# Алгебра и Теория чисел

Конспект по 2 семестру специальности «прикладная информатика» (лектор  $\Gamma$ . В. Матвеев)

## Содержание

1	Прямая сумма подпространств	3
2	Критерий совместности системы линейных уравнений	4
3	Однородные системы линейных уравнений	5
4	Линейные преобразования векторных пространств	7
5	Операции над линейными преобразованиями	8
6	Ранг и дефект линейного преобразования	9

## 1 Прямая сумма подпространств

Пусть  $W_1$ ,  $W_2$  — подпространства.

ullet  $W_1\oplus W_2$  — сумма называется **прямой**, если  $W_1\cap W_2=\vec{0}$ .

Справедливо и следующее:  $W_1\oplus W_2\oplus ... \oplus W_k$  называется прямой, если  $W_i\cap \sum\limits_{i\neq j}W_j=\vec{0}$ 

Теорема.

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

♦ По теореме о сумме подпространств

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

 $\boxtimes$ 

 $\boxtimes$ 

А так как  $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$ , то  $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ .

Следствие.

$$\dim(W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_k$$

**Теорема.** Если  $W \subset V_n \Rightarrow V_n = W \oplus U$ , где U - noд npocmpaнство.

•

1. 
$$W = \vec{0} \Rightarrow U = V_n, V_n = \vec{0} \oplus V_n$$

- 2.  $W=V_n\Rightarrow U=\vec{0},\,V_n=V_n+\vec{0}$ Оба равенства справедливы, так как  $\vec{0}\cap V_n=\vec{0}$
- 3. Рассмотрим нетривиальный случай:

$$W = L(v_1, v_2, ..., v_r), \quad 0 < r < n$$
$$U = L(v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n)$$

Возьмем произвольный вектор x, не нарушая общности:

$$x = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r) + (\alpha_{r+1} v_{r+1} + ... + \alpha_n v_n) \Rightarrow x = W + U$$

Докажем, что  $W \cap U = \vec{0}$ .

Пусть  $x \in W \cap U$ .

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = \alpha_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \alpha_n v_n \Rightarrow \forall \alpha_i = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow W \cap U = \vec{0}$$

**Следствие.** Каждое пространство раскладывается в прямую сумму n одномерных подпространств.

$$V_n = L(e_1) \oplus L(e_2) \oplus ... \oplus L(e_n)$$

 $e_1, e_2, ..., e_n$ -базис.

То есть любой вектор раскладываетя по базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

#### Критерий совместности системы линейных уравнений 2

Теорема. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффицентов равен рангу расширенной матрицы.

♦ Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
 — матрица коэффицентов  $A$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = \widetilde{A} = (A/B) - \text{расширенная матрица}.$$

Система совместна  $\Leftrightarrow$  rank  $A = \operatorname{rank} A$ .

 $\Rightarrow$  Пусть система совместна с решением  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 

$$\begin{pmatrix}
a_{11} \\
a_{21} \\
\vdots \\
a_{n1}
\end{pmatrix} \cdot j_1 + \begin{pmatrix}
a_{12} \\
a_{22} \\
\vdots \\
a_{n2}
\end{pmatrix} \cdot j_2 + \dots + \begin{pmatrix}
a_{1n} \\
a_{2n} \\
\vdots \\
a_{nn}
\end{pmatrix} \cdot j_n = \begin{pmatrix}
b_1 \\
b_2 \\
\vdots \\
b_n
\end{pmatrix}$$
(1)

Это значит, что при добавлении столбца свободных членов базис не изменился, так как новый столбец выражается через старый. Следовательно,  $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A$ .

 $\Leftarrow$  Базисный минор матрицы A есть базисный минор матрицы  $\widetilde{A}$ , так как  $rankA = rank\widetilde{A}$ .

 $\Leftarrow$  Базисный минор матрицы 17 оста сально. Следовательно, столбец свободных членов  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$  выражается через базисные столбцы по

принципу (1). Коэффиценты остальных столбцов равны 0. И тогда полученные коэффиценты будут являться решением системы.

### Решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью критерия

- 1. Нахождение базисного минора матрицы А методом окаямления минора.
- 2. Проверяем условие rank  $A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$  методом окаямления миноров.
- 3. Отбрасываем все небазисные строки.
- 4. Базисные неизвестные оставляем слева, а свободные переносим вправо.

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \\
dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \\
dots - a_{1n}x_n \\
\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \\
dots + a_{nr}x_r = b_n - a_{n,r+1}x_{r+1} - \\
dots - a_{nn}x_n
\end{cases} \tag{1}$$

Полученную систему рассматриваем как крамеровскую.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

## 3 Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

Где 
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
 — матрица системы,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  — столбец неизвестных.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} -$$
 столбец нулей.

Тогда систему (2) можно записать в матричном виде как

$$AX=0$$

**Теорема.** Решения однородной системы линейных уравнений образуют векторное пространство, размерность которого  $\dim W = n - r$  (n - число неизвестных, r - paнг системы,  $r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|0)$ .

♦ Докажем, что это пространство. Вспомним необходимые критерии:

$$W_1, W_2 \in W \Rightarrow W_1 + W_2 \in W$$
  
 $W_1 \in W \Rightarrow \lambda W_1 \in W$ 

Пусть 
$$X_1$$
 — конкретный набор,  $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \prime \\ x_2 \prime \\ \vdots \\ x_n \prime \end{pmatrix}$ . Тогда выполняются свойства

$$AX_1 = 0, \ AX_2 = 0 \Rightarrow A(X_1 + X_2) = 0$$
$$AX_1 = 0 \Rightarrow \lambda AX_1 = 0$$

Перенесем свободные неизвестные в системе в левую сторону.

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\
\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nr}x_r = b_n - a_{n,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{nn}x_n
\end{cases}$$
(3)

Базисный минор для этой системы

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Где неизвестные  $x_1,\ldots,x_n$  — базисные, а  $x_{r+1},\ldots,x_n$  — свободные.

Выражаем базисные неизвестные через свободные по правилу Крамера или Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

Найдем базисные решения. Для этого передадим значения

$$c_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$$

$$c_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2r}, 0, 1, \dots, 0)$$

$$c_{n-r} = (c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \dots, c_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1)$$

Переменные, которым были переданы значения 0 и 1, являются базисными. Векторы являются линейно независимыми благодаря этим переменным.

Докажем, что любое решение выражается через базис.

$$(\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_n)-\gamma_{r+1}c_1-\ldots-\gamma_nc_{n-r}=(\gamma_1c_1,\gamma_2c_2,\ldots,\gamma_nc_{n-r})$$

 $\boxtimes$ 

Значит все решения выражаются через базис.

• Базисные решения ОСЛУ называются фундаментальной системой решений.

#### Решение неоднородной системы через однородную

Будем обозначать AX = B — неоднородная система, AX = 0 — однородная система.

$$AX = B AY = 0$$
 
$$= A(X + Y) = AX + AY = B + 0 = B$$

- 1. Разность 2-ух решений неоднородной системы будет решением однородной.
- 2. Если от решения неоднородной системы отнять фиксированное решение неоднородной системы, то получится решение однородной системы.

$$AX - AX_0 = B - B = 0$$

3. Произвольное решение неоднородной системы можно получить, добавляя к фиксированному решению некоторые решения однородной системы.

### 4 Линейные преобразования векторных пространств

- Отображение  $\varphi: V \to V$  (само в себя) называется **линейным**, если
  - 1. Образ суммы равен сумме образов:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

2. При умножении вектора на скаляр его образ умножается на этот же скаляр:

$$\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$$

Если  $\varphi: V \to W$ , то  $\varphi$  — линейное отображение.

#### Свойства линейного преобразования:

1. Образ линейной комбинации равен такой же линейной комбинации образов (под действием линейного преобразования)

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \lambda_1 \varphi(a_1) + \lambda_2 \varphi(a_2) + \dots + \lambda_n \varphi(a_n)$$

2. Преобразование  $\vec{0}$ 

$$\begin{split} \phi(\vec{0}) &= \vec{0} \\ \phi(\vec{0}) &= \phi(\vec{0} \cdot \vec{a}) = 0 \cdot \phi(\vec{a}) = \vec{0} \end{split}$$

3. Вынесение минуса

$$\phi(-\vec{a}) = -\phi(\vec{a})$$

4. Линейное преобразование переводит линейно зависимые векторы в линейно зависимые с такими же скалярами.

**Теорема.** Любое линейное преобразование вполне определяется своими значениями на базисных векторах и эти значения могут быть любыми.

♦ Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — системы векторов. Возьмем функцию  $\varphi$  такую, что:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_1 \\ \varphi(e_2) = a_2 \\ \dots \\ \varphi(e_n) = a_n \end{cases}$$

Докажем, что такое пространство существует:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

$$\varphi(x) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Докажем, что оно линейное:

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

- $\varphi(x+y) = (x_1+y_1)a_1 + (x_2+y_2)a_2 + \ldots + (x_n+y_n)a_n = x_1a_1 + y_1a_1 + \ldots + x_na_n + y_na_n = (x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n) + (y_1a_1 + y_2a_2 + \ldots + y_na_n) = \varphi(x) + \varphi(y);$
- $\varphi(\lambda x) = \lambda x_1 a_1 + \lambda x_2 a_2 + \ldots + \lambda x_n a_n = \lambda \varphi(x)$ .

Докажем, что единственное:

Пусть существует

$$\begin{cases} \psi(e_1) = a_1 \\ \psi(e_2) = a_2 \\ \dots \\ \psi(e_n) = a_n \end{cases}$$

с такими же свойствами. Тогда

$$\psi(x) = \psi(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) = x_1\psi(e_1) + x_2\psi(e_2) + \dots + x_n\psi(e_n) = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = \varphi(x)$$

 $\boxtimes$ 

## 5 Операции над линейными преобразованиями

Пусть  $f, \phi$  — линейные преобразования векторного пространства V.

1. Сумма линейных преобразований:

$$f(x) + \varphi(x) = (f + \varphi)(x), \ \forall x \in V.$$

$$\Phi (f + \varphi)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1) + f(\lambda_2 x_2) + \varphi(\lambda_1 x_1) + \varphi(\lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) = \lambda_1 (f(x_1) + \varphi(x_1)) + \lambda_2 (f(x_2) + \varphi(x_2)) = \lambda_1 (f + \varphi)(x_1) + \lambda_2 (f + \varphi)(x_2).$$

2. Произведение на скаляр линейного преобразования:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \ \forall x \in V.$$

3. Композиция линейных преобразований:

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)), \ \forall x \in V.$$

♦ 
$$(f \varphi)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) = f(\varphi(\lambda_1 x_1) + \varphi(\lambda_2 x_2)) = f)\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) = \lambda_1 f(\varphi(x_1)) + \lambda_2 f(\varphi(x_2)) = \lambda_1 (f \varphi)(x_1) + \lambda_2 (f \varphi)(x_2).$$
 $\boxtimes$ 

## 6 Ранг и дефект линейного преобразования

Пусть  $\varphi: V \to V$  — линейное преобразование.

- ullet Множество  $\ker \varphi = \{x \mid \varphi(x) = \vec{0}\} \mathfrak{sdpo}$  (деффект) линейного преобразования.
- Множество  $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(v) = \{ \varphi(x) \mid x \in V \} \textit{образ (ранг)}$  линейного преобразования.

#### Пример 1

Рассмотрим функцию  $\sin(x)$ . Функция синуса не является линейной, в чем легко убедиться  $(\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b)$ , однако для нее можно определить ядро и образ. Таким образомб

$$ker(sin) = \pi n$$

$$Im(\sin) = [-1, 1]$$

#### Пример 2

Тождественное преобразование -  $\varphi(v) = v \quad \forall v \in V$ 

$$\ker(\varphi) = \vec{0}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = V$$

#### Пример 3

Возьмем прямую l и плоскость P, где  $l \perp P$ .

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{p}ra$$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = l = V_1$$

$$\ker(\varphi) = P = V_2$$

**Теорема.** Ядро и образ линейного преобразования — подпространства исходного векторного пространства.

- ♦ Проверим выполнимость свойств:
  - 1.  $w_1, w_2 \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = \vec{0} \varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow w_1 + w_2 \in \ker(\varphi)$
  - 2.  $\lambda \varphi(w) = \lambda \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \varphi \in \ker(\varphi)$
  - 3.  $\varphi(w_1), \varphi(w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$  $\varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \varphi(w_1 + w_2) \in \operatorname{Im}(\varphi)$
  - 4.  $\lambda \varphi(w_1) = \varphi(\lambda w_1) \in \operatorname{Im}(\varphi)$
- ullet Размерность ядра **дефект**. Будем обозначать  $d = \dim(\ker(\varphi))$ .
- Размерность образа ранг. Будем обозначать  $r = \operatorname{rank} \varphi = \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$ .

Тогда  $\phi$  — **нулевое преобразование**, если d=n, r=0.

- $\phi$  тождественное преобразование, если d = 0, r = n.
- $\phi$  проектирование векторов, если d = 2, r = 1.

Теорема. Сумма ранга и дефекта равняется размерности пространства.

lacktriangle Рассмотрим образ  $\phi(V)$ . Пусть базис  $\phi(V): \phi(\phi(l_1), \phi(l_2), \dots, \phi(l_r))$  Докажем, что

$$V_n = L(l_1, l_2, \dots, l_r) \oplus \ker(\varphi)$$
  
 $n = r + d$ 

- 1.  $l_1, l_2, \ldots, l_r$  линейно независимы. По свойству линейное преобразование сохраняет зависимость. Если бы  $l_1, l_2, \ldots, l_r$  были зависимы, то и  $\phi(l_1), \phi(l_2), \ldots, \phi(l_r)$  были бы зависимы, но это базис, значит не зависимы.
- 2.  $\vec{v} \in V_n = \vec{x} \in L(l_1, l_2, \dots, l_r) + \vec{y} \in ker\varphi$

$$\varphi(V) = \alpha_1 \varphi(l_1) + \alpha_2 \varphi(l_2) + dots + \alpha_r \varphi(l_r)$$

$$\varphi(v - \alpha_1 l_1 - \dots - \alpha_r l_r) = \vec{0} \Rightarrow v - \alpha_1 l_1 - \dots - \alpha_r l_r = y \in \ker \varphi$$

$$v = \alpha_1 l_1 - \dots - \alpha_r l_r + y = x + y$$

3.  $L \cap ker \varphi = \vec{0}$ Пусть  $x \in L \cap ker \varphi$ .  $x = \alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_r l_r$  $\varphi(x) = \vec{0}$ ,  $\varphi(x) = \varphi(\alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_r l_r) = \varphi(\alpha_1 l_1) + \varphi(\alpha_2 l_2) + \ldots + \varphi(\alpha_r l_r) = \alpha_1 \varphi(l_1) + \alpha_2 \varphi(l_2) + \ldots + \alpha_r \varphi(l_r) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$ 

 $\boxtimes$