

Алгебра и Теория чисел

Конспект по 2 семестру специальности «прикладная
информатика»
(лектор Г. В. Матвеев)

Содержание

1	Прямая сумма подпространств	3
2	Критерий совместности системы линейных уравнений	4
3	Однородные системы линейных уравнений	5
4	Линейные преобразования векторных пространств	7
5	Операции над линейными преобразованиями	8
6	Ранг и дефект линейного преобразования	9
7	Матрица линейного преобразования	10

1 Прямая сумма подпространств

Пусть W_1, W_2 — подпространства.

• $W_1 \oplus W_2$ — сумма называется **прямой**, если $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$.

Справедливо и следующее: $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ называется прямой, если $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = \vec{0}$

Теорема.

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

◆ По теореме о сумме подпространств

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

А так как $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$, то $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. ⊠

Следствие.

$$\dim(W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_k$$

Теорема. Если $W \subset V_n \Rightarrow V_n = W \oplus U$, где U — подпространство.

◆

1. $W = \vec{0} \Rightarrow U = V_n, V_n = \vec{0} \oplus V_n$

2. $W = V_n \Rightarrow U = \vec{0}, V_n = V_n + \vec{0}$

Оба равенства справедливы, так как $\vec{0} \cap V_n = \vec{0}$

3. Рассмотрим нетривиальный случай:

$$W = L(v_1, v_2, \dots, v_r), \quad 0 < r < n$$

$$U = L(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n)$$

Возьмем произвольный вектор x , не нарушая общности:

$$x = (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) + (\alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n) \Rightarrow x = W + U$$

Докажем, что $W \cap U = \vec{0}$.

Пусть $x \in W \cap U$.

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \forall \alpha_i = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow W \cap U = \vec{0}$$

⊠

Следствие. Каждое пространство раскладывается в прямую сумму n одномерных подпространств.

$$V_n = L(e_1) \oplus L(e_2) \oplus \dots \oplus L(e_n)$$

e_1, e_2, \dots, e_n -базис.

То есть любой вектор раскладывается по базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

Полученную систему рассматриваем как крамеровскую.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

[illegible]

3 Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

[illegible]

Где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — столбец нулей.}$$

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде как

$$\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$$

Теорема. Решения однородной системы линейных уравнений образуют векторное пространство, размерность которого $\dim W = n - r$ (n — число неизвестных, r — ранг системы, $r = \text{rank } A = \text{rank}(A|0)$).

◆ Докажем, что это пространство. Вспомним необходимые критерии:

$$W_1, W_2 \in W \Rightarrow W_1 + W_2 \in W$$

$$W_1 \in W \Rightarrow \lambda W_1 \in W$$

Пусть X_1 — конкретный набор, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$. Тогда выполняются свойства

$$AX_1 = 0, \quad AX_2 = 0 \Rightarrow A(X_1 + X_2) = 0$$

$$AX_1 = 0 \Rightarrow \lambda AX_1 = 0$$

Перенесем свободные неизвестные в системе в левую сторону.

[illegible]

Базисный минор для этой системы

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Где неизвестные x_1, \dots, x_n — базисные, а x_{r+1}, \dots, x_n — свободные.

Выражаем базисные неизвестные через свободные по правилу Крамера или Гаусса:

[illegible]

Найдем базисные решения. Для этого передадим значения

$$c_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$$

$$c_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2r}, 0, 1, \dots, 0)$$

$$c_{n-r} = (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \dots, c_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1)$$

Переменные, которым были переданы значения 0 и 1, являются базисными. Векторы являются линейно независимыми благодаря этим переменным.

Докажем, что любое решение выражается через базис.

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_n) - \gamma_{r+1}c_1 - \dots - \gamma_nc_{n-r} = (\gamma_1c_1, \gamma_2c_2, \dots, \gamma_nc_{n-r})$$

Значит все решения выражаются через базис.

- Базисные решения ОСЛУ называются **фундаментальной системой решений**.

Решение неоднородной системы через однородную

Будем обозначать $AX = B$ — неоднородная система, $AX = 0$ — однородная система.

$$\left. \begin{array}{l} AX = B \\ AY = 0 \end{array} \right\} = A(X + Y) = AX + AY = B + 0 = B$$

1. Разность 2-ух решений неоднородной системы будет решением однородной.
2. Если от решения неоднородной системы отнять фиксированное решение неоднородной системы, то получится решение однородной системы.

$$AX - AX_0 = B - B = 0$$

3. Произвольное решение неоднородной системы можно получить, добавляя к фиксированному решению некоторые решения однородной системы.

4 Линейные преобразования векторных пространств

• *Отображение $\varphi : V \rightarrow V$ (само в себя) называется **линейным**, если*

1. *Образ суммы равен сумме образов:*

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

2. *При умножении вектора на скаляр его образ умножается на этот же скаляр:*

$$\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$$

Если $\varphi : V \rightarrow W$, то φ — линейное отображение.

Свойства линейного преобразования:

1. *Образ линейной комбинации равен такой же линейной комбинации образов (под действием линейного преобразования)*

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \lambda_2 \varphi(a_2) + \dots + \lambda_n \varphi(a_n)$$

2. *Преобразование $\vec{0}$*

$$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\varphi(\vec{0}) = \varphi(\vec{0} \cdot \vec{a}) = 0 \cdot \varphi(\vec{a}) = \vec{0}$$

3. *Вынесение минуса*

$$\varphi(-\vec{a}) = -\varphi(\vec{a})$$

4. *Линейное преобразование переводит линейно зависимые векторы в линейно зависимые с такими же скалярами.*

Теорема. *Любое линейное преобразование вполне определяется своими значениями на базисных векторах и эти значения могут быть любыми.*

♦ Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис, a_1, a_2, \dots, a_n — системы векторов.

Возьмем функцию φ такую, что:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_1 \\ \varphi(e_2) = a_2 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) = a_n \end{cases}$$

Докажем, что такое пространство существует:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$\varphi(x) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Докажем, что оно линейное:

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

- $\varphi(x+y) = (x_1+y_1)a_1 + (x_2+y_2)a_2 + \dots + (x_n+y_n)a_n = x_1 a_1 + y_1 a_1 + \dots + x_n a_n + y_n a_n = (x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) + (y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_n a_n) = \varphi(x) + \varphi(y);$
- $\varphi(\lambda x) = \lambda x_1 a_1 + \lambda x_2 a_2 + \dots + \lambda x_n a_n = \lambda \varphi(x).$

Докажем, что единственное:

Пусть существует

$$\begin{cases} \psi(e_1) = a_1 \\ \psi(e_2) = a_2 \\ \dots\dots\dots \\ \psi(e_n) = a_n \end{cases}$$

с такими же свойствами. Тогда

$$\psi(x) = \psi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 \psi(e_1) + x_2 \psi(e_2) + \dots + x_n \psi(e_n) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = \varphi(x)$$

□

5 Операции над линейными преобразованиями

Пусть f, φ — линейные преобразования векторного пространства V .

1. Сумма линейных преобразований:

$$f(x) + \varphi(x) = (f + \varphi)(x), \quad \forall x \in V.$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge (f + \varphi)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1) + f(\lambda_2 x_2) + \\ &+ \varphi(\lambda_1 x_1) + \varphi(\lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) = \lambda_1 (f(x_1) + \varphi(x_1)) + \\ &+ \lambda_2 (f(x_2) + \varphi(x_2)) = \lambda_1 (f + \varphi)(x_1) + \lambda_2 (f + \varphi)(x_2). \end{aligned} \quad \square$$

2. Произведение на скаляр линейного преобразования:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in V.$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge (\lambda f)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= (\lambda f)(\lambda_1 x_1) + (\lambda f)(\lambda_2 x_2) = \lambda f(\lambda_1 x_1) + \lambda f(\lambda_2 x_2) = \lambda (f(\lambda_1 x_1) + \\ &+ f(\lambda_2 x_2)) = \lambda f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2). \end{aligned} \quad \square$$

3. Композиция линейных преобразований:

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)), \quad \forall x \in V.$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge (f \circ \varphi)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f(\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) = f(\varphi(\lambda_1 x_1) + \varphi(\lambda_2 x_2)) = f(\lambda_1 \varphi(x_1) + \\ &+ \lambda_2 \varphi(x_2)) = \lambda_1 f(\varphi(x_1)) + \lambda_2 f(\varphi(x_2)) = \lambda_1 (f \circ \varphi)(x_1) + \lambda_2 (f \circ \varphi)(x_2). \end{aligned} \quad \square$$

6 Ранг и дефект линейного преобразования

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ — линейное преобразование.

• Множество $\ker \varphi = \{x \mid \varphi(x) = \vec{0}\}$ — **ядро** линейного преобразования.
 $\dim \ker \varphi$ — **дефект** линейного преобразования (размерность ядра).

• Множество $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(V) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ — **образ** линейного преобразования.
 $\dim \operatorname{Im} \varphi$ — **ранг** линейного преобразования (размерность образа).

Пример 1

Рассмотрим функцию $\sin(x)$. Функция синуса не является линейной, в чем легко убедиться ($\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$), однако для нее можно определить ядро и образ. Таким образом

$$\ker(\sin) = \pi n$$

$$\operatorname{Im}(\sin) = [-1, 1]$$

Пример 2

Тождественное преобразование — $\varphi(v) = v \quad \forall v \in V$

$$\ker(\varphi) = \vec{0}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = V$$

Пример 3

Возьмем прямую l и плоскость P , где $l \perp P$.

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{p}ra$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = l = V_1$$

$$\ker(\varphi) = P = V_2$$

Теорема. Ядро и образ линейного преобразования — подпространства исходного векторного пространства.

♦ Проверим выполнимость свойств:

1. $w_1, w_2 \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \vec{0} \Rightarrow \varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow w_1 + w_2 \in \ker(\varphi)$
2. $\lambda \varphi(w) = \lambda \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \varphi \in \ker(\varphi)$
3. $\varphi(w_1), \varphi(w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$
 $\varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \varphi(w_1 + w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$
4. $\lambda \varphi(w_1) = \varphi(\lambda w_1) \in \operatorname{Im}(\varphi)$

□

• Размерность ядра — **дефект**. Будем обозначать $d = \dim(\ker(\varphi))$.

• Размерность образа — **ранг**. Будем обозначать $r = \operatorname{rank} \varphi = \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$.

Тогда φ — **нулевое преобразование**, если $d = n, r = 0$.

φ — **тождественное преобразование**, если $d = 0, r = n$.

φ — **проектирование векторов**, если $d = 2, r = 1$.

На вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ подействуем линейным преобразованием.

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \dots + x_n\varphi(e_n),$$

где $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ — столбцы матрицы A .

Тогда систему (1) можно переписать следующим образом:

Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, тогда

$$(e_1, e_2, \dots, e_n)A = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$$

$$\varphi(e) = eA$$

Вектор x запишем как $x = eX$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда линейное преобразование вектора x

примет вид:

$$\varphi(x) = \varphi(e)X$$

$$\varphi(x) = eAX$$

Это говорит о том, что $X \xrightarrow{\varphi} AX \sim \varphi(X) = AX$.

Теорема.

1. При сложении линейных преобразований их матрицы в данном базисе складываются.
2. При умножении линейных преобразований их матрицы в данном базисе умножаются.
3. При умножении линейного преобразования на скаляр его матрица умножается на тот же скаляр.

♦ Пусть V — векторное пространство с базисом e_1, e_2, \dots, e_n .

И пусть f, φ — линейные преобразования.

Подействовав этими линейными преобразованиями на базис V получим следующие системы:

[illegible]

[illegible]

Запишем матрицы линейных преобразований для f, φ :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица линейного преобразования } \varphi.$$

[illegible]
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \dots & \alpha_{2n} + \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} + \beta_{n1} & \alpha_{n2} + \beta_{n2} & \dots & \alpha_{nn} + \beta_{nn} \end{pmatrix} = A + B$$
[illegible]
$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}f(e_1) + \beta_{21}f(e_2) + \cdots + \beta_{n1}f(e_n) \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}f(e_1) + \beta_{22}f(e_2) + \cdots + \beta_{n2}f(e_n) \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}f(e_1) + \beta_{2n}f(e_2) + \cdots + \beta_{nn}f(e_n) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{21}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{n2}e_n) + \cdots \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{22}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{n2}e_n) + \cdots \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}(\alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{2n}(\alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{n2}e_n) + \cdots \end{cases}$$
$$\begin{cases} \varphi(f(e_1)) = \beta_{11}\alpha_{11}e_1 + \beta_{11}\alpha_{21}e_2 + \cdots + \beta_{11}\alpha_{n1}e_n + \beta_{21}\alpha_{12}e_1 + \beta_{21}\alpha_{22}e_2 + \cdots + \beta_{21}\alpha_{n2}e_n + \cdots \\ \varphi(f(e_2)) = \beta_{12}\alpha_{11}e_1 + \beta_{12}\alpha_{21}e_2 + \cdots + \beta_{12}\alpha_{n1}e_n + \beta_{22}\alpha_{12}e_1 + \beta_{22}\alpha_{22}e_2 + \cdots + \beta_{22}\alpha_{n2}e_n + \cdots \\ \varphi(f(e_n)) = \beta_{1n}\alpha_{11}e_1 + \beta_{1n}\alpha_{21}e_2 + \cdots + \beta_{1n}\alpha_{n1}e_n + \beta_{2n}\alpha_{12}e_1 + \beta_{2n}\alpha_{22}e_2 + \cdots + \beta_{2n}\alpha_{n2}e_n + \cdots \end{cases}$$

Пример 2

$\varphi(x) = x$, $\forall x$ — тождественное преобразование.

[illegible]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — матрица тождественного преобразования.}$$

Пример 3

$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ — матрица угла поворота системы координат на угол α .

- Биективное (взаимооднозначное) линейное преобразование называется **автоморфизмом**.

Если $\varphi : V \rightarrow V$ — линейное преобразование, то φ — автоморфизм $\Leftrightarrow \varphi$ — биекция.

Теорема. *Линейное преобразование φ — автоморфизм \Leftrightarrow его матрица невырожденная.*



$$\varphi(X) = AX$$

\Rightarrow Предположим, что $|A| = 0$ (т.е. матрица вырожденная).

Тогда $AX = 0 \Rightarrow$ система уравнений линейного преобразования имеет несколько решений и ноль имеет несколько прообразов, чего быть не может.

\Leftarrow Имеем, что $|A| \neq 0$ (т.е. матрица невырожденная).

Значит для $AX = B$ имеется только одно решение по правилу Крамера $\Rightarrow \varphi$ — биекция.

