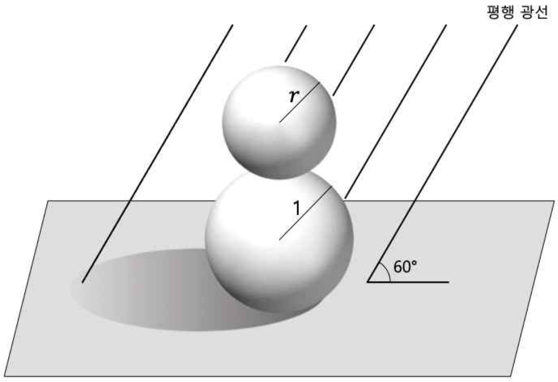
[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 1]

1. 일반정보

유형	□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	일반전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하
	핵심개념 및 용어	정사영, 구, 좌표공간에서 두 점 사이의 거리
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

반지름이 1인 구가 평평한 바닥에 놓여있고, 이 구의 가장 높은 점에 접하도록 반지름이 r인 구가 그 위에 올려져있는 눈사람이 있다. 지면과 60도의 각도를 이루고 평행 광선이 비추어 바닥에 눈사람의 그림자가 생기고 있다. (총 5점)



(1) 위쪽 구의 그림자가 아래쪽 구의 그림자에 완전히 포함되도록 하는 r값의 최대값을 구하시오. (2점)

(2) r이 1일 때, 눈사람의 그림자의 넓이를 구하시오. (3점)

3. 출제 의도

- 정사영의 의미와 평면에서 원과 삼각형 사이의 관계를 정확히 이해하고 있는지를 파악하고자 하며, 또한 이를 활용한 적절한 계산을 수행할 수 있는 계산 능력이 있는지 또한 문제를 통해 확인할 수 있다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정		예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
(1)	교육과정	[기하]-(3) 공간도형과 공간좌표-(나) 정사영 [기하]-(3) 공간도형과 공간좌표-(다) 공간좌표
	성취기준·성취수준	[12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
(2)	교육과정	[기하]-(3) 공간도형과 공간좌표-(나) 정사영 [기하]-(3) 공간도형과 공간좌표-(다) 공간좌표
	성취기준·성취수준	[12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. [12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	김원경 외	비상교육	2019.3.1	118-121
	기하	김원경 외	비상교육	2019.3.1	131-132
기타					

5. 문항 해설

(1)번은 정사영 개념과 접선 개념을 이용하여 3차원 문제 상황을 2차원으로 변형하고 원과 접선 사이의 관계를 통해 해결하는 간단한 문항이다.
(2)번은 두 구 중 위에 놓인 구의 중심이 정사영 될 때, 아래에 놓인 구의 유일한 한 점과 같은 점으로 정사영 됨을 이용하여 두 구를 정사영 한 결과를 찾고, 부채꼴의 넓이에 관한 공식과 삼각형의 넓이에 관한 공식, 정사영 개념을 이용하여 해결하는 문항이다.

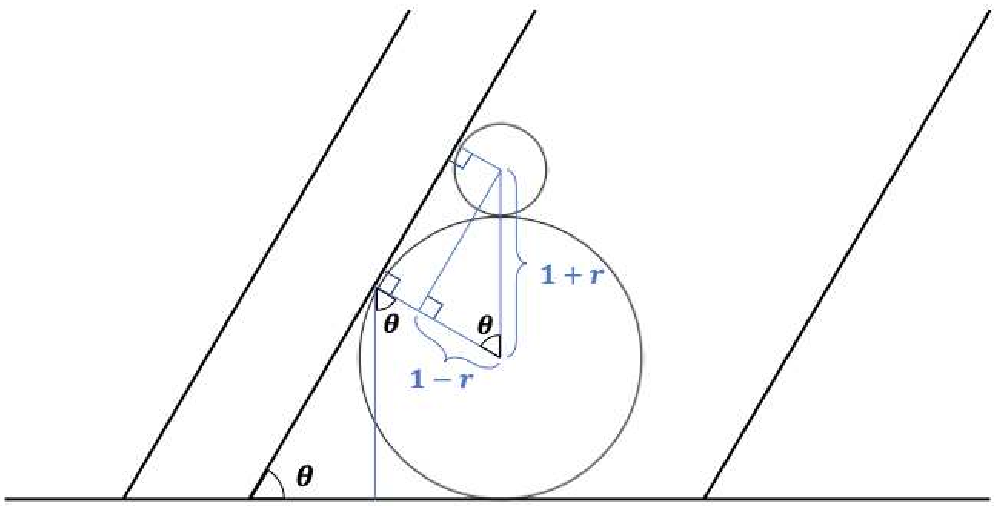
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 2점: 정확한 답과 근거 제시 - 1점: 2차원 그림을 그려서 문제를 파악하면 1점 부여 가능	2점
(2)	- 3점: 정확한 답과 근거 제시(아래 ①~③ 까지 모두 제시) - 부분 점수 요소 ① 1점: 가상의 평면을 평행 광선에 수직하게 놓으면 이 평면상의 그림자는 반지름 1인 두 원이 합쳐져서 생기는 모양이며, 이를 계산하여 원래의 바닥에 정사영한 그림자 넓이를 구하면 계산이 쉬워진다. (아이디어가 맞으면 1점 부여) ② 1점: 가상의 바닥에서 두 원의 그림자 전체의 넓이를 구하면 1점 부여 ③ 1점: 정사영의 원리를 이용하여 정답까지 구하면 1점 부여	3점

7. 예시 답안

(1) 이 문제는 두 구의 중심과 광선을 포함하면서 바닥에 수직인 면을 고려하여 2차원 문제로 바꾸어 생각하는 것이 핵심이다.

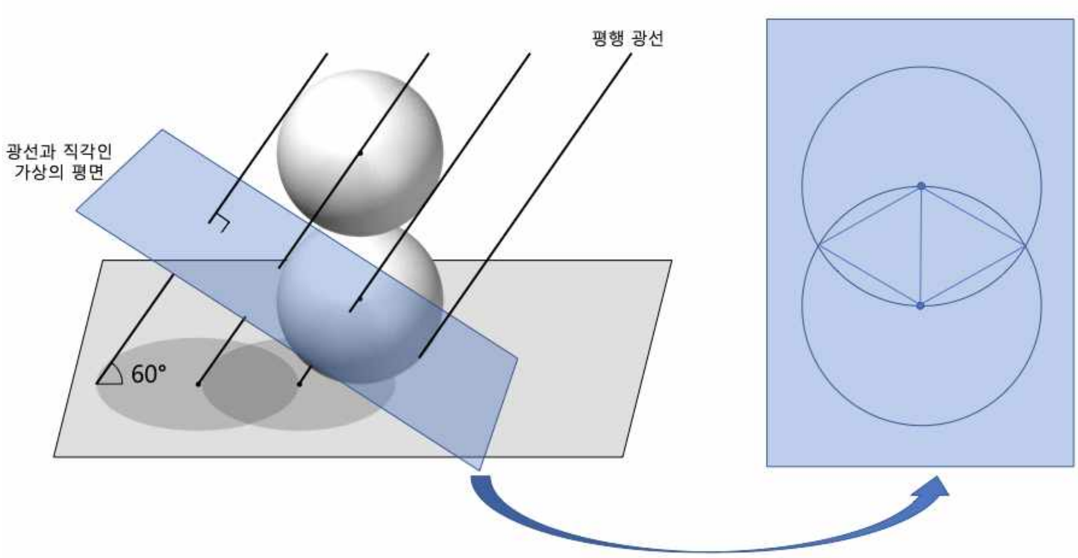
(2차원 그림을 그려서 문제를 파악하면 1점 부여 가능)



이때 r이 1보다 작으면서 두 구에 모두 접하는 광선이 존재할 때가 문제에서 요구하는 r값의 최대값임을 쉽게 알 수 있다.

그림에서 보듯이 $\cos 60^\circ = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{2}$이므로, 이때의 r 값은 $\frac{1}{3}$이다. (2점)

(2) r=1인 상황을 (1)과 같이 2차원 그림으로 표현하면 다음과 같다.



◉ 눈사람의 그림자는 두 타원이 합쳐서 생기는 모양이다. 문제를 쉽게 하기 위해 우선 원래 바닥 말고, 가상의 평면을 도입하자. <u>가상의 평면을 평행 광선에 수직하게 놓으면 이 평면상의 그림자는 반지름 1인 두 원이 합쳐져서 생기는 모양</u>이며, 이를 계산하여 원래의 바닥에 정사영한 그림자 넓이를 구하면 계산이 쉬워진다. <u>(아이디어가 맞으면 1점 부여)</u>

◉ 원의 반지름이 1이니 원 전체의 넓이는 π이고 내각이 60도인 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{6}$이다. 두 원이 그림자가 겹쳐지는 부분의 모양을 보면, 이러한 부채꼴에서 각 변의 길이가 1인 정삼각형을 뺀 것과 같은 도형 4개와 각 변의 길이가 1인 정삼각형 2개로 이루어져 있다는 것을 알 수 있다.

각 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로, 두 원이 그림자가 겹쳐지는 부분의 넓이는 $4\times(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

가상의 바닥에서 두 원의 그림자 전체의 넓이는

<u>$2\pi-(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. (1점)</u>

지금 그림자 넓이를 계산한 가상의 바닥은 실제 바닥과 30도의 각도를 이루며 만나므로, 광선을 따라 실제 바닥에 정사영한 넓이를 얻으려면 우리가 구한 넓이를 $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$로 나누어 주어야 한다.

<u>따라서 정답은 $(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}+1$ 이다. (1점)</u>

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

정사영 개념을 이용하여 그림자의 넓이를 구하는 문제이다. (1)번은 직선과 구 사이의 접점과 구의 중심 사이의 거리를 구함으로써 구의 반지름을 유도하는 문항이다. 구의 반지름을 구하기 위해서 2 차원 상황으로 변형하여 중학교에서 학습한 원과 접선 사이의 위치 관계, 삼각형의 닮음 등을 이용하여 해결한다. 이는 [기하] 교과서의 ‘좌표공간에서 두 점 사이의 거리’를 유도하는 과정에서 3 차원 상황을 2 차원으로 변형하여 거리를 구하는 과정을 경험하였으므로 교육과정의 내용으로 충분히 해결할 수 있을 것이라 사료된다. (2)번은 정사영 개념을 활용하여 실생활 문제를 해결하는 문항으로써 수학의 필요성을 경험할 수 있는 좋은 문항이다. 정사영 개념과 좌표공간에서 두 점 사이의 위치 관계, 부채꼴의 넓이 공식, 삼각형의 넓이 공식을 이용하여 해결할 수 있어 [기하] 교과서를 충실히 학습한 학생들은 쉽게 접근하여 해결할 수 있을 것이라 사료된다.

[고등학교 수학교사 B]

3차원 도형인 구의 정사영과 관련된 문제는 수능 · 모의평가에 다수 출제되었으며 대부분의 교과서에 수록되었기 때문에 원과 직선의 2차원 그림을 그려 해결하는 문제해결 과정은 학생들에게 익숙한 방법이다. (1)은 문제의 조건을 파악하여 외접하는 두 원과 두 원에 동시에 접하는 직선과 $60°$ 의 각을 이루며 아래쪽 원에 접하는 직선으로 2차원 그림으로 표현하면 ‘수학’ 교과의 원에 방정식의 활용에서 학습한 경험을 이용하여 위쪽 구의 반지름을 큰 어려움 없이 구할 수 있다. (2)는 정사영의 정의를 정확히 알고 이를 활용하기 위해서는 광선에 수직인 평면이 필요하다는 아이디어를 생각할 수 있다면 광선에 수직인 가상의 평면에 드리운 그림자인 겹치는 두 원과 바닥의 눈사람 그림자에 정사영의 개념을 적용하여 문제를 해결할 수 있다. 따라서 본 문항은 고등학교 ‘수학’과 ‘기하’ 교과를 충실히 학습한 학생이라면 문제를 해결할 수 있을 것이라 사료된다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**비상교육 기하 교과서 146page 13번 문제**
근거	• $60°$ 의 각을 이루면서 구를 정사영 시키는 상황이 일치함.
유사문제	**EBS 2022학년도 수능 기출의 미래 수학 영역 기하 62page 01번 문제**
근거	• $60°$ 의 각을 이루면서 원판을 정사영 시키는 상황으로써 정사영 한 결과가 (2)번 문항과 동일한 형태의 도형이 된다.

[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 2]

1. 일반정보

유형	□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	일반전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	점과 직선 사이의 거리, 이차방정식의 판별식, $\sum$의 성질, 함수의 몫의 미분법, 함수의 그래프, 두 평면 벡터의 내적
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

2차원 평면 상의 점 n개가 (x_1, y_1), ... ,(x_n, y_n)로 주어졌다. 실수 r을 기울기로 하는 직선 $L(r) = \{(x, y) : y = rx\}$을 고려하자. (총 5점)

(1) 점 (x_i, y_i)와 가장 가까운 직선 $L(r)$ 상의 점을 구하시오. (1점)

(추가설명 : 직선 $L(r)$상의 점 중 점(x_i, y_i)와 가장 가까운 점을 구하시오)

(2) 점 (x_i, y_i)와 직선 $L(r)$간의 거리 $d_i(r)$를 구하시오. (1점)

(3) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ 이고 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq 0$일 때, $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2$를 최소로 하는 기울기 r을 구하시오. (3점)

3. 출제 의도

- 평면상에서 점과 직선 간의 거리를 구하는 방법을 이해하는지 확인하고, 이차방정식의 판별식과 최대최소의 관계를 이해하는지 평가

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"	
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준	
(1)	교육과정	[수학]-(3) 도형의 방정식-(가) 평면좌표 [기하]-(2) 평면벡터-(나) 평면벡터의 성분과 내적
	성취기준·성취수준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
(2)	교육과정	[수학]-(3) 도형의 방정식-(가) 평면좌표 [수학]-(3) 도형의 방정식-(나) 직선의 방정식
	성취기준·성취수준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

(3)	교육과정	[수학]-(2) 방정식과 부등식-(나) 이차방정식과 이차함수 [수학Ⅰ]-(3) 수열-(나) 수열의 합 [미적분]-(2) 미분법-(나) 여러 가지 미분법 [미적분]-(2) 미분법-(다) 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상교육	2017.9.	49-51 99-101 120-122
	수학Ⅰ	권오남 외	교학사	2018.3.1	138-140
	미적분	김원경 외	비상교육	2019.3.1	75-78 99-103
	기하	김원경 외	비상교육	2019.3.1	81-84
기타					

5. 문항 해설

(1)번은 평면좌표에서 두 점 사이의 거리를 이용하여 해결하는 문항이다. (2)번은 평면좌표에서 점과 직선 사이의 거리를 이용하거나 (1)번에서 구한 점을 이용하여 두 점 사이의 거리를 이용하여 해결하는 문항이다. (3)번은 $\sum$의 성질을 이용하여 유리함수를 찾아낸 뒤, 함수의 몫의 미분법을 이용하여 함수의 그래프 개형을 그림으로써 $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2$가 최소가 되도록 하는 기울기 r를 구하거나 이차방정식의 판별식을 이용하여 등식을 만족하는 해가 존재하는 범위를 구함으로써 $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2$가 최소가 되도록 하는 기울기 r을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	– 1점: 정확한 답(직선 $L(r)$위의 점)을 제시	1점
(2)	– 1점: 정확한 답($d_i(r)$)을 제시	1점
(3)	– 1점: $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 {x_i}^2 - 2rx_i y_i + y_i^2}{1+r^2} = \frac{ar^2 - 2br + a}{1+r^2}$ 이 식을 유도 – [미분을 사용하지 않는 풀이] ① $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2 = \frac{ar^2-2br+a}{1+r^2} = t$로 두고, r이 실근을 갖는 조건으로부터 t의 범위는 $a-\lvert b\rvert \le t \le a+\lvert b\rvert$로 유도 가능 (이 범위를 유도하면 1점) ② 정확한 기울기 값 r을 구하면 1점 – [미분을 사용하는 풀이] ① $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2 = \frac{ar^2-2br+a}{1+r^2} = t$로 두었을 때, t를 r로 미분하여 도함수를 정확히 구하면 1점 ② 정확한 기울기 값 r을 구하면 1점	3점

7. 예시 답안

(1) 점 $P=(x_i, y_i)$와 가장 가까운 직선 $L(r)$ 위의 점을 $Q=(z, rz)$라 하자. 그러면, 선분 $\overline{PQ}$와 직선 $L(r)$은 수직이어야 한다. 따라서 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(x_i, y_i)-(z, rz)=(x_i-z,\ y_i-rz)$와 $(1, r)$의 내적이 0이고 이를 풀면 $z=\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}$이어서 $Q=\left(\frac{x_i+ry_i}{1+r^2},\ r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)$이다.

답: $\left(\frac{x_i+ry_i}{1+r^2},\ r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)$ [채점기준: 답이 맞으면 1점]

(2) $d_i(r)$은 $P=(x_i, y_i)$와 $Q=\left(\frac{x_i+ry_i}{1+r^2},\ r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)$사이의 거리이므로

$$d_i(r)^2 = \left(x_i - \frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)^2 + \left(y_i - r\frac{x_i+ry_i}{1+r^2}\right)^2 = \frac{r^2{x_i}^2 - 2rx_iy_i + y_i^2}{1+r^2} = \frac{\lvert rx_i - y_i\rvert^2}{1+r^2}$$ 로부터

답: $d_i(r) = \sqrt{\frac{r^2{x_i}^2 - 2rx_iy_i + y_i^2}{1+r^2}} = \frac{\lvert rx_i - y_i\rvert}{\sqrt{1+r^2}}$ [채점기준: 답이 맞으면 1점]

(3) $a=\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $b=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq 0$로 표시하자. 그러면,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2=\sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 x_i{}^2-2r x_i y_i+y_i^2}{1+r^2}=\frac{ar^2-2br+a}{1+r^2}$$

이다. (이 식을 유도하면 1점)

다음 단계는 미분의 사용 여부에 따라 두 가지 방법으로 풀 수 있다.

(풀이 1) [<u>미분을 사용하지 않는 풀이</u>]

$\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2=\frac{ar^2-2br+a}{1+r^2}=t$ 로 놓자. 그러면, r이 실근을 갖는 조건으로부터 t의 범위는

$$a-|b| \le t \le a+|b|$$

이다. (이 범위를 유도하면 1점)

(혹은 $b>0$일 때 $a-b \le t \le a+b$, $b<0$일 때 $a+b \le t \le a-b$로 서술할 수도 있다.)

이 범위는 다음 두 가지 방법으로 구할 수 있다:

- r에 대한 이차방정식 $(t-a)r^2+2br+(t-a)=0$의 해 r이 실근을 갖기 위한 조건은 판별식이 $D=b^2-(t-a)^2 \ge 0$ 을 만족하는 것이다. 이를 풀면 $(b+a-t)(b-a+t) \ge 0$이어서 $a-|b| \le t \le a+|b|$이다.
- 혹은 $t=\frac{ar^2-2br+a}{1+r^2}=a-b\frac{2r}{1+r^2}$에서 $-1 \le \frac{2r}{1+r^2} \le 1$이고 $\frac{2r}{1+r^2}$이 −1 이상 1 이하의 모든 실수를 취할 수 있으므로 $a-|b| \le t \le a+|b|$ 이다.

  따라서 t의 최솟값은 $a-|b|$이고, 이 값을 실제 갖도록 $\sum_{i=1}^{n} d_i(r)^2=a-|b|$을 만족하는 r은 (간략해지도록 정리하면) $|b|r^2-2br+|b|=0$ 의 해이다.
- $b>0$이면 $br^2-2br+b=b(r-1)^2=0$ 이어서 $r=1$이다.
- $b<0$이면 $-br^2-2br-b=-b(r+1)^2=0$ 이어서 $r=-1$이다.

  따라서, 거리 제곱의 합을 최소로 하는 기울기는 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$가 양수이면 1, 음수이면 -1이다. (<u>정확한 기울기값 r을 구하면 1점</u>)

(풀이 2) [<u>미분을 사용하는 풀이</u>]

우선 $t=a-b\frac{2r}{1+r^2}$ 에서 $r \to \pm\infty$일 때 $t \to a$임을 알 수 있다. t를 r에 대해 미분하면

$$t'=\frac{(2ar-2b)(1+r^2)-(ar^2-2br+a)2r}{(1+r^2)^2}=2b\frac{r^2-1}{(1+r^2)^2}=2b\frac{(r+1)(r-1)}{(1+r^2)^2}$$ 이므로

$r=\pm 1$에서 최대값 또는 최솟값을 갖게 된다. (<u>도함수를 정확히 구하면 1점</u>)

$r=\pm 1$전후의 도함수값의 변화를 살펴보면

- $b>0$: $r=1$에서 최솟값 $a-b$을 갖는다.
- $b<0$: $r=-1$에서 최솟값 $a+b$을 갖는다.

(<u>정확한 기울기값 r을 구하면 1점</u>)

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

주어진 상황을 두 점 사이의 거리, 벡터의 내적, 급수의 성질, 미분법을 이용하여 해결해야 하는 융합적인 문제로써 다양한 개념을 적절히 활용할 수 있는지를 평가할 수 있다는 점에서 매우 좋은 문항이다. (1)번은 평면좌표에서 벡터의 내적을 활용하여 두 점 사이의 거리가 최소가 되는 직선 위의 점을 구하는 문항이고, (2)번은 (1)번에서 구한 결과와 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 해결하는 문항이다. (3)번은 (2)번에서 구한 결과와 급수의 성질, 미분법을 활용하여 주어진 함수의 최솟값을 구하는 문항으로써 다양한 개념을 적용해야 한다는 점에서 학생들의 융합적 사고능력을 평가하기에 좋은 문항이라 사료된다. [수학]에서 두 점 사이의 거리, [수학Ⅰ]에서 급수의 성질, [미적분]에서 함수의 몫의 미분법과 함수의 그래프, [기하]에서 벡터의 내적 등 교육과정을 잘 학습한 학생들은 쉽게 접근하여 해결할 수 있었으리라 사료된다.

[고등학교 수학교사 B]

[수학] 교과에 점과 직선 사이의 거리의 정의와 공식 및 유도과정이 상세히 소개되어 있기 때문에 교과서를 충실히 학습한 학생이라면 (1)번과 (2)번은 쉽게 해결할 수 있을 것이다. (3)번은 주어진 조건을 이용하기 위해서 (2)의 결과를 제곱하여 합의 기호를 사용해야 하는 아이디어가 조건 속에 암시되어 있고 [수학Ⅰ] 교과에서 $\sum$의 성질을 학습하기 때문에 원하는 식을 큰 어려움 없이 구할 수 있을 것이며 구해진 식이 변수 r에 대한 유리함수이고 유리함수의 최솟값 관련 내용은 [미적분] 교과의 유리함수의 미분에서 학습하는 내용이기 때문에 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있을 것으로 사료된다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**비상교육 기하 교과서 95page 18번 문제**
근거	• 직선 위의 점들 중 주어진 한 점과의 거리가 최소가 되는 점의 좌표를 구하는 상황이 일치함.
유사문제	**비상교육 수학 교과서 123page 4번 문제**
근거	• 점과 직선 사이의 거리를 구하는 문제 상황이 일치함.
유사문제	**비상교육 미적분 교수학습자료(교사용 지도서) 152page 13번 문제**
근거	• 유리함수를 미분하여 그래프 개형을 그림으로써 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 유도할 수 있다는 점에서 문제 상황과 유사함.

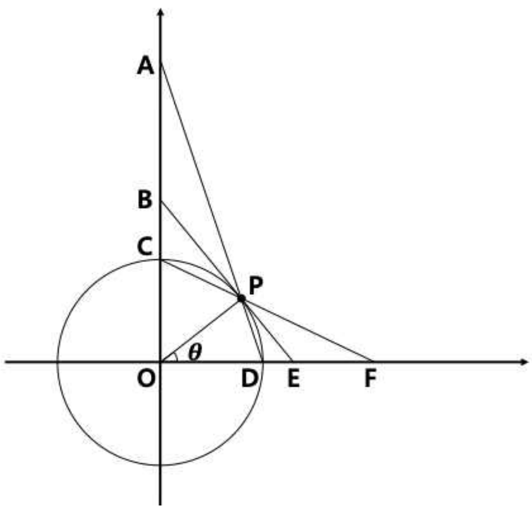
[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 3]

1. 일반정보

유형	□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	학교장추천전형, 고른기회전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	직선의 방정식, 원의 접선, 삼각함수의 뜻, 삼각함수의 성질, 삼각함수의 극한
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

다음 그림과 같이 원점 O을 중심으로 하고 반지름이 1인 원이 있다.



x축과 각도 θ를 이루는 직선이 원과 1사분면에서 만나는 점을 P라고 하자. 선분 BE는 이 원과 P에서의 접선이고, C=(0,1), D=(1,0)일 때, 선분 CP를 연장하여 x축과 만나는 점이 F, 선분 DP를 연장하여 y축과 만나는 점이 A이다. 삼각형 ABP의 넓이를 S, 삼각형 EFP의 넓이를 T라 하자.

(총 5점)

(1) A의 y좌표와 F의 x좌표를 각각 구하여라. (2점)

(2) 극한 $\lim_{\theta \to +0} \frac{S \times T}{\theta}$을 구하여라. (3점)

3. 출제 의도

- 평면도형에서 삼각함수를 적절히 활용하여 각 점의 좌표를 구하고, 삼각함수 공식과 극한의 성질을 통해 극한값을 정확히 계산할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><td colspan="2">적용 교육과정</td><td>예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”</td></tr>
<tr><td colspan="2">문항 및 제시문</td><td>학습내용 성취 기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td>교육과정</td><td>수학-(3)도형의 방정식-(나)직선의 방정식
수학 Ⅰ-(2)삼각함수-(가)삼각함수</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.
[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트 함수의 그래프를 그릴 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>교육과정</td><td>수학-(3)도형의 방정식-(다)원의 방정식
수학 Ⅰ-(2)삼각함수-(가)삼각함수
미적분-(2)미분법-(가)여러 가지 함수의 미분</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[10수학02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.
[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트 함수의 그래프를 그릴 수 있다.
[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	㈜미래엔	2018.3.1.	126-127
	수학	황선욱 외	㈜미래엔	2018.3.1.	146-147
	수학Ⅰ	김원경 외	㈜비상교육	2018.3.1.	74
	미적분	김원경 외	㈜비상교육	2018.3.1.	63-66
기타					

5. 문항 해설

(1)은 삼각함수의 정의를 이용하여 점 P의 좌표를 구하고, 두 점의 좌표를 이용해 직선의 방정식을 구한 후 x축, y축과의 교점을 구하는 문항이다.

(2)는 원의 중심과 접점을 이은 선분이 접선과 수직이고, 직각삼각형에서 한 변의 길이와 한 예각의 크기가 주어졌을 때 삼각비를 이용하여 다른 두 변의 길이를 구한 후 주어진 삼각형의 넓이를 구한 후 삼각함수의 성질인 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 식을 변형한 후 삼각함수의 극한 이용하여 주어진 식의 극한값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 1점: F의 x좌표를 제시 - 1점: A의 y좌표를 제시	2점
(2)	- 1점: 식을 정리하여, $T=\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta=\frac{1}{2}\tan\theta sin\theta$를 구할 수 있다. - 1점: 식을 정리하여, $S=\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta=\frac{1}{2}\cot\theta\cos\theta$를 구할 수 있다. - 1점: $\lim_{\theta\to+0}\frac{S\times T}{\theta}=\frac{1}{4}$ 답을 구할 수 있다.	3점

7. 예시 답안

(1) 먼저 직선 CF의 방정식을 구해보자. C=(0,1), P$(\cos\theta,\sin\theta)$이므로 기울기는 $\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}$이고 y절편은 1이다. 따라서 식은 $y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$이 된다.

이로부터 F의 x좌표는 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$이다. (1점)

유사한 방식으로, 직선 AD의 방정식은 D=(1,0), P$(\cos\theta,\sin\theta)$을 이용하여 구하면 $y=-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$을 얻는다.

이로부터 A의 y좌표는 $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$이다. (1점)

(2) 삼각형 EOP는 직삼삼각형이므로 E의 x좌표는 $\frac{1}{\cos\theta}$이다.

위에서 구한 F의 x좌표를 이용하면 EF의 길이가 $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$임을 알 수 있다. 이는 삼각형 EFP의 밑변이며, 이 삼각형의 높이는 $\sin\theta$이므로 다음을 얻는다. $T=\frac{1}{2}(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta})\sin\theta$

정리하면,

$$T=\frac{1}{2}\frac{\cos^2\theta-1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}\sin\theta=\frac{1}{2}\frac{\sin\theta-\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}\sin\theta=\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta$$ 이다.

(여기서 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용했다.

학생이 답을 $T=\frac{1}{2}\tan\theta\sin\theta$의 형태로 할 수도 있다.) (1점)

또한 삼각형 BOE는 직각삼각형이므로 <u>B의 y좌표는 $\frac{1}{\sin\theta}$ 이다.</u>

이로부터 <u>$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)\cos\theta$ 이다.</u>

T를 정리한 것과 유사하게 정리하면

$S=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta-1+\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\cos\theta=\frac{1}{2}\frac{\cos\theta-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}\cos\theta=\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta=\frac{1}{2}\cot\theta\cos\theta$ (1점)

따라서 $S\times T=\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta$ 이므로 $\frac{S\times T}{\theta}=\frac{1}{4}\frac{\sin\theta}{\theta}\cos\theta$ 이다.

$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 이고 $\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=1$ 인 것을 이용하면

<u>$\lim_{\theta\to+0}\frac{S\times T}{\theta}=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=\frac{1}{4}$ 이다.</u>

따라서 <u>답은 1/4이다.</u> (1점)

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

삼각함수의 극한, 직선의 방정식 등의 개념을 활용하여 해결하는 문항으로 학생들이 삼각함수의 극한을 학습한 후 많이 접하게 되는 전형적인 스타일의 문항이다. (1)은 주어진 점의 좌표와 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구한 뒤 그 직선의 x절편 또는 y절편을 구하는 문항이고, (2)는 삼각비, 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구하고, 삼각함수의 극한을 이용하여 해결하는 문항으로써 다양한 기하적 개념을 적용해야 한다는 점에서 학생들의 수학적 사고능력을 평가하기에 좋은 문항이라 사료된다. [수학]에서 원의 접선의 방정식, [수학 I]에서 삼각함수의 성질, [미적분]에서 삼각함수의 극한 등의 교육과정을 성실히 학습한 학생들은 쉽게 접근하여 해결할 수 있었으리라 사료된다.

[고등학교 수학교사 B]

직선의 방정식, 원과 직선, 삼각함수의 정의, 삼각함수의 극한 등 기하와 해석영역이 융합된 문항으로 일반계 고등학교에서 수업시간에 다루는 교과서에 포함된 내용 중에서도 가장 기본적인 정의와 성질을 이용해 문제를 해결할 수 있도록 만들어진 문항이다.

(1)에서 각 θ와 반지름을 이용하여 점 P의 좌표를 구하는 과정과 두 점의 좌표가 주어졌을 때 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하고 x, y축과 교점의 좌표를 구하는 과정을 교과서에서도 많이 다루는 내용이고 (2)는 (1)의 결과와 중학교에서 학습한 삼각비의 활용 또는 [수학] 원의 방정식에서 학습한 원의 접선의 방정식을 이용하여 두 점 E, B의 좌표를 구한 후 두 삼각형의 넓이를 구할 수 있고, [수학 I]에 학습한 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 [미적분]에서 학습한 삼각함수의 극한을 이용하여 정답을 구할 수 있다. 따라서 문제해결과정에 사용되는 기호, 문자의 종류 및 개수와 문제유형이 일반계 고등학생들에게 익숙한 형태이기 때문에 고등학교 교육과정에 있는 기본적인 성취기준을 학습한 학생이라면 어렵지 않게 해결할 수 있는 문항이다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**예) 2019학년도 3월 전국연합 수학(가) 19번 문제**
근거	• 삼각형의 넓이를 구하고 삼각함수의 극한을 질문하는 문제 유형 • 직각삼각형에서 한 변의 길이와 예각을 이용하여 다른 두 변의 길이를 구하는 과정 • $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 을 이용하여 식을 변형하는 문제해결과정 • $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$, $\lim\limits_{\theta\to0+}\cos\theta=1$ 을 이용하여 극한값을 구함

[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 4]

1. 일반정보

유형	□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	학교장추천전형, 고른기회전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	이차방정식의 판별식, 수학적 확률, 이항정리, 기댓값
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

1부터 6까지의 정수가 각각 1/6의 확률로 나오는 주사위를 두 번 던져서 나온 두 수 중 다른 수보다 크거나 같은 수를 a라 하고 작거나 같은 수를 b라 하자. (총 5점)

(1) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$가 실근을 가지지 않을 확률은? (2점)

(2) ${}_aC_b$의 기댓값을 구하여라. (3점)

3. 출제 의도

- 확률의 개념을 잘 이해하고 있고, **수학적** 확률을 제대로 이해하고 있는지 확인하며, 이항정리와 2차방정식 판별식에 대한 이해도를 평가.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정		예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
(1)	교육과정	수학-(2)방정식과 부등식-(가)복소수와 이차방정식 수학-(6)경우의 수-(나)순열과 조합 확률과 통계-(2)확률-(가)확률의 뜻과 활용
	성취기준·성취수준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.
(2)	교육과정	확률과 통계-(1)경우의 수-(나)이항정리 확률과 통계-(3)통계-(가)확률분포
	성취기준·성취수준	[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	㈜미래엔	2018.3.1.	58-60
	확률과 통계	배종숙 외	㈜금성출판사	2019.3.1.	41
	확률과 통계	배종숙 외	㈜금성출판사	2019.3.1.	64
기타	EBS 2021학년도 수능특강	EBS교육방송 편집부	한국교육방송공사	2020.2.1.	72

5. 문항 해설

(1)은 이차방정식의 판별식을 이용하여 구한 a, b사이의 관계식과 주어진 조건을 만족하는 a, b의 순서쌍을 구하고, 수학적 확률을 사용할 수 있는 표본공간을 결정하여 확률을 구하는 문항이다.

(2)는 (1)의 결과를 이용하여 ${}_aC_b$를 확률변수로 하는 확률분포표를 만들고 이산확률변수의 기댓값을 구하는 문항으로 기댓값을 계산하기 위해서는 a의 값을 기준으로 분류하여 정리한 후 이항정리를 이용해야 한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 1점: 판별식을 사용하여 조건을 찾는다. - 1점: a,b의 경우의 수를 모두 찾고, a,b의 경우의 수와 x,y의 경우의 수 사이의 관계를 이해하고 확률을 구한다.	2점
(2)	- 1점: 기댓값의 식을 정확히 기술한다. - 1점: $a=b$의 경우와 $a \neq b$의 경우의 확률이 다름을 제대로 이해한다. - 1점: 이항정리를 이용해 기댓값 계산을 간략화해 답을 정확히 구한다.	3점

7. 예시 답안

(주사위를 던져서 나온 첫 번째 수를 x, 두 번째 수를 y라고 하자. a는 둘 중 크거나 같은 숫자이고, b는 작거나 같은 숫자이다. x와 y는 독립적으로 1에서 6까지의 숫자 중 하나의 값을 각각 $\frac{1}{6}$의 확률로 가진다.)

(1) 이차방정식의 판별식을 이용하면 $a^2-4b<0$이어야 함을 알 수 있다. a가 b보다 크거나 같으므로 a가 4이상일 경우 $a^2-4b<0$는 불가능하다. 또한 $b \leq a-1$이면, $a^2-4b \geq a^2-4(a-1)=(a-2)^2 \geq 0$이므로 $a^2-4b<0$는 불가능하다. 따라서 $a \leq 3$이고 $a=b$인 경우만 확인해보면 되고, $(a,b)=(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$의 세 가지 경우에만 $a^2-4b<0$가 됨을 확인할 수 있다. 따라서 (x,y)가 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ 중에 하나여야 하므로 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(2) 우리가 원하는 기댓값은 $1 \leq s \leq t \leq 6$를 만족하는 모든 정수 s와 t에 대해서 ${}_tC_s \times (a=t$ 이고 $b=s$일 확률)을 더하여 얻을 수 있다. 여기서 $a=t$ 이고 $b=s$일 확률은 s와 t가 서로 다를 때 (x,y)가 (s,t)이거나 (t,s)일 확률이므로 $\frac{2}{36}$이고, s와 t가 서로 같을 때는 (x,y)가 (s,s)일 확률이므로 $\frac{1}{36}$이다.

따라서 우리가 구하는 기댓값은 1에서 6까지의 각각의 정수 t에 대해 $\frac{2}{36}\ {}_tC_1+\cdots+\ \frac{2}{36}\ {}_tC_{t-1}+\ \frac{1}{36}\ {}_tC_t$를 계산해서 더해주면 구할 수 있다. 이항정리를 사용하면 이 식을 다음과 같이 계산 할 수 있다.

$$\frac{2}{36}\ {}_tC_1+\cdots+\ \frac{2}{36}\ {}_tC_{t-1}+\ \frac{1}{36}\ {}_tC_t=\frac{1}{36}(2(2^t-{}_tC_0-{}_tC_t)+{}_tC_t)=\ \frac{1}{36}(2^{t+1}-3)$$

이를 이용하여 기댓값을 구하면

$$\sum_{t=1}^{6}\frac{1}{36}(2^{t+1}-3)=\frac{1}{9}(1+2+\cdots+2^5)-\frac{6\cdot 3}{36}=\frac{2^6-1}{9}-\frac{1}{2}=7-\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$$ 이 된다.

따라서 답은 $\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}=6.5$이다.

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

이차방정식의 판별식, 확률, 기댓값, 이항정리 등의 개념들을 활용하여 해결하는 융합 문항으로 학생들이 많이 접해본 스타일의 문항이라 판단된다. (1)은 이차방정식의 판별식을 이용하여 주어진 상황의 수학적 확률을 구하는 문항이고, (2)는 새로운 확률분포 함수를 구성하고 이항정리를 활용하여 기댓값을 구해야 하는 창의적이고 다소 난이도가 높은 문항으로, 학생들의 수학적 사고력을 평가하기에 매우 좋은 문항이라 판단된다. [수학]에서 이차방정식의 판별식, [확률과 통계]에서 수학적 확률, 이항정리, 이산확률분포의 기댓값 등의 교육과정을 성실히 학습한 학생들은 크게 어렵지 않게 해결할 수 있을 것이라 사료된다.

[고등학교 수학교사 B]

[수학]에서 학습한 이차방정식의 판별식과 [확률과 통계]에서 학습한 수학적 확률의 정의를 이용하여 확률을 구하고 이항정리를 이용하여 이산확률분포의 기댓값을 구하는 문항으로 고등학교 학생들에게 매우 익숙한 질문이다. 하지만 (1)은 수학적 확률의 정의를 정확히 이해하고 있어야 해결할 수 있고, (2)는 확률변수 ${}_aC_b$가 문자 a, b 두 개를 포함하고 있기 때문에 풀이과정에서 표기를 어떻게 해야할지 고민하여 창의성을 발휘해야 하는 문항이다. (1)의 문제해결과정에서 주사위를 두 번 던졌을 때 표본공간을 $\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(2,1),(2,2),\cdots,(6,6)\}$으로 하고, $s>t$에 대하여 두 근원사건 (s,t)와 (t,s)에 대하여 $a=s$, $b=t$로 a, b의 값은 같지만 각 근원사건의 일어날 가능성이 같을 때 수학적 확률이 정의되기 때문에 (s,t)와 (t,s)가 서로 다른 경우로 하여 수학적 확률을 계산해야 한다. (2)는 문자가 두 개인 다항식을 한 문자에 대하여 오름차순 또는 내림차순으로 정리하여 문제를 해결한 경험을 바탕으로 a값을 기준으로 분류하여 $\sum$ 기호를 사용하여 식을 간단히 정리하여 이항정리를 사용할 수 있다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	2019학년도 6월 평가원모의평가 수학(나) 19번 문제
근거	• 주사위를 여러번 던져 나온 눈의 수 사이의 여러 가지 대소관계를 모두 만족시킬 확률을 구하는 문제이다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	2019학년도 10월 전국연합 수학(나) 18번 문제
근거	• 문제해결과정에서 주어진 조건을 이해하여 확률변수 X의 값을 구하고, 각각의 X에 대한 확률 $P(X)$을 구하는 과정이 필요 • 변수 X와 확률 $P(X)$를 구한 후 기댓값을 구한다.