Дифференциальные уравнения

Конспект по 2 курсу специальности «прикладная математика»

(лектор А. В. Филипцов)

Оглавление

Глава 1

Основные понятия. Простейшие дифференциальные уравнения.

1.1 Основные понятия.

• ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** *называется выражение вида*

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1.1}$$

где F — некоторая функция $(n+2)$-ух переменных, определенная в некоторой области, t — независимая переменная, $x = x(t)$ — неизвестная функция независимой переменной, $x', \dots, x^{(n)}$ — производные функции $x(t)$, причем переменная t и функции F и x действительны.

• *Порядок старшей производной, присутствующей в уравнении* (1.1.1)*, называется* ***порядком*** *уравнения.*

• ***Решением*** *уравнения* (1.1.1) *называется функция, заданная и n раз дифференцируемая на некотором промежутке (связном множестве) $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ и обращающая уравнение* (1.1.1) *в верное равенство.*

• *График решения дифференциального уравнения называется* ***интегральной кривой****.*

Если функция $x(t) : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ является решением уравнения (1.1.1) на промежутке $\mathbb{I}$, то $\forall I_1 \subseteq \mathbb{I}$ функция $x_1(t) : I_1 \to \mathbb{R}$ такая, что $x_1(t) = x(t) \quad \forall t \in I_1$, является решением на промежутке I_1. При этом функция $x_1(t)$ называется **сужением** функции $x(t)$ на промежутке I_1, а функция $x(t)$ называется **продолжением** функции $x_1(t)$ на промежутке $\mathbb{I}$.

• *Решение, которое нельзя продолжить, называется* ***непродолжаемым****, а промежуток, на котором оно определено, называется* ***максимальным интервалом существования****.*

Каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений.

• *Совокупность решений уравнения* (1.1.1) *вида $x = \varphi(t, C_1, \dots, C_n)$, зависящая от n существенно произвольных постоянных, называется* ***общим решением*** *уравнения* (1.1.1)*.*

Существенные постоянные — это постоянные, которые нельзя заменить на меньшее количество, не изменив совокупность решений, описанных общим решением.

• *Решение дифференциального уравнения, получающееся из общего решения при конкретных произвольных постоянных, называется* ***частным решением****.*

Возможны случаи, когда уравнение имеет решение, не входящее в общее решение.

• *Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется* ***полным решением****.*

Часто на практике математическая модель, содержащая дифференциальное уравнение, содержит также некоторые дополнительные условия необходимые для выбора единственного решения, описывающего моделируемый процесс.

• *Дополнительные условия накладываемые на неизвестную функцию называются* ***начальными****, если они относятся к одному значению аргумента, и* ***граничными****, если относятся к разным значениям аргумента.*

• *Начальная задача вида*

$$\begin{cases} F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \\ x|_{t=t_0} = \xi_0, x'|_{t=t_0} = \xi_1, \ldots, x^{(n-1)}|_{t=t_0} = \xi_{n-1}; \end{cases} \qquad t_0 \in \mathbb{I}$$

называется ***задачей Коши****.*

1.2 Простейшие дифференциальные уравнения.

Пусть D — оператор дифференцирования, то есть $D : x \mapsto x'$. Тогда первую производную функции x будем обозначать $Dx = x'$, вторую $D^2x = x''$ и так далее.

• ***Простейшим*** *называется дифференциальное уравнение вида*

$$D^n x = f(t), \ t \in \mathbb{I}, \tag{1.2.1}$$

где $\mathbb{I}$ — некоторый промежуток в $\mathbb{R}$, $f(t)$ — непрерывная в $\mathbb{I}$ функция.

Теорема. *Общее решение простейшего дифференциального уравнения первого порядка*

$$Dx = f(t), \ t \in \mathbb{I} \tag{1.2.2}$$

имеет вид

$$x(t) = \int f(t)dt = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C,$$

где $t_0 \in \mathbb{I}$, а C — произвольная постоянная.

⧫ Доказательство теоремы следует из курса математического анализа. ⊠

Заметим, что общее решение содержит все решения дифференциального уравнения (1.2.2). Следовательно, полученное общее решение является **полным** решением.

Теорема. *Задача Коши $Dx = f(t)$, $x|_{t=t_0} = \xi_0$, где $t, t_0 \in \mathbb{I}$, имеет единственное решение*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + \xi_0.$$

♦ Подставим начальное условие в общее решение: $\xi_0 = x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0} f(\tau)d\tau + C \Rightarrow C = \xi_0$. ⊠

Решение простейшего дифференциального уравнения (1.2.1) можно свести к последовательному решению простейшего дифференциального уравнения первого порядка. Так как $D^n x = D(D^{n-1}x)$, то уравнение n-го порядка является уравнением первого порядка относительно функции $D^{n-1}x$. Следовательно, из первой теоремы получаем

$$D^{n-1}x = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + C_1.$$

Тогда аналогично

$$D^{n-2}x = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + C_1\Big)d\tau_2 + C_2 = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1\Big)d\tau_2 + C_1(t-t_0) + C_2.$$

Заметим, что семейство функций $C_1(t-t_0)+C_2$ описывает множество всех многочленов первой степени. Следовательно, это множество не изменится, если заменить его на $\widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0$. Тогда имеем

$$D^{n-2}x = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_2 \int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + \widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_n \int\limits_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + \widetilde{C}_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0.$$

Теорема. *Общее решение (полное) уравнения* (1.2.1) *имеет вид*

$$x(t) = \underbrace{\int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau}_{y_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{C}_i t^i}_{y_2}. \qquad (1.2.3)$$

♦ Доказательство можно провести двумя способами: по формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, или путем сведения кратных интегралов к повторным. Мы рассмотрим первый способ. Формула

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,\tau)d\tau\Big) = \beta'(t)f(t,\beta(t)) - \alpha'(t)f(t,\alpha(t)) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(t,\tau)d\tau$$

определяет производную от интеграла, зависящего от параметра. Тогда для нашего случая подставим вместо $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ соответственно t, t_0 и получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_{t_0}^{t} f(t,\tau)d\tau\Big) = f(t,t) + \int\limits_{t_0}^{t} f'_t(t,\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем $D^n y_2 = 0$. Вычислим $D^n y_1$:

$$Dy_1 = \frac{(t-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(n-1)(t-\tau)^{n-2}}{(n-1)!}f(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-2}}{(n-2)!}f(\tau)d\tau;$$

$$D^2 y_1 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-3}}{(n-3)!}f(\tau)d\tau;$$

$$\ldots$$

$$D^n y_1 = f(t).$$

⊠

Теорема. *Решение задачи Коши $D^n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$ (D^0 — тождественное отображение, то есть $D^0 x = x$), где $t, t_0 \in \mathbb{I}$, всегда существует, единственно и имеет вид*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i}{i!}(t-t_0)^i.$$

⧫ Разложим многочлен в общем решении простейшего дифференциального уравнения (1.2.3) по степеням $t - t_0$, то есть представим в виде

$$\widetilde{\widetilde{C}}_{n-1}(t-t_0)^{n-1} + \ldots + \widetilde{\widetilde{C}}_1(t-t_0) + \widetilde{\widetilde{C}}_0,$$

где $\widetilde{\widetilde{C}}_i$ — произвольные постоянные, зависящие от $\widetilde{C}_i$.
Тогда $\xi_0 = x|_{t=t_0} = \widetilde{\widetilde{C}}_0$, $\xi_i = D^i x|_{t=t_0} = i! \cdot \widetilde{\widetilde{C}}_i \Rightarrow \widetilde{\widetilde{C}}_i = \dfrac{\xi_i}{i!}$. ⊠

• ***Комплекснозначной функцией действительного переменного*** *называется функция вида*

$$h(t) = f(t) + i \cdot g(t),$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — действительные функции, определенные на некотором промежутке $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$.

Производные и интегралы комплекснозначной функции определяются следующим образом:

$$h'(t) = f'(t) + i \cdot g'(t);$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + i \cdot \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau.$$

Кроме того для таких функций справедливы свойства производных:

1. $(\alpha u)' = \alpha u'$;
2. $(u+v)' = u' + v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$.

Рассмотрим комплексное простейшее дифференциальное уравнение $Dz = h(t)$, где $h(t) = f(t)+i\cdot g(t)$. Если комплекснозначаная функция $z(t) = x(t)+i\cdot y(t)$ является решением этого дифференциального уравнения, то подставим его в уравнение и получим $\begin{cases} Dx = f(t), \\ Dy = g(t). \end{cases}$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C_1 + i \cdot \Big(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau + C_2 \Big) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Тогда решение задачи Коши $Dz = h(t)$, $z|_{t=t_0} = \xi_0$ сводится к решению двух задач Коши:

$$\begin{cases} Dx = Re(h(t)), \\ x|_{t=t_0} = Re(\xi_0); \end{cases} \qquad \begin{cases} Dy = Im(h(t)), \\ y|_{t=t_0} = \xi_0; \end{cases}$$

Заметим, что любое дифференциальное уравнение можно рассматривать как комплексное простейшее дифференциальное уравнение, у которого мнимая часть неоднородности равна нулю. Следовательно, можем говорить о существовании комплекснозначных решений действительных уравнений.

Глава 2

Линейные стационарные уравнения.

2.1 Линейные стационарные дифференциальные уравнения. Существование и единственность задачи Коши.

• ***Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка*** *называется уравнение вида*

$$D^n x + a_{n-1}(t)D^{n-1}x + \ldots + a_1(t)Dx + a_0(t)D^0 x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.1.1}$$

где функции $a_i(t)$ и $f(t)$ непрерывны на промежутке $\mathbb{I}$.

• *Если $f(t) = 0$, то уравнение называется* ***однородным****, в противном случае* ***неоднородным****.*

• *Если $a_i(t)$ является постоянным, то уравнение* ***стационарное****.*

Далее рассматриваем только стационарные линейные дифференциальные уравнения.

Обозначим через $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$ оператор дифференцирования. Тогда уравнение (2.1.1) запишем в виде

$$L_n x = f(t). \tag{2.1.1}$$

Так как для любых дифференцируемых функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$

1. $D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) + D(\varphi_2)$,
2. $D(\alpha\varphi_1) = \alpha D(\varphi_1)$,

то оператор дифференцирования D является линейным. Следовательно, оператор L_n является результатом композиции суммы и произведения на действительное число линейных операторов, а значит L_n — **линейный оператор**.

Кроме действительных стационарных уравнений будем также рассматривать комплексные стационарные уравнения вида $L_n z = h(t)$, где L_n — линейный стационарный оператор с комплексными коэффициентами, а $h(t)$ — комплекснозначная функция.

• *Любой комплекснозначный линейный оператор L_n можно представить в виде композиции (произведения) операторов вида $D - \lambda_0 D^0$. Такое представление линейного оператора*

*L_n называется **факторизацией** оператора.*

Для факторизации оператора L_n построим многочлен

$$\delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

с теми же коэффициентами, что и у оператора L_n. Найдем корни этого многочлена над полем $\mathbb{C}$.

• *При этом многочлен $\delta(\lambda)$ называется **характеристическим многочленом** для оператора L_n, а уравнение $\delta(\lambda) = 0$ — **характеристическим уравнением** для оператора L_n.*

Многочлен $\delta(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ с учетом кратности имеет столько корней, какова его степень. Обозначим эти корни через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда

$$\delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

и, следовательно,

$$L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0)\ldots(D - \lambda_n D^0)$$

— **факторизация** линейного оператора L_n.

Лемма. *Решение задачи Коши $Dz - \lambda_0 z = h(t)$, $z|_{t=t_0} = \xi_i$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ для любой комплекснозначной функции $h(t)$ и для любых комплексных чисел ξ_i и λ_0 всегда существует и единственно.*

♦ Домножим уравнение задачи Коши на ненулевую функцию $e^{-\lambda_0 t}$ и получим

$$e^{-\lambda_0 t}Dz \underbrace{-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}}_{D(e^{-\lambda_0 t})} z = h(t)e^{-\lambda_0 t},$$

$$D(e^{-\lambda_0 t}z) = h(t)e^{-\lambda_0 t}.$$

Полученное уравнение является простейшим относительно функции $e^{-\lambda_0 t}z$, следовательно, его общее решение имеет вид

$$e^{-\lambda_0 t}z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\lambda_0 \tau}h(\tau)d\tau + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_0(t-\tau)}h(\tau)d\tau + Ce^{\lambda_0 t}.$$

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим в общее решение начальные условия и получим $\xi = z|_{t=t_0} = Ce^{\lambda_0 t_0} \Rightarrow C = \xi e^{-\lambda_0 t_0} \Rightarrow$

$$z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_0(t-\tau)}h(\tau)d\tau + \xi e^{\lambda_0(t-t_0)}.$$

⊠

Теорема. *Решение задачи Коши* $L_n z = h(t)$, $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ *для любой непрерывной комплекснозначной функции* $h(t)$, *для любых комплексных чисел* ξ_i *и для любого комплексного линейного оператора* L_n *всегда существует и единственно.*

♦ Факторизуем оператор L_n: $L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0)\dots(D - \lambda_n D^0)$ и обозначим через L_{n-1} следующий оператор: $L_{n-1} = (D - \lambda_2 D^0)(D - \lambda_3 D^0)\dots(D - \lambda_n D^0)$. Тогда уравнение задачи Коши представимо в виде

$$(D - \lambda_1 D^0)(L_{n-1} z) = h(t).$$

Если обозначим $z_1 = L_{n-1} z$, то уравнение имеет вид $(D - \lambda_1 D^0) z_1 = h(t) \Rightarrow z_1|_{t=t_0} = (L_{n-1} z)|_{t=t_0} = \mu_1$, где μ_1 — комплексное число, которое выражается через ξ_i.

По лемме решение задачи Коши всегда существует и единственно. Следовательно, функция $z(t)$ является решением задачи Коши $L_{n-1} z = z_1$, $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-2}$. Продолжая рассуждения аналогичным образом еще $(n-1)$ раз, получим функцию, которая является решением исходной задачи Коши. ⊠

Следствие. *Действительное решение задачи Коши* $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ *для любой непрерывной действительной функции* $f(t)$, *для любых действительных чисел* ξ_i *и для любого действительного линейного оператора* L_n *всегда существует и единственно.*

♦ Если рассматривать функцию $f(t)$ и числа ξ_i как комплекснозначную функцию и комплексные числа с нулевой мнимой частью, то по теореме задача Коши имеет единственное комплексное решение $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ действительные. Но линейный оператор L_n имеет действительные коэффициенты $L_n z = L_n x + i \cdot L_n y$.

Тогда, так как z — решение задачи Коши, подставим:

$$\begin{cases} L_n x + i \cdot L_n y = f(t) + i \cdot 0, \\ (D^i x + i \cdot D^i y)|_{t=t_0} = \xi_i + i \cdot 0; \end{cases}$$

приравняем действительные части и получим, что функция $x(t) = Re(z(t))$ является единственным действительным решением задачи Коши. ⊠

2.2 Структура множества решений линейного однородного стационарного уравнения.

Рассмотрим линейное стационарное однородное уравнение

$$L_n x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.1}$$

Так как оператор L_n является линейным, то для любых двух решений $x(t)$ и $y(t)$ уравнения (2.2.1) и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad L_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L_n x + \beta \cdot L_n y = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. Следовательно, функция $\alpha x + \beta y$ также является решением уравнения (2.2.1), а значит множество решений уравнения (2.2.1) является **линейным (векторным) пространством**.

Покажем, что пространство конечномерно и имеет размерность n (равную порядку уравнения).

• *Функции* $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ *называются* ***линейно зависимыми****, если существуют числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *не обращающиеся в 0 одновременно такие, что* $\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t) = 0 \; \forall t$. *В противном случае функции называются* ***линейно независимыми****.*

• *Пусть* $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ *— это* $(n-1)$ *раз дифференцируемые функции. Определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ D\varphi_1(t) & \ldots & D\varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}\varphi_1(t) & \ldots & D^{n-1}\varphi_n(t) \end{vmatrix}$$

называется ***определителем Вронского****, или* ***Вронскианом*** *этих функций.*

Теорема. *Если функции* $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ *линейно зависимые, то Вронскиан этих функций* $W(t) = 0 \; \forall t$.

♦ Пусть функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы. Тогда одна из этих функций линейно выражается через остальные. Пусть, например, это функция $\varphi_1(t)$, то есть $\varphi_1(t) = \beta_2\varphi_2(t) + \ldots + \beta_n\varphi_n(t)$. Тогда $D^i\varphi_1(t) = \beta_2 D^i\varphi_2(t) + \ldots + \beta_n D^i\varphi_n(t) \quad \forall i = \overline{1, n-1}$. Следовательно, первый столбец Вронскиана $W(t)$ линейно выражается через остальные столбцы и, следовательно, $W(t) = 0 \; \forall t$. ⊠

Теорема. *Если* n *решений* $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ *уравнения* (2.2.1) *линейно независимы, то Вронскиан этих функций* $W(t) \neq 0 \; \forall t$.

♦ От противного. Пусть $\exists t_0$, для которого $W(t_0) = 0$. Тогда линейная однородная система алгебраических уравнений с матрицей $W(t_0)$ имеет ненулевое решение, то есть существует ненулевой столбец $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ такой, что $W(t_0)X = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(t_0) + \alpha_2\varphi_2(t_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t_0) = 0, \\ \alpha_1 D\varphi_1(t_0) + \alpha_2 D\varphi_2(t_0) + \ldots + \alpha_n D\varphi_n(t_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 D^{n-1}\varphi_1(t_0) + \alpha_2 D^{n-1}\varphi_2(t_0) + \ldots + \alpha_n D^{n-1}\varphi_n(t_0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t)$. Так как функция $\varphi(t)$ является линейной комбинацией решений уравнения (2.2.1), то она также является решением этого уравнения. При этом

$$D^i\varphi(t)|_{t=t_0} = (\alpha_1 D^i\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n D^i\varphi_n(t))|_{t=t_0} = 0 \; \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Но функция тождественно равная нулю также является решением, удовлетворяющим тем же начальными условиям. И, следовательно, по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши функция $\varphi(t)$ и функция тождественно равная нулю равны между собой, то есть $\varphi(t) = 0 \; \forall t \Rightarrow \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t) = 0 \; \forall t$. Тогда функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. ⊠

Теорема. *Множество решений линейного стационарного однородного уравнения порядка* n *является конечномерным линейным пространством размерности* n.

♦ Рассмотрим n задач Коши:

$$\begin{cases} L_n x = 0, \\ x|_{t=t_0} = 1, \\ Dx|_{t=t_0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}x|_{t=t_0} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} L_n x = 0, \\ x|_{t=t_0} = 0, \\ Dx|_{t=t_0} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}x|_{t=t_0} = 0; \end{cases} \qquad \dots\dots\dots \qquad \begin{cases} L_n x = 0, \\ x|_{t=t_0} = 0, \\ Dx|_{t=t_0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}x|_{t=t_0} = 1; \end{cases} \tag{2.2.2}$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши каждая из этих задач Коши имеет единственное решение. Обозначим их через $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$. Заметим, что их Вронскиан при $t = t_0$ равен определителю единичной матрицы, то есть равен 1. Следовательно, эти функции линейно независимы.

Покажем, что любое решение уравнения (2.2.1) линейно выражается через эти функции. Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (2.2.1), и пусть $\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_0$, $D\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_1$, …, $D^{n-1}\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_{n-1}$. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}.$$

При этом

$$D^i\psi(t)|_{t=t_0} = (\xi_0 D^i\varphi_0 + \ldots + \xi_{n-1}D^i\varphi_{n-1})|_{t=t_0} = \xi_i \ \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Следовательно, функция $\psi(t)$ является решением задачи Коши с теми же начальными условиями, что и функция $\varphi(t)$. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши

$$\varphi(t) = \psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}. \tag{2.2.3}$$

И, следовательно, произвольная функция $\varphi(t)$ линейно выражается через линейно независимые функции $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$. Значит функции $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ составляют базис пространства решений. ⊠

• *Базис пространства решений линейной однородной системы уравнений называется* ***фундаментальной системой решений***.

• *Фундаментальная система решений, удовлетворяющая условиям* (2.2.2) *называется* ***нормированной*** *при* $t = t_0$.

Используя фундаментальную систему решений нормированную при $t = t_0$, задача Коши с произвольными начальными условиями может быть найдена по формуле (2.2.3).

• *Функция* $\psi(t)$ *называется* ***сдвигом*** *функции* $\varphi(t)$ *на* $t = t_0$, *если* $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$.

Теорема о сдвиге. *Если* $\varphi(t)$ *является решением задачи Коши* $L_n x = 0$, $D^i x|_{t=0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$, *то ее сдвиг* $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$ *является решением задачи Коши* $L_n x = 0$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$.

♦ Так как $\varphi(t)$ — решение уравнения (2.2.1), то $L_n\varphi(t) = 0$ $\forall t$, то есть

$$\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0\varphi(t) = 0 \ \forall t.$$

Так как равенство верно $\forall t$, оно останется верным, если заменить в нем t на $t-t_0$, то есть

$$\frac{d^n\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)}+a_0\varphi(t-t_0)=0.$$

Заметим, что

$$\frac{d\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)}=\frac{d\varphi(t-t_0)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d(t-t_0)}{dt}}=\frac{d\varphi(t-t_0)}{dt}=\frac{d\psi(t)}{dt}=D\psi(t)\Rightarrow\frac{d^i\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^i}=D^i\psi(t).$$

И, следовательно,

$$D^n\psi(t)+a_{n-1}D^{n-1}\psi(t)+\ldots+a_1D\psi(t)+a_0\psi(t)=0.$$

То есть $\psi(t)$ также является решением уравнения (2.2.1) и при этом

$$D^i\psi(t)|_{t=t_0}=D^i\varphi(t-t_0)|_{t=t_0}=\ D^i\varphi(t)|_{t=0}=\ \xi_i.$$

⊠

Следствие. *Если* $\varphi_0(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t)$ *— фундаментальная система решений нормированная при* $t=0$*, то* $\varphi_0(t-t_0),\ldots,\varphi_{n-1}(t-t_0)$ *— фундаментальная система решений нормированная при* $t=t_0$.

Следовательно, решение задачи Коши $L_nx=0,\ D^ix|_{t=t_0}=\xi_i\ \forall i=\overline{0,n-1}$ имеет вид

$$x(t)=\xi_0\varphi_0(t-t_0)+\ldots+\xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-t_0).$$

2.3 Построение фундаментальной системы решений линейного стационарного однородного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$L_nx=0,\ t\in\mathbb{R}. \tag{2.3.1}$$

И пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен оператора L_n, имеющего вид $L_n=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1D+a_0D^0$.

Теорема. *Если* $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ *— корни над полем* $\mathbb{C}$ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$ *кратности* $k_1,\ldots,k_s$ *соответственно, то совокупность функций*

$$e^{\lambda_it},te^{\lambda_it},t^2e^{\lambda_it},\ldots,t^{k_i-1}e^{\lambda_it},\ i=\overline{1,s} \tag{2.3.2}$$

является системой линейно независимых решений уравнения (2.3.1).

⧫ Покажем, что функции совокупности (2.3.2) являются решениями уравнения (2.3.1). Так как λ_i — корень характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности k_i, то линейный оператор L_n при факторизации представим в виде

$$L_n=L_{n-k_i}(D-\lambda_iD^0)^{k_i},$$

где L_{n-k_i} — дифференциальный оператор $(n-k_i)$-ого порядка.

Следовательно, функция, являющаяся решением дифференциального уравнения $L_nx=L_{n-k_i}\underbrace{(D-\lambda_iD^0)^{k_i}x}_{=0}$, является решением уравнения (2.3.1).

Подействуем оператором $(D-\lambda_i D^0)^{k_i}$ на функцию $t^m e^{\lambda_i t}$, где $m<k_i$:

$(D-\lambda_i D^0)^{k_i}(t^m e^{\lambda_i t}) = (D-\lambda_i D^0)^{k_i-1}(D-\lambda_i D^0)(t^m e^{\lambda_i t}) = (D-\lambda_i D^0)^{k_i-1}(mt^{m-1}e^{\lambda_i t} + \lambda_i t^m e^{\lambda_i t} - \lambda_i t^m e^{\lambda_i t}) = m(D-\lambda_i D^0)^{k_i-1}(t^{m-1}e^{\lambda_i t}) = m(m-1)(D-\lambda_i D^0)^{k_i-2}(t^{m-2}e^{\lambda_i t}) = \ldots = m(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1(D-\lambda_i D^0)^{k_i-m}(e^{\lambda_i t}) = m!(D-\lambda_i D^0)^{k_i-m-1}\underbrace{(\lambda_i e^{\lambda_i t}-\lambda_i e^{\lambda_i t})}_{=0} = 0.$

Следовательно, функции $t^m e^{\lambda_i t}$ являются решениями уравнения (2.3.1) при $m<k_i$.

Покажем, что функции совокупности (2.3.2) линейно независимые. От противного. Пусть функции линейно зависимые, тогда существует нетривиальная линейная комбинация равная нулю. Она имеет вид

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_s(t)e^{\lambda_s t} = 0,$$

где $P_i(t)$ — многочлен степени не выше k_i-1.

Пусть $P_m(t)$, $m<s$ — последний ненулевой многочлен из многочленов $P_i(t)$. Тогда полученная линейная комбинация имеет вид

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_m(t)e^{\lambda_m t} = 0,\ P_m(t)\neq 0. \tag{2.3.3}$$

Домножим равенство (2.3.3) на функцию $e^{-\lambda_1 t}$ и получим

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + P_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} = 0.$$

Затем продифференцируем полуенное равенство k_1 раз:
$D^{k_1}P_1(t) = 0$;
$D^{k_1}(P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-1}(DP_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + (\lambda_2-\lambda_1)P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) =$
$= D^{k_1-1}(\underbrace{(DP_2(t)+(\lambda_2-\lambda_1)P_2(t))}_{Q_2(t)}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-1}(Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-2}(\widetilde{Q}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) =$
$= \ldots = \widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$, где $Q_2(t)$, $\widetilde{Q}_2(t)$, $\widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)$ — многочлены той же степени, что и $P_1(t)$. Тогда

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + \widetilde{\widetilde{Q}}_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} = 0.$$

Проведем с полученным равенством ту же процедуру, что и с равенством (2.3.3), то есть домножим на $e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}$, а затем продифференцируем k_2 раз. В результате получим равенство вида

$$\widetilde{\widetilde{R}}_3(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} + \ldots + \widetilde{\widetilde{R}}_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_2)t} = 0,$$

где многочлены $\widetilde{\widetilde{R}}_i(t)$ имеют ту же степень, что и многочлен $P_i(t)$.
Продолжим эту процедуру $(m-1)$ раз. В результате получим выражение вида

$$\widetilde{\widetilde{U}}_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t} = 0,$$

где многочлен $\widetilde{\widetilde{U}}_m(t)$ имеет ту же степень, что и многочлен $P_m(t)$.
Из последнего равенства следует, что $\widetilde{\widetilde{U}}_m(t)=0$, но тогда и $P_m(t)=0$, что противоречит выбору P_m. Значит функции линейно независимые. ⊠

Следствие. *Если характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ *над полем* $\mathbb{C}$ *имеет только действительные корни, то совокупность* (2.3.2) *является фундаментальной системой решений уравнения* (2.3.1).

♦ Если все $\lambda_i \in \mathbb{R}$, то (2.3.2) — совокупность n действительных линейно независимых решений уравнения (2.3.1). ⊠

Если среди корней λ_i существует мнимый корень $\lambda = \alpha + \beta i$, то в совокупности (2.3.2) этому корню соответствуют комплекснозначные решения вида $t^m e^{(\alpha+\beta i)t}$. А так как многочлен $\Delta(\lambda)$ имеет действительный коэффициент, то существует сопряженное число $\lambda = \alpha - \beta i$, также являющееся корнем характеристического уравнения, и, следовательно, в совокупности (2.3.2) будут содержаться решения вида $t^m e^{(\alpha-\beta i)t}$.

Заменим в совокупности (2.3.2) пару функций на функции

1. $\dfrac{t^m e^{(\alpha+\beta i)t} + t^m e^{(\alpha-\beta i)t}}{2} = t^m e^{\alpha t}\cos\beta t = Re(t^m e^{(\alpha+\beta i)t})$;
2. $\dfrac{t^m e^{(\alpha+\beta i)t} - t^m e^{(\alpha-\beta i)t}}{2i} = t^m e^{\alpha t}\sin\beta t = Im(t^m e^{(\alpha+\beta i)t})$.

Заметим, что новые функции являются линейными комбинациями функций из совокупности (2.3.2), следовательно, они также являются решениями. При этом матрица перехода от исходной линейно независимой системы функций к новой системе имеет определитель равный произведению определителей вида $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2i} \neq 0$. Следовательно, полученная система функций также линейно независимая, так как матрица перехода невырожденная.

2.4 Неоднородные стационарные линейные уравнения. Метод Коши. Метод Лагранжа.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L_n x = f(t),\ t \in \mathbb{I} \tag{2.4.1}$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$L_n x = 0. \tag{2.4.2}$$

Пусть $f(t)$ — непрерывная на $\mathbb{I}$ функция, и пусть оператор L_n имеет вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$.

Свойства решений линейных неоднородных уравнений:

1. *Если x_1 — решение уравнения* (2.4.1), *то $\forall x_0$ решения уравнения* (2.4.2) *функция $x_1 + x_0$ — решение уравнения* (2.4.1).

   ♦ $L_n(x_1 + x_0) = L_n x_1 + L_n x_0 = f(t) + 0 = f(t)$. Следовательно, функция $x_1 + x_0$ является решением. ⊠

2. *Если x_1 — решение уравнения* (2.4.1), *то $\forall x_2$ решения уравнения* (2.4.1) *функция $x_2 - x_1$ — решение уравнения* (2.4.2).

   ♦ $L_n(x_2 - x_1) = L_n x_2 - L_n x_1 = f(t) - f(t) = 0$. Следовательно, функция $x_2 - x_1$ является решением. ⊠

3. **Принцип суперпозиции:** *Если $x_1(t)$ — решение уравнения $L_n x = f_1(t)$, а $x_2(t)$ — решение уравнения $L_n x = f_2(t)$ с непрерывными функциями f_1 и f_2, то $x_1 + x_2$ — решение уравнения $L_n x = f_1(t) + f_2(t)$.*

Из свойств 1 и 2 следует, что все решения неоднородного линейного уравнения (2.4.1) можно получить, если прибавить к частному решению неоднородного уравнения (2.4.1) все решения однородного уравнения (2.4.2). То есть

$$x_{\text{ОН}} = x_{\text{ОО}} + x_{\text{ЧН}}.$$

• *Пусть* $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2) *нормированная при* $t = 0$*. Тогда функция* $\varphi_{n-1}(t)$ *называется* ***функцией Коши*** *линейного оператора* L_n*.*

Теорема (Метод Коши)**.** *Пусть функция* $f(t)$ *непрерывна на* $\mathbb{I}$ *и пусть* $\varphi_{n-1}(t)$ *— функция Коши оператора* L_n*. Тогда функция*

$$x_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{2.4.3}$$

является решением уравнения (2.4.1) $\forall t_0 \in \mathbb{I}$.

⧫ По формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, получаем

$$\Big(\int\limits_{t_0}^{t} F(t,\tau) d\tau\Big)' = F(t,t) + \int\limits_{t_0}^{t} F'_t(t,\tau) d\tau.$$

Отсюда получаем

$$Dx_1 = \underbrace{\varphi_{n-1}\underbrace{(t-t)}_{=0}}_{=0} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} D\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau;$$

$$D^2x_1 = \underbrace{D\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int\limits_{t_0}^{t} D^2\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D^{n-1}x_1 = \underbrace{D^{n-2}\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int\limits_{t_0}^{t} D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau;$$

$$D^{n}x_1 = \underbrace{\underbrace{D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-t)}_{=1} f(t)}_{f(t)} + \int\limits_{t_0}^{t} D^{n}\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Подставим и получим

$$L_n x_1 =$$

$$= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(D^n\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_{n-1}D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau) + \dots + a_1 D\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_0 D^0 \varphi_{n-1}(t-\tau)\Big) f(\tau) d\tau =$$

$$= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (L_n \varphi_{n-1}(t-\tau)) f(\tau) d\tau.$$

Так как функция φ_{n-1} является функцией Коши оператора L_n, то эта функция является решением уравнения (2.4.2). А функция $\varphi_{n-1}(t-\tau)$ является сдвигом функции Коши на τ, а значит также является решением уравнения (2.4.2). Тогда $L_n\varphi_{n-1}(t-\tau) = 0$. Отсюда $L_n x_1 = f(t)$, и, следовательно, x_1 является решением уравнения (2.4.1). ⊠

Следствие. *Функция* (2.4.3) *является решением задачи Коши* $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = 0$, $\forall i = \overline{0, n-1}$.

Следствие. *Если* $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2), *нормированная при* $t = 0$, *то задача Коши* $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$ *имеет решение*

$$x(t) = \xi_0\varphi_0(t-t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Теорема (Метод Лагранжа)**.** *Пусть* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2). *Тогда функция*

$$x_1(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + u_n(t)\varphi_n(t)$$

является решением уравнения (2.4.1), *если функции* $u_i(t)$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} Du_1\varphi_1 + \ldots + Du_n\varphi_n = 0, \\ Du_1 D\varphi_1 + \ldots + Du_n D\varphi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Du_1 D^{n-2}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-2}\varphi_n = 0, \\ Du_1 D^{n-1}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-1}\varphi_n = f(t); \end{cases} \tag{2.4.4}$$

♦ Определитель матрицы системы (2.4.4) равен Вронскиану системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Следовательно, он ненулевой, и система имеет единственное решение. Причем из принципа Крамера следует, что это решение состоит из непрерывных функций ($\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i непрерывная, Δ непрерывная и ненулевая). Тогда функции Du_i интегрируемые, а следовательно и дифференцируемые.

Покажем, что функция $x_1(t)$ с найденными таким образом функциями u_i является решением уравнения (2.4.1):

$$Dx_1 = \underbrace{Du_1\varphi_1 + \ldots + Du_n\varphi_n}_{=0} + u_1 D\varphi_1 + \ldots + u_n D\varphi_n;$$

$$D^2 x_1 = \underbrace{Du_1 D\varphi_1 + \ldots + Du_n D\varphi_n}_{=0} + u_1 D^2\varphi_1 + \ldots + u_n D^2\varphi_n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{n-1}x_1 = \underbrace{Du_1 D^{n-2}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-2}\varphi_n}_{=0} + u_1 D^{n-1}\varphi_1 + \ldots + u_n D^{n-1}\varphi_n;$$

$$D^n x_1 = \underbrace{Du_1 D^{n-1}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-1}\varphi_n}_{f(t)} + u_1 D^n\varphi_1 + \ldots + u_n D^n\varphi_n.$$

Теперь подставим и вычислим $L_n x_1$:

$$L_n x_1 = f(t) + u_1(t)\underbrace{L_n\varphi_1(t)}_{=0} + \ldots + u_n(t)\underbrace{L_n\varphi_n(t)}_{=0}.$$

Множители нулевые, так как являются решениями уравнения (2.4.1). Следовательно, $L_n x_1 = f(t)$, то есть x_1 — решение уравнения (2.4.1). ⊠

2.5 Стационарное линейное неоднородное уравнение со специальной правой частью. Метод Эйлера.

Пусть линейный оператор L_n имеет вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$, и пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен этого оператора.

Теорема. *Уравнение*

$$L_n z = P(t)e^{\gamma t},$$

где L_n — оператор дифференцирования с комплексными коэффициентами, $P(t)$ — многочлен с комплексными коэффициентами степени m и γ — комплексное число (то есть $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, $\deg P(t) = m$, $\gamma \in \mathbb{C}$), имеет частное решение вида

$$z_1(t) = t^k Q(t)e^{\gamma t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$, k — кратность корня γ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ (если γ не корень, то $k = 0$).

♦

1. Пусть $\gamma = 0$ и пусть γ не является корнем характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то есть кратность $k = 0$. Пусть $P(t) = b_m t^m + \ldots + b_1 t + b_0$. Подставим функцию $z_1(t) = d_m t^m + d_{m-1}t^{m-1} + \ldots + d_1 t + d_0$ и приравняем соответствующие коэффициенты у многочленов в полученном равенстве:
   $t^m : a_0 \cdot d_m = b_m$, так как γ не является корнем, то $a_0 \neq 0$, следовательно, $d_m = \dfrac{b_m}{a_0}$.
   $t^{m-1} : a_1 \cdot m \cdot d_m + a_0 \cdot d_{m-1} = b_{m-1}$ и $d_{m-1} = \dfrac{1}{a_0}(b_{m-1} + a_1 \cdot m \cdot d_m)$.
   $t^{m-2} : a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m + a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} + a_0 \cdot d_{m-2} = b_{m-2}$
   и $d_{m-2} = \dfrac{1}{a_0}(b_{m-2} - a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} \cdot a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m)$.
   Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим коэффициенты многочлена, являющиеся решением уравнения, причем его степень не выше n.

2. Пусть $\gamma = 0$ и пусть число γ является корнем характериснеского уравнения кратности $k > 0$. Тогда оператор L_n имеет вид

   $$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_k D^{k-1},$$

   причем $a_k \neq 0$.

   Введем функцию $D^k z = u$. Тогда $\widetilde{L}_{n-k}u = P(t)$, где $\widetilde{L}_{n-k}$ — оператор дифференцирования порядка $n-k$, причем $\gamma = 0$ не является для него корнем характеристического уравнения. По доказанному выше это уравнение имеет частное решение вида $u_1(t) = Q(t)$, где $\deg Q(t) \leqslant m$. Следовательно, $D^k z_1 = Q(t)$. Тогда z_1 можно найти проинтегрировав полученное равенство k раз. В результате получим $z_1 = \widetilde{Q}(t)$. где $\deg \widetilde{Q}(t) = n + k$. Причем эпоследние k коэффициентов этого многочлена являются произвольными постоянными. Так как нужно найти лишь одно решение, выберем значения этих произвольных постоянных равные нулю. В результате полученное решение имеет вид $z_1 = t^k \widetilde{\widetilde{Q}}(t)$, где $\deg \widetilde{\widetilde{Q}}(t) \leqslant m$.

3. Пусть $\gamma \neq 0$. И пусть кратность корня γ равна k. Сделаем замену неизвестных функций $z(t) = u(t)e^{\gamma t}$. Тогда

$Dz = Due^{\gamma t} + u\gamma e^{\gamma t}$;
$D^2z = D^2ue^{\gamma t} + 2Du\gamma e^{\gamma t} + u\gamma^2 e^{\gamma t}$;
$D^3z = D^3ue^{\gamma t} + 3D^2u\gamma e^{\gamma t} + 3D^u\gamma e^{\gamma t} + u\gamma^3 e^{\gamma t}$;
И так далее.
Подставим полученные выражения в уравнение и сократим полученное равенство на $e^{\gamma t}$. В результате получим уравнение вида $\widetilde{L}_n u = P(t)$. При этом оператор $\widetilde{L}_n$ имеет следующие коэффициенты:
$u : a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \ldots = \Delta(\gamma)$;
$Du : a_1 + 2\gamma a_2 + 3\gamma^2 a_3 + \ldots = \Delta'(\gamma)$;
$D^2u : a_2 + 3\gamma a_3 + 6\gamma a_4 + \ldots = \dfrac{1}{2!}\Delta''(\gamma)$;
$D^iu : \dfrac{1}{i!}\Delta^{(i)}(\gamma)$.
Так как γ является корнем многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности k, то γ является корнем и для всех $\Delta^{(i)}(\lambda)\ \forall i < k$. Следовательно, все коэффициенты оператора $\widetilde{L}_n$ при $D^{(i)}u$ равны нулю, если $i < k$. Значит оператор $\widetilde{L}_n$ имеет корень характеристического уравнения равный нулю кратности k. Тогда по доказанному выше уравнение $\widetilde{L}_n u$ имеет решение вида $u(t) = t^kQ(t)$, где $\deg Q(t) \leqslant m$. И следовательно, решение исходного уравнения имеет вид $z_1(t) = t^kQ(t)e^{\gamma t}$.

⊠

Следствие. *Уравнение*

$$L_n x = P(t)e^{\gamma t},$$

где $x(t)$ *— неизвестная действительная функция,* $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, $\deg P(t) = m$, $\gamma \in \mathbb{R}$, *имеет частное решение вида*

$$x_1(t) = t^kQ(t)e^{\gamma t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q(t) \leqslant m$, k *— кратность корня* γ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$.

⧫ Рассмотрим комплексное уравнение

$$L_n z = P(t)e^{\gamma t} + i \cdot 0.$$

Тогда из теоремы следует, что это уравнение имеет частное решение вида

$$z_1 = t^kQ(t)e^{\gamma t},$$

где $Q \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$. Но оператор L_n имеет действительные коэффициенты, следовательно $Re(z)$ является решением уравнения $L_n x = Re(P(t)e^{\gamma t} + i \cdot 0) = P(t)e^{\gamma t}$, то есть $Re(z)$ является решением исходного уравнения, то есть

$$x_1(t) = t^k\widetilde{Q}(t)e^{\gamma t},$$

где $\widetilde{Q}(t) = Re(Q(t))$ и $\deg \widetilde{Q}(t) \leqslant m$. ⊠

Следствие. *Уравнение*

$$L_n x = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)),$$

где $P_1(t), P_2(t) \in \mathbb{R}[t]$, *причем* $\max\{\deg P_1(t), \deg P_2(t)\} = m$, *и* $(\alpha + \beta i)$ *— корень многочлена* $\Delta(\lambda)$ *кратности* k *имеет решение вида*

$$x_1(t) = t^ke^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)),$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q_1(t) \leqslant m$, $\deg Q_2(t) \leqslant m$, k *— кратность корня* $(\alpha + \beta i)$ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$.

♦ Рассмотрим уравнение

$$L_n z = (P_1(t) - iP_2(t))e^{(\alpha+\beta i)t}.$$

Тогда по теореме это уравнение имеет решение вида

$$z_1 = t^k Q(t) e^{(\alpha+\beta i)t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$. Так как L_n имеет действительные коэффициенты, то $Re(z_1)$ является действительным решением уравнения

$$L_n = Re((P_1(t) - iP_2(t))e^{(\alpha+\beta i)t}).$$

При этом $Re((P_1 - iP_2)e^{(\alpha+\beta i)t}) = Re(P_1 - iP_2)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) = e^{\alpha t}(P_1 \cos \beta t + P_2 \sin \beta t)$. То есть $Re(z_1)$ является решением исходного уравнения. Обозначим $Q_1(t) = Re(Q(t)),\ Q_2(t) = -Im(Q(t))$. Тогда

$$Re(t^k Q(t) e^{(\alpha+\beta i)t}) = Re(t^k (Q_1 - iQ_2)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)) = t^k e^{\alpha t}(Q_1 \cos \beta t + Q_2 \sin \beta t),$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q_1(t), \deg Q_2(t) \leqslant m$. ⊠

2.6 Непрерывная зависимость решений от начальных данных.

Рассмотрим уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.6.1}$$

с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$. Пусть $x_0(t)$ — решение задачи Коши $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

• *Тогда для любого решения $x(t)$ уравнения* (2.6.1) *сумма*

$$\Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)|$$

называется ***отклонением*** *решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$. А сумма*

$$\Delta_x(t_0) = \Delta_x(t)|_{t=t_0} = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0)|$$

называется ***начальным отклонением****.*

• *Решение $x_0(t)$ называется* ***непрерывно зависящим от начальных данных*** *на промежутке $\mathbb{I}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x(t)\ \Delta_x(t) < \delta \Rightarrow \Delta_x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}.$$

Пусть решение $x(t)$ при $t = t_0$ имеет начальные значения $D^i x(t)|_{t=t_0} = \xi_i + \Delta\xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда $\Delta_x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta\xi_i|$.

Если $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений нормированная при $t = 0$ соответствующего однородного уравнения $L_n x = 0$, то по правилу Коши

$$x_0(t) = \xi_0 \varphi_0(t - t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) = (\xi_0 + \Delta\xi_0)\varphi_0(t - t_0) + \ldots + (\xi_{n-1} + \Delta\xi_{n-1})\varphi_{n-1}(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

$$x(t) - x_0(t) = \Delta\xi_0\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \Delta\xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t - t_0).$$

Тогда с помощью этого выражения получим следующее (обозначим его (2.6.2))

$$\Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)| = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i(x(t) - x_0(t))| =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta\xi_0 D^i\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \Delta\xi_{n-1} D^i\varphi_{n-1}(t - t_0)|.$$

Из (2.6.2) следует, что отклонение решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$ не зависит от самого решения $x_0(t)$, а зависит лишь от начального отклонения решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$. Следовательно, все решения уравнения (2.6.1) будут либо одновременно зависеть от начальных данных, либо одновременно независеть.

Кроме того из уравнения (2.6.2) следует, что отклонение $x(t)$ от $x_0(t)$ зависит лишь от функций $\varphi_i(t)$, которые являются решениями уравнения $L_n x = 0$ и не зависят от неоднородности $f(t)$. Следовательно, непрерывная зависимость от начальных данных решений зависит лишь от оператора L_n.

Теорема. *Если промежуток $\mathbb{I}$ является отрезком, то любое решение уравнения* (2.6.1) *непрерывно зависит от начальных данных.*

♦ Каждая из функций $\varphi_i(t)$ является решением уравнения $L_n x = 0$. Следовательно, они и все их производные до $(n-1)$-го порядка непрерывны на всей числовой прямой. А так как функции непрерывные на замкнутом множестве ограничены, то

$$\exists M : |D^i\varphi_j(t)| \leqslant M \quad \forall i, j = \overline{0, n-1}.$$

Тогда из (2.6.2)

$$\Delta_x(t) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j| \cdot |D^i\varphi_j(t - t_0)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j| \cdot M = \sum_{i=0}^{n-1}(M \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j|) = n \cdot M \cdot \Delta_x(t_0).$$

Следовательно, если начальное отклонение $\Delta_x(t_0) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{n \cdot M}$, то $\Delta_x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}$. ⊠

• *Решение уравнения* (2.6.1) *называется* ***интегрально непрерывным*** *на промежутке $\mathbb{I}$, если оно непрерывно зависит от начальных данных на любом отрезке $I_1 \subset \mathbb{I}$.*

Следствие. *Любое решение уравнения* (2.6.1) *с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$ интегрально непрерывно на $\mathbb{I}$.*

2.7 Устойчивость решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.7.1}$$

с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$. Пусть $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$.

• *Решение $x_0(t)$ уравнения (2.7.1) называется **устойчивым по Ляпунову**, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$. То есть*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x(t)\ \Delta_x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0)| < \delta \Rightarrow \Delta_x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t) - D^i x_0(t)| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0.$$

• *Если кроме того $\lim\limits_{t\to+\infty} \Delta_x(t) = 0$, то решение $x_0(t)$ называется **асимптотически устойчивым**. Решение не являющееся устойчивым называется **неустойчивым**.*

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных данных следует, что все решения уравнения (2.7.1) либо одновременно устойчивы, либо одновременно неустойчивы.

• *Уравнение называется **устойчивым**, если все его решения устойчивы (аналогично неустойчивым и асимптотически устойчивым).*

Кроме того, так как непрерывная зависимость решений от начальных данных не зависит от неоднородности $f(t)$, то неоднородность не влияет на устойчивость уравнения. Следовательно, исследование устойчивости любого решения уравнения (2.7.1) можно заменить исследованием устойчивости нулевого решения соответствующего однородного уравнения $L_n x = 0$. Таким образом, уравнение (2.7.1) является устойчивым, если

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall x(t)\ \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t_0)| < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |D^i x(t)| < \varepsilon.$$

Теорема. 1. *Уравнение (2.7.1) устойчиво $\Longleftrightarrow$ действительные части корней характеристического уравнения оператора L_n неположительны, причем корни с нулевой действительной частью имеют кратность $k = 1$.*

2. *Уравнение (2.7.1) асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ действительные части корней характеристического уравнения отрицательны.*

♦ $\Rightarrow$)

1. Пусть среди корней характеристического уравнения существует корень $\lambda_0 > 0$ или $\alpha_0 + \beta_0 i$, где $\alpha_0 > 0$. Тогда среди решений уравнения $L_n x = 0$ есть решения $Ce^{\lambda_0 t}$ или $Ce^{\alpha_0 t}\cos(\beta_0 t)$, $Ce^{\alpha_0 t}\sin(\beta_0 t)$, где C — некоторая постоянная.

   Выбирая постоянную C достаточно малую, можно получить решение, имеющее сколь угодно малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом стремящееся к ∞ при $t \to +\infty$, что делает невозможным устойчивость решения.
   Если характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_0 = 0$ или $\beta_0 i$ кратности $k > 1$, то такими свойствами будут обладать решения вида Ct, $Ct\cos(\beta_0 t)$, $Ct\sin(\beta_0 t)$.

2. Если же корни характеристического уравнения $\lambda_0 = 0$ или $\beta_0 i$ имеют кратность $k = 1$, то уравнение имеет решения вида C, $C\cos(\beta_0 t)$, $C\sin(\beta_0 t)$, которые при подходящем выборе постоянной C будут иметь малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом к нулю стремиться не будут, что делает невозможным асимптотическую устойчивость.

$\Leftarrow$) Общее решение однородного уравнения является линейной комбинацией функций вида $t^k e^{\lambda t}$, $t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ и $t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, где λ, $\alpha+\beta i$ — корни характеристического уравнения. Если $\lambda < 0$ и $\alpha < 0$, то все эти функции и их производные стремятся к нулю при $t\to+\infty$. А следовательно и все решения уравнения стремятся к нулю при $t\to+\infty$. Следовательно, уравнение асимптотически устойчиво.

Если $\lambda = 0$ и $\alpha = 0$, причем эти корни имеют кратность 1, то среди решений уравнения будут также решения вида 1, $\cos(\beta t)$, $\sin(\beta t)$. Эти функции вместе со своими производными являются ограниченными на всей числовой прямой. Следовательно, за счет выбора малого начального отклонения мы можем получить малое отклонение этого решения $x(t)$ от этого отклонения. ⊠

Теорема. *Для устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были неотрицательны.*
Для асимптотической устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были положительны.

♦

1. Пусть линейное уравнение (2.7.1) является асимптотически устойчивым. Все корни характеристического уравнения имеют вид $-\lambda_i$, $\alpha_j \pm \beta_j i$, где λ_i, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_i > 0$, $\alpha_j > 0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_i(\lambda+\lambda_i)\cdot\prod_j(\lambda+\alpha_j-\beta_j i)(\lambda+\alpha_j+\beta_j i) = \prod_i(\lambda+\lambda_i)\cdot\prod_j(\lambda^2+2\alpha_j\lambda+\alpha_j^2+\beta_j^2)$$

   — произведение многочленов с положительными коэффициентами. Следовательно, характеристический многочлен — многочлен с положительными коэффициентами.

2. Если уравнение (2.7.1) устойчиво, но не асимптотически, то среди корней могут быть корни $\lambda = 0$, $\pm\beta_k i$, причем кратности корней равны 1. Следовательно, характеристический многочлен имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \prod_i(\lambda+\lambda_i)\cdot\prod_j(\lambda^2+2\alpha_j\lambda+\alpha_j^2+\beta_j^2)\cdot\lambda\cdot(\lambda^2+\beta_k^2)$$

   — произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами. Следовательно, $\Delta(\lambda)$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами.

⊠

2.8 Фазовая плоскость.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.8.1}$$

И пусть $x(t)$ — некоторое решение этого уравнения.

• ***Фазовым графиком*** *решения $x(t)$ называется график параметрически заданной функции вида*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = Dx(t); \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

• *Плоскость $\mathbb{R}^2$, на которой изображен фазовый график, называется* ***фазовой плоскостью****.*

В соответствии с теоремой о существовании и единственности задачи Коши для любой точки плоскости (x_0, y_0) найдется решение $x(t)$, которое при некотором $t = 0$ удовлетворяет условию

$$\begin{cases} x|_{t=t_0} = x_0, \\ Dx|_{t=t_0} = y_0; \end{cases}$$

следовательно, через любую точкую на фазовой плоскости проходит фазовый график.

Теорема. *Два графика уравнения* (2.8.1) *либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

♦ Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения уравнения (2.8.1), и предположим, что их фазовые графики проходят через точку (x_0, y_0), то есть $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}:$

$$\begin{cases} x_1|_{t=t_1} = x_1, \\ Dx_1|_{t=t_1} = y_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2|_{t=t_2} = x_0, \\ Dx_2|_{t=t_2} = y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{x}(t) = x_1(t - t_2 + t_1)$. Функция $\widetilde{x}(t)$ является сдвигом решения x_1, следовательно, функция $\widetilde{x}(t)$ также является решением уравнения (2.8.1). При этом

$$\widetilde{x}|_{t=t_2} = x_1(t_2 - t_2 + t_1) = x_1|_{t=t_1} = x_0;$$

$$D\widetilde{x}|_{t=t_2} = Dx_1(t_2 - t_2 + t_1) = Dx_1|_{t=t_1} = y_0;$$

то есть функция $\widetilde{x}(t)$ имеет те же значения, что и функция x_2, то есть начальные значения функции $\widetilde{x}$ при $t = t_2$ совпадают с начальными значениями функции $\widetilde{x}$. Следовательно, функция x_2 равна функции $\widetilde{x}$, и x_2 является сдвигом функции x_1. А значит фазовый график функций их сдвига совпадает. ⊠

• *Решение, сохраняющее постоянное значение при всех t, называется* ***стационарным****.*

Фазовый график стационарного решения $x(t) \equiv C$ состоит из единственной точки $(C, 0)$.

• *Точка, являющаяся фазовым графиком стационарного решения, называется* ***точкой покоя*** *уравнения.*

Фазовые графики нестационарных решений являются параметрически заданными линиями. На таких линиях принято указывать направление движения точки с координатами $(x(t), y(t))$ при увеличении t. В дальнейшем под фазовым графиком будем понимать ориентированный фазовый график.

Пусть фазовый график решения $x(t)$ проходит через точку (x_0, y_0). Следовательно, $\exists t_0 :$ $y_0 = Dx(t_0)$. Если $y_0 > 0$, то $Dx(t_0) > 0$. И, следовательно, функция $x(t)$ в точке t_0 возрастает. Тогда направление фазового графика в точках верхней полуплоскости происходит слева направо. Аналогично двивжение по графикув точках нижней полуплоскости происходит справа налево. Так как угловой коэффициент в точке $(x(t), y(t))$ равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{D^2x(t)}{Dx(t)} = \frac{-a_1 Dx - a_0 x}{Dx} = \frac{-a_1 y - a_0 x}{y},$$

то в точках плоскости, для которых $-a_1 y - a_0 x = 0$, касательные к фазовым графикам параллельны оси Ox. А в точках, для которых $y > 0$ (ось Ox), фазовые графики имеют касательные параллельные оси Oy.

2.9 Классификация точек покоя.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9.1}$$

Любое уравнение вида (2.9.1) имеет стационарное решение $x(t) \equiv C$. Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой покоя для этого уравнения. Построим фазовый график для других решений. Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения (2.9.1) записанные с учетом кратности.

I группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
Тогда фазовые графики решений решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{2.9.2}$$

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Тогда, исключая из системы t, получим уравнение $y = \lambda_1 x$. Причем, если $C_1 > 0$, то $x > 0$, а если $C_1 < 0$, то $x < 0$. Следовательно, лучи $y = \lambda_1 x, x > 0$ и $y = \lambda_1 x, x < 0$ являются фазовыми траекториями этих решений.

2. Пусть $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тогда фазовыми графиками являются лучи $y = \lambda_2 x, x > 0$ и $y = \lambda_2 x, x < 0$.

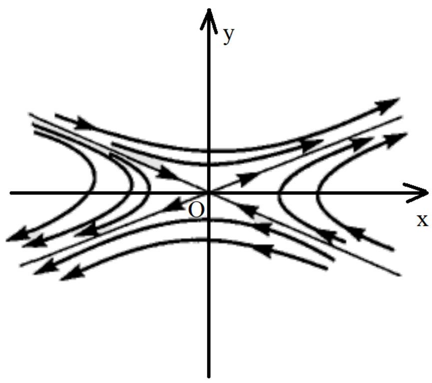
3. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Заметим, что при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ фазовые графики уходят в бесконечность.

Найдем асимптоты фазовых графиков ($y = kx + b$):

$$k = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}}{C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1\lambda_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\lambda_2}{C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2} = \lambda_2.$$

$$b = \lim_{t\to+\infty} (y - \lambda_2 x) = \lim_{t\to+\infty} (C_1e^{\lambda_1 t}(\lambda_1 - \lambda_2)) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = \lambda_2 x$ является асимптотой фазовых графиков при $t \to +\infty$. Аналогично можно доказать, что при $t \to -\infty$ асимптотой является прямая $y = \lambda_1 x$.



• *Точки покоя, в окрестности которых фазовые графики имеют такой вид, называются* ***седлом****.*

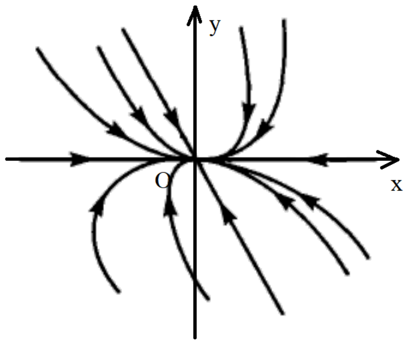
II группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.
Тогда фазовые графики описываются уравнениями (2.9.2).

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, тогда фазовыми траекториями являются лучи $y = \lambda_1 x, x > 0$ и $y = \lambda_1 x, x < 0$.

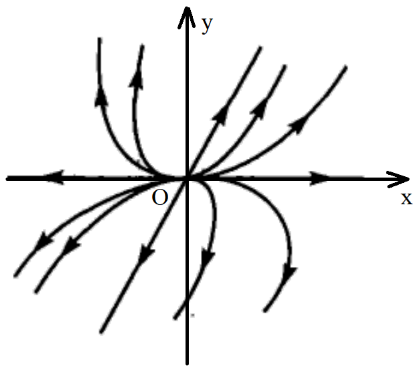
2. Пусть $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тогда фазовыми траекториями являются лучи $y = \lambda_2 x, x > 0$ и $y = \lambda_2 x, x < 0$.

3. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

   (a) Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Тогда при $t \to +\infty$ фазовый график стремится к точке $O(0,0)$. А при $t \to -\infty$ уходит в бесконечность.
   Найдем асимптоты. $k = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lambda_2$. Следовательно, прямая $y = \lambda_2 x$ является асимптотой. При $t \to -\infty$ $k = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lambda_1$, а $b = \lim\limits_{t\to+\infty}(y - \lambda_1 x) = \infty$.



   (b) Аналогично можно получить, что фазовые графики для случая $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ выглядят следующим образом.



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовый график имеет такой вид, называется* ***бикритическим узлом****. Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

III группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда фазовые графики решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \\ y(t) = (C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t)e^{\lambda t}. \end{cases}$$

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Исключив из параметрического уравнения t, лучи $y = \lambda x$, $x > 0$ и $y = \lambda x$, $x < 0$ являются фазовыми графиками.

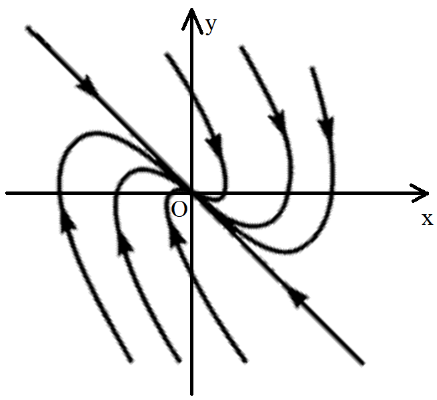
2. Пусть $C_2 \neq 0$.

(a) Пусть $\lambda < 0$. Тогда фазовый график при $t \to +\infty$ стремится к точку $O(0,0)$. Если $t \to -\infty$, то фазовый график уходит на бесконечность.
Найдем асимптотические направления:

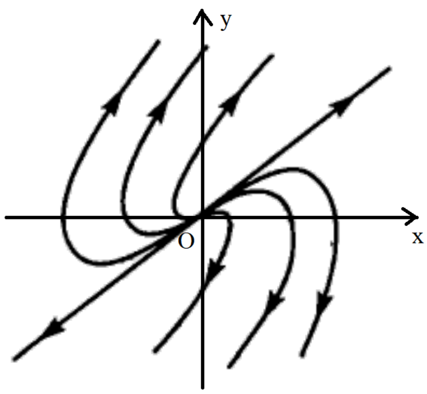
$$k = \lim_{t\to+\infty} \frac{(C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t)e^{\lambda t}}{(C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}} = \lambda;$$

$$b = \lim_{t\to+\infty} y(t) - \lambda x(t) = C_2 e^{\lambda t} = 0.$$

Отсюда $y = \lambda x$ — асимптота фазовых графиков при $t \to +\infty$. Аналогично при $t \to -\infty$ асимптот нет. Прямая $y = \lambda x$ задает асимптотическое направление.



(b) Пусть $\lambda > 0$. Тогда фазовый график при $t \to +\infty$ уходит на бесконечность, а при $t \to -\infty$ стремится к точке $O(0,0)$. Аналогично фазовый график выглядит следующим образом.



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики имеют такой вид, называется* ***монокритическим узлом****. Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

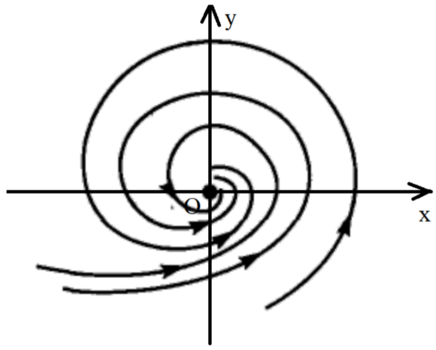
IV группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

1. Пусть $\alpha = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

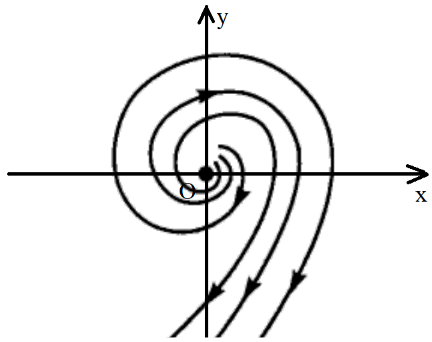
$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \\ y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \alpha \cos(\beta t) + C_2 \alpha \sin(\beta t) - C_1 \beta \sin(\beta t) + C_2 \beta \cos(\beta t)). \end{cases}$$

(a) Если $\alpha < 0$, то фазовый график при $t \to +\infty$ стремится к точке $O(0,0)$, а при $t \to -\infty$ уходит на бесконечность. При этом изменение t от $-\infty$ до $+\infty$ функции

$x(t)$ и $y(t)$ меняют знак бесконечное количество раз. Следовательно, графики имеют вид



(b) Если $\alpha > 0$, то аналогично можно получить, что фазовые графики имеют вид



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называются* ***фокусом***. *Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

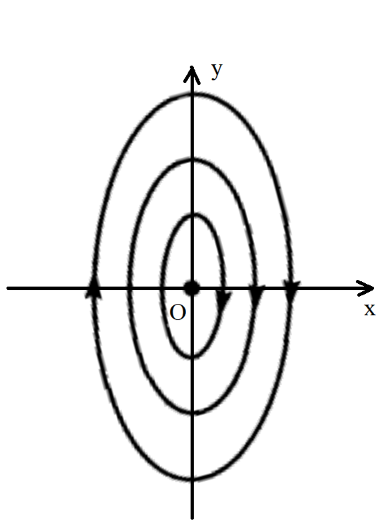
2. Пусть $\alpha = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t), \\ y(t) = -C_1\beta\sin(\beta t) + C_2\beta\cos(\beta t). \end{cases}$$

Исключим из системы t. Тогда

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{\beta}\right)^2 = C_1^2 + \frac{C_2^2}{\beta} \text{ — эллипс.}$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид

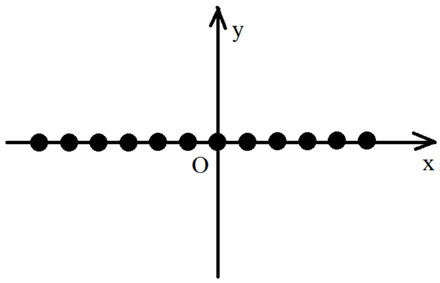


• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называется* ***центром***.

V группа. Пусть среди корней характеристического уравнения есть 0. Тогда в уравнении (1) $a_0 = 0$, и уравнение имеет бесконечно много решений вида $x = C$, фазовые графики которых описываются уравнениями

$$\begin{cases} x = C, \\ y = 0; \end{cases}$$

и имеют вид



Следовательно, каждая точка оси Ox является точкой покоя.

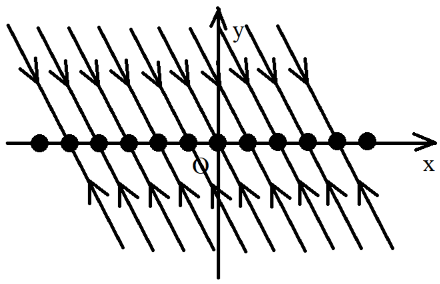
• *Прямая, каждая точка которой является фазовым графиком, называется* ***прямой покоя***.

1. Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

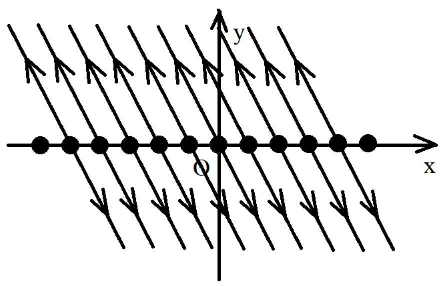
$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{\lambda t}, \\ y(t) = \lambda C_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Исключив из системы t, получим $y = \lambda(x - C_1)$. Получаем, что фазовые графики имеют вид

$\lambda < 0$



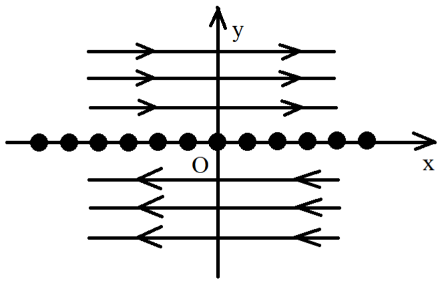
$\lambda > 0$



2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 t, \\ y(t) = C_2. \end{cases}$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид



Глава 3

Линейные стационарные векторные уравнения.

3.1 Системы стационарных линейных уравнений.

• ***Системой дифференциальных уравнений*** *называется совокупность выражений вида*

$$F_i(t, x_1(t), Dx_1, \ldots, D^{m_1}x_1, x_2(t), Dx_2, \ldots, D^{m_2}x_2, \ldots, x_k(t), D^k x, \ldots, D^{m_k}x_k) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, s, \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R},$$

где F_i — некоторая функция от своих $(m_1 + \ldots + m_k + k + 1)$ переменных.

• *Говорят, что система дифференциальных уравнений* ***имеет нормальную форму****, если она состоит из уравнений вида*

$$D^{m_i}x_i(t) = f_i(t, x_1(t), Dx_1, \ldots, D^{m_1-1}x_1, \ldots, x_k(t), Dx_k, \ldots, D^{m_k-1}x_k), \quad i = 1, \ldots, k.$$

• *Если функции f_i являются линейными функциями от неизвестных функций $x_i(t)$ и их производных, то система называется* ***линейной****.*

Линейную систему из k уравнений можно заменить эквивалентной ей системой из $m_1 + \ldots + m_k$ линейных уравнений первого порядка. Следовательно, любое линейное уравнение можно свести к системе из k уравнений.

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать лишь системы следующего вида

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Dx_n = a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t); \end{cases} \quad t \in \mathbb{I}. \tag{3.1.1}$$

• ***Решением*** *системы* (3.1.1) *называется совокупность непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{I}$ функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, обращающих систему* (3.1.1) *в верное равенство.*

• *Если коэффициенты систем* (3.1.1) *являются постоянными, то системы называются* ***стационарными линейными****.*

• ***Задачей Коши*** *для системы* (3.1.1) *называется задача отыскания решения системы* (3.1.1)*, удовлетворяющего условиям*

$$x_1|_{t=t_0} = \xi_0, x_2|_{t=t_0} = \xi_1, \ldots, x_n|_{t=t_0} = \xi_n, \quad t_0 \in \mathbb{I}.$$

Обозначив $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $DX(t) = \begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ \vdots \\ Dx_n(t) \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, систему (3.1.1) можно записать в матричном виде

$$DX = AX + f(t). \tag{3.1.2}$$

А начальные условия задачи Коши в виде $X|_{t=t_0} = \xi$, где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

• *Уравнение* (3.1.2) *называется* ***линейным стационарным векторным уравнением***.

• *Если в уравнении* (3.1.2) *матрицы X, A, f являются комплекснозначными, то уравнение называется* ***комплекснозначным***.

Лемма. *Задача Коши для комплекснозначного уравнения*

$$DZ = CZ + h(t), \quad Z|_{t=t_0} = \xi \tag{3.1.3}$$

с треугольной матрицей $C \in \mathbb{C}_{n,n}$ и непрерывной на $\mathbb{I}$ комплекснозначной функцией $h(t)$ имеет единственное решение $\forall t_0 \in \mathbb{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{C}_{n,1}$.

⧫ Пусть C — нижняя треугольная матрица. Тогда задача Коши (3.1.3) в коорживатной форме имеет вид

$$\begin{cases} Dz_1 = c_{11}z_1 + h_1(t), \\ Dz_2 = c_{21}z_1 + c_{22} + h_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dz_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \ldots + c_{nn}z_n + h_n(t); \end{cases}$$

При этом $\begin{cases} z_1|_{t=t_0} = \xi_1, \\ z_2|_{t=t_0} = \xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_n|_{t=t_0} = \xi_n, \end{cases}$ Из него следует, что $z_1(t)$ — решение задачи Коши для линейного стационарного уравнения первого порядка. Такое решение всегда существует и единственно. Подставим его во второе уравнение. Получим, что $z_2(t)$ также решение стационарного линейного уравнения первого порядка, которое также существует и единственно. Продолжая далее аналогично, построим векторную функцию $z(t)$, которая является единственным решением задачи Коши (3.1.3).

Лемма для верхней треугольной матрицы доказывается аналогично, начиная с последнего уравнения. ⊠

Теорема. *Задача Коши для действительного стационарного уравнения*

$$DX = AX + f(t), \quad X|_{t=t_0} = \xi \tag{3.1.4}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ имеет единственное решение $\forall t_0 \in \mathbb{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}_{n,1}$.

⧫ Любая действительная матрица A над полем $\mathbb{C}$ имеет жорданову нормальную форму, то есть подобную ей комплексную жорданову матрицу $J \in \mathbb{C}_{n,n}$. То есть существует невырожденная матрица $S(s_{ij}) \in \mathbb{C}_{n,n} : J = S^{-1}AS$. Сделаем в уравнении (3.1.4) замену $X = SZ$. Тогда

$$D(SZ) = D\begin{pmatrix} s_{11}z_1 + \ldots + s_{1n}z_n \\ \vdots \\ s_{n1}z_1 + \ldots + s_{nn}z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}Dz_1 + \ldots + s_{1n}Dz_n \\ \vdots \\ s_{n1}Dz_1 + \ldots + s_{nn}Dz_n \end{pmatrix} = SDZ.$$

Тогда $SDZ = ASZ + f(t)$, $SZ|_{t=t_0} = \xi$.

Домножим полученные уравнения на S^{-1} и получим

$$DZ = \underbrace{S^{-1}AS}_{J}Z + S^{-1}f(t), \quad Z|_{t=t_0} = S^{-1}\xi.$$

В результате получими задачу Коши для комплекснозначного уравнения с матрицей J, которая является треугольной, так как жорданова матрица треугольная. По лемме это уравнение имеет единственное решение $Z(t)$. Следовательно, функция $X(t) = SZ(t)$ является решением исходной задачи Коши (3.1.4).
Но в общем случае это решение является комплекснозначным, то есть имеет вид $X(t) = U(t) + iV(t)$, где $U(t)$ и $V(t)$ — действительные векторные функции. Подставим это выражение в уравнение (3.1.4):

$$DU + iDV = \underset{\in\mathbb{R}}{A}(U + iV) + \underset{\in\mathbb{R}}{f(t)}, \quad (U + iV)|_{t=t_0} = \underset{\in\mathbb{R}}{\xi}.$$

Приравняем в полученном равенстве действительные части слева и справа:

$$DU = AU + f(t), \quad U|_{t=t_0} = \xi.$$

Следовательно, векторная функция $U(t) = Re(X(t))$ является единственным решением задачи Коши (3.1.4). ⊠

3.2 Структура множества решений линейной стационарной системы однородных уравнений.

Рассмотрим стационарное линейное уравнение

$$DX = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}_{n,n}. \tag{3.2.1}$$

И пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — два решения уравнения (3.2.1). Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $D(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha DX_1 + \beta DX_2 = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = A(\alpha X_1 + \beta X_2)$. И, следовательно, векторная функция $\alpha X_1 + \beta X_2$ также является решением уравнения (3.2.1). Таким образом, множество решений системы (3.2.1) является **векторным пространством**.

• *Пусть* $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ *— некоторые векторные функции.*

Определитель
$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$
*называется **определителем Вронского** системы $X_1, \dots, X_n$.*

Теорема. *Если векторные функции $X_1, \dots, X_n$ линейно зависимы, то их $W(t) = 0\ \forall t$.*

⧫ Если эти функции линейно зависимы, то одна из них линейно выражается через остальные. Следовательно, один из столбцов определителя равен линейной комбинации остальных столбцов. Тогда $W(t) = 0$. ⊠

Теорема. *Если определитель Вронского системы рещений $X_1, \dots, X_n$ равен нулю хотя бы в одной точке t_0, то эти векторные функции линейно зависимые.*

⧫ Пусть $\exists t_0 \in \mathbb{R} : W(t_0)$ системы решений $X_1, \dots, X_n$ равен нулю. Следовательно, ранг Вронскиана меньше его порядка и столбцы этой матрицы линейно зависимые. То есть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 X_1(t_0) + \dots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$. Рассмотрим решение $X(t) = \alpha_1 X_1(t_0) + \dots + \alpha_n X_n(t_0)$. Так как столбец $X(t)$ является линейной комбинацией решений уравнения (3.2.1), то он также является решением уравнения (3.2.1) и при этом $X|_{t=t_0} = \alpha_1 X_1(t_0) + \dots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$.

Заметим, что векторная функция $Y(t) \equiv 0$ также является решением уравнения (3.2.1), удовлетворяющим тем же начальным условиям. ПО теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $Y(t) = X(t)$, то есть $X(t) \equiv 0$ и, следовательно, решения $X_1, \dots, X_n$ линейно зависимые. ⊠

Следствие. *Если определитель Вронского решений системы* (3.2.1) *равен нулю при некотором t_0, то он равен нулю при любом t.*

⧫ Если при некотором t_0 $W(t_0) = 0$, то по второй теореме решения линейно зависимые. Следовательно, по первой теореме $W(t) = 0\ \forall t$. ⊠

Следствие. *Если система решений уравнения* (3.2.1) *линейно независимая, то их $W(t) \neq 0\ \forall t$.*

⧫ Следует из второй теоремы. ⊠

Рассмотрим n задач Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = E_i$, где E_i — i-ый столбец единичной матрицы $E = [E_1, \dots, E_n]$. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши все эти задачи Коши имеют единственные решения. Обозначим их $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Вронскиан этой системы решений при $t = t_0$ равен $\det E = 1 \neq 0$. Следовательно, эти решения линейно независимые.

Покажем, что любое решение уравнения (3.2.1) является линейной комбинацией этих решений. Пусть $X(t)$ — произвольное решение уравнения (3.2.1) и пусть $X(t_0) = \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,1}$. Рассмотрим векторную функцию $Y(t) = \xi_1 X_1 + \dots + \xi_n X_n$. Так как $Y(t)$ — линейная комбинация решений системы (3.2.1), то $Y(t)$ также решение и при этом
$$Y(t_0) = \xi_1 X_1(t_0) + \dots + \xi_n X_n(t_0) = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \xi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

То есть $X(t)$ и $Y(t)$ являются решениями одной задачи Коши. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $X(t) = Y(t) = \xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n$. Следовательно, $X_1, \ldots, X_n$ — базис пространства решений системы (3.2.1). Таким образом, общее решение имеет вид

$$X_{\text{OP}}(t) = C_1 X_1 + \ldots + C_n X_n, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}.$$

• *Базис пространства решений однородного уравнения* (3.2.1) *называется* ***фундаментальной системой решений****.*

• *Матрица* $\Phi(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ *называется* ***фундаментальной матрицей*** *системы* (3.2.1)*.*

Фундаментальная матрица невырожденная при любом t.

• *Фундаментальная система решений называется* ***нормированной при*** $t = t_0$*, если ее* $\Phi(t_0) = E$*.*

Общее решение уравнения (3.2.1) в матричном виде с использованием фундаментальной матрицы может быть записано следующим образом:

$$X_{\text{OP}}(t) = \Phi(t) \cdot C, \quad \forall C \in \mathbb{R}_{n,1}.$$

Если $X(t)$ — решение задачи Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, то $X(t_0) = \Phi(t_0) \cdot C = \xi$. Так как матрица $\Phi(t_0)$ невырожденная, то $\exists \Phi^{-1}(t_0) : C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi.$$

3.3 Метод Эйлера построения фундаментальной системы решений линейных векторных уравнений.

Рассмотрим линейное векторное уравнение

$$DX = AX, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3.1}$$

Найдем решение этого уравнения в виде

$$X(t) = B_0 e^{\lambda t}, \tag{3.3.2}$$

где B_0 — некоторый ненулевой столбец ($B_0 \in \mathbb{R}_{n,1}$). Подставим функцию (3.3.2) в уравнение (3.3.1):

$$\lambda B_0 e^{\lambda t} = A B_0 e^{\lambda t} \iff AB_0 - \lambda B_0 = 0 \iff (A - \lambda E) B_0 = 0.$$

Столбец B_0 является ненулевым решением полученного матричного уравнения, если $\det(A - \lambda E) = 0$. Следовательно, λ — собственное значение матрица A, а B_0 — собственный вектор, соответствующий этому значению.

Таким образом, функция (3.3.2) является ненулевым решением уравнения (3.3.1), если B_0 — собственный вектор, λ — собственное значение.

Если матрица A является матрицей простой структуры, то существует базис пространства $\mathbb{R}_{n,1}$ составленный из собственных векторов матрицы A. Тогда, используя этот базис, можем построить n решений вида (3.3.2) системы (3.3.1), которые являются линейно независимыми, так как определитель Вронского этой системы решений при $t = 0$ равен определителю матрицы, составленной из n линейно независимых собственных векторов, а значит не равен нулю.

Если матрица A не является матрицей простой структуры, то для нее всегда существует в общем случае комплексная подобная жорданова матрица, а следовательно для этой матрицы существует в общем случае комплексный жордановый базис.

Теорема. *Если $B_0, B_1, \ldots, B_k$ — жорданова цепочка матрицы A, соответствующая собственному значению λ_0, то векторная функция*

$$X(t) = (B_0\frac{t^k}{k!} + B_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_2\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + B_{k-1}\frac{t}{1!} + B_k)e^{\lambda t} \tag{3.3.3}$$

является решением уравнения (3.3.1).

♦ Вычислим для векторной функции (3.3.3) векторную функцию $AX - DX$:
$AX - DX = A(B_0\frac{t^k}{k!} + B_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + B_{k-1}\frac{t}{1!} + B_k)e^{\lambda_0 t} - (B_0\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_1\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + B_{k-1})e^{\lambda_0 t} + \lambda_0(B_0\frac{t^k}{k!} + B_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + B_{k-1}\frac{t}{1!} + B_k)e^{\lambda_0 t}$.
Сравним коэффициенты:
$t^k e^{\lambda_0 t} : AB_0\frac{1}{k!} - \lambda_0 B_0\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}(A - \lambda_0 E)B_0 = 0$, так как B_0 — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0.
$t^{k-1}e^{\lambda_0 t} : \frac{1}{(k-1)!}AB_1 - \frac{1}{(k-1)!}B_0 - \frac{1}{(k-1)!}\lambda_0 B_1 = \frac{1}{(k-1)!}(AB_1 - \lambda_0 B_1 - B_0) = \frac{1}{(k-1)!}(\underbrace{(A - \lambda_0 E)B_1}_{B_0} - B_0) = 0$, так как B_1 — вектор присоединенный к B_0.
Продолжая аналогично, получим, что $AX - DX = 0$. Следовательно, $DX = AX$, то есть X — решение уравнения (3.3.1). ⊠

Так как для жордановой цепочки $B_0, \ldots, B_k$ длины $(k+1)$ любая ее подсистема $B_0, B_1, \ldots, B_m$, $0 \leqslant m \leqslant k$, также является жордановой цепочкой, то, используя жоданову цепочку длины $(k+1)$, можно построить $(k+1)$ решение системы (3.3.1).

Следовательно, используя жорданов базис матрицы A составленный из жордановых цепочек, можно построить ровно n различных решений уравнения (3.3.1).

Если вычислить значение фундаментальной матрицы составленной из этих решений при $t = 0$, получим матрицу, состоящую из жорданового базиса матрицы A, которая невырожденная. Следовательно, построенная система решений линейно независимая.

Если среди собственных значений матрицы A существуют мнимые, то собственные и присоединенные векторы, соответствующие этим собственным значениям, также мнимые. И построенные решения являются комплекснозначными. Но так как матрица A действительная, их действительные и мнимые части являются линейно независимыми действительными решениями. Следовательно, используя комплексное собственное значение кратности k можно построить $2k$ линейно независимых действительных решений. При этом аналогично построенные решения для сопряженного мнимого значения новыми независимыми решениями не являются.

3.4 Матричный метод построения фундаментальной системы решений линейных стационарных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX, \tag{3.4.1}$$

где A — матрица $n \times n$, X — вектор-функция. Пусть $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность матриц одного порядка.

• *Матрица A называется* ***пределом*** *этой последовательности, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists N : \forall i > N \quad \|A - A_i\| < \varepsilon.$$

• *Ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ *называется* ***сходящимся****, если существует предел частных сумм.*

Матричный ряд сходится $\iff$ сходятся все ряды, образованные из соответствующих элементов этих матриц.

Рассмотрим ряд

$$E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots. \tag{3.4.2}$$

Модуль любого элемента матрицы A^k не превосходит $\left\|A^k\right\|$, которая по определению матричной нормы не превосходит $\|A\|^k$. Тогда ряды, состоящие из соответствующих элементов матриц $\dfrac{A^i}{i!}$, имеют сходящуюся числовую мажоранту

$$1 + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \ldots = e^{\|A\|},$$

а, следовательно, являются сходящимися.

• *Ряд* (3.4.2) *также является сходящимся матричным рядом, обозначается* e^A *и называется* ***матричной экспонентой****.*

Ряд (3.4.2) является сходящимся для любой матрицы A.

Свойства матричной экспоненты:

1. $e^0 = E$ (0 — *нулевая матрица*).

2. *Если матрицы A, B перестановочны, то есть $AB = BA$, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.*

   ♦ $e^A \cdot e^B = \left(E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots\right)\left(E + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \ldots\right) = E + \left(\frac{A}{1!} + \frac{B}{1!}\right) + \left(\frac{A^2}{2!} + \frac{A \cdot B}{1!} + \frac{B^2}{2!}\right) + \ldots = E + \frac{A+B}{1!} + \frac{A^2 + 2AB + B^2}{2!} + \ldots = [AB = BA,$ иначе свернуть нельзя$] = E + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \ldots = e^{A+B}$. ⊠

3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

   ♦ Так как матрицы A и $-A$ перестановочны, то по второму свойству $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E$. ⊠

Рассмотрим матричную экспоненту

$$e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^k}{k!}t^k + \ldots, \tag{3.4.3}$$

где t — некоторая действительная переменная. При любом фиксированном t ряд (3.4.3) является сходящимся. На любом ограниченном промежутке ряд (3.4.3) является равномерно сходящимся, так как для него существует сходящийся числовой мажорирующий ряд. Тогда

$$D(e^{At}) = A + \frac{2A^2}{2!}t + \frac{3A^3}{3!}t^3 + \ldots = A\Big(E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots\Big) = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Теорема. *Задача Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$ имеет единственное решение*

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi.$$

⧫ Задача Коши имеет единственное решение по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Покажем, что вектор-функция $X(t)$ является этим решением:

$$DX = D(e^{A(t-t_0)}\xi) = D(e^{At}e^{-At_0}\xi) = D(e^{At})e^{-At_0}\xi = Ae^{At}e^{-At_0}\xi = Ae^{A(t-t_0)}\xi = AX(t),$$

то есть $X(t)$ — решение. И при этом $X|_{t=t_0} = e^{A(t-t_0)}\xi = e^{A\cdot 0}\xi = e^0\xi = E\xi = \xi$. ⊠

Следствие. *Матрица $e^{A(t-t_0)}$ является фундаментальной матрицей уравнения* (3.4.1), *нормированной в точке $t = t_0$.*

⧫ Так как i-ый столбец матрицы $e^{A(t-t_0)}$ представим в виде $e^{A(t-t_0)}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} i$, то он является решением задачи Коши для уравнения (3.4.1) с начальным условием $X|_{t=t_0} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Следовательно, каждый столбец матрицы $A(t-t_0)$ — решение уравнения (3.4.1). При $t = t_0$ матрица $e^{A(t-t_0)} = E$, следовательно, совокупность решений уравнения (3.4.1), образующих матрицу $e^{A(t-t_0)}$, имеет невырожденный Вронскиан в точке $t = t_0$. А значит эти решения линейно независимые. То есть матрица $e^{A(t-t_0)}$ фундаментальная. ⊠

Таким образом, общее решение уравнения (3.4.1) имеет вид

$$X_{\text{OO}}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}.$$

Вычисление матричной экспоненты.

$\forall A \in \mathbb{C}_{n,n}$ $\exists J$ — жорданова нормальная форма, то есть $\exists$ невырожденная матрица $S : J = S^{-1}AS \Rightarrow A = SJS^{-1}$. Следовательно, $e^{At} = e^{(SJS^{-1})t} = SES^{-1} + \dfrac{SJS^{-1}}{1!}t + \dfrac{SJS^{-1}SJS^{-1}}{2!}t^2 + \ldots = S\Big(E + \dfrac{J}{1!}t + \dfrac{J^2}{2!}t^2 + \dfrac{J^3}{3!}t^3 + \ldots\Big)S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1}$.

Пусть $J = diag[J_1, \ldots, J_k]$, где J_i — жордановы клетки. Следовательно, $e^{Jt} = diag(e^{J_1 t}, \ldots, e^{J_k t})$. Вычислим матричную экспоненту для клетки Жордана:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}; \quad J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^2 \end{pmatrix}; \quad J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда первый элемент матрицы e^{Jt} равен

$$1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \ldots = e^{\lambda t}.$$

Второй элемент матрицы e^{Jt} равен

$$0 + \frac{1}{1!}t + \frac{2\lambda}{2!}t^2 + \frac{3\lambda^2}{3!}t^3 + \ldots = t\Big(1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \ldots\Big) = te^{\lambda t}.$$

Следующий элемент будет равен $\dfrac{t^2}{2!}e^{\lambda t}$. И так далее. В итоге получим

$$e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \ldots \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.5 Неоднородные стационарные линейные векторные уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{3.5.1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \tag{3.5.2}$$

Теорема. *Если* $X_1(t)$ *— некоторое решение уравнения* (3.5.1), *то* $\forall X_0(t)$ *решения уравнения* (3.5.2) *вектор-функция* $X_1 + X_0$ *— решение уравнения* (3.5.1).

♦ $D(X_1 + X_0) = DX_1 + DX_0 = AX_1 + f(t) + AX_0 = A(X_1 + X_0) + f(t)$. ⊠

Теорема. *Если* $X_1(t)$ *— решение уравнения* (3.5.1)*, то* $\forall X_2(t)$ *решения уравнения* (3.5.1) *вектор-функция* $X_0 = X_2 - X_1$ *— решение уравнения* (3.5.2)*.*

♦ $DX_0 = D(X_2 - X_1) = DX_2 - DX_1 = AX_2 + f(t) - (AX_1 + f(t)) = A(X_2 - X_1) = AX_0$. ⊠

Из предыдущих теорем следует, что все решения неоднородного уравнения можно получить, прибавив к некоторому частному решению все решения соответствующего однородного уравнения, то есть

$$X_{\text{ОН}} = X_{\text{ОО}} + X_{\text{ЧН}}.$$

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено **методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа)**.

Пусть $\Phi(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2). Частное решение уравнения (3.5.1) будем искать в виде

$$X(t) = X_1(t)u_1(t) + \ldots + X_n(t)u_n(t),$$

где $u_i(t)$ — некоторые дифференцируемые функции. Если обозначим $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$, то частное решение можно представить как

$$X(t) = \Phi(t) \cdot U(t).$$

Подставим функцию $X(t)$ в уравнение (3.5.1):

$$DX_1u_1 + X_1Du_1 + \ldots + DX_nu_n + X_nDu_n = A(X_1u_1 + \ldots + X_nu_n) + f(t).$$

Так как X_i являеются решениями уравнения (3.5.2), то $DX_i = AX_i$. Следовательно, $DX_iu_i = AX_iu_i$.
Тогда получаем

$$X_1Du_1 + \ldots + X_nDu_n = f(t),$$

в матричном виде

$$\Phi(t) \cdot DU(t) = f(t).$$

Так как $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2), то ее столбцы — линейно независимые решения однородного уравнения. Следовательно, определитель фундаментальнй матрицы является Вронскианом решений $X_1(t), \ldots, X_n(t)$, а значит $\det \Phi(t) \neq 0$ $\forall t \Rightarrow \exists \Phi^{-1}(t) : DU(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$. Тогда в качестве векторной функции $U(t)$ можно выбрать функцию

$$U(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t, t_0 \in \mathbb{I}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$X_{\text{он}} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \Phi(t) \cdot (C + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau). \tag{3.5.3}$$

Используя формулу (3.5.3), найдем решение задачи Коши $DX = AX + f(t)$, $X|_{t=t_0} = \xi$. Для этого подставим в (3.5.3) начальные условия: $X|_{t=t_0} = \Phi(t_0) \cdot C = \xi \Rightarrow C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

В качестве фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ можно взять матрицу e^{At} ($\Phi(t) = e^{At}$). Тогда решение задачи Коши примет вид

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \qquad (3.5.4)$$

Из уравнения (3.5.4) следует, что задача Коши для уравнения (3.5.1) с нулевыми начальными условиями ($\xi = 0$) имеет вид

$$X(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \qquad (3.5.5)$$

То есть функция (3.5.5) является частным решением уравнения (3.5.1).

• *Формула* (3.5.5) *называется* ***методом Коши*** *отыскания частного решения неоднородного уравнения.*

Следовательно, общее решение уравнения (3.5.1) можно записать в виде

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}C + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

3.6 Непрерывная зависимость решений стационарного линейного векторного уравнения от начальных значений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \qquad (3.6.1)$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \qquad (3.6.2)$$

• *Решение* $X_0(t)$ *уравнения* (3.6.1) *называется* ***непрерывно зависящим*** *на промежутке* $\mathbb{I}$ ***от начальных значений****, если*

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta : \forall X(t) \text{ решения } (3.6.3) \ \|X(t_0) - X_0(t_0)\| \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon \ \forall t \in \mathbb{I}.$$

• *Функция* $\|X(t) - X_0(t)\|$ *называется* ***отклонением*** $X(t)$ *от* $X_0(t)$*, а ее значение при* $t = t_0$*, то есть* $\|X(t_0) - X_0(t_0)\|$*, называется* ***начальным отклонением****.*

Пусть $X_0(t)|_{t=t_0} = \xi$, а $X(t)|_{t=t_0} = \xi + \Delta\xi$, где $\xi, \Delta\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$. Тогда по правилу Коши

$$X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau; \quad 09X(t) = e^{A(t-t_0)}(\xi + \Delta\xi) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Отсюда

- $X(t) - X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\Delta\xi$ — отклонение;

- $X(t_0) - X_0(t_0) = E\Delta\xi$ — начальное отклонение.

Следовательно, отклонение решения $X(t)$ от $X_0(t)$ не зависит от самих решений, а завсит лишь от их начальных отклонений. То есть все решения уравнения (3.6.1) либо одновременно зависят от начальных даныых, либо нет. Кроме того отклонение зависит лишь от матрицы A и не зависит от неоднородности $f(t)$. Следовательно, и непрерывная зависимость от начальных данных зависит только от матрицы A.

Теорема. *Если промежуток $\mathbb{I}$ является отрезком, то любое решение уравнения* (3.6.1) *непрерывно зависит от начальных значений.*

$\blacklozenge$ Так как $e^{A(t-t_0)}$ — фундаментальная матрица уравнения (3.6.2), то все ее компоненты являются непрерывными. Следовательно, по теореме Вейрштрасса на отпрезке $\mathbb{I}$ они все являются ограниченными. То есть

$$\exists M : \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \leqslant M \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| = \left\|e^{A(t-t_0)}\Delta\xi\right\| \leqslant \left\|e^{A(t-t_0)}\right\|\cdot\|\Delta\xi\| \leqslant M\cdot\|X(t_0) - X_0(t_0)\|.$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{M} : \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

$\boxtimes$

• *Решение уравнения* (3.6.1) *называется* ***интегрально зависящим от начальных значений*** *на промежутке $\mathbb{I}$, если оно зависит от начальных значений на любом отрезке $I_0 \subseteq \mathbb{I}$.*

3.7 Устойчивость стационарных линейных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t),\ t \in \mathbb{I} = [t_0; +\infty) \tag{3.7.1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$.

• *Решение $X_0(t)$ уравнения* (3.7.1) *называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если*

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta : \forall X(t)\ \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon\ \forall t > t_0.$$

Таким образом, решение $X_0(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке $\mathbb{I}$ вида $[t_0; +\infty)$.

• *Если кроме того $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t) - X_0(t)\| = 0$, то решение $X_0(t)$ называется* ***асимптотически устойчивым****.*

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных значений следует, что все решения уравнения (3.7.1) либо одновременно устойчивы, либо нет.

• *Уравнение, все решения которого устойчивы, называется* ***устойчивым*** *(аналогично* ***неустойчивым, асимптотически устойчивым****).*

Кроме того, так как неоднородность уравнений не влияет на непрерывную зависимость от начальных значений, то и устойчивость уравнения не зависит от неоднородности $f(t)$.

Следовательно, в дальнейшем для исследования устойчивости будем исследовать нулевое решение уравнения $DX = AX$. То есть

• *Уравнение называется* ***устойчивым****, если*

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta : \forall X(t) \ \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon \ \forall t > t_0.$$

Лемма. *Уравнение* (3.7.2) *является устойчивым на* $\mathbb{I} \iff$ *каждое его решение является ограниченным на* $\mathbb{I}$.

⧫ $\Rightarrow$) От противного. Пусть (3.7.2) устойчиво, но $\exists Y(t)$ решение неограниченное на промежутке $\mathbb{I}$. Тогда векторная функция $X(t) = CY(t)$ является также решением уравнения (3.7.2), и при этом, выбирая C сколь угодно малым, можем получить решение, которое при $t = t_0$ будет сколь угодно близко к нулевому решению, но при этом являться неограниченным.

$\Leftarrow$) Пусть все решения уравнения (3.7.1) ограничены на $\mathbb{I}$. Тогда фундаментальная матрица $e^{A(t-t_0)}$ тоже ограничена. То есть $\exists M : \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \leqslant M \ \forall t > t_0$. Тогда

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} : \forall X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi \ \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

⊠

Теорема (Критерий устойчивости)**.** *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *устойчиво* $\iff$ *действительные части собственных значений матрицы* A *неположительны, при этом собственные значения с нулевой действительной частью имеют равные алгебраические и геометрические кратности.*

⧫ Так как неоднородность не влияет на устойчивость, то уравнение (3.7.1) устойчиво $\iff$ уравнение (3.7.2) устойчиво. А по лемме это уравнение устойчиво $\iff$ все его решения ограничены.

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решения однородного уравнения для ограниченности решений необходимо и достаточно, чтобы действительные части собственных значений были неположительны. Причем собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановом базисе матрицы A должны соответствовать цепочки длины 1. А это возможно, когда алгебраическая и геометрическая кратности этого собственного значения равны. ⊠

Следствие. *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *устойчиво* $\iff$ *действительные части собственных значений матрицы* A *неположительны, при этом собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановой нормальной форме матрицы* A *соответствуют клетки порядка* 1.

Лемма. *Уравнение* (3.7.2) *является асимптотически устойчивым* $\iff$ *все его решения стремятся к нулю при* $t \to +\infty$.

⧫ $\Rightarrow$) Пусть уравнение асимптотически устойчиво. Тогда и его нулевое решение асимптотически устойчиво, то есть

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta : \forall X(t) \ \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Пусть $Y(t)$ — произволньое решение уравнения (3.7.2). Тогда векторная функция $CY(t)$, $C \in \mathbb{R}$ также является решением уравнения (3.7.2). Причем, выбирая C достаточно малым, можно получить решение сколь угодно близкое к 0 при $t = t_0$. Следовательно, из определения устойчивости нулевого решения

$$\lim_{t\to+\infty} \|CY(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|C|} \|CY(t)\| \, 0.$$

$\Leftarrow$) Пусть для решения $X(t)$ уравнения (3.7.2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0$. Тогда $X(t)$ является ограниченной функцией, так как из существования предела при $t \to +\infty$ следует ограниченность этой функции на интервале $(t_1; +\infty)$, $t_1 \in \mathbb{I}$. А на отрезке $[t_0; t_1]$ функция $X(t)$ ограничена, так как непрерывна. Следовательно, уравнение (3.7.2) является устойчивым. А так как $\forall X(t)$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0$, то и асимптотически устойчиво. ⊠

Теорема (Критерий асимптотической устойчивости). *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ все собственные значения матрицы A отрицательны.*

⧫ Уравнение (3.7.1) асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ асимптотически устойчиво уравнение (3.7.2). А по лемме уравнение (3.7.2) асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ все его решения стремятся к 0 при $t \to +\infty$.

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решений уравнения (3.7.2) его решения будут стремиться к 0, если действительная часть собственных значений отрицательна. ⊠

3.8 Фазовая плоскость линейных стационарных векторных уравнений порядка 2.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX, \tag{3.8.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ а } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

— неизвестная векторная функция.

• ***Фазовым графиком*** *решения $X(t)$ называется график параметрически заданной функции*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t). \end{cases}$$

• *Плоскость Ox_1x_2, на которой располагаются фазовые графики решений, называется* ***фазовой плоскостью уравнения****.*

• *Фазовый график, состоящий из одной точки, называется* ***точкой покоя****.*

Начало координат (точка (0; 0)) всегда является точкой покоя для уравнения (3.8.1). Рассмотрим классифицкации точек покоя.

I группа.

1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда система в координатном виде записывается следующим образом

$$\begin{cases} Dx_1 = 0, \\ Dx_2 = 0; \end{cases}$$

и, следовательно, решения этой системы имеют вид $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$. То есть любая точка фазовой плоскости является фазовым графиком и других фазовых графиков нет.

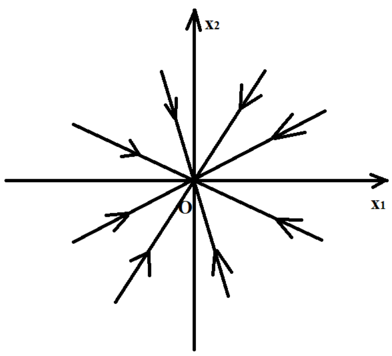
2. Пусть $A = aE$, то есть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Тогда в координатной форме система имеет вид

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1, \\ Dx_2 = ax_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 e^{at}, \\ x_2 = C_2 e^{at}. \end{cases}$$

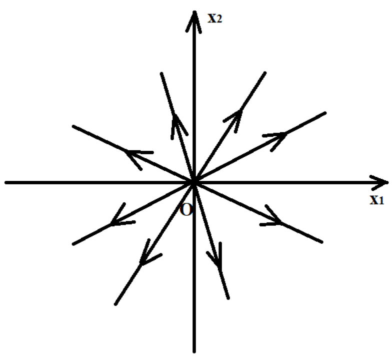
Если $C_1 \neq 0$, то $e^{at} = \dfrac{x_1}{C_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{C_2}{C_1} x_1$ — прямая, проходящая через начало координат.

Если $C_1 = 0$, то $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = C_2 e^{at}. \end{cases}$ — прямая $x_1 = 0$.

При этом, если $a < 0$, то точка $(x_1(t); x_2(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.



А если $a > 0$, то точка $(x_1(t); x_2(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} \infty$.



• *Точка покоя, в окрестности которой фазвоые графики имеют такое расположение, называется* ***дикритическим узлом*** *соответственно* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым***.

II группа. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем $A \neq aE$. Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}A = a + d$. И рассмотрим их характеристические матрицы:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A - \lambda \end{pmatrix}.$$

Построим для них системы НОД миноров.

$A - \lambda E$: $d_1(\lambda) = 1$ (если какое-то c или b не равно нулю, то оно является ненулевым минором первого порядка; а если $c = b =$, то $a \neq d$ и многочлены $a - \lambda$ и $d - \lambda$ взаимно простые).
$d_2(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$.
$B - \lambda E$: $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Sp}A\lambda + \det A$.

Следовательно, матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ эквиваленты. Тогда матрицы A и B подобны, то есть существует невырожденная матрица $S : B = S^{-1}AS$.

Выполним замену в уравнении (3.8.1) неизвестной функции $X = SY$. Тогда $SDY = ASY \Rightarrow DY = S^{-1}ASY = BY$. Получили

$$DY = BY. \tag{3.8.2}$$

Координатная форма уравнения (3.8.2) имеет вид

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = -\det A y_1 + \mathrm{Sp}ADy_1. \end{cases}$$

Исключим из второго уравнения y_1 и получим

$$D^2 y_1 - (\mathrm{Sp}A)Dy_1 + (\det A)y_1 = 0.$$

Тогда решение $y_1(t)$ имеет фазовую тракекторию, являющуюся графиком параметрически заданной функции

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = Dy_1(t); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = y_2(t). \end{cases} \tag{3.8.3}$$

— фазовая траектория решения уравнения (3.8.2).

То есть уравнение (3.8.3) и уравнение (3.8.2) имеют одинаковый фазовый портрет. Выполнив преобразование плоскости $X = SY$, получим фазовый портрет уравнения (3.8.1). Заметим, что матрица S невырожденная. Тогда линейное преобразование $X = SY$ невырожденное. Следовательно, оно сводится к последовательному выполнению преобразования поворота и преобразования растяжения-сжатия вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений. Таким образом, типы точек покоя уравнения (3.8.1) будут совпадать с типами точек покоя уравнений (3.8.2) и (3.8.3).

Глава 4

Элементарные дифференциальные уравнения.

4.1 Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.

• ***Дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме*** *называется выражение вида*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{4.1.1}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — функции, определенные в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Если в области D $Q(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in D$, то уравнение (4.1.1) можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \text{ где } f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

• *Уравнение в такой форме записи называется* ***разрешенным относительно производной****.*

Аналогично, если $P(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in D$, то уравнение (4.1.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dy} = g(x,y), \text{ где } g(x,y) = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

• *Точка $(x_0, y_0) \in D$ такая, что $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$, называется* ***особой точкой*** *уравнения.*

• ***Решением*** *уравнения называется функция $y(x)$ (или $x(y)$) определенная и дифференцируемая на некотором промежутке $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, такая, что выполняется равенство*

$$P(x, y(x))dx + Q(x, y(x))y'(x)dx = 0.$$

• *График решения дифференциального уравнения называется* ***интегральной кривой****.*

Решение уравнения может быть также задано или параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{I},$$

или неявно $\varphi(x, y) = 0$.

• ***Общим решением*** *дифференциального уравнения называется семейство решений*

1. $y = y(x, C)$, $x = x(y, C)$, *если решения заданы функциями*;
2. $\begin{cases} x = x(t, C), \\ y = y(t, C). \end{cases}$ *если решения заданы параметрически*;
3. $\varphi(x, y, C) = 0$, *если решения заданы неявно*;

зависящие от произвольной постоянной $C \in \mathbb{R}$.

• *Если в общем решении можно выразить произвольную постоянную* C*, то соотношение*

$$u(x, y) = C$$

называется ***общим интегралом*** *уравнения.*

• *Множество всех решений дифференциального уравнения называется* ***полным решением***.

4.2 Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделенными переменными.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{4.2.1}$$

Если Ф2П $u(x, y)$ дифференцируема по каждой переменной, то ее полный дифференциал имеет вид

$$du(x, y) = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy.$$

• *Уравнение* (4.2.1) *называется* ***уравнением в полных дифференциалах****, если его правая часть является полным дифференциалом некоторой функции* $u(x, y)$*, то есть*

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда выполняется условие Эйлера

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае уравнение (4.2.1) принимает вид

$$du(x, y) = 0.$$

Следовательно, функция $u(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (4.2.1) и полным решением уравнения (4.2.1).

Любое C, для которого это равенство определено неявно, задает дифференцируемую функцию.

Найдем функцию $u(x, y)$. Если уравнение (4.2.1) является уравнением в полных дифференциалах, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

И пусть $(x_0, y_0) \in D$. Тогда первое уравнение является простейшим относительно x. И, следовательно,

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \varphi(y).$$

Продифференцируем это равенство по y. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}dx + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \varphi'(y) =$$

$$= Q(x, y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y).$$

Тогда из второго уравнения системы

$$Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y).$$

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y).$$

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C.$$

Подставим обратно в $u(x, y)$ и получим

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C.$$

Выбрав одну из этих функций $u(x, y)$, например с $C = 0$, получим общий интеграл уравнения

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C.$$

Если начать поиск функции $u(x, y)$ с интегрирования второго уравнения системы, то общий интеграл будет иметь вид

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C.$$

Функция $u(x, y)$ может быть также найдена как КРИ-2:

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Задача Коши для уравнения в полных дифференциалах с начальными условиями $y|_{x=x_0} = y_0$ имеет решение

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

если точка (x_0, y_0) не является особой.

• *Уравнение*

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называется ***уравнением с разделенными переменными****.*

Оно является уравнением в полных дифференциалах, так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Общий интеграл для него имеет вид

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x)dx + Q(y)dy = C.$$

4.3 Интегрирующий множитель. Уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение в нормальной форме

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad (x,y) \in D. \tag{4.3.1}$$

И пусть уравнение (4.3.1) не является уравнением в полных дифференциалах.

• *Функция* $\mu(x,y)$ *называется* ***интегрирующим множителем*** *для уравнения* (4.3.1), *если уравнение*

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{4.3.2}$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Заметим, что при домножении уравнения на функцию $\mu(x,y)$ полученное уравнение может либо приобрести дополнительные решения, либо потерять какие-либо решения. Так как уравнение (4.3.2) должно быть уравнением в полных дифференциалах, то функция $\mu(x,y)$ должна удовлетворять равенству

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\mu(x,y) \cdot \Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P.$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x,y)$ — некоторая функция. Тогда

$$\mu(\omega) \cdot \Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot P.$$

Следовательно,

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial \omega}}{\mu(\omega)} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial x} \cdot Q - \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \cdot P}.$$

$$(\ln \mu(\omega))' = -\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial y} \cdot P - \dfrac{\partial \omega}{\partial x} \cdot Q}.$$

Если функция справа является функцией от ω, то есть имеет вид $\varphi(\omega)$, то

$$(\ln \mu(\omega))' = \varphi(\omega).$$

Следовательно, отсюда

$$\ln \mu(\omega) = \int\limits_{\omega_0}^{\omega} \varphi(\tau) d\tau + C \quad \Rightarrow \quad \mu(\omega) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \varphi(\tau) d\tau + C} \qquad \Rightarrow$$

$$\mu(x, y) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \varphi(\tau) d\tau + C}$$

является интегрирующим множителем уравнения (4.3.1) для любого C.

• *Уравнение вида*

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными***.

Интегрирующий множитель этого уравнения имеет вид

$$\mu(x, y) = \frac{1}{Q_1(x)P_2(y)},$$

так как в результате домножения получаем уравнение

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy = 0$$

— уравнение с разделенными переменными.

Уравнение с разделяющимися переменными в виде разрешенном относительно производной имеет вид

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

4.4 Линейные уравнения. Уравнения Бернулли. Уравнения Риккати.

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка в нормальном виде

$$(p(x) \cdot y + q(x))dx + r(x)dy = 0, \quad (x, y) \in D$$

или в виде разрешенном относительно производной

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x).$$

$$y' - P(x) \cdot y = Q(x).$$

Домножим уравнение так, чтобы свернуть в производную

$$y' - P(x) \cdot y = Q(x) \ \Big| \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}.$$

$$y' \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} - P(x) \cdot y \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} = Q(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}.$$

$$\Big(y \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}\Big)' = Q(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}.$$

$$y \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} = \int\limits_{x_0}^{x} Q(t) \cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt + C.$$

Тогда формула

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \cdot \Big(C + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t) \cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt\Big)$$

— полное решение линейного уравнения первого порядка.

• ***Уравнением Бернулли*** *называется уравнение вида*

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^k, \quad k \in \mathbb{Z} \backslash \{0, 1\}.$$

Разделим это уравнение на y^k. Получим

$$\frac{y'}{y_k} = P(x) \cdot y^{1-k} + Q(x),$$

если $k > 0$, можем потерять решение $y = 0$.

Выполним замену неизвестной функции $z(x) = y(x)^{1-k}$. Тогда $z' = (1-k) \cdot y^{-k} \cdot y'$. Отсюда следует, что

$$\frac{y'}{y^k} = \frac{z'}{1-k}.$$

И, следовательно,

$$\frac{z'}{1-k} = P(x) \cdot z + Q(x).$$

$$z' = (1-k) \cdot P(x) \cdot z + (1-k) \cdot Q(x)$$

— линейное уравнение первого порядка.

Решив линейное уравнение и выполнив обратную замену, получим общее решение уравнения Бернулли (полное решение получим, добавив $y = 0$, если $k > 0$).

• ***Уравнением Риккати*** *называется уравнение вида*

$$y' = p(x) \cdot y^2 + q(x) \cdot y + r(x). \tag{4.4.1}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то (4.4.1) — линейное уравнение. Если $r(x) \equiv 0$, то (4.4.1) — уравнение Бернулли. Пусть $p(x) \not\equiv 0$, $r(x) \not\equiv 0$.

Уравнение Риккати в общем случае в квадратурах не интегрируется (то есть нельзя получить его решение в виде какого-то интеграла). Но в частных случаях уравнение может быть проинтегрировано:

1. Если $p(x) = q(x) = r(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot (a_2 y^2 + a_1 y + a_0) \text{ — уравнение с разделяющими переменными;}$$

$$2.\ \ y' = a_2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + a_1 \cdot \frac{y}{x} + a_0 \text{ — однородное уравнение;}$$

Если известно хотя бы одно частное решение уравнения Риккати $y_1(x)$, то уравнение Риккати может быть приведено к линейному заменой неизвестной функции $y(x) = y_1(x) \pm \dfrac{1}{z(x)}$ или $z(x) = \dfrac{1}{y - y_1}$. При этом может быть потеряно решение $y = y_1$. Тогда

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = p(x) \cdot \left(y_1^2 + 2 \cdot \frac{y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + q(x) \cdot \left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + r(x).$$

Так как y_1 является решением уравнения Риккати, то

$$y_1' = p(x) \cdot y_1^2 + q(x) \cdot y_1 + r(x).$$

Следовательно,

$$-\frac{z'}{z^2} = p(x) \cdot \frac{2y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + q(x) \cdot \frac{1}{z} \quad \Big| \quad \cdot (-z^2).$$

$$z' = (-p(x) \cdot 2y_1 + q(x)) \cdot z - p(x) \text{ — линейное уравнение.}$$

• *Уравнение Риккати называется* ***каноническим****, если оно имеет вид*

$$y' = \pm y^2 + R(x).$$

Уравнение Риккати может быть приведено к каноническому виду заменой неизвестной функции вида

$$y = \alpha(x) z(x) + \beta(x),$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Найдем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Подставим замену и получим

$$\alpha' z + \alpha z' + \beta' = p(\alpha^2 z^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta z) + q(\alpha z + \beta) + r.$$

$$\alpha z' = p\alpha^2 z^2 + z(2p\alpha\beta + q\alpha - \alpha') + p\beta^2 + q\beta + r - \beta'.$$

$$z' = p\alpha z^2 + \left(p\beta + q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \frac{1}{\alpha}(p\beta^2 + q\beta + r - \beta^2).$$

Подберем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ так, чтобы

$$p\alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{p};$$

$$2p\beta + q - \frac{\alpha'}{\alpha} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2p}\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - q\right).$$

4.5 Однородные уравнения.

• *Функция двух переменных* $F(x,y)$ *называется* ***однородной функцией степени*** k*, если* $F(tx,ty)=t^kF(x,y)$.

• *Уравнение*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

называется ***однородным уравнением****, если функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *являются однородными функциями одной степени.*

Если однородное уравнение представить в виде разрешенном относительно производной, то получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

При этом

$$\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)}=\frac{t^kP(x,y)}{t^kQ(x,y)}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Следовательно, эта функция также является однородной функцией степени 0. Любая однородная функция степени 0 представима в виде

$$F(x,y)=F\Big(x,x\cdot\frac{y}{x}\Big)=x^0F\Big(1,\frac{y}{x}\Big)=F\Big(1,\frac{y}{x}\Big)=f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Следовательно, однородное уравнение имеет вид

$$y'=f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Выполнив замену независимой переменной $z(x)=\dfrac{y(x)}{x}$, или $y(x)=x\cdot z(x)$, получим

$$z(x)+xz'=f(z).$$

Тогда

$$x\frac{dz}{dx}=f(z)-z \text{ — уравнение с разделяющимися переменными.}$$

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

Заметим, что могут быть потеряны решения вида $f(z)-z=0$ либо приобретены решения вида

$$\frac{1}{f(z)-z}=0.$$

Если однородное уравнение задано в нормальной форме, то, выполнив замену $y(x)=x\cdot z(x)$, получим

$$P(x,xz)dx+Q(x,xz)(xdz+zdx)=0.$$

$$(\underbrace{P(x,xz)}_{x^kP(1,z)}+z\cdot\underbrace{Q(x,xz)}_{x^kQ(1,z)})dx+x\cdot\underbrace{Q(x,xz)}_{x^kQ(1,z)}dz=0.$$

$$\underbrace{(P(1,z)+z\cdot Q(1,z))}_{f_1(z)}dx+\underbrace{Q(1,z)}_{f_2(z)}\cdot\underbrace{x}_{g_1(x)}\cdot dz=0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big).$$

1. Пусть $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$. Тогда $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$. Тогда уравнение имеет вид

   $$y' = g(ax + by).$$

   Выполним замену неизвестной функции

   $$ax + by(x) = z(x) \Rightarrow y = \frac{1}{b}(z - ax).$$

   $$\frac{1}{b}(z' - a) = g(z).$$

   $$z' = bg(z) + a \text{ — уравнение с разделяющимися переменными.}$$

2. Пусть $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$. Выполним замену

   $$\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = z + \beta, \end{cases}$$

   где t — новая независимая переменная, z — новая неизвестная функция, зависящая от t, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \Rightarrow y' = f\Big(\frac{a_1(t+\alpha) + b_1(z+\beta) + c_1}{a_2(t+\alpha) + b_2(z+\beta) + c_2}\Big).$$

   Подберем свободные константы так, чтобы

   $$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

   Так как $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, и система невырожденная и имеет единственное решение. Следовательно, уравнение имеет вид

   $$z' = f\Big(\frac{a_1t + a_2z}{b_1t + b_2z}\Big),$$

   причем

   $$f\Big(\frac{a_1t + a_2z}{b_1t + b_2z}\Big) = f\Big(\frac{t(a_1 + a_2\frac{z}{t})}{t(b_1 + b_2\frac{z}{t})}\Big) = f\Big(\frac{a_1 + a_2\frac{z}{t}}{b_1 + b_2\frac{z}{t}}\Big) = g\Big(\frac{z}{t}\Big).$$

   То есть уравнение имеет вид

   $$z' = g\Big(\frac{z}{t}\Big) \text{ — однородное уравнение.}$$

4.6 Существование и единственность решения задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \\ y(x_0) = y_0, \ (x_0,y_0) \in D; \end{cases} \tag{4.6.1}$$

где $f(x,y)$ — непрерывная в D функция.

Лемма (интегральный признак). *Непрерывная функция $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{I}$ — некоторый промежуток, является решением задачи Коши* (4.6.1) $\Longleftrightarrow$ *она удовлетворяет следующему условию*

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad x_0, x \in \mathbb{I}.$$

♦ $\Rightarrow$) Так как $y(x)$ — решение задачи Коши (4.6.1), то

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Проинтегрируем это равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau,$$

$$y(x)\Big|_{x_0}^{x} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx.$$

$\Leftarrow$) Так как функции $y(x)$ и $f(x,y)$ непрерывные, то функция $f(x,y(x))$ также непрерывная как композиция непрерывных функций. Следовательно, правая часть интегрального уравнения — дифференцируемая функцйия, то есть функция $y(x)$ дифференцируема. Продифференцируем это уравнение

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Тогда $y(x_0) = y_0$ — решение задачи Коши. ⊠

Теорема (Пикара-Линделефа). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и в некоторой окрестности содержащейся в D удовлетворяет условию Липшица, то есть*

$$\exists L : \forall (x,y_1),(x,y_2) \in U \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

то задача Коши (4.6.1) *имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений:*

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \ \textit{где } y_0(x) = y_0, \ y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau, \ n = 1, 2, \ldots$$

♦

1. Существование.

   Рассмотрим прямоугольник

$$\Pi = \{(x,y) \mid |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant a\},$$

   который целиком содержится в области U. Так как функция f в прямоугольнике Π непрерывна, то она ограничена.

   Пусть $|f(x,y) \leqslant M$, $\forall (x,y) \in \Pi$. Покажем, что если $\delta = \min\{a, \frac{a}{M}\}$, то $\forall \mathbb{I} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ функция $y_n(x)$ содержится в Π.

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_0) d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau, y_0)| d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} M d\tau\Big| =$$
$$= |M \cdot (x - x_0)| = M \cdot |x - x_0| \leqslant M \cdot \delta \leqslant M \cdot \frac{a}{M} = a.$$

   То есть точка $(x, y_1(x)) \in \Pi$ $\forall x \in \mathbb{I}$.

$$|y_2(x) - y_0(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_1) d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau, y_1)| d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} M d\tau\Big| \leqslant a.$$

   Аналогично рассуждая, получим, что $|y_n(x) - y_0| \leqslant a$, то есть точки $(x, y_n(x)) \in \Pi$ $\forall x \in \mathbb{I}$.

   Покажем, что $\forall x \in \mathbb{I}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$. Заметим, что

$$y_n(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)).$$

   Следовательно, функция $y_n(x)$ является частичной суммой ряда

$$y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - y_{i-1}). \tag{4.6.2}$$

   Докажем сходимость этого ряда по признакку Вейерштрасса, для этого найдем мажорирующую константу.

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau, y_0) d|\tau\Big| \leqslant M \cdot |x - x_0|.$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} \Big|f(\tau, y_1(\tau)) d\tau - \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_0(\tau))\Big| d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} L|y_1(\tau) - y_0(\tau)| d\tau\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} LM(\tau - x_0) d\tau\Big| = LM\frac{(\tau - x_0)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} = LM\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} \big|f(\tau, y_2(\tau))d\tau - \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_1(\tau))\big|d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} L|y_2(\tau)-y_1(\tau)|d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} LM\frac{(\tau-x_0)^2}{2}d\tau\Big| = L^2M\frac{(\tau-x_0)^3}{2\cdot 3}\Big|_{x_0}^{x} = L^2M\frac{(x-x_0)^3}{3!}.$$

Продолжая рассуждать аналогично, получим что

$$|y_i(x)-y_{i-1}(x)| \leqslant L^{i-1}M\frac{|x-x_0|^i}{i!}.$$

Следовательно, ряд $y_0+\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-y_{i-1})$ мажорируется числовым рядом

$$|y_0|+\sum_{i=1}^{\infty}L^{i-1}M\frac{|x-x_0|^i}{i!} = [|x-x_0|\leqslant\delta] \leqslant |y_0|+\frac{M}{L}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(L\delta)^i}{i!} = |y_0|+\frac{M}{L}\cdot(e^{L\delta}-1).$$

То есть ряд (4.6.2) по признаку Вейерштрасса сходится равномерно, значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Покажем, что построенная функция является решением задачи Коши (4.6.1). Так как последовательность $y_n(x) \rightrightarrows y(x)$, а функция f удовлетворяет условию Липшица, то последовательность $f(x, y_n(x)) \rightrightarrows f(x, y(x))$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n(x)) = f(x, \lim_{n\to\infty} y_n(x)) = f(x, y(x)).$$

И, следовательно,

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\Big(y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau\Big) =$$

$$= y_0+\lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau = y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Следовательно, по интегральному признаку функция $y(x)$ — решение задачи Коши.

2. Единственность.

Пусть задача Коши имеет 2 различных решения $z(x)$, $y(x)$, то есть в любой окрестности точки x_0 $\exists\varepsilon : z(\varepsilon) \neq y(\varepsilon)$.

Пусть $x > x_0$. Тогда

$$|y(x)-z(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x}\big(f(\tau, y(\tau))-f(\tau, z(\tau))\big)d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x}\big|f(\tau, y(\tau))-f(\tau, z(\tau))\big|d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} L\big|y(\tau)-z(\tau)\big|d\tau\Big| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} L\big|y(\tau)-z(\tau)\big|d\tau;$$

$$\underbrace{|y(x)-z(x)|}_{\varphi'(x)} - \underbrace{\Big|\int\limits_{x_0}^{x} L\big|y(\tau)-z(\tau)\big|d\tau\Big|}_{\varphi(x)} \leqslant 0.$$

$$\varphi'(x) - L\varphi(x) \leqslant 0.$$

Домножим неравенство на e^{-Lx}. Тогда

$$\varphi'(x) \cdot e^{-Lx} - L\varphi(x) \cdot e^{-Lx} \leqslant 0.$$

$$D(\varphi(x) \cdot e^{-Lx}) \leqslant 0.$$

Следовательно, функция $\varphi(x) \cdot e^{Lx}$ не возрастает на отрезке $[x_0; x]$. Поэтому

$$\varphi(x) \cdot e^{-Lx} \leqslant \varphi(x_0) \cdot e^{-Lx_0} \leqslant 0.$$

Но так как подынтегральная функция $\varphi(x)$ неотрицательна и $x > x_0$, то $\varphi(x) \cdot e^{-Lx} \geqslant 0$. И, следовательно, $\varphi(x) \cdot e^{-Lx} = 0$, то есть $\varphi(x) = |y(x) - z(x)| = 0$. Отсюда следует, что $y(x) = z(x)$.

⊠

Теорема (Пеано)**.** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то задача Коши* (4.6.1) *имеет по крайней мере одно решение $y(x)$ на некотором промежутке $I = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$.*

⧫ Без доказательства. ⊠

Теорема (об условии Липшица)**.** *Если на некотором замкнутом ограниченном множестве $U \subseteq \mathbb{R}^2$ функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей частной производной f'_y, то функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y.*

⧫ Так как функция $f(x, y)$ дифференцируема по y, то по теореме Лагранжа

$$\exists \xi : |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = f'_y(x, \xi) \cdot |y_1 - y_2|.$$

И так как множество U замкнуто и ограничено и $f(x, y)$ непрерывна на U, то непрерывная функция $f'_y(x, y)$ ограничена. Следовательно, $\exists L : |f'_y(x, \xi)| \leqslant L \Rightarrow$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Что и является условием Липшица. ⊠

4.7 Особые решения.

Рассмотрим дифференциальное уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{4.7.1}$$

• *Точка $M(x, y)$ — **точка существования** для уравнения* (4.7.1)*, если через неё проходит хотя бы одна интегральная кривая уравнения* (4.7.1)*, то есть график решения.*

• *Точка существования, обладающая окрестностью, внутри которой все интегральные кривые, проходящие через эту точку, совпадают, называется **точкой единственности**.*

• *Точка существования, через которую проходят две интегральные кривые с одной касательной в этой точке, отличающиеся в любой окрестности этой точки, назвается **точкой ветвления**.*

• *Решение, каждая точка которого является точкой ветвления, называется* ***особым решением.***

Замечание. Если уравнение имеет особое решение, то кроме него и частных решений, входящих в общее рещение уравнение будет иметь **составные решения**, построенные из частей частных и особых решений.

Для поиска особых решений уравнения (4.7.1) могут использоваться два подхода.

I подход. Функции, подозрительные на особые решения для уравнения $y' = f(x, y)$ могут быть найдены из теоремы о существовании и единственности задачи Коши, так как графики особых решений состоят из точек ветвлений, а значит, в каждой его точке нарушается теорема о существовании и единственности, а единственность нарушается в случае невыполнения условия Липшица. В частности, функциями, подозрительными на особые решения, могу быть функции, вдоль которых функция $f'_y(x, y)$ не определена.

II подход. Особое решение может быть найдено, если известно общее решение. Пусть общее решение уравнения (4.7.1) имеет вид

$$F(x, y, C) = 0. \tag{4.7.2}$$

Это уравнение задаёт на плоскости однопараметрическое семейство интегральных кривых.

• *Линия* Γ *называется* ***огибающей*** *однопараметрического семейства линий, если она в каждой своей точке касается одной из линий семейства и ни на каком участке не совпадает с этой линией.*

Таким образом, огибающая семейства решений является особым решением уравнения, так как в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с касательной одного из решений семейства. Огибающая семейства функций (4.7.2) может быть найдена следующим образом. Если Γ — огибающая семейства (4.7.2), то в каждой своей точке $(x_0, y_0) \in \Gamma$ она касается линии Γ_{C_0}, которая получается из уравнения (4.7.2) при $C = C_0$.

Если аналогично поступить с каждой точкой линии Γ, получим параметрическое уравнение огибающей.

$$\begin{cases} x = \varphi(C), \\ y = \psi(C); \end{cases}$$

где C — параметр. Причём

$$F(\varphi(C), \psi(C), C) = 0.$$

Если функция $F(x, y, C)$ является дифференцируемой по каждой из своих переменных, то продифференцируем последнее равенство по C. Тогда

$$F'_x(\varphi(C), \psi(C), C) \cdot \varphi'(C) + F'_y(\varphi(C), \psi(C), C) \cdot \psi'(C) + F'_C(\varphi(C), \psi(C), C) = 0.$$