Алгебра и Теория чисел

Конспект по 2 семестру специальности «прикладная информатика»

(лектор Г. В. Матвеев)

Содержание

1 Прямая сумма подпространств

Пусть W_1, W_2 — подпространства.

• $W_1 \oplus W_2$ — *сумма называется* ***прямой****, если* $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$.

Справедливо и следующее: $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ называется прямой, если $W_i \cap \sum\limits_{i \neq j} W_j = \vec{0}$

Теорема.

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

♦ По теореме о сумме подпространств

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

А так как $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$, то $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. ⊠

Следствие.

$$\dim(W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_k$$

Теорема. *Если* $W \subset V_n \Rightarrow V_n = W \oplus U$*, где* U *— подпространство.*

♦

1. $W = \vec{0} \Rightarrow U = V_n$, $V_n = \vec{0} \oplus V_n$
2. $W = V_n \Rightarrow U = \vec{0}$, $V_n = V_n + \vec{0}$
   Оба равенства справедливы, так как $\vec{0} \cap V_n = \vec{0}$
3. Рассмотрим нетривиальный случай:

$$W = L(v_1, v_2, ..., v_r), \quad 0 < r < n$$

$$U = L(v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n)$$

Возьмем произвольный вектор x, не нарушая общности:

$$x = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r) + (\alpha_{r+1} v_{r+1} + ... + \alpha_n v_n) \Rightarrow x = W + U$$

Докажем, что $W \cap U = \vec{0}$.
Пусть $x \in W \cap U$.

$$x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = \alpha_{r+1} v_{r+1} + ... + \alpha_n v_n \Rightarrow \forall \alpha_i = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow W \cap U = \vec{0}$$

⊠

Следствие. *Каждое пространство раскладывается в прямую сумму* n *одномерных подпространств.*

$$V_n = L(e_1) \oplus L(e_2) \oplus ... \oplus L(e_n)$$

$e_1, e_2, ..., e_n$-базис.
То есть любой вектор раскладываетя по базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$$

2 Критерий совместности системы линейных уравнений

Теорема. *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффицентов равен рангу расширенной матрицы.*

♦ Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{— матрица коэффицентов } A.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \widetilde{A} = (A|B) \text{ — расширенная матрица.}$$

Система совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$.
$\Rightarrow$ Пусть система совместна с решением $(j_1, j_2, \dots, j_n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdot j_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdot j_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \cdot j_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Это значит, что при добавлении столбца свободных членов базис не изменился, так как новый столбец выражается через старый. Следовательно, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$.

$\Leftarrow$ Базисный минор матрицы A есть базисный минор матрицы $\widetilde{A}$, так как $rankA = rank\widetilde{A}$. Следовательно, столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ выражается через базисные столбцы по принципу (1). Коэффиценты остальных столбцов равны 0. И тогда полученные коэффиценты будут являться решением системы. ⊠

Решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью критерия

1. Нахождение базисного минора матрицы A методом окаймления минора.
2. Проверяем условие $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ методом окаймления миноров.
3. Отбрасываем все небазисные строки.
4. Базисные неизвестные оставляем слева, а свободные переносим вправо.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nr}x_r = b_n - a_{n,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{nn}x_n \end{cases}$$

Полученную систему рассматриваем как крамеровскую.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

3 Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — столбец нулей.}$$

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде как

$$\mathbf{AX{=}0}$$

Теорема. *Решения однородной системы линейных уравнений образуют векторное пространство, размерность которого* $\dim W = n - r$ *(*n *— число неизвестных,* r *— ранг системы,* $r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|0)$.

⧫ Докажем, что это пространство. Вспомним необходимые критерии:

$$W_1, W_2 \in W \Rightarrow W_1 + W_2 \in W$$

$$W_1 \in W \Rightarrow \lambda W_1 \in W$$

Пусть X_1 — конкретный набор, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1\prime \\ x_2\prime \\ \vdots \\ x_n\prime \end{pmatrix}$. Тогда выполняются свойства

$$AX_1 = 0,\ AX_2 = 0 \Rightarrow A(X_1 + X_2) = 0$$

$$AX_1 = 0 \Rightarrow \lambda AX_1 = 0$$

Перенесем свободные неизвестные в системе в левую сторону.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nr}x_r = b_n - a_{n,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{nn}x_n \end{cases} \tag{3}$$

Базисный минор для этой системы

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Где неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ — базисные, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — свободные.
Выражаем базисные неизвестные через свободные по правилу Крамера или Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Найдем базисные решения. Для этого передадим значения

$$c_1 = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1r}, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$c_2 = (c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2r}, 0, 1, \ldots, 0)$$

$$c_{n-r} = (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \ldots, c_{n-r,r}, 0, 0, \ldots, 1)$$

Переменные, которым были переданы значения 0 и 1, являются базисными. Векторы являются линейно независимыми благодаря этим переменным.

Докажем, что любое решение выражается через базис.

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n) - \gamma_{r+1}c_1 - \ldots - \gamma_n c_{n-r} = (\gamma_1 c_1, \gamma_2 c_2, \ldots, \gamma_n c_{n-r})$$

Значит все решения выражаются через базис. ⊠

• *Базисные решения ОСЛУ называются* ***фундаментальной системой решений***.

Решение неоднородной системы через однородную

Будем обозначать $AX = B$ — **неоднородная система**, $AX = 0$ — **однородная система**.

$$\left.\begin{matrix} AX = B \\ AY = 0 \end{matrix}\right\} = A(X+Y) = AX + AY = B + 0 = B$$

1. Разность 2-ух решений неоднородной системы будет решением однородной.

2. Если от решения неоднородной системы отнять фиксированное решение неоднородной системы, то получится решение однородной системы.

$$AX - AX_0 = B - B = 0$$

3. Произвольное решение неоднородной системы можно получить, добавляя к фиксированному решению некоторые решения однородной системы.

4 Линейные преобразования векторных пространств

- *Отображение* $\varphi : V \to V$ *(само в себя) называется* ***линейным****, если*

1. *Образ суммы равен сумме образов:*

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

2. *При умножении вектора на скаляр его образ умножается на этот же скаляр:*

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$$

Если $\varphi : V \to W$, то φ — линейное отображение.

Свойства линейного преобразования:

1. *Образ линейной комбинации равен такой же линейной комбинации образов (под действием линейного преобразования)*

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2) + \dots + \lambda_n\varphi(a_n)$$

2. *Преобразование* $\vec{0}$

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\varphi(\vec{0}) = \varphi(\vec{0}\cdot\vec{a}) = 0\cdot\varphi(\vec{a}) = \vec{0}$$

3. *Вынесение минуса*

$$\varphi(-\vec{a}) = -\varphi(\vec{a})$$

4. *Линейное преобразование переводит линейно зависимые векторы в линейно зависимые с такими же скалярами.*

Теорема. *Любое линейное преобразование вполне определяется своими значениями на базисных векторах и эти значения могут быть любыми.*

⧫ Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — системы векторов.
Возьмем функцию φ такую, что:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_1 \\ \varphi(e_2) = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = a_n \end{cases}$$

Докажем, что такое пространство существует:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

$$\varphi(x) = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$$

Докажем, что оно линейное:

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n$$

- $\varphi(x+y) = (x_1+y_1)a_1 + (x_2+y_2)a_2 + \ldots + (x_n+y_n)a_n = x_1a_1 + y_1a_1 + \ldots + x_na_n + y_na_n = (x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n) + (y_1a_1 + y_2a_2 + \ldots + y_na_n) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- $\varphi(\lambda x) = \lambda x_1a_1 + \lambda x_2a_2 + \ldots + \lambda x_na_n = \lambda\varphi(x)$.

Докажем, что единственное:
Пусть существует

$$\begin{cases} \psi(e_1) = a_1 \\ \psi(e_2) = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \psi(e_n) = a_n \end{cases}$$

с такими же свойствами. Тогда

$$\psi(x) = \psi(x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n) = x_1\psi(e1)+x_2\psi(e_2)+\dots+x_n\psi(e_n) = x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n = \varphi(x)$$

⊠

5 Операции над линейными преобразованиями

Пусть f, φ — линейные преобразования векторного пространства V.

1. **Сумма линейных преобразований:**

$$f(x) + \varphi(x) = (f + \varphi)(x),\ \forall x \in V.$$

♦ $(f + \varphi)(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) + \varphi(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = f(\lambda_1x_1) + f(\lambda_2x_2) + \varphi(\lambda_1x_1) + \varphi(\lambda_2x_2) = \lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2) + \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) = \lambda_1(f(x_1) + \varphi(x_1)) + \lambda_2(f(x_2) + \varphi(x_2)) = \lambda_1(f + \varphi)(x_1) + \lambda_2(f + \varphi)(x_2)$. ⊠

2. **Произведение на скаляр линейного преобразования:**

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \forall x \in V.$$

♦ $(\lambda f)(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = (\lambda f)(\lambda_1x_1) + (\lambda f)(\lambda_2x_2) = \lambda f(\lambda_1x_1) + \lambda f(\lambda_2x_2) = \lambda(f(\lambda_1x_1) + \lambda(f(\lambda_2x_2)) = \lambda f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)$. ⊠

3. **Композиция линейных преобразований:**

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)),\ \forall x \in V.$$

♦ $(f\varphi)(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = f(\varphi(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)) = f(\varphi(\lambda_1x_1) + \varphi(\lambda_2x_2)) = f)\lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2)) = \lambda_1f(\varphi(x_1)) + \lambda_2f(\varphi(x_2)) = \lambda_1(f\varphi)(x_1) + \lambda_2(f\varphi)(x_2)$. ⊠

6 Ранг и дефект линейного преобразования

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейное преобразование.

• *Множество* $\ker\varphi = \{x \mid \varphi(x) = \vec{0}\}$ — ***ядро*** *линейного преобразования.*
$\dim\ker\varphi$ - **дефект** линейного преобразования (размерность ядра).

• *Множество* $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(v) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ — ***образ*** *линейного преобразования.*
$\dim\operatorname{Im}\varphi$ - **ранг** линейного преобразования (размерность образа).

Пример 1
Рассмотрим функцию $\sin(x)$. Функция синуса не является линейной, в чем легко убедиться ($\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$), однако для нее можно определить ядро и образ. Таким образом

$$\ker(\sin) = \pi n$$

$$\operatorname{Im}(\sin) = [-1, 1]$$

Пример 2
Тождественное преобразование - $\varphi(v) = v \quad \forall v \in V$

$$\ker(\varphi) = \vec{0}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = V$$

Пример 3
Возьмем прямую l и плоскость P, где $l \perp P$.

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{pr}a$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = l = V_1$$

$$\ker(\varphi) = P = V_2$$

Теорема. *Ядро и образ линейного преобразования — подпространства исходного векторного пространства.*

⧫ Проверим выполнимость свойств:

1. $w_1, w_2 \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \vec{0}\ \varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow w_1 + w_2 \in \ker(\varphi)$
2. $\lambda\varphi(w) = \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\varphi \in \ker(\varphi)$
3. $\varphi(w_1), \varphi(w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$
   $\varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \varphi(w_1 + w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$
4. $\lambda\varphi(w_1) = \varphi(\lambda w_1) \in \operatorname{Im}(\varphi)$

⊠

• *Размерность ядра —* ***дефект****. Будем обозначать* $d = \dim(\ker(\varphi))$.

• *Размерность образа —* ***ранг****. Будем обозначать* $r = \operatorname{rank}\varphi = \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$.

Тогда φ — **нулевое преобразование**, если $d = n$, $r = 0$.
φ — **тождественное преобразование**, если $d = 0$, $r = n$.
φ — **проектирование векторов**, если $d = 2$, $r = 1$.

Теорема. *Сумма ранга и дефекта равняется размерности пространства.*

♦ Рассмотрим образ $\varphi(V)$. Пусть базис $\varphi(V) : \varphi(\varphi(l_1), \varphi(l_2), \dots, \varphi(l_r))$
Докажем, что

$$V_n = L(l_1, l_2, \dots, l_r) \oplus \ker(\varphi)$$

$$n = r + d$$

1. $l_1, l_2, \dots, l_r$ — линейно независимы.
   По свойству линейное преобразование сохраняет зависимость. Если бы $l_1, l_2, \dots, l_r$ были зависимы, то и $\varphi(l_1), \varphi(l_2), \dots, \varphi(l_r)$ были бы зависимы, но это базис, значит не зависимы.

2. $\vec{v} \in V_n = \vec{x} \in L(l_1, l_2, \dots, l_r) + \vec{y} \in ker\varphi$

$$\varphi(V) = \alpha_1\varphi(l_1) + \alpha_2\varphi(l_2) + dots + \alpha_r\varphi(l_r)$$

$$\varphi(v - \alpha_1 l_1 - \dots - \alpha_r l_r) = \vec{0} \Rightarrow v - \alpha_1 l_1 - \dots - \alpha_r l_r = y \in \ker\varphi$$

$$v = \alpha_1 l_1 - \dots - \alpha_r l_r + y = x + y$$

3. $L \cap ker\varphi = \vec{0}$
   Пусть $x \in L \cap \ker\varphi$.
   $x = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_r l_r$
   $\varphi(x) = \vec{0}, \quad \varphi(x) = \varphi(\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_r l_r) = \varphi(\alpha_1 l_1) + \varphi(\alpha_2 l_2) + \dots + \varphi(\alpha_r l_r) = \alpha_1\varphi(l_1) + \alpha_2\varphi(l_2) + \dots + \alpha_r\varphi(l_r) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$

⊠

7 Матрица линейного преобразования

Пусть V — векторное пространство с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$x \in V, \quad x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

• Пусть $\varphi : V \to V$ - **линейное преобразование** векторного пространства V.
Подействуем этим преобразованием поочередно на все базисные векторы и полученные векторы выразим через базис:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n \\ \varphi(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \tag{1}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования φ.

• Столбцами матрицы линейного преобразования являются координаты образов базисных векторов.

Рассмотрим пример:
На вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ подействуем линейным преобразованием.

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \dots + x_n\varphi(e_n)$$

$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ — столбцы матрицы A.
Систему (1) можно переписать следующим образом:
Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, тогда

$$(e_1, e_2, \dots, e_n)A = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$$

$$\varphi(e) = eA$$

Вектор x запишем как $x = eX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда линейное преобразование вектора x примет вид:

$$\varphi(x) = \varphi(e)X$$

$$\varphi(x) = eAX$$

Это говорит о том, что $X \xrightarrow{\varphi} AX \sim \varphi(X) = AX$.

Теорема.

1. *При сложении линейных преобразований их матрицы в данном базисе складываются.*

2. *При умножении линейных преобразований их матрицы в данном базисе умножаются.*

3. *При умножении линейного преобразования на скаляр его матрица умножается на тот же скаляр.*

♦ Пусть V — векторное пространство с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$.
И пусть f, φ — линейные преобразования.
Подействовав этими линейными преобразованиями на базис V получим следующие системы:

$$\begin{cases} f(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n \\ f(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \beta_{11}e_1 + \beta_{21}e_2 + \dots + \beta_{n1}e_n \\ \varphi(e_2) = \beta_{12}e_1 + \beta_{22}e_2 + \dots + \beta_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = \beta_{1n}e_1 + \beta_{2n}e_2 + \dots + \beta_{nn}e_n \end{cases} \tag{2}$$

Запишем матрицы линейных преобразований для f, φ:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица линейного преобразования } f.$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \text{— матрица линейного преобразования } \varphi.$$

1. Сложим почленно строки систем (1) и (2).

$$\begin{cases} f(e_1) + \varphi(e_1) = (\alpha_{11} + \beta_{11})e_1 + (\alpha_{21} + \beta_{21})e_2 + \dots + (\alpha_{n1} + \beta_{n1})e_n \\ f(e_2) + \varphi(e_2) = (\alpha_{12} + \beta_{12})e_1 + (\alpha_{22} + \beta_{22})e_2 + \dots + (\alpha_{n2} + \beta_{n2})e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) + \varphi(e_n) = (\alpha_{1n} + \beta_{1n})e_1 + (\alpha_{2n} + \beta_{2n})e_2 + \dots + (\alpha_{nn} + \beta_{nn})e_n \end{cases}$$

Отсюда получим матрицу линейного преобразования $f + \varphi$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \dots & \alpha_{2n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} + \beta_{n1} & \alpha_{n2} + \beta_{n2} & \dots & \alpha_{nn} + \beta_{nn} \end{pmatrix} = A + B$$

2. Будем рассматривать умножение линейных преобразований как компзицию отображений $\varphi(f(e))$. Подействуем линейным преобразованием f на базисные векторы:

$$\begin{cases} f(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n \\ f(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \tag{1}$$

На полученные векторы подействуем линейным преобразованием φ:

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}f(e_1) + \beta_{21}f(e_2) + \dots + \beta_{n1}f(e_n) \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}f(e_2) + \beta_{22}f(e_2) + \dots + \beta_{n2}f(e_n) \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}f(e_1) + \beta_{2n}f(e_2) + \dots + \beta_{nn}f(e_n) \end{cases}$$

Подставим в полученную систему уравнения системы (1):

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{21}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) + \dots \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{22}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) + \dots \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{2n}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n) + \dots \end{cases}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}\alpha_{11}e_1 + \beta_{11}\alpha_{21}e_2 + \dots + \beta_{11}\alpha_{n1}e_n + \beta_{21}\alpha_{12}e_1 + \beta_{21}\alpha_{22}e_2 + \dots + \beta_{21}\alpha_{n2}e_n + \dots \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}\alpha_{11}e_1 + \beta_{12}\alpha_{21}e_2 + \dots + \beta_{12}\alpha_{n1}e_n + \beta_{22}\alpha_{12}e_1 + \beta_{22}\alpha_{22}e_2 + \dots + \beta_{22}\alpha_{n2}e_n + \dots \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}\alpha_{11}e_1 + \beta_{1n}\alpha_{21}e_2 + \dots + \beta_{1n}\alpha_{n1}e_n + \beta_{2n}\alpha_{12}e_1 + \beta_{2n}\alpha_{22}e_2 + \dots + \beta_{2n}\alpha_{n2}e_n + \dots \end{cases}$$

Сгрупируем подобные слогаемые:

$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = (\beta_{11}\alpha_{11} + \beta_{21}\alpha_{12} + \dots)e_1 + (\beta_{11}\alpha_{21} + \beta_{21}\alpha_{22} + \dots)e_2 + \dots \\ \varphi(f(e_2)) = (\beta_{12}\alpha_{11} + \beta_{22}\alpha_{12} + \dots)e_1 + (\beta_{12}\alpha_{21} + \beta_{22}\alpha_{22} + \dots)e_2 + \dots \\ \varphi(f(e_n)) = (\beta_{1n}\alpha_{11} + \beta_{2n}\alpha_{12} + \dots)e_1 + (\beta_{1n}\alpha_{21} + \beta_{2n}\alpha_{22} + \dots)e_2 + \dots \end{cases}$$

Запишем координаты векторов в матрицу линейного преобразования:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{11}+\beta_{21}\alpha_{12}+\dots & \beta_{12}\alpha_{11}+\beta_{22}\alpha_{12}+\dots & \dots & \beta_{1n}\alpha_{11}+\beta_{2n}\alpha_{12}+\dots \\ \beta_{11}\alpha_{21}+\beta_{21}\alpha_{22}+\dots & \beta_{12}\alpha_{21}+\beta_{22}\alpha_{22}+\dots & \dots & \beta_{2n}\alpha_{21}+\beta_{2n}\alpha_{22}+\dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{11}\alpha_{n1}+\beta_{21}\alpha_{n2}+\dots & \beta_{12}\alpha_{n1}+\beta_{22}\alpha_{n2}+\dots & \dots & \beta_{1n}\alpha_{n1}+\beta_{2n}\alpha_{n2}+\dots \end{pmatrix} = A\cdot B$$

3. Умножим каждую строку системы (1) на произвольный скаляр γ:

$$\begin{cases} \gamma f(e_1) = \gamma\alpha_{11}e_1 + \gamma\alpha_{21}e_2 + \dots + \gamma\alpha_{n1}e_n \\ \gamma f(e_2) = \gamma\alpha_{12}e_1 + \gamma\alpha_{22}e_2 + \dots + \gamma\alpha_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma f(e_n) = \gamma\alpha_{1n}e_1 + \gamma\alpha_{2n}e_2 + \dots + \gamma\alpha_{nn}e_n \end{cases}$$

Получаем матрицу линейного преобразования γf:

$$\begin{pmatrix} \gamma\alpha_{11} & \gamma\alpha_{12} & \dots & \gamma\alpha_{1n} \\ \gamma\alpha_{21} & \gamma\alpha_{22} & \dots & \gamma\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma\alpha_{n1} & \gamma\alpha_{n2} & \dots & \gamma\alpha_{nn} \end{pmatrix} = \gamma A$$

⊠

Теорема. *Ранг линейного преобразования равен рангу его матрицы.*

⧫

$$\operatorname{rank}\varphi = \dim\varphi(V)$$

Так как образ есть *линейная оболочка* $L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$, то

$$\dim\varphi(V) = \dim L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = rank(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = \operatorname{rank} A$$

$$\operatorname{rank}\varphi = \operatorname{rank} A$$

⊠

Пример 1

$\varphi(x) = \vec{0}, \quad \forall x$ — нулевое преобразование.

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n \\ \varphi(e_2) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ — матрица нулевого преобразования.

Пример 2

$\varphi(x) = x, \quad \forall x$ — тождественное преобразование.

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 1e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n \\ \varphi(e_2) = 0e_1 + 1e_2 + \dots + 0e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 1e_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица тождественного преобразования.}$$

Пример 3

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ — матрица угла поворота системы координат на угол } \alpha.$$

• Биективное (взаимооднозначное) линейное преобразование называется **автоморфизмом**.
Если $\varphi : V \to V$ — линейное преобразование, то φ — автоморфизм $\Leftrightarrow$ φ — биекция.

Теорема. *Линейное преобразование* φ *— автоморфизм* $\Leftrightarrow$ *его матрица невырожденная.*

♦

$$\varphi(X) = AX$$

$\Rightarrow$ Предположим, что $|A| = 0$ (т.е. матрица вырожденная).
Тогда $AX = 0 \Rightarrow$ система уравнений линейного преобразования имеет несколько решений и ноль имеет несколько прообразов, чего быть не может.

$\Leftarrow$ Имеем, что $|A| \neq 0$ (т.е. матрица невырожденная).
Значит для $AX = B$ имеется только одно решение по правилу Крамера $\Rightarrow$ φ — биекция.
⊠