Аналитическая геометрия
и
Основы высшей алгебры

Конспект по 1 семестру факультета прикладной математики и информатики

(лектор: Б. Б. Комраков)

Оглавление

Часть I

Аналитическая геометрия

Глава 1

Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

1.1 Уравнение плоскости.

• ***Нормальным вектором плоскости*** *называется ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости.*

Рассмотрим некоторую плоскость П, проходящую через т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \perp n(A, B, C)$.
т. $M(x, y, z) \in \Pi \iff \overrightarrow{MM_0} \perp n \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot n = 0$.

$\overrightarrow{MM_0}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$,
$M_0 \in \Pi \iff A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$ — ***уравнение плоскости, проходящей через*** $\overrightarrow{MM_0} \perp n$.

$M \in \Pi \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
$Ax + By + Cz - \underbrace{Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{D=-Ax_0-By_0-Cz_0} = 0$, тогда:

$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0}$ — ***общее уравнение плоскости***.

Теорема.

1. *Любая плоскость может быть задана общим уравнением.*
2. *В ДПСК любое общее уравнение определяет плоскость.*

Теорема. *Пусть* $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

- *если* $\Pi_1 = \Pi_2$, *то* $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
- *если* $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \iff n_1 \parallel n_2 \iff A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2,\ D_1 \neq \lambda D_2$.
- *если* $\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff n_1 \perp n_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.
- $cos(\Pi_1, \Pi_2) = cos(n_1, n_2) = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

• ***Общее уравнение*** *плоскости называется* ***полным***, *если все его коэффициенты отличны от 0, но если хотя бы один из коэффициентов равен 0, то называется* ***неполным***.

Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ — полное общее уравнение. Перенесем D и разделим:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1 \text{ (заменяем: } \frac{-D}{A} = a,\ \frac{-D}{B} = b,\ \frac{-D}{C} = c)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 - \textit{\textbf{уравнение плоскости в отрезках}}.$$

Пусть Π — произвольная плоскость, n — единичный вектор и имеет координаты $n(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$, где $\alpha = \angle(n, Ox)$, $\beta = \angle(n, Oy)$, $\gamma = \angle(n, Oz)$

$x \cdot cos\alpha + y \cdot cos\beta + z \cdot cos\gamma - p = 0$ — ***нормальное уравнение плоскости***

• ***Отклонением*** *$\delta(M,\Pi)$ называется число, равное* $\delta(M,\Pi) = \begin{cases} \rho(M,\Pi) = \overrightarrow{M'M} & \upuparrows n \\ -\rho(M,\Pi), \overrightarrow{M'M} & \uparrow\downarrow n \end{cases} \Rightarrow$ $\rho(M,\Pi) = |\delta(M,\Pi)|$.

Теорема. *Если $x{\cdot}cos\alpha$ + $y{\cdot}cos\beta$ + $z{\cdot}cos\gamma$ - p = 0 — нормальное уравнение плоскости Π, то отношение т.$M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости Π равняется:*

$$\delta(M_0,\Pi) = \ x_0 \cdot cos\alpha + y_0 \cdot cos\beta + z_0 \cdot cos\gamma - p$$
$$\rho(M_0,\Pi) = |\delta(M_0,\Pi)|$$

Стоит принять во внимание, что $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

Нормальное уравнение можно построить из общего уравнения, домножив его на **нормирующий множитель** :

$$\lambda = \pm\ \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пусть плоскость Π проходит через т.$M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлениарным векторам $a(a_1, a_2, a_3)$ и $b(b_1, b_2, b_3)$.

$M(x, y, z) \in \Pi \iff \overrightarrow{M_0M}$, a, b — компланарны ($\overrightarrow{M_0M}\ \cdot\ a\ \cdot\ b = 0$)
$\overrightarrow{MM_0}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 -$$ ***уравнение плоскости, проходящей через точку и два направляющих вектора***

Если плоскость Π проходит через 3 точки, не лежащие на одной прямой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве неколлинеарных векторов, параллельных плоскости, можно взять $a = \overrightarrow{M_0M_1}$ и $b = \overrightarrow{M_0M_2}$ и тогда уравнение примет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 -$$ ***уравнение плоскости, проходящей через 3 точки***

Т.к. вектор $a(a_1, a_2, a_3) \nparallel b(b_1, b_2, b_3)$, $\Pi \parallel a$ и $\Pi \parallel b$, и то векторы a и b на плоскости Π образуют базис $\Rightarrow$ любой вектор, параллельный плоскости, в том числе и $\overrightarrow{M_0M}$, если т.M $\in$ плоскости, может быть разложен по этому базису, т.е. представим в виде:

$$M_0M = t \cdot a + s \cdot b, \quad t, s \in R \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-x_0=t\cdot a_1+s\cdot b_1,\\ y-y_0=t\cdot a_2+s\cdot b_2,\\ z-z_0=t\cdot a_3+s\cdot b_3.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+t\cdot a_1+s\cdot b_1,\\ y=y_0+t\cdot a_2+s\cdot b_2,\\ z=z_0+t\cdot a_3+s\cdot b_3.\end{cases} ---$$ ***параметрическое уравнение плоскости***

• ***Пучок плоскостей*** *— совокупность всех плоскостей, проходящих через прямую* Δ, *причем* Δ *— ось пучка плоскостей.*

Теорема. *Пусть* $\begin{cases} \Pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \Pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$, $\Delta \in \Pi_1, \Pi_2$, *тогда* $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ *— плоскость, проходящая через* Δ, *причем* $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

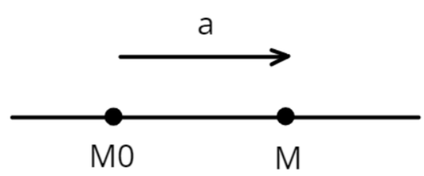
• *Множество всех плоскостей, проходящих через одну и ту же точку, называется* ***связкой****.*

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка связки с центром, тогда уравнение связки выглядит следующим образом : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+D=0$, причем $A^2+B^2+C^2+D^2 \neq 0$.

1.2 Уравнение прямой в пространстве.

Пусть Δ — прямая, $M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z)$ — различные точки, при этом $M_0 \in \Delta, a(a_1, a_2, a_3)$— вектор, параллельный прямой Δ (направляющий вектор). Тогда $a \parallel M_0M \Leftrightarrow M \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in R$:

$$\overrightarrow{M_0M} = ta. \tag{1}$$



Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Тогда из (1) мы получим

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}=t$$ — **каноническое уравнение прямой в пространстве.**

Отсюда получим

$$\begin{cases} x=x_0+ta_1,\\ y=y_0+ta_2,\\ z=z_0+ta_3;\end{cases}$$ – **параметрическое уравнение прямой в пространстве.**

Пусть у нас есть ещё одна точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, которая также принадлежит прямой Δ, тогда в качестве вектора a можно взять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$. По итогу получаем

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$ — **уравнение прямой, проходящей через две точки**.

Пусть есть две не параллельные плоскости $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда прямую в пространстве можно задать как пересечение этих плоскостей:

$$\begin{cases} \Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \textbf{ уравнение прямой как пересечение двух плоскостей.}$$

Пример: Пусть прямая Δ задана как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} \Pi_1 : 2x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ \Pi_2 : 3x + 2y + z - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{Задача — найти параметрическое уравнение этой прямой.}$$

Нужно найти точку, принаждежащую этой прямой, а также направляющий вектор. Точку на прямой будем искать как общую точку для плоскостей, пересечение которых образуют эту прямую. Одну из координат можно взять любой (к примеру, возьмём $z = 0$), тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Pi_1 : 2x - 3y = 5, \\ \Pi_2 : 3x + 2y = 1; \end{cases} \text{, решение которого } x = 1, y = -1.$$

Тогда искомая точка A имеет координаты $(1, -1, 0)$.
Направляющий вектор можно найти как векторное произведение нормальных векторов плоскостей — полученный вектор будет параллелен прямой. Для первой плоскости $n_1(2, -3, 2)$, для второй $n_2(3, 2, 1)$. Их векторное произведение: $[n_1, n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7i + 4j + 13k \Rightarrow$ $a(-7, 4, 13)$ – направляющий вектор прямой Δ.
В итоге по найдённой точке и направляющему вектору получаем искомое параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 1 - 7t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 13t. \end{cases}$$

□

Рассмотрим взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве. Пусть плоскость Π задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow n(A, B, C)$ — нормальный вектор плоскости. Прямая же будет иметь направляющий вектор $a(a_1, a_2, a_3) \parallel \Delta$. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Delta$.

1. $\Delta \in \Pi \Leftrightarrow a \perp n$ и $M_0 \in \Pi$. Последнее возможно $\Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

2. $\Delta \parallel \Pi \Leftrightarrow a \perp n$ и $M_0 \notin \Pi$. Последнее возможно $\Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

3. $\Delta \cup \Pi \Leftrightarrow a \not\perp n \Leftrightarrow a \cdot n \neq 0$.

Синус угла между прямой и плоскостью можно находить по следующей формуле:

$$sin\varphi = \frac{n \cdot a}{|n| \cdot |a|} = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Рассмотрим взаимное расположение прямых в пространстве. Прямая Δ_1 имеет направляющий вектор $a(a_1, a_2, a_3)$ и точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Прямая Δ_2 имеет направляющий вектор $b(b_1, b_2, a_3)$ и точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

1. Прямые совпадают ($\Delta_1 = \Delta_2$) $\Leftrightarrow a \parallel b \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$.
2. Прямые параллельны ($\Delta_1 \parallel \Delta_2$) $\Leftrightarrow a \parallel b \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$.
3. Прямые пересекаются ($\Delta_1 \cup \Delta_2$) $\Leftrightarrow a \nparallel b$ и $a, b, \overrightarrow{M_1M_2}$ — компланарные.
4. Прямые не пересекаются и не параллельны ($\Delta_1 \dot{-} \Delta_2$) $\Leftrightarrow a \nparallel b$ и $a, b, \overrightarrow{M_1M_2}$ — некомпланарные.

Косинус угла между прямыми можно найти по следующей формуле:

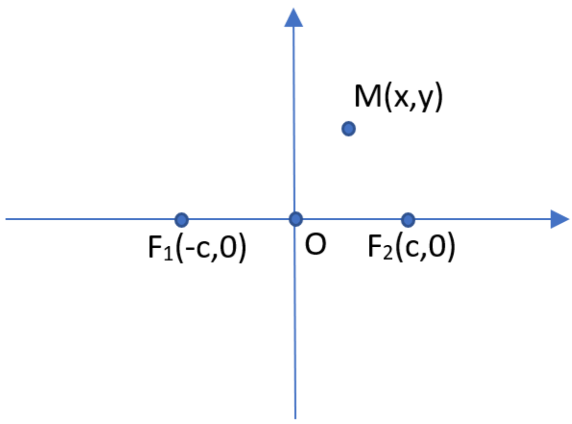
$$cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

Глава 2

Линии и поверхности второго порядка

2.1 Эллипс.

• ***Эллипс*** *— это множество точек плоскости, сумма расстояния от которых до двух данных точек F_1, F_2 этой плоскости есть величина постоянная (большая, чем расстояние от F_1 до F_2). В свою очередь, точки F_1, F_2 называются* ***фокусами эллипса****.*



Выведем формулу эллипса. Обозначим за $2c$ расстояние между фокусами $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. За $2a$ обозначим сумму расстояний от F_1 до $M(x,y)$ и от F_2 до $M(x,y)$, где M — точка эллипса. Очевидно, что $2a > 2c \Rightarrow a > c$. Тогда $2a = \overline{|MF_1|} + \overline{|MF_2|} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Второй корень перенесём в правую часть равенства и возведём всё в квадрат. В итоге получим: $x^2 + c^2 + 2xc + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 + c^2 - 2xc + y^2$. Приведём подобные: $4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc$. Поделим на 4 и получим: $a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$.
Снова обе части возводим в квадрат: $a^2(x^2+c^2-2xc+y^2) = a^4 + x^2c^2 - 2a^2xc$.
Раскроем скобки в правой части и приведём подобные: $a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$.
Немного преобразуем это равенство: $x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$.
Вспомним, что $a > c \Rightarrow a^2 > c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$. Обозначим за $b = \sqrt{a^2-c^2} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$ из равенства получаем: $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$.
Поделим обе части на (a^2b^2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

т.е. любая точка $M(x,y)$, удовлетворяющая этому <u>каноническому уравнению</u>, принадлежит эллипсу.

Мы показали, что любая точка, удовлетворяющая уравнению $2a = \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, удовлетворяет каноническому уравнению. Теперь покажем, что любая точка $M(x_0, y_0)$, удовлетворяющая каноническому уравнению, принадлежит эллипсу (обратная задача).
Перепишем каноническое уравнение следующим образом: $\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}$. Домножим на b^2 и

получим $y_0^2 = b^2(1 - \frac{x_0^2}{a^2})$.

Тогда $\overline{|MF_1|} = \sqrt{(x_0+c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0+c)^2 + b^2(1 - \frac{x_0^2}{a^2})} = \sqrt{x_0^2 + c^2 + 2x_0c + b^2 - b^2\frac{x_0^2}{a^2}} =$
$[b^2 = a^2 - c^2] = \sqrt{x_0^2 + c^2 + 2x_0c + a^2 - c^2 - (a^2-c^2)\frac{x_0^2}{a^2}} = \sqrt{2x_0c + a^2 + c^2\frac{x_0^2}{a^2}} = \sqrt{(a + \frac{cx_0}{a})^2} =$
$|a + \frac{cx_0}{a}|$.

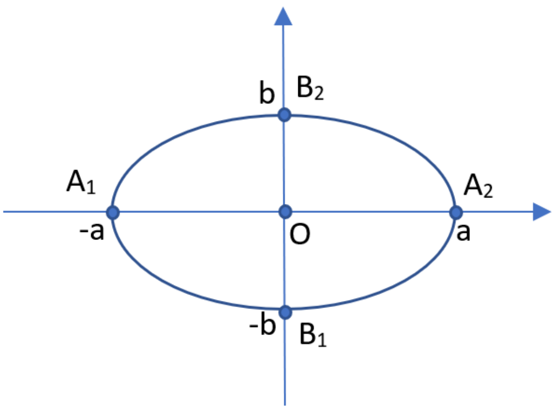
Значит, $\overline{|MF_1|} = |a + \frac{c}{a}x_0|$. Аналогично, $\overline{|MF_2|} = |a - \frac{c}{a}x_0|$.

$\frac{x_0^2}{a^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{x_0}{a} \leqslant 1 \Leftrightarrow -c \leqslant \frac{c}{a}x_0 \leqslant c$. Т.к. $c < a \Rightarrow -a \leqslant \frac{c}{a}x_0 \leqslant a$.

Значит, $\overline{|MF_1|} = |a + \frac{c}{a}x_0| = a + \frac{c}{a}x_0$, $\overline{|MF_2|} = |a - \frac{c}{a}x_0| = a - \frac{c}{a}x_0$.

$\overline{|MF_1|} + \overline{|MF_2|} = a + \frac{c}{a}x_0 + a - \frac{c}{a}x_0 = 2a \Rightarrow \forall$ точка, удовлетворяющая каноническому уравнению, принадлежит эллипсу.

Исследуем форму эллипса.



Рассмотрим каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Из него следует, что $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1 \Rightarrow |x| \leqslant a$. Аналогично $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \Rightarrow |y| \leqslant b$. Значит, эллипс ограничен прямоугольником, а его вершины имеют координаты $A_1(-a,0), A_2(a,0), B_1(0,-b), B_2(0,b)$.

Если точка $M_1(x,y)$ принадлежит эллипсу, то и точки $M_2(-x,y), M_3(x,-y), M_4(-x,-y)$ принаждлежат эллипсу $\Rightarrow$ эллипс симметричек относительно осей O_x и O_y, а точка O — **центр эллипса**.
Прямая, проходящая через фокусы — **большая ось эллипса**, а перпендикулярная — **малая ось эллипса**. a, b — полуоси.

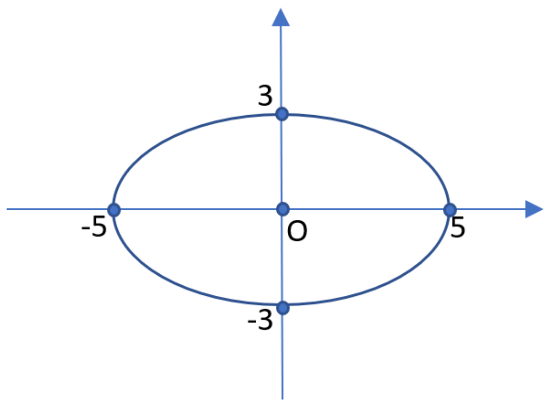
Рассмотрим 1-ю четверть, где $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Выразим из уравнения y: $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \Rightarrow$
$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Возьмём производную: $y' = \frac{-2bx}{2a\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} < 0 \Rightarrow y$ убывает.

Возьмём вторую производную: $y'' = -\frac{b}{a}(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + 2x(-1)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}^3}) = -\frac{b}{a}\frac{a^2-x^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}^3} =$
$\frac{-ba}{\sqrt{a^2-x^2}^3} < 0 \Rightarrow$ функция выпукла вверх. Аналогично можно рассмотреть эллипс в других четвертях.

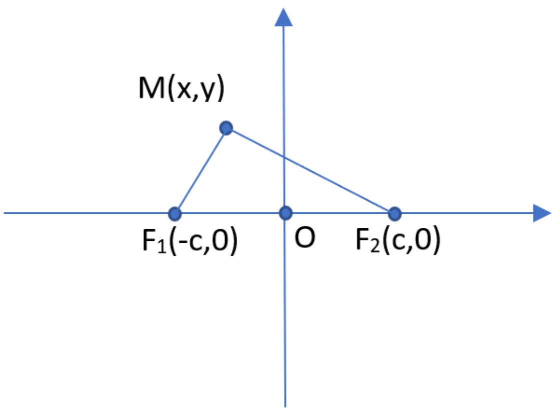
Пример: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1.$

$a^2=25 \Rightarrow a=5, b^2=9 \Rightarrow b=3.$



$\square$

2.2 Гипербола.



• ***Гипербола*** *— это множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (**фокусы**) есть величина постоянная и меньше, чем $\overline{|F_1F_2|}$.*

Рассмотрим упомянутые расстояния: $\overline{|MF_1|}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $\overline{|MF_2|} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. $|\overline{|MF_1|}-\overline{|MF_2|}|=2a<2c \Rightarrow a < c$.

$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$ — **уравнение гиперболы**.

Преобразуем данное уравнение. Раскроем модуль и перенесём второй корень в правую часть: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$. Возведём обе части в квадрат: $(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.
Расскрывая скобки и приведя подобные, получим $4xc=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Обе части можно поделить на 4: $xc=a^2\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.
Перенесём a^2 вправо и возведём ещё раз в квадрат: $x^2c^2+a^4+2a^2xc=a^2x^2+a^2c^2-2a^2xc+a^2y^2$. Приведя подобные и вынеся общие члены за скобки, получим $x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$.
Обозначим за $b=\sqrt{c^2-a^2}$ и сделаем замену: $x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$. Поделим всё на a^2b^2 и получим **каноническое уравнение гиперболы**:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Теперь покажем, что любая точка $M(x,y)$, удовлетворяющая каноническому уравнению, принадлежит гиперболе.

Из канонического уравнения $y^2 = (\frac{x^2}{a^2} - 1)b^2$. $\overline{|MF_1|} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + b^2\frac{x^2}{a^2} - b^2} = \sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + c^2\frac{x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + (\frac{cx}{a})^2 + 2xc} = |a + \frac{c}{a}x|$. Аналогичным образом $\overline{|MF_2|} = |a - \frac{c}{a}x|$.

Т.к. $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1 \Rightarrow x^2 \delta a^2 \Rightarrow$ имеем два случая

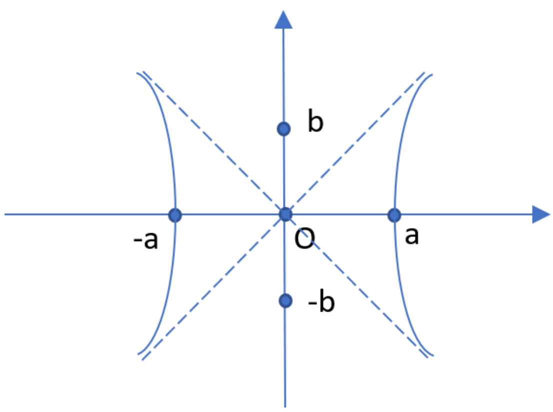
1. $x \leqslant a \Rightarrow \frac{x}{a} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{c}{a}x \geqslant c$. Но $c > a \Rightarrow \overline{|MF_1|} = a + \frac{c}{a}x, \overline{MF_2} = \frac{c}{a}x - a$ и $|\overline{|MF_1|} - \overline{|MF_2|}| = |a + \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x - a| = 2a$.
2. $x \leq -a \Rightarrow -\frac{x}{a} \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{c}{a}x \leqslant c > a \Rightarrow \overline{|MF_1|} = -a - \frac{c}{a}x, \overline{MF_2} = a - \frac{c}{a}x$ и $|\overline{|MF_1|} - \overline{|MF_2|}| = |-a - \frac{c}{a}x - a + \frac{c}{a}x| = 2a$.

Исследуем форму гиперболы.
Пересечения: точки $A_1(-a, 0)A_2(a, 0)$ — с осью O_x, а с осью O_y пересечений нет.
Гипербола симметрична относительно O_x и O_y (из-за квадратов в каноническом уравнении). Ось O_x — **действительная ось гиперболы** (на ней лежат точки F_1, F_2), ось O_y — **мнимая ось гиперболы**.
Середина $\overline{F_1F_2}$ — **центр гиперболы**. Точки A_1, A_2 — **вершины гиперболы**, a, b — **полюсы гиперболы**. Если $a = b$, то гиперболу называют **равносторонней**.

Рассмотрим гиперболу в первой четверти. $y^2 = (\frac{x^2}{a^2} - 1)b^2 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

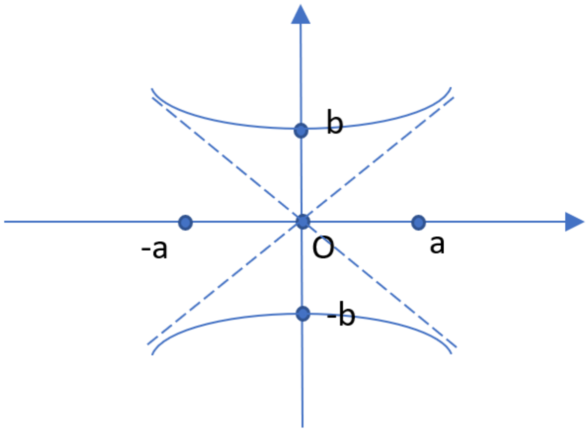
$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0 \Rightarrow y$ возрастает.

$y'' = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} - x - \frac{2x}{\frac{2}{\sqrt{x^2 - a^2}}}}{x^2 - a^2} \right) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{x^2 - a^2 - x^2}{(x - a)^2\sqrt{x^2 - a^2}} \right) = \frac{-ab}{(\sqrt{x^2 - a^2})^3} < 0 \Rightarrow$ функция выпукла вверх по y.



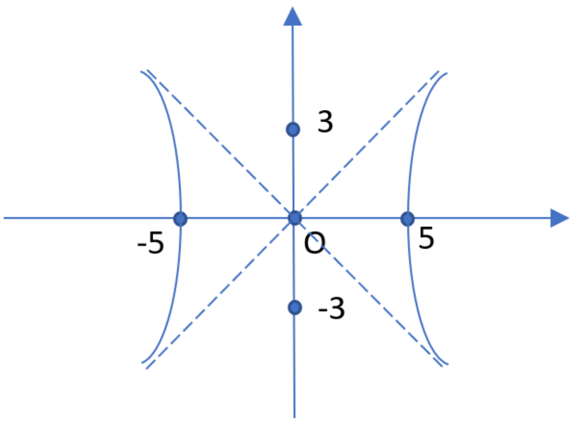
Асимптоты гиперболы должны удовлетворять формуле $y = kx + l$. $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}$.

$l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right) = 0 \Rightarrow$ асимптоты: $y = \frac{b}{a}x; y = -\left(\frac{b}{a}x\right)$.



Сопряженная гипербола. Её точки удовлетворяют каноническому уравнению $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Пример: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.
$a = 5, b = 3$. Асимптоты удовлетворяю уравнению $y = \pm\frac{3}{5}x$.



□

2.3 Эксцентриситет и директрисы эллипса и гиперболы.

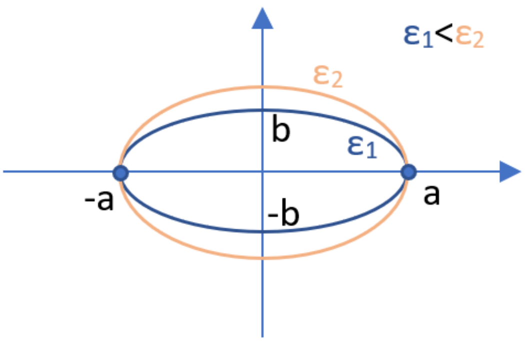
Вспомним формулы их двух прошлых параграфов:
$2c$ — растояние между фокусами.
Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > c, b = a^2 - c^2$.
Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ c > a, b = c^2 - a^2$.

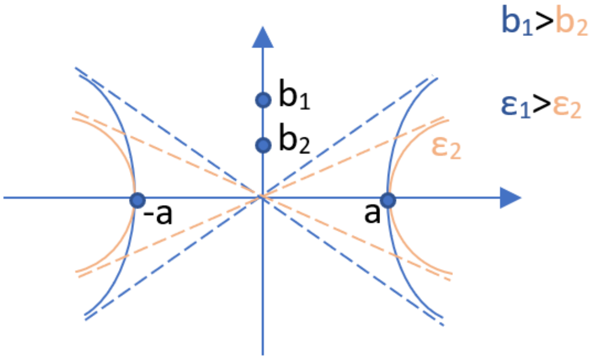
- ***Эксцентриситет*** *— величина, равная* $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Утверждение: *для эллипса* $c < a \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$.

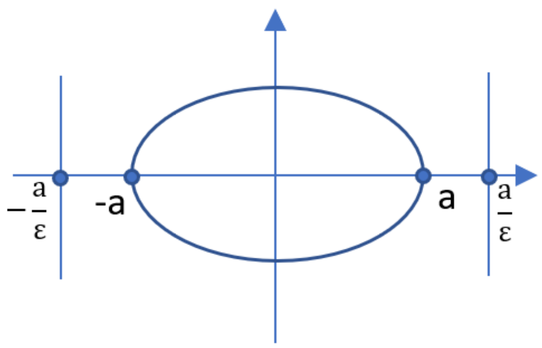
Для гиперболы $c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$.

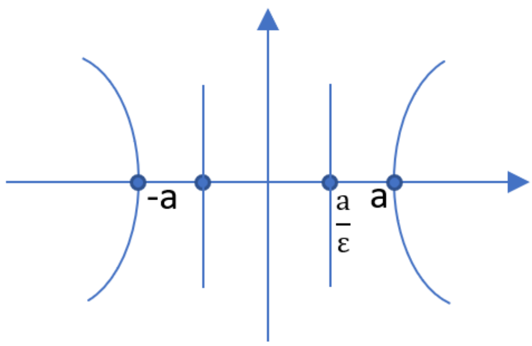
Чем больше эксцентриситет, тем уже эллипс (гипербола).





• ***Директрисы*** — *прямые, проходящие параллельно малой оси эллипса (мномой оси гиперболы) на расстоянии* $\dfrac{a}{\varepsilon}$ *от центра эллипса (гиперболы).*





• *Директриса и фокус, расположенные по одну сторону от* O_y*, называются* ***соответствующими****.*

$\rho(F_i, \Delta_i) = |c - \dfrac{a}{\varepsilon}|, i = \overline{1,2}; F_1(-c,0), F_2(c,0)$.

Теорема (основное свойство директрис). *Пусть* $M(x,y)$ *— любая точка эллипса/гиперболы. Тогда* $\varepsilon = \dfrac{\overline{|MF_i|}}{\rho(M,\Delta_i)}$*, где* Δ_i, F_i *— соответствующие.*

♦ Докажем для эллипса. Для гиперболы доказательство аналогичное. Достаточно рассмотреть оба случая ($i = 1$ и $i = 2$):

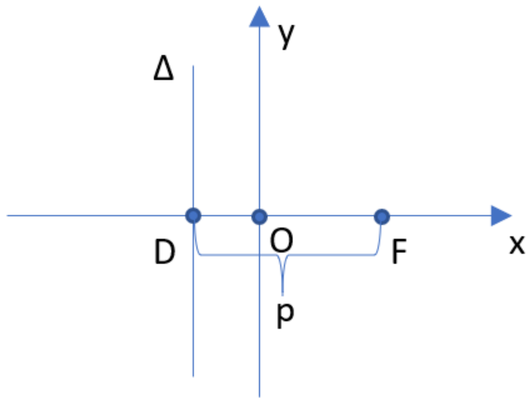
$$\frac{\overline{|MF_2|}}{M,\Delta_2)} = \frac{a-\varepsilon_x}{\frac{a}{\varepsilon}-x} = \varepsilon.$$

$$\frac{\overline{|MF_1|}}{M,\Delta_1)} = \frac{a+\varepsilon_x}{\frac{a}{\varepsilon}+x} = \varepsilon.$$

⊠

2.4 Парабола.

Пусть F — точка на плоскости (фокус). $F \notin \Delta$, где Δ — директриса.



- ***Парабола*** *— множество точек плоскости, каждая из которых равноудалена от F и от Δ.*

Введём обозначения. $p = \overline{|DF|}, F(\frac{p}{2}, 0), \Delta : x = -\frac{p}{2}, M(x, y)$ — точка, принадлежащая параболе, $\rho(M, \Delta) = \overline{|MF|}$.

$|x + \frac{p}{2}| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$ из определения параболы. Возведём обе части в квадрат: $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Rightarrow$

$$y^2 = 2px$$

— **каноническое уравнение параболы**.

Покажем, что любая точка $M_1(x_1, y_1)$, удовлетворяющая каноническому уравнению, принадлежит эллипсу.

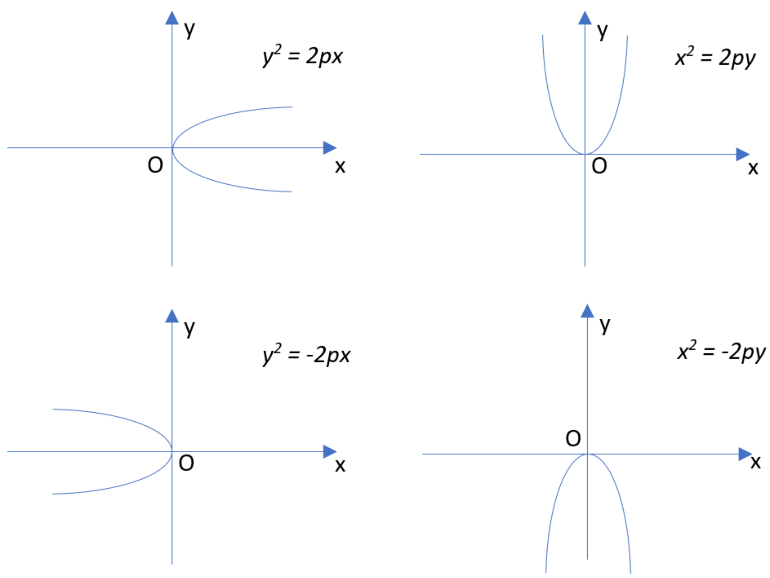
$\overline{|M_1F|} = \sqrt{(x_1 - \frac{p}{2})^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + \frac{p^2}{4} - 2px_1 - px_1} = \sqrt{x_1^2 + \frac{p^2}{4} + px_1} = \sqrt{(x_1 + \frac{p}{2})^2} = |x_1 + \frac{p}{2}| = \rho(M_1, \Delta) \Rightarrow \overline{|M_1F|} = \rho(M_1, \Delta)$.

Следствие. *1. $x \geqslant 0$ — парабола в <u>правой</u> полуплоскости;*

2. Если точка $M(x, y) \in$ параболе, то и $M'(x, -y) \in$ параболе;

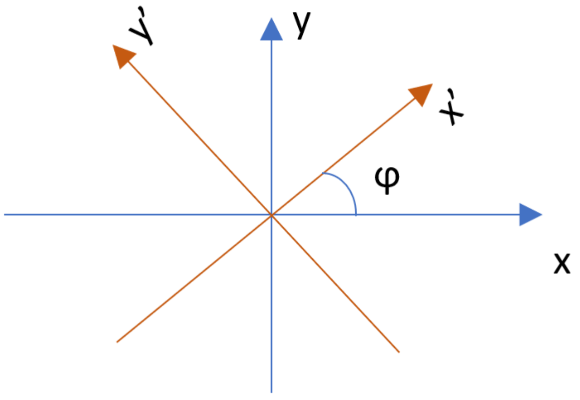
*3. Ось, проходящая через фокусы — **ось симметрии**;*

4. $y \geqslant 0 : y = \sqrt{px} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow y$ возрастает.



2.5 Линии второго порядка.

• ***Линии второго порядка*** *— это множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующему уравнению:* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, *где* A, B, C *не обращаются одновременно в нуль* $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.



Выведем некоторые линии второго порядка. Пусть $B \neq 0$ в Oxy. Преобразуем ДПСК Oxy в $O'x'y'$ поворотом на угол φ. Тогда

$$\begin{cases} x = x'cos\varphi - y'sin\varphi, \\ y = x'sin\varphi + y'cos\varphi. \end{cases}$$

Подставив всё в уравнение для линий второго порядка, получим
$A(x'cos\varphi - y'sin\varphi)^2 + 2B(x'cos\varphi - y'sin\varphi)(x'sin\varphi + y'cos\varphi) + C(x'sin\varphi + y'cos\varphi)^2 + 2D(x'cos\varphi - y'sin\varphi) + 2E(x'sin\varphi + y'cos\varphi) + F = 0$.
Расскроем скобки и сделаем следующие замены:

$$\begin{cases} A' = Acos^2\varphi + 2Bcos\varphi sin\varphi + Csin^2\varphi \\ B' = -Acos\varphi sin\varphi + B(cos^2\varphi - sin^2\varphi) + Csin\varphi cos\varphi \\ C' = Asin^2\varphi - 2Bsin\varphi cos\varphi + Ccos^2\varphi \\ D' = D(x'cos\varphi - y'sin\varphi) \\ E' = E(x'sin\varphi + y'cos\varphi) \\ F' = F \end{cases}$$

В итоге получим $A'x'^2 + 2Bx'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$.
Покажем, что A', B' и C' не обращаются в нуль одновременно от противного: пусть $A' = B' = C' = 0$. Тогда, рассмотрев первые три равенства в замене, сложим 1 и 3 уравнение и получим систему:

$$\begin{cases} Acos2\varphi + Bsin2\varphi = 0 \\ -Asin2\varphi + Bcos2\varphi = 0 \end{cases}$$

Найдём определитель методом крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} cos2\varphi & sin2\varphi \\ -sin2\varphi & cos2\varphi \end{vmatrix} = cos^2 2\varphi + sin^2 2\varphi = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & sin2\varphi \\ 0 & cos2\varphi \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} cos2\varphi & 0 \\ -sin2\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит $A = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0, B = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$.

Т.к. $B' = 0$, то $B(cos^2\varphi - sin^2\varphi) + (C - A)cos\varphi sin\varphi = 0 \Leftrightarrow Bcos2\varphi + \dfrac{C - A}{2}sin2\varphi = 0$. Отсюда получаем, что $tg2\varphi = \dfrac{2B}{A - C}$ — угол, на который нужно повернуть оси.

Если $A = C$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. При повороте на этот угол получаем новую систему координат.
Рассмотрим следующие случаи:

1. $A'C' \neq 0$.
$A'\Big((x')^2 + \dfrac{2D'}{A'}x' + (\dfrac{D'}{A'})^2\Big) - \dfrac{D'^2}{A'} + C'\Big((y')^2 + 2\dfrac{E'}{C'}y' + (\dfrac{E'}{C'})^2\Big) - \dfrac{E'^2}{C'} + F = 0.$

Преобразуем, чтобы получить квадраты сумм:

$$A'\Big(x' + \frac{D'}{A'}\Big)^2 + C'\Big(y' + \frac{E'}{C'}\Big)^2 + F - \frac{(D')^2}{A'} - \frac{(E')^2}{C'} = 0.$$

Сделаем замену: $\begin{cases} F' = F - \frac{(D')^2}{A'} - \frac{(E')^2}{C'}, \\ x'' = x' + \frac{D'}{A'}, \\ y'' = y' + \frac{E'}{C'}; \end{cases}$ — параметрический сдвиг координатных осей.

Получим $A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x'')^2}{-\frac{F'}{A'}} + \dfrac{(y'')^2}{-\frac{F'}{C'}} = 1.$

Если $-\dfrac{F'}{A'} > 0, -\dfrac{F'}{C'} > 0$, то заменив соответствующие дроби на a^2, b^2 получим $\dfrac{(x'')^2}{a^2} + \dfrac{(y'')^2}{b^2} = 1$ — эллипс.

Если $-\dfrac{F'}{A'} < 0, -\dfrac{F'}{C'} < 0$, то получим $\dfrac{(x'')^2}{a^2} + \dfrac{(y'')^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс.

Если же эти дроби разных знаков, то получим $\dfrac{(x'')^2}{a^2} - \dfrac{(y'')^2}{b^2} = 1$ — гипербола.

В итоге получили несколько линий 2-го порядка:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллипс;
3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гипербола;
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся прямых (точка);
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся прямых (точка);

Уравнение для прямых и мнимых прямых можно получить при условии, если $F' = 0$.
Тогда $A'(x'')^2 + C'(y'')^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

2. $A'C' = 0 \Rightarrow A' \neq 0, C = 0$.
$A'(x')^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0$. $A' \neq 0$.
$A'\Big((x')^2 + \dfrac{2D'}{A'}x' + (\dfrac{D'}{A'})^2\Big) - \dfrac{(D')^2}{A'} + 2E'y' + F = 0.$

Рассмотрим случай, когда $E' \neq 0$. Тогда $A'(x' + \dfrac{D'}{A'})^2 + 2E'(y' + \dfrac{F}{2E'} - \dfrac{(D')^2}{2E'A'}) = 0.$

Сделав замену $x'' = x' + \dfrac{D'}{A'},\ y'' = y' + \dfrac{F}{2E'} - \dfrac{(D')^2}{2E'A'}$ получим $A'(x'')^2 + 2E'y'' = 0 \Rightarrow$ $(x'')^2 = -\dfrac{2E'}{A'}y'' \Rightarrow [-\dfrac{2E'}{A'} = 2p] \Rightarrow (x'')^2 = 2py''$ — уравнение параболы.

Случай, когда $E' = 0$. Тогда $A'(x' + \dfrac{D'}{A'})^2 + F - \dfrac{D'^2}{A} = 0$. Заменим $F' = F - \dfrac{D'^2}{A}, x'' =$

$x' + \dfrac{D'}{A'}, y'' = y' \Rightarrow A'x''^2 + F' = 0 \Rightarrow x''^2 = -\dfrac{F'}{A'}.$

Если $-\dfrac{F'}{A'} > 0$, то $(x'')^2 = a^2 \Rightarrow x'' = \pm a$.

Если $-\dfrac{F'}{A'} < 0$, то $(x'')^2 = -a^2$. Если $-\dfrac{F'}{A'} \Rightarrow (x'')^2 = 0$.

В итоге получили:

6. $y^2 = 2px$ — парабола;

7. $x^2 - a^2 = 0$ — пара параллельных прямых;

8. $x^2 + a^2 = 0$ — пара мнимых параллельных прямых;

9. $x^2 = 0$ — пара пересекающихся прямых.

Теорема. *Для любой линии второго порядка существует система координат, в которой эта линия определена одним из следующих канонических уравнений:*

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *— эллипс;*
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ *— мнимый эллипс;*
3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *— гипербола;*
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ *— пара мнимых пересекающихся прямых (точка);*
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ *— пара пересекающихся прямых (точка);*
6. $y^2 = 2px$ *— парабола;*
7. $x^2 - a^2 = 0$ *— пара параллельных прямых;*
8. $x^2 + a^2 = 0$ *— пара мнимых параллельных прямых;*
9. $x^2 = 0$ *— пара пересекающихся прямых.*

Пример: Определить, какая линия второго порядка задана уравнением и нарисовать её на плоскости: $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$.
$A = 1, C = -4, 2B = -12$.
Найдём угол φ, на который нужно повернуть ДПСК:
$tg2\varphi = \dfrac{2B}{A - C} = -\dfrac{12}{5}$. Из тригонометрии: $tg2\varphi = \dfrac{2tg\varphi}{1 - tg^2\varphi}$. Заменим $tg\varphi = t$.
$\dfrac{2t}{1 - t^2} = -\dfrac{12}{5} \Rightarrow \dfrac{t}{1 - t^2} = -\dfrac{6}{5}$.
$6t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{5 + 13}{12} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow tg\varphi\dfrac{3}{2}$.
От сюда: $sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{13}}, cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$
Делаем замену, переходя к новой ДПСК:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x' - 3y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') \end{cases}$$

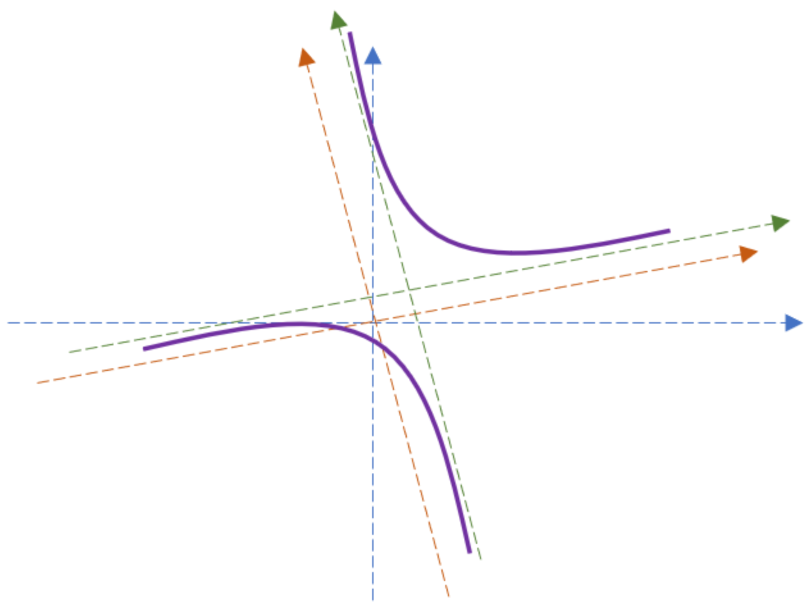
Подставляем:

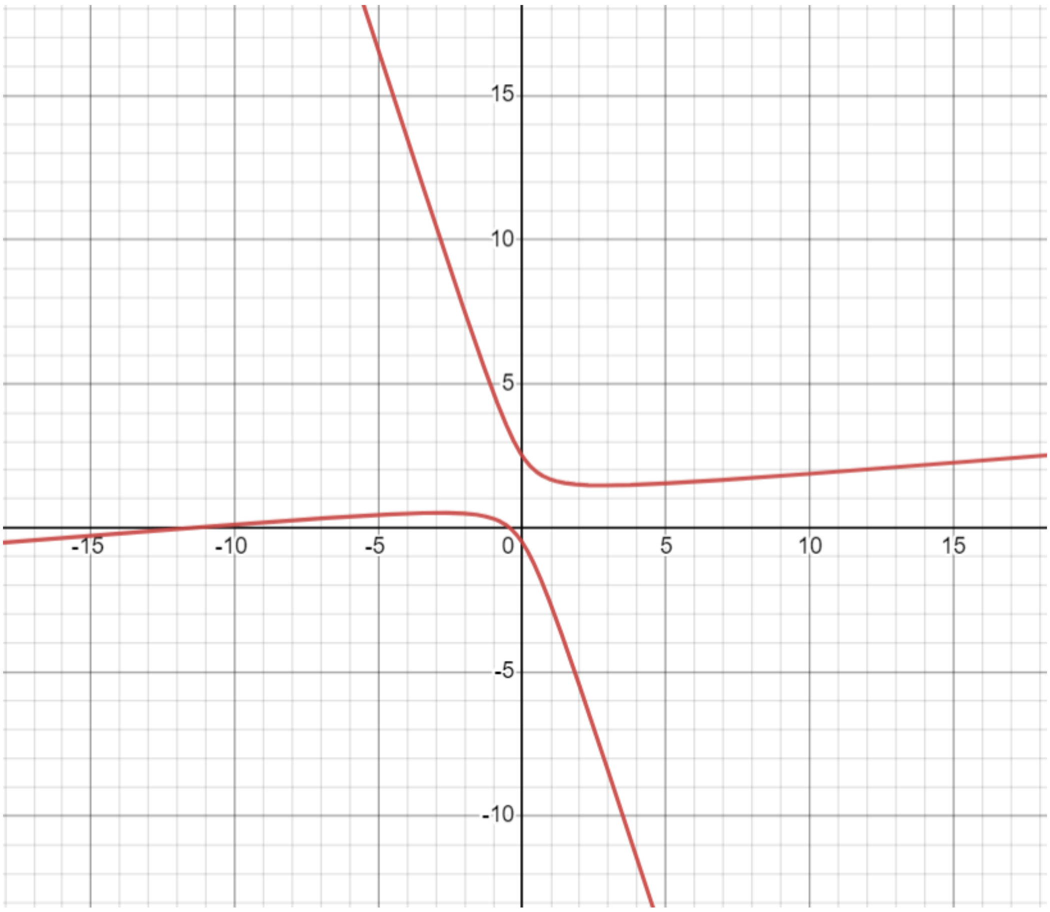
$$\frac{1}{13}(4x'^2 - 12x'y' + 9y'^2) - \frac{12}{13}(6x'^2 - 6y'^2 - 5x'y') - \frac{4}{13}(9x'^2 + 12x'y' + 4y'^2) + \frac{12}{\sqrt{13}}(2x' - 3y') + \frac{8}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') + 5 = 0$$

Задача была получить 0 перед $x'y'$. Проверим, найдя коэффициенты перед множителями:

$x'^2: \frac{4}{13} - \frac{72}{13} - \frac{36}{13} = -8$
$y'^2: \frac{9}{13} + \frac{72}{13} - \frac{16}{13} = 5$
$x'y': -\frac{12}{13} + \frac{60}{13} - \frac{48}{13} = 0$
В итоге получили: $-8x'^2 + 5y'^2 + \frac{48}{\sqrt{13}}x' - \frac{20}{\sqrt{13}}x' - \frac{20}{\sqrt{13}}y' + 5 = 0$.
Теперь сделаем ещё одно преобразование ДПСК: параллельный перенос (таким образом, мы избавимся от x' и y', оставив только x'^2 и y'^2).
Преобразуем: $-8(x'^2 - \frac{6}{\sqrt{13}}x' + \frac{9}{13}) + \frac{72}{13} + 5(y'^2 - \frac{4}{\sqrt{13}}y' + \frac{4}{13}) - \frac{20}{13} + 5 = 0 \Leftrightarrow -8(x' - \frac{3}{\sqrt{13}})^2 + 5(y' - \frac{2}{\sqrt{13}})^2 + 9 = 0$
Делаем замену, переходя к новой ДПСК:
$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{3}{\sqrt{13}} \\ y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$
Подставляем:
$-8x''^2 + 5y''^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{\frac{9}{8}} - \frac{y''^2}{\frac{9}{5}} = 1$ — гипербола.

$a^2 = \frac{9}{8}, b^2 = \frac{9}{5}$
Некоторые точки искомой линии второго порядка: $(2, 3), (-3, 2)$.
На рисунке преобразованные ДПСК отмечены так: синия — изначальная, оранжевая — после поворота, зелённая — после параллельного переноса. Сама линия 2-го порядка (гипербола) нарисована фиолетовым. Иллюстрация примерная (более точный график был сделал в десмосе ниже).





□

2.6 Поверхности второго порядка.

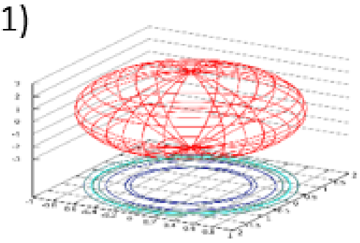
• ***Поверхность второго порядка*** *— множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению следующего вида:* $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a23_yz + 2a_1x + 2a_2y_2a_3z + a = 0$.

Теорема. *Для любой поверхности второго порядка существует пространтсвенная ДПСК в которой эта поверхность определена одним из следующих канонических уравнений:*

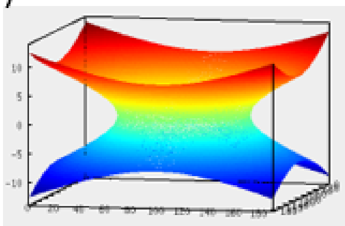
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *— эллипсоид;*
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ *— мнимый эллипсоид;*
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *— однополостной гиперболоид;*
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ *— двуполостной гиперболоид;*
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ *— конус второго порядка;*
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ *— мнимый конус второго порядка;*
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ *— эллиптический параболоид;*
8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ *— гиперболический параболоид;*
9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *— эллиптический цилиндр;*

10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — *мнимый эллиптический цилиндр;*
11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — *гиперболический цилиндр;*
12. $y^2 = 2px$ — *параболоический цилиндр;*
13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *пара пересекающихся плоскостей;*
14. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *пара мнимых пересекающихся плоскостей;*
15. $x^2 - a^2 = 0$ — *пара параллельных плоскостей;*
16. $x^2 + a^2 = 0$ — *пара мнимых параллельных плоскостей;*
17. $x^2 = 0$ — *пара совпадающих плоскостей.*

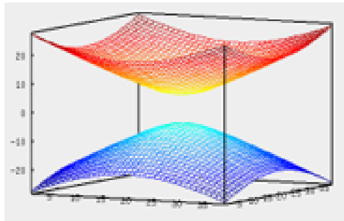
(1)



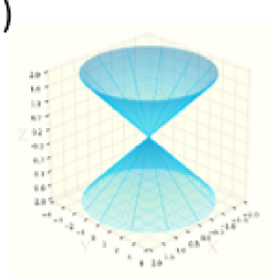
(3)



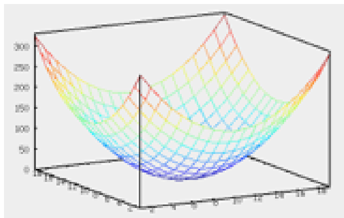
(4)



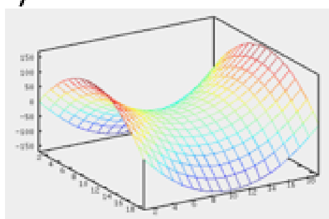
(5)



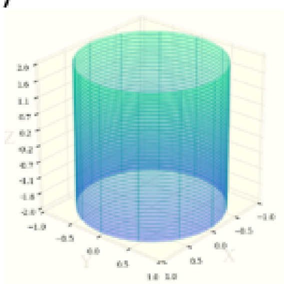
(7)



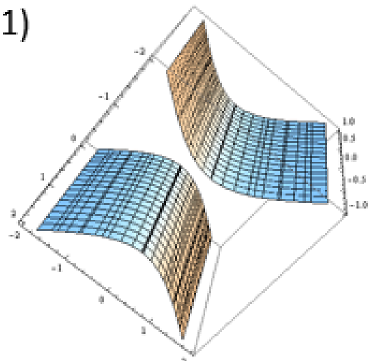
(8)



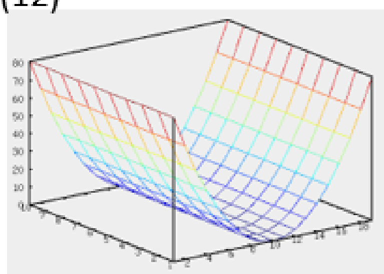
(9)



(11)



(12)



Часть II

Основы высшей алгебры

Глава 3

Комплексные числа.

3.1 Понятие комплексного числа. Арифметические операции с комплексными числами.

• ***Комплексным числом*** *называют выражение вида $z = a+bi$, где a, b — действительные числа, а i — символ, называемый* ***мнимой единицей****.*

Пример: $i^2 = -1$, $z = 3+2i$ — комплексное число, $a = 3, b = 2$. □

$a = Rez$ — **действительная часть комплексного числа**.
$b = Imz$ — **мнимая часть комплексного числа**.

• *Комплексное число, у которого действительная часть равна нулю, называется* ***чисто мнимым****. Комплексное число, у которого мнимая часть равна нулю —* ***действительное число****.*

• *Пусть есть два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$. Они называются* ***равными****, если их действительные и мнимые части равны ($a_1 = a_2, b_1 = b_2 \Rightarrow z_1 = z_2$).*

• ***Суммой двух компексных чисел*** z_1 ***и*** z_2 *называется комплексное число $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ (т.е. складываются действительные и мнимые части).*

Свойства суммы комплексных чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(коммутативность).*
   ⧫ $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i = z_2 + z_1$. ⊠
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(ассоциативность).*
3. *(Введение разности комплексных чисел)* $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$. *Следует из суммы:* $z + z_2 = z_1 \Rightarrow z_1 - z_2 = z$.

Введём произведение комплексных чисел: $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i = z$ — **произведение двух комплексных чисел** z_1 **и** z_2.

Свойства произведения комплексных чисел:

1. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ *(коммутативность).*
2. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ *(ассоциативность).*

3. $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ *(дистрибутивность относительно сложения).*

• *Пусть $z = a + bi$. Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется* ***сопряжённым*** *комплексным числом к комплексному числу z (равны действительные части, а мнимые отличаются на знак).*

Введём деление комплексных чисел: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$ = [домножим на сопряженное знаменателю] = $\dfrac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2)} = \dfrac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}$

Пример: Пусть $z_1 = 2-3i, z_2 = -3+7i$.
$z_1 + z_2 = -1 + 4i$;
$z_1 - z_2 = 5 - 10i$;
$z_1z_2 = (2-3i)(-3+7i) = -6+14i+9i+21 = 15+23i$;
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2-3i}{-3+7i} = \dfrac{(2-3i)(-3-7i)}{(-3+7i)(-3-7i)} = \dfrac{-6-14i+9i-21}{9+49} = \dfrac{-27-5i}{58}$. □

Свойства сопряжённых комплексных чисел:

1. $z + \overline{z} = 2Rez = 2a; z - \overline{z} = 2iImz = 2bi.$

2. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

   ♦ $\Rightarrow) z = \overline{z} \Rightarrow z - \overline{z} = 0 \Rightarrow 2iImz = 0 \Rightarrow Imz = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

   $\Leftarrow) z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = a, \overline{z} = a \Rightarrow z = \overline{z}.$ ⊠

3. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$

   ♦ Пусть $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2+b_2i$. $z_1+z_2 = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i. \overline{z_1+z_2} = (a_1+a_2) - (b_1+b_2)i = (a_1-b_1i)+(a_2-b_2i) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$. С вычитанием аналогично. ⊠

4. $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\overline{z_2}.$

5. $\overline{(\dfrac{z_1}{z_2})} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$

3.2 Извлечение корня из комлпексного числа.

Пусть z — некоторое комплексное число.

• ***Корнем n-ой степени из комплексного числа*** *z называется число z_0 такое, что z_0 в степени n равно Самому комплексному числу z. То есть $z_0^n = z$.*

Теорема. *Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$ всегда возможно и, при $z \neq 0$, даёт ровно n различных значений:*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = 0, \dots, n-1,$$

где $\sqrt[n]{\rho}$ — действительное положительное число, n-ая степень которого равна ρ.

Пример: Извлечение квадратного корня из комплексного числа.
Пусть $z = a + bi$, $z_0 = \sqrt{z}$, то есть $z_0^2 = z$, $z_0 = a_0 + b_0i$.

Тогда $(a_0+b_0i)^2 = a_0^2+2a_0b_0i-b_0^2 = a+bi$. Следовательно, получаем систему $\begin{cases} a_0^2 - b_0^2 = a, \\ 2a_0b_0 = b; \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_0^4 - 2a_0^2 b_0^2 i - b_0^4 = a^2, \\ 4a_0^2 b_0^2 = b^2; \end{cases} \Rightarrow (a_0^2 + b_0^2)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a_0^2 - b_0^2 = a, \\ a_0^2 + b_0^2 = \sqrt{a^2 + b^2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) > 0, \\ b_0^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) > 0. \end{cases} \qquad \square$$

Глава 4

Алгебраические структуры

4.1 Бинарные отношения.

Пусть X и Y — непустые множества.

• *Множество $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ называется **декартовым произведением** X на Y.*

Пример: Пусть $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3\}$. Тогда $X \times Y = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$. В свою очередь $Y \times X = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2)\}$. □

Возьмём $Y = X$.

• *Декартовое произведение $X^2 = X \times X = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in X\}$ называется **декартовым квадратом**.*

Пример: Возьмём множество X из предыдущего примера.
Тогда $X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. □

• *Любое подмножество декартового квадрата является **бинарным отношением**, определенным на $\sigma \subset X^2$.*

Пример: Если $(x, y) \in \sigma$, то $[\dfrac{x}{y} = \sigma] \Longleftrightarrow x\sigma y$.
Если множество L — прямые, то L^2 — пары прямых. Тогда если $\sigma = ||$ и $|| \subset L^2$, то $(\Delta_1, \Delta_2) \in || \Longleftrightarrow \Delta_1 || \Delta_2$. □

• *Бинарное отношение $\sigma \subset X^2$ называется **отношением эквивалентности**, если выполняются условия*

1. $\forall x \in X \quad x\sigma x$ $((x, x) \in \sigma)$ — ***рефлексивность***.
2. $x\sigma y, y\sigma z \Rightarrow x\sigma z$ $((x, y) \in \sigma$ и $(y, z) \in \sigma \Rightarrow (x, z) \in \sigma)$ — ***транзитивность***.
3. $x\sigma y \Rightarrow y\sigma x$ $((x, y) \in \sigma \Rightarrow (y, x) \in \sigma)$ — ***симметричность***.

Обозначение: $\sim$ (например $x \sim y$).

Пример: Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Тогда
$\sigma = \{(1, 1)\}$ — нет рефлексивности.

$\sigma = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3)\}$ — нет симметричности.
$\sigma = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$, $(2,1),(1,3) \Rightarrow (2,3) \in \sigma$ — ?!, нет транзитивности. □

• *Подмножество $\overline{x} = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$ множества X при $x \in X$ называется* ***классом эквивалентности элемента*** *x. Любой элемент $x' \in \overline{x}$ называется* ***представителем класса*** *$\overline{x}$.*

Лемма. $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \overline{x}_1 = \overline{x}_2,\ x_1, x_2 \in X$.

♦ $\Rightarrow$) $x_1 \sim x_2 \Rightarrow$ возьмём произвольный $x \in \overline{x}_1 \Rightarrow x \sim x_1, x_1 \sim x_2 \Rightarrow x \sim x_2 \Rightarrow x \in \overline{x}_2 \Rightarrow \overline{x}_1 = \overline{x}_2$.

$\Leftarrow$) $\overline{x_1} = \overline{x_2}$. Возьмем $x_1 \in \overline{x_1}$ и $x_2 \in \overline{x_2} \Rightarrow x_1 \in \overline{x_2} \Rightarrow x_1 \sim x_2$. ⊠

• *Если X представимо в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств ($X = \bigcup x_i,\ x_i \cup x_j = \varnothing$), то данное множество* ***разбивается на эти подмножества****.*

Теорема. *Пусть на множестве X задано бинарное отношение эквивалентности, тогда X разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности.*

♦ $\forall x \in X, x \in \overline{x} \subset X, X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in X} \overline{x} \subset X$. С другой же стороны $X = \bigcup\limits_{x \in X} \overline{x}$.

Покажем, что два класса эквивалентности $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ не пересекаются или совпадают ($\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ или $\overline{x}_1 \cap \overline{x}_2 = \varnothing$):
Пусть $\overline{x}_1 \cap \overline{x}_2 \neq \varnothing$. Тогда найдется $x \in \overline{x}_1 \in \overline{x}_2 \Rightarrow x \in \overline{x}_1, x \in \overline{x}_2 \Rightarrow x \sim x_1, x \sim x_2 \Rightarrow [x_1 \sim x, x_2 \sim x \Rightarrow x_1 \sim x_2] \Rightarrow$ если $x_1 \sim x_2$, то $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ по лемме. ⊠

• *Бинарное отношение σ на множестве X называется* ***отношением порядка****, если выполняются условия*

1. $\forall x \in X \quad x\sigma x$ — ***рефлексивность***.
2. $x\sigma y, y\sigma z \Rightarrow x\sigma z$ — ***транзитивность***.
3. $x\sigma y \Rightarrow x = y$ — ***антисимметричность***.

Обозначение: $\leqslant$ (например $x \leqslant y$).

Пример: Пусть $X = \{1,2\}$. Тогда
$\sigma = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$ — нет антисимметричности.
$\sigma = \{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ — отношение порядка. □

4.2 Отображения.

Пусть X, Y — некоторые непустые множества.

• *Определено однозначное* ***отображение*** *множества X на множество Y, если каждому элементу из множества X соответствует единственный элемент из множества Y. Обозначение: $f\colon x \to Y\ x \in X$ или $f : x \mapsto y\ f(x) = y$.*

• *Если отображение f элемент x ставит в соответствие элементу y, то говорят, что y — **образ** элемента x, а x — **прообраз** элемента y. Обозначение: $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ — полный прообраз элемента y; $\{f(x) \mid \forall x \in X\} = Imf = f(X) \subset Y$ — образ x при f.*

• *Отображение $f : X \to Y$ называется **инъективным**, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$.*

• *Отображение $f : X \to Y$ называется **сюръективным**, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$.*

• *Отображение $f : X \to Y$ называется **биективным**, если оно инъективно и сюръективно (взаимнооднозначное соответствие).*

• *Два отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon X' \to Y'$ называются **равными**, если $X = X'$, $Y = Y'$ и $\forall x \in X\ f(x) = g(x)$.*

Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторое отображение. $X' \subset X$. Тогда

• *Отображение $g\colon X' \to Y'$ называется **ограничением (сужением) отображения** f на множестве X', если $\forall x \in X'\ g(x) = f(x)$. Обозначение: $f|_{X'}$. Само же отображение $f : X \to Y$ называется **продолжением отображения** g на множестве X.*

Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Тогда

• *Отображение $g \circ f : X \to Z$ которое работает так, что $\forall x \in X\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$, называется **композицией отображений** g и f.*

Пример: Пусть $f(x) = sinx,\ g(x) = x^2 + x + 1$. Тогда
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(sinx) = sin^2x + sinx + 1$;
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x + 1) = sin(x^2 + x + 1)$.
Из полученного выше следует, что $f \circ g \neq g \circ f$. □

Композиция отображений обладает свойством **ассоциативности**, то есть выражение $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ верно. Докажем это:
$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$;
$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$.

Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и $h = g \circ f$. Тогда*

1. *если f и g инъективны, то h инъективно;*
2. *если f и g сюръективны, то h сюръективно;*
3. *если f и g биективны, то h биективно.*

♦

1. Пусть f и g — инъекции, тогда $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow h$ инъективно, так как $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = h(x_1)$, $(g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = h(x_2)$, $h(x_1) \neq h(x_2)$.
2. Пусть f и g — сюръекции. Тогда, т.к. g — сюръекция $\forall z \in Z \exists y \in Y : g(y) = z$. А так как f — сюръекция, то $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y \Rightarrow \forall z \in Z\ \exists x : h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ — сюръекция.

3. Биективность вытекает из двух предыдущих пунктов.

$\boxtimes$

• *Отображение $e_x : X \to X$ такое, что $\forall x \in X$ $e_x(x) = x$ называется **тождественным отображением** множества X.*

Пусть $f : X \to Y$ — некоторое отображение.

• *Отображение $g : Y \to X$ называется **обратным** для отображения f, если $g \circ f = e_x$, $f \circ g = e_y$.*

Пример: Пусть $f(x) = lnx, g(x) = e^x$. Тогда $f(g(x)) = f(e^x) = lne^x = x = g(f(x)) = e^{lnx} = x$. $\square$

Теорема. *Отображение $f : X \to Y$ имеет обратное $\iff$ оно биективно.*

4.3 Бинарная алгебраическая операция.

Пусть X — некоторое непустое множество.

• *Отображение $f : X^2 \to X$, действующее так, что $(a, b) \mapsto c \forall a, b \in X^2, c \in X$ называется **бинарной алгебраической операцией.***
Обозначается $f : (a, b) \mapsto c$ или $f(a, b) = c$.

Для произвольной алгебраической операции $a * b = c$, где $*$ — символ символ (они могут выглядеть по-разному: $+, -, \cdot$ и так далее).

• *Множество X с определенной на нем алгебраической операцией $*$ является **алгебраической структурой**. Обозначается $(X, *)$.*

Пример: $(N, \cdot), (N, +)$ — две разные алгебраические структуры. $\square$

• *Алгебраическая операция $*$ называется*

1. ***ассоциативной,** если $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$;*
2. ***коммутативной,** если $x * y = y * x \quad \forall a, b$.*

Пример: Для структуры $(R, +)$ операция $+$ ассоциативна, т.к. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
Для структуры $(R, -)$ операция $-$"не ассоциативна, т.к. $a - (b - c) \neq (a - b) - c$.
Также операция $+$ является коммутативной в отличие от операции $-$. $\square$

• *Элемент $n \in X$ называется **нейтральным** элементом в X относительно операции $* \iff n * x = x * n = x \quad \forall x \in X$.*

Пример: Рассмотрим несколько структур их нейтральные элементы:
$(R, +)$, $n = 0 \quad x + 0 = 0 + x = x$;
$(R, \cdot)$, $n = 1 \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;
$(R, -)$, $\nexists n \quad x - n \neq n - x \neq x$. $\square$

Теорема. *Структура $(X, *)$ имеет не больше одного нейтральгого элемента.*

⧫ От противного. Пусть $\exists n_1, n_2 : n_1 \neq n_2$. Тогда $n_1 * n_2 = n_1$, $n_2 * n_1 = n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$, что является противоречием. ⊠

Пусть $(X, *)$, $\exists n \in X$.

• *Элемент $x' \in X$ называется* ***симметричным*** *для элемента $x \in X$ относительно операции $*$, если $x' * x = x * x' = n$.*

Теорема. *Если в $(X, *)$ операция $*$ ассоциативна и $\exists n \in X$, то $\forall a \in X$ может существовать не более одного симметричного элемента.*

⧫ От противного. Пусть $\exists a \in X : \exists a', a''$ Тогда $a' * a = a * a' = n$, $a'' * a = a * a'' = n \Rightarrow$ $a' = a' * n = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = n * a'' = a'' \Rightarrow a' = a''$. ⊠

Рассмотрим некоторые операции и их характеристику:

Операция	Аддитивная запись	Мультипликативная запись
Знак	$+$	$\cdot$
Название	сложение	умножение
Результат	сумма	произведение
Нейтральный элемент	0	1
Симметричный элемент	$-x$ (противоположный)	x^{-1} (обратный)

Глава 5

Многочлены

5.1 Кольцо многочленов.

Пусть P — некоторое поле.

• *Выражение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $\alpha_i \in P, i = \overline{0,n}$ называется* ***многочленом над полем*** *P. Обозначение: $f(x)$. При этом элементы a_i называются* ***коэффициентами многочлена****, x —* ***переменными многочлена****, $a_i x^i$ —* ***членом многочлена****. Число n называется* ***степенью многочлена****, если $a_n \neq 0$, а $a_i = 0 \forall i > n$. Обозначение: $n = deg\ f(x)$. При этом коэффициент a_n называется* ***старшим*** *коэффициентом, а a_0 — свободным членом.*

Пример: Пусть $f(x) = 5x^2 + 3x + 7$. Тогда $deg\ f(x) = 2$, $a_2 = 5$, $a_1 = 3$, $a_0 = 7$. □

• *Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то многочлен называется* ***нулевым многочленом****. Степень нулевого многовлена не определена.*

• Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются равными $\iff deg\ f(x) = deg\ g(x)$ и равны коэффициенты при соответствующих степенях x.

Множество всех многочленов над полем P от переменной x обозначается как $P[x]$.

Пример: Множества $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$ — множества всех многочленов от переменной x с действительными и комплексными коэффициентами соответственно. □

Рассмотрим два многочлена:
$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ deg\ f(x) = n,\ a_n \neq 0,$
$g(x) = b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0,\ deg\ g(x) = k,\ n \geqslant k.$

• ***Суммой многочленов*** *$f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен вида $(f+g)(x) = c_n x_n + \ldots + c_1 x + c_0,\ c_i = a_i + b_i \forall i = \overline{0,n},\ c_i = a_i \forall i = \overline{k+1,n}.$*
$deg\ (f+g)(x) \leqslant max\{deg\ f(x),\ deg\ g(x)\}.$

• ***Произведением многочленов*** *$f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен вида $f(x)\cdot g(x) = d_{n+k}x^{n+k} + \ldots + d_1 x + d_0,\ d_i = \sum_{s+l=i} a_s b_l,\ i = \overline{0,n+k}.$*
$deg\ (f(x)\cdot g(x)) = deg\ f(x) + deg\ g(x),\ d_{n+k} = \sum_{s+l=n+k} a_s b_l = \underset{\neq 0}{a_n}\underset{\neq 0}{b_k}.$

Теорема. *Множество $P[x]$ является ассоциативным, коммутативным кольцом с еди-*

ницей относительно операции сложения и умножения многочленов.

♦ Пусть $f(x), g(x) \in P[x]$. Тогда $f(x) + g(x) \in P[x], f(x) \cdot g(x) \in P[x]$.

Рассмотрим множество $P[x]$ относительно операции $+$ и докажем аксиомы кольца.

1. $f(x)+g(x) = (a_n+b_n)x^n+\ldots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0) = (b_n+a_n)\cdot x^n+\ldots+(b_1+a_1)x+(b_0+a_0) = g(x)+f(x)$. Значит, операция коммутативна.
2. $(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$. Значит, операция ассоциативна.
3. Пусть $n(x) = 0$. Тогда $f(x)+0(x) = (a_n+0)x^n+(a_1+0)x+a_0+0 = f(x)$. Значит, суещствует нейтральный элемент.
4. $f(x) = a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$.
   $-f(x) = -a_nx^n-\ldots-a_1x+a_0 \Rightarrow f(x)+(-f(x)) = 0$. Значит, для произвольного элемента суещствует обратный.
5. $(f(x)+g(x))h(x) = f(x)h(x)+g(x)h(x) \Rightarrow P[x]$ — кольцо. Проверим операцию умножения:
   $f(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot f(x)$;
   $(f(x)\cdot g(x))h(x) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))$;
   $f(x) = 1 \Rightarrow f(x)g(x) = g(x)$. Обратного элемента не существует, следовательно множество является кольцом, но не является полем.

⊠

Свойства кольца многочленов:

1. *В кольце многочленов не существует делителей нуля.*

   ♦ Пусть $f(x) \neq 0$, $a \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда $f(x)\cdot g(x) \neq 0$, $a\cdot b \neq 0$. ⊠
2. **Закон сокращения:** $f(x)h(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

   ♦ $f(x)h(x)-g(x)h(x) = 0 \Rightarrow \underset{\neq 0}{h(x)}(f(x)-g(x)) = 0 \Rightarrow f(x)-g(x) = 0 \Rightarrow$ так как в кольце нет делителей нуля, $f(x) = g(x)$. ⊠
3. $\exists f^{-1} \iff f(x) = a \neq 0$.

   ♦ $\Rightarrow$) Пусть $\exists f^{-1}(x) : f^{-1}(x)\cdot f(x) = 1$.
   $deg\ (f^{-1}(x)\cdot f(x)) = deg\ f^{-1}(x) + deg\ f(x) = 0 \Rightarrow deg\ f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = a$.

   $\Leftarrow$) Пусть $f(x) = a \neq 0$. Тогда $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}$. ⊠

Глава 6

Матрицы и определители

6.1 Определитель матрицы.

Пусть дана квадратная матрица $A \in P_{n,n}$. *Число* $detA = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}$ *называется* ***определителем матрицы*** A.

Пример:
1) $n = 1, A = (a_{11}), \delta_1 = (1)$
2) $n = 2, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \delta_2 = (1, 2), (2, 1)$
3) $n = 3, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \delta_2 = (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 2)$. $detA = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$.

У диагональной матрицы определитель равен произведению диагональных элементов, а определитель единичной матрицы равен 1. □

Свойства определителя:

1. *Если матрица* B *получена из матрицы* A, *поменяв местами две строки, то* $detB = -detA$.

   ♦ Поменяем строки с номерами s, k и $s < k$. Тогда $\forall j : a_{sj} = b_{kj}, a_{kj} = b_{sj}, a_{ij} = b_{ij} \forall j \neq s, i \neq k$.

   По определению $detA = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot \dots \cdot a_{s\alpha_s} \cdot \dots \cdot a_{k\alpha_k} \cdot a_{n\alpha_n} = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} b_{1\alpha_1} \cdot \dots \cdot b_{k\alpha_s} \cdot \dots \cdot b_{s\alpha_k} \cdot b_{n\alpha_n} = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha_1 \dots \alpha_k \dots \alpha_s \dots \alpha_n)} b_{1\alpha_1} \cdot \dots \cdot b_{s\alpha_s} \cdot \dots \cdot b_{k\alpha_k} \cdot b_{n\alpha_n} = -detB$ (т.е. поменялась чётность перестановки). ⊠

2. *Если матрица содержит две одинаковые строки, то её определитель равен нулю.*

   ♦ $detA = -detA$ (по первому свойству). ⊠

3. *Если любую строки матрицы* A *умножить на скаляр* $\lambda \in P$, *то получится матрица* B: $detB = \lambda detA$.

   ♦ $A = (a_{ij}) \in P_{n,n}, B = (b_{ij}) \in P_{n,n}$. Пусть мы умножили k-ю строку матрицы A и получили матрицу $B \Rightarrow b_{kj} = \lambda a_{kj} \forall j = \overline{1, n}, b_{ij} = a_{ij} \forall i \neq k$.

Тогда $detB = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} b_{1\alpha_1} \cdot ... \cdot b_{k\alpha_k} \cdot ... \cdot b_{n\alpha_n} =$ [заменим на элементы матрицы $A] = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot ... \cdot \lambda a_{k\alpha_k} \cdot ... \cdot a_{n\alpha_n} = \lambda \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot ... \cdot a_{k\alpha_k} \cdot ... \cdot a_{n\alpha_n} = \lambda detA$.
⊠

Следствие. *Если матрица содержит нулевую строку, то её определитель равен нулю.*

Следствие. $\forall A \in P_{n,n} : det(\lambda A) = \lambda^n detA$.

Следствие. *Если матрица содержит две пропорциональные строки, то её определитель равен нулю.*

4. $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a'_{k1} + a''_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a'_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a''_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$$

   ♦ $\Delta = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot ... \cdot (a'_{k1} + a''_{kn}) ... \cdot a_{n\alpha_n} = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot ... \cdot a'_{k1} ... \cdot a_{n\alpha_n} + \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot ... \cdot a''_{kn} ... \cdot a_{n\alpha_n} = \Delta_1 + \Delta_2$. ⊠

5. *Определитель матрицы не изменится, если к любой его строке прибавить другую, умноженную на произвольный элемент поля P.*

   ♦ $A = (a_{ij} \in P_{n,n} \lambda \in P) \Rightarrow detB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + \lambda a_{s1} & a_{k2} + \lambda a_{s2} & \dots & a_{kn} + \lambda a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

   $$detB = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{k1} + \lambda a_{s1} & a_{k2} + \lambda a_{s2} & ... & a_{kn} + \lambda a_{sn} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = [4] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ \lambda a_{s1} & \lambda a_{s2} & ... & \lambda a_{sn} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   Второй определитель равен нулю, т.к. имеет 2 пропорциональные строки. ⊠

6. *Определитель матрицы при транспонировании не меняется.*

   ♦ $A = (a_{ij}), A^T = B = (b_{ij}), a_{ij} = b_{ji} \forall i, j = \overline{1, n}$.

   $detA = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} a_{1\alpha_1} \cdot ... \cdot a_{\alpha_n n} = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} b_{\alpha_1 1} \cdot ... \cdot b_{\alpha_n n}$.

   Каждая перестановка множителей порождает транспозицию в перестановке, состоящей из индексов $\Rightarrow$ переупорядочивание элементов в произведении влечёт за собой цепочку транспозиций, переводящих перестановки, притом чётность этих перестановок будет совпадать $\Rightarrow detA = \sum\limits_{\alpha \in \delta_n} (-1)^{\varepsilon(\beta)} b_{1\beta_1} \cdot ... \cdot b_{n\beta_n} = detB$. ⊠

Следствие. *Все свойства строк матрицы равносильны и для столбцов*

6.2 Алгоритм Евклида. Основная теорема арифметики. Китайская теорема об остатках.

Пусть $a, b \in z, b \neq 0$. Тогда любое число можно представить в виде: $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$. К примеру, $-23 = 5(-5) + 2$. Остаток (r) - число неотрицательное. Притом, такое представление является единственным (доказать можно от противного).

Число b ***делит число*** a*, если* $a = bq$ *(т.е. остаток равен нулю).*

Если число b делит число a, то принято обозначать это следующим образом: $b|a$.

Свойства делимости:

1. $a|b, b|c \Rightarrow a|c$

   ♦ $b|c \Rightarrow c = bq_1$. $a|b \Rightarrow b = aq_2 \Rightarrow c = aq_1q_2 = aq$. ⊠

2. $a|b \Rightarrow a|bc \forall c \in Z$

   ♦ $a|b \Rightarrow b = aq_1 \Rightarrow bc = aq_1c = aq \Rightarrow a|bc$. ⊠

3. $c|a,\ c|b \Rightarrow c|(a+b)$

   ♦ $c|a \Rightarrow a = cq_1,\ c|b \Rightarrow b = cq_2 \Rightarrow (a+b) = c(q_1+q_2) = cq$. ⊠

• *Натуральное (целое положительное) число называется* ***простым****, если оно делится только на себя и единицу. Единица - не простое число.*

• *Пусть* $d|a$ *и* $d|b$*, тогда число* d *называется* ***общим делителей чисел*** a, b.

• *Общий делитель, который делится на любой другой общий делитель, называется* ***наибольшим общим делителем (НОД)****.*

• *Если НОД(a, b) = 1, то эти числа называются* ***взаимно простыми****.*

Выведем алгоритм нахождения НОД двух чисел. Пусть $a, b \in Z, a > b$. $a = bq_1 + r_1, 0 < r_1 < b$. НОД$(a, b)$ = НОД(b, r_1).
$d|a, d|b \Rightarrow r_1 = a - bq_1 \Rightarrow d|r_1, d|b$
$d|b, d|r_1 \Rightarrow a = bq_1 + r_1 \Rightarrow d|a, d|b$
НОД(a, b) = НОД(b, r_1) = НОД=(r_1, r_2) = НОД(r_2, r_3) = ... = НОД(r_{n-1}, r_n).
Таким образом, получили **алгоритм Евклида** нахождения НОД двух чисел. Проделываем его до момента, пока не получим нулевой остаток: последний ненулевой остаток будет являться НОДом.

Любое натуральное число, не равное 1, можно представить в виде произведения простых чисел следующим образом: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}, \quad p_i \neq p_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j = \overline{1, k}$.

К примеру, $600 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^5$.

• *Если* $a|c, b|c$*, то* c *называется* ***общим кратным*** *этих чисел.*

• *Пусть* $m \in N$*. Говорят, что* ***число*** a ***сравнимо с числом*** b ***по модулю*** m*, если разность* $a - b$ *делится на* m*. Обозначение:* $a \equiv b(mod m) \Leftrightarrow m|(a-b)$.

Свойства сравнений:

1. $a \equiv a(mod m)$ — *рефлексивность.*

2. $a \equiv b(mod m), b \equiv c(mod m) \Rightarrow a \equiv c(mod m)$ — *транзитивность.*

3. $a \equiv b(mod m) \Rightarrow b = a(mod m)$ — *симметричность.*

Рассмотрим систему сравнений $\begin{cases} x \equiv b_1(mod m_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv b_k(mod m_k). \end{cases}$

• *Систему сравнений называют* ***совместной****, если она имеет хотя бы одно решение.*

• *Система сравнений называется* ***приведённой****, если числа $m_1, ..., m_k$ попарно взаимно просты.*

Теорема (Китайская теорема об остатках). *Приведённая система сравнений всегда совместна и равносильна сравнению $x \equiv b_1 x_1 \frac{m}{m_1} + ... + b_k x_k \frac{m}{m_k}(mod m)$, где $m = m_1 \cdot ... \cdot m_k$, x_i — произвольное решение сравнения $\frac{m}{m_i} x \equiv 1(mod m_i)$.*