

Ejercicios de Teorema de Bayes

Análisis Estadístico Multivariado

Emmanuel Alcalá

1.25 de [Luis Rincón - Introducción a la probabilidad](#)

En una fábrica hay dos máquinas. La máquina 1 realiza el 60 % de la producción total y la máquina 2 el 40 %. De su producción total, la máquina 1 produce 3 % de material defectuoso (es decir, *dado* M_1 , el 3% es defectuoso, o $p(D | M_1) = 0.03$), la máquina 2 el 5 % (lo mismo que en M_1). El asunto es que se ha encontrado material defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que este material defectuoso provenga de la máquina 2?

Definir los eventos

- D = El material escogido es defectuoso
- M_1 = La máquina 1 produjo el material escogido.
- M_2 = La máquina 2 produjo el material escogido

Lo que queremos encontrar es $p(M_2 | D)$. El teorema de Bayes nos dice que

$$p(M_2 | D) = \frac{p(D | M_2)p(M_2)}{p(D)}$$

En donde $p(D)$, la probabilidad marginal de D , se obtiene con la ley de probabilidad total: $p(D) = p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2)$. Como vimos, la probabilidad conjunta se puede obtener con la probabilidad marginal, $p(A \cap B) = p(A | B)p(B)$. Por lo tanto $p(D) = p(D | M_1)p(M_1) + p(D | M_2)p(M_2)$.

Finalmente

$$p(M_2 | D) = \frac{p(D | M_2)p(M_2)}{p(D | M_1)p(M_1) + p(D | M_2)p(M_2)}$$

1. Encontrar $p(M_2 | D)$
2. Encontrar $p(M_1 | D)$.

Supongamos que nos hacemos un test rápido contra COVID. Esta es la información con la que disponemos:

1. La especificidad del test es del 0.995 (resultado negativo cuando no se tiene la enfermedad).
2. La sensibilidad del test del 0.84 (resultado positivo cuando sí se tiene).
3. Supongamos que la prevalencia (la proporción de personas infectadas sin importar su resultado; es decir, la proporción marginal de enfermos) es del 0.3 (aprox 30 %).

Sea E el evento en el que estamos enfermos, y S en el que estamos sanos, y $t+$ el resultado del test positivo, y $t-$ el resultado del test negativo.

1. Encontrar $p(E \mid t_+)$.
2. Supongamos que nos hacemos un segundo test. ¿Cuál es la probabilidad de tener la enfermedad si ambos dan positivo? $p(E \mid t_{1+} \cap t_{2+})$