то $x > 0$, а если $C_1 < 0$, то $x < 0$. Следовательно, лучи $y = \lambda_1x, x > 0$ и $y = \lambda_1x, x < 0$ являются фазовыми траекториями этих решений.

2. Пусть $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тогда фазовыми графиками являются лучи $y = \lambda_2x, x > 0$ и $y = \lambda_2x, x < 0$.

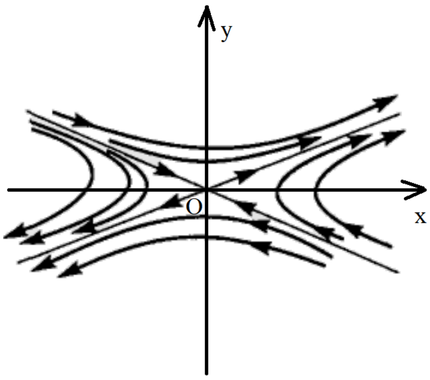
3. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Заметим, что при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ фазовые графики уходят в бесконечность.

Найдем асимптоты фазовых графиков ($y = kx + b$):

$$k = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\lambda_2}{C_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2} = \lambda_2.$$

$$b = \lim_{t\to+\infty} (y - \lambda_2 x) = \lim_{t\to+\infty} (C_1 e^{\lambda_1 t}(\lambda_1 - \lambda_2)) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = \lambda_2 x$ является асимптотой фазовых графиков при $t \to +\infty$. Аналогично можно доказать, что при $t \to -\infty$ асимптотой является прямая $y = \lambda_1 x$.




• *Точки покоя, в окрестности которых фазовые графики имеют такой вид, называются* ***седлом***.

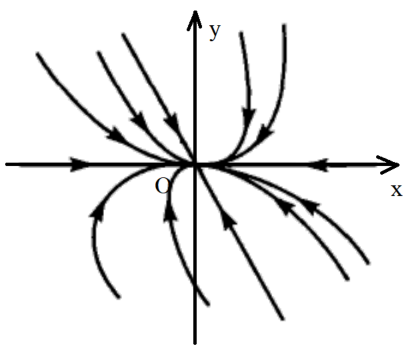
**II группа.** Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.
Тогда фазовые графики описываются уравнениями (2.9.2).

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, тогда фазовыми траекториями являются лучи $y = \lambda_1 x, x > 0$ и $y = \lambda_1 x, x < 0$.

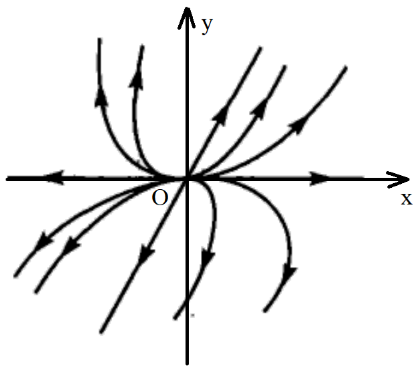
2. Пусть $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тогда фазовыми траекториями являются лучи $y = \lambda_2 x, x > 0$ и $y = \lambda_2 x, x < 0$.

3. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

   (a) Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Тогда при $t \to +\infty$ фазовый график стремится к точке $O(0,0)$. А при $t \to -\infty$ уходит в бесконечность.
   Найдем асимптоты. $k = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lambda_2$. Следовательно, прямая $y = \lambda_2 x$ является асимптотой. При $t \to -\infty$ $k = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lambda_1$, а $b = \lim\limits_{t\to+\infty} (y - \lambda_1 x) = \infty$.



(b) Аналогично можно получить, что фазовые графики для случая $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ выглядят следующим образом.




• *Точка покоя, в окрестности которой фазовый график имеет такой вид, называется* ***бикритическим узлом****. Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

**III группа.** Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда фазовые графики решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \\ y(t) = (C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t)e^{\lambda t}. \end{cases}$$

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Исключив из параметрического уравнения $t$, лучи $y = \lambda x$, $x > 0$ и $y = \lambda x$, $x < 0$ являются фазовыми графиками.

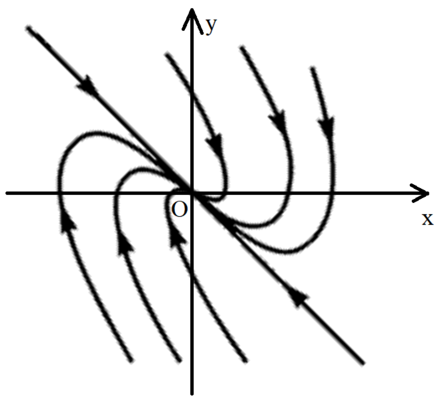
2. Пусть $C_2 \neq 0$.

   (a) Пусть $\lambda < 0$. Тогда фазовый график при $t \to +\infty$ стремится к точку $O(0, 0)$. Если $t \to -\infty$, то фазовый график уходит на бесконечность.
   Найдем асимптотические направления:

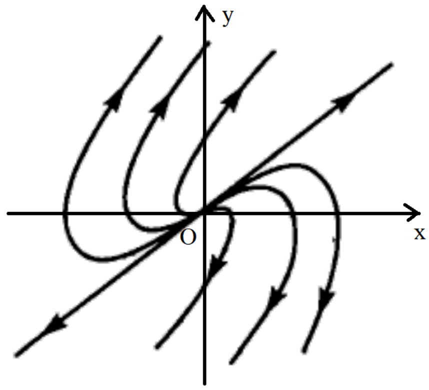
$$k = \lim_{t \to +\infty} \frac{(C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t)e^{\lambda t}}{(C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}} = \lambda;$$

$$b = \lim_{t \to +\infty} y(t) - \lambda x(t) = C_2 e^{\lambda t} = 0.$$

   Отсюда $y = \lambda x$ — асимптота фазовых графиков при $t \to +\infty$. Аналогично при $t \to -\infty$ асимптот нет. Прямая $y = \lambda x$ задает асимптотическое направление.



(b) Пусть $\lambda > 0$. Тогда фазовый график при $t \to +\infty$ уходит на бесконечность, а при $t \to -\infty$ стремится к точке $O(0,0)$. Аналогично фазовый график выглядит следующим образом.



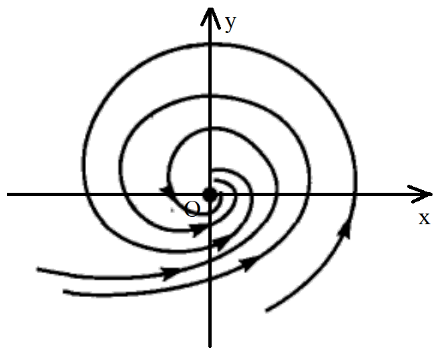

• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики имеют такой вид, называется* ***монокритическим узлом***. *Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

**IV группа.** Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

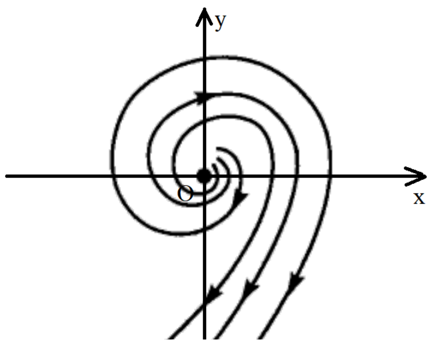
1. Пусть $\alpha = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \\ y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \alpha \cos(\beta t) + C_2 \alpha \sin(\beta t) - C_1 \beta \sin(\beta t) + C_2 \beta \cos(\beta t)). \end{cases}$$

(a) Если $\alpha < 0$, то фазовый график при $t \to +\infty$ стремится к точке $O(0,0)$, а при $t \to -\infty$ уходит на бесконечность. При этом изменение $t$ от $-\infty$ до $+\infty$ функции $x(t)$ и $y(t)$ меняют знак бесконечное количество раз. Следовательно, графики имеют вид




(b) Если $\alpha > 0$, то аналогично можно получить, что фазовые графики имеют вид



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называются* ***фокусом****. Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

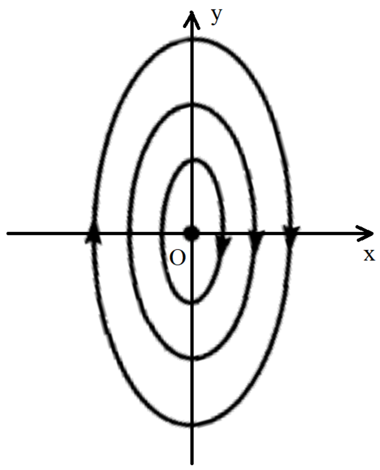
2. Пусть $\alpha = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t), \\ y(t) = -C_1\beta \sin(\beta t) + C_2\beta \cos(\beta t). \end{cases}$$

Исключим из системы $t$. Тогда

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{\beta}\right)^2 = C_1^2 + \frac{C_2^2}{\beta} \text{ — эллипс.}$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид

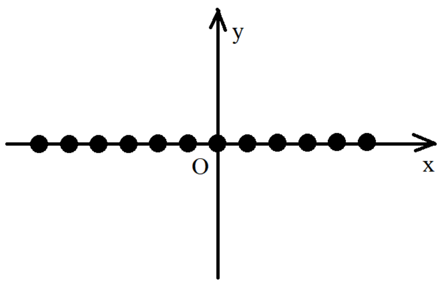



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называется* ***центром****.*

**V группа.** Пусть среди корней характеристического уравнения есть 0. Тогда в уравнении (1) $a_0 = 0$, и уравнение имеет бесконечно много решений вида $x = C$, фазовые графики которых описываются уравнениями

$$\begin{cases} x = C, \\ y = 0; \end{cases}$$

и имеют вид



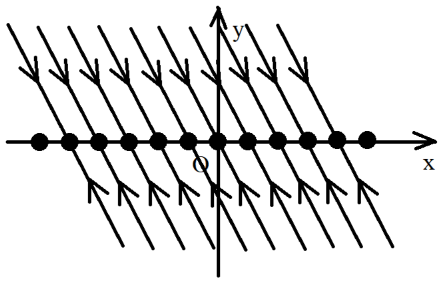

Следовательно, каждая точка оси $Ox$ является точкой покоя.

• *Прямая, каждая точка которой является фазовым графиком, называется* ***прямой покоя****.*

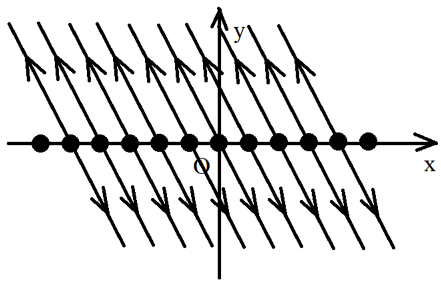
1. Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{\lambda t}, \\ y(t) = \lambda C_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Исключив из системы $t$, получим $y = \lambda(x - C_1)$. Получаем, что фазовые графики имеют вид
$\lambda < 0$



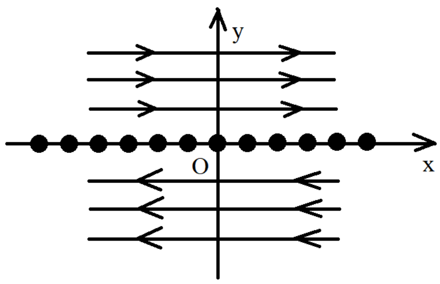

$\lambda > 0$




2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 t, \\ y(t) = C_2. \end{cases}$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид



# Глава 3

# Линейные стационарные векторные уравнения.

## 3.1 Системы стационарных линейных уравнений.

• ***Системой дифференциальных уравнений*** *называется совокупность выражений вида*

$$F_i(t, x_1(t), Dx_1, \ldots, D^{m_1}x_1, x_2(t), Dx_2, \ldots, D^{m_2}x_2, \ldots, x_k(t), D^k x, \ldots, D^{m_k}x_k) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, s, \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R},$$

*где $F_i$ — некоторая функция от своих $(m_1 + \ldots + m_k + k + 1)$ переменных.*

• *Говорят, что система дифференциальных уравнений* ***имеет нормальную форму****, если она состоит из уравнений вида*

$$D^{m_i}x_i(t) = f_i(t, x_1(t), Dx_1, \ldots, D^{m_1-1}x_1, \ldots, x_k(t), Dx_k, \ldots, D^{m_k-1}x_k), \quad i = 1, \ldots, k.$$

• *Если функции $f_i$ являются линейными функциями от неизвестных функций $x_i(t)$ и их производных, то система называется* ***линейной****.*

Линейную систему из $k$ уравнений можно заменить эквивалентной ей системой из $m_1 + \ldots + m_k$ линейных уравнений первого порядка. Следовательно, любое линейное уравнение можно свести к системе из $k$ уравнений.

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать лишь системы следующего вида

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Dx_n = a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t); \end{cases} \quad t \in \mathbb{I}. \tag{3.1.1}$$

• ***Решением*** *системы* (3.1.1) *называется совокупность непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{I}$ функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, обращающих систему* (3.1.1) *в верное равенство.*

• *Если коэффициенты систем* (3.1.1) *являются постоянными, то системы называются* ***стационарными линейными****.*

• ***Задачей Коши*** *для системы* (3.1.1) *называется задача отыскания решения системы* (3.1.1)*, удовлетворяющего условиям*

$$x_1|_{t=t_0} = \xi_0, x_2|_{t=t_0} = \xi_1, \ldots, x_n|_{t=t_0} = \xi_n, \quad t_0 \in \mathbb{I}.$$

Обозначив $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $DX(t) = \begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ \vdots \\ Dx_n(t) \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, систему (3.1.1) можно записать в матричном виде

$$DX = AX + f(t). \tag{3.1.2}$$

А начальные условия задачи Коши в виде $X|_{t=t_0} = \xi$, где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

• *Уравнение* (3.1.2) *называется* ***линейным стационарным векторным уравнением.***

• *Если в уравнении* (3.1.2) *матрицы $X$, $A$, $f$ являются комплекснозначными, то уравнение называется* ***комплекснозначным.***

**Лемма.** *Задача Коши для комплекснозначного уравнения*

$$DZ = CZ + h(t), \quad Z|_{t=t_0} = \xi \tag{3.1.3}$$

*с треугольной матрицей $C \in \mathbb{C}_{n,n}$ и непрерывной на $\mathbb{I}$ комплекснозначной функцией $h(t)$ имеет единственное решение $\forall t_0 \in \mathbb{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{C}_{n,1}$.*

⧫ Пусть $C$ — нижняя треугольная матрица. Тогда задача Коши (3.1.3) в кооржинатной форме имеет вид

$$\begin{cases} Dz_1 = c_{11}z_1 + h_1(t), \\ Dz_2 = c_{21}z_1 + c_{22} + h_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dz_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \ldots + c_{nn}z_n + h_n(t); \end{cases}$$

При этом $\begin{cases} z_1|_{t=t_0} = \xi_1, \\ z_2|_{t=t_0} = \xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_n|_{t=t_0} = \xi_n, \end{cases}$ Из него следует, что $z_1(t)$ — решение задачи Коши для линейного стационарного уравнения первого порядка. Такое решение всегда существует и единственно. Подставим его во второе уравнение. Получим, что $z_2(t)$ также решение стационарного линейного уравнения первого порядка, которое также существует и единственно. Продолжая далее аналогично, построим векторную функцию $z(t)$, которая является единственным решением задачи Коши (3.1.3).

Лемма для верхней треугольной матрицы доказывается аналогично, начиная с последнего уравнения. ⊠

**Теорема.** *Задача Коши для действительного стационарного уравнения*

$$DX = AX + f(t), \quad X|_{t=t_0} = \xi \tag{3.1.4}$$

*с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ имеет единственное решение $\forall t_0 \in \mathbb{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}_{n,1}$.*

♦ Любая действительная матрица $A$ над полем $\mathbb{C}$ имеет жорданову нормальную форму, то есть подобную ей комплексную жорданову матрицу $J \in \mathbb{C}_{n,n}$. То есть существует невырожденная матрица $S(s_{ij}) \in \mathbb{C}_{n,n} : J = S^{-1}AS$. Сделаем в уравнении (3.1.4) замену $X = SZ$. Тогда $D(SZ) = D \begin{pmatrix} s_{11}z_1 + \ldots + s_{1n}z_n \\ \vdots \\ s_{n1}z_1 + \ldots + s_{nn}z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}Dz_1 + \ldots + s_{1n}Dz_n \\ \vdots \\ s_{n1}Dz_1 + \ldots + s_{nn}Dz_n \end{pmatrix} = SDZ.$

Тогда $SDZ = ASZ + f(t)$, $SZ|_{t=t_0} = \xi$.

Домножим полученные уравнения на $S^{-1}$ и получим

$$DZ = \underbrace{S^{-1}AS}_{J} Z + S^{-1}f(t), \quad Z|_{t=t_0} = S^{-1}\xi.$$

В результате получими задачу Коши для комплекснозначного уравнения с матрицей $J$, которая является треугольной, так как жорданова матрица треугольная. По лемме это уравнение имеет единственное решение $Z(t)$. Следовательно, функция $X(t) = SZ(t)$ является решением исходной задачи Коши (3.1.4).
Но в общем случае это решение является комплекснозначным, то есть имеет вид $X(t) = U(t) + iV(t)$, где $U(t)$ и $V(t)$ — действительные векторные функции. Подставим это выражение в уравнение (3.1.4):

$$DU + iDV = \underset{\in\mathbb{R}}{A}(U + iV) + \underset{\in\mathbb{R}}{f(t)}, \quad (U + iV)|_{t=t_0} = \underset{\in\mathbb{R}}{\xi}.$$

Приравняем в полученном равенстве действительные части слева и справа:

$$DU = AU + f(t), \quad U|_{t=t_0} = \xi.$$

Следовательно, векторная функция $U(t) = Re(X(t))$ является единственным решением задачи Коши (3.1.4). ⊠

## 3.2 Структура множества решений линейной стационарной системы однородных уравнений.

Рассмотрим стационарное линейное уравнение

$$DX = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}_{n,n}. \tag{3.2.1}$$

И пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — два решения уравнения (3.2.1). Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $D(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha DX_1 + \beta DX_2 = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = A(\alpha X_1 + \beta X_2)$. И, следовательно, векторная функция $\alpha X_1 + \beta X_2$ также является решением уравнения (3.2.1). Таким образом, множество решений системы (3.2.1) является **векторным пространством**.

• *Пусть* $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, …, $X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ *— некоторые векторные функции.*
*Определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

*называется* ***определителем Вронского*** *системы* $X_1, \ldots, X_n$.

**Теорема.** *Если векторные функции $X_1, \ldots, X_n$ линейно зависимы, то их $W(t) = 0$ $\forall t$.*

♦ Если эти функции линейно зависимы, то одна из них линейно выражается через остальные. Следовательно, один из столбцов определителя равен линейной комбинации остальных столбцов. Тогда $W(t) = 0$. ⊠

**Теорема.** *Если определитель Вронского системы рещений $X_1, \ldots, X_n$ равен нулю хотя бы в одной точке $t_0$, то эти векторные функции линейно зависимые.*

♦ Пусть $\exists t_0 \in \mathbb{R} : W(t_0)$ системы решений $X_1, \ldots, X_n$ равен нулю. Следовательно, ранг Вронскиана меньше его порядка и столбцы этой матрицы линейно зависимые. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 X_1(t_0) + \ldots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$. Рассмотрим решение $X(t) = \alpha_1 X_1(t_0) + \ldots + \alpha_n X_n(t_0)$. Так как столбец $X(t)$ является линейной комбинацией решений уравнения (3.2.1), то он также является решением уравнения (3.2.1) и при этом $X|_{t=t_0} = \alpha_1 X_1(t_0) + \ldots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$.

Заметим, что векторная функция $Y(t) \equiv 0$ также является решением уравнения (3.2.1), удовлетворяющим тем же начальным условиям. ПО теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $Y(t) = X(t)$, то есть $X(t) \equiv 0$ и, следовательно, решения $X_1, \ldots, X_n$ линейно зависимые. ⊠

**Следствие.** *Если определитель Вронского решений системы* (3.2.1) *равен нулю при некотором $t_0$, то он равен нулю при любом $t$.*

♦ Если при некотором $t_0$ $W(t_0) = 0$, то по второй теореме решения линейно зависимые. Следовательно, по первой теореме $W(t) = 0$ $\forall t$. ⊠

**Следствие.** *Если система решений уравнения* (3.2.1) *линейно независимая, то их $W(t) \neq 0$ $\forall t$.*

♦ Следует из второй теоремы. ⊠

Рассмотрим $n$ задач Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = E_i$, где $E_i$ — $i$-ый столбец единичной матрицы $E = [E_1, \ldots, E_n]$. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши все эти задачи Коши имеют единственные решения. Обозначим их $X_1(t), \ldots, X_n(t)$. Вронскиан этой системы решений при $t = t_0$ равен $\det E = 1 \neq 0$. Следовательно, эти решения линейно независимые.

Покажем, что любое решение уравнения (3.2.1) является линейной комбинацией этих решений. Пусть $X(t)$ — произвольное решение уравнения (3.2.1) и пусть $X(t_0) = \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,1}$. Рассмотрим векторную функцию $Y(t) = \xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n$. Так как $Y(t)$ — линейная комбинация решений системы (3.2.1), то $Y(t)$ также решение и при этом

$$Y(t_0) = \xi_1 X_1(t_0) + \ldots + \xi_n X_n(t_0) = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \xi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

То есть $X(t)$ и $Y(t)$ являются решениями одной задачи Коши. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $X(t) = Y(t) = \xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n$. Следовательно, $X_1, \ldots, X_n$ — базис пространства решений системы (3.2.1). Таким образом, общее решение имеет вид

$$X_{\text{ОР}}(t) = C_1 X_1 + \ldots + C_n X_n, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}.$$

• *Базис пространства решений однородного уравнения* (3.2.1) *называется* ***фундаментальной системой решений***.

• *Матрица* $\Phi(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ *называется* ***фундаментальной матрицей*** *системы* (3.2.1).

Фундаментальная матрица невырожденная при любом $t$.

• *Фундаментальная система решений называется* ***нормированной при*** $t = t_0$, *если ее* $\Phi(t_0) = E$.

Общее решение уравнения (3.2.1) в матричном виде с использованием фундаментальной матрицы может быть записано следующим образом:

$$X_{\text{OP}}(t) = \Phi(t) \cdot C, \quad \forall C \in \mathbb{R}_{n,1}.$$

Если $X(t)$ — решение задачи Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, то $X(t_0) = \Phi(t_0) \cdot C = \xi$. Так как матрица $\Phi(t_0)$ невырожденная, то $\exists \Phi^{-1}(t_0) : C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi.$$

## 3.3 Метод Эйлера построения фундаментальной системы решений линейных векторных уравнений.

Рассмотрим линейное векторное уравнение

$$DX = AX, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3.1}$$

Найдем решение этого уравнения в виде

$$X(t) = B_0 e^{\lambda t}, \tag{3.3.2}$$

где $B_0$ — некоторый ненулевой столбец ($B_0 \in \mathbb{R}_{n,1}$). Подставим функцию (3.3.2) в уравнение (3.3.1):

$$\lambda B_0 e^{\lambda t} = A B_0 e^{\lambda t} \Longleftrightarrow A B_0 - \lambda B_0 = 0 \Longleftrightarrow (A - \lambda E) B_0 = 0.$$

Столбец $B_0$ является ненулевым решением полученного матричного уравнения, если $\det(A - \lambda E) = 0$. Следовательно, $\lambda$ — собственное значение матрица $A$, а $B_0$ — собственный вектор, соответствующий этому значению.

Таким образом, функция (3.3.2) является ненулевым решением уравнения (3.3.1), если $B_0$ — собственный вектор, $\lambda$ — собственное значение.

Если матрица $A$ является матрицей простой структуры, то существует базис пространства $\mathbb{R}_{n,1}$ составленный из собственных векторов матрицы $A$. Тогда, используя этот базис, можем построить $n$ решений вида (3.3.2) системы (3.3.1), которые являются линейно независимыми, так как определитель Вронского этой системы решений при $t = 0$ равен определителю матрицы, составленной из $n$ линейно независимых собственных векторов, а значит не равен нулю.

Если матрица $A$ не является матрицей простой структуры, то для нее всегда существует в общем случае комплексная подобная жорданова матрица, а следовательно для этой матрицы существует в общем случае комплексный жордановый базис.

**Теорема.** *Если $B_0, B_1, \ldots, B_k$ — жорданова цепочка матрицы $A$, соответствующая собственному значению $\lambda_0$, то векторная функция*

$$X(t) = (B_0\frac{t^k}{k!} + B_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_2\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + B_{k-1}\frac{t}{1!} + B_k)e^{\lambda t} \tag{3.3.3}$$

*является решением уравнения* (3.3.1).

♦ Вычислим для векторной функции (3.3.3) векторную функцию $AX - DX$:
$AX - DX = A(B_0\frac{t^k}{k!} + B_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + B_{k-1}\frac{t}{1!} + B_k)e^{\lambda_0 t} - (B_0\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_1\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + B_{k-1})e^{\lambda_0 t} + \lambda_0(B_0\frac{t^k}{k!} + B_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + B_{k-1}\frac{t}{1!} + B_k)e^{\lambda_0 t}$.
Сравним коэффициенты:
$t^k e^{\lambda_0 t} : AB_0\frac{1}{k!} - \lambda_0 B_0\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}(A - \lambda_0 E)B_0 = 0$, так как $B_0$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_0$.
$t^{k-1}e^{\lambda_0 t} : \frac{1}{(k-1)!}AB_1 - \frac{1}{(k-1)!}B_0 - \frac{1}{(k-1)!}\lambda_0 B_1 = \frac{1}{(k-1)!}(AB_1 - \lambda_0 B_1 - B_0) = \frac{1}{(k-1)!}(\underbrace{(A - \lambda_0 E)B_1}_{B_0} - B_0) = 0$, так как $B_1$ — вектор присоединенный к $B_0$.
Продолжая аналогично, получим, что $AX - DX = 0$. Следовательно, $DX = AX$, то есть $X$ — решение уравнения (3.3.1). ⊠

Так как для жордановой цепочки $B_0, \ldots, B_k$ длины $(k+1)$ любая ее подсистема $B_0, B_1, \ldots, B_m$, $0 \leqslant m \leqslant k$, также является жордановой цепочкой, то, используя жоданову цепочку длины $(k+1)$, можно построить $(k+1)$ решение системы (3.3.1).

Следовательно, используя жорданов базис матрицы $A$ составленный из жордановых цепочек, можно построить ровно $n$ различных решений уравнения (3.3.1).

Если вычислить значение фундаментальной матрицы составленной из этих решений при $t = 0$, получим матрицу, состоящую из жорданового базиса матрицы $A$, которая невырожденная. Следовательно, построенная система решений линейно независимая.

Если среди собственных значений матрицы $A$ существуют мнимые, то собственные и присоединенные векторы, соответствующие этим собственным значениям, также мнимые. И построенные решения являются комплекснозначными. Но так как матрица $A$ действительная, их действительные и мнимые части являются линейно независимыми действительными решениями. Следовательно, используя комплексное собственное значение кратности $k$ можно построить $2k$ линейно независимых действительных решений. При этом аналогично построенные решения для сопряженного мнимого значения новыми независимыми решениями не являются.

## 3.4 Матричный метод построения фундаментальной системы решений линейных стационарных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX, \tag{3.4.1}$$

где $A$ — матрица $n \times n$, $X$ — вектор-функция. Пусть $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность матриц одного порядка.

• *Матрица $A$ называется* ***пределом*** *этой последовательности, если*
$$\forall \varepsilon \ \exists N : \forall i > N \quad \|A - A_i\| < \varepsilon.$$

• *Ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ *называется* ***сходящимся****, если существует предел частных сумм.*

Матричный ряд сходится $\Longleftrightarrow$ сходятся все ряды, образованные из соответствующих элементов этих матриц.

Рассмотрим ряд
$$E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots . \tag{3.4.2}$$
Модуль любого элемента матрицы $A^k$ не превосходит $\left\|A^k\right\|$, которая по определению матричной нормы не превосходит $\|A\|^k$. Тогда ряды, состоящие из соответствующих элементов матриц $\dfrac{A^i}{i!}$, имеют сходящуюся числовую мажоранту
$$1 + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \ldots = e^{\|A\|},$$
а, следовательно, являются сходящимися.

• *Ряд* (3.4.2) *также является сходящимся матричным рядом, обозначается* $e^A$ *и называется* ***матричной экспонентой****.*

Ряд (3.4.2) является сходящимся для любой матрицы $A$.

***Свойства матричной экспоненты:***

1. $e^0 = E$ (0 — *нулевая матрица*).

2. *Если матрицы $A$, $B$ перестановочны, то есть $AB = BA$, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.*

   ♦ $e^A \cdot e^B = \left(E + \dfrac{A}{1!} + \dfrac{A^2}{2!} + \dfrac{A^3}{3!} + \ldots\right)\left(E + \dfrac{B}{1!} + \dfrac{B^2}{2!} + \dfrac{B^3}{3!} + \ldots\right) = E + \left(\dfrac{A}{1!} + \dfrac{B}{1!}\right) + \left(\dfrac{A^2}{2!} + \dfrac{A \cdot B}{1!} + \dfrac{B^2}{2!}\right) + \ldots = E + \dfrac{A+B}{1!} + \dfrac{A^2 + 2AB + B^2}{2!} + \ldots = [AB = BA,$ иначе свернуть нельзя$] = E + \dfrac{A+B}{1!} + \dfrac{(A+B)^2}{2!} + \ldots = e^{A+B}$. ⊠

3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

   ♦ Так как матрицы $A$ и $-A$ перестановочны, то по второму свойству $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E$. ⊠

Рассмотрим матричную экспоненту
$$e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^k}{k!}t^k + \ldots, \tag{3.4.3}$$
где $t$ — некоторая действительная переменная. При любом фиксированном $t$ ряд (3.4.3) является сходящимся. На любом ограниченном промежутке ряд (3.4.3) является равномерно сходящимся, так как для него существует сходящийся числовой мажорирующий ряд. Тогда
$$D(e^{At}) = A + \frac{2A^2}{2!}t + \frac{3A^3}{3!}t^3 + \ldots = A\left(E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots\right) = Ae^{At} = e^{At}A.$$

**Теорема.** *Задача Коши* $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$ *имеет единственное решение*

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi.$$

⧫ Задача Коши имеет единственное решение по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Покажем, что вектор-функция $X(t)$ является этим решением:

$$DX = D(e^{A(t-t_0)}\xi) = D(e^{At}e^{-At_0}\xi) = D(e^{At})e^{-At_0}\xi = Ae^{At}e^{-At_0}\xi = Ae^{A(t-t_0)}\xi = AX(t),$$

то есть $X(t)$ — решение. И при этом $X|_{t=t_0} = e^{A(t-t_0)}\xi = e^{A\cdot 0}\xi = e^0\xi = E\xi = \xi$. ⊠

**Следствие.** *Матрица* $e^{A(t-t_0)}$ *является фундаментальной матрицей уравнения* (3.4.1), *нормированной в точке* $t = t_0$.

⧫ Так как $i$-ый столбец матрицы $e^{A(t-t_0)}$ представим в виде $e^{A(t-t_0)}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} i$, то он является решением задачи Коши для уравнения (3.4.1) с начальным условием $X|_{t=t_0} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Следовательно, каждый столбец матрицы $A(t-t_0)$ — решение уравнения (3.4.1). При $t = t_0$ матрица $e^{A(t-t_0)} = E$, следовательно, совокупность решений уравнения (3.4.1), образующих матрицу $e^{A(t-t_0)}$, имеет невырожденный Вронскиан в точке $t = t_0$. А значит эти решения линейно независимые. То есть матрица $e^{A(t-t_0)}$ фундаментальная. ⊠

Таким образом, общее решение уравнения (3.4.1) имеет вид

$$X_{\text{OO}}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}.$$

## Вычисление матричной экспоненты.

$\forall A \in \mathbb{C}_{n,n}$ $\exists J$ — жорданова нормальная форма, то есть $\exists$ невырожденная матрица $S : J = S^{-1}AS \Rightarrow A = SJS^{-1}$. Следовательно, $e^{At} = e^{(SJS^{-1})t} = SES^{-1} + \dfrac{SJS^{-1}}{1!}t + \dfrac{SJS^{-1}SJS^{-1}}{2!}t^2 + \ldots = S\Big(E + \dfrac{J}{1!}t + \dfrac{J^2}{2!}t^2 + \dfrac{J^3}{3!}t^3 + \ldots\Big)S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1}$.

Пусть $J = diag[J_1, \ldots, J_k]$, где $J_i$ — жордановы клетки. Следовательно, $e^{Jt} = diag(e^{J_1 t}, \ldots, e^{J_k t})$.

Вычислим матричную экспоненту для клетки Жордана:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}; \quad J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 \end{pmatrix}; \quad J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда первый элемент матрицы $e^{Jt}$ равен

$$1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \dots = e^{\lambda t}.$$

Второй элемент матрицы $e^{Jt}$ равен

$$0 + \frac{1}{1!}t + \frac{2\lambda}{2!}t^2 + \frac{3\lambda^2}{3!}t^3 + \dots = t\Big(1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \dots\Big) = te^{\lambda t}.$$

Следующий элемент будет равен $\dfrac{t^2}{2!}e^{\lambda t}$. И так далее. В итоге получим

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

## 3.5 Неоднородные стационарные линейные векторные уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{3.5.1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \tag{3.5.2}$$

**Теорема.** *Если* $X_1(t)$ *— некоторое решение уравнения* (3.5.1), *то* $\forall X_0(t)$ *решения уравнения* (3.5.2) *вектор-функция* $X_1 + X_0$ *— решение уравнения* (3.5.1).

♦ $D(X_1 + X_0) = DX_1 + DX_0 = AX_1 + f(t) + AX_0 = A(X_1 + X_0) + f(t).$ ⊠

**Теорема.** *Если* $X_1(t)$ *— решение уравнения* (3.5.1), *то* $\forall X_2(t)$ *решения уравнения* (3.5.1) *вектор-функция* $X_0 = X_2 - X_1$ *— решение уравнения* (3.5.2).

♦ $DX_0 = D(X_2 - X_1) = DX_2 - DX_1 = AX_2 + f(t) - (AX_1 + f(t)) = A(X_2 - X_1) = AX_0.$ ⊠

Из предыдущих теорем следует, что все решения неоднородного уравнения можно получить, прибавив к некоторому частному решению все решения соответствующего однородного уравнения, то есть

$$X_{\text{ОН}} = X_{\text{ОО}} + X_{\text{ЧН}}.$$

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено **методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа)**.

Пусть $\Phi(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2). Частное решение уравнения (3.5.1) будем искать в виде

$$X(t) = X_1(t)u_1(t) + \ldots + X_n(t)u_n(t),$$

где $u_i(t)$ — некоторые дифференцируемые функции. Если обозначим $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$, то частное решение можно представить как

$$X(t) = \Phi(t) \cdot U(t).$$

Подставим функцию $X(t)$ в уравнение (3.5.1):

$$DX_1u_1 + X_1Du_1 + \ldots + DX_nu_n + X_nDu_n = A(X_1u_1 + \ldots + X_nu_n) + f(t).$$

Так как $X_i$ являеются решениями уравнения (3.5.2), то $DX_i = AX_i$. Следовательно, $DX_iu_i = AX_iu_i$.
Тогда получаем

$$X_1Du_1 + \ldots + X_nDu_n = f(t),$$

в матричном виде

$$\Phi(t) \cdot DU(t) = f(t).$$

Так как $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2), то ее столбцы — линейно независимые решения однородного уравнения. Следовательно, определитель фундаментальнй матрицы является Вронскианом решений $X_1(t), \ldots, X_n(t)$, а значит $\det\Phi(t) \neq 0$ $\forall t \Rightarrow \exists\Phi^{-1}(t) : DU(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$. Тогда в качестве векторной функции $U(t)$ можно выбрать функцию

$$U(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t, t_0 \in \mathbb{I}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$X_{\text{он}} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \Phi(t) \cdot (C + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau). \tag{3.5.3}$$

Используя формулу (3.5.3), найдем решение задачи Коши $DX = AX + f(t)$, $X|_{t=t_0} = \xi$. Для этого подставим в (3.5.3) начальные условия: $X|_{t=t_0} = \Phi(t_0) \cdot C = \xi \Rightarrow C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

В качестве фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ можно взять матрицу $e^{At}$ ($\Phi(t) = e^{At}$). Тогда решение задачи Коши примет вид

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau. \tag{3.5.4}$$

Из уравнения (3.5.4) следует, что задача Коши для уравнения (3.5.1) с нулевыми начальными условиями ($\xi = 0$) имеет вид

$$X(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{3.5.5}$$

То есть функция (3.5.5) является частным решением уравнения (3.5.1).

• *Формула* (3.5.5) *называется* ***методом Коши*** *отыскания частного решения неоднородного уравнения.*

Следовательно, общее решение уравнения (3.5.1) можно записать в виде

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}C + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

## 3.6 Непрерывная зависимость решений стационарного линейного векторного уравнения от начальных значений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{3.6.1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \tag{3.6.2}$$

• *Решение* $X_0(t)$ *уравнения* (3.6.1) *называется* ***непрерывно зависящим*** *на промежутке* $\mathbb{I}$ ***от начальных значений****, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall X(t) \text{ } \textit{решения} \text{ (3.6.3) } \|X(t_0) - X_0(t_0)\| \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon\ \forall t \in \mathbb{I}.$$

• *Функция* $\|X(t) - X_0(t)\|$ *называется* ***отклонением*** $X(t)$ *от* $X_0(t)$*, а ее значение при* $t = t_0$*, то есть* $\|X(t_0) - X_0(t_0)\|$*, называется* ***начальным отклонением****.*

Пусть $X_0(t)|_{t=t_0} = \xi$, а $X(t)|_{t=t_0} = \xi + \Delta\xi$, где $\xi, \Delta\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$. Тогда по правилу Коши $X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$; $X(t) = e^{A(t-t_0)}(\xi + \Delta\xi) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$. Отсюда

- $X(t) - X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\Delta\xi$ — отклонение;
- $X(t_0) - X_0(t_0) = E\Delta\xi$ — начальное отклонение.

Следовательно, отклонение решения $X(t)$ от $X_0(t)$ не зависит от самих решений, а завсит лишь от их начальных отклонений. То есть все решения уравнения (3.6.1) либо одновременно зависят от начальных даныых, либо нет. Кроме того отклонение зависит лишь от матрицы $A$ и не зависит от неоднородности $f(t)$. Следовательно, и непрерывная зависимость от начальных данных зависит только от матрицы $A$.

**Теорема.** *Если промежуток* $\mathbb{I}$ *является отрезком, то любое решение уравнения* (3.6.1) *непрерывно зависит от начальных значений.*

♦ Так как $e^{A(t-t_0)}$ — фундаментальная матрица уравнения (3.6.2), то все ее компоненты являются непрерывными. Следовательно, по теореме Вейрштрасса на отпрезке $\mathbb{I}$ они все являются ограниченными. То есть

$$\exists M : \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \leqslant M \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| = \left\|e^{A(t-t_0)}\Delta\xi\right\| \leqslant \left\|e^{A(t-t_0)}\right\|\cdot\|\Delta\xi\| \leqslant M\cdot\|X(t_0) - X_0(t_0)\|.$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{M} : \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

⊠

• *Решение уравнения* (3.6.1) *называется* ***интегрально зависящим от начальных значений*** *на промежутке* $\mathbb{I}$*, если оно зависит от начальных значений на любом отрезке* $I_0 \subseteq \mathbb{I}$.

## 3.7 Устойчивость стационарных линейных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t),\ t \in \mathbb{I} = [t_0; +\infty) \tag{3.7.1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$.

• *Решение* $X_0(t)$ *уравнения* (3.7.1) *называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если*

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta : \forall X(t)\ \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon\ \forall t > t_0.$$

Таким образом, решение $X_0(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке $\mathbb{I}$ вида $[t_0; +\infty)$.

• *Если кроме того* $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t) - X_0(t)\| = 0$*, то решение* $X_0(t)$ *называется* ***асимптотически устойчивым****.*

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных значений следует, что все решения уравнения (3.7.1) либо одновременно устойчивы, либо нет.

• *Уравнение, все решения которого устойчивы, называется* ***устойчивым*** *(аналогично* ***неустойчивым, асимптотически устойчивым****).*

Кроме того, так как неоднородность уравнений не влияет на непрерывную зависимость от начальных значений, то и устойчивость уравнения не зависит от неоднородности $f(t)$. Следовательно, в дальнейшем для исследования устойчивости будем исследовать нулевое решение уравнения $DX = AX$. То есть

• *Уравнение называется* ***устойчивым****, если*

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta : \forall X(t)\ \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon\ \forall t > t_0.$$

**Лемма.** *Уравнение* (3.7.2) *является устойчивым на* $\mathbb{I} \Longleftrightarrow$ *каждое его решение является ограниченным на* $\mathbb{I}$.

♦ ⇒) От противного. Пусть (3.7.2) устойчиво, но $\exists Y(t)$ решение неограниченное на промежутке $\mathbb{I}$. Тогда векторная функция $X(t) = CY(t)$ является также решением уравнения (3.7.2), и при этом, выбирая $C$ сколь угодно малым, можем получить решение, которое при $t = t_0$ будет сколь угодно близко к нулевому решению, но при этом являться неограниченным.

⇐) Пусть все решения уравнения (3.7.1) ограничены на $\mathbb{I}$. Тогда фундаментальная матрица $e^{A(t-t_0)}$ тоже ограничена. То есть $\exists M : \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \leqslant M \ \forall t > t_0$. Тогда

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} : \forall X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi \ \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

⊠

**Теорема** (Критерий устойчивости). *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части собственных значений матрицы $A$ неположительны, при этом собственные значения с нулевой действительной частью имеют равные алгебраические и геометрические кратности.*

♦ Так как неоднородность не влияет на устойчивость, то уравнение (3.7.1) устойчиво $\Longleftrightarrow$ уравнение (3.7.2) устойчиво. А по лемме это уравнение устойчиво $\Longleftrightarrow$ все его решения ограничены.

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решения однородного уравнения для ограниченности решений необходимо и достаточно, чтобы действительные части собственных значений были неположительны. Причем собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановом базисе матрицы $A$ должны соответствовать цепочки длины 1. А это возможно, когда алгебраическая и геометрическая кратности этого собственного значения равны. ⊠

**Следствие.** *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части собственных значений матрицы $A$ неположительны, при этом собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановой нормальной форме матрицы $A$ соответствуют клетки порядка* 1.

**Лемма.** *Уравнение* (3.7.2) *является асимптотически устойчивым* $\Longleftrightarrow$ *все его решения стремятся к нулю при $t \to +\infty$.*

♦ ⇒) Пусть уравнение асимптотически устойчиво. Тогда и его нулевое решение асимптотически устойчиво, то есть

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta : \forall X(t) \ \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Пусть $Y(t)$ — произволньое решение уравнения (3.7.2). Тогда векторная функция $CY(t)$, $C \in \mathbb{R}$ также является решением уравнения (3.7.2). Причем, выбирая $C$ достаточно малым, можно получить решение сколь угодно близкое к 0 при $t = t_0$. Следовательно, из определения устойчивости нулевого решения $\lim\limits_{t\to+\infty} \|CY(t)\| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{|C|} \|CY(t)\| \, 0$. ⇐) Пусть для ршения $X(t)$ уравнения (3.7.2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0$. Тогда $X(t)$ является ограниченной функцией, так как из существования предела при $t \to +\infty$ следует ограниченность этой функции на интервале $(t_1; +\infty)$, $t_1 \in \mathbb{I}$. А на отрезке $[t_0; t_1]$ функция $X(t)$ ограничена, так как непрерывна. Следовательно, уравнение (3.7.2) является устойчивым. А так как $\forall X(t) \ \lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0$, то и асимптотически устойчиво. ⊠

**Теорема** (Критерий асимптотической устойчивости)**.** *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *асимптотически устойчиво* $\iff$ *все собственные значения матрицы* $A$ *отрицательны.*

♦ Уравнение (3.7.1) асимптотически устойчиво $\iff$ асимптотически устойчиво уравнение (3.7.2). А по лемме уравнение (3.7.2) асимптотически устойчиво $\iff$ все его решения стремятся к 0 при $t \to +\infty$.

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решений уравнения (3.7.2) его решения будут стремиться к 0, если действительная часть собственных значений отрицательна. ⊠

## 3.8 Фазовая плоскость линейных стационарных векторных уравнений порядка 2.

Рассмотрим уравнение
$$DX = AX, \tag{3.8.1}$$
где
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ а } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$
— неизвестная векторная функция.

• ***Фазовым графиком*** *решения* $X(t)$ *называется график параметрически заданной функции*
$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t). \end{cases}$$

• *Плоскость* $Ox_1x_2$*, на которой располагаются фазовые графики решений, называется* ***фазовой плоскостью уравнения****.*

• *Фазовый график, состоящий из одной точки, называется* ***точкой покоя****.*

Начало координат (точка (0; 0)) всегда является точкой покоя для уравнения (3.8.1). Рассмотрим классифицкации точек покоя.

**I группа.**

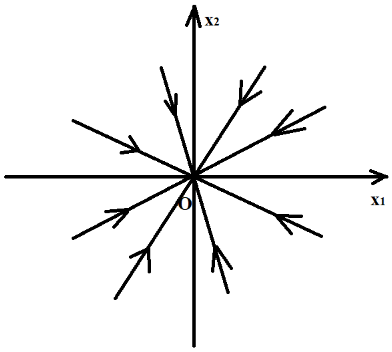
1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда система в координатном виде записывается следующим образом
$$\begin{cases} Dx_1 = 0, \\ Dx_2 = 0; \end{cases}$$
и, следовательно, решения этой системы имеют вид $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$. То есть любая точка фазовой плоскости является фазовым графиком и других фазовых графиков нет.

2. Пусть $A = aE$, то есть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Тогда в координатной форме система имеет вид
$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1, \\ Dx_2 = ax_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 e^{at}, \\ x_2 = C_2 e^{at}. \end{cases}$$

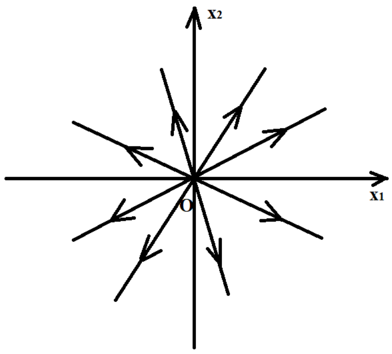
Если $C_1 \neq 0$, то $e^{at} = \dfrac{x_1}{C_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{C_2}{C_1} x_1$ — прямая, проходящая через начало координат.

Если $C_1 = 0$, то $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = C_2 e^{at}. \end{cases}$ — прямая $x_1 = 0$.

При этом, если $a < 0$, то точка $(x_1(t); x_2(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.




А если $a > 0$, то точка $(x_1(t); x_2(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} \infty$.




• *Точка покоя, в окрестности которой фазвоые графики имеют такое расположение, называется* ***дикритическим узлом*** *соответственно* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым***.

**II группа.** Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем $A \neq aE$. Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}A = a + d$. И рассмотрим их характеристические матрицы:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A - \lambda \end{pmatrix}.$$

Построим для них системы НОД миноров.

$A - \lambda E$: $d_1(\lambda) = 1$ (если какое-то $c$ или $b$ не равно нулю, то оно является ненулевым минором первого порядка; а если $c = b =$, то $a \neq d$ и многочлены $a - \lambda$ и $d - \lambda$ взаимно простые).
$d_2(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$.
$B - \lambda E$: $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Sp}A\lambda + \det A$.

Следовательно, матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ эквиваленты. Тогда матрицы $A$ и $B$ подобны, то есть существует невырожденная матрица $S : B = S^{-1}AS$.

Выполним замену в уравнении (3.8.1) неизвестной функции $X = SY$. Тогда $SDY = ASY \Rightarrow DY = S^{-1}ASY = BY$. Получили

$$DY = BY. \tag{3.8.2}$$

Координатная форма уравнения (3.8.2) имеет вид

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = -\det Ay_1 + \mathrm{Sp}ADy_1. \end{cases}$$

Исключим из второго уравнения $y_1$ и получим

$$D^2y_1 - (\mathrm{Sp}A)Dy_1 + (\det A)y_1 = 0.$$

Тогда решение $y_1(t)$ имеет фазовую тракекторию, являющуюся графиком параметрически заданной функции

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = Dy_1(t); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = y_2(t). \end{cases} \tag{3.8.3}$$

— фазовая траектория решения уравнения (3.8.2).

То есть уравнение (3.8.3) и уравнение (3.8.2) имеют одинаковый фазовый портрет. Выполнив преобразование плоскости $X = SY$, получим фазовый портрет уравнения (3.8.1). Заметим, что матрица $S$ невырожденная. Тогда линейное преобразование $X = SY$ невырожденное. Следовательно, оно сводится к последовательному выполнению преобразования поворота и преобразования растяжения-сжатия вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений. Таким образом, типы точек покоя уравнения (3.8.1) будут совпадать с типами точек покоя уравнений (3.8.2) и (3.8.3).