

# **Алгебра и Теория чисел**

Конспект по 1 семестру специальности «прикладная  
информатика»  
(лектор Г. В. Матвеев)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Операции над комплексными числами</b>	<b>3</b>
1.1	Геометрическая интерпретация комплексных чисел . . . . .	4

# 1 Операции над комплексными числами

Множество комплексных чисел имеет вид:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

где число  $i$  — мнимая единица.

По определению  $i^2 = -1$

- **Общим видом** комплексного числа называется представление

$$z = a + bi$$

- Число  $a = \operatorname{Re} z$  — **вещественная** часть числа  $z$ .
- Число  $b = \operatorname{Im} z$  — **мнимая** часть числа  $z$ .

**Операции над комплексными числами:**

1. Сложение и вычитание комплексных чисел

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d) \cdot i.$$

2. Сравнение комплексных чисел

$$a + bi = c + di \iff \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

3. Нулевое комплексное число

$$a + bi = 0 \iff \begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$$

4. Умножение комплексных чисел

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i.$$

5. Деление комплексных чисел

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

**Свойства сложения и умножения:**

1. Коммутативность

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Коммутативность комплексных чисел вытекает из коммутативности вещественных.

2. Ассоциативность

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3;$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

3. Существование противоположного числа

$$\forall z \exists (-z), \quad z + (-z) = 0.$$

4. Дистрибутивность

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

## 1.1 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

- Число  $\bar{z} = a - bi$  называется **сопряженным числом** для числа  $z = a + bi$ .

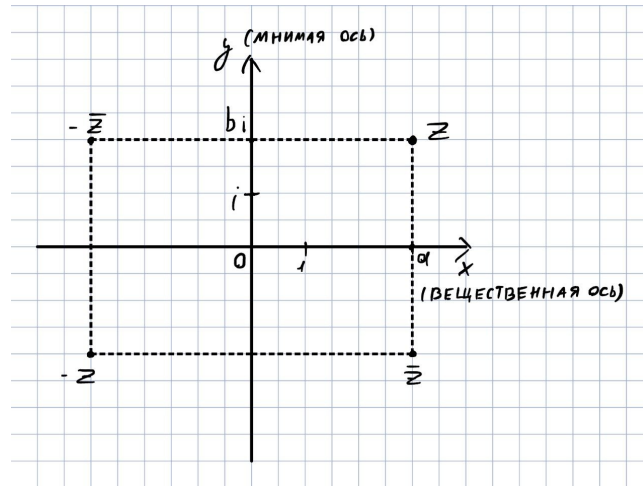


Рис. 1: Комплексные числа на плоскости

**Свойства сопряженных чисел:**

1.  $\overline{\bar{z}} = z$ .

◆  $\overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z$ .

⊠

2.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

◆  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + bi + c + di} = \overline{(a + c) + (b + d) \cdot i} = (a + c) - (b + d) \cdot i$ ;

$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d) \cdot i = \overline{z_1 + z_2}$ .

⊠

3.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .

◆  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc) \cdot i}$ ;

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$ ;

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc) \cdot i = \overline{z_1 \cdot z_2}$ .

⊠

4.  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ .

◆  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$ ;

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$ ;

$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{a - bi}{c - di} \cdot \frac{c + di}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} \cdot i = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ .

⊠

5.  $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$ .

- Модулем** комплексного числа называется число

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}, \quad |z| \in \mathbb{R}.$$

**Свойства модуля:**

1.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;

2.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;

3.  $z = 0 \iff |z| = 0$ .