期末考试

姓名 : 陈 稼 霖
学号 : SA21038052
成绩 : __________

第 1 题 得分: _________. 群 G, 群元 a, b, 定义共轭为: 若 a 与 b 共轭, 则 $\exists g \in G$, s.t. $b = g^{-1}ag$. 证明: 共轭是一个等价关系.

证: 共轭满足

(1) **反身性**: $\forall a \in G$, 取 $g = e$, $e^{-1}ae = eae = a \Longrightarrow a$ 与 a 共轭.

(2) **对称性**: a 与 b 共轭 $\Longleftrightarrow \exists g \in G$, s.t. $b = g^{-1}ag \Longleftrightarrow \exists g^{-1} \in G$, s.t. $a = gbg^{-1} = (g^{-1})^{-1}bg^{-1} \Longleftrightarrow b$ 与 a 共轭.

(3) **传递性**: 若 a 与 b 共轭, b 与 c 共轭, 则 $\exists g_1, g_2 \in G$, s.t. $b = g_1^{-1}ag_1$, $c = g_2^{-1}bg_2$.
取 $g = g_1g_2$, 则 $c = g_2^{-1}bg_2 = g_2^{-1}(g_1^{-1}ag_1)g_2 = (g_2^{-1}g_1^{-1})a(g_1g_2) = (g_1g_2)^{-1}a(g_1g_2) = g^{-1}ag \Longrightarrow a$ 与 c 共轭.

故共轭是一个等价关系. □

第 2 题 得分: _________. 向量空间中四个元素

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明 $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是线性无关的.

(2) 证明对任意自伴随、迹为 1 的矩阵 A, 可以写成 $A = \frac{1}{2}(I + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)$ 的形式, 其中 a, b, c 为实数, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. 特别地, 当 A 的秩为 1 时, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

证: (1) 假设

$$a_1I + a_2\sigma_x + a_3\sigma_y + a_4\sigma_z = 0,$$

则

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_4 & a_2 - ia_3 \\ a_2 + ia_3 & a_1 - a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

故 $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是线性无关的.

(2) $\because A$ 自伴随, $\therefore A^\dagger = A$, 即 A 关于对角线对称位置上的矩阵元复共轭, 对角线上的矩阵元为实数.
$\because A$ 的迹为 1, $\therefore A$ 的对角线上的矩阵元的求和为 1.
综上, A 可表为

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + c & a - ib \\ a + ib & 1 - c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z).$$

(其余存疑)

□

第 3 题 得分: _________. V 为向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为一组标准基, 且

$$\tau(e_1) = e_1 + e_2$$
$$\tau(e_2) = e_2 + e_3$$
$$\tau(e_3) = e_3 + e_1$$

(1) 求标准基 $\mathcal{E}$ 下 τ 的矩阵表示 $[\tau]_\mathcal{E}$.

(2) 若另一组基在标准基下表示为 $\mathcal{B}=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$, 求 τ 在 $\mathcal{B}$ 下的表示 $[\tau]_{\mathcal{B}}$.

(3) 写出 τ 的极小多项式, 并写出其有理标准型. 再写出域为复时的约当标准型.

解: (1) 标准基 $\mathcal{E}$ 下 τ 的矩阵表示为

$$[\tau]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}[\tau(e_1)]_{\mathcal{E}} & [\tau(e_2)]_{\mathcal{E}} & [\tau(e_3)]_{\mathcal{E}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

(2) 标准基 $\mathcal{B}=\{e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3\}$, 则 τ 在 $\mathcal{B}$ 下的表示为

$$\begin{aligned}[\tau]_{\mathcal{B}}&=\begin{pmatrix}[\tau(e_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(e_1+e_2)]_{\mathcal{B}} & [\tau(e_1+e_2+e_3)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[e_1+e_2]_{\mathcal{B}} & [e_1+2e_2+e_3]_{\mathcal{B}} & [2e_1+2e_2+2e_3]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) τ 的特征多项式为

$$|[\tau]_{\mathcal{E}}-xI|=\begin{vmatrix}x-1&0&-1\\-1&x-1&0\\0&-1&x-1\end{vmatrix}=(x-1)^3-1=(x-2)(x^2-x+1)=0, \tag{1}$$

τ 的最小多项式为

$$m_\tau(x)=(x-2)(x^2-x+1). \tag{2}$$

$(x-2)$ 和 (x^2-x+1) 的伴阵为

$$C[(x-2)]=\begin{pmatrix}2\end{pmatrix},\quad C[(x^2-x+1)]=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

故 τ 的有理标准型为

$$[\tau]=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

在复数域上, τ 的特征多项式为

$$|\det([\tau]_{\mathcal{E}}-xI)|=(x-2)\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right). \tag{5}$$

对特征值 2,

$$r_1=\mathrm{rk}(2I-[\tau]_{\mathcal{E}})=\mathrm{rk}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=2,$$
$$r_2=\mathrm{rk}(2I-[\tau]_{\mathcal{E}})^2=\mathrm{rk}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}=2,$$

故以 2 为特征值阶为 1 的约当块的个数为

$$w_1([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) - w_2([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) = [3 - r_1] - [r_1 - r_2] = 1,$$

以 2 为特征值阶为 2 的约当块的个数为

$$w_2([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) - w_3([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) = [r_1 - r_2] - (r_2 - r_3) = 0.$$

(实际上, 特征值 2 的阶数为 1, 故只需求到阶 1 的约当块的个数即可.) $(x-2)$, $\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ 的阶为 1 的约当块分别为

$$g(2,1) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, \quad g\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, \quad g\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix}\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

故 τ 的约当标准型为

$$[\tau] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(实际上, $[\tau]$ 可对角化, 即几何重数 = 代数重数, 故约当标准型为对角阵, 即得.)

□

第 4 题 得分: ________. 映射 $f : M_1 \to M_2$

(1) 证明 f 是连续的当且仅当闭集的原像集也是闭的.

(2) 若 f 等距, (x_n) 是 M_1 中的柯西列, 证明 $(f(x_n))$ 也是柯西列.

解: (a) "$\Longrightarrow$": 假设 $S_2 \subseteq M_2$ 为闭集.
S_2 的原像集 $f^{-1}(N_2) \equiv \{x \in M_1 \mid f(x) \in S_2\}$, 记为 S_1.
假设 (x_n) 为 S_1 中收敛序列且 $(x_n) \to x_0$, 记 S_2 中序列 $(y_n) = (f(x_n))$, $y_0 = f(x_0)$.
$\because f$ 连续, $\therefore \forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon) = B(y_0, \epsilon)$.
又 $\because (x_n) \to x_0$, $\therefore \exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x_0, \delta) \Longrightarrow y_n = f(x_n) \in B(y_0, \epsilon) \Longrightarrow (y_n) \to y_0$.
又 $\because S_2$ 为闭集, $\therefore y_0 \in S_2$, 即 $f(x_0) \in S_2$
$\Longrightarrow x_0 \in S_1 \Longrightarrow S_1$ 为闭集.

"$\Longleftarrow$"(存疑): 设闭集 $S_2 \subseteq M_2$, $S_1 = f^{-1}(S_2)$.
$\because S_1$ 是闭的, $\therefore S_1$ 是闭的.
假设 f 不连续, 则 $\exists \epsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0, \delta)) \nsubseteq B(f(x_0), \epsilon)$, 即 $\exists x' \in B(x_0, \delta)$, s.t. $B(f(x'), \epsilon)$.
特别地, 取 δ_1, s.t. $B(x_0, \delta_1) \subseteq S_1$, 此时, $\exists x_1 \in B(x_0, \delta_1)$, s.t. $f(x_1) \notin B(f(x_0), \epsilon)$,
$\cdots$,
取 $\delta_n = \frac{\delta_1}{n}$, $\exists x_n \in B(x_0, \delta_n)$, s.t. $f(x_n) \notin B(f(x_0), \epsilon)$,
$\cdots$, 从而得到序列 $(x_n) \to x_0$, 序列 $(f(x_n))$ 不收敛至 $f(x_0)$, 与 S_2 是闭的矛盾, 故假设错误, f 是连续的.

综上, 得证.

(b) $\because (x_n)$ 为 M_1 中的柯西列, $\therefore \forall \epsilon$, $\exists N > 0$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.
$\because f$ 等距, $\therefore \|f(x_n) - f(x_m)\| = \|f(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\| \Longrightarrow (f_n)$ 为 M_2 中的柯西列.

□

第 5 题 得分: ________. V 是有限维内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$

(a) 若 A 是非空子集, 证明 $A^{\perp}$ 是完备的.

(b) 设 $\tau=\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2+\cdots+\lambda_k\rho_k$, 其中 $\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_k=I$ 是单位分解. 证明:

$$f(\tau)=f(\lambda_1)\rho_1+f(\lambda_2)\rho_2+\cdots+f(\lambda_k)\rho_k.$$

(c) 证明 V 的线性算子都是有界的.

(d) 求酉算子的范数.

(e) 证明 τ 是半正定的当且仅当 $\exists\sigma\in\mathcal{L}(V)$, s.t. $\tau=\sigma^*\sigma$, 并说明 σ 不是唯一的.

解: (a) 首先证明 $A^{\perp}$ 为一子空间: $\forall u,v\in A^{\perp},\forall r,t\in F,\forall a\in A$, $\langle ru+tv,a\rangle=r\langle u,a\rangle+t\langle v,a\rangle=0\Longrightarrow(ru+tv)\perp a\Longrightarrow(ru+tv)\perp A\Longrightarrow ru+tv\in A^{\perp}$, 故 $A^{\perp}$ 为子空间.
又 $\because V$ 有限维, $\therefore A^{\perp}$ 为有限维.
再利用课本定理 13.7 (3) 即得证.

(b) 展开 f 得 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
$\Longrightarrow f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(0)}{n!}\tau^n$, 其中 $\tau^n=(\lambda_1\rho_1+\cdots+\lambda_k\rho_k)^n=\lambda_1^n\rho_1+\cdots+\lambda_k^n\rho_k$,
故 $f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\lambda_1^n\rho_1+\cdots+\lambda_k^n\rho_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda_1^n\rho_1+\cdots+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda_k^n\rho_k=f(\lambda_1)\rho_1+\cdots+f(\lambda_k)\rho_k$.

(c) $\forall x_0\in V$, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in B(x_0,\epsilon)$, 即 $\|x-x_0\|<\delta$, 有 $\|f(x)-f(x_0)\|=\|f(x-x_0)\|\leq\epsilon$, 即

(d) 设 $\tau\in\mathcal{L}(V)$ 为酉算子, 则 τ 等距.
$\|\tau\|=\sup_{\|x\|=1}\|\tau(x)\|=\sup_{\|x\|=1}\|x\|=1$.

(e) "$\Longrightarrow$": $\because\tau$ 是半正定的, $\therefore$ 可设 τ 的正交谱分解 $\tau=\lambda_1\rho_1+\lambda_k\rho_k$ (其中 $0\leq\lambda_i\in\mathbb{R}\forall i$), 并取 $\sigma=\sqrt{\tau}=\sqrt{\lambda_1}\rho_1+\cdots+\sqrt{\lambda_k}\rho_k$.
从而 $\sigma^*\sigma=(\sqrt{\lambda_1}\rho_1+\cdots+\sqrt{\lambda_k}\rho_k)^*(\sqrt{\lambda_1}\rho_1+\cdots+\sqrt{\lambda_k}\rho_k)=(\sqrt{\lambda_1}\rho_1+\cdots+\sqrt{\lambda_k}\rho_k)(\sqrt{\lambda_1}\rho_1+\cdots+\sqrt{\lambda_k}\rho_k)=\lambda_1\rho_1+\cdots+\lambda_k\rho_k=\tau$.

"$\Longleftarrow$": $\because\tau=\sigma^*\sigma$, $\therefore\forall v\in V$, $\langle\tau(v),v\rangle=\langle\sigma^*\sigma(v),v\rangle=\langle\tau(v),\tau(v)\rangle=\|\tau(v)\|\geq0$, 故 τ 是半正定的.

显然, σ 并非唯一的, 例如可取 $\sigma=-\sqrt{\lambda_1}\rho_1+\cdots+\sqrt{\lambda_k}\rho_k$.

□

第 6 题 得分: _________. H 是希尔伯特空间, B 是其有界算子的集合, 证明

(a) 若 $\tau\in B$, 则 $\ker\tau$ 是完备的.

(b) 若 $\tau,\sigma\in B$, 则它们的复合 $\sigma\circ\tau$ 也是有界的.

证: (a) 若 $\|\tau\|=0$, 即 $\tau=0$, 则显然 $\ker\tau=H$ 是完备的, 故下面只讨论 $\|\tau\|\neq0$ 的情况. 首先证 $\ker\tau$ 是 H 的子空间: $\forall u,v\in\ker\tau$, $\tau(ru+tv)=r\tau(u)+t\tau(v)=0\Longrightarrow ru+tv\in\ker\tau$, 故 $\ker\tau$ 为 H 的子空间.
再证 $\ker\tau$ 是闭的: 假设 $\ker\tau$ 中收敛序列 (x_n) 收敛至 x_0,
即 $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$, s.t. 当 $n>N$ 时, $\|x_n-x_0\|\leq\epsilon$.
假设 $\|\tau(x_0)\|\neq0$, 则取 $\epsilon=\frac{\|\tau(x_0)\|}{2\|\tau\|}$, $\forall N>0$, 当 $n>N$ 时, $\|x_n-x_0\|\geq\frac{\|\tau(y)\|}{\|\tau\|}>\epsilon$, 与 $(x_n)\to x_0$ 矛盾, 故假设错误, $\|\tau(x_0)\|=0$
$\Longrightarrow\tau(x_0)=0\Longrightarrow x_0\in\ker\tau$, 故 $\ker\tau$ 是闭的.
$\because H$ 为希尔伯特空间, $\ker\tau$ 为 H 的子空间且 $\ker\tau$ 是闭的, $\therefore S$ 完备.

(b) $\because\|\sigma\circ\tau(x)\|=\|\sigma(\tau(x))\|\leq\|\sigma\|\,\|\tau(x)\|\leq\|\sigma\|\,\|\tau\|\,\|x\|$, $\therefore\|\sigma\circ\tau\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|\sigma\circ\tau(x)\|}{\|x\|}\leq\sup_{x\neq0}\|\sigma\|\,\|\tau\|=\|\sigma\|\,\|\tau\|$, 故 $\sigma\circ\tau$ 也是有界的.

□