Теория функции комплексного переменного

Конспект по 2 курсу специальности «прикладная математика»
(лектор А. А. Леваков)

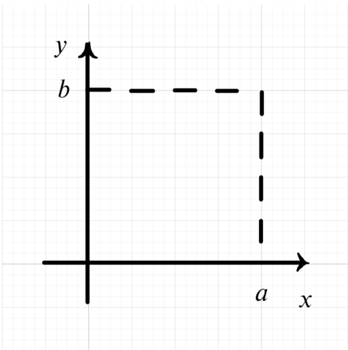
Содержание

1 Комплексные числа.

• *Под **множеством комплесных чисел** $\mathbb{C}$ понимают множество упорядоченных пар (a, b) вещественных чисел таких, что на этом множестве введены 3 операции*

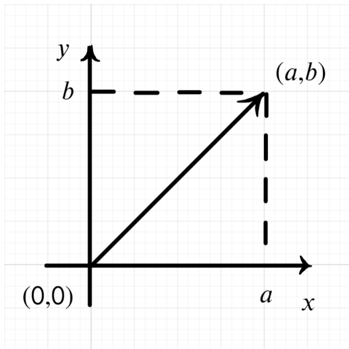
1. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$;
2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$;
3. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$;

Комплексное число обычно обозначается символом z.



Между множеством комплесных чисел и множеством точек ДПСК существует взаимнооднозначное соответствие.

• *Плоскость с выбранной на ней ДПСК, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**.*



Также существует взаимнооднозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством векторов.

• *Точки, соответствующие комплексным числам $(a, 0)$ лежат на оси x. Тогда $(a, 0) = a$, а ось x называется **вещественной**.*

На множестве комплексных чисел $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. То есть среди комплексных чисел есть такое число $(0, 1) = i$, что $i^2 = 1$.

• *Точки, соответствующие комплексным числам $(0, b)$ лежат на оси y. Тогда $(0, b) = bi$, а ось y называется **мнимой**.*

Возьмем произвольное комплексное число (a, b).

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) = a + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Следовательно, любое комплексное число можно записать в виде $z = a + bi$.

• *Такая форма записи комплексного числа называется **алгебраической формой записи**.*

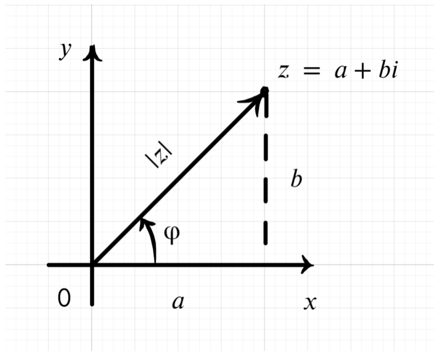
Как правило, будем записывать комплексные числа в алгебраической форме.

• *Число $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ называется **модулем** комплексного числа.*

Геометрически это расстояние от начала координат до точки, соответствующей комплексному числу.

• *Угол, который образует вектор к числу z с осью x называется* ***аргументом*** *комплексного числа и обозначается* $\varphi = \arg(z)$.

Причем, если вращение вектора от оси x против часовой стрелки, то аргумент считаем положительным. Иначе отрицательным.



Если φ — аргумент, то числа $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ также являются аргументами (то есть аргумент определен неоднозначно). Обозначаем

- $\mathrm{Arg}(z) = \varphi + 2\pi k$ — все значения аргумента;
- $\arg(z) = \varphi$ — одно значение аргумента.

Чаще всего $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Но иногда удобно считать, что $\varphi \in [0; 2\pi)$.

• *Это фиксированное значение аргумента называется* ***главным значением аргумента*** *комплексного числа.*

Таким образом, $a = |z|\cos\varphi$, $b = |z|\sin\varphi$. Тогда можно записать

$$z = a + bi = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

• *Такая форма записи комплексного числа называется* ***тригонометрической формой записи***.

Введем функцию $e^{i\varphi}$ опеределенную на множестве $\mathbb{R}$ и принимающую значения в множестве $\mathbb{C}$ по формуле

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Используя эту функцию, можем записать комплексное число в виде

$$z = a + bi = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

• *Такая форма записи комплексного числа называется* ***экспоненциальной формой записи***.

Покажем, что функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами экспоненты:

1. $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

   ♦

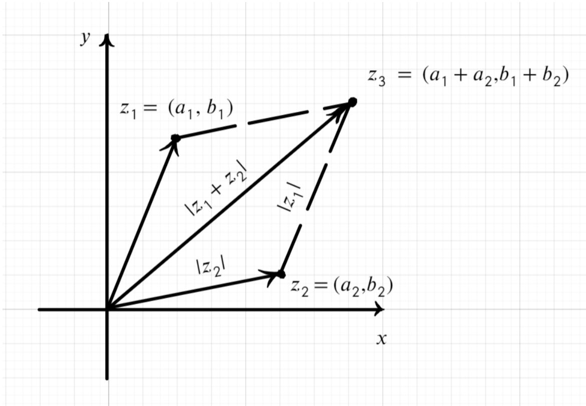
$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2, \sin\varphi_2) = \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2,\ \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \\ &= (\cos(\varphi_1+\varphi_2),\ \sin(\varphi_1+\varphi_2)) = e^{i\varphi_1+\varphi_2}. \end{aligned}$$

⊠

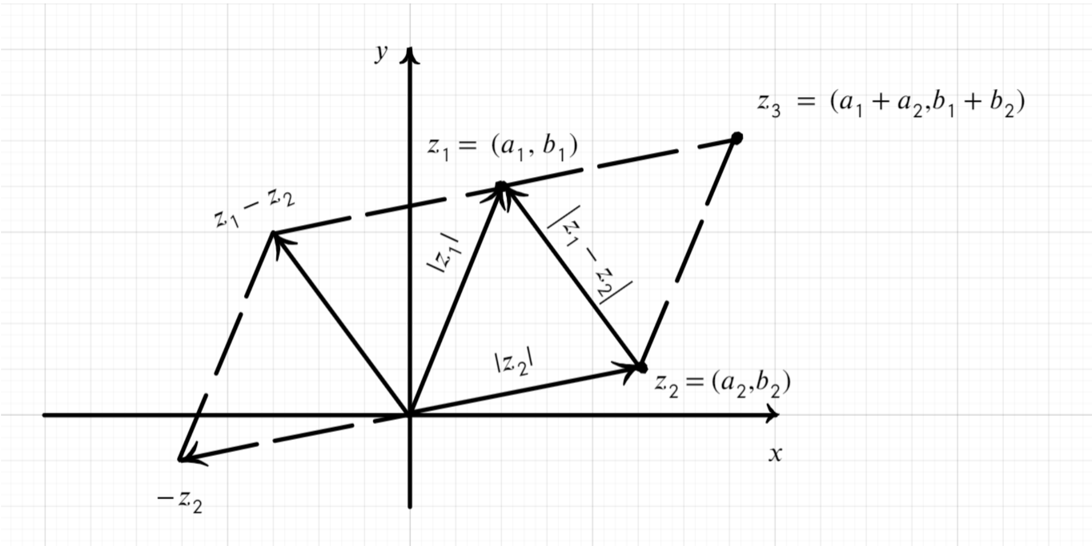
2. $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

3. $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{N}$.

Возьмем комплексную плоскость и обозначим на ней 2 комплексных числа и соответствующие им радиус-векторы. Построим параллелограмм на этих векторах и возьмем его диагональ. Комплексное число, соответствующее этой диагонали, имеет вид $z_3 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, то есть является суммой комплексных чисел z_1 и z_2.



Разность комплексных чисел $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ определяется вектором, который является второй диагональю параллеограмма построенного на векторах z_1 и z_2.



Из графиков следует свойство

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Из свойств комплексных чисел

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Отсюда вытекает, что

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

• *Если число $z = a + bi$ — комплексное число, то число $\overline{z} = a - bi$ называется* ***сопряженным*** *к комплексному числу z.*

Тогда $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. Из свойств множества комплексных чисел

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2.$$

В экспоненциальной форме

$$|z_1| \cdot e^{i\varphi_1} = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2} \Longleftrightarrow |z_1| = |z_2|,\ \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

• ***Корнем n-ой степени*** *комплексного числа z называется такое число ζ, что $\zeta^n = z$. Обозначение: $\sqrt[n]{z}$.*

Пусть $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, $\zeta = |\zeta| \cdot e^{i\varphi_1}$. Тогда

$$(|\zeta| \cdot e^{i\varphi_1})^n = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

$$|\zeta|^n \cdot e^{in\varphi_1} = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

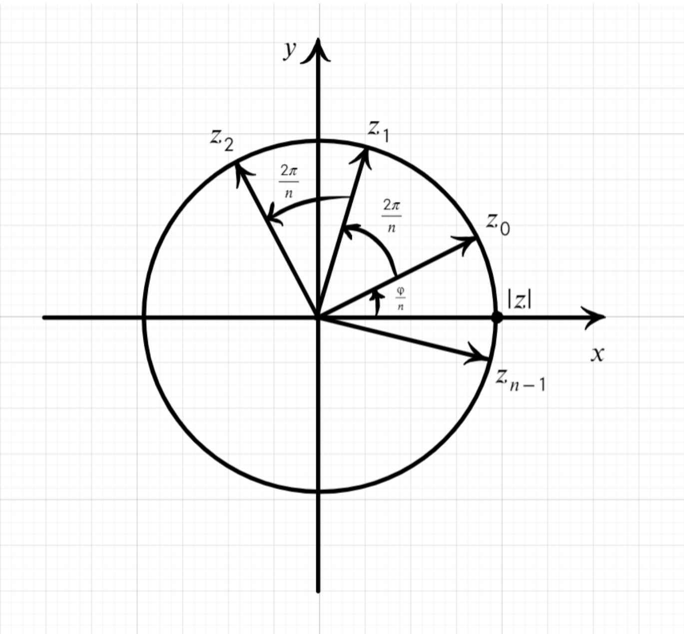
Тогда получаем

$$|\zeta|^n = |z| \Rightarrow |\zeta| = |z|^{\frac{1}{n}}.$$

$$n\varphi_1 = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Значит

$$\zeta = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}.$$



При $k = 0$ получаем z_0,

$k = 1 \to z_1$,

$k = 2 \to z_2$,
$\ldots$,

$k = n - 1 \to z_{n-1}$,

$k = n \to z_0$.

Следовательно, корень n-ой степени из любого ненулевого комплексного числа имеет ровно n различных значений. То есть $\sqrt[n]{z} = \zeta_k$ и

$$\zeta_k = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{(\arg z + 2\pi k)}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

2 Комплексные функции.

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{C}$.

• *Функция $w = f(t)$, $t \in D \in \mathbb{R}$ называется* ***комплекснозначной*** *функцией.*

Запишем в алгебраической форме:

$$w = u(t) + i \cdot v(t), \quad \mathrm{Re}(w) = u(t) \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(w) = v(t) \in \mathbb{R}.$$

Производная и интеграл для таких функций определяются аналогично вещественным функциям:

$$w(t)' = u' + i \cdot v'.$$

$$\int\limits_a^b w(t)dt = \int\limits_a^b u(t)dt + i \cdot \int\limits_a^b v(t)dt.$$

Рассмотрим функцию $w = e^{it}$, $t \in [0; 2\pi)$. Ее можно представить как $e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t$. Тогда производная от этой функции равна

$$(e^{it})' = -\sin t + i \cdot \cos t = i \cdot (\cos t + i \cdot \sin t) = ie^{it}.$$

Пусть $f : D \to \mathbb{C}$, $D \in \mathbb{C}$.

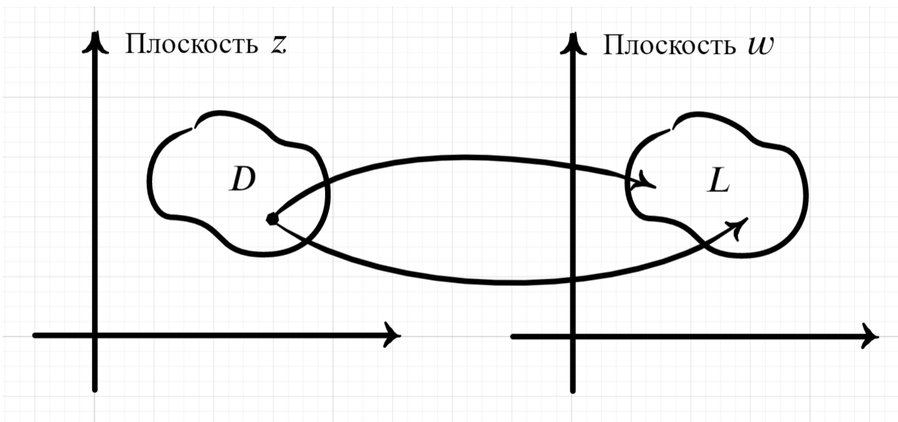
• *Функция $w = f(z)$, $z \in D \in \mathbb{C}$ называется* ***комплексной функцией****.*

Это же определение можно сформулировать иначе.

• *Пусть заданы множества $D \in \mathbb{C}$ и $L \in \mathbb{C}$ и правило $D \xrightarrow{f} L$, которое каждому значению $z \in D$ ставит в соответствие одно или несколько значений $w \in L$. Это мы и будем понимать под* ***комплексной функцией****..*

Функцию, ставящую в соответствие одно значение, будем называть **однозначной**. Аналогично, если два значения, то **двузначной**. Если неизвестно сколько значений, то **многозначной**.

Например, графически двузначная функция будет изображаться таким образом



Рассмотрим примеры комлексных функций:

1. $w = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ — ***линейная функция***;

2. $w = az^2 + bz + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ — ***квадратичная функция***;

3. $w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $\forall a_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ — ***полином n-ой степени***;

   Каждый полином n-ой степени имеет ровно n корней с учетом кратности.

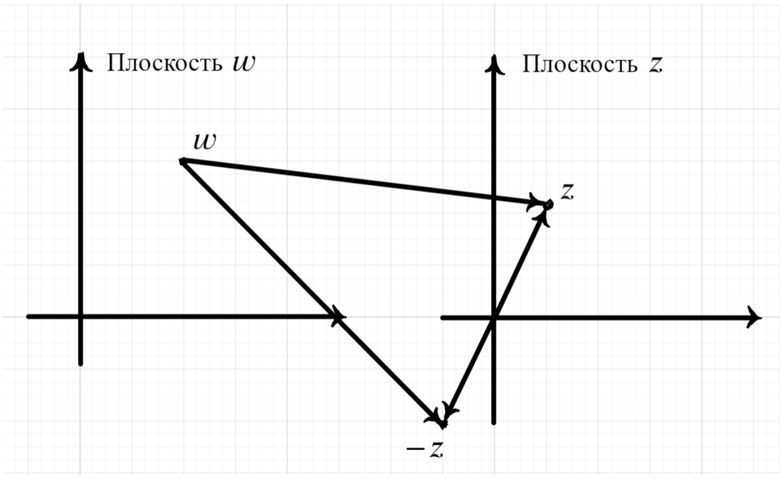
4. $w = \sqrt{z}$;

   Решением этой функции является множество таких $\zeta^2 = z$, где

$$\zeta = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{2}}, \quad k = 0, 1.$$

Тогда $\zeta_1 = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg z}{2}}$, $\zeta_2 = -|z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg z}{2}}$. Следовательно, $w = \sqrt{z}$ — двузначная функция.

Графически это можно изобразить как



Функции $w_1 = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg z}{2}}$, $w_2 = -|z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\arg z}{2}}$ являются однозначными. Их также называют **ветвями** двузначной функции $w = \sqrt{z}$.

5. $w = e^z$ — ***комплексная экспонента***;

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \cdot \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y,$$

то есть $\mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y$, $\mathrm{Im}(e^x) = e^x \sin y$. Если $z = x$, $e^z = e^x$.

Рассмотрим уравнение $w_0 = e^z$, $w_0 \neq 0$.

$$\begin{array}{c} w_0 = |w_0| \cdot e^{i \arg w_0}, \\ e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot e^{i \arg z}; \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} |w_0| = e^x, \\ y = \arg z + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Отсюда $x = \ln |w_0|$, $y = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда множество решений уравнения $w_0 = e^z$ имеет вид

$$z = \ln |w_0| + i \cdot (\arg z + 2\pi k).$$

6. $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i \cdot (\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ — ***комплексный логарифм***;

Если $z = x > 0$, то при $k = 0$ получим $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ — главное значение (ветвь) $\mathrm{Ln}\, z$. Эта функция совпадает с вещественной $\ln x$.

Из двух предудыщих рассмотренных функций вытекает, что во множестве комплексных чисел уравнение $e^z = -1$ имеет множество решений $\mathrm{Ln}(-1) = i \cdot (\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. $w = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ — ***степенная функция с любым показателем***;

Причем $z^\alpha = e^{\alpha\, \mathrm{Ln}\, z}$ при $z \neq 0$.

8. $w = \sin z$, $w = \cos z$ — ***комплексные синунс и косинус*** соответственно;

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Проверим, что при $z = x$ получим $\sin z = \sin x$:

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{\cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x}{2i} = \sin x.$$

Комплексные синус и косинус являются 2π-периодическими функциями.

Все формулы для вещественных синуса и косинуса выполняются и для комплексных. Например,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} = 1.$$

Аналогично доказываются

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2z, \quad 2\sin z\cos z = \sin 2z, \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$
и так далее.

Пример. Найдем, чему равно z в уравнении $\cos z = A$.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = [e^{iz} = t] = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = A \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2At + 1 = 0.$$

Отсюда

$$t = \frac{2A + \sqrt{4A^2 - 4}}{2} = A + \sqrt{A^2 - 1}.$$

Тогда

$$e^{iz} = A + \sqrt{A^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$iz = \operatorname{Ln}(A + \sqrt{A^2 - 1}) \quad \Rightarrow \quad z = -i\operatorname{Ln}(A + \sqrt{A^2 - 1}).$$

$\square$

Функция

$$w = -i \cdot \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \operatorname{Arccos} z \text{ — } \textbf{комплексный арккосинус}.$$

Аналогично можно вывести функцию

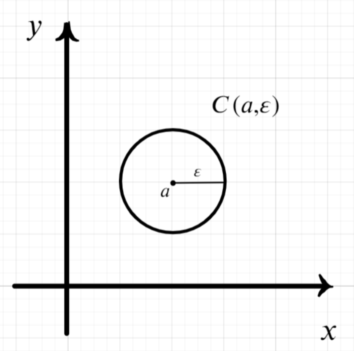
$$w = -i \cdot \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) = \operatorname{Arcsin} z \text{ — } \textbf{комплексный арксинус}.$$

3 Предел функции комплексного переменного. Непрерывные функции комплексного переменного.

• *Последовательность (z_n), где все члены $z_n \in \mathbb{C}$ называется **комплексной последовательностью**.*

• *Число $a \in \mathbb{C}$ называется **пределом последовательности** (z_n), если*

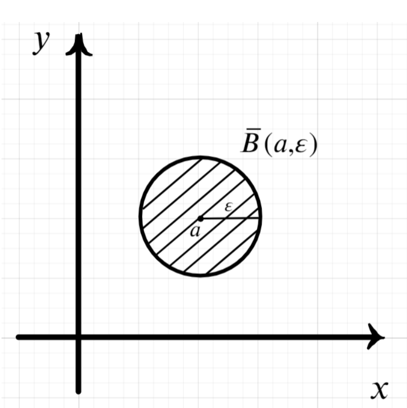
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall n \geqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - a| \leqslant \varepsilon.$$

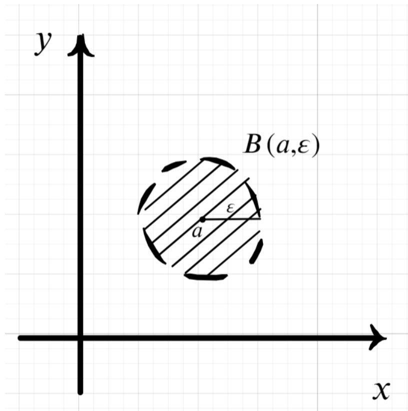


Геометрически это множество точек плоскости таких, что $|z-a| = \varepsilon$ (расстояние от точки z до точки a), то есть это окружность радиуса ε с центром с точке a. Обозначается $C(a,\varepsilon)$.

Если $|z-a| \leqslant \varepsilon$, то это круг с границей радиуса ε с центром с точке a. Обозначается $\overline{B}(a,\varepsilon)$.

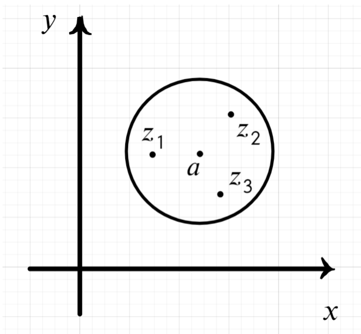
Если $|z-a| < \varepsilon$, то это круг без границы радиуса ε с центром с точке a. Обозначается $B(a,\varepsilon)$.





$B(a,\varepsilon)$ — ε-окрестность точки a. $\overline{B}(a,\varepsilon)$ — замкнутая ε-окрестность точки a.

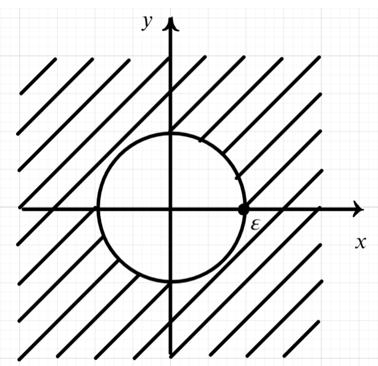
Таким образом, число $a \in \mathbb{C}$ — предел последовательности, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что все члены последовательности z_n с номерами $\geqslant$ чем $\delta(\varepsilon)$ лежат в замкнутой ε-окрестности числа a.



Говорят, что $(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \geqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |z_n| \geqslant \varepsilon,$$

то есть если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что все члены последовательности z лежат вне ε-окрестности числа a, или $z_n \notin B(a,\varepsilon)$.



Дополним множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ еще одним числом $z = \infty$.

• *Множество комплексных чисел, дополненных числом $z = \infty$, называется* ***расширенным множествомкомплексных чисел.***

Множество таких z, что $|z| > \varepsilon$ изображается графически (рис. слева)

и называется **окрестностью бесконечности**.

• *Комлексная плоскость, дополненная точкой $z = \infty$, называется* ***расширенной комплексной плоскостью****.*

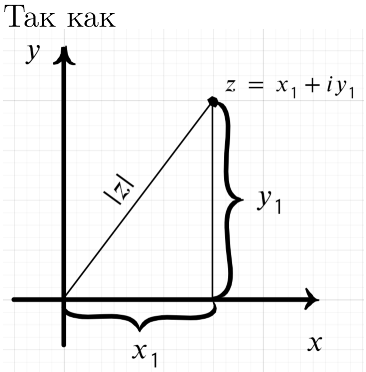
Рассмотрим (z_n), где все члены записываются в алгебраической форме: $z_n = x_n + i \cdot y_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Теорема. $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a = a_1 + i \cdot a_2 \Longleftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_1,\ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_2$.

⧫ $\Rightarrow$) $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall n \geqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - a| \leqslant \varepsilon.$$

Так как



то есть $|z| > y$, $|z| > x$, то

$$|x_n - a_1| \leqslant |z_n - a| \leqslant \varepsilon,$$

$$|y_n - a_2| \leqslant |z_n - a| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что $\begin{matrix} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_1 \\ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_2 \end{matrix}$.

$\Leftarrow$) $\begin{matrix} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_1 \\ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_2 \end{matrix}$, это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall n \geqslant \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a_1| \leqslant \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall n \geqslant \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |y_n - a_2| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$|z_n - a| = \sqrt{(x_n - a_1)^2 + (y_n - a_2)^2} \leqslant \sqrt{2}\varepsilon, \quad \forall n \geqslant \max\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\},$$

а это и есть $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ по M-лемме для последовательностей. ⊠

Замечание. *Если члены последовательности записаны в экспоненциальной форме $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, то $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a = \rho e^{i\varphi_0} \not\Rightarrow \rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho$, $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_0$, так как φ_n определено неоднозначно. Выполняется только*

$$\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho,\ \varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_0 \Longrightarrow z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a = \rho e^{i\varphi_0}.$$

Рассмотрим функцию $w = f(z)$, $z \in D \subseteq \mathbb{C}$. Любую функцию можно записать как

$$w = f(z) = f(x + i \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y), \quad u(x, y) \in \mathrm{Re}(f(z)), v(x, y) \in \mathrm{Im}(f(z)),$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — вещественные Ф2П.

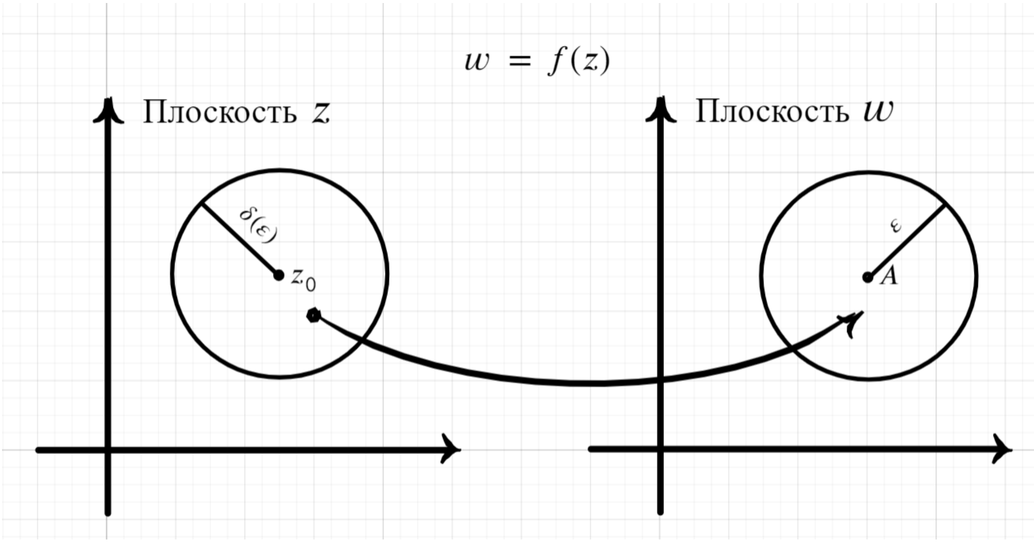
Пусть точка z_0 — вутрення точка множества D.

• *Множество $D \backslash \{z_0\}$ называется* ***проколотой окрестностью*** *точки z_0.*

• *Число $A \in \mathbb{C}$ называется* ***пределом функции*** *$f(z)$ при $z \to z_0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall z : 0 < |z - z_0| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - A| \leqslant \varepsilon.$$

То есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех z из проколотой δ-окрестности точки z_0 функция $f(z)$ принимает значения в ε-окрестности числа A. Пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, или $f(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} A$.



Когда мы говорим о пределе функции, мы рассматриваем лишь однозначные функции.

Число A может быть и ∞. Пусть $A = \infty$, тогда $f \underset{z \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall z : |z| \geqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z)| \geqslant \varepsilon.$$

Теорема. $f(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} A = B + i \cdot D \iff u(x, y) \underset{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}{\longrightarrow} B, \ v(x, y) \underset{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}{\longrightarrow} D.$

Пусть z_0 — предельная точка множества D, а $w = f(z)$.

- *Число A — **предел функции** $f(z)$ при $z \to z_0$ **вдоль множества** D, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ \forall z \in D \backslash \{z_0\} : 0 < |z - z_0| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда пишут $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} f(z) = A$.

Свойства предела функции:

1. ***Единственность.*** *Предел функции, если он существует, определен однозначно.*

2. *Если $f(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} A \in \mathbb{C}$, то функция ограничена в некоторой проколотой окрестности точки z_0.*

3. *Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = B$, $A, B \in \mathbb{C}$, то*

   (a) $\lim\limits_{z \to z_0} \Big(f(z) + g(z)\Big) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$;

   (b) $\lim\limits_{z \to z_0} \Big(f(z) \cdot g(z)\Big) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$;

   (c) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$, *если* $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0$.

Пишем $f(z) \underset{z\to z_0}{\sim} g(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 1$.

Пишем $f(z) \underset{z\to z_0}{=} o(g(z))$, если $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 0$.

При вычислении пределов функцию можно также заменить на эквивалентную ей.

Рассмотрим функцию $w = f(z)$ определенную в окрестности точки $z_0 \in D$ (внутренняя точка).

• *Функцию $f(z)$ называют **непрерывной в точке** z_0, если*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

• *Если точка $z_0 \in D$ является предельной, то при $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ функция f **непрерывна в точке** z_0 **вдоль множества** D.*

Любую функцию можно записать в виде

$$w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \iff u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), где $x_0 + i \cdot y_0 = z_0$ (следует из определения).

Свойства непрерывных функций:

1. (a) $f(z) + g(z)$ *непрерывна*;

   (b) $f(z) \cdot g(z)$ *непрерывна*;

   (c) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ *непрерывна* $(g(z) \neq 0)$,

   если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в точке z.

2. *Если $w = F(z)$, $z = \varphi(\zeta)$, причем $\varphi(\zeta)$ непрерывна в точке ζ_0, а $F(z)$ непрерывна в точке $z_0 = \varphi(\zeta_0)$, то $F(\varphi(\zeta))$ непрерывна в точке ζ_0 (композиция непрерывных функций является функцией непрерывной).*

3. **(Теорема Кантора.)**
   Непрерывная на компакте D функция $w = f(z)$ равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall z', z'' \in D : |z' - z''| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z') - f(z'')| \leqslant \varepsilon.$$

4 Дифференцирование комплексных функций.

Пусть $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0. Построим приращение

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

• ***Производной комплексной функции** называется предел (если он конечен)*

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) = f'(z)|_{z=z_0}.$$

Тогда будем говорить, что комплексная функция имеет конечную производную.

- *Функцию $w = f(z)$ называют **дифференцируемой** в точке z_0, если* $\exists A \in \mathbb{C}$:

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + o(\Delta z).$$

Первый критерий дифференцируемости функции. *Фукнция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \Longleftrightarrow$ она имеет конечную производную в этой точке $f'(z_0)$.*

♦ $\Rightarrow$) Поскольку $\Delta f = A \cdot \Delta z + o(\Delta z)$, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}.$$

Переходим к пределу при $\Delta z \to 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = A \Rightarrow f'(z_0) = A.$$

$\Leftarrow$) $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0)$. Отсюда

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right) = 0;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) = o(1);$$

$$\Delta f = f'(z_0) \cdot \Delta z + \Delta z \cdot o(1) = f'(z_0) \cdot \Delta z + o(\Delta z),$$

то есть функция дифференцируема в точке z_0. ⊠

Замечание. $o(\Delta z) = o(|\Delta z|)$, *докажем это.*

$$o(\Delta z) = \alpha(\Delta z) \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0; \tag{$*$}$$

$$o(|\Delta z|) = \alpha(|\Delta z|) \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0. \tag{$**$}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{|\Delta z|} = 0.$$

Соответственно, если выполняется ($*$), то выполняется и ($**$), и наоборот. Из этого следует, что дифференциал можно также записать в виде

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + o(|\Delta z|).$$

Второй критерий дифференцируемости функции. *Функция $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + i \cdot y_0 \Longleftrightarrow$*

1. *функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0);*

2. *выполняются условия Коши-Римана: в точке (x_0, y_0)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Причем
$$f'(z)|_{z=z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$
♦ $\Rightarrow$) $\Delta f = A\cdot\Delta z + o(\Delta z)$, где
$$A = B_1 + i\cdot B_2,$$
$$\Delta f = \Delta u + i\cdot\Delta v,$$
$$\Delta z = \Delta x + i\cdot\Delta y,$$
$$o(\Delta z) = \varepsilon_1 + i\cdot\varepsilon_2.$$
Тогда
$$\Delta f = \Delta u + i\cdot\Delta v = (B_1 + i\cdot B_2)(\Delta x + i\cdot\Delta y) + \varepsilon_1 + i\cdot\varepsilon_2.$$
Отсюда
$$\Delta u = B_1\Delta x - B_2\Delta y + \varepsilon_1, \quad \Delta v = B_2\Delta x + B_1\Delta y + \varepsilon_2;$$
причем $|\varepsilon_1| \leqslant |o(\Delta z)|$, $|\varepsilon_1| = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. Аналогично $|\varepsilon_2| = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. Подставим и получим
$$\Delta u = B_1\Delta x - B_2\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), \quad \Delta v = B_2\Delta x + B_1\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$
Вспомним, что

Функция $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0,y_0), если $\exists A, D \in \mathbb{R}$:
$$\Delta f = A\cdot\Delta x + D\cdot\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$
причем $A = f'_x$, $D = f'_y$.

Тогда $u(x,y)$ является дифференцируемой в точке (x_0,y_0) и
$$\frac{\partial u}{\partial x} = B_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B_2.$$
Но $v(x,y)$ также является дифференцируемой в точке (x_0,y_0) и
$$\frac{\partial v}{\partial x} = B_2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = B_1.$$
Следовательно,
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
$\Leftarrow$) Для доказательства все рассуждения проведем в обратном порядке. Так как $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0), то в этой точке
$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o_1(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o_2(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$
Тогда
$$\Delta f = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Big) + \Big(-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\Big) + \underbrace{o_1(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) + o_2(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})}_{o(\Delta z)} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{(\Delta x + i\cdot\Delta y)}_{\Delta z} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{(\Delta x + i\cdot\Delta y)}_{\Delta z} + o(\Delta z) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\cdot\Delta z + o(\Delta z).$$

Следовательно, $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, а

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

⊠

Все производные от комплексных функций определяются аналогично вещественным функциям.

• *Функция называется **дифференцируемой в области** D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.*

Свойства производных комплексных функций:

1. *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — функции дифференцируемые в точке z_0. Тогда*

   (a) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$;

   (b) $(f(g) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;

   (c) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$, если $g(z_0) \neq 0$.

   Все эти функции дифференцируемые в точке z_0.

2. *Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0, а $z = h(\zeta)$ дифференцируема в точке ζ_0, причем $h(\zeta_0) = z_0$, то*

$$(f(h(\zeta)))'\Big|_{\zeta_0} = f'(z_0) \cdot h'(\zeta_0).$$

Так как производная и первый критерий дифференцирования совпадают с соответствующими утверждениями для вещественных функций, то и доказательства данных свойств совпадают с доказательствами соответствующих свойств для вещественных функций.

5 Сопряженно-гармонические функции.

Рассмотрим соотношение для вещественной функции $u = u(x, y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

• *Уравнение* (1) *называется **уравнением Лапласа** для функции $u(x, y)$.*

• *Любая функция определенная в некоторой области и удовлетворяющая уравнению Лапласа в этой области называется **гармонической** функцией.*

Рассмотрим функцию $w = f(z)$ дифференцируемую в области D. Тогда $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ и выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Позже будет показано, что дифференцируемая в области функция является дважды непрерывно дифференцируемой. Из этого вытекает, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области D. Получим

$$u''_{xy} = v''_{y^2}, \quad u''_{yx} = -v''_{x^2}.$$

По теореме о смешанных производных $u''_{xy} = u''_{yx}$. Следовательно,

$$v''_{y^2} = -v''_{x^2} \Rightarrow v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0,$$

то есть функция $v(x, y)$ гармоническая. Аналогично получим, что функция $u(x, y)$ также является гармонической. То есть, если комплекнсая функция дифференцируема, то вещественная и мнимая части этой функции — гармонические функции.

• *Пара гармонический функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в области D называется **сопряженно-гармонической**, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — вещественная и мнимая части дифференцируемой в области D функции $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.*

Зная одну из двух сопряженно-гармонических функций, всегда можно найти вторую.

Используя теорему о независимости КРИ-2 от пути интегрирования, покажем, что выражение

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

удовлетворяет условию Эйлера. Примем $P(x, y) = -u'_y$, $Q(x, y) = u'_x$. Тогда

$$P'_y = -u''_{y^2}, \quad Q'x = u''_{x^2}.$$

А условие

$$-u''_{y^2} = u''_{x^2}$$

выполняется, так как функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, $\exists v(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ такая, что $v'_x = -u'_y$, $v'_y = u'_x$.

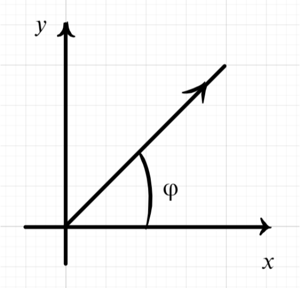
6 Кривые.

Пусть задана непрерывная комплекснозначная функция $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. Тогда можно выделить вещественную и мнимую части

$$z(t) = x(t) + i \cdot y(t).$$

• *Множество точек комплексной плоскости с координатами $z(t)$ при $t \in [a, b]$ называется **кривой**, а уравнение $z = z(t)$ называется **комплекснозначным параметрическим уравнением кривой**.*

Рассмотрим луч, выходящий из начала координат.



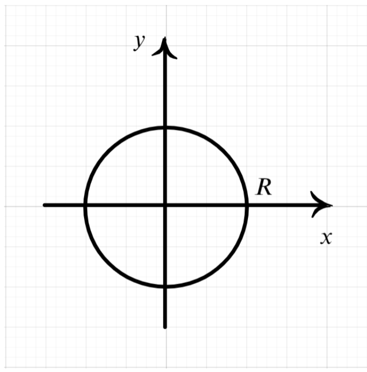
Покажем, что это кривая и найдем ее комплекснозначное параметрическое уравнение. Пусть $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$ и параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \operatorname{tg}\varphi \cdot t; \end{cases} \qquad t \in [0; +\infty)$$

Тогда параметрическое комплекснозначное уравнение имеет вид

$$z = t + i \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot t \quad \text{или} \quad z = t \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi), \quad t \in [0; +\infty).$$

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат.



Ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\varphi, \\ y = R \cdot \sin\varphi; \end{cases} \qquad \varphi \in [0; 2\pi].$$

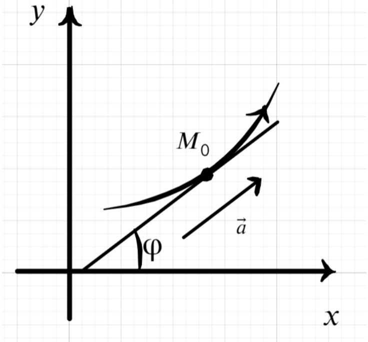
Параметрическое комплекснозначное уравнение в таком случае имеет вид

$$z(\varphi) = R \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = Re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

• *Кривая называется* ***гладкой****, если функция $z(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и $|\dot{z}(t)| \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$.*

Кривую без точек самопересечения будем называть простой. Длина простой гладкой кривой определяется формулой

$$\text{дл.}l = \int\limits_a^b |\dot{z}(t)| dt.$$



Пусть задана гладкая кривая

$$l : z = z(t) = x(t) + i \cdot y(t), \ t \in [a, b].$$

И пусть эта кривая ориентирована. К этой кривой проведена касательная через точку M_0 и параллельный ей вектор a, причем, так как $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i \cdot \dot{y}(t)$, его координаты $a(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Тогда угол $\varphi = \arg \dot{z}(t)$ — это угол между касательной (вектором a) и осью x.

7 Интегрируемые функции комплексного переменного.

Пусть l — гладкая кривая, имеющая комплекснозначное параметрическое уравнение

$$z = z(t) = x(t) + i \cdot y(t),\ t \in [a, b].$$

И пусть на кривой l задана функция однозначная $f(z)$.

- *Тогда интеграл от комплекснозначной функции*

$$\int\limits_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)dt := \int\limits_l f(z)dz$$

называется ***интегралом от комплексной функции*** $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)dt = \int\limits_a^b \Big(u(x(t), y(t)) + i \cdot v(x(t, y(t)))\Big) \cdot \Big(\dot{x}(t) + i \cdot \dot{y}(t)\Big)dt =$$

$$= \int\limits_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})dt + i \cdot \int\limits_a^b (u\dot{y} + v\dot{x})dt = \int\limits_l udx - vdy + i \cdot \int\limits_l vdx + udy.$$

Отсюда

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l udx - vdy + i \cdot \int\limits_l vdx + udy.$$

Свойства интеграла комплексного переменного:

1. *Линейность.*

$$\int\limits_l (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int\limits_l f(z)dz + \beta \int\limits_l g(z)dz.$$

2. *Адиитивность.*

   Есди кривая l кусочно-гладкая состоящая из кривых $\overset{\frown}{l_{i-1}l_i}$, то по определению

$$\int\limits_l f(z)dz := \sum_i \int\limits_{\overset{\frown}{l_{i-1}l_i}} f(z)dz.$$

   Если кривая l состоит из кривых $\overset{\frown}{l_{j-1}l_j}$, $j = \overline{1, m}$, то по определению

$$\int\limits_l f(z)dz := \sum_i \int\limits_{\overset{\frown}{l_{j-1}l_j}} f(z)dz.$$

3. Рассмотрим кусочно-гладкий путь $l : z = z(t),\ t \in [a, b]$. Тогда будем обозначать его через l^+. В свою очередь, путь $l^- : z = z(a + b - t),\ t \in [a, b]$ будем называть противоположно ориентированным по отношению к исходному пути.

При замене ориентации пути на противоположную интеграл комплексного переменного меняет знак.

$$\int\limits_{l^+} f(z)dz = -\int\limits_{l^-} f(z)dz.$$

4. *Оценки интеграла комплексного переменного.*

   (a) $\Big|\int\limits_l f(z)dz\Big| \leqslant \int\limits_l |f(z)|ds$ — КРИ-1.

   ♦

$$\Big|\int\limits_l f(z)dz\Big| = \Big|\int\limits_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dz\Big| \leqslant \Big|\int\limits_a^b |f(z(t))|\cdot|\dot{z}(t)|dz\Big| =$$

$$= \int\limits_a^b |u(x(t),y(t)) + i\cdot v(x(t),y(t))|\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt =$$

$$= \text{ [сведение КРИ-1 к определенному интегралу] } = \int\limits_l |f(z)|dz.$$

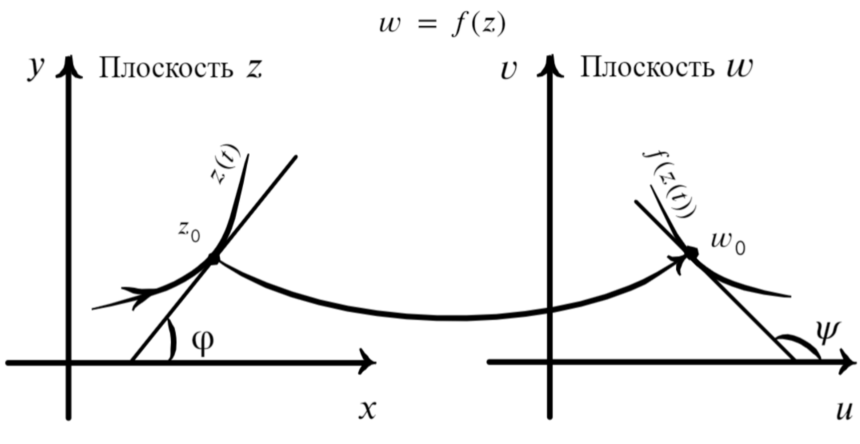
⊠

   (b) $\Big|\int\limits_l f(z)dz\Big| \leqslant M\cdot$ дл.l, где $M = \sup\limits_{z\in l}|f(z)|$.

   ♦ $\Big|\int\limits_l f(z)dz\Big| \leqslant M\cdot\int\limits_l ds = M\cdot$ дл.l ⊠

8 Геометрический смысл модуля и аргумента производной комплексной функции.

Рассмотрим функцию $w = f(z)$ такую, что $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$. И рассмотрим гладкую кривую $l: z = z(t)$, $t\in[a,b]$. Образом этой кривой будет кривая $L: w = f(z(t))$, $t\in[a,b]$.



Обозначим $\varphi = \arg\dot{z}(t_0)$, где $t_0\in[a,b]$, угол между касательной к кривой в точке $z_0 = z(t_0)$ и осью x. Найдем угол ψ (угол между касательной к образу кривой в точке $w_0 = f(z(t_0))$). Так как

$$\Big(f(z(t))\Big)'\Big|_{t=t_0} = f'(z_0)\cdot z'(t_0),$$

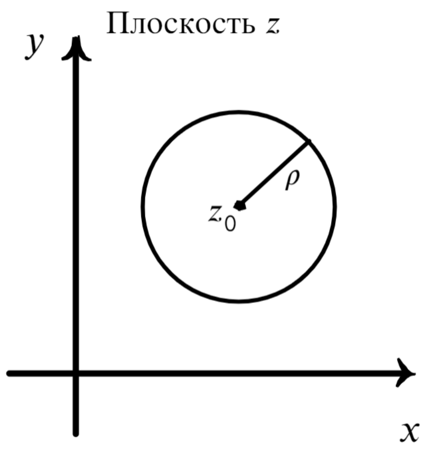
то

$$\psi = \arg(f'(z_0) \cdot z'(t_0)) = \arg z'(t_0) + \arg f'(z_0) = \varphi + \arg f'(z_0).$$

То есть ψ — это угол, на который повернулась касательная к кривой при переходе к образу (при условии, что $f'(z_0) \neq 0$).

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то при действии функции углы между кривыми сохраняются.

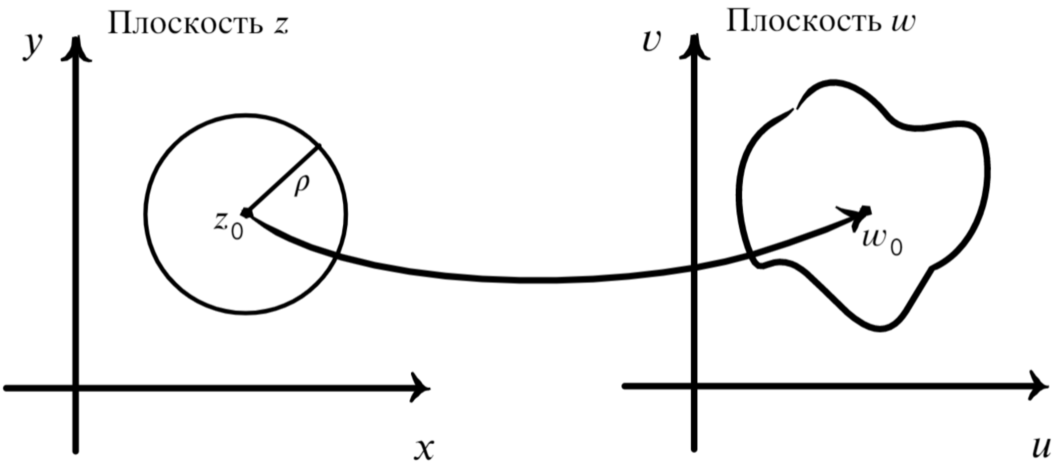
Рассмотрим окружность



Причем $|z - z_0| = |\Delta z|$ — точки, лежащие на окружности. Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + o(1), \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}.$$

Тогда при действии функции $f(z)$ образом окружности будет замкнутая кривая, которая необязательно является окружностью.



При этом

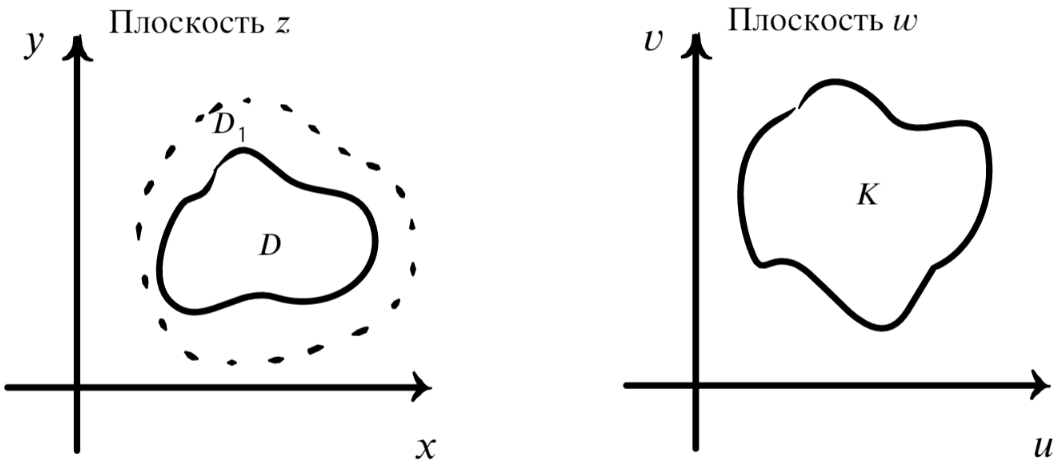
$$|\Delta f| \approx |f'(z_0)| \cdot |\Delta z|.$$

Тогда с точностью до $o(1)$ получится окружность радиуса $\rho \cdot |f'(z_0)|$, однако при действии функции окружность изменится.

• *Предел* $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta f|}{|\Delta z|}$ *называется* ***коэффициентом растяжения*** *плоскости в точке* z_0 *при действии функции* $w = f(z)$.

Следовательно, $|f'(z_0)|$ — коэффициент растяжения плоскости в точке z_0 при действии функции $w = f(z)$.

Пусть D — область в плоскости z, а K — образ этой области при действии функции $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, $(x, y) \in D$.



Предположим, что отображение $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$ — диффеоморфное отображение области D и области K. Тогда пл.$K = \iint\limits_D |\mathcal{I}| dxdy$, где $\mathcal{I}$ — якобиан

$$\mathcal{I} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}.$$

Пусть $w = f(z)$ — функция дифференцируема в некоторой области $D_1 \supseteq D$ и $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D_1$. Так как функция дифференцируема, то выполняются условия Коши-Римана, то есть $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$. Таким образом,

$$\mathcal{I} = u'_x v'_y - u'_y v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = [f'(z) = u'_x + i \cdot v'_x] = |f'(z)|^2.$$

Тогда

$$\text{пл.}K = \iint\limits_D |f'(z)|^2 dxdy.$$

9 Интегральная теорема Коши.

Теорема. *Если функция* $w = f(z)$ *дифференцируема в односвязной области* D, *то* $\forall$ *замкнутой кусочно-гладкой кривой* l *лежащей в области* D

$$\int\limits_l f(z) dz = 0.$$

♦ Если функция $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ дифференцируема, то она непрерывно дифференцируема в области D (доказательство этого утверждения приведем позже). То есть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D. Тогда

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l (udx + vdy) + i \cdot \int\limits_l (vdx + udy) =$$

$$= [\text{по теореме о независимости КРИ-2 от пути интегрирования}] = 0.$$

Проверим выполнение условий примененной теоремы:

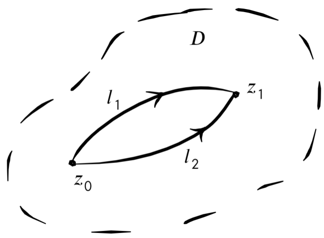
$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

а это условия Коши-Римана. По второму критерию дифференцируемости они выполняются, следовательно, выполняется теорема о независимости КРИ-2 от пути интегрирования. ⊠

10 Следствия из интегральной теоремы Коши.

Следствия.

1. *Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то интеграл $\int\limits_l f(z)dz$ не зависит от формы кривой, лежащей в области D.*

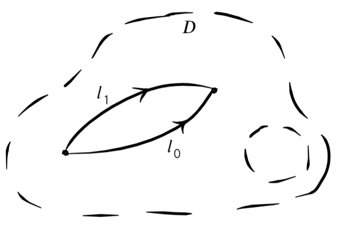


Какую бы кривую мы не вызяли, интегралы по l_1 и по l_2 будут совпадать.

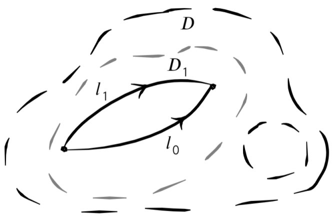
2. *Если кривая l_1 получена из кривой l_0 путем непрерывной деформации, не выводящей из области D, и начало и конец этих кривых совпадают, а функция $w = f(z)$ дифференцируема в этой области, то*

$$\int\limits_{l_1} f(z)dz = \int\limits_{l_0} f(z)dz.$$

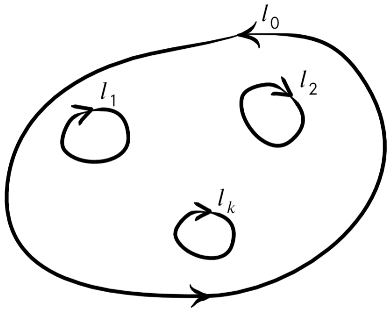
Причем область необязательно односвязная.



♦ Всегда можно выбрать область D_1, которая односвязная и лежит в области D, такую, что l_1 и l_0 лежат в области D_1. Тогда получаем утверждение из следствия 1.



⊠

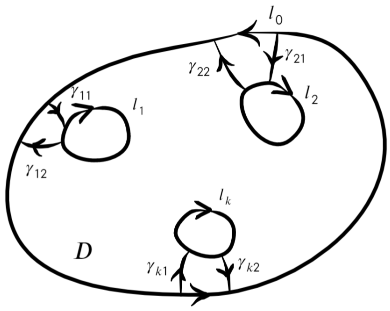


• *Неодносвязная область, ограниченная простой кусочно-гладкой кривой l_0 и простыми непересекающимися кусочно-гладкими кривыми l_1, l_2, ..., l_k, лежащими внутри кривой l_0 и ориентированными так, чтобы область оставалась слева, называется* ***стандартной многосвязной областью****.*

3. *Если функция $w = f(z)$ дифференцируемая в некоторой области D, содержит стандартную многосвязную область, то*

$$\int\limits_{l_0} f(z)dz + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{l_i} f(z)dz = 0.$$

♦ Проведем разрезы, соединяющие кривую l_0 с кривыми $l_1, l_2, \ldots, l_k$.



Рассмотрим кривую Г, образовавшуюся из кривых $l_0, l_1, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, l_k, \gamma_{k1}, \gamma_{k1}$, и область ограниченную кривой Г. Эта область односвязная. Функция $w = f(z)$ будем дифференцируема в этой области. Тогда по интегральной теореме Коши

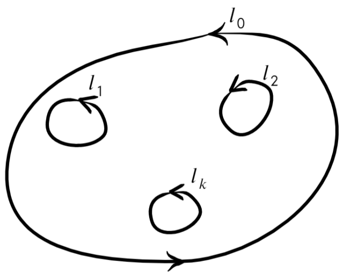
$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0 = \int\limits_{l_0} f(z)dz + \int\limits_{l_1} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{l_k} f(z)dz + \underbrace{\int\limits_{\gamma_{11}} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_{12}} f(z)dz}_{=0} +$$

$$+ \ldots + \underbrace{\int\limits_{\gamma_{k1}} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_{k2}} f(z)dz}_{=0} = \int\limits_{l_0} f(z)dz + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{l_i} f(z)dz.$$

⊠

Замечание. *Если в следствии 3 все кривые считать ориентированными так, что* *указанная область D, ограниченная этими кривыми, остается слева, то*

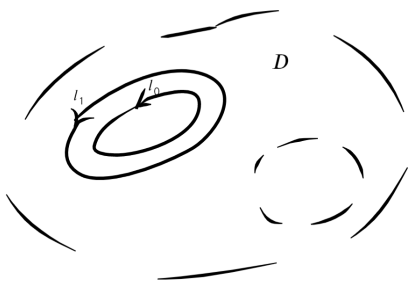
$$\int_{l_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \int_{l_i} f(z)dz.$$



4. *Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в области D, а l_0 и l_1 — две замкнутые кусочно-гладкие простые непересекающиеся кривые ориентированные так, что области ограниченные этими кривыми остаются слева, такие, что множество, лежащее между этими кривыми принадлежит области D, то*

$$\int_{l_0} f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz.$$

⧫ Вытекает из замечания к следствию 3.



⊠

Также последнее следствие можно сформулировать следующим образом. Интеграл от дифференцируемой в области функции не меняется при деформации кривой, невыводящей кривую из области D.

11 Первообразная. Интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть функция $w = f(z)$ задана в области $D \subseteq \mathbb{C}$.

• *Функция $F(z)$ заданная в области D называется* ***первообразной*** *для функции $f(z)$, если*

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D.$$

Если функция $f(z)$ задана в области D и интеграл $\int\limits_l f(z)dz$ не зависит от формы кривой, лежащей в области D, то можно построить однозначную функцию $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, где

z_0 — некоторая фиксированная точка из D, а z — произвольная точка из D ($\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ — интеграл по кривой, соединяющей точки z_0 и z).

• *Функция*

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

называется ***интегралом с переменным верхним пределом.***

Теорема (о первообразной)**.** *Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ является первообразной в области D для функции $f(z)$.*

⧫ Возможность построения однозначной функции $F(z)$ вытекает из следствия 1 интегральной теоремы Коши. Необходимо доказать, что $\forall z \in D$ $F'(z) = f(z)$. Возьмем точки z, $z + \Delta z \in D$. Тогда

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z} =$$

$$= [\text{из независимости от формы пути}] = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z}.$$

$$F'(z) - f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \Big(\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - f(z) \Big) = \lim_{\Delta z \to 0} \Big(\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \frac{f(z)}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta \Big) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \Big(f(\zeta) - f(z) \Big) d\zeta = \Big[\frac{1}{|\Delta z|} \cdot \Big| \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \Big(f(\zeta) - f(z) \Big) d\zeta \Big| \leqslant [$$

$$\text{функция дифференцируема, следовательно, непрерывна в точке} z, \text{то есть}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \zeta : |\zeta - z| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\zeta - f(z))| \leqslant \varepsilon] \leqslant \frac{1}{\Delta z} \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon \Big] = 0.$$

⊠

Замечание. *Если $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — две первообразные для функции $f(z)$ в односвязной области D, то $F_1(z) - F_2(z) = C \in \mathbb{C}$.*

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)**.** *Если $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то*

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = G(z)\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $G(z)$ — некоторая первообразная для функции $f(z)$.

⧫ Пусть

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z).$$

Полагаем в этом равенстве $z = z_1$. Тогда

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) = F(z_1) - F(z_0) = G(z)\Big|_{z_0}^{z_1}.$$

$\boxtimes$

Формула интегрирования по частям. *Если $u(z)$, $v(z)$ — две непрерывно дифференцируемые в односвязной области D функции, то*

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} u(z)dv(z) = u(z)\cdot v(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{z_0}^{z_1} v(z)du(z).$$