

**Дифференциальные уравнения**  
Конспект по 2 курсу специальности «прикладная  
математика»  
(лектор А. В. Филипцов)

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Основные понятия. Простейшие дифференциальные уравнения.</b>	<b>2</b>
1.1	Основные понятия. . . . .	2
1.2	Простейшие дифференциальные уравнения. . . . .	3
<b>2</b>	<b>Линейные стационарные уравнения.</b>	<b>7</b>
2.1	Линейные стационарные дифференциальные уравнения. Существование и единственность задачи Коши. . . . .	7
2.2	Структура множества решений линейного однородного стационарного уравнения. . . . .	9
2.3	Построение фундаментальной системы решений линейного стационарного однородного уравнения. . . . .	12
2.4	Неоднородные стационарные линейные уравнения. Метод Коши. Метод Лагранжа. . . . .	13
2.5	Стационарное линейное неоднородное уравнение со специальной правой частью. Метод Эйлера. . . . .	16
2.6	Непрерывная зависимость решений от начальных данных. . . . .	19
2.7	Устойчивость решений дифференциальных уравнений. . . . .	20
2.8	Фазовая плоскость. . . . .	22
2.9	Классификация точек покоя. . . . .	23
<b>3</b>	<b>Линейные стационарные векторные уравнения.</b>	<b>29</b>
3.1	Системы стационарных линейных уравнений. . . . .	29
3.2	Структура множества решений линейной стационарной системы однородных уравнений. . . . .	31
3.3	Метод Эйлера построения фундаментальной системы решений линейных векторных уравнений. . . . .	33
3.4	Матричный метод построения фундаментальной системы решений линейных стационарных векторных уравнений. . . . .	34
3.5	Неоднородные стационарные линейные векторные уравнения. . . . .	37
3.6	Непрерывная зависимость решений стационарного линейного векторного уравнения от начальных значений. . . . .	39
3.7	Устойчивость стационарных линейных векторных уравнений. . . . .	40
3.8	Фазовая плоскость линейных стационарных векторных уравнений порядка 2. . . . .	42
<b>4</b>	<b>Элементарные дифференциальные уравнения.</b>	<b>45</b>
4.1	Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия. . . . .	45
4.2	Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделенными переменными. . . . .	46

# Глава 1

## Основные понятия. Простейшие дифференциальные уравнения.

### 1.1 Основные понятия.

- *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется выражение вида

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1.1.1)$$

где  $F$  — некоторая функция  $(n + 2)$ -ух переменных, определенная в некоторой области,  $t$  — независимая переменная,  $x = x(t)$  — неизвестная функция независимой переменной,  $x', \dots, x^{(n)}$  — производные функции  $x(t)$ , причем переменная  $t$  и функции  $F$  и  $x$  действительны.

- *Порядок старшей производной, присутствующей в уравнении (1.1.1), называется **порядком** уравнения.*
- ***Решением** уравнения (1.1.1) называется функция, заданная и  $n$  раз дифференцируемая на некотором промежутке (связном множестве)  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  и обращающая уравнение (1.1.1) в верное равенство.*
- *График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.*

Если функция  $x(t) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  является решением уравнения (1.1.1) на промежутке  $\mathbb{I}$ , то  $\forall I_1 \subseteq \mathbb{I}$  функция  $x_1(t) : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $x_1(t) = x(t) \quad \forall t \in I_1$ , является решением на промежутке  $I_1$ . При этом функция  $x_1(t)$  называется **сужением** функции  $x(t)$  на промежутке  $I_1$ , а функция  $x(t)$  называется **продолжением** функции  $x_1(t)$  на промежутке  $\mathbb{I}$ .

- *Решение, которое нельзя продолжить, называется **непродолжаемым**, а промежуток, на котором оно определено, называется **максимальным интервалом существования**.*

Каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений.

- *Совокупность решений уравнения (1.1.1) вида  $x = \varphi(t, C_1, \dots, C_n)$ , зависящая от  $n$  существенно произвольных постоянных, называется **общим решением** уравнения (1.1.1).*

Существенные постоянные — это постоянные, которые нельзя заменить на меньшее количество, не изменив совокупность решений, описанных общим решением.

- Решение дифференциального уравнения, получающееся из общего решения при конкретных произвольных постоянных, называется **частным решением**.

Возможны случаи, когда уравнение имеет решение, не входящее в общее решение.

- Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется **полным решением**.

Часто на практике математическая модель, содержащая дифференциальное уравнение, содержит также некоторые дополнительные условия необходимые для выбора единственного решения, описывающего моделируемый процесс.

- Дополнительные условия накладываются на неизвестную функцию называются **начальными**, если они относятся к одному значению аргумента, и **граничными**, если относятся к разным значениям аргумента.

- Начальная задача вида

$$\begin{cases} F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \\ x|_{t=t_0} = \xi_0, x'|_{t=t_0} = \xi_1, \dots, x^{(n-1)}|_{t=t_0} = \xi_{n-1}; \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{I}$$

называется **задачей Коши**.

## 1.2 Простейшие дифференциальные уравнения.

Пусть  $D$  — оператор дифференцирования, то есть  $D : x \mapsto x'$ . Тогда первую производную функции  $x$  будем обозначать  $Dx = x'$ , вторую  $D^2x = x''$  и так далее.

- **Простейшим** называется дифференциальное уравнение вида

$$D^n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I}, \quad (1.2.1)$$

где  $\mathbb{I}$  — некоторый промежуток в  $\mathbb{R}$ ,  $f(t)$  — непрерывная в  $\mathbb{I}$  функция.

**Теорема.** Общее решение простейшего дифференциального уравнения первого порядка

$$Dx = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \quad (1.2.2)$$

имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + C,$$

где  $t_0 \in \mathbb{I}$ , а  $C$  — произвольная постоянная.

♦ Доказательство теоремы следует из курса математического анализа. □

Заметим, что общее решение содержит все решения дифференциального уравнения (1.2.2). Следовательно, полученное общее решение является **полным** решением.

**Теорема.** Задача Коши  $Dx = f(t)$ ,  $x|_{t=t_0} = \xi_0$ , где  $t, t_0 \in \mathbb{I}$ , имеет единственное решение

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \xi_0.$$

◆ Подставим начальное условие в общее решение:  $\xi_0 = x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(\tau) d\tau + C \Rightarrow C = \xi_0$ . ▣

Решение простейшего дифференциального уравнения (1.2.1) можно свести к последовательному решению простейшего дифференциального уравнения первого порядка. Так как  $D^n x = D(D^{n-1}x)$ , то уравнение  $n$ -го порядка является уравнением первого порядка относительно функции  $D^{n-1}x$ . Следовательно, из первой теоремы получаем

$$D^{n-1}x = \int_{t_0}^t f(\tau_1) d\tau_1 + C_1.$$

Тогда аналогично

$$D^{n-2}x = \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 + C_1 \right) d\tau_2 + C_2 = \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau_2 + C_1(t - t_0) + C_2.$$

Заметим, что семейство функций  $C_1(t - t_0) + C_2$  описывает множество всех многочленов первой степени. Следовательно, это множество не изменится, если заменить его на  $\tilde{C}_1 t + \tilde{C}_0$ . Тогда имеем

$$D^{n-2}x = \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 + \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_0.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим

$$x(t) = \int_{t_0}^t d\tau_n \int_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 + \tilde{C}_{n-1} t^{n-1} + \dots + \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_0.$$

**Теорема.** Общее решение (полное) уравнения (1.2.1) имеет вид

$$x(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau}_{y_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{C}_i t^i}_{y_2}. \quad (1.2.3)$$

◆ Доказательство можно провести двумя способами: по формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, или путем сведения кратных интегралов к повторным. Мы рассмотрим первый способ. Формула

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, \tau) d\tau \right) = \beta'(t) f(t, \beta(t)) - \alpha'(t) f(t, \alpha(t)) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(t, \tau) d\tau$$

определяет производную от интеграла, зависящего от параметра. Тогда для нашего случая подставим вместо  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  соответственно  $t, t_0$  и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau \right) = f(t, t) + \int_{t_0}^t f'_t(t, \tau) d\tau.$$

Отсюда получаем  $D^n y_2 = 0$ . Вычислим  $D^n y_1$ :

$$\begin{aligned} Dy_1 &= \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) + \int_{t_0}^t \frac{(n-1)(t-\tau)^{n-2}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{n-2}}{(n-2)!} f(\tau) d\tau; \\ D^2 y_1 &= \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{n-3}}{(n-3)!} f(\tau) d\tau; \\ &\dots \\ D^n y_1 &= f(t). \end{aligned}$$

□

**Теорема.** Решение задачи Коши  $D^n x = f(t)$ ,  $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$  ( $D^0$  — тождественное отображение, то есть  $D^0 x = x$ ), где  $t, t_0 \in \mathbb{I}$ , всегда существует, единственно и имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i}{i!} (t-t_0)^i.$$

◆ Разложим многочлен в общем решении простейшего дифференциального уравнения (1.2.3) по степеням  $t - t_0$ , то есть представим в виде

$$\tilde{C}_{n-1}(t-t_0)^{n-1} + \dots + \tilde{C}_1(t-t_0) + \tilde{C}_0,$$

где  $\tilde{C}_i$  — произвольные постоянные, зависящие от  $\tilde{C}_i$ .

Тогда  $\xi_0 = x|_{t=t_0} = \tilde{C}_0$ ,  $\xi_i = D^i x|_{t=t_0} = i! \cdot \tilde{C}_i \Rightarrow \tilde{C}_i = \frac{\xi_i}{i!}$ .

□

• **Комплекснозначной функцией действительного переменного** называется функция вида

$$h(t) = f(t) + i \cdot g(t),$$

где  $f(t)$  и  $g(t)$  — действительные функции, определенные на некотором промежутке  $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$ .

Производные и интегралы комплекснозначной функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t) + i \cdot g'(t); \\ \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + i \cdot \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Кроме того для таких функций справедливы свойства производных:

1.  $(\alpha u)' = \alpha u'$ ;
2.  $(u + v)' = u' + v'$ ;
3.  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Рассмотрим комплексное простейшее дифференциальное уравнение  $Dz = h(t)$ , где  $h(t) = f(t) + i \cdot g(t)$ . Если комплекснозначная функция  $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$  является решением этого дифференциального уравнения, то подставим его в уравнение и получим 
$$\begin{cases} Dx = f(t), \\ Dy = g(t). \end{cases}$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$z(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + C_1 + i \cdot \left( \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau + C_2 \right) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Тогда решение задачи Коши  $Dz = h(t)$ ,  $z|_{t=t_0} = \xi_0$  сводится к решению двух задач Коши:

$$\begin{cases} Dx = \operatorname{Re}(h(t)), \\ x|_{t=t_0} = \operatorname{Re}(\xi_0); \end{cases} \quad \begin{cases} Dy = \operatorname{Im}(h(t)), \\ y|_{t=t_0} = \operatorname{Im}(\xi_0); \end{cases}$$

Заметим, что любое дифференциальное уравнение можно рассматривать как комплексное простейшее дифференциальное уравнение, у которого мнимая часть неоднородности равна нулю. Следовательно, можем говорить о существовании комплекснозначных решений действительных уравнений.

## Глава 2

# Линейные стационарные уравнения.

### 2.1 Линейные стационарные дифференциальные уравнения. Существование и единственность задачи Коши.

- *Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка называется уравнение вида*

$$D^n x + a_{n-1}(t)D^{n-1}x + \dots + a_1(t)Dx + a_0(t)D^0x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}, \quad (2.1.1)$$

где функции  $a_i(t)$  и  $f(t)$  непрерывны на промежутке  $\mathbb{I}$ .

- *Если  $f(t) = 0$ , то уравнение называется **однородным**, в противном случае **неоднородным**.*
- *Если  $a_i(t)$  является постоянным, то уравнение **стационарное**.*

Далее рассматриваем только стационарные линейные дифференциальные уравнения.

Обозначим через  $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$  оператор дифференцирования. Тогда уравнение (2.1.1) запишем в виде

$$L_n x = f(t). \quad (2.1.1)$$

Так как для любых дифференцируемых функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$

1.  $D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) + D(\varphi_2)$ ,
2.  $D(\alpha\varphi_1) = \alpha D(\varphi_1)$ ,

то оператор дифференцирования  $D$  является линейным. Следовательно, оператор  $L_n$  является результатом композиции суммы и произведения на действительное число линейных операторов, а значит  $L_n$  — **линейный оператор**.

Кроме действительных стационарных уравнений будем также рассматривать комплексные стационарные уравнения вида  $L_n z = h(t)$ , где  $L_n$  — линейный стационарный оператор с комплексными коэффициентами, а  $h(t)$  — комплекснозначная функция.

- *Любой комплекснозначный линейный оператор  $L_n$  можно представить в виде композиции (произведения) операторов вида  $D - \lambda_0 D^0$ . Такое представление линейного оператора*



$L_n$  называется **факторизацией** оператора.

Для факторизации оператора  $L_n$  построим многочлен  $\delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$  с теми же коэффициентами, что и у оператора  $L_n$ . Найдем корни этого многочлена над полем  $\mathbb{C}$ .

• При этом многочлен  $\delta(\lambda)$  называется **характеристическим многочленом** для оператора  $L_n$ , а уравнение  $\delta(\lambda) = 0$  — **характеристическим уравнением** для оператора  $L_n$ .

Многочлен  $\delta(\lambda)$  над полем  $\mathbb{C}$  с учетом кратности имеет столько корней, какова его степень. Обозначим эти корни через  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Тогда  $\delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$  и, следовательно,  $L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0) \dots (D - \lambda_n D^0)$  — **факторизация** линейного оператора  $L_n$ .

**Лемма.** Решение задачи Коши  $Dz - \lambda_0 z = h(t)$ ,  $z|_{t=t_0} = \xi_i$ ,  $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  для любой комплекснозначной функции  $h(t)$  и для любых комплексных чисел  $\xi_i$  и  $\lambda_0$  всегда существует и единственно.

◆ Домножим уравнение задачи Коши на ненулевую функцию  $e^{-\lambda_0 t}$  и получим

$$e^{-\lambda_0 t} Dz - \underbrace{\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}}_{D(e^{-\lambda_0 t})} z = h(t) e^{-\lambda_0 t},$$

$$D(e^{-\lambda_0 t} z) = h(t) e^{-\lambda_0 t}.$$

Полученное уравнение является простейшим относительно функции  $e^{-\lambda_0 t} z$ , следовательно, его общее решение имеет вид

$$e^{-\lambda_0 t} z = \int_{t_0}^t e^{-\lambda_0 \tau} h(\tau) d\tau + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$z = \int_{t_0}^t e^{\lambda_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau + C e^{\lambda_0 t}.$$

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим в общее решение начальные условия и получим  $\xi = z|_{t=t_0} = C e^{\lambda_0 t_0} \Rightarrow C = \xi e^{-\lambda_0 t_0} \Rightarrow$

$$z = \int_{t_0}^t e^{\lambda_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau + \xi e^{\lambda_0(t-t_0)}.$$

□

**Теорема.** Решение задачи Коши  $L_n z = h(t)$ ,  $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ,  $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  для любой непрерывной комплекснозначной функции  $h(t)$ , для любых комплексных чисел  $\xi_i$  и для любого комплексного линейного оператора  $L_n$  всегда существует и единственно.

♦ Факторизуем оператор  $L_n$ :  $L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0) \dots (D - \lambda_n D^0)$  и обозначим через  $L_{n-1}$  следующий оператор:  $L_{n-1} = (D - \lambda_2 D^0)(D - \lambda_3 D^0) \dots (D - \lambda_n D^0)$ . Тогда уравнение задачи Коши представимо в виде

$$(D - \lambda_1 D^0)(L_{n-1}z) = h(t).$$

Если обозначим  $z_1 = L_{n-1}z$ , то уравнение имеет вид  $(D - \lambda_1 D^0)z_1 = h(t) \Rightarrow z_1|_{t=t_0} = (L_{n-1}z)|_{t=t_0} = \mu_1$ , где  $\mu_1$  — комплексное число, которое выражается через  $\xi_i$ .

По лемме решение задачи Коши всегда существует и единственно. Следовательно, функция  $z(t)$  является решением задачи Коши  $L_{n-1}z = z_1$ ,  $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$ ,  $i = \overline{0, n-2}$ . Продолжая рассуждения аналогичным образом еще  $(n-1)$  раз, получим функцию, которая является решением исходной задачи Коши.  $\square$

**Следствие.** Действительное решение задачи Коши  $L_n x = f(t)$ ,  $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ,  $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  для любой непрерывной действительной функции  $f(t)$ , для любых действительных чисел  $\xi_i$  и для любого действительного линейного оператора  $L_n$  всегда существует и единственно.

♦ Если рассматривать функцию  $f(t)$  и числа  $\xi_i$  как комплекснозначную функцию и комплексные числа с нулевой мнимой частью, то по теореме задача Коши имеет единственное комплексное решение  $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ , где функции  $x(t)$  и  $y(t)$  действительные. Но линейный оператор  $L_n$  имеет действительные коэффициенты  $L_n z = L_n x + i \cdot L_n y$ .

Тогда, так как  $z$  — решение задачи Коши, подставим:

$$\begin{cases} L_n x + i \cdot L_n y = f(t) + i \cdot 0, \\ (D^i x + i \cdot D^i y)|_{t=t_0} = \xi_i + i \cdot 0; \end{cases}$$

приравняем действительные части и получим, что функция  $x(t) = \operatorname{Re}(z(t))$  является единственным действительным решением задачи Коши.  $\square$

## 2.2 Структура множества решений линейного однородного стационарного уравнения.

Рассмотрим линейное стационарное однородное уравнение

$$L_n x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.2.1)$$

Так как оператор  $L_n$  является линейным, то для любых двух решений  $x(t)$  и  $y(t)$  уравнения (2.2.1) и  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$   $L_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L_n x + \beta \cdot L_n y = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$ . Следовательно, функция  $\alpha x + \beta y$  также является решением уравнения (2.2.1), а значит множество решений уравнения (2.2.1) является **линейным (векторным) пространством**.

Покажем, что пространство конечномерно и имеет размерность  $n$  (равную порядку уравнения).

• Функции  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  называются **линейно зависимыми**, если существуют числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  не обращающиеся в 0 одновременно такие, что  $\alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) = 0 \quad \forall t$ . В противном случае функции называются **линейно независимыми**.



По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши каждая из этих задач Коши имеет единственное решение. Обозначим их через  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ . Заметим, что их Вронскиан при  $t = t_0$  равен определителю единичной матрицы, то есть равен 1. Следовательно, эти функции линейно независимы.

Покажем, что любое решение уравнения (2.2.1) линейно выражается через эти функции. Пусть  $\varphi(t)$  — произвольное решение уравнения (2.2.1), и пусть  $\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_0$ ,  $D\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_1$ ,  $\dots$ ,  $D^{n-1}\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_{n-1}$ . Рассмотрим функцию  $\psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \dots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}$ . При этом  $D^i\psi(t)|_{t=t_0} = (\xi_0 D^i\varphi_0 + \dots + \xi_{n-1} D^i\varphi_{n-1})|_{t=t_0} = \xi_i \forall i = \overline{0, n-1}$ . Следовательно, функция  $\psi(t)$  является решением задачи Коши с теми же начальными условиями, что и функция  $\varphi(t)$ . Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши

$$\varphi(t) = \psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \dots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}. \quad (2.2.3)$$

И, следовательно, произвольная функция  $\varphi(t)$  линейно выражается через линейно независимые функции  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ . Значит функции  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$  составляют базис пространства решений.  $\square$

• *Базис пространства решений линейной однородной системы уравнений называется фундаментальной системой решений.*

• *Фундаментальная система решений, удовлетворяющая условиям (2.2.2) называется нормированной при  $t = t_0$ .*

Используя фундаментальную систему решений нормированную при  $t = t_0$ , задача Коши с произвольными начальными условиями может быть найдена по формуле (2.2.3).

• *Функция  $\psi(t)$  называется сдвигом функции  $\varphi(t)$  на  $t = t_0$ , если  $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$ .*

**Теорема о сдвиге.** Если  $\varphi(t)$  является решением задачи Коши  $L_n x = 0$ ,  $D^i x|_{t=0} = \xi_i$ ,  $\forall i = \overline{0, n-1}$ , то ее сдвиг  $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$  является решением задачи Коши  $L_n x = 0$ ,  $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$ ,  $\forall i = \overline{0, n-1}$ .

♦ Так как  $\varphi(t)$  — решение уравнения (2.2.1), то  $L_n \varphi(t) = 0 \forall t$ , то есть

$$\frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0 \varphi(t) = 0 \forall t.$$

Так как равенство верно  $\forall t$ , оно останется верным, если заменить в нем  $t$  на  $t - t_0$ , то есть

$$\frac{d^n \varphi(t - t_0)}{d(t - t_0)^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi(t - t_0)}{d(t - t_0)^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d\varphi(t - t_0)}{d(t - t_0)} + a_0 \varphi(t - t_0) = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{d\varphi(t - t_0)}{d(t - t_0)} = \frac{d\varphi(t - t_0)}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d(t - t_0)}{dt}} = \frac{d\varphi(t - t_0)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{dt} = D\psi(t) \Rightarrow \frac{d^i \varphi(t - t_0)}{d(t - t_0)^i} = D^i \psi(t).$$

И, следовательно,  $D^n \psi(t) + a_{n-1} D^{n-1} \psi(t) + \dots + a_1 D\psi(t) + a_0 \psi(t) = 0$ . То есть  $\psi(t)$  также является решением уравнения (2.2.1) и при этом  $D^i \psi(t)|_{t=t_0} = D^i \varphi(t - t_0)|_{t=t_0} = D^i \varphi(t)|_{t=0} = \xi_i$ .  $\square$

**Следствие.** Если  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$  — фундаментальная система решений нормированная при  $t = 0$ , то  $\varphi_0(t - t_0), \dots, \varphi_{n-1}(t - t_0)$  — фундаментальная система решений нормированная при  $t = t_0$ .

Следовательно, решение задачи Коши  $L_n x = 0$ ,  $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i \forall i = \overline{0, n-1}$  имеет вид  $x(t) = \xi_0 \varphi_0(t - t_0) + \dots + \xi_{n-1} \varphi_{n-1}(t - t_0)$ .

## 2.3 Построение фундаментальной системы решений линейного стационарного однородного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$L_n x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3.1)$$

И пусть  $\Delta(\lambda)$  — характеристический многочлен оператора  $L_n$ , имеющего вид  $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0$ .

**Теорема.** Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  — корни над полем  $\mathbb{C}$  характеристического многочлена  $\Delta(\lambda)$  кратности  $k_1, \dots, k_s$  соответственно, то совокупность функций

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i-1} e^{\lambda_i t}, \quad i = \overline{1, s} \quad (2.3.2)$$

является системой линейно независимых решений уравнения (2.3.1).

♦ Покажем, что функции совокупности (2.3.2) являются решениями уравнения (2.3.1). Так как  $\lambda_i$  — корень характеристического многочлена  $\Delta(\lambda)$  кратности  $k_i$ , то линейный оператор  $L_n$  при факторизации представим в виде

$$L_n = L_{n-k_i}(D - \lambda_i D^0)^{k_i},$$

где  $L_{n-k_i}$  — дифференциальный оператор  $(n - k_i)$ -ого порядка.

Следовательно, функция, являющаяся решением дифференциального уравнения  $L_n x = L_{n-k_i} \underbrace{(D - \lambda_i D^0)^{k_i} x}_{=0}$ , является решением уравнения (2.3.1).

Подействуем оператором  $(D - \lambda_i D^0)^{k_i}$  на функцию  $t^m e^{\lambda_i t}$ , где  $m < k_i$ :

$$\begin{aligned} (D - \lambda_i D^0)^{k_i} (t^m e^{\lambda_i t}) &= (D - \lambda_i D^0)^{k_i-1} (D - \lambda_i D^0) (t^m e^{\lambda_i t}) = (D - \lambda_i D^0)^{k_i-1} (m t^{m-1} e^{\lambda_i t} + \\ &+ \lambda_i t^m e^{\lambda_i t} - \lambda_i t^m e^{\lambda_i t}) = m (D - \lambda_i D^0)^{k_i-1} (t^{m-1} e^{\lambda_i t}) = m(m-1) (D - \lambda_i D^0)^{k_i-2} (t^{m-2} e^{\lambda_i t}) = \dots = \\ &= m(m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 (D - \lambda_i D^0)^{k_i-m} (t^0 e^{\lambda_i t}) = m! (D - \lambda_i D^0)^{k_i-m-1} \underbrace{(\lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i e^{\lambda_i t})}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функции  $t^m e^{\lambda_i t}$  являются решениями уравнения (2.3.1) при  $m < k_i$ .

Покажем, что функции совокупности (2.3.2) линейно независимые. От противного. Пусть функции линейно зависимые, тогда существует нетривиальная линейная комбинация равная нулю. Она имеет вид

$$P_1(t) e^{\lambda_1 t} + P_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + P_s(t) e^{\lambda_s t} = 0,$$

где  $P_i(t)$  — многочлен степени не выше  $k_i - 1$ .

Пусть  $P_m(t)$ ,  $m < s$  — последний ненулевой многочлен из многочленов  $P_i(t)$ . Тогда полученная линейная комбинация имеет вид

$$P_1(t) e^{\lambda_1 t} + P_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + P_m(t) e^{\lambda_m t} = 0, \quad P_m(t) \neq 0. \quad (2.3.3)$$

Домножим равенство (2.3.3) на функцию  $e^{-\lambda_1 t}$  и получим

$$P_1(t) + P_2(t) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + P_m(t) e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} = 0.$$

Затем продифференцируем полученное равенство  $k_1$  раз:

$$D^{k_1} P_1(t) = 0;$$

$$D^{k_1} (P_2(t) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) = D^{k_1-1} (D P_2(t) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + (\lambda_2 - \lambda_1) P_2(t) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) =$$

$$\begin{aligned}
&= D^{k_1-1} \underbrace{(DP_2(t) + (\lambda_2 - \lambda_1)P_2(t))}_{Q_2(t)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = D^{k_1-1}(Q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) = D^{k_1-2}(\tilde{Q}_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}) = \\
&= \dots = \tilde{Q}_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \text{ где } Q_2(t), \tilde{Q}_2(t), \tilde{\tilde{Q}}_2(t) \text{ — многочлены той же степени, что и } P_1(t). \\
&\text{Тогда}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{Q}}_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + \tilde{\tilde{Q}}_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} = 0.$$

Проведем с полученным равенством ту же процедуру, что и с равенством (2.3.3), то есть домножим на  $e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ , а затем продифференцируем  $k_2$  раз. В результате получим равенство вида

$$\tilde{\tilde{R}}_3(t)e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t} + \dots + \tilde{\tilde{R}}_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_2)t} = 0,$$

где многочлены  $\tilde{\tilde{R}}_i(t)$  имеют ту же степень, что и многочлен  $P_i(t)$ .

Продолжим эту процедуру  $(m-1)$  раз. В результате получим выражение вида

$$\tilde{\tilde{U}}_m(t)e^{(\lambda_m - \lambda_{m-1})t} = 0,$$

где многочлен  $\tilde{\tilde{U}}_m(t)$  имеет ту же степень, что и многочлен  $P_m(t)$ .

Из последнего равенства следует, что  $\tilde{\tilde{U}}_m(t) = 0$ , но тогда и  $P_m(t) = 0$ , что противоречит выбору  $P_m$ . Значит функции линейно независимы.  $\square$

**Следствие.** Если характеристический многочлен  $\Delta(\lambda)$  над полем  $\mathbb{C}$  имеет только действительные корни, то совокупность (2.3.2) является фундаментальной системой решений уравнения (2.3.1).

◆ Если все  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , то (2.3.2) — совокупность  $n$  действительных линейно независимых решений уравнения (2.3.1).  $\square$

Если среди корней  $\lambda_i$  существует мнимый корень  $\lambda = \alpha + \beta i$ , то в совокупности (2.3.2) этому корню соответствуют комплекснозначные решения вида  $t^m e^{(\alpha + \beta i)t}$ . А так как многочлен  $\Delta(\lambda)$  имеет действительный коэффициент, то существует сопряженное число  $\lambda = \alpha - \beta i$ , также являющееся корнем характеристического уравнения, и, следовательно, в совокупности (2.3.2) будут содержаться решения вида  $t^m e^{(\alpha - \beta i)t}$ .

Заменим в совокупности (2.3.2) пару функций на функции

$$\begin{aligned}
1. & \frac{t^m e^{(\alpha + \beta i)t} + t^m e^{(\alpha - \beta i)t}}{2} = t^m e^{\alpha t} \cos \beta t = \operatorname{Re}(t^m e^{(\alpha + \beta i)t}); \\
2. & \frac{t^m e^{(\alpha + \beta i)t} - t^m e^{(\alpha - \beta i)t}}{2i} = t^m e^{\alpha t} \sin \beta t = \operatorname{Im}(t^m e^{(\alpha + \beta i)t}).
\end{aligned}$$

Заметим, что новые функции являются линейными комбинациями функций из совокупности (2.3.2), следовательно, они также являются решениями. При этом матрица перехода от исходной линейно независимой системы функций к новой системе имеет определитель равный произведению определителей вида  $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0$ . Следовательно, полученная система функций также линейно независима, так как матрица перехода невырожденная.

## 2.4 Неоднородные стационарные линейные уравнения. Метод Коши. Метод Лагранжа.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \quad (2.4.1)$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$L_n x = 0. \quad (2.4.2)$$

Пусть  $f(t)$  — непрерывная на  $\mathbb{I}$  функция, и пусть оператор  $L_n$  имеет вид  $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0$ .

**Свойства решений линейных неоднородных уравнений:**

1. Если  $x_1$  — решение уравнения (2.4.1), то  $\forall x_0$  решения уравнения (2.4.2) функция  $x_1 + x_0$  — решение уравнения (2.4.1).

♦  $L_n(x_1 + x_0) = L_n x_1 + L_n x_0 = f(t) + 0 = f(t)$ . Следовательно, функция  $x_1 + x_0$  является решением.  $\square$

2. Если  $x_1$  — решение уравнения (2.4.1), то  $\forall x_2$  решения уравнения (2.4.1) функция  $x_2 - x_1$  — решение уравнения (2.4.2).

♦  $L_n(x_2 - x_1) = L_n x_2 - L_n x_1 = f(t) - f(t) = 0$ . Следовательно, функция  $x_2 - x_1$  является решением.  $\square$

3. **Принцип суперпозиции:** Если  $x_1(t)$  — решение уравнения  $L_n x = f_1(t)$ , а  $x_2(t)$  — решение уравнения  $L_n x = f_2(t)$  с непрерывными функциями  $f_1$  и  $f_2$ , то  $x_1 + x_2$  — решение уравнения  $L_n x = f_1(t) + f_2(t)$ .

Из свойств 1 и 2 следует, что все решения неоднородного линейного уравнения (2.4.1) можно получить, если прибавить к частному решению неоднородного уравнения (2.4.1) все решения однородного уравнения (2.4.2). То есть

$$x_{\text{ОН}} = x_{\text{ОО}} + x_{\text{ЧН}}.$$

• Пусть  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$  — фундаментальная система решений уравнения (2.4.2) нормированная при  $t = 0$ . Тогда функция  $\varphi_{n-1}(t)$  называется **функцией Коши** линейного оператора  $L_n$ .

**Теорема (Метод Коши).** Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на  $\mathbb{I}$  и пусть  $\varphi_{n-1}(t)$  — функция Коши оператора  $L_n$ . Тогда функция

$$x_1(t) = \int_{t_0}^t \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.4.3)$$

является решением уравнения (2.4.1)  $\forall t_0 \in \mathbb{I}$ .

♦ По формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, получаем

$$\left( \int_{t_0}^t F(t, \tau) d\tau \right)' = F(t, t) + \int_{t_0}^t F'_t(t, \tau) d\tau.$$

Отсюда получаем

$$Dx_1 = \underbrace{\varphi_{n-1} \underbrace{(t-t)}_{=0}}_{=0} f(t) + \int_{t_0}^t D\varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau;$$

$$\begin{aligned}
D^2 x_1 &= \underbrace{D\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int_{t_0}^t D^2\varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau; \\
&\dots\dots\dots \\
D^{n-1} x_1 &= \underbrace{D^{n-2}\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int_{t_0}^t D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau; \\
D^n x_1 &= \underbrace{D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{\substack{=1 \\ f(t)}} + \int_{t_0}^t D^n\varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Подставим и получим

$$\begin{aligned}
L_n x_1 &= f(t) + \int_{t_0}^t \left( D^n\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_{n-1}D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau) + \dots + a_1D\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_0D^0\varphi_{n-1}(t-\tau) \right) f(\tau)d\tau = \\
&= f(t) + \int_{t_0}^t (L_n\varphi_{n-1}(t-\tau))f(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Так как функция  $\varphi_{n-1}$  является функцией Коши оператора  $L_n$ , то эта функция является решением уравнения (2.4.2). А функция  $\varphi_{n-1}(t-\tau)$  является сдвигом функции Коши на  $\tau$ , а значит также является решением уравнения (2.4.2). Тогда  $L_n\varphi_{n-1}(t-\tau) = 0$ . Отсюда  $L_n x_1 = f(t)$ , и, следовательно,  $x_1$  является решением уравнения (2.4.1).  $\square$

**Следствие.** Функция (2.4.3) является решением задачи Коши  $L_n x = f(t)$ ,  $D^i x|_{t=t_0} = 0$ ,  $\forall i = \overline{0, n-1}$ .

**Следствие.** Если  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$  — фундаментальная система решений уравнения (2.4.2), нормированная при  $t = 0$ , то задача Коши  $L_n x = f(t)$ ,  $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$ ,  $\forall i = \overline{0, n-1}$  имеет решение

$$x(t) = \xi_0\varphi_0(t-t_0) + \dots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-t_0) + \int_{t_0}^t \varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

**Теорема** (Метод Лагранжа). Пусть  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  — фундаментальная система решений уравнения (2.4.2). Тогда функция

$$x_1(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + \dots + u_n(t)\varphi_n(t)$$

является решением уравнения (2.4.1), если функции  $u_i(t)$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} Du_1\varphi_1 + \dots + Du_n\varphi_n = 0, \\ Du_1D\varphi_1 + \dots + Du_nD\varphi_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ Du_1D^{n-2}\varphi_1 + \dots + Du_nD^{n-2}\varphi_n = 0, \\ Du_1D^{n-1}\varphi_1 + \dots + Du_nD^{n-1}\varphi_n = f(t); \end{cases} \quad (2.4.4)$$



◆ Определитель матрицы системы (2.4.4) равен Вронскиану системы функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Следовательно, он ненулевой, и система имеет единственное решение. Причем из принципа Крамера следует, что это решение состоит из непрерывных функций  $(\frac{\Delta_i}{\Delta})$ , где  $\Delta_i$  непрерывная,  $\Delta$  непрерывная и ненулевая. Тогда функции  $Du_i$  интегрируемые, а следовательно и дифференцируемые.

Покажем, что функция  $x_1(t)$  с найденными таким образом функциями  $u_i$  является решением уравнения (2.4.1):

$$\begin{aligned} Dx_1 &= \underbrace{Du_1\varphi_1 + \dots + Du_n\varphi_n}_{=0} + u_1D\varphi_1 + \dots + u_nD\varphi_n; \\ D^2x_1 &= \underbrace{Du_1D\varphi_1 + \dots + Du_nD\varphi_n}_{=0} + u_1D^2\varphi_1 + \dots + u_nD^2\varphi_n; \\ &\dots\dots\dots \\ D^{n-1}x_1 &= \underbrace{Du_1D^{n-2}\varphi_1 + \dots + Du_nD^{n-2}\varphi_n}_{=0} + u_1D^{n-1}\varphi_1 + \dots + u_nD^{n-1}\varphi_n; \\ D^nx_1 &= \underbrace{Du_1D^{n-1}\varphi_1 + \dots + Du_nD^{n-1}\varphi_n}_{f(t)} + u_1D^n\varphi_1 + \dots + u_nD^n\varphi_n. \end{aligned}$$

Теперь подставим и вычислим  $L_nx_1$ :

$$L_nx_1 = f(t) + u_1(t) \underbrace{L_n\varphi_1(t)}_{=0} + \dots + u_n(t) \underbrace{L_n\varphi_n(t)}_{=0}.$$

Множители нулевые, так как являются решениями уравнения (2.4.1). Следовательно,  $L_nx_1 = f(t)$ , то есть  $x_1$  — решение уравнения (2.4.1).  $\square$

## 2.5 Стационарное линейное неоднородное уравнение со специальной правой частью. Метод Эйлера.

Пусть линейный оператор  $L_n$  имеет вид  $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0$ , и пусть  $\Delta(\lambda)$  — характеристический многочлен этого оператора.

**Теорема.** Уравнение

$$L_nz = P(t)e^{\gamma t},$$

где  $L_n$  — оператор дифференцирования с комплексными коэффициентами,  $P(t)$  — многочлен с комплексными коэффициентами степени  $m$  и  $\gamma$  — комплексное число (то есть  $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ ,  $\deg P(t) = m$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$ ), имеет частное решение вида

$$z_1(t) = t^k Q(t)e^{\gamma t},$$

где  $Q(t) \in \mathbb{C}[t]$ ,  $\deg Q(t) \leq m$ ,  $k$  — кратность корня  $\gamma$  характеристического многочлена  $\Delta(\lambda)$  (если  $\gamma$  не корень, то  $k = 0$ ).

◆

1. Пусть  $\gamma = 0$  и пусть  $\gamma$  не является корнем характеристического уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$ , то есть кратность  $k = 0$ . Пусть  $P(t) = b_mt^m + \dots + b_1t + b_0$ . Подставим функцию  $z_1(t) = d_mt^m + d_{m-1}t^{m-1} + \dots + d_1t + d_0$  и приравняем соответствующие коэффициенты у многочленов в полученном равенстве:

$$t^m : a_0 \cdot d_m = b_m, \text{ так как } \gamma \text{ не является корнем, то } a_0 \neq 0, \text{ следовательно, } d_m = \frac{b_m}{a_0}.$$

$$\begin{aligned}
t^{m-1} : a_1 \cdot m \cdot d_m + a_0 \cdot d_{m-1} &= b_{m-1} \text{ и } d_{m-1} = \frac{1}{a_0}(b_{m-1} + a_1 \cdot m \cdot d_m). \\
t^{m-2} : a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m + a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} + a_0 \cdot d_{m-2} &= b_{m-2} \\
\text{и } d_{m-2} &= \frac{1}{a_0}(b_{m-2} - a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} - a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m).
\end{aligned}$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим коэффициенты многочлена, являющиеся решением уравнения, причем его степень не выше  $n$ .

2. Пусть  $\gamma = 0$  и пусть число  $\gamma$  является корнем характеристического уравнения кратности  $k > 0$ . Тогда оператор  $L_n$  имеет вид

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_k D^{k-1},$$

причем  $a_k \neq 0$ .

Введем функцию  $D^k z = u$ . Тогда  $\tilde{L}_{n-k}u = P(t)$ , где  $\tilde{L}_{n-k}$  — оператор дифференцирования порядка  $n-k$ , причем  $\gamma = 0$  не является для него корнем характеристического уравнения. По доказанному выше это уравнение имеет частное решение вида  $u_1(t) = Q(t)$ , где  $\deg Q(t) \leq m$ . Следовательно,  $D^k z_1 = Q(t)$ . Тогда  $z_1$  можно найти проинтегрировав полученное равенство  $k$  раз. В результате получим  $z_1 = \tilde{Q}(t)$ , где  $\deg \tilde{Q}(t) = n+k$ . Причем последние  $k$  коэффициентов этого многочлена являются произвольными постоянными. Так как нужно найти лишь одно решение, выберем значения этих произвольных постоянных равные нулю. В результате полученное решение имеет вид  $z_1 = t^k \tilde{Q}(t)$ , где  $\deg \tilde{Q}(t) \leq m$ .

3. Пусть  $\gamma \neq 0$ . И пусть кратность корня  $\gamma$  равна  $k$ . Сделаем замену неизвестных функций  $z(t) = u(t)e^{\gamma t}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
Dz &= Du e^{\gamma t} + u \gamma e^{\gamma t}; \\
D^2 z &= D^2 u e^{\gamma t} + 2Du \gamma e^{\gamma t} + u \gamma^2 e^{\gamma t}; \\
D^3 z &= D^3 u e^{\gamma t} + 3D^2 u \gamma e^{\gamma t} + 3D u \gamma^2 e^{\gamma t} + u \gamma^3 e^{\gamma t};
\end{aligned}$$

И так далее.

Подставим полученные выражения в уравнение и сократим полученное равенство на  $e^{\gamma t}$ . В результате получим уравнение вида  $\tilde{L}_n u = P(t)$ . При этом оператор  $\tilde{L}_n$  имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
u : a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 + \dots &= \Delta(\gamma); \\
Du : a_1 + 2\gamma a_2 + 3\gamma^2 a_3 + \dots &= \Delta'(\gamma); \\
D^2 u : a_2 + 3\gamma a_3 + 6\gamma^2 a_4 + \dots &= \frac{1}{2!} \Delta''(\gamma); \\
D^i u : \frac{1}{i!} \Delta^{(i)}(\gamma).
\end{aligned}$$

Так как  $\gamma$  является корнем многочлена  $\Delta(\lambda)$  кратности  $k$ , то  $\gamma$  является корнем и для всех  $\Delta^{(i)}(\lambda) \forall i < k$ . Следовательно, все коэффициенты оператора  $\tilde{L}_n$  при  $D^{(i)}u$  равны нулю, если  $i < k$ . Значит оператор  $\tilde{L}_n$  имеет корень характеристического уравнения равный нулю кратности  $k$ . Тогда по доказанному выше уравнение  $\tilde{L}_n u$  имеет решение вида  $u(t) = t^k Q(t)$ , где  $\deg Q(t) \leq m$ . И следовательно, решение исходного уравнения имеет вид  $z_1(t) = t^k Q(t)e^{\gamma t}$ .

□

**Следствие.** Уравнение

$$L_n x = P(t)e^{\gamma t},$$

где  $x(t)$  — неизвестная действительная функция,  $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ ,  $\deg P(t) = m$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , имеет частное решение вида

$$x_1(t) = t^k Q(t)e^{\gamma t},$$

где  $Q(t) \in \mathbb{R}[t]$ ,  $\deg Q(t) \leq m$ ,  $k$  — кратность корня  $\gamma$  характеристического многочлена  $\Delta(\lambda)$ .

♦ Рассмотрим комплексное уравнение

$$L_n z = P(t)e^{\gamma t} + i \cdot 0.$$

Тогда из теоремы следует, что это уравнение имеет частное решение вида

$$z_1 = t^k Q(t)e^{\gamma t},$$

где  $Q \in \mathbb{C}[t]$ ,  $\deg Q(t) \leq m$ . Но оператор  $L_n$  имеет действительные коэффициенты, следовательно  $Re(z)$  является решением уравнения  $L_n x = Re(P(t)e^{\gamma t} + i \cdot 0) = P(t)e^{\gamma t}$ , то есть  $Re(z)$  является решением исходного уравнения, то есть

$$x_1(t) = t^k \tilde{Q}(t)e^{\gamma t},$$

где  $\tilde{Q}(t) = Re(Q(t))$  и  $\deg \tilde{Q}(t) \leq m$ . □

**Следствие.** Уравнение

$$L_n x = e^{\alpha t}(P_1(t) \cos(\beta t) + P_2(t) \sin(\beta t)),$$

где  $P_1(t), P_2(t) \in \mathbb{R}[t]$ , причем  $\max\{\deg P_1(t), \deg P_2(t)\} = m$ , и  $(\alpha + \beta i)$  — корень многочлена  $\Delta(\lambda)$  кратности  $k$  имеет решение вида

$$x_1(t) = t^k e^{\alpha t}(Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t)),$$

где  $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t]$ ,  $\deg Q_1(t) \leq m$ ,  $\deg Q_2(t) \leq m$ ,  $k$  — кратность корня  $(\alpha + \beta i)$  характеристического многочлена  $\Delta(\lambda)$ .

♦ Рассмотрим уравнение

$$L_n z = (P_1(t) - iP_2(t))e^{(\alpha + \beta i)t}.$$

Тогда по теореме это уравнение имеет решение вида

$$z_1 = t^k Q(t)e^{(\alpha + \beta i)t},$$

где  $Q(t) \in \mathbb{C}[t]$ ,  $\deg Q(t) \leq m$ . Так как  $L_n$  имеет действительные коэффициенты, то  $Re(z_1)$  является действительным решением уравнения

$$L_n = Re((P_1(t) - iP_2(t))e^{(\alpha + \beta i)t}).$$

При этом  $Re((P_1 - iP_2)e^{(\alpha + \beta i)t}) = Re(P_1 - iP_2)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) = e^{\alpha t}(P_1 \cos \beta t + P_2 \sin \beta t)$ . То есть  $Re(z_1)$  является решением исходного уравнения. Обозначим  $Q_1(t) = Re(Q(t))$ ,  $Q_2(t) = -Im(Q(t))$ . Тогда

$$Re(t^k Q(t)e^{(\alpha + \beta i)t}) = Re(t^k(Q_1 - iQ_2)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)) = t^k e^{\alpha t}(Q_1 \cos \beta t + Q_2 \sin \beta t),$$

где  $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t]$ ,  $\deg Q_1(t), \deg Q_2(t) \leq m$ . □

## 2.6 Непрерывная зависимость решений от начальных данных.

Рассмотрим уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \quad (2.6.1)$$

с непрерывной на промежутке  $\mathbb{I}$  функцией  $f(t)$ . Пусть  $x_0(t)$  — решение задачи Коши  $L_n x = f(t)$ ,  $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .

- Тогда для любого решения  $x(t)$  уравнения (2.6.1) сумма

$$\Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)|$$

называется **отклонением** решения  $x(t)$  от решения  $x_0(t)$ . А сумма

$$\Delta_x(t_0) = \Delta_x(t)|_{t=t_0} = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0)|$$

называется **начальным отклонением**.

- Решение  $x_0(t)$  называется **непрерывно зависящим от начальных данных** на промежутке  $\mathbb{I}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x(t) \Delta_x(t) < \delta \Rightarrow \Delta_x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}.$$

Пусть решение  $x(t)$  при  $t = t_0$  имеет начальные значения  $D^i x(t)|_{t=t_0} = \xi_i + \Delta \xi_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ . Тогда  $\Delta_x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta \xi_i|$ .

Если  $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$  — фундаментальная система решений нормированная при  $t = 0$  соответствующего однородного уравнения  $L_n x = 0$ , то по правилу Коши

$$x_0(t) = \xi_0 \varphi_0(t - t_0) + \dots + \xi_{n-1} \varphi_{n-1}(t - t_0) + \int_{t_0}^t \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) = (\xi_0 + \Delta \xi_0) \varphi_0(t - t_0) + \dots + (\xi_{n-1} + \Delta \xi_{n-1}) \varphi_{n-1}(t - t_0) + \int_{t_0}^t \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) - x_0(t) = \Delta \xi_0 \varphi_0(t - t_0) + \dots + \Delta \xi_{n-1} \varphi_{n-1}(t - t_0).$$

Тогда с помощью этого выражения получим

$$\Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)| = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i (x(t) - x_0(t))| = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta \xi_0 D^i \varphi_0(t - t_0) + \dots + \Delta \xi_{n-1} D^i \varphi_{n-1}(t - t_0)|. \quad (2.6.2)$$

Из (2.6.2) следует, что отклонение решения  $x(t)$  от решения  $x_0(t)$  не зависит от самого решения  $x_0(t)$ , а зависит лишь от начального отклонения решения  $x(t)$  от решения  $x_0(t)$ . Следовательно, все решения уравнения (2.6.1) будут либо одновременно зависеть от начальных данных, либо одновременно не зависеть.

Кроме того из уравнения (2.6.2) следует, что отклонение  $x(t)$  от  $x_0(t)$  зависит лишь от функций  $\varphi_i(t)$ , которые являются решениями уравнения  $L_n x = 0$  и не зависят от неоднородности  $f(t)$ . Следовательно, непрерывная зависимость от начальных данных решений зависит лишь от оператора  $L_n$ .

**Теорема.** Если промежуток  $\mathbb{I}$  является отрезком, то любое решение уравнения (2.6.1) непрерывно зависит от начальных данных.

♦ Каждая из функций  $\varphi_i(t)$  является решением уравнения  $L_n x = 0$ . Следовательно, они и все их производные до  $(n-1)$ -го порядка непрерывны на всей числовой прямой. А так как функции непрерывные на замкнутом множестве ограничены, то

$$\exists M : |D^i \varphi_j(t)| \leq M \quad \forall i, j = \overline{0, n-1}.$$

Тогда из (2.6.2)

$$\Delta_x(t) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta \xi_j| \cdot |D^i \varphi_j(t-t_0)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta \xi_j| \cdot M = \sum_{i=0}^{n-1} (M \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta \xi_j|) = n \cdot M \cdot \Delta_x(t_0).$$

Следовательно, если начальное отклонение  $\Delta_x(t_0) < \delta = \frac{\varepsilon}{n \cdot M}$ , то  $\Delta_x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}$ .  $\square$

• Решение уравнения (2.6.1) называется **интегрально непрерывным** на промежутке  $\mathbb{I}$ , если оно непрерывно зависит от начальных данных на любом отрезке  $I_1 \subset \mathbb{I}$ .

**Следствие.** Любое решение уравнения (2.6.1) с непрерывной на промежутке  $\mathbb{I}$  функцией  $f(t)$  интегрально непрерывно на  $\mathbb{I}$ .

## 2.7 Устойчивость решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \quad (2.7.1)$$

с непрерывной на промежутке  $\mathbb{I}$  функцией  $f(t)$ . Пусть  $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$ .

• Решение  $x_0(t)$  уравнения (2.7.1) называется **устойчивым по Ляпунову**, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке  $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$ . То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x(t) \Delta_x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0)| < \delta \Rightarrow \Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0.$$

• Если кроме того  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta_x(t) = 0$ , то решение  $x_0(t)$  называется **асимптотически устойчивым**. Решение не являющееся устойчивым называется **неустойчивым**.

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных данных следует, что все решения уравнения (2.7.1) либо одновременно устойчивы, либо одновременно неустойчивы.

• Уравнение называется **устойчивым**, если все его решения устойчивы (аналогично неустойчивым и асимптотически устойчивым).

Кроме того, так как непрерывная зависимость решений от начальных данных не зависит от неоднородности  $f(t)$ , то неоднородность не влияет на устойчивость уравнения. Следовательно, исследование устойчивости любого решения уравнения (2.7.1) можно заменить

исследованием устойчивости нулевого решения соответствующего однородного уравнения  $L_n x = 0$ . Таким образом, уравнение (2.7.1) является устойчивым, если

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall x(t) \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0)| < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t)| < \varepsilon.$$

**Теорема.** 1. Уравнение (2.7.1) устойчиво  $\iff$  действительные части корней характеристического уравнения оператора  $L_n$  неположительны, причем корни с нулевой действительной частью имеют кратность  $k = 1$ .

2. Уравнение (2.7.1) асимптотически устойчиво  $\iff$  действительные части корней характеристического уравнения отрицательны.

◆  $\Rightarrow$ )

1. Пусть среди корней характеристического уравнения существует корень  $\lambda_0 > 0$  или  $\alpha_0 + \beta_0 i$ , где  $\alpha_0 > 0$ . Тогда среди решений уравнения  $L_n x = 0$  есть решения  $Ce^{\lambda_0 t}$  или  $Ce^{\alpha_0 t} \cos(\beta_0 t)$ ,  $Ce^{\alpha_0 t} \sin(\beta_0 t)$ , где  $C$  — некоторая постоянная.

Выбирая постоянную  $C$  достаточно малую, можно получить решение, имеющее сколь угодно малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом стремящееся к  $\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , что делает невозможным устойчивость решения.

Если характеристическое уравнение имеет корни  $\lambda_0 = 0$  или  $\beta_0 i$  кратности  $k > 1$ , то такими свойствами будут обладать решения вида  $Ct$ ,  $Ct \cos(\beta_0 t)$ ,  $Ct \sin(\beta_0 t)$ .

2. Если же корни характеристического уравнения  $\lambda_0 = 0$  или  $\beta_0 i$  имеют кратность  $k = 1$ , то уравнение имеет решения вида  $C$ ,  $C \cos(\beta_0 t)$ ,  $C \sin(\beta_0 t)$ , которые при подходящем выборе постоянной  $C$  будут иметь малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом к нулю стремиться не будут, что делает невозможным асимптотическую устойчивость.

$\Leftarrow$ ) Общее решение однородного уравнения является линейной комбинацией функций вида  $t^k e^{\lambda t}$ ,  $t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  и  $t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ , где  $\lambda$ ,  $\alpha + \beta i$  — корни характеристического уравнения. Если  $\lambda < 0$  и  $\alpha < 0$ , то все эти функции и их производные стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . А следовательно и все решения уравнения стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно, уравнение асимптотически устойчиво.

Если  $\lambda = 0$  и  $\alpha = 0$ , причем эти корни имеют кратность 1, то среди решений уравнения будут также решения вида 1,  $\cos(\beta t)$ ,  $\sin(\beta t)$ . Эти функции вместе со своими производными являются ограниченными на всей числовой прямой. Следовательно, за счет выбора малого начального отклонения мы можем получить малое отклонение этого решения  $x(t)$  от этого отклонения. □

**Теорема.** Для устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были неотрицательны.

Для асимптотической устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были положительны.

◆

1. Пусть линейное уравнение (2.7.1) является асимптотически устойчивым. Все корни характеристического уравнения имеют вид  $-\lambda_i$ ,  $\alpha_j \pm \beta_j i$ , где  $\lambda_i, \alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $\alpha_j > 0$ . Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_i (\lambda + \lambda_i) \cdot \prod_j (\lambda + \alpha_j - \beta_j i)(\lambda + \alpha_j + \beta_j i) = \prod_i (\lambda + \lambda_i) \cdot \prod_j (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2)$$

— произведение многочленов с положительными коэффициентами. Следовательно, характеристический многочлен — многочлен с положительными коэффициентами.

2. Если уравнение (2.7.1) устойчиво, но не асимптотически, то среди корней могут быть корни  $\lambda = 0, \pm\beta_k i$ , причем кратности корней равны 1. Следовательно, характеристический многочлен имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \prod_i (\lambda + \lambda_i) \cdot \prod_j (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \beta_k^2)$$

— произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами. Следовательно,  $\Delta(\lambda)$  — многочлен с неотрицательными коэффициентами.

□

## 2.8 Фазовая плоскость.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1 Dx + a_0 x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8.1)$$

И пусть  $x(t)$  — некоторое решение этого уравнения.

• **Фазовым графиком** решения  $x(t)$  называется график параметрически заданной функции вида

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = Dx(t); \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

• **Плоскость**  $\mathbb{R}^2$ , на которой изображен фазовый график, называется **фазовой плоскостью**.

В соответствии с теоремой о существовании и единственности задачи Коши для любой точки плоскости  $(x_0, y_0)$  найдется решение  $x(t)$ , которое при некотором  $t = 0$  удовлетворяет условию

$$\begin{cases} x|_{t=t_0} = x_0, \\ Dx|_{t=t_0} = y_0; \end{cases}$$

следовательно, через любую точку на фазовой плоскости проходит фазовый график.

**Теорема.** Два графика уравнения (2.8.1) либо не имеют общих точек, либо совпадают.

♦ Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения уравнения (2.8.1), и предположим, что их фазовые графики проходят через точку  $(x_0, y_0)$ , то есть  $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x_1|_{t=t_1} = x_1, \\ Dx_1|_{t=t_1} = y_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2|_{t=t_2} = x_0, \\ Dx_2|_{t=t_2} = y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию  $\tilde{x}(t) = x_1(t - t_2 + t_1)$ . Функция  $\tilde{x}(t)$  является сдвигом решения  $x_1$ , следовательно, функция  $\tilde{x}(t)$  также является решением уравнения (2.8.1). При этом

$$\tilde{x}|_{t=t_2} = x_1(t_2 - t_2 + t_1) = x_1|_{t=t_1} = x_0;$$

$$D\tilde{x}|_{t=t_2} = Dx_1(t_2 - t_2 + t_1) = Dx_1|_{t=t_1} = y_0;$$

то есть функция  $\tilde{x}(t)$  имеет те же значения, что и функция  $x_2$ , то есть начальные значения функции  $\tilde{x}$  при  $t = t_2$  совпадают с начальными значениями функции  $x_2$ . Следовательно,

функция  $x_2$  равна функции  $\tilde{x}$ , и  $x_2$  является сдвигом функции  $x_1$ . А значит фазовый график функций их сдвига совпадает.  $\square$

- Решение, сохраняющее постоянное значение при всех  $t$ , называется **стационарным**.

Фазовый график стационарного решения  $x(t) \equiv C$  состоит из единственной точки  $(C, 0)$ .

- Точка, являющаяся фазовым графиком стационарного решения, называется **точкой покоя** уравнения.

Фазовые графики нестационарных решений являются параметрически заданными линиями. На таких линиях принято указывать направление движения точки с координатами  $(x(t), y(t))$  при увеличении  $t$ . В дальнейшем под фазовым графиком будем понимать ориентированный фазовый график.

Пусть фазовый график решения  $x(t)$  проходит через точку  $(x_0, y_0)$ . Следовательно,  $\exists t_0 : y_0 = Dx(t_0)$ . Если  $y_0 > 0$ , то  $Dx(t_0) > 0$ . И, следовательно, функция  $x(t)$  в точке  $t_0$  возрастает. Тогда направление фазового графика в точках верхней полуплоскости происходит слева направо. Аналогично движение по графику в точках нижней полуплоскости происходит справа налево. Так как угловой коэффициент в точке  $(x(t), y(t))$  равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{D^2x(t)}{Dx(t)} = \frac{-a_1Dx - a_0x}{Dx} = \frac{-a_1y - a_0x}{y},$$

то в точках плоскости, для которых  $-a_1y - a_0x = 0$ , касательные к фазовым графикам параллельны оси  $Ox$ . А в точках, для которых  $y > 0$  (ось  $Ox$ ), фазовые графики имеют касательные параллельные оси  $Oy$ .

## 2.9 Классификация точек покоя.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.9.1)$$

Любое уравнение вида (2.9.1) имеет стационарное решение  $x(t) \equiv C$ . Следовательно, точка  $O(0, 0)$  является точкой покоя для этого уравнения. Построим фазовый график для других решений. Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения (2.9.1) записанные с учетом кратности.

**I группа.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

Тогда фазовые графики решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (2.9.2)$$

1. Пусть  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 = 0$ . Тогда, исключая из системы  $t$ , получим уравнение  $y = \lambda_1 x$ . Причем, если  $C_1 > 0$ , то  $x > 0$ , а если  $C_1 < 0$ , то  $x < 0$ . Следовательно, лучи  $y = \lambda_1 x, x > 0$  и  $y = \lambda_1 x, x < 0$  являются фазовыми траекториями этих решений.
2. Пусть  $C_1 = 0$ ,  $C_2 \neq 0$ , тогда фазовыми графиками являются лучи  $y = \lambda_2 x, x > 0$  и  $y = \lambda_2 x, x < 0$ .



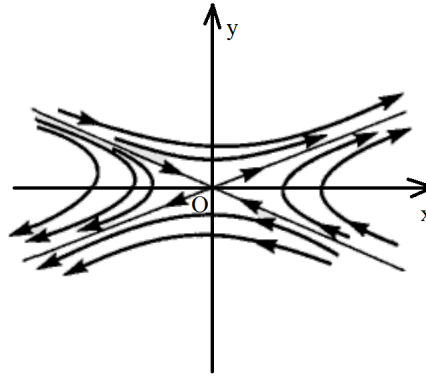
3. Пусть  $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ . Заметим, что при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$  фазовые графики уходят в бесконечность.

Найдем асимптоты фазовых графиков ( $y = kx + b$ ):

$$k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_1 \lambda_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 \lambda_2}{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2} = \lambda_2.$$

$$b = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y - \lambda_2 x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_1 e^{\lambda_1 t} (\lambda_1 - \lambda_2)) = 0.$$

Следовательно, прямая  $y = \lambda_2 x$  является асимптотой фазовых графиков при  $t \rightarrow +\infty$ . Аналогично можно доказать, что при  $t \rightarrow -\infty$  асимптотой является прямая  $y = \lambda_1 x$ .



- Точки покоя, в окрестности которых фазовые графики имеют такой вид, называются *седлом*.

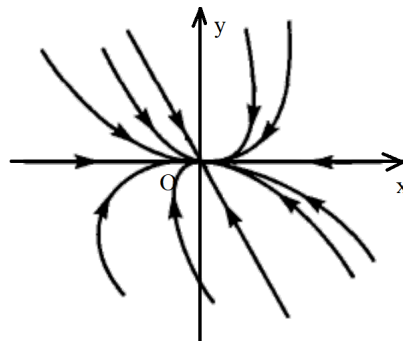
**II группа.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ .

Тогда фазовые графики описываются уравнениями (2.9.2).

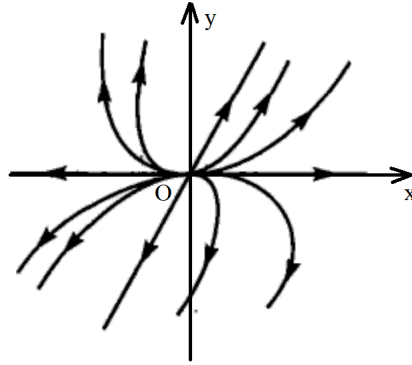
1. Пусть  $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ , тогда фазовыми траекториями являются лучи  $y = \lambda_1 x, x > 0$  и  $y = \lambda_1 x, x < 0$ .
2. Пусть  $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ , тогда фазовыми траекториями являются лучи  $y = \lambda_2 x, x > 0$  и  $y = \lambda_2 x, x < 0$ .
3. Пусть  $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ .

- (а) Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Тогда при  $t \rightarrow +\infty$  фазовый график стремится к точке  $O(0, 0)$ . А при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность.

Найдем асимптоты.  $k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lambda_2$ . Следовательно, прямая  $y = \lambda_2 x$  является асимптотой. При  $t \rightarrow -\infty$   $k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lambda_1$ , а  $b = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y - \lambda_1 x) = \infty$ .



- (b) Аналогично можно получить, что фазовые графики для случая  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  выглядят следующим образом.



- Точка покоя, в окрестности которой фазовый график имеет такой вид, называется **бикритическим узлом**. Причем **устойчивым** и **неустойчивым** соответственно.

**III группа.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Тогда фазовые графики решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, \\ y(t) = (C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t) e^{\lambda t}. \end{cases}$$

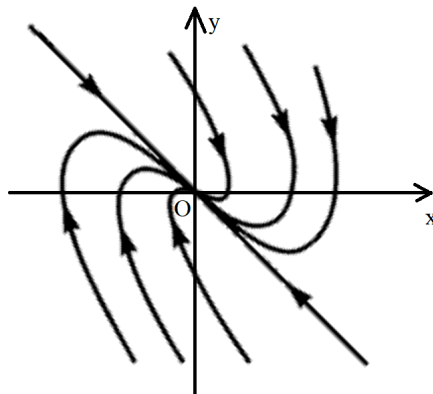
1. Пусть  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 = 0$ . Исключив из параметрического уравнения  $t$ , лучи  $y = \lambda x$ ,  $x > 0$  и  $y = \lambda x$ ,  $x < 0$  являются фазовыми графиками.
2. Пусть  $C_2 \neq 0$ .

- (a) Пусть  $\lambda < 0$ . Тогда фазовый график при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к точку  $O(0, 0)$ . Если  $t \rightarrow -\infty$ , то фазовый график уходит на бесконечность. Найдём асимптотические направления:

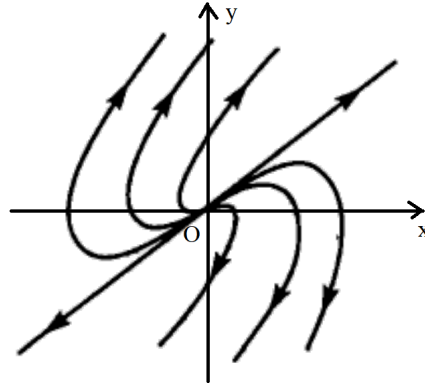
$$k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t) e^{\lambda t}}{(C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}} = \lambda;$$

$$b = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) - \lambda x(t) = C_2 e^{\lambda t} = 0.$$

Отсюда  $y = \lambda x$  — асимптота фазовых графиков при  $t \rightarrow +\infty$ . Аналогично при  $t \rightarrow -\infty$  асимптот нет. Прямая  $y = \lambda x$  задает асимптотическое направление.



- (b) Пусть  $\lambda > 0$ . Тогда фазовый график при  $t \rightarrow +\infty$  уходит на бесконечность, а при  $t \rightarrow -\infty$  стремится к точке  $O(0, 0)$ . Аналогично фазовый график выглядит следующим образом.



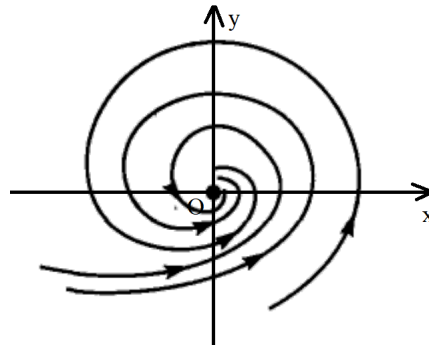
- Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики имеют такой вид, называется **монокритическим узлом**. Причем **устойчивым** и **неустойчивым** соответственно.

**IV группа.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ .

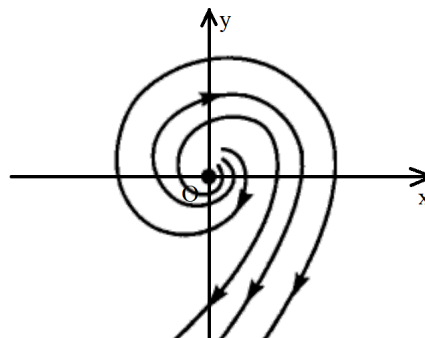
1. Пусть  $\alpha = 0$ . Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \\ y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \alpha \cos(\beta t) + C_2 \alpha \sin(\beta t) - C_1 \beta \sin(\beta t) + C_2 \beta \cos(\beta t)). \end{cases}$$

- (a) Если  $\alpha < 0$ , то фазовый график при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к точке  $O(0, 0)$ , а при  $t \rightarrow -\infty$  уходит на бесконечность. При этом изменение  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  меняют знак бесконечное количество раз. Следовательно, графики имеют вид



- (b) Если  $\alpha > 0$ , то аналогично можно получить, что фазовые графики имеют вид



- Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называются **фокусом**. Причем **устойчивым** и **неустойчивым** соответственно.

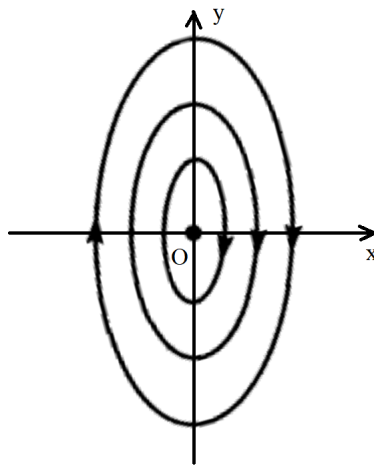
2. Пусть  $\alpha = 0$ . Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t), \\ y(t) = -C_1 \beta \sin(\beta t) + C_2 \beta \cos(\beta t). \end{cases}$$

Исключим из системы  $t$ . Тогда

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{\beta}\right)^2 = C_1^2 + \frac{C_2^2}{\beta} - \text{эллипс}.$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид

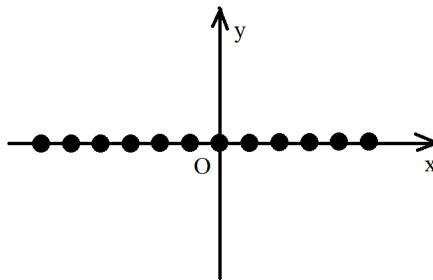


- Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называется **центром**.

**V группа.** Пусть среди корней характеристического уравнения есть 0. Тогда в уравнении (1)  $a_0 = 0$ , и уравнение имеет бесконечно много решений вида  $x = C$ , фазовые графики которых описываются уравнениями

$$\begin{cases} x = C, \\ y = 0; \end{cases}$$

и имеют вид



Следовательно, каждая точка оси  $Ox$  является точкой покоя.

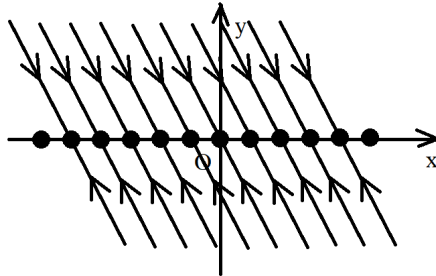
- Прямая, каждая точка которой является фазовым графиком, называется **прямой покоя**.

1. Пусть  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ . Тогда фазовые графики описываются уравнениями

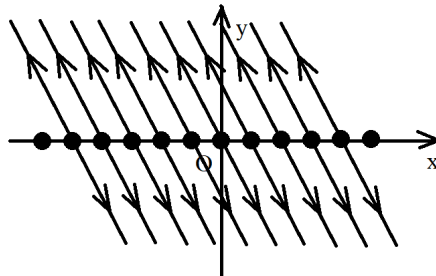
$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{\lambda t}, \\ y(t) = \lambda C_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Исключив из системы  $t$ , получим  $y = \lambda(x - C_1)$ . Получаем, что фазовые графики имеют вид

$\lambda < 0$



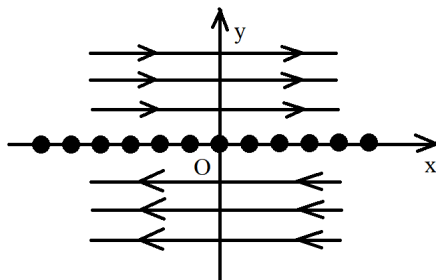
$\lambda > 0$



2. Пусть  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 t, \\ y(t) = C_2. \end{cases}$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид



## Линейные стационарные векторные уравнения.

- Системой дифференциальных уравнений называется совокупность выражений вида

где  $F_i$  — некоторая функция от своих  $(m_1 + \dots + m_k + k + 1)$  переменных.

- Говорят, что система дифференциальных уравнений имеет нормальную форму, если она состоит из уравнений вида

- Если функции  $f_i$  являются линейными функциями от неизвестных функций  $x_i(t)$  и их производных, то система называется **линейной**.

Линейную систему из  $k$  уравнений можно заменить эквивалентной ей системой из  $m_1 + \dots + m_k$  линейных уравнений первого порядка. Следовательно, любое линейное уравнение можно свести к системе из  $k$  уравнений.

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать лишь системы следующего вида

[illegible]

- **Решением** системы (3.1.1) называется совокупность непрерывно дифференцируемых на  $\mathbb{I}$  функций  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , обращающих систему (3.1.1) в верное равенство.

- Если коэффициенты систем (3.1.1) являются постоянными, то системы называются *стационарными линейными*.

- *Задачей Коши для системы (3.1.1) называется задача отыскания решения системы (3.1.1), удовлетворяющего условиям*

29

Обозначив  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ,  $DX(t) = \begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ \vdots \\ Dx_n(t) \end{pmatrix}$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ , систему (3.1.1) можно записать в матричном виде

$$DX = AX + f(t). \quad (3.1.2)$$

А начальные условия задачи Коши в виде  $X|_{t=t_0} = \xi$ , где  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ .

- Уравнение (3.1.2) называется **линейным стационарным векторным уравнением**.
- Если в уравнении (3.1.2) матрицы  $X$ ,  $A$ ,  $f$  являются комплекснозначными, то уравнение называется **комплекснозначным**.

**Лемма.** *Задача Коши для комплекснозначного уравнения*

$$DZ = CZ + h(t), \quad Z|_{t=t_0} = \xi \quad (3.1.3)$$

с треугольной матрицей  $C \in \mathbb{C}_{n,n}$  и непрерывной на  $\mathbb{I}$  комплекснозначной функции  $h(t)$  имеет единственное решение  $\forall t_0 \in \mathbb{I}, \forall \xi \in \mathbb{C}_{n,1}$ .

◆ Пусть  $C$  — нижняя треугольная матрица. Тогда задача Коши (3.1.3) в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} Dz_1 = c_{11}z_1 + h_1(t), \\ Dz_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + h_2(t), \\ \dots\dots\dots \\ Dz_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \dots + c_{nn}z_n + h_n(t); \end{cases}$$

При этом  $\begin{cases} z_1|_{t=t_0} = \xi_1, \\ z_2|_{t=t_0} = \xi_2, \\ \dots\dots\dots \\ z_n|_{t=t_0} = \xi_n, \end{cases}$  Из него следует, что  $z_1(t)$  — решение задачи Коши для ли-

нейного стационарного уравнения первого порядка. Такое решение всегда существует и единственно. Подставим его во второе уравнение. Получим, что  $z_2(t)$  также решение стационарного линейного уравнения первого порядка, которое также существует и единственно. Продолжая далее аналогично, построим векторную функцию  $z(t)$ , которая является единственным решением задачи Коши (3.1.3).

Лемма для верхней треугольной матрицы доказывается аналогично, начиная с последнего уравнения. □

**Теорема.** *Задача Коши для действительного стационарного уравнения*

$$DX = AX + f(t), \quad X|_{t=t_0} = \xi \quad (3.1.4)$$

с непрерывной на  $\mathbb{I}$  векторной функцией  $f(t)$  имеет единственное решение  $\forall t_0 \in \mathbb{I}$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}_{n,1}$ .

♦ Любая действительная матрица  $A$  над полем  $\mathbb{C}$  имеет жорданову нормальную форму, то есть подобную ей комплексную жорданову матрицу  $J \in \mathbb{C}_{n,n}$ . То есть существует невырожденная матрица  $S(s_{ij}) \in \mathbb{C}_{n,n} : J = S^{-1}AS$ . Сделаем в уравнении (3.1.4) замену

$$X = SZ. \text{ Тогда } D(SZ) = D \begin{pmatrix} s_{11}z_1 + \dots + s_{1n}z_n \\ \vdots \\ s_{n1}z_1 + \dots + s_{nn}z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}Dz_1 + \dots + s_{1n}Dz_n \\ \vdots \\ s_{n1}Dz_1 + \dots + s_{nn}Dz_n \end{pmatrix} = SDZ.$$

Тогда  $SDZ = ASZ + f(t)$ ,  $SZ|_{t=t_0} = \xi$ .

Домножим полученные уравнения на  $S^{-1}$  и получим

$$DZ = \underbrace{S^{-1}AS}_J Z + S^{-1}f(t), \quad Z|_{t=t_0} = S^{-1}\xi.$$

В результате получим задачу Коши для комплекснозначного уравнения с матрицей  $J$ , которая является треугольной, так как жорданова матрица треугольная. По лемме это уравнение имеет единственное решение  $Z(t)$ . Следовательно, функция  $X(t) = SZ(t)$  является решением исходной задачи Коши (3.1.4).

Но в общем случае это решение является комплекснозначным, то есть имеет вид  $X(t) = U(t) + iV(t)$ , где  $U(t)$  и  $V(t)$  — действительные векторные функции. Подставим это выражение в уравнение (3.1.4):

$$DU + iDV = \underset{\in \mathbb{R}}{A}(U + iV) + \underset{\in \mathbb{R}}{f(t)}, \quad (U + iV)|_{t=t_0} = \underset{\in \mathbb{R}}{\xi}.$$

Приравняем в полученном равенстве действительные части слева и справа:

$$DU = AU + f(t), \quad U|_{t=t_0} = \xi.$$

Следовательно, векторная функция  $U(t) = \text{Re}(X(t))$  является единственным решением задачи Коши (3.1.4).  $\square$

## 3.2 Структура множества решений линейной стационарной системы однородных уравнений.

Рассмотрим стационарное линейное уравнение

$$DX = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}_{n,n}. \quad (3.2.1)$$

И пусть  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  — два решения уравнения (3.2.1). Тогда  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} D(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha DX_1 + \beta DX_2 = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = A(\alpha X_1 + \beta X_2)$ . И, следовательно, векторная функция  $\alpha X_1 + \beta X_2$  также является решением уравнения (3.2.1). Таким образом, множество решений системы (3.2.1) является **векторным пространством**.

• Пусть  $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$  — некоторые векторные функции.

Определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского** системы  $X_1, \dots, X_n$ .



**Теорема.** Если векторные функции  $X_1, \dots, X_n$  линейно зависимы, то их  $W(t) = 0 \forall t$ .

◆ Если эти функции линейно зависимы, то одна из них линейно выражается через остальные. Следовательно, один из столбцов определителя равен линейной комбинации остальных столбцов. Тогда  $W(t) = 0$ .  $\square$

**Теорема.** Если определитель Вронского системы решений  $X_1, \dots, X_n$  равен нулю хотя бы в одной точке  $t_0$ , то эти векторные функции линейно зависимы.

◆ Пусть  $\exists t_0 \in \mathbb{R} : W(t_0)$  системы решений  $X_1, \dots, X_n$  равен нулю. Следовательно, ранг Вронскиана меньше его порядка и столбцы этой матрицы линейно зависимы. То есть существует нетривиальная линейная комбинация  $\alpha_1 X_1(t_0) + \dots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$ . Рассмотрим решение  $X(t) = \alpha_1 X_1(t_0) + \dots + \alpha_n X_n(t_0)$ . Так как столбец  $X(t)$  является линейной комбинацией решений уравнения (3.2.1), то он также является решением уравнения (3.2.1) и при этом  $X|_{t=t_0} = \alpha_1 X_1(t_0) + \dots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$ .

Заметим, что векторная функция  $Y(t) \equiv 0$  также является решением уравнения (3.2.1), удовлетворяющим тем же начальным условиям. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши  $Y(t) = X(t)$ , то есть  $X(t) \equiv 0$  и, следовательно, решения  $X_1, \dots, X_n$  линейно зависимы.  $\square$

**Следствие.** Если определитель Вронского решений системы (3.2.1) равен нулю при некотором  $t_0$ , то он равен нулю при любом  $t$ .

◆ Если при некотором  $t_0$   $W(t_0) = 0$ , то по второй теореме решения линейно зависимы. Следовательно, по первой теореме  $W(t) = 0 \forall t$ .  $\square$

**Следствие.** Если система решений уравнения (3.2.1) линейно независима, то их  $W(t) \neq 0 \forall t$ .

◆ Следует из второй теоремы.  $\square$

Рассмотрим  $n$  задач Коши  $DX = AX$ ,  $X|_{t=t_0} = E_i$ , где  $E_i$  —  $i$ -ый столбец единичной матрицы  $E = [E_1, \dots, E_n]$ . По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши все эти задачи Коши имеют единственные решения. Обозначим их  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ . Вронскиан этой системы решений при  $t = t_0$  равен  $\det E = 1 \neq 0$ . Следовательно, эти решения линейно независимы.

Покажем, что любое решение уравнения (3.2.1) является линейной комбинацией этих решений. Пусть  $X(t)$  — произвольное решение уравнения (3.2.1) и пусть  $X(t_0) = \xi =$

$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,1}$ . Рассмотрим векторную функцию  $Y(t) = \xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n$ . Так как  $Y(t)$  — линейная комбинация решений системы (3.2.1), то  $Y(t)$  также решение и при этом

$$Y(t_0) = \xi_1 X_1(t_0) + \dots + \xi_n X_n(t_0) = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \xi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

То есть  $X(t)$  и  $Y(t)$  являются решениями одной задачи Коши. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши  $X(t) = Y(t) = \xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n$ . Следовательно,  $X_1, \dots, X_n$  — базис пространства решений системы (3.2.1). Таким образом, общее решение имеет вид

$$X_{\text{OP}}(t) = C_1 X_1 + \dots + C_n X_n, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}.$$

- Базис пространства решений однородного уравнения (3.2.1) называется **фундаментальной системой решений**.
- Матрица  $\Phi(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$  называется **фундаментальной матрицей** системы (3.2.1).

Фундаментальная матрица невырожденная при любом  $t$ .

- Фундаментальная система решений называется **нормированной** при  $t = t_0$ , если ее  $\Phi(t_0) = E$ .

Общее решение уравнения (3.2.1) в матричном виде с использованием фундаментальной матрицы может быть записано следующим образом:

$$X_{\text{OP}}(t) = \Phi(t) \cdot C, \quad \forall C \in \mathbb{R}_{n,1}.$$

Если  $X(t)$  — решение задачи Коши  $DX = AX$ ,  $X|_{t=t_0} = \xi$ , то  $X(t_0) = \Phi(t_0) \cdot C = \xi$ . Так как матрица  $\Phi(t_0)$  невырожденная, то  $\exists \Phi^{-1}(t_0) : C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$ . Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi.$$

### 3.3 Метод Эйлера построения фундаментальной системы решений линейных векторных уравнений.

Рассмотрим линейное векторное уравнение

$$DX = AX, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3.1)$$

Найдем решение этого уравнения в виде

$$X(t) = B_0 e^{\lambda t}, \quad (3.3.2)$$

где  $B_0$  — некоторый ненулевой столбец ( $B_0 \in \mathbb{R}_{n,1}$ ). Подставим функцию (3.3.2) в уравнение (3.3.1):

$$\lambda B_0 e^{\lambda t} = AB_0 e^{\lambda t} \iff AB_0 - \lambda B_0 = 0 \iff (A - \lambda E)B_0 = 0.$$

Столбец  $B_0$  является ненулевым решением полученного матричного уравнения, если  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Следовательно,  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $A$ , а  $B_0$  — собственный вектор, соответствующий этому значению.

Таким образом, функция (3.3.2) является ненулевым решением уравнения (3.3.1), если  $B_0$  — собственный вектор,  $\lambda$  — собственное значение.

Если матрица  $A$  является матрицей простой структуры, то существует базис пространства  $\mathbb{R}_{n,1}$  составленный из собственных векторов матрицы  $A$ . Тогда, используя этот базис, можем построить  $n$  решений вида (3.3.2) системы (3.3.1), которые являются линейно независимыми, так как определитель Вронского этой системы решений при  $t = 0$  равен определителю матрицы, составленной из  $n$  линейно независимых собственных векторов, а значит не равен нулю.

Если матрица  $A$  не является матрицей простой структуры, то для нее всегда существует в общем случае комплексная подобная жорданова матрица, а следовательно для этой матрицы существует в общем случае комплексный жордановый базис.

**Теорема.** Если  $B_0, B_1, \dots, B_k$  — жорданова цепочка матрицы  $A$ , соответствующая собственному значению  $\lambda_0$ , то векторная функция

$$X(t) = (B_0 \frac{t^k}{k!} + B_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_2 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + B_{k-1} \frac{t}{1!} + B_k) e^{\lambda_0 t} \quad (3.3.3)$$

является решением уравнения (3.3.1).

♦ Вычислим для векторной функции (3.3.3) векторную функцию  $AX - DX$ :

$$AX - DX = A(B_0 \frac{t^k}{k!} + B_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + B_{k-1} \frac{t}{1!} + B_k) e^{\lambda_0 t} - (B_0 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_1 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + B_{k-1}) e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 (B_0 \frac{t^k}{k!} + B_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + B_{k-1} \frac{t}{1!} + B_k) e^{\lambda_0 t}.$$

Сравним коэффициенты:

$$t^k e^{\lambda_0 t} : AB_0 \frac{1}{k!} - \lambda_0 B_0 \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!} (A - \lambda_0 E) B_0 = 0, \text{ так как } B_0 \text{ — собственный вектор, соответствующий собственному значению } \lambda_0.$$

$$t^{k-1} e^{\lambda_0 t} : \frac{1}{(k-1)!} AB_1 - \frac{1}{(k-1)!} B_0 - \frac{1}{(k-1)!} \lambda_0 B_1 = \frac{1}{(k-1)!} (AB_1 - \lambda_0 B_1 - B_0) = \frac{1}{(k-1)!} (\underbrace{(A - \lambda_0 E) B_1}_{B_0} - B_0) = 0, \text{ так как } B_1 \text{ — вектор присоединенный к } B_0.$$

Продолжая аналогично, получим, что  $AX - DX = 0$ . Следовательно,  $DX = AX$ , то есть  $X$  — решение уравнения (3.3.1).  $\square$

Так как для жордановой цепочки  $B_0, \dots, B_k$  длины  $(k+1)$  любая ее подсистема  $B_0, B_1, \dots, B_m$ ,  $0 \leq m \leq k$ , также является жордановой цепочкой, то, используя жорданову цепочку длины  $(k+1)$ , можно построить  $(k+1)$  решение системы (3.3.1).

Следовательно, используя жорданов базис матрицы  $A$  составленный из жордановых цепочек, можно построить ровно  $n$  различных решений уравнения (3.3.1).

Если вычислить значение фундаментальной матрицы составленной из этих решений при  $t = 0$ , получим матрицу, состоящую из жорданового базиса матрицы  $A$ , которая невырожденная. Следовательно, построенная система решений линейно независимая.

Если среди собственных значений матрицы  $A$  существуют мнимые, то собственные и присоединенные векторы, соответствующие этим собственным значениям, также мнимые. И построенные решения являются комплекснозначными. Но так как матрица  $A$  действительная, их действительные и мнимые части являются линейно независимыми действительными решениями. Следовательно, используя комплексное собственное значение кратности  $k$  можно построить  $2k$  линейно независимых действительных решений. При этом аналогично построенные решения для сопряженного мнимого значения новыми независимыми решениями не являются.

### 3.4 Матричный метод построения фундаментальной системы решений линейных стационарных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX, \quad (3.4.1)$$

где  $A$  — матрица  $n \times n$ ,  $X$  — вектор-функция. Пусть  $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$  — последовательность матриц одного порядка.

- Матрица  $A$  называется **пределом** этой последовательности, если

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall i > N \quad \|A - A_i\| < \varepsilon.$$

- Ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$  называется **сходящимся**, если существует предел частных сумм.

Матричный ряд сходится  $\iff$  сходятся все ряды, образованные из соответствующих элементов этих матриц.

Рассмотрим ряд

$$E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots \quad (3.4.2)$$

Модуль любого элемента матрицы  $A^k$  не превосходит  $\|A^k\|$ , которая по определению матричной нормы не превосходит  $\|A\|^k$ . Тогда ряды, состоящие из соответствующих элементов матриц  $\frac{A^i}{i!}$ , имеют сходящуюся числовую мажоранту

$$1 + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \dots = e^{\|A\|},$$

а, следовательно, являются сходящимися.

- Ряд (3.4.2) также является сходящимся матричным рядом, обозначается  $e^A$  и называется **матричной экспонентой**.

Ряд (3.4.2) является сходящимся для любой матрицы  $A$ .

#### Свойства матричной экспоненты:

1.  $e^0 = E$  (0 — нулевая матрица).

2. Если матрицы  $A, B$  перестановочны, то есть  $AB = BA$ , то  $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ .

$$\begin{aligned} \blacklozenge e^A \cdot e^B &= \left(E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots\right) \left(E + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots\right) = E + \left(\frac{A}{1!} + \frac{B}{1!}\right) + \\ &+ \left(\frac{A^2}{2!} + \frac{A \cdot B}{1!} + \frac{B^2}{2!}\right) + \dots = E + \frac{A+B}{1!} + \frac{A^2 + 2AB + B^2}{2!} + \dots = [AB = \\ &BA, \text{ иначе свернуть нельзя}] = E + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \dots = e^{A+B}. \quad \square \end{aligned}$$

3.  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

$$\blacklozenge \text{ Так как матрицы } A \text{ и } -A \text{ перестановочны, то по второму свойству } e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E. \quad \square$$

Рассмотрим матричную экспоненту

$$e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{A^k}{k!}t^k + \dots, \quad (3.4.3)$$

где  $t$  — некоторая действительная переменная. При любом фиксированном  $t$  ряд (3.4.3) является сходящимся. На любом ограниченном промежутке ряд (3.4.3) является равномерно сходящимся, так как для него существует сходящийся числовой мажорирующий ряд. Тогда

$$D(e^{At}) = A + \frac{2A^2}{2!}t + \frac{3A^3}{3!}t^2 + \dots = A \left(E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \dots\right) = Ae^{At} = e^{At}A.$$

**Теорема.** Задача Коши  $DX = AX$ ,  $X|_{t=t_0} = \xi$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$  имеет единственное решение

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi.$$

◆ Задача Коши имеет единственное решение по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Покажем, что вектор-функция  $X(t)$  является этим решением:

$$DX = D(e^{A(t-t_0)}\xi) = D(e^{At}e^{-At_0}\xi) = D(e^{At})e^{-At_0}\xi = Ae^{At}e^{-At_0}\xi = Ae^{A(t-t_0)}\xi = AX(t),$$

то есть  $X(t)$  — решение. И при этом  $X|_{t=t_0} = e^{A(t-t_0)}\xi = e^{A \cdot 0}\xi = e^0\xi = E\xi = \xi$ .  $\square$

**Следствие.** Матрица  $e^{A(t-t_0)}$  является фундаментальной матрицей уравнения (3.4.1), нормированной в точке  $t = t_0$ .

◆ Так как  $i$ -ый столбец матрицы  $e^{A(t-t_0)}$  представим в виде  $e^{A(t-t_0)} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$ , то он является

решением задачи Коши для уравнения (3.4.1) с начальным условием  $X|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Сле-

довательно, каждый столбец матрицы  $A(t-t_0)$  — решение уравнения (3.4.1). При  $t = t_0$  матрица  $e^{A(t-t_0)} = E$ , следовательно, совокупность решений уравнения (3.4.1), образующих матрицу  $e^{A(t-t_0)}$ , имеет невырожденный Вронскиан в точке  $t = t_0$ . А значит эти решения линейно независимы. То есть матрица  $e^{A(t-t_0)}$  фундаментальная.  $\square$

Таким образом, общее решение уравнения (3.4.1) имеет вид

$$X_{\text{ОО}}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

## Вычисление матричной экспоненты.

$\forall A \in \mathbb{C}_{n,n} \exists J$  — жорданова нормальная форма, то есть  $\exists$  невырожденная матрица  $S : J = S^{-1}AS \Rightarrow A = SJS^{-1}$ . Следовательно,  $e^{At} = e^{(SJS^{-1})t} = SES^{-1} + \frac{SJS^{-1}}{1!}t + \frac{SJS^{-1}SJS^{-1}}{2!}t^2 + \dots = S\left(E + \frac{J}{1!}t + \frac{J^2}{2!}t^2 + \frac{J^3}{3!}t^3 + \dots\right)S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1}$ .

Пусть  $J = \text{diag}[J_1, \dots, J_k]$ , где  $J_i$  — жордановы клетки. Следовательно,  $e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_k t})$ .

Вычислим матричную экспоненту для клетки Жордана:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}; \quad J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 \end{pmatrix}; \quad J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда первый элемент матрицы  $e^{Jt}$  равен

$$1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \dots = e^{\lambda t}.$$

Второй элемент матрицы  $e^{Jt}$  равен

$$0 + \frac{1}{1!}t + \frac{2\lambda}{2!}t^2 + \frac{3\lambda^2}{3!}t^3 + \dots = t \left( 1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \dots \right) = te^{\lambda t}.$$

Следующий элемент будет равен  $\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}$ . И так далее. В итоге получим

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

### 3.5 Неоднородные стационарные линейные векторные уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \quad (3.5.1)$$

с непрерывной на  $\mathbb{I}$  векторной функцией  $f(t)$  и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \quad (3.5.2)$$

**Теорема.** Если  $X_1(t)$  — некоторое решение уравнения (3.5.1), то  $\forall X_0(t)$  решения уравнения (3.5.2) вектор-функция  $X_1 + X_0$  — решение уравнения (3.5.1).

$$\blacklozenge D(X_1 + X_0) = DX_1 + DX_0 = AX_1 + f(t) + AX_0 = A(X_1 + X_0) + f(t). \quad \boxtimes$$

**Теорема.** Если  $X_1(t)$  — решение уравнения (3.5.1), то  $\forall X_2(t)$  решения уравнения (3.5.1) вектор-функция  $X_0 = X_2 - X_1$  — решение уравнения (3.5.2).

$$\blacklozenge DX_0 = D(X_2 - X_1) = DX_2 - DX_1 = AX_2 + f(t) - (AX_1 + f(t)) = A(X_2 - X_1) = AX_0. \quad \boxtimes$$

Из предыдущих теорем следует, что все решения неоднородного уравнения можно получить, прибавив к некоторому частному решению все решения соответствующего однородного уравнения, то есть

$$X_{\text{OH}} = X_{\text{OO}} + X_{\text{CH}}.$$

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено **методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа)**.

Пусть  $\Phi(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$  — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2). Частное решение уравнения (3.5.1) будем искать в виде

$$X(t) = X_1(t)u_1(t) + \dots + X_n(t)u_n(t),$$

где  $u_i(t)$  — некоторые дифференцируемые функции. Если обозначим  $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ , то частное решение можно представить как

$$X(t) = \Phi(t) \cdot U(t).$$

Подставим функцию  $X(t)$  в уравнение (3.5.1):

$$DX_1u_1 + X_1Du_1 + \dots + DX_nu_n + X_nDu_n = A(X_1u_1 + \dots + X_nu_n) + f(t).$$

Так как  $X_i$  являются решениями уравнения (3.5.2), то  $DX_i = AX_i$ . Следовательно,  $DX_iu_i = AX_iu_i$ .

Тогда получаем

$$X_1Du_1 + \dots + X_nDu_n = f(t),$$

в матричном виде

$$\Phi(t) \cdot DU(t) = f(t).$$

Так как  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2), то ее столбцы — линейно независимые решения однородного уравнения. Следовательно, определитель фундаментальной матрицы является Вронскианом решений  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ , а значит  $\det \Phi(t) \neq 0 \forall t \Rightarrow \exists \Phi^{-1}(t) : DU(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$ . Тогда в качестве векторной функции  $U(t)$  можно выбрать функцию

$$U(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t, t_0 \in \mathbb{I}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$X_{\text{он}} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \Phi(t) \cdot (C + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau). \quad (3.5.3)$$

Используя формулу (3.5.3), найдем решение задачи Коши  $DX = AX + f(t)$ ,  $X|_{t=t_0} = \xi$ . Для этого подставим в (3.5.3) начальные условия:  $X|_{t=t_0} = \Phi(t_0) \cdot C = \xi \Rightarrow C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$ . Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

В качестве фундаментальной матрицы  $\Phi(t)$  можно взять матрицу  $e^{At}$  ( $\Phi(t) = e^{At}$ ). Тогда решение задачи Коши примет вид

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau. \quad (3.5.4)$$

Из уравнения (3.5.4) следует, что задача Коши для уравнения (3.5.1) с нулевыми начальными условиями ( $\xi = 0$ ) имеет вид

$$X(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (3.5.5)$$

То есть функция (3.5.5) является частным решением уравнения (3.5.1).

• Формула (3.5.5) называется **методом Коши** отыскания частного решения неоднородного уравнения.

Следовательно, общее решение уравнения (3.5.1) можно записать в виде

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} C + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

### 3.6 Непрерывная зависимость решений стационарного линейного векторного уравнения от начальных значений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \quad (3.6.1)$$

с непрерывной на  $\mathbb{I}$  векторной функцией  $f(t)$  и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \quad (3.6.2)$$

• Решение  $X_0(t)$  уравнения (3.6.1) называется **непрерывно зависящим** на промежутке  $\mathbb{I}$  **от начальных значений**, если

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall X(t) \text{ решения (3.6.3) } \|X(t_0) - X_0(t_0)\| \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}.$$

• Функция  $\|X(t) - X_0(t)\|$  называется **отклонением**  $X(t)$  от  $X_0(t)$ , а ее значение при  $t = t_0$ , то есть  $\|X(t_0) - X_0(t_0)\|$ , называется **начальным отклонением**.

Пусть  $X_0(t)|_{t=t_0} = \xi$ , а  $X(t)|_{t=t_0} = \xi + \Delta\xi$ , где  $\xi, \Delta\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$ . Тогда по правилу Коши  $X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$ ;  $X(t) = e^{A(t-t_0)}(\xi + \Delta\xi) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$ . Отсюда

- $X(t) - X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\Delta\xi$  — отклонение;
- $X(t_0) - X_0(t_0) = E\Delta\xi$  — начальное отклонение.

Следовательно, отклонение решения  $X(t)$  от  $X_0(t)$  не зависит от самих решений, а зависит лишь от их начальных отклонений. То есть все решения уравнения (3.6.1) либо одновременно зависят от начальных данных, либо нет. Кроме того отклонение зависит лишь от матрицы  $A$  и не зависит от неоднородности  $f(t)$ . Следовательно, и непрерывная зависимость от начальных данных зависит только от матрицы  $A$ .

**Теорема.** Если промежуток  $\mathbb{I}$  является отрезком, то любое решение уравнения (3.6.1) непрерывно зависит от начальных значений.



♦ Так как  $e^{A(t-t_0)}$  — фундаментальная матрица уравнения (3.6.2), то все ее компоненты являются непрерывными. Следовательно, по теореме Вейрштасса на отрезке  $\mathbb{I}$  они все являются ограниченными. То есть

$$\exists M : \|e^{A(t-t_0)}\| \leq M \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| = \|e^{A(t-t_0)} \Delta \xi\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\| \cdot \|\Delta \xi\| \leq M \cdot \|X(t_0) - X_0(t_0)\|.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} : \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

□

• Решение уравнения (3.6.1) называется **интегрально зависящим от начальных значений** на промежутке  $\mathbb{I}$ , если оно зависит от начальных значений на любом отрезке  $I_0 \subseteq \mathbb{I}$ .

### 3.7 Устойчивость стационарных линейных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} = [t_0; +\infty) \quad (3.7.1)$$

с непрерывной на  $\mathbb{I}$  векторной функцией  $f(t)$ .

• Решение  $X_0(t)$  уравнения (3.7.1) называется **устойчивым по Ляпунову**, если

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall X(t) \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

Таким образом, решение  $X_0(t)$  называется устойчивым по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке  $\mathbb{I}$  вида  $[t_0; +\infty)$ .

• Если кроме того  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - X_0(t)\| = 0$ , то решение  $X_0(t)$  называется **асимптотически устойчивым**.

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных значений следует, что все решения уравнения (3.7.1) либо одновременно устойчивы, либо нет.

• Уравнение, все решения которого устойчивы, называется **устойчивым** (аналогично **неустойчивым**, **асимптотически устойчивым**).

Кроме того, так как неоднородность уравнений не влияет на непрерывную зависимость от начальных значений, то и устойчивость уравнения не зависит от неоднородности  $f(t)$ . Следовательно, в дальнейшем для исследования устойчивости будем исследовать нулевое решение уравнения  $DX = AX$ . То есть

• Уравнение называется **устойчивым**, если

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall X(t) \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

**Лемма.** Уравнение (3.7.2) является устойчивым на  $\mathbb{I} \iff$  каждое его решение является ограниченным на  $\mathbb{I}$ .

◆  $\Rightarrow$ ) От противного. Пусть (3.7.2) устойчиво, но  $\exists Y(t)$  решение неограниченное на промежутке  $\mathbb{I}$ . Тогда векторная функция  $X(t) = CY(t)$  является также решением уравнения (3.7.2), и при этом, выбирая  $C$  сколь угодно малым, можем получить решение, которое при  $t = t_0$  будет сколь угодно близко к нулевому решению, но при этом являться неограниченным.

$\Leftarrow$ ) Пусть все решения уравнения (3.7.1) ограничены на  $\mathbb{I}$ . Тогда фундаментальная матрица  $e^{A(t-t_0)}$  тоже ограничена. То есть  $\exists M : \|e^{A(t-t_0)}\| \leq M \forall t > t_0$ . Тогда

$$\forall \varepsilon \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} : \forall X(t) = e^{A(t-t_0)} \xi \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

□

**Теорема** (Критерий устойчивости). *Неоднородное уравнение (3.7.1) устойчиво  $\iff$  действительные части собственных значений матрицы  $A$  неположительны, при этом собственные значения с нулевой действительной частью имеют равные алгебраические и геометрические кратности.*

◆ Так как неоднородность не влияет на устойчивость, то уравнение (3.7.1) устойчиво  $\iff$  уравнение (3.7.2) устойчиво. А по лемме это уравнение устойчиво  $\iff$  все его решения ограничены.

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решения однородного уравнения для ограниченности решений необходимо и достаточно, чтобы действительные части собственных значений были неположительны. Причем собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановом базисе матрицы  $A$  должны соответствовать цепочки длины 1. А это возможно, когда алгебраическая и геометрическая кратности этого собственного значения равны. □

**Следствие.** *Неоднородное уравнение (3.7.1) устойчиво  $\iff$  действительные части собственных значений матрицы  $A$  неположительны, при этом собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановой нормальной форме матрицы  $A$  соответствуют клетки порядка 1.*

**Лемма.** *Уравнение (3.7.2) является асимптотически устойчивым  $\iff$  все его решения стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .*

◆  $\Rightarrow$ ) Пусть уравнение асимптотически устойчиво. Тогда и его нулевое решение асимптотически устойчиво, то есть

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \forall X(t) \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Пусть  $Y(t)$  — произвольное решение уравнения (3.7.2). Тогда векторная функция  $CY(t)$ ,  $C \in \mathbb{R}$  также является решением уравнения (3.7.2). Причем, выбирая  $C$  достаточно малым, можно получить решение сколь угодно близкое к 0 при  $t = t_0$ . Следовательно, из определения устойчивости нулевого решения  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|CY(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| =$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{|C|} \|CY(t)\| = 0$ .  $\Leftarrow$ ) Пусть для решения  $X(t)$  уравнения (3.7.2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$ . Тогда  $X(t)$  является ограниченной функцией, так как из существования предела при  $t \rightarrow +\infty$  следует ограниченность этой функции на интервале  $(t_1; +\infty)$ ,  $t_1 \in \mathbb{I}$ . А на отрезке  $[t_0; t_1]$  функция  $X(t)$  ограничена, так как непрерывна. Следовательно, уравнение (3.7.2) является устойчивым. А так как  $\forall X(t) \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$ , то и асимптотически устойчиво. □

**Теорема** (Критерий асимптотической устойчивости). *Неоднородное уравнение (3.7.1) асимптотически устойчиво  $\iff$  все собственные значения матрицы  $A$  отрицательны.*

♦ Уравнение (3.7.1) асимптотически устойчиво  $\iff$  асимптотически устойчиво уравнение (3.7.2). А по лемме уравнение (3.7.2) асимптотически устойчиво  $\iff$  все его решения стремятся к 0 при  $t \rightarrow +\infty$ .

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решений уравнения (3.7.2) его решения будут стремиться к 0, если действительная часть собственных значений отрицательна.  $\square$

## 3.8 Фазовая плоскость линейных стационарных векторных уравнений порядка 2.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX, \quad (3.8.1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ а } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

— неизвестная векторная функция.

• **Фазовым графиком** решения  $X(t)$  называется график параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t). \end{cases}$$

• **Плоскость  $Ox_1x_2$ , на которой располагаются фазовые графики решений, называется фазовой плоскостью уравнения.**

• **Фазовый график, состоящий из одной точки, называется точкой покоя.**

Начало координат (точка  $(0; 0)$ ) всегда является точкой покоя для уравнения (3.8.1). Рассмотрим классификации точек покоя.

**I группа.**

1. Пусть матрица  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Тогда система в координатном виде записывается следующим образом

$$\begin{cases} Dx_1 = 0, \\ Dx_2 = 0; \end{cases}$$

и, следовательно, решения этой системы имеют вид  $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ . То есть любая точка фазовой плоскости является фазовым графиком и других фазовых графиков нет.

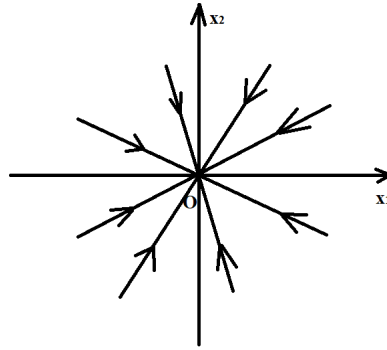
2. Пусть  $A = aE$ , то есть  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Тогда в координатной форме система имеет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1, \\ Dx_2 = ax_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 e^{at}, \\ x_2 = C_2 e^{at}. \end{cases}$$

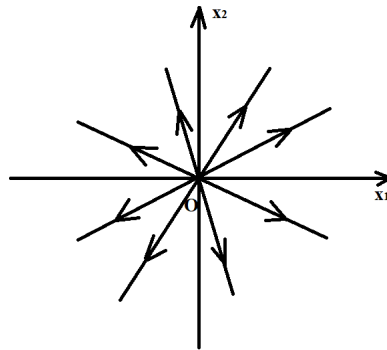
Если  $C_1 \neq 0$ , то  $e^{at} = \frac{x_1}{C_1} \Rightarrow x_2 = \frac{C_2}{C_1} x_1$  — прямая, проходящая через начало координат.

Если  $C_1 = 0$ , то  $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = C_2 e^{at}. \end{cases}$  — прямая  $x_1 = 0$ .

При этом, если  $a < 0$ , то точка  $(x_1(t); x_2(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .



А если  $a > 0$ , то точка  $(x_1(t); x_2(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \infty$ .



• Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики имеют такое расположение, называется **дискретическим узлом** соответственно **устойчивым** и **неустойчивым**.

**II группа.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , причем  $A \neq aE$ . Рассмотрим матрицу  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & \text{Sp}A \end{pmatrix}$ ,  $\text{Sp}A = a + d$ . И рассмотрим их характеристические матрицы:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\det A & \text{Sp}A - \lambda \end{pmatrix}.$$

Построим для них системы НОД миноров.

$A - \lambda E$ :  $d_1(\lambda) = 1$  (если какое-то  $c$  или  $b$  не равно нулю, то оно является ненулевым минором первого порядка; а если  $c = b = 0$ , то  $a \neq d$  и многочлены  $a - \lambda$  и  $d - \lambda$  взаимно простые).

$d_2(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ .

$B - \lambda E$ :  $d_1(\lambda) = 1$ ,  $d_2(\lambda) = \lambda^2 - \text{Sp}A\lambda + \det A$ .

Следовательно, матрицы  $A - \lambda E$  и  $B - \lambda E$  эквивалентны. Тогда матрицы  $A$  и  $B$  подобны, то есть существует невырожденная матрица  $S$ :  $B = S^{-1}AS$ .

Выполним замену в уравнении (3.8.1) неизвестной функции  $X = SY$ . Тогда  $SDY = ASY \Rightarrow DY = S^{-1}ASY = BY$ . Получили

$$DY = BY. \quad (3.8.2)$$

Координатная форма уравнения (3.8.2) имеет вид

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = -\det Ay_1 + \operatorname{Sp}ADy_1. \end{cases}$$

Исключим из второго уравнения  $y_1$  и получим

$$D^2y_1 - (\operatorname{Sp}A)Dy_1 + (\det A)y_1 = 0.$$

Тогда решение  $y_1(t)$  имеет фазовую траекторию, являющуюся графиком параметрически заданной функции

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = Dy_1(t); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = y_2(t). \end{cases} \quad (3.8.3)$$

— фазовая траектория решения уравнения (3.8.2).

То есть уравнение (3.8.3) и уравнение (3.8.2) имеют одинаковый фазовый портрет. Выполнив преобразование плоскости  $X = SY$ , получим фазовый портрет уравнения (3.8.1). Заметим, что матрица  $S$  невырожденная. Тогда линейное преобразование  $X = SY$  невырожденное. Следовательно, оно сводится к последовательному выполнению преобразования поворота и преобразования растяжения-сжатия вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений. Таким образом, типы точек покоя уравнения (3.8.1) будут совпадать с типами точек покоя уравнений (3.8.2) и (3.8.3).

## Глава 4

# Элементарные дифференциальные уравнения.

### 4.1 Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.

- *Дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме* называется выражение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (4.1.1)$$

где  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  — функции, определенные в некоторой области  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Если в области  $D$   $Q(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in D$ , то уравнение (4.1.1) можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ где } f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

- Уравнение в такой форме записи называется **разрешенным относительно производной**.

Аналогично, если  $P(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in D$ , то уравнение (4.1.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dy} = g(x, y), \text{ где } g(x, y) = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

- Точка  $(x_0, y_0) \in D$  такая, что  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ , называется **особой точкой** уравнения.

- **Решением** уравнения называется функция  $y(x)$  (или  $x(y)$ ) определенная и дифференцируемая на некотором промежутке  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ , такая, что выполняется равенство

$$P(x, y(x))dx + Q(x, y(x))y'(x)dx = 0.$$

- График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Решение уравнения может быть также задано или параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{I},$$

или неявно  $\varphi(x, y) = 0$ .

• **Общим решением** дифференциального уравнения называется семейство решений

1.  $y = y(x, C)$ ,  $x = x(y, C)$ , если решения заданы функциями;

2.  $\begin{cases} x = x(t, C), \\ y = y(t, C). \end{cases}$  если решения заданы параметрически;

3.  $\varphi(x, y, C) = 0$ , если решения заданы неявно;

зависящие от произвольной постоянной  $C \in \mathbb{R}$ .

• Если в общем решении можно выразить произвольную постоянную  $C$ , то соотношение

$$u(x, y) = C$$

называется **общим интегралом** уравнения.

• Множество всех решений дифференциального уравнения называется **полным решением**.

## 4.2 Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделенными переменными.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (4.2.1)$$

Если Ф2П  $u(x, y)$  дифференцируема по каждой переменной, то ее полный дифференциал имеет вид

$$du(x, y) = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy.$$

• Уравнение (4.2.1) называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его правая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , то есть

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда выполняется условие Эйлера

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае уравнение (4.2.1) принимает вид

$$du(x, y) = 0.$$

Следовательно, функция  $u(x, y) = C$  является общим интегралом уравнения (4.2.1) и полным решением уравнения (4.2.1).

Любое  $C$ , для которого это равенство определено неявно, задает дифференцируемую функцию.

Найдем функцию  $u(x, y)$ . Если уравнение (4.2.1) является уравнением в полных дифференциалах, то

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

И пусть  $(x_0, y_0) \in D$ . Тогда первое уравнение является простейшим относительно  $x$ . И, следовательно,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y).$$

Продифференцируем это равенство по  $y$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) = \\ &= Q(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y). \end{aligned}$$

Тогда из второго уравнения системы

$$Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y).$$

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y).$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C.$$

Подставим обратно в  $u(x, y)$  и получим

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C.$$

Выбрав одну из этих функций  $u(x, y)$ , например с  $C = 0$ , получим общий интеграл уравнения

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C.$$

Если начать поиск функции  $u(x, y)$  с интегрирования второго уравнения системы, то общий интеграл будет иметь вид

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C.$$

Функция  $u(x, y)$  может быть также найдена как КРИ-2:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$