ECN 7055 Macroéconomie B

Guillaume Sublet

Université de Montréal

Cours I.5: Marchés financiers et évaluation d'actifs

I. 5. Marchés financiers et évaluation d'actifs

1. Modélisation du risque
   Références sur la modélisation du risque

   - LS Sections 2.1 - 2.4
   - QuantEcon : Leçon « Finite Markov Chains » et leçon « AR1 Processes »

2. Exercice : Marchés financiers et évaluation d'actifs
   Référence : Chapitre 19 « General Equilibrium Theory » Sections A-F of Mas-Colell Whinston et Green *Microeconomic Theory*

3. Exercice : Croissance économique et évaluation d'un « arbre de Lucas »

I. 5. Marchés financiers et évaluation d'actifs

Modélisation du risque

Les deux outils principaux de modélisation du risque en macroéconomie sont :

1. Chaîne de Markov avec nombre d'état fini
   1.1 Distribution inconditionnelle, distribution stationnaire
   1.2 Conditions suffisantes d'unicité de la distribution stationnaire
   1.3 Variables aléatoires, lois des grand nombres, et ergodicité

2. Équation de différence stochastique de premier ordre $AR(1)$
   2.1 Approximation par Chaîne de Markov (Tauchen)

I. 5. Modélisation du risque

Chaîne de Markov

Définition : Chaîne de Markov (P, π_0) avec n états de la nature est :

- un espace d'état de dimension n avec vecteur unitaire e_i qui prend valeur 1 en $i-$ème position et 0 autrement
- une matrice stochastique de transition (somme par ligne égale à 1 et toutes les valeurs sont positives) P où $P_{ij} = Pr(x_{t+1} = e_j | x_t = e_i)$
- un distribution non-conditionnelle de l'état initial x_0, désignée par π_0 où la $i-$ème entrée est la probabilité que $x_0 = e_i$.

I. 5. Modélisation du risque

Chaîne de Markov

La matrice stochastique de transition nous donne les probabilités conditionnelles $P_{ij} = Pr(x_{t+1} = e_j | x_t = e_i)$.

- *Définition :* Distribution non-conditionnelle à t est :

$$\pi_t = \pi'_{t-1} P = \pi'_0 P^t$$

- *Définition :* Distribution stationnaire est la distribution non-conditionnelle π.

$$(I - P')\pi = 0$$

  On obtient cette caractérisation de la distribution stationnaire en imposant $\pi_t = \pi_{t-1}$ à $\pi_t = \pi'_{t-1} P$, ce qui explique la nature stationnaire de cette distribution.

- *Définition :* Chaîne de Markov stationnaire est (π, P) tel que π est une distribution stationnaire associée à P.

I. 5. Modélisation du risque

Chaîne de Markov : unicité de la distribution stationnaire

Distribution stationnaire est un vecteur propre (normalisé $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$) associée à la valeur propre unitaire de la matrice de transition P.

L'état stationnaire est un bon point de départ d'analyse de nos modèles macroéconomiques. La distribution stationnaire est un élément important de la caractérisation de (ou des) l'état stationnaire du système.

Exercice en classe : Trouver deux distributions stationnaires associées à la matrice suivante avec deux états absorbants :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On aimerait des conditions sous lesquelles la distribution stationnaire est unique.

Rappel : la distribution stationnaire est un vecteur propre (normalisé $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$) associé à la valeur propre unitaire de la matrice de transition P.

Conditions suffisantes d'unicité de la distribution stationnaire

Si $P_{ij}^{n} > 0$ pour tout i, j pour un $n \in \mathbb{N}$, alors la matrice stochastique de transition P a une distribution stationnaire unique π_∞ (c'est à dire $(I - P)'\pi_\infty = 0$) et le processus est asymptotiquement stationnaire : $\lim_{t\to\infty} \pi_t = \pi_\infty$ indépendemment de π_0.

I. 5. Modélisation du risque

Variable aléatoire

- *Définition :*
  Variable aléatoire définit par $\bar{y}$ un vecteur de dimension n

$$y_t = \bar{y}' x_t$$

- *Définition :*
  Une variable aléatoire est invariante si

$$y_t = y_0 \qquad \text{pour tout} \quad t \geq 0 \ ,$$

  pour toutes les réalisations de x_t qui ont une probabilité strictement positive sous (π, P).

- Comment trouver les variables aléatoires invariantes associées à (π, P) ?

I. 5. Modélisation du risque

Variable aléatoire invariante et Théorème de convergence de Martingale

- *Théorème de convergence de Martingale :* Pour une chaîne de Markov stationnaire (π, P), si

$$E[y_{t+1}|x_t] = y_t$$

alors la variable aléatoire $y_t = \bar{y}' x_t$ est invariante.

- En utilisant $E[\bar{y}' x_{t+1}|x_t] = P\bar{y}' x_t$ et $y_t = \bar{y}' x_t$, il nous suffit donc de résoudre

$$(P - I)\bar{y} = 0$$

pour trouver les variables aléatoires invariantes.

I. 5. Modélisation du risque

Ergodicité et loi des grands nombres

Loi des grands nombres : moyenne dans le temps est égale à la moyenne de la population

- Supposons que les variables aléatoires $(y_t)_{t=0}^{\infty}$ sont iid avec esperance $E[y]$, alors

$$\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} y_t \quad \longrightarrow \quad E[y] \quad \text{quand} \quad T \to \infty$$

  avec probabilité 1.

- Le concept d'ergodicité permet de généraliser ce résultat aux Chaînes de Markov.

I. 5. Modélisation du risque

Ergodicité et loi des grands nombres

Loi des grands nombres : moyenne dans le temps converge vers la moyenne de la population

- *Définition :* Une chaîne de Markov stationnaire (P, π) est ergodique si les seuls variables aléatoires invariantes sont constantes avec probabilité 1 sous π (c'est à dire : $\bar{y}_i = \bar{y}_j$ pour tout i, j avec $\pi_i, \pi_j > 0$)

- *Loi des grands nombres pour chaîne de Markov :* Considérons la variable alétaoire définit par $\bar{y}$ associée à une chaîne de Markov stationnaire et ergodique (P, π), alors

$$\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} y_t \quad \longrightarrow \quad E[y_0] \quad \text{quand} \quad T \to \infty$$

avec probabilité 1.

I. 5. Modélisation du risque

Équation de différence stochastique de premier ordre AR(1)

- LS Section 2.4 « Stochastic linear difference equations »
- QuantEcon leçon « AR1 Processes »
- Exercice Faire l'exercice 3 de QuantEcon leçon « Finite Markov Chains » sur la méthode de Tauchen pour une approximation numérique d'une équation de différence stochastique de premier ordre AR(1) par une chaîne de Markov.

  La méthode de Tauchen consiste à créer une grille de points également espacées et une matrice stochastique de transition. La probabilité de transition entre deux points de la grille est construite à partir du processus stochastique AR(1) et de la distribution des innovations de ce processus.

I. 5. Outil : finance, et marchés complets

On vient de voir la modélisation du risque en macroéconomie. Dans quelle mesure les ménages peuvent-ils s'assurér contre ces risques grâce aux marchés financiers ?

Lectures

- Notes de cours ECN 7050
- Chapitre 8 de LS : « Equilibrium with Complete Markets ».
- Chapitre 13 de LS : « Asset Pricing Theory ».
- Chapitre 19 « General Equilibrium Theory » Sections A-F of Mas-Colell Whinston and Green *Microeconomic Theory*

I. 5. Outil : finance, et marchés complets

Remarques en classe sur

1. Définition de marchés complets
2. Rang de la matrice des rendements et marchés financiers complets
3. Allocation d'équilibre avec marchés complets (Arrow et Debreu)
4. Finance et évaluation des actifs
   - Évaluation par modèle de consommation si les marchés sont incomplets
   - Évaluation par non-arbitrage si les marchés sont complets

Exercice : Marchés financiers et évaluation d'actifs

L'économie dure deux périodes et il y a de l'incertitude quant à l'état de la nature à la période 2. L'état de la nature peut prendre deux valeurs. Il y a deux actifs financiers. Le rendement de l'actif i est $r_i = (r_{i1}, r_{i2})$ pour $i = 1, 2$ où r_{ij} désigne le rendement de l'actif i dans l'état de la nature j. On désigne par R la matrice des rendements

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

1. Donner une condition sur la matrice R sous laquelle les marchés financiers sont complets.

Exercice : Marchés financiers et évaluation d'actifs (suite)

2. Le problème d'un investisseur avec croyance π_i est

$$\max_{a_1,a_2} \quad \pi_i u_i(c_1) + (1-\pi_i) u_i(c_2)$$
$$q_1 a_1 + q_2 a_2 = w$$
$$c_1 = a_1 r_{11} + a_2 r_{21}$$
$$c_2 = a_1 r_{12} + a_2 r_{22}$$

   Exprimer le prix des actifs q en fonction de l'utilité marginale de cet investisseur, ses croyances, et la matrice des rendements.

Exercice : Marchés financiers et évaluation d'actifs

3. Supposer que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et que les prix des actifs sont q_1 et q_2. On introduit un nouvel actif dans cette économie avec rendement certain $\bar{r} = (1, 1)$. Exprimer le prix de cet actif en fonction de q_1 et q_2. Expliquer votre raisonnement. Qu'en serait-il si la matrice des rendements était

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indice : cette sous-question vous demande d'évaluer un actif sur la base de la nécéssité d'absence d'opportunité d'arbitrage aux prix d'équilibre.

Exercice : Croissance économique et « arbre de Lucas »

Cet exercice est tiré du livre de Ljungqvist et Sargent *Recursive Macroeconomic Theory*. L'horizon est infini $t = 0, 1, \dots$ Une firme produit le seul bien de consommation qu'on appelle dividende d_t. Le dividende de la firme croît (ou décroît) à un taux constant $\gamma > 0$ et $\gamma \neq 1$ jusqu'à ce que cette croissance s'arrête pour toujours. C'est à dire que si $d_t \neq d_{t-1}$, alors $d_{t+1} = \gamma d_t$ avec probabilité $\pi \in (0, 1)$ et $d_{t+1} = d_t$ avec probabilité $(1 - \pi)$. Si $d_t = d_{t-1}$ alors $d_\tau = d_t$ pour tout $\tau > t$. On suppose que $\pi\beta\gamma^{1-\sigma} < 1$. Le dividende initial est $d_{-1} = 1$. L'économie est habitée par un agent représentatif avec preferences sur les sentiers stochastiques de consommation représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

où $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ avec $\sigma > 0$ et $0 < \beta < 1$. L'agent représentatif choisit la part de son investissement dans la firme. On désigne l'historique de dividendes $d^t \equiv (d_0, \dots d_t)$. Le prix de la firme est désigné par $p_t(d^t)$, la consommation est $c_t(d^t)$, et la part dans la firme est $s_t(d^t)$.
À l'origine, l'agent possède toute la firme $s_{-1} = 1$.

Exercice : Croissance économique et « arbre de Lucas »

Suite

1. Formuler le problème de l'agent représentatif. (Indice : la contrainte budgétaire séquentielle est $c_t(d^t) + s_t(d^t)p_t(d^t) = s_t(d^t)d_t + s_{t-1}(d^{t-1})p_t(d^t)$.)
2. Caractériser la solution du problème de l'agent par les conditions de premier ordre et dériver l'équation d'Euler pour cette économie.
3. Définir un équilibre compétitif pour cette économie.
4. Exprimer le prix de la firme à t en fonction du dividende à t, de l'espérance à t du dividende à $t+1$ et du prix de la firme à $t+1$. Expliquer en moins de 5 lignes l'intuition derrière cette formule d'évaluation de l'actif. (Indice : utiliser l'équation d'Euler et la contrainte de ressource pour la consommation à t et $t+1$.)

Exercice : Croissance économique et « arbre de Lucas »

Suite 2

5. Deviner que le prix de la firme croît au même rythme que les dividendes tant que la croissance continue et est constant une fois que l'économie s'arrête de croître. C'est à dire : le prix à t est $p_t(d^t) = p_c d_t$ si $d_t \neq d_{t-1}$ et $p_t(d^t) = p_s d_t$ si $d_t = d_{t-1}$. Déterminer p_c et p_s.
6. Supposons que l'économie s'arrête de croître à T, donc $d_T = d_{T-1} = \gamma^{T-1}$. Sous quelles conditions est ce que $p_{T-1} > p_T$? Expliquer en moins de 5 lignes l'intuition derrière cette condition.
7. Résumer en quelques lignes la leçon économique de cet exercice sur la croissance de l'économie et l'évaluation des actifs.
8. Facultatif : un ralentissement de la croissance est un des faits économiques saillants des deux dernières décennies. L'évolution du prix des actifs sur les marchés financiers corrobore-t-elle les résultats théoriques de cet exercice ?