# ECN 7055 Macroéconomie B

Guillaume Sublet

Université de Montréal

Cours II.2: Risques particuliers sur le marché du travail

# II Marchés incomplets et hétérogénéité des agents

1. Agrégation
2. Risques particuliers sur le marché du travail (Aiyagari (1994))
3. Risques particuliers sur le marché du capital (Angeletos (2007))
4. Optimal social (Davila Hong Krussell Rios-Rull (2012))
5. Risque global et marchés endogènes

Plan

1. Equilibre partiel : problème du consommateur face aux risques sur le marché du travail et marchés financiers incomplets
(Lectures : Chapitre 17 « Self-Insurance » de LS)
2. Outil : équilibre compétitif récursif
(Lectures : Chapitres 7 et 12 « Recursive Competitive Equilibrium : I & II » de LS)
3. Equilibre général : Équilibre compétitif récursif du modèle de Aiyagari (1994)
(Lectures : Chapitre 18 « Incomplete Markets Models » de LS)
4. Applications du modèle
    - Comparaison avec marchés complets
    - Distribution des richesses
    - Dette du gouvernement

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Contexte décisionel d'un ménage

- Horizon inini $t = 0, 1, \ldots$
- Risque sur le marché du travail : $z_t$ stochastique avec $Prob(z_{t+1}|z_t) \equiv \pi(z_{t+1}|z_t)$.
- Un seul actif financier, un bon du trésor avec rendement sans risque $R_t$. L'épargne en bons du trésor est désignée par $a_t$.
- Préférences $E_0 \ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ où l'esperance est sur l'évolution de $z$. L'offre de travail est inélastique par seul souci de simplification.
- Dotation d'une unité de temps par période et richesse initiale $a_0$.
- Contrainte d'endettement *ad hoc* : ménage ne peut emprunter plus que $b$

Exercice en classe : Les marchés sont ils complets ? Expliquer.

Exercice en classe : Formuler le problème séquentiel d'un ménage

$$\max_{(c_t,a_t)_{t=0}^{\infty}} E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous contraintes

$$c_t + a_{t+1} = R_t a_t + w_t \; z_t$$

$$a_0, z_0 \text{ donnés}$$

$$Pr(z_{t+1} = z|z_t) = \Pi(z|z_t)$$

$$a_t \geq -b$$

$$c_t \geq 0$$

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Problème d'un ménage

Supposez que $w$ et $R$ sont constants (e.g. comme à l'état stationnaire d'un équilibre).

Exercice en classe : Formuler le problème d'un ménage sous forme récursive

$$
\begin{aligned}
v(a,z) = \max_{c,a'} \; & u(c) + \beta \int [v(a',z') \mid z] \; \Pi(dz'|z) \\
\text{s.t. } & c + a' = R \; a + w \; z \\
& a' \geq -b \\
& c \geq 0
\end{aligned}
$$

Les anticipations des ménages des prix futurs sont évidentes vu que les prix sont constants.

Que faire si les prix ne sont pas constants comme lors d'une période de transition ?

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Problème d'un ménage

Si $(w_t)_{t=0}^{\infty}$ et $(R_t)_{t=0}^{\infty}$ ne sont pas constants :

$$v_t(a, z, (w_j, R_j)_{j=t}^{\infty}) = \max_{c,a'} u(c) + \beta \int [v_{t+1}(a', z', (w_j, R_j)_{j=t+1}^{\infty}) \mid z] \, \Pi(dz'|z)$$

$$\text{s.t. } c + a' = R_t \; a + w_t \; z$$

$$a' \geq -b$$

$$c \geq 0$$

- Tout ce qui est en rouge sert à modéliser les anticipations que le ménage forme sur les prix futurs.
- Cette formulation est utile théoriquement mais impossible à utilisée en pratique car l'espace de variable d'état est de dimension infinie.
- On va voir qu'on peut souvent résumer l'évolution des prix par l'évolution de variables d'état agrégées .

Supposons que le salaire et le taux d'intérêt sont des fonctions de variables d'état agrégés, par exemple $K, L$, et qu'il est possible de résumer l'évolution des variables d'états à partir des variables d'états elles-mêmes.

$$
\begin{aligned}
v(a, z, K, L) = \max_{c, a'} \; & u(c) + \beta \int [v(a', z', K', L') \mid z] \, \Pi(dz'|z) \\
\text{s.t. } & c + a' = R(K, L) \; a + w(K, L) \; z \\
& a' \geq b \\
& K' = \Gamma_k(K, L) \quad \text{et} \quad L' = \Gamma_l(K, L)
\end{aligned}
$$

où $\Gamma$ désigne la loi d'évolution des variables d'état agrégées du système.

Tout ce qui est en rouge sert à modéliser les anticipations que le ménage forme sur les prix futurs.

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Problème d'un ménage

L'état $(a, z, K, L)$ est composé de :

- variable d'état individuelle choisie par le ménage : $a$ désigne la richesse du ménage ce qui est le résultat de ses choix passés
- variable d'état choisie par la nature : $z$ est le choc sur le marché du travail ce qui est déterminé par la nature
- variable d'état agrégée/déterminée par le marché : $K, L$ est le résultat d'un équilibre de marché ; c'est l'aggrégation de choix de ménages et firmes. Cependant, le choix de chaque ménage/firme a un impact négligeagle sur la variable agrégée (exemple $K = \int_0^1 k(i)di$)

La séparation entre « variables d'état individuelles choisies par le ménage » et « variables d'état agrégées/déterminées par le marché » est la clé de l'astuce « big K, little k ».

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Problème d'un ménage

- Par exemple, si la fonction de production est Cobb-Douglas, on a :

$$w(K, L) = (1 - \alpha) \left( \frac{K}{L} \right)^{\alpha}$$
$$R(K, L) = \alpha \left( \frac{L}{K} \right)^{1-\alpha}$$

- $\Gamma$ est une donnée du point de vue du consommateur

- Par contre, comme on le verra, $\Gamma$ est une fonction endogène (i.e. déterminée) à l'équilibre vu que les variables d'état agrégées sont des variables endogènes à l'équilibre.

# Exercice : résolution numérique du problème d'un ménage

Supposer que $r = 0.01$, $z$ peut prendre les valeurs $(0.5, 1)$ et la matrice de transition pour $z$ est

$$\left[\begin{array}{cc} \Pi(z' = 0.5 | z = 0.5) & \Pi(z' = 1 | z = 0.5) \\ \Pi(z' = 0.5 | z = 1) & \Pi(z' = 1 | z = 1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0.6 & 0.4 \\ 0.05 & 0.95 \end{array}\right]$$

Supposer que $r = 0.01$, $w = 1$, $\beta = 0.96$, $u = \ln$, et $b = 0$.

1. Résoudre numériquement le problème d'un ménage par la méthode numérique de votre choix.
   Solution disponible : QuantEcon, leçon « The Income Fluctuation Problem ». ou sur ma page GitHub.

2. Faire l'exercice 1 de QuantEcon, leçon « The Income Fluctuation Problem ».

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Outil : équilibre compétitif récursif

- On vient de formuler le problème d'un ménage qui fait face à du risque sur le marché du travail pour lequel il n'y a pas d'assurance. C'est un problème d'équilibre partiel.

- Avant de passer à l'équilibre général de ce modèle avec risque particulier sur le marché du travail (Aiyagari (1994)), on va acquérir un outil de modélisation récursive : l'*équilibre compétitif récursif*. Pour cela, on retrourne au modèle RBC.

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Outil : équilibre compétitif récursif

- Le Principe d'optimalité montre l'équivalence entre la formulation récursive et séquentielle d'un problème d'optimisation. On vient de l'utiliser pour obtenir une formulation récursive du problème d'optimisation d'un ménage (équilibre partiel où les prix sont donnés). Comment calculer un équilibre général (où les prix sont endogènes) ?
- Si les théorèmes de l'économie du bien-être s'appliquent, on peut utiliser la formulation récursive du problème du planificateur pour trouver l'allocation efficiente ; cette allocation efficiente est aussi l'allocation d'équilibre. On récupère ensuite les prix grâce aux CPO du problème de la firme et/ou du ménage.
- Que faire si les théorêmes de l'économie du bien-être ne s'appliquent pas ? On va voir comment utiliser les méthodes récursives pour résoudre pour l'équilibre d'une économie pour laquelle l'allocation d'équilibre n'est *pas* efficiente. Il nous faut définir un *équilibre compétitif récursif*.

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Outil : équilibre compétitif récursif

- Lectures :
  - LS Section 7.3 « Recursive competitive equilibrium »
  - SLP Section IV « Competitive Equilibrium » (pour approfondir)
- On va apprendre l'astuce du « Grand $K$, petit $k$ »(« Big K, little k ») qui permet de séparer
  - ce qu'un agent (ménage/firme) prend comme donné ; l'agent étant un atome, son choix n'a pas d'impact sur les prix qui sont le résultats de variables agrégés
  - ce qu'un agent (ménage/firme) choisit.
- Ensuite, on va définir un équilibre compétitif récursif pour un modèle qu'on connaît bien, le modèle RBC [1].

1. Les théorêmes de l'économie du bien-être s'appliquent donc on pourrait calculer l'allocation d'équilibre en résolvant le problème du planificateur.

# II. 2. Outil : équilibre compétitif récursif

## « Grand $K$, petit $k$ »

Exemple de l'astuce du « Grand $K$, petit $k$ »(« Big K, little k ») :

- le ménage prend les prix $(r_t, w_t)_{t=0}^{\infty}$ comme donnés. Le ménage utilise le capital agrégé, grand $K$, et son évolution (d'après $\Gamma$) pour prédire les prix futurs :

$$R(K,L) = \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} \qquad \text{et} \qquad w(K,L) = (1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

$$K' = \Gamma_k(K,L) \qquad \text{et} \qquad L' = \Gamma_l(K,L)$$

- le ménage choisit sa propre offre de capital et de travail, soit « petit $k$ » et « petit $l$ »

Important : le ménage choisit petit $k$ et prend grand $K$ comme une donnée indépendante de son choix. Les variable d'état grand $K$ et grand $L$ servent seulement à prédire les prix.

# II. 2. Outil : équilibre compétitif récursif

## « Grand $K$, petit $k$ »

(suite)

- « Grand $K$ » et « petit $K$ » sont bien distincts du point de vu du problème du ménage.

- La notion d'équilibre avec anticipations rationnelles impose :

  - « grand $K$ » et « petit $K$ » soient cohérents : à l'équilibre, avec un agent représentatif $K = k$ car $K = \int_0^1 k \; di = k$ et pareil pour $L = \int_0^1 l \; di = l$

  - la loi d'évolution des variables d'état agrégée perçue $\Gamma$ est cohérente avec l'évolution des variables d'états agrégées à léquilibre. Ceci garantit que les anticipations sont rationnelles : les agents anticipent correctement (étant donné l'information disponible) les prix.

*Rappel : formulation séquentielle d'un équilibre compétitif :*
Notation : $s^t$ désigne l'historique $s^t = (Z_0, \ldots, Z_t)$

Étant donné une dotation initiale $a_0$, un équilibre compétitif est une allocation $(c_t(s^t), l_t(s^t), a_{t+1}(s^t))_{t=0}^{\infty}, (K_t(s^{t-1}), n_t(s^t))_{t=0}^{\infty}$ et un système de prix $(w_t(s^t), r_t(s^t))_{t=0}^{\infty}$ tels que :

- $(c_t(s^t), l_t(s^t), a_{t+1}(s^t))_{t=0}^{\infty}$ résout problème du ménage étant donnés les prix $(w_t(s^t), r_t(s^t))_{t=0}^{\infty}$
- $(K_t(s^t), N_t(s^t))_{t=0}^{\infty}$ résout problème des firmes étant donné prix $(w_t(s^t), r_t(s^t))_{t=0}^{\infty}$
- Marchés sont à l'équilibre à chaque $t = 0, \ldots$
  - travail : $N_t(s^t) = l_t(s^t)$
  - actifs financiers : $a_t(s^t) = K_t(s^t)$
  - biens :
    $c_t(s^t) + k_{t+1}(s^t) - (1-\delta)k_t(s^{t-1}) = Z_t \ (K_t(s^t))^{\alpha} \ (N_t(s^t))^{1-\alpha}$

Supposons que le processus stochastique pour $z$ est AR(1).
Formulation récursive du problème du ménage représentatif :

$$
\begin{aligned}
v(k,Z,K,L) = \max_{c,k'} \; & u(c) + \beta E[v(k',z',K',L') \mid Z] \\
\text{s.t. } & c + k' - (1-\delta)k = r(K,L,Z)\; k + w(K,L,Z)\; Z \\
& K' = \Gamma_k(K,L,Z) \quad \text{et} \quad L' = \Gamma_l(K,L,Z) \\
& z' = \rho z + \epsilon \quad \epsilon \sim \Phi
\end{aligned}
$$

Solution est

- $v(k,Z,K,L)$ la fonction valeur
- $c(k,Z,K,L), k'(k,Z,K,L)$ les fonctions de politique associées à $v$. L'offre de travail est inélastique à 1.

La firme optimise tant que le choix de la firme $(k, l)$ satisfait :

$$r(k, l, Z) = Z\ \alpha \left(\frac{l}{k}\right)^{1-\alpha}$$

$$w(k, l, Z) = Z\ (1-\alpha) \left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha}$$

# II. 2. Outil : équilibre compétitif récursif

## Définition : équilibre compétitif récursif du modèle RBC

Un *équilibre compétitif récursif* est

- une fonction valeur et fonctions de politique $(v(\cdot), c(\cdot), k'(\cdot))$
- un système de prix fonctions $(r(\cdot), w(\cdot))$,
- une loi perçue d'évolution du capital et du travail $\Gamma_k, \Gamma_l$, et
- une loi d'évolution du capital et du travail agrégé $\Gamma_k^a, \Gamma_l^a$

tels que :

- $(v, c, k')$ sont la solution du problème du ménage représentatif étant donné $\Gamma_k, \Gamma_l, r(\cdot), w(\cdot)$ ,
- la firme représentative optimise

$$r(K, L, Z) = Z\ \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad w(K, L, Z) = Z\ (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha},$$

- lois d'évolution agrégées cohérentes avec les choix des agents :

$$\Gamma_k^a(K, L, Z) = k'(K, Z, K, L) \quad \text{et} \quad \Gamma_l^a(K, L, Z) = 1$$

- les anticipations sont rationnelles :

$$\Gamma_k(K, L, Z) = \Gamma_k^a(K, L, Z) \quad \text{et} \quad \Gamma_l(K, L, Z) = \Gamma_l^a(K, L, Z) .$$

## Définition : équilibre compétitif récursif du modèle RBC

*Définition simplifiée :*

Un *équilibre compétitif récursif* est

- une fonction valeur et fonctions de politique $(v(\cdot), c(\cdot), k'(\cdot))$
- un système de prix fonctions $(r(\cdot), w(\cdot))$,
- une loi d'évolution du capital et du travail $\Gamma_k, \Gamma_l$,

tels que :

- $(v, c, k')$ sont la solution du problème du ménage représentatif étant donné $\Gamma_k, \Gamma_l, r(\cdot), w(\cdot)$ ,
- la firme représentative optimise

$$r(K, L, Z) = Z\ \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad w(K, L, Z) = Z\ (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha},$$

- les anticipations sont rationnelles :

$$\Gamma_k(K, L, Z) = k'(K, Z, K, L) \quad \text{et} \quad \Gamma_l(K, L, Z) = 1 \,.$$

# II. 2. Outil : équilibre compétitif récursif

Exercice :

Considérer l'économie étudiée par Aiyagari et McGrattan (1998) Journal of Monetary Economics.

1. Décrire l'environnement économique étudié par Aiyagari et McGrattan (1998) JME
2. Définir un équilibre compétitif stationnaire sous forme récursive pour le modèle de Aiyagari et McGrattan (1998) JME

Plan

X Equilibre partiel : problème d'un ménage face aux risques sur le marché du travail et marchés financiers incomplets

X Outil : équilibre compétitif récursif

3. Equilibre général : Équilibre compétitif récursif du modèle de Aiyagari (1994) où une infinité de ménages font face aux risques sur le marché du travail et les marchés financiers incomplets

4. Applications du modèle
   - Comparaison avec marchés complets
   - Distribution des richesses
   - Dette du gouvernement (voir l'article de Aiyagari McGrattan (1998) sur StudiUM)

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Équilibre général

Lectures :

- LS Chapitre 17 « Self-insurance » pour l'analyse du problème du ménage en équilibre partiel
- LS Chapitre 18 « Incomplete Markets Models » pour l'analyse de l'équilibre général du modèle

Outils numériques :

- QuantEcon « The Aiyagari Model »
- Sur ma page GitHub, code « QuantEcon_Aiyagari.ipynb »

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Environnement économique

- t = 0, 1, ...
- Un ensemble continu de masse 1 de ménages indexés par $i \in [0, 1]$
- Économie à un secteur (bien final peut être investit et capital peut être consommé)
- Dotation d'une unité de temps chaque période et dotation initiale $a_0$
- Préférences :

$$U((c_t)_{t=0}^{\infty}) = \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \; u(c_t) \right]$$

(offre de travail inélastique à 1)

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Environnement économique

- Risque sur le marché du travail :
  - $z$ suit un chaîne de Markov stationnaire avec $n$ chocs possibles, distribution initiale $\pi$ et matrice de transition $P$.
  - $z$ est indépendemment distribué pour chaque ménage
  - La loi des grands nombres s'applique car il y a un nombre infini de ménages et donc les chocs sur le marché du travail ne sont pas une source de risque aggrégé. On parle de risque particulier (« idiosyncratic risk »).

- Un seul actif financier : dette avec rendement $R$
  Les marchés financiers sont donc incomplets ce qui empêche les ménages d'assurer le risque particulier auquel ils font face.

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Environnement économique

- Production à partir de capital et travail :

$$F(K, L) = A\ K^{\alpha}\ L^{1-\alpha}$$

- Marchés compétitifs pour
  - services du capital, taux d'intérêt $R$
  - travail, salaire $w$
  - bien de consommation / investissement (un seul secteur), prix normalisé à 1

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Environnement économique

Exercice en classe : Quelles sont les différences entre l'économie étudiée par Aiyagari (1994) et le modèle RBC ?

La différence principale est la suivante :

- L'économie du modèle RBC fait face à du *risque agrégé* : $Z$ est stochastique et affecte la possibilité de production de toute l'économie est $F(K, L) = Z\ K^{\alpha}\ L^{1-\alpha}$. Le risque agrégé ne peut être assuré et les marchés sont donc complets.

- Les ménages du modèle d'Aiyagari fait face à du *risque particulier* (« idiosyncratic ») : $z_i$ est indépendement distribué entre les ménages. La dotation de temps disponible pour l'économie est constante à $E[z]$ ou l'espérance est d'après la distribution (non-conditionnelle) stationnaire $\pi$.

Au cours II.4, on étudiera le modèle de Krusell et Smith (1998) qui combine risque global/agrégé comme le modèle RBC et risque particulier comme le modèle d'Aiyagari (1994).

Comme on l'a vu, il est utile de séparer les variables d'état en trois catégories :

- variables d'état individuelles choisies par le ménage dans le passé : $a$ : épargne du ménage en dette
- variables d'état choisies par la nature : $z$ : risque particulier indépendemment distribué entre les ménages
- variables d'état déterminées par le marché :
  - $K, L$ sont le résultat de l'agrégation de choix d'un ensemble continu de ménages
  - $\mu(a, z)$ une distribution cumulative qui nous donne la masse de ménages qui a moins d'épargne que $a$ et une réalisation du choc en dessous de $z$

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Équilibre général : variables d'état

- Différentes réalisations du risque particulier pour différents ménages créent de l'hétérogénéité de richesse *ex-post* entre les ménages.
- La distribution $\mu$ décrit l'hétérogénéité de l'économie ; pour chaque paire $(a, z)$ elle nous donne la masse de ménages qui ont cette épargne et cette réalisation du choc
- La distribution $\mu$ est un objet de dimension infini ce qui complique la résolution numérique du modèle. On aura recours à deux approches :
  - étudier l'état stationnaire du modèle
  - utiliser l'astuce de Krusell et Smith (1998) (voir aussi section dans le chapitre LS « Incomplete Market Models »)

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Équilibre général : problème du ménage

Supposons que le salaire et le taux d'intérêt sont des fonctions de variables d'état agrégés $K, L, \mu$, et qu'il est possible de résumer l'évolution des variables d'états à partir des variables d'états elles-mêmes.

$$
\begin{aligned}
v(a, z_i, K, L, \mu) = \max_{c,a'} \; & u(c) + \beta \sum_{i'=1}^{n} P_{ii'} \; v(a', z_{i'}, K', L', \mu') \\
\text{s.t. } & c + a' = R(K, L) \; a + w(K, L) \; z \\
& a' \geq b \\
& K' = \Gamma_k(K, L, \mu) \quad , \quad L' = \Gamma_l(K, L, \mu) \\
& \mu' = \Gamma(K, L, \mu)
\end{aligned}
$$

$\Gamma_k, \Gamma_l$, et $\Gamma$ sont les lois d'évolution *perçues* par les ménages. Elles sont ce dont les ménages ont besoin pour anticiper les prix futurs en anticipant $K', L'$.

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Lois d'évolution perçues vs lois d'évolution agrégées

Lois d'évolution des agrégats de l'économie :

- Travail : offre inélastique à 1 donc $\Gamma_l(K, L, \mu) = E[z]$
  Remarque : chaque period, l'offre effective de travail est inélastique à $E[z]$

- Capital :
  $K' = \Gamma_k(K, L, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-b}^{\infty} a'(a, z_i, K, L, \mu) d\mu(a, z_i)$

- $\mu' = \Gamma(K, L, \mu)$ où pour tout $A \subset [-b, \infty] \times Z$

$$\mu'(A) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{i'=0}^{n} P_{i,i'} \int_{-b}^{\infty} 1_{\{(a'(a,z_i,K,L,\mu),z_{i'}) \in A\}} \; \mu(da, z_i)$$

$$\max_{K,N} A\ K_t^{\alpha} L^{1-\alpha} - (r+\delta)K - wL$$

Les CPO sont :

$$r = A\alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta$$

$$w = A(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

Pour calculer l'équilibre général on va utiliser un point fixe sur $r$, il est donc pratique d'exprimer le salaire en terme de $r$ ainsi :

$$w(r) = A(1-\alpha)\left(\frac{A\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Remarque : demande inverse de capital par le firme est :

$$r = A\alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta$$

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Équilibre compétitif récursif pour le modèle d'Aiyagari

Un *équilibre compétitif récursif* est

- une fonction valeur et fonctions de politique $(v(\cdot), c(\cdot), a'(\cdot))$
- un système de prix $(r, w)$,
- des lois d'évolution $\Gamma_k, \Gamma_l, \Gamma$,
- une distribution des richesses initiale $\mu_0$

tels que :

- $(v, c, a')$ sont la solution du problème d'un ménage étant donné les prix $r, w$ et $\Gamma, \Gamma_k, \Gamma_l$ ,
- la firme représentative optimise $r(K, L) = A\alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta$ et $w(K, L) = A(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$
- marchés à l'équilibre et anticipations rationnelles :
  - $\Gamma_l(K, L, \mu) = E[z]$
  - $\Gamma_k(K, L, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-b}^{\infty} a'(a, z_i, K, L, \mu) d\mu(a, z_i)$
  - $\mu' = \Gamma(K, L, \mu)$ où pour tout $A \subset [-b, \infty] \times Z$

$$\mu'(A) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{i'=0}^{n} P_{i,i'} \int_{-b}^{\infty} 1_{\{(a'(a,z_i,K,L,\mu),z_{i'}) \in A\}} \, \mu(da, z_i)$$

- On commence par analyser l'état stationnaire
- Le problème du ménage est donc

$$
\begin{aligned}
v(a, z_i) = \max_{c,a'} \; & u(c) + \beta \sum_{i'=1}^{n} P_{ii'} \; v(a', z_{i'}) \\
\text{s.t. } & c + a' = R \; a + w \; z \\
& a' \geq -b \\
& c \geq 0
\end{aligned}
$$

où, rappel de la notation usuelle $R = 1 + r$.

- Exercice en classe : Qu'en est-il des anticipations de prix ?

L'équation d'Euler est :

$$\begin{cases} u'(Ra + wz - a') & = \beta \ E_{z'|z}\left[\frac{\partial v}{\partial a}(a', z')\right] \qquad \text{if } a' > -b \\ u'(Ra + wz - a') & = u'(Ra + wz + b) \qquad \text{if } a' = -b \end{cases}$$

Remarque : pour la résolution numérique on utilise l'itératon temps d'après l'équation suivante :

$$u'(c_{\tau+1}(a,z)) = \max\left(\beta \ R \ E_{z'|z}\left[u'\left(c_\tau\left(Ra + wz - c_{\tau+1}(a,z), \ z'\right)\right)\right], \right.$$
$$\left. u'(Ra + wz + b)\right)$$

Un *équilibre compétitif récursif stationnaire* est

- une fonction valeur et fonctions de politique $(v(\cdot), c(\cdot), a'(\cdot))$
- un système de prix $(r, w)$,
- $K, L$ et la distribution stationnaire des richesses $\mu$

tels que :

- $(v, c, a')$ sont la solution du problème du ménage représentatif étant donné les prix $r, w$
- la firme représentative optimise

$$r = A\alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta \quad \text{et} \quad w = A(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

- les marchés sont à l'équilibre
  - travail $L = E[z]$ capital $K' = \sum_{i=1}^{n} \int_{-b}^{\infty} a'(a, z_i) d\mu(a, z_i)$
  - Pour tout $A \subset [-b, \infty] \times Z$

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=0}^{n} P_{i,i'} \int_{-b}^{\infty} 1_{\{(a'(a,z_i), z_{i'}) \in A\}} \, \mu(da, z_i)$$

.

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

## Calcul de l'équilibre compétitif récursif stationnaire pour modèle d'Aiyagari

Mon code (disponible sur StudiUM) calcul un *équilibre compétitif récursif stationnaire* en calculant l'équilibre sur le marché du capital

- Calcul de la demande inverse de capital agrégée :
  - demande : pour chaque $r$, quel est la demande de capital par la firme ?
  - demande inverse : pour chaque $K$ quel est le $r$ qui donne une demande de $K$ par la firme

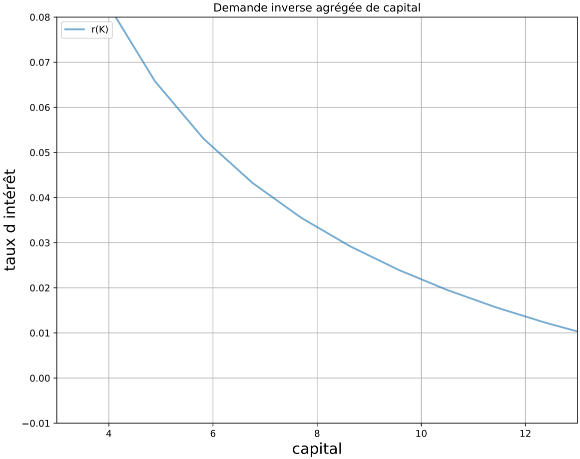
  $$r(K) = A\alpha \left(\frac{E[z]}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta \quad \text{(demande inverse de capital)}$$

  d'après le problème de la firme

- Calcul de l'offre inverse de capital agrégée :
  pour chaque $K$, quel est le $r$ qui donne une offre de $K$ par les ménages à l'état stationnaire.

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

Demande inverse de capital d'après les CPO du problème de la firme représentative $r(K) = A\alpha \left(\frac{E[z]}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta$



Calcul de l'offre de capital agrégée : pour chaque $r$, on calcul :

$$K' = \sum_{i=1}^{n} \int_{-b}^{\infty} a'(a, z_i) d\mu(a, z_i)$$

où la fonction de politique dépend du $r$ que le ménage prend comme donnée.

Pour chaque $r$, il nous faut donc deux objets pour calculer l'offre de capital

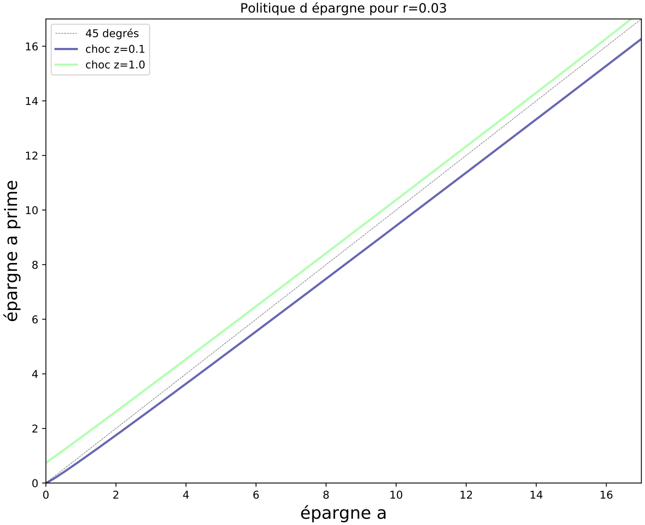
1. la fonction de politique d'épargne $a'(a, z_i)$ qui dépend de $r$ (c'est à dire : $a'(a, z_i; r)$ ou ce qui vient après « ; » est un paramètre du point de vue du ménage)
2. la distribution de l'hétérogénéité dans l'économie $\mu(a, z_i)$ associée à chaque $r$ et donc à $a'(a, z_i; r)$

Fonction de politique d'épargne $a'(a, z_i; r)$ :

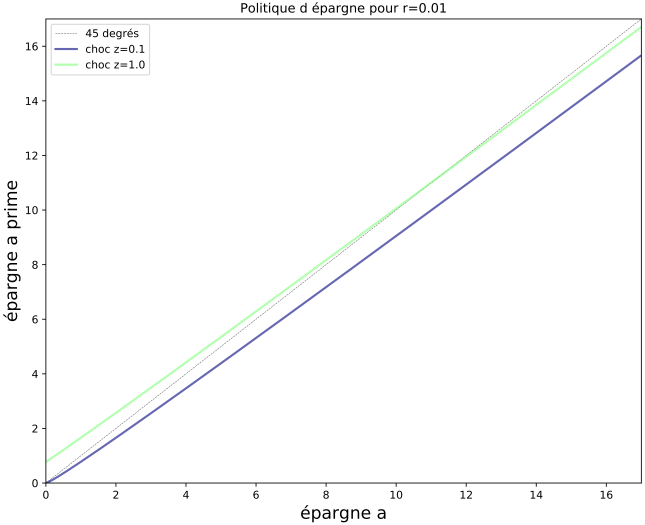
L'algorithme d'itération temps permet de résoudre le problème d'un ménage pour un taux d'intéret donné et le salaire associé $w(r)$ (c'est l'exercice que vous avez résolu (QuantEcon « The Income Fluctuations Problem ») avec comme seul changement : $w = w(r)$ au lieu de $w = 1$)

- itération temps donne $c(a, z_i; r)$
- on calcul $a'(a, z_i; r)$ en substituant $c(a, z_i; r)$ dans la contrainte budgétaire

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail



# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail



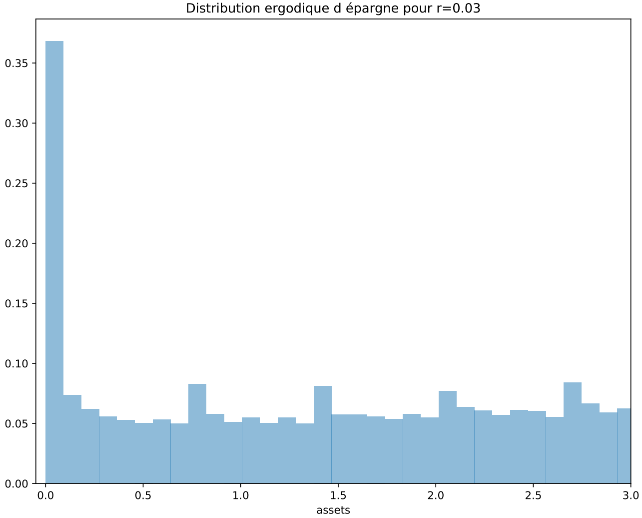
Distribution de l'hétérogénéité dans l'économie $\mu(a, z_i)$ associée à chaque $r$ et donc à $a'(a, z_i; r)$

- Simulation de la chaîne de Markov stationnaire $(\pi, P)$ pour simuler une séquence de chocs $(z_0, z_1, \ldots, z_T)$.
- Calcul de la séquence d'épargne associée à la séquence $(z_1, \ldots, z_T)$ d'après $a_{t+1} = a'(a_t, z_t; r)$. On obtient

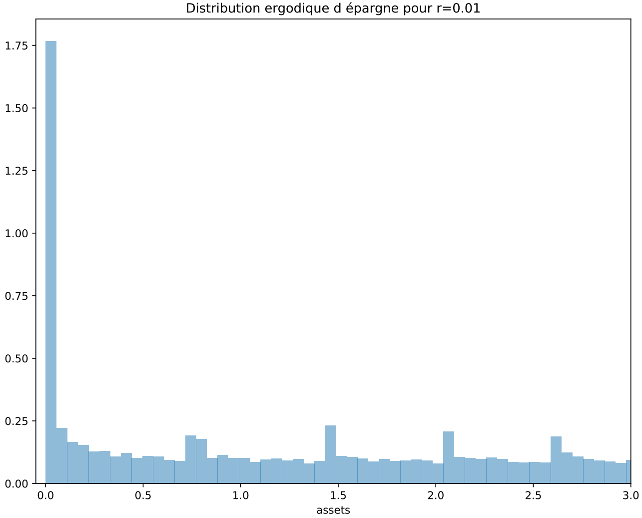
$$(a_0, a_1, \ldots, a_{T+1})$$

- Calcul de l'historgramme de la séquence $(a_0, a_1, \ldots, a_{T+1})$
- D'après la loi des grands nombres pour les chaîne de Markov stationnaire et ergodique, l'histogramme de la longue série temporelle d'épargne est aussi la distribution de la coupe transversale $\mu$

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail



# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail



# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

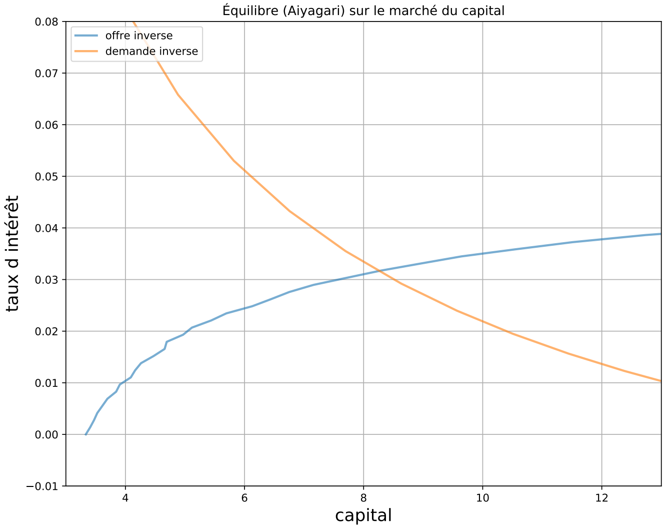
On vient de calculer $a'(a, z_i; r)$ et $\mu$ pour $r = 0.03$ et $r = 0.01$.

- On vient de calculer $a'(a, z_i; r)$ et $\mu$ pour $r = 0.03$ et $r = 0.01$.
- On peut donc calculer

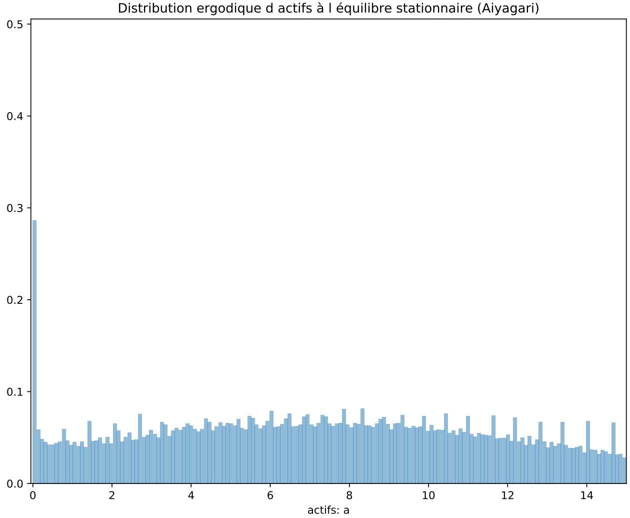
$$K' = \sum_{i=1}^{n} \int_{-b}^{\infty} a'(a, z_i; r) d\mu(a, z_i)$$

- On répète cette procédure pour toutes les valeurs de $r$ d'une grille de taux d'intérêt sur l'interval $[0, 0.1]$.
- On obtient l'offre de capital qu'on représente en offre inverse

# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail



# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail



# II. 2. Risques particuliers sur le marché du travail

On vient de résoudre pour l'équilibre de manière graphique.

On peut aussi utiliser l'algorithme suivant :

1. Choisir paramètre de lissage $s \in (0, 1)$ et tolérance $tol$
2. Choisir $K_0$ et compteur $j = 0$
3. Calcul de $r(K_j)$
4. Calcul de $K'$ :
   4.1 calcul de $a'(a, z_i; r(K_j))$
   4.2 calcul de $\mu$ d'après une longue série temporelle associée à $a'(a, z_i; r(K_j))$
   4.3 calcul de $K_{\tau+1} = \int a'(a, z_i; r(K_j)) d\mu$
5. - Si $|K' - K_j| < tol$ convergence donc STOP et $r^{equilibre} = r(K_j)$
   - Sinon, $K_{j+1} = sK_j + (1 - s)K'$ et retour à 3. avec $j = j + 1$.

Mon code trouve $r^* = 3.138\%$ (en ligne avec la résolution graphique)

# Comparaison Aiyagari et marchés complets

## Exercice en classe :

Quel serait le taux d'intérêt d'équilibre si les marchés étaient complets ?

*Réponse :* Si les marchés étaient complets on aurait la règle d'or modifiée du capital. La CPO inter-temporelle du consommateur serait

$$u'(c_t) = \beta(1+r)u'(c_{t+1})$$

et à l'état stationnaire on aurait $c_t = c_{t+1}$ et donc :

$$1 = \beta(1+r)$$

Avec $\beta = 0.96$ on obtient

$$r = \frac{1}{\beta} - 1 = 4.16\%$$

# Exercice : économie d'Aiyagari (1994)

Considérer une économie avec risque particulier sur le marché du travail et marchés incomplets comme celle d'Aiyagari étudiée dans ce cours. Le risque suit une chaîne de Markov avec $z = [0.1, 1]$ et

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$\beta = 0.96$, $u(c) = \ln(c)$, $b = 0$, $\alpha = 1/3$, $A = 1$, $\delta = 0.05$.

1. Calculer l'équilibre d'Aiyagari (solution est le code Python QuantEcon_Aiyagari sur StudiUM)
2. Calculer le taux d'intérêt si les marchés étaient complets
3. Comparer le niveau de capital d'équilibre stationnaire dans les deux économies (marchés incomplets et marchés complets)
4. Comparer le taux d'intérêt de l'équilibre d'Aiyagari à celui calculé pour les marchés complets. Lire le chapitre LS « Self-Insurance »et « Incomplete Market Models »et discuter la différence entre les deux taux d'intérêts. *Indice : épargne de précaution « precautionary saving ».*