Литература

1. Ю. С. Богданов «Лекции по математическому анализу» ч. 2
2. Л. Д. Кудрявцев «Математический анализ» ч. 1, 2
3. С. М. Никольский «Курс математического анализа»
4. В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов «Математический анализ»
5. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк «Основы математического анализа»
6. Г. М. Фихтенгольц «Курс дифференциальных и интегральных исчислений»
7. Б. Л. Рождественский «Лекции по математическому анализу»
8. Б. П. Демидович «Сборник задач и упражнений по математическому анализу»

Лекция 1

1 Топология плоскости

Будем рассматривать множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел, то есть $M = (x, y)$.

Это множество назывется декартовым произведением $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и обозначается $\mathbb{R}^2$.

Интерпретируем это множество как множество точек плоскости. Оно является арифметически двумерным пространством.

Под расстоянием между двумя точками M_1 и M_2 будем понимать обычное евклидово расстояние:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (e_1 - y_2)^2}$$

Отметим, что расстояние между точками можно вводить и по-другому. Например, часто используется ткая методика:

$$\rho_1(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$\rho_2(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Пусть множества $A \subset \mathbb{R}^2$ и $B \subset \mathbb{R}^2$.

Расстоянием между множествами A и B будем называть число $\rho\,(A, B) = \inf\ \rho(x, y)$, $x \in A, \quad y \in B$.

Диаметром множества $A \subset \mathbb{R}^2$ называется число $\delta(A) = \sup \rho(x, y) \quad x, y \in A$

Множество A называют ограниченным, если $\delta(A)$ конечно.

Множества

$$B(M_0; r) ::= \{M| \quad M \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(V, V_0) < r\}$$

$$\bar{B}(M_0;r) ::= \{M| \quad M \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(V,V_0) \leqslant r\}$$
$$S(M_0;r) ::= \{M| \quad M \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(V,V_0) = r\}$$

будем называть соответственно открытым кругом, замкнутым кругом и окружностью с центром в точке M_0 и радиусом r.

Точку M_0 называют внутренней точкой множества $E \subset \mathbb{R}^2$, если M_0 принадлежит множеству E вместе с некоторым открытым кругом $B(M_0,r)$ ненулевого радиуса.

Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называют открытым, если все точки его внутренние, то есть принадлежат множеству E вместе с некоторым кругом ненулевого радиуса.
E открыто $\Leftrightarrow \forall M \in E, \quad \exists r > 0, \quad B(M,r) \subset E$

— открытые множества

— не открытые множества

Множество E^* называют дополнением множества E до всего пространства $\mathbb{R}^2$, если $E^* = \mathbb{R}^2 \backslash E$, то есть если $E^* = \{M| \quad M \in \mathbb{R}^2, \quad M \notin E\}$.

Пишут $E^* = CE$, то есть дополнение E до $\mathbb{R}^2$ обозначает CE.

Множество E называют замкнутым, если дополнение этого множества до всего $\mathbb{R}^2$, то есть $\mathbb{R}^2 \backslash E$, является открытым множеством.

Имеют место быть следующие свойства:

1. объединение любого числа открытых множеств открыто
2. пересечение конечного числа открытых множеств открыто
3. пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто
4. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто

Множество V называется окрестностью точки M_0, если M_0 — внутренняя точка для V.

Окрестность точки M_0 будем обозначать символами $V(M_0), \quad U(M_0)$.

Окрестность $V(M_0)$ называется открытой, если множество $V(M_0)$ открыто.

Окрестность $V(M_0)$ называют замкнутой, если $V(M_0)$ замкнута.

Любые две точки $\in \mathbb{R}^2$ обладают непересекающимися окрестностями.

Круг в центре M_0 радиуса $\varepsilon > 0$, называют ε-окрестностью точки M_0.

Множество $V(M_0) \backslash \{M_0\}$ называют центрированной или проколотой окрестностью точки M_0 и обозначают $\dot{V}(M_0)$.

Точку M_0 называют граничной для множества E, если в любой окрестности имеются как точки множества, так и точки дополнения E, то есть, не принадлежащие E.

Совокупность всех граничных точек множества E называется границей множества E и обозначается δE.

$M_1, M_2, M_3, M_4 \in \delta E$

$M_5, M_7 \notin \delta E$

Ни одна точка открытого множества не является граничной для этого множества. *(следует ли отсюда, что у открытого множества нет граничных точек?)*

$$E_o \Rightarrow \delta E \cap E = \varnothing$$

$$E_3 \Rightarrow \delta E \subset E$$

$$E_3 \Rightarrow \delta E \cap E = \delta E$$

Точка $M \in \mathbb{R}^2$ называется предельной точкой множества E, если $\forall$ окрестность этой точки содержит бесконечное число точек множества E.

Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E.

Совокупность точек E и его предельных точек называется замыканием множества E и обозначается $\overline{E}$.

Теорема. *E замкнуто $\Longleftrightarrow E = \overline{E}$*

$\square$. $\Rightarrow$ *E замкнуто $\Rightarrow CE =:: \mathcal{F}$ открыто $\Rightarrow \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \exists B(M,r) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \forall M \notin E \quad \exists B(M,r), B(M,r) \cap E = \varnothing \Rightarrow$ все предельные точки E содержатся в E, то есть $E = \overline{E}$.*

$\Leftarrow$. *$E = \overline{E}, \quad \forall M \in CE = \mathcal{F} \quad \exists B(M,r) \subset \mathcal{F} \Rightarrow CE$ открыто, то есть E замкнуто.* $\boxtimes$

Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

Всегда $\overline{E} = E \cup \delta E$

Множества $\varnothing$ и $\mathbb{R}^2$ считают как открытыми, так и замкнутыми.

Множество E называется линейно-связным, если любые две его точки можно соединить кривой (направленной), целиком лежащей в E.

В дальнейшем для краткости линейно-связное множество будем называть связным.

Открытое связное множество называют областью. Замыкание области называют замкнутой областью. Ограниченное замкнутое множество называется компактным множеством или компактом.

Все свойства множеств, которые в конечном счете выражаются через свойства окрестности называются топологическими.

1.1 Точечные последовательности

Отображение $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что каждому $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие элемент пространства $\mathbb{R}^2$, то есть точка на плоскости, называется последовательностью в $\mathbb{R}^2$. Обозначать последовательнось будем (M_n).

Говорят, что последовательность точек (M_n) сходится к точке (M_0), если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, M_0) = 0 \qquad |M_n M_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

.

Записываем $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ или $M_n \to M$ при $n \to \infty$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |M_n M_0| = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ означает, что $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon, \forall n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow \rho(M_n, M_0) \leqslant \varepsilon$ или $|M_n M_0| \leqslant \varepsilon$.

Другими словами:

$$M_n \to M_0 \quad \Rightarrow \quad \forall \;\; V(M_0) \;\; \exists \nu_V \;\; \Rightarrow \;\; M_n \in V(M_0)$$

или

$$M_n \to M_0 \;\; \text{если} \;\; \forall \;\; \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_\varepsilon \;\; \Rightarrow M_n \;\; \in B(M_0; \varepsilon)$$

Сходящиеся последовательности в $\mathbb{R}^2$ обладают основными свойствами сходящихся последовательностей. Эти свойства вытекают из определения, а также могут быть доказаны аналогичным методом, как и для обычных последовательностей. Ограничимся перечислением этих свойств.

1. Сходящаяся последовательность может иметь только один предел.

2. Если последовательность точек (M_n) сходится к M_0, то и любая ее подпоследовательность также сходится к M_0.

3. Сходящаяся точечная последовательность ограничена, то есть расположена в круге конечного радиуса с центром в точке M_0.

4. Для сходимости последовательности $M_n = (x_n, y_n)$ к $M_0 = (x_0, y_0)$ необходимо и достаточно, чтобы $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ одновременно.

   $\square \Rightarrow .\quad M_n \to M_0 \quad \Rightarrow \quad \rho(M_n, M_0) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0 \quad \Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon, \quad \forall n \geqslant \nu_\varepsilon$

   $$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x_n - x_0)^2} \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| \leqslant \varepsilon.$$

   Аналогично $|y_n - y_0| \leqslant \varepsilon$.

   $\Leftarrow .\quad |x_n - x_0| \leqslant \varepsilon, \quad |y_n - y_0| \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \rho(M_n, M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2} \qquad \boxtimes$

5. Принцип выбора: из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

6. <u>Критерий Коши сходимости</u>: для сходимости последовательности (M_n) необходимо и достаточно, чтобы (M_n) была фундаментальной, то есть

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon, \quad \forall k, p \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow \rho(M_k, M_p) \leqslant \varepsilon \qquad (|M_k M_p| \leqslant \varepsilon)$$

7. Если все $M_n \in E$ и E замкнуто $(E = \overline{E})$, то и $M_0 \in E$, где $M_0 = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

8. Если E открыто и $M_0 \in E$, то $\exists \nu, \forall n \geqslant \nu \quad M_n \in E$

1.2 Предел функции двух переменных

Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$ и рассмотрим отображение

$$f : E \to \mathbb{R},$$

то есть $\forall M \in E$ сопоставляется отображение действительных чисел. Такое отображение называется функцией двух переменных.
Записываем: $u = f(M) = f(x, y)$

Градиентом функции f Γ_f называют множество точек

$$\Gamma_f = \{(x, y, z)|, \quad (x, y) \in E, z = f(x, y)\}$$

Γ_f в пространстве представляет собой некоторое множество точек (очень часто поверхность).

Пусть f определена на проколотой окрестности $\dot{V}(M_0)$ точки M_0. Число A называют пределом функции f при $M \to M_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon), \quad \forall M \in V(M_0), \quad 0 < \rho(M, M_0) \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad |f(M) - A| \leqslant \varepsilon$$

Непосредственно из определения предела вытекает, что $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ тогда и только тогда, когда

$$\forall U(A) \quad \exists \dot{V}(M_0) \quad \text{такая, что} \quad f(\dot{V}(M_0)) \subset U(A)$$

<u>**Критерий Гейне:**</u>

$$\lim_{M_0} f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (M_n), \quad M_n \in E, \quad M_n \neq M_0, \quad M_n \to M_0 \quad \Rightarrow \quad f(M_n) \to A \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство аналогично доказательству для случая одной переменной. Критерий Гейне позволяет перенести на случай функции двух переменных основные свойства предела функции одной переменной.

Более подробно $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ записывают так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$

Для функции двух переменных вводят и понятие повторных пределов.

А именно, если мы зафиксируем y, то можем поставить вопрос о существовании предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$.

После этого, если указанный предел существует, попробуем найти $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$.

Получаем
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Это выражение и называют повторным пределом. Аналогичным образом строится и такой повторный предел
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Для того, чтобы различать эти понятия, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ называют ещё двойным пределом.

Теорема. *Если существует* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$*, и для* $\forall x, x\neq x_0$ *существует конечный предел* $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$*, то существует и повторный предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$*, причём*
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

$\square$ Так как $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) =:: A$, то
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta(\varepsilon)>0,\quad \forall M\quad \rho(M,M_0)\leqslant\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x,y)-A|\leqslant\varepsilon$$
Где $M=(x,y)$, $M_0=(x_0,y_0)$. Из $\rho(M,M_0)\leqslant\delta \;\Rightarrow\; |x-x_0|\leqslant\delta$, $|y-y_0|\leqslant\delta$.

Зафиксируем теперь x так, чтобы $|x-x_0|\leqslant\delta$ и перейдем в $|f(x,y)-A|\leqslant\varepsilon$ к пределу при $y\to y_0$ так как $\exists\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) =:: \varphi(x)$, то в результате перехода к пределу получим
$$|\varphi(x)-A|\leqslant\varepsilon$$

Так как $|x-x_0|\leqslant\delta$, то это неравенство означает, что
$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A \quad\text{или}\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A \qquad \boxtimes$$

Следствие (о совпадении повторных пределов):

Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ и $\forall x, x\neq x_0$, существует конечный предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, а для $\forall y, y\neq y_0$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, то существуют оба повторных предела, причём
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

1.3 Функции трех переменных

Для функции трёх переменных всё строится по аналогичной схеме, как и для функции двух переменных. Сохраняются все те же определения что и для плоскости, но говорим уже о пространстве.

Рассматриваются не пары чисел $M=(x,y)$, а тройки $M=(x,y,z)$;
$$\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \quad \text{и так далее.}$$

В остальном все определения переносятся почти дословно.

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad E \subset \mathbb{R}^3$$

$$u = f(M) = f(x, y, z)$$

Вместо слов «круг», «окружность» будет «шар», «сфера».

Полагаю, что для вас не составит труда проделать всё аналогично.

В дальнейшем будем говорить о функции двух переменных, предполагая, что всё автоматически переносится на функции трёх переменных