Exercice 1

Résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\beta - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,1], \\ u(0,t) = 2t, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 1 - t, \\ u_0(x) = \cos^2(2\pi x), \end{cases}$$

où $(\beta - 1) \in]0,1[$ est le coefficient de diffusion.

1. Schéma numérique

Écrire le schéma numérique centré au temps t_n pour approcher la dérivée seconde de u par rapport à x, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en mettant en évidence l'ordre d'approximation.

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_n \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_n^1 + u_{i-1}^n}{(dx)^2}}$$

2. Schéma numérique décentré à droite

Écrire le schéma numérique décentré à droite au nœud x_i pour approcher la dérivée première de u par rapport au temps t, $\frac{\partial u}{\partial t}$ en mettant en évidence l'ordre d'approximation.

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt}}$$

3. Déduire un schéma d'approximation numérique du modèle (1) par la méthode explicite d'Euler.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt} + (\beta - 1)\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(dx)^2}\right) = 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - (\beta - 1)\frac{dt}{(dx)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Posons $\lambda = (\beta - 1)\dfrac{dt}{(dx)^2}$ (coefficient de stabilité) :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(2u_i^n - u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$
$$u_i^{n+1} = u_i^n + 2\lambda u_i^n - \lambda u_{i+1}^n - \lambda u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = -\lambda u_{i-1}^n + u_i^n(1+2\lambda) - \lambda u_{i+1}^n$$

4. Condition de stabilité

Pour déterminer la condition de stabilité, considérons l'inégalité :

$$1 + 2\lambda \leq 0$$

$$1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$
$$\boxed{-\frac{1}{2} \leq \lambda}$$

5.Examiner les condition aux limites et écrire le schéma numérique précédent sous forme d'un système linéaire

Pour $i = 0$ **:**

$$\begin{aligned}
u_0^{n+1} &= -\lambda u_{-1}^n + (1+2\lambda)u_0^n - \lambda u_1^n \\
\text{Avec } u(0) &= \frac{u_{-1}^n - u_0^n}{2} \Rightarrow u_{-1}^n = 2u_0(t) - u_0^n \\
\Rightarrow u_{-1}^n &= 4t - u_0^n \\
\Rightarrow u_0^{n+1} &= -\lambda(4t - u_0^n) + (1+2\lambda)u_0^n - \lambda u_1^n \\
&= -4\lambda t + \lambda u_0^n + (1+2\lambda)u_0^n - \lambda u_1^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_0^{n+1} + 4\lambda t = (1+3\lambda)u_0^n - \lambda u_1^n}$$

Pour $i = N$:

$$\begin{aligned}
u_N^{n+1} &= \lambda u_{N-1}^n + (1+2\lambda)u_N^n \\
\text{Avec } u(1,t) &= \frac{u_N^n + u_{N+1}^n}{2} \Rightarrow 2u(1,t) = u_N + u_{N+1} \\
\Rightarrow u_{N+1} &= 2(1-t) - u_N \\
\Rightarrow u_N^{n+1} &= -\lambda u_{N-1}^n + (1+2\lambda)u_N^n - \lambda(2 - 2t - u_N^n) \\
&= -\lambda u_{N-1}^n + (1+3\lambda)u_N^n - 2\lambda(1+t) \\
u_N^{n+1} + 2\lambda(1+t) &= -\lambda u_{N-1}^n + (1+3\lambda)u_N^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Schéma final :} \\
u_0^{n+1} + 4\lambda t = (1+3\lambda)u_0^n - \lambda u_1^n \\
u_N^{n+1} + 2\lambda(1+t) = -\lambda u_{N-1}^n + (1+3\lambda)u_N^n
\end{array}}$$

6. Écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} u_0^{n+1} + 4\lambda t_n \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} - 2\lambda(1+t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1-2\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\lambda & 1-2\lambda & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1+3\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{pmatrix}$$

7. Application numérique

Données :

$$\Delta t = 0.01,\ \Delta x = 0.1,\ \beta = 0.86 \quad (\gamma = (\beta - 1)\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \approx -0.014)$$

(a) Voir le fichier exercice1_7_a.m pour le code Octave :
(b) Interprétation qualitative :

- **Comportement attendu** : - Diffusion **inverse** (car $\gamma < 0$) avec amplification des gradients - Condition de Dirichlet en $x = 0$ impose une croissance linéaire - Condition de Neumann en $x = 1$ limite le flux
- **Résultats prévus** :

1. À $t = 0$: Profile initial $\cos^2(2\pi x)$
2. Pour $t > 0$: - Décroissance de l'amplitude des oscillations - Déformation vers la droite (effet du flux imposé) - Possible instabilité numérique (à vérifier)

— **Vérifications** : - Contrôler que $\max |u|$ reste borné - Observer la conservation du flux en $x = 1$

La valeur négative de γ peut induire des instabilités.
Une analyse supplémentaire de la stabilité est recommandée.