高等线性代数 2019-2020 学年期末考试

吴玉椿

1．群G，群元a,b，定义共轭为：若a与b共轭，则$\exists g\in G$，使得$b=g^{-1}ag$. 证明：共轭是一个等价关系.

2．向量空间V中四个元素

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

a) 证明$I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$是线性无关的.

b) 证明对任意自伴随、迹为 1 的矩阵A, 可以写成$A=\frac{1}{2}\left(I+a\sigma_x+b\sigma_y+c\sigma_z\right)$的形式，其中，$a,b,c$为实数，$a^2+b^2+c^2\le 1$. 特别地，当$A$的秩为 1 时，$a^2+b^2+c^2=1$.

3．V为向量空间，$\tau\in\mathcal{L}(V)$，$\mathcal{E}=\{e_1,e_2,e_3\}$为一组标准基，且

$$\begin{cases}\tau(e_1)=e_1+e_2\\\tau(e_2)=e_2+e_3\\\tau(e_3)=e_1+e_3\end{cases}$$

a) 求标准基$\mathcal{E}$下τ的矩阵表示$[\tau]_{\mathcal{E}}$.

b) 若另一组基在标准基下表示为$\mathcal{B}=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$，求$\tau$在$\mathcal{B}$下的表示$[\tau]_{\mathcal{B}}$.

c) 写出τ的极小多项式，并写出其有理标准型. 再写出域为复时的约当标准型.

4．映射$f{:}\,M_1\to M_2$

a) 证明f是连续的当且仅当闭集的原像集也是闭的.

b) 若f等距，(x_n)是M_1中的柯西列，证明$f\big((x_n)\big)$也是柯西列.

5．V是有限维内积向量空间，$\tau\in\mathcal{L}(V)$

a) 若A是非空子集，证明$A^{\perp}$是完备的.

b) 设$\tau=\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2+\cdots+\lambda_k\rho_k$，其中$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_k=I$是单位分解. 证明:

$$f(\tau)=f(\lambda_1)\rho_1+f(\lambda_2)\rho_2+\cdots+f(\lambda_k)\rho_k$$

c) V的线性算子都是有界的.

d) 求酉算子的范数.

e) 证明τ是半正定的当且仅当$\exists\sigma\in\mathcal{L}(V)$，使得$\tau=\sigma^*\sigma$. 并说明$\sigma$是不唯一的.

6．$\mathcal{H}$是希尔伯特空间，B是其有界算子的集合，证明

a) 若$\tau\in B$，则$Ker(\tau)$是完备的.

b) 若$\tau,\sigma\in B$，则它们的复合$\sigma\circ\tau$也是有界的.

注：由某考生考后回忆得来，可能有些细节不准确。