ECN 7055 Macroéconomie B

Guillaume Sublet

Université de Montréal

Cours II.3: Risques particuliers sur le marché du capital

II Marchés incomplets et hétérogénéité des agents

X Agrégation

X Risques particuliers sur le marché du travail (Aiyagari (1994))

2. Risques particuliers sur le marché du capital (Angeletos (2007))
3. Optimal social (Davila Hong Krussell Rios-Rull (2012))
4. Risque global et marchés endogènes

- On a étudié l'effet du risque aggrégé de productivité sur l'économie avec le modèle RBC
- On a étudié le risque particulier (« idiosyncratic ») sur le marché du *travail* avec le modèle d'Aiyagari (1998)
- Ce cours II.3 : risque particulier sur le marché du *capital* avec le modèle d'Angeletos (2007) « Uninsured idiosyncratic investment risk and aggregate saving » *Review of Economic Dynamics*

Lectures : Angeletos (2007), notes sur StudiUM et autres articles de recherche dans le dossier associé à ce cours

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Motivation empirique

- Moskowitz Vissing-Jorgensen (2002) *AER* offrent une analyse empirique du capital-investissement aux États-Unis pour les firmes non cotées en bourse.
  - les entrepreneurs investissent une grande part de leur richesse dans leur firme et ne semblent donc pas bien diversifier leur portefeuille
  - le rendement du capital-investissement n'est pas bien plus haut que les rendements des firmes cotées en bourse malgré le haut niveau de risque associé. Le rendement du capital-investissement ne semble pas compenser pour le risque associé à l'entrepreneuriat.

- Remarque : l'analyse est basée sur le base de données « Survey of Consumer Finance » *SCF*. Voir aussi Bhandari Birinci McGrattan et See (2020) pour une analyse récente des limitations des données d'enquêtes.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Motivation quantitative

- Le modèle de Aiyagari (1994) peine à générer une distribution de la richesse comme celle observée dans les données avec une modélisation plausible du risque sur le marché du travail.
  Voir Section 4 « Wealth Inequality » de l'article de Guvenen (2011) « Macroeconomics with Heterogeneity : A Practical Guide »

- Est ce que le risque sur le marché du capital est plus prometteur afin de générer une distribution des richesses comme celle observée dans les données ? On va voir que la réponse est oui.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Risque particulier et marchés incomplets

En calculant l'équilibre du modèle d'Aiyagari (1994) a trouvé que pour palier au manque d'outil financier pour assurer le risque associé au revenus du travail auquel les ménages font face, ils s'auto-assurent avec de l'épargne de précaution (voir LS Chapitre « Self-Insurance ») et la conséquence de cet engouement pour l'épargne est

- $r^{\text{marchés incomplets}} < r^{\text{marchés complets}}$
- $K^{\text{marchés incomplets}} > K^{\text{marchés complets}}$

Qu'en est-il lorsqu'on prend en compte le risque sur le marché du capital mis en exergue par Moskowitz et Vissing-Jorgensen (2002) *AER*?

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital
Plan

- Environnement économique
- Problème d'un entrepreneur
- Problème d'un ménage/entrepreneur et choix de portefeuille face aux risques sur le marché du capital et marchés financiers incomplets
- Équilibre général : définition d'un équilibre compétitif (séquentiel et récursif)
- Agrégation (exacte)
- Distribution de la richesse
- Comparaison avec marchés complets et modèle avec risque sur le marché du travail (Aiyagari (1994))

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Environnement économique

- $t = 0, 1, \ldots$
- Un ensemble continu de masse 1 de ménages/entrepreneurs indexés par $i \in [0, 1]$
- Économie à un secteur (bien final peut être investit et capital peut être consommé)
- Dotation d'une unité de temps chaque période et dotation initiale d'épargne w_0

Préférences :

$$U((c_t)_{t=0}^{\infty}) = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]$$

(offre de travail inélastique à 1)

Remarque : Avec utilité CRRA, l'élasticité intertemporelle de substitution est égale à l'inverse de l'aversion risque. Angeletos (2007) utilise une fonction d'utilité « Epstein-Zin » qui permet de dissocier le paramètre de l'élasticité intertemporelle de substitution de celui de l'aversion au risque.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Environnement économique

Marchés financiers :

- un actif à rendement certain r.
  L'offre nette est nulle, c'est à dire, si b_i désigne la demande d'actif par le ménage i, la condition d'équilibre sur ce marché est $\int_0^1 b_i \, di = 0$ et donc l'emprunt d'un ménage $b_i < 0$ est financé par l'épargne d'autres ménages $b_j > 0$.)

- chaque ménage peut investir dans sa propre entreprise (un ménage ne peut pas investir dans les entreprises des autres ménages sinon les marchés seraient complets)

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Environnement économique

Chaque ménage peut investir dans sa propre entreprise.

On désigne par k_i l'investissement du ménage indexé par i.

- Technologie de production :

$$y_i = z_i F(k_i, n_i) \ .$$

- z_i est stochastique identiquement et indépendamment distribué d'après la dristribution Φ.

Le risque est particulier : z_i iid et d'après la loi des grands nombres chaque période, la distribution de la réalisation du profile de productivité est donc Φ.

Pour un entrepreneur donné, la productivité est incertaine au moment de l'investissement.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Environnement économique

Chaque ménage fait face à une contrainte d'endettement

$$b \geq -h \ .$$

Remarque :

- Contrainte d'endettement naturelle : c'est la contrainte d'endettement qui garantit que le ménage/entrepreneur n'aura jamais à faire défaut, même si le ménage avait la plus mauvaise chance possible. C'est à dire, supposons que le ménage ait la réalisation de productivité minimale, $z_i = 0$, chaque période. Alors, le ménage peut rembourser au plus la valeur escomptée du revenu de son travail. Par exemple, si le salaire est constant égal à w, la contrainte d'endettement naturelle est :

$$h = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} w = \frac{w}{r}$$

- Contrainte d'endettement ad-hoc : c'est une contrainte arbitraire plus stricte que la contrainte d'endettement naturelle. Par exemple, au cours II.1, on a utilisé la contrainte ad-hoc $h = 0$.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Problème d'un entrepreneur

Un ménage/entrepreneur ayant investi k_i dans sa propre firme et ayant comme réalisation de productivité z_i résout le problème suivant :

$$\pi(k_i, z_i) \equiv \max_{n \geq 0} \quad z_i \; F(k_i, n) - w \; n + (1 - \delta) k_i$$

Proposition : Si la fonction de production F a des rendements d'échelle constants, la demande de travail et le rendement de la firme sont tous deux linéaires en capital. Il existe deux functions $n(z_i, w)$ et $r(z_i; w)$ telles que la demande de travail et les profits d'une firme qui optimise sont :

$$n_i = n(z_i, w) \; k_i$$
$$\pi(k_i, z_i) \equiv r(z_i; w) \; k_i \; .$$

Exercice : prouver cette proposition.

Solution du problème d'un entrepreneur

Éléments de réponse :

- Rendement d'échelle constants : $F(k_i, l_i) = k_i F\left(1, \frac{n_i}{k_i}\right)$
- CPO de l'entrepreneur :

$$\begin{aligned} w &= z_i \ F_n(k_i, n_i) \\ &= z_i \ k_i F_n\left(1, \frac{n_i}{k_i}\right)\frac{1}{k_i} = z_i F_n\left(1, \frac{n_i}{k_i}\right) \end{aligned}$$

  On conclut que le choix optimal $\frac{n_i}{k_i}$ est une fonction de z_i et w. On désigne cette fonction par $n(z_i, w)$ et donc $\frac{n_i}{k_i} = n(z_i, w)$

-

$$\begin{aligned} \pi(z_i, k_i; w) &= z_i \cdot F(1, n(z_i, w))k_i - wn(z_i, w)k_i \\ &= \left[\underbrace{z_i \cdot F(1, n(z_i, w)) - wn(z_i, w)}_{r(z_i;w)}\right] k_i. \end{aligned}$$

Problème de choix de portefeuille d'un ménage/entrepreneur

A l'état stationnaire du modèle, le salaire et le rendement de l'actif sont constants. Le problème séquentiel du ménage/entrepreneur est le suivant.

$$\max_{c_t, k_{t+1}, b_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \; u(c_t)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & c_t + k_{t+1} + b_{t+1} = \pi(z_t, k_t; w) + (1+r) b_t + w \\ & b_t \geq -h, \quad c_t \geq 0, \quad k_{t+1} \geq 0 \\ & z_t \sim \Phi \end{aligned}$$

Remarques :

- ménage/entrepreneur offre une unité de travail sur un marché du travail centralisé.
- Les profits $\pi(k_i, z_i) = r(z_i; w) \; k_i$ étant linéaires en investissement, ils peuvent être vus comme un investissement dans un actif risqué avec rendement $r(z; w)$.

A l'état stationnaire du modèle, le salaire et le rendement de l'actif sont constants. Le problème séquentiel du ménage/entrepreneur est le suivant.

$$\max_{c_t, k_{t+1}, b_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ u(c_t)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & c_t + k_{t+1} + b_{t+1} = r(z_t; w) \ k_t + (1+r)b_t + w \\ & b_t \geq -h, \quad c_t \geq 0, \quad k_{t+1} \geq 0 \\ & z_t \sim \Phi \end{aligned}$$

Exercice : Formuler le problème du ménage/entrepreneur sous forme récursive.

Exercice : Formuler le problème du ménage/entrepreneur sous forme récursive.

Élément de réponse :

$$v(\omega) = \max_{c,k',b' \in \mathbb{R}_+^2 \times [-h,\infty)} \quad \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \; + \; \beta \int v(\omega') \, \mathrm{d}F$$

$$\text{s.t.} \quad \omega = c + k' + b'$$

$$\omega' = r_z \; k' + (1+r)b' + w$$

Remarque : grâce à la solution du problème de l'entrepreneur avec fonction de production à rendements d'échelle constants, le problème du ménage/entrepreneur se résume à un choix de portefeuille entre un actif risqué et actif à rendement certain.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Solution du problème de choix de portefeuille d'un ménage/entrepreneur

- Il s'avère que le problème peut être résolu par le méthode conjecture et vérification « Guess and verify ».
- La fonction d'utilité du ménage est homothétique et les contraintes du problème du ménage sont des fonctions linéaires des variables de choix.
- On devine (en s'aidant du papier de Angeletos (2007)) que la fonction valeur est une fonction homogène et les fonctions de politiques des fonctions linéaires de la richesse

$$v(\omega) = u(a(w+h)) = \frac{\big(a(\omega+h)\big)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$g^{c}(\omega) = (1-\zeta)\ (\omega+h)$$

$$g^{k'}(\omega) = \zeta\ \phi\ (\omega+h)$$

$$g^{b'}(\omega) = \zeta\ (1-\phi)\ (\omega+h) - h$$

où a, ζ, ϕ sont des coefficients à déterminer.

On devine que la solution du problème du ménage/entrepreneur est de la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
v(\omega) &= u(a(\omega+h)) = \frac{\big(a(\omega+h)\big)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
g^{c}(\omega) &= (1-\zeta)\,(\omega+h) \\
g^{k'}(\omega) &= \zeta\,\phi\,(\omega+h) \\
g^{b'}(\omega) &= \zeta\,(1-\phi)\,(\omega+h) - h
\end{aligned}
$$

où ϕ, ζ, a sont des coefficients à déterminer.

1. Déterminer les paramètres ϕ, ζ, a. (Si vous n'obtenez pas de forme analytique, caractérisez le paramètre comme étant la solution d'une équation.)
2. Vérifier que la conjecture ci-dessous est bien la solution du problème du ménage/entrepreneur.

Éléments de réponse

1. Le paramètre du choix de portefeuille ϕ résout l'équation :

$$0 = \int (r_z \; - (1+r)) \left[(1+r) + \phi(r_z - (1+r))\right]^{-\gamma} \; \mathrm{d}F \; .$$

   Le paramètre de la function valeur est $a = (1-\zeta)^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}$.
   Le paramètre du taux d'épargne est $\zeta = \frac{1}{1+(\beta \; a^{1-\gamma}\Phi)^{-1/\gamma}}$.

2. On vérifie que les fonctions de politiques satisfont les FOC (c'est comme ça qu'on a déterminé ϕ et ζ).
   En substituant les fonctions de politiques et la fonction valeur on obtient l'équation pour a.

Définition d'un équilibre compétitif séquentiel

Étant donné une distribution initiale de $k_{0,i}, b_{0,1}$, un équilibre compétitif séquentiel est

- un plan de choix contingents $(c_{t,i}, k_{t+1,i}, b_{t,i})_{t=0}^{\infty}$
- une séquence de prix $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$ déterministiques

tels que :

- $(c_{t,i}, k_{t+1,i}, b_{t,i})_{t=0}^{\infty}$ résout le problème séquentiel du ménage/entrepreneur
- les marchés sont à l'équilibre :

$$0 = \int b_{t,i}$$
$$1 = \int n(z_i, w_t) \; k_{i,t} \; .$$

pour tout historique de chocs possibles. L'intégrale représente l'espérance par rapport à la distribution de la coupe transversale à la période t.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Définition d'un équilibre compétitif séquentiel

Remarques relatives à la définition de l'équilibre

- Loi de Walras : le marché des biens est aussi à l'équilibre.
- un plan de choix $(c_{t,i}, k_{t+1,i}, b_{t,i})$ contingents sur l'historique de la réalisation de chocs veut dire que chaque choix est une fonction de l'historique :

$$c_{t,i}(h_i^t) \quad \text{où} \quad h_i^t \equiv (z_{0,i}, \ldots, z_{t,i})$$

  Exercice en classe : $k_{t+1,i}$ est une fonction de h_i^t ou h_i^{t+1} ?

- une séquence de prix déterministes : vu que le risque est particulier « idiosyncratic »iid et que c'est une économie avec un grand nombre de ménages, la loi des grands nombres fait que chaque période, la distribution de la réalisation des chocs est la même et donc les prix, qui résultent du choix de tous les agents, ne sont pas stochastiques. Ce ne serait pas le cas si l'économie était sujette à des chocs agrégés comme dans le modèle RBC par exemple.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Définition d'un équilibre compétitif séquentiel agrégé

Une séquence de variables macroéconomiques $(C_t, K_t, Y_t)_{t=0}^{\infty}$ et $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$ est un *équilibre agrégé* si il existe, $(c_{t,i}, k_{t+1,i}, b_{t,i})_{t=0}^{\infty}$ et une distribution de $k_{0,i}, b_{0,1}$ tels que $(c_{t,i}, k_{t+1,i}, b_{t,i})_{t=0}^{\infty}$ et $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$ sont un équilibre compétitif séquentiel et :

$$C_t = \int c_{t,i}$$

$$K_t = \int k_{t,i}$$

$$Y_t = \int z_i F(k_{t,i}, n(z_i, w_t)\ k_{i,t})\ .$$

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Définition d'un équilibre compétitif récursif

Exercice : Définir un équilibre compétitif récursif stationnaire.

Les fonctions de politiques sont des fonctions linéaires et donc les variables agrégées ne sont pas une fonction de la distribution des richesses, seulement de la richesse agrégée :

$$C = \int c_i = (1 - \zeta) \int (\omega + h)$$

$$K = \int c_i = \zeta \, \phi \int (\omega + h) \; .$$

Proposition 1 et 2 de Angeletos (2007) caractérisent l'équilibre agrégé de cette économie et son état stationnaire.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Remarques sur le concept d'agrégation

Angeletos (2007) montre que l'équilibre agrégé de l'économie peut être résolu indépendamment de la distribution des richesses.

- C'est une conséquence des fonctions de politiques linéaires.
- Cela veut dire que la resolution du modèle est bien plus simple que si on devait tenir en compte de la distribution des richesses.
- Cela ne veut pas dire que ce n'était pas la peine de modéliser des marchés incomplets et des agents hétérogènes. L'équilibre reste différent de l'équilibre d'une économie avec marchés complets et/ou agent représentatif. Les conclusions de l'analyse de l'équilibre agrégé de l'économie avec hétérogénéité sont donc différentes de ce qu'on trouverait si on étudiait une économie agrégée avec marchés complets sans hétérogénéité. (voir Angeletos (2007) discussion en fin de la section 3.)

Un autre concept d'agrégation, plus fort, est de trouver des conditions sous lesquelles l'équilibre agrégé de l'économie avec agents hétéorgènes est aussi l'équilibre de l'économie avec un agent représentatif.

- Si c'est le cas cela veut dire que toute conclusion différente concernant des variables agrégées entre le modèle avec agent représentatif et celui avec agents hétérogènes est due à un désaccord sur la calibration du modèle.
- Voir section 1 « Aggregation » de Guvenen (2011) « Macroeconomics with Heterogeneity : A Practical Guide »

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Distribution de la richesse

- On vient de voir que la distribution des richesses n'est pas importante pour l'équilibre agrégé de l'économie.

- Qu'en est-il de la distribution des richesses ? Cette économie n'a *pas* de distribution des richesses stationnaire.

- La richesse d'un ménage/entrepreneur $(\omega_t + h)$ suit un marche aléatoire géometrique.

  Exercice : Montrer que $\ln(\omega_t + h)$ suit une marche aléatoire.

- Il n'existe donc pas de distribution stationnaire pour ce modèle. La distribution des richesses devient de plus en plus inégalitaires avec une concentration de la richesse pour une masse d'agents de plus en plus petite.

Exercice : élément de réponse La richesse d'un ménage/entrepreneur $(\omega_t + h_t)$ suit un marche aléatoire géometrique.

$$\begin{aligned}
\omega_t + h &= r(z_t)k_t + (1+r)b_t + w + h \\
&= r(z_t)k_t + (1+r)b_t + (1+r)h \qquad \left(\text{vu que } h \equiv \frac{w}{r}\right) \\
&= r(z_t)k_t + (1+r)(b_t + h) \\
&= r(z_t)\zeta\phi(\omega_{t-1} + h) + (1+r)(\zeta(1-\phi)(\omega_{t-1} + h) - h + h) \\
&= r(z_t)\zeta\phi(\omega_{t-1} + h) + (1+r)(\zeta(1-\phi)(\omega_{t-1} + h)) \\
&= (\omega_{t-1} + h)[r(z_t)\zeta\phi + (1+r)(\zeta(1-\phi)]
\end{aligned}$$

donc

$$\ln(\omega_t + h) = \ln(\omega_{t-1} + h) + \ln(r(z_t)\zeta\phi + (1+r)(\zeta(1-\phi))$$

ce qui est une marche aléatoire.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Distribution de la richesse

- L'économie de type Aiyagari (1994) avec marchés financiers incomplets et risques sur le marché du travail a du mal à générer (quand les chocs sur le marché du travail sont plausibles) une distribution des richesses avec une concentration de la richesse semblable à celle observée.
- Au contraire, l'économie de type Angeletos (2007) avec marchés financiers incomplets et risques sur le marché du capital génère une distribution de la richesse avec une concentration de celle-ci qui s'accroît sans fin.
- Il y a bien des moyens d'obtenir une distribution stationnaire dans le modèle d'Angeletos (2007). Par exemple, il suffit d'introduire une probabilité de fin de vie avec redistribution de la richesse en fin de vie pour obtenir une distribution stationnaire. Le risque sur le marché du capital est un mécanisme puissant pour générer une distribution des richesses inégalitaires.
- Lectures à ce sujet : Guvenen (2011), Benhabib Bisin Zhu (2015), Benhabib Bisin (2018), QuantEcon « Heavy-Tailed Distributions », QuantEcon « Kesten Processes and Firm Dynamics », QuantEcon « Kesten Processes and Firm Dynamics »

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Exercice

L'horizon est de deux périodes. L'économie est habitée par un ensemble continu de masse 1 de ménages/entrepreneurs ayant comme fonction d'utilité $u(c_1) + \beta u(c_2)$ et $u(\cdot) \equiv \ln(\cdot)$. En période 1, la périod initiale, chaque entrepreneur a une dotation initiale de y qui peut être utilisée pour consommation (c_1), investissement dans leur propre firme (k_i), ou épargné b avec comme rendement certain r. L'investissement dans sa propre firme porte ses fruits à la période 2. Lors de la deuxième période[1], chaque entrepreneur offre 1 unité de travail sur un marché du travail centralisé et reçoit un salaire w. Chaque entrepreneur fait face à un risque particulier (iid) quant à la productivité de leur firme dont la fonction de production est $z \cdot f(k, l)$ où $z_h = A + \epsilon$ ou $z_l = A - \epsilon$ avec probabilité $\frac{1}{2}$, et où f a des rendements d'échelle constants. Le capital se déprécie complètement suite à la production en période 2.

1. Il n'y a pas de production lors de la première période.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Exercice

1. Montrer que l'emploi de chaque firme qui optimise est une fonction linéaire du capital investit $l(z_i, k_i; w) = n(z_i, w) \cdot k_i$ et que les profits aussi $\pi(z_i, k_i; w) = r(z_i, w)k_i$. Calculer $n(z_i, w)$ et $r(z_i, w)$ pour une fonction Cobb-Douglas $f(k, l) = k^\alpha l^{1-\alpha}$.
2. Poser le problème d'un ménage/entrepreneur.
3. Définir un équilibre compétitif pour cette économie.
4. Pour le cas $\epsilon = 0$ calculer l'équilibre compétitif de cette économie. *(Indice : Dans cette économie avec agents identiques au moment du choix de portefeuille, il n'y a pas d'échange de l'actif certain.)*
5. Montrer que dans le cas $\epsilon = 0$, l'équilibre est efficient au sens de Pareto.
6. Supposer que $\epsilon = A > 0$. Calculer l'équilibre compétitif.
7. Comparer le rendement moyen sur l'investissement $\left(\frac{1}{2}r(z_h) + \frac{1}{2}r(z_l)\right)$ au rendement certain.

1.

$$
\begin{aligned}
n(z_i; w) &= \left(\frac{z_i}{w}(1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
r(z_i, w) &= z_i n(z_i; w)^{1-\alpha} - wn(z_i; w).
\end{aligned}
$$

2. On désigne par $r_z \equiv r(z, w)$

$$
\max_{k,b} \quad u(c_1) + \beta\left[(1/2)u(c_{2h}) + (1/2)u(c_{2l})\right]
$$

$$
\begin{aligned}
y &= c_1 + k + b \\
c_{2h} &= r_h k + rb + w \\
c_{2l} &= r_l k + rb + w
\end{aligned}
$$

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Exercice : éléments de réponse

3. Un équilibre compétitif est une allocation $(c_1, c_{2h}, c_{2l}, k, b, l)$ et un système de prix (r, w) tels que
   - $(c_1, c_{2h}, c_{2l}, k, b)$ résout le problème du ménage spécifié ci-dessus étant donné (r, w), $r_h = r(z_h, w)$ et $r_l = r(z_l, w)$.
   - les marchés sont à l'équilibre
     - marché de l'actif à rendement certain
       $$\int_0^1 b_i \, \mathrm{d}i = 0$$
     - marché du travail :
       $$\int_0^1 n(z_i, w) \cdot k_i \, \mathrm{d}i = 1$$
   - entrepreneurs optimisent étant donné w : $r_h = r(A + \epsilon, w)$ et $r_l = r(A - \epsilon, w)$ où
     $$r(z_i, w) \equiv z_i \cdot f(1, n(z_i, w)) - wn(z_i, w).$$

Vérifier que, d'après la loi de Walras, les conditions ci-dessus impliquent que le marché des biens est aussi à l'équilibre en période 2.

4.
- Avec $\epsilon = 0$, l'entrepreneuriat n'est pas risqué. Le rendement de l'actif certain et de chaque firme sont collinéaires. Par non-arbitrage, $r = r_h = r_l$. Le choix de portefeuille de chaque ménage est donc indéterminé.

- Cependant, les ménages sont identiques en période 1 donc leur choix de protefeuille sera le même donc $b_i = b_j$ pour tout $i, j \in [0, 1]$. L'équilibre sur le marché de l'actif certain nous donne qu'à l'équilibre on a donc $b_i = 0$.

$$k(r, w) = \frac{\beta}{1+\beta} y - \frac{1}{1+\beta} \frac{w}{r}$$

$$b(r, w) = 0.$$

4. Suite
   - Équilibre sur le marché du travail :

$$
\begin{aligned}
1 &= \int n(z_i, w) \cdot k_i \,\mathrm{d}i \\
&= \int \left(\frac{A}{w}(1-\alpha) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot k_i \,\mathrm{d}i \\
&= \left(\frac{1}{w} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (A(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \cdot K
\end{aligned}
$$

Donc le salaire déquilibre en fonction de l'investissement K est :

$$
w(K) = A(1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \ .
$$

4. Suite
   - Rendement du capital :

$$n(A; w) = \left(\frac{A}{w}(1-\alpha) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$r(A, K) = An(A; w(K))^{1-\alpha} - w(K)n(A; w(K)) = A\alpha \cdot K^{\alpha-1}.$$

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Exercice : éléments de réponse

5. Avec $\epsilon = 0$, les marchés sont complets donc le théorème de l'économie du bien-être garantit que l'équilibre est efficient au sens de Pareto.

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Exercice : éléments de réponse

6. ▶ CPO du problème du ménage sont

$$
\begin{aligned}
u'(y-k-b) = &\quad \beta\left[(1/2)r_h u'(r_h k + rb + w) + (1/2) r_l u'(r_l k + rb + w)\right] \\
u'(y-k-b) = &\quad \beta\left[(1/2) r u'(r_h k + rb + w) + (1/2) r u'(r_l k + rb + w)\right]
\end{aligned}
$$

avec $b = 0$ à l'équilibre et $u = \ln$, on obtient :

$$\frac{1}{y-k} = \beta\left(\frac{1}{2}\frac{r_h}{r_h k + w} + \frac{1}{2}\frac{r_l}{r_l k + w}\right)$$

L'entrepreneur investit :

$$k(r_h, r_l = 0, w) = \frac{\beta}{2+\beta} y - \frac{2}{2+\beta}\frac{w}{r_h}$$

▶ Pour des prix donnés, l'entrepreneur investit moins quand $\epsilon > 0$:

$$
\begin{aligned}
k(r_h, r_l = 0, w) &= \frac{1+\beta}{2+\beta}\left(\frac{\beta}{1+\beta} y - \frac{1}{1+\beta}\frac{w}{r_h} - \frac{1}{1+\beta}\frac{w}{r_h}\right) \\
&= \frac{1+\beta}{2+\beta}\left(k(r_h, r_l = r_h, w) - \frac{1}{1+\beta}\frac{w}{r_h}\right) \\
&< k(r_h, r_l = r_h, w)
\end{aligned}
$$

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Exercice : éléments de réponse

6. Suite
   - $r_l = 0$ et
   $$r_h = r(2A) \equiv 2A \cdot f(1, n(2A, w)) - wn(2A, w).$$
   - Équilibre sur le marché du travail
   $$\begin{aligned} 1 &= \int n(z_i, w) \cdot k_i \, \mathrm{d}i \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z_h}{w}(1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot K + \frac{1}{2}\left(\frac{z_l}{w}(1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot K \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[(z_h)^{\frac{1}{\alpha}} + (z_l)^{\frac{1}{\alpha}}\right] \cdot K. \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} w(K; z_h, z_l) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \left[(z_h)^{\frac{1}{\alpha}} + (z_l)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \\ &= 2^{1-\alpha} \cdot A \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \end{aligned}$$

6. Suite
   - Équilibre sur le marché du travail (suite)
     Comparé à une économie sans risque où $z = A$, le risque $z_h = 2A$, $z_l = 0$fait que la moitié des firmes arrivent à produire et ces firmes sont deux fois plus productives. L'effet sur le salaire d'équilibre est le résultat de deux forces : i) chaque firme doit absorber deux fois plus de force de travail, ce qui pousse le salaire vers le bas (c'est le facteur $1/2$ dans l'équation d'équilibre) ; ii) cependant, chaque entrepreneur est deux fois plus productif, ce qui pousse le salaire vers le haut (c'est le facteur $2^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'équation d'équilibre). Dans l'ensemble, le risque sur le marché du capital (en gardant la productivité moyenne constante et le niveau d'investissement constant) pousse le salaire à la hausse.

6. Suite
   - Équilibre sur le marché du capital

$$
\begin{aligned}
n(A; w) &= \left(\frac{A}{w}(1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
r(A, K) &= An(A; w(K))^{1-\alpha} - w(K)n(A; w(K)) \\
&= A\left(\frac{A}{w}(1-\alpha)\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - w\left(\frac{A}{w}(1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}
$$

Et donc,

$$
\begin{aligned}
r_l &\equiv r(0, K) = 0 \\
r_h &\equiv r(2A, K) = 2^{2-\alpha} A\alpha \cdot K^{\alpha-1}.
\end{aligned}
$$

II. 3. Risques particuliers sur le marché du capital

Exercice : éléments de réponse

6. Suite
   - Équilibre sur le marché du capital (suite)
     Le rendement espéré, en fonction du capital *agrégé* investit dans l'économie (important : le rendement ne dépend pas du capital investit par un seul entrepreneur k_i, cette dépendence du rendement sur le capital agrégé $K = \int k_i$ est seulement due au fait que le salaire d'équilibre dépend de l'investissement agrégé)
     $$\frac{1}{2}r_h + \frac{1}{2}r_l = 2^{1-\alpha}A\alpha \cdot K^{\alpha-1}$$
     L'effet du risque sur le rendement espéré est ambigu à ce stade de la résolution de l'équilibre. D'une part, pour un niveau donné d'investissement agrégé, le rendement moyen est plus large (d'un facteur de $2^{1-\alpha}$), c'est une prime pour le risque. D'autre part, pour un niveau de prix donné, l'investissement, et donc l'investissement agrégé, est plus bas en présence de risque.

6. Suite
   - Équilibre :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\beta}{2+\beta}y - \frac{2}{2+\beta}\frac{w(K)}{r_h(K)} \\ &= \frac{\beta}{2+\beta}y - \frac{2}{2+\beta}\frac{2^{1-\alpha}A(1-\alpha)\cdot K^{\alpha}}{2^{2-\alpha}A\alpha\cdot K^{\alpha-1}} \\ &= \frac{\beta}{2+\beta}y - \frac{1}{2+\beta}\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot K \end{aligned}$$

On utilise $K = \int k_i \; di = k$ pour trouver le niveau d'investissement à l'équilibre :

$$k = \frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha+\alpha}y.$$

6. Suite
   - Équilibre (suite) :
     Le niveau d'investissement est plus bas avec risque sur le marché du capital et marchés financiers incomplets ($\frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha+\alpha}y < \frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha}y$) que ce qu'il est dans une économie sans risque ou avec marchés complets.

     C'est l'opposé de ce qu'on a trouvé avec l'épargne de précaution face au risque sur le marché du travail et marchés financiers incomplets dans le modèle de Aiyagari (1994).

6. Suite
   - Équilibre (suite) :
     On peut maintenant calculer le rendement

$$
\begin{aligned}
r_l \equiv r(0, K) &= 0 \\
r_h \equiv r(2A, K) &= r(2A, k) \\
&= 2^{2-\alpha} A\alpha \cdot k^{\alpha-1} \\
&= 2^{2-\alpha} A\alpha \cdot \left(\frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha+\alpha} y \right)^{\alpha-1} \\
&= 2^{2-\alpha} \left(\frac{1+\beta\alpha}{1+\beta\alpha+\alpha} \right)^{\alpha-1} A\alpha \cdot \left(\frac{\beta\alpha}{1+\beta\alpha} y \right)^{\alpha-1} .
\end{aligned}
$$

7. La réponse dépend de si $\frac{1}{2} \cdot 2^{2-\alpha} \left(\frac{1+\beta\alpha}{1+\beta\alpha+\alpha} \right)^{\alpha-1}$ est plus ou moins grand que 1. Par inspection, on obtient

$$\left(1 + \frac{\alpha}{1+\beta\alpha}\right) > \quad \frac{1}{2}$$

donc le rendement moyen sur l'investissement est plus élevé qu'il ne le serait si les marchés financiers étaient complets. C'est l'opposé de ce qu'on trouve avec risque sur le marché du travail (Aiyagari (1994)).

- Outil pour modéliser le risque sur le marché du capital de manière soluble : rendements d'échelle constants donnent un rendement linéaire de l'investissement

- Agrégation du modèle
  - modèle avec solution analytique
  - risque sur le marché du capital est un mécanisme puissant pour générer une concentration des richesses

- Ce modèle génère un écart entre le rendement du capital risqué et le rendement de l'actif certain. Pour les implications de cet écart en économie ouverte : Angeletos G.M. et Panousi, V. (2011) « Financial integration, entrepreneurial risk and global dynamics », *JET*