期末考试

姓名 : 陈　稼　霖
学号 : SA21038052
成绩 : __________

第 1 题　得分: ________. 群 G, 群元 a,b, 定义共轭为: 若 a 与 b 共轭, 则 $\exists g\in G$, s.t. $b=g^{-1}ag$. 证明: 共轭是一个等价关系.

证: 共轭满足

(1) **反身性**: $\forall a\in G$, 取 $g=e$, $e^{-1}ae=eae=a\Longrightarrow a$ 与 a 共轭.

(2) **对称性**: a 与 b 共轭 $\Longleftrightarrow\exists g\in G$, s.t. $b=g^{-1}ag\Longleftrightarrow\exists g^{-1}\in G$, s.t. $a=gbg^{-1}=(g^{-1})^{-1}bg^{-1}\Longleftrightarrow b$ 与 a 共轭.

(3) **传递性**: 若 a 与 b 共轭, b 与 c 共轭, 则 $\exists g_1,g_2\in G$, s.t. $b=g_1^{-1}ag_1$, $c=g_2^{-1}bg_2$.
取 $g=g_1g_2$, 则 $c=g_2^{-1}bg_2=g_2^{-1}(g_1^{-1}ag_1)g_2=(g_2^{-1}g_1^{-1})a(g_1g_2)=(g_1g_2)^{-1}a(g_1g_2)=g^{-1}ag\Longrightarrow a$ 与 c 共轭.

故共轭是一个等价关系. □

第 2 题　得分: ________. 向量空间中四个元素

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

(1) 证明 $I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 是线性无关的.

(2) 证明对任意半正定、迹为 1 的矩阵 A, 可以写成 $A=\frac{1}{2}(I+a\sigma_x+b\sigma_y+c\sigma_z)$ 的形式, 其中 a,b,c 为实数, $a^2+b^2+c^2\leq 1$. 特别地, 当 A 的秩为 1 时, $a^2+b^2+c^2=1$.

证: (1) 假设

$$a_1I+a_2\sigma_x+a_3\sigma_y+a_4\sigma_z=0,$$

则

$$\begin{pmatrix}a_1+a_4&a_2-ia_3\\a_2+ia_3&a_1-a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$
$$\Longrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=0,$$

故 $I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 是线性无关的.

(2) $\because A$ 自伴随, $\therefore A^\dagger=A$, 即 A 关于对角线对称位置上的矩阵元复共轭, 对角线上的矩阵元为实数.
$\because A$ 的迹为 1, $\therefore A$ 的对角线上的矩阵元的求和为 1.
综上, A 可表为

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+c&a-ib\\a+ib&1-c\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(I+a\sigma_x+b\sigma_y+c\sigma_z).$$

$\because A$ 半正定,

$$\det(A)=\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix}1+c&a-ib\\a+ib&1-c\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(1-a^2-b^2-c^2)\geq 0$$
$$\Longrightarrow a^1+b^2+c^2\leq 1.$$

特别地, 当 A 的秩为 1 时,

$$\frac{1-c}{a-ib}=\frac{a+ib}{1+c},\tag{1}$$
$$\Longrightarrow a^2+b^2+c^2=1.\tag{2}$$

□

第 3 题 得分: ________. V 为向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为一组标准基, 且

$$\begin{aligned}\tau(e_1) &= e_1 + e_2\\ \tau(e_2) &= e_2 + e_3\\ \tau(e_3) &= e_3 + e_1\end{aligned}$$

(1) 求标准基 $\mathcal{E}$ 下 τ 的矩阵表示 $[\tau]_{\mathcal{E}}$.

(2) 若另一组基在标准基下表示为 $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$, 求 τ 在 $\mathcal{B}$ 下的表示 $[\tau]_{\mathcal{B}}$.

(3) 写出 τ 的极小多项式, 并写出其有理标准型. 再写出域为复时的约当标准型.

解: (1) 标准基 $\mathcal{E}$ 下 τ 的矩阵表示为

$$[\tau]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}[\tau(e_1)]_{\mathcal{E}} & [\tau(e_2)]_{\mathcal{E}} & [\tau(e_3)]_{\mathcal{E}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 标准基 $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$, 则 τ 在 $\mathcal{B}$ 下的表示为

$$\begin{aligned}[\tau]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix}[\tau(e_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(e_1+e_2)]_{\mathcal{B}} & [\tau(e_1+e_2+e_3)]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[e_1+e_2]_{\mathcal{B}} & [e_1+2e_2+e_3]_{\mathcal{B}} & [2e_1+2e_2+2e_3]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) τ 的特征多项式为

$$|[\tau]_{\mathcal{E}} - xI| = \begin{vmatrix}x-1 & 0 & -1\\ -1 & x-1 & 0\\ 0 & -1 & x-1\end{vmatrix} = (x-1)^3 - 1 = (x-2)(x^2 - x + 1) = 0, \tag{3}$$

τ 的最小多项式为

$$m_\tau(x) = (x-2)(x^2 - x + 1). \tag{4}$$

$(x-2)$ 和 $(x^2 - x + 1)$ 的伴阵为

$$C[(x-2)] = \begin{pmatrix}2\end{pmatrix}, \quad C[(x^2 - x + 1)] = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

故 τ 的有理标准型为

$$[\tau] = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}. \tag{6}$$

在复数域上, τ 的特征多项式为

$$|\det([\tau]_{\mathcal{E}} - xI)| = (x-2)\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right). \tag{7}$$

对特征值 2,

$$r_1 = \mathrm{rk}(2I - [\tau]_{\mathcal{E}}) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$r_2 = \mathrm{rk}(2I - [\tau]_{\mathcal{E}})^2 = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

故以 2 为特征值阶为 1 的约当块的个数为

$$w_1([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) - w_2([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) = [3 - r_1] - [r_1 - r_2] = 1,$$

以 2 为特征值阶为 2 的约当块的个数为

$$w_2([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) - w_3([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) = [r_1 - r_2] - (r_2 - r_3) = 0.$$

(实际上, 特征值 2 的阶数为 1, 故只需求到阶 1 的约当块的个数即可.) $(x-2)$, $\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ 的阶为 1 的约当块分别为

$$g(2,1) = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad g\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad g\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

故 τ 的约当标准型为

$$[\tau] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(实际上, $[\tau]$ 可对角化, 即几何重数 = 代数重数, 故约当标准型为对角阵, 即得.)

□

第 4 题 得分: __________. 映射 $f: M_1 \to M_2$

(1) 证明 f 是连续的当且仅当闭集的原像集也是闭的.

(2) 若 f 等距, (x_n) 是 M_1 中的柯西列, 证明 $(f(x_n))$ 也是柯西列.

解: (a) "$\Longrightarrow$": 假设 $S_2 \subseteq M_2$ 为闭集.
S_2 的原像集 $f^{-1}(N_2) \equiv \{x \in M_1 \mid f(x) \in S_2\}$, 记为 S_1.
假设 (x_n) 为 S_1 中收敛序列且 $(x_n) \to x_0$, 记 S_2 中序列 $(y_n) = (f(x_n))$, $y_0 = f(x_0)$.
$\because f$ 连续, $\therefore \forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon) = B(y_0, \epsilon)$.
又 $\because (x_n) \to x_0$, $\therefore \exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x_0, \delta) \Longrightarrow y_n = f(x_n) \in B(y_0, \epsilon) \Longrightarrow (y_n) \to y_0$.
又 $\because S_2$ 为闭集, $\therefore y_0 \in S_2$, 即 $f(x_0) \in S_2$
$\Longrightarrow x_0 \in S_1 \Longrightarrow S_1$ 为闭集.

"$\Longleftarrow$"(存疑): 设闭集 $S_2 \subseteq M_2$, $S_1 = f^{-1}(S_2)$.
$\because S_1$ 是闭的, $\therefore S_1$ 是闭的.
假设 f 不连续, 则 $\exists \epsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0, \delta)) \nsubseteq B(f(x_0), \epsilon)$, 即 $\exists x' \in B(x_0, \delta)$, s.t. $B(f(x'), \epsilon)$.
特别地, 取 δ_1, s.t. $B(x_0, \delta_1) \subseteq S_1$, 此时, $\exists x_1 \in B(x_0, \delta_1)$, s.t. $f(x_1) \notin B(f(x_0), \epsilon)$,

$\cdots$,
取 $\delta_n = \frac{\delta_1}{n}$, $\exists x_n \in B(x_0, \delta_n)$, s.t. $f(x_n) \notin B(f(x_0), \epsilon)$,
$\cdots$, 从而得到序列 $(x_n) \to x_0$, 序列 $(f(x_n))$ 不收敛至 $f(x_0)$, 与 S_2 是闭的矛盾, 故假设错误, f 是连续的.

综上, 得证.

(b) $\because (x_n)$ 为 M_1 中的柯西列, $\therefore \forall \epsilon$, $\exists N > 0$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.
$\because f$ 等距, $\therefore \|f(x_n) - f(x_m)\| = \|f(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\| \Longrightarrow (f_n)$ 为 M_2 中的柯西列.

$\square$

第 5 题 得分: __________. V 是有限维内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$

(a) 若 A 是非空子集, 证明 $A^\perp$ 是完备的.

(b) 设 $\tau = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \cdots + \lambda_k\rho_k$, 其中 $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_k = I$ 是单位分解. 证明:

$$f(\tau) = f(\lambda_1)\rho_1 + f(\lambda_2)\rho_2 + \cdots + f(\lambda_k)\rho_k.$$

(c) 证明 V 的线性算子都是有界的.

(d) 求酉算子的范数.

(e) 证明 τ 是半正定的当且仅当 $\exists \sigma \in \mathcal{L}(V)$, s.t. $\tau = \sigma^*\sigma$, 并说明 σ 不是唯一的.

解: (a) 首先证明 $A^\perp$ 为一子空间: $\forall u, v \in A^\perp$, $\forall r, t \in F$, $\forall a \in A$, $\langle ru+tv, a\rangle = r\langle u, a\rangle + t\langle v, a\rangle = 0 \Longrightarrow (ru+tv) \perp a \Longrightarrow (ru+tv) \perp A \Longrightarrow ru+tv \in A^\perp$, 故 $A^\perp$ 为子空间.
又 $\because V$ 有限维, $\therefore A^\perp$ 为有限维.
再利用课本定理 13.7 (3) 即得证.

(b) 展开 f 得 $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
$\Longrightarrow f(\tau) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^n(0)}{n!}\tau^n$, 其中 $\tau^n = (\lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_k\rho_k)^n = \lambda_1^n\rho_1 + \cdots + \lambda_k^n\rho_k$,
故 $f(\tau) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\lambda_1^n\rho_1 + \cdots + \lambda_k^n\rho_k) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda_1^n\rho_1 + \cdots + \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda_k^n\rho_k = f(\lambda_1)\rho_1 + \cdots + f(\lambda_k)\rho_k$.

(c) $\sup_{0\neq x\in V} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|\tau(x)\| < \infty$, 故得证.

(d) 设 $\tau \in \mathcal{L}(V)$ 为酉算子, 则 τ 等距.
$\|\tau\| = \sup_{\|x\|=1}\|\tau(x)\| = \sup_{\|x\|=1}\|x\| = 1$.

(e) "$\Longrightarrow$": $\because \tau$ 是半正定的, $\therefore$ 可设 τ 的正交谱分解 $\tau = \lambda_1\rho_1 + \lambda_k\rho_k$ (其中 $0 \le \lambda_i \in \mathbb{R}\forall i$), 并取 $\sigma = \sqrt{\tau} = \sqrt{\lambda_1}\rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\rho_k$.
从而 $\sigma^*\sigma = (\sqrt{\lambda_1}\rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\rho_k)^*(\sqrt{\lambda_1}\rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\rho_k) = (\sqrt{\lambda_1}\rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\rho_k)(\sqrt{\lambda_1}\rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\rho_k) = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_k\rho_k = \tau$.

"$\Longleftarrow$": $\because \tau = \sigma^*\sigma$, $\therefore \forall v \in V$, $\langle\tau(v), v\rangle = \langle\sigma^*\sigma(v), v\rangle = \langle\tau(v), \tau(v)\rangle = \|\tau(v)\| \ge 0$, 故 τ 是半正定的.

显然, σ 并非唯一的, 例如可取 $\sigma = -\sqrt{\lambda_1}\rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\rho_k$.

$\square$

第 6 题 得分: __________. H 是希尔伯特空间, B 是其有界算子的集合, 证明

(a) 若 $\tau \in B$, 则 $\ker\tau$ 是完备的.

(b) 若 $\tau, \sigma \in B$, 则它们的复合 $\sigma \circ \tau$ 也是有界的.

证: (a) 若 $\|\tau\| = 0$, 即 $\tau = 0$, 则显然 $\ker\tau = H$ 是完备的, 故下面只讨论 $\|\tau\| \neq 0$ 的情况. 首先证 $\ker\tau$ 是 H 的子空间: $\forall u, v \in \ker\tau$, $\tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) = 0 \Longrightarrow ru + tv \in \ker\tau$, 故 $\ker\tau$ 为 H 的子空间.
再证 $\ker\tau$ 是闭的: 假设 $\ker\tau$ 中收敛序列 (x_n) 收敛至 x_0,
即 $\forall\epsilon > 0, \exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $\|x_n - x_0\| \leq \epsilon$.
假设 $\|\tau(x_0)\| \neq 0$, 则取 $\epsilon = \frac{\|\tau(x_0)\|}{2\|\tau\|}$, $\forall N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\|x_n - x_0\| \geq \frac{\|\tau(x_0)\|}{\|\tau\|} > \epsilon$, 与 $(x_n) \to x_0$ 矛盾, 故假设错误, $\|\tau(x_0)\| = 0$
$\Longrightarrow \tau(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 \in \ker\tau$, 故 $\ker\tau$ 是闭的.
$\because H$ 为希尔伯特空间, $\ker\tau$ 为 H 的子空间且 $\ker\tau$ 是闭的, $\therefore S$ 完备.

(b) $\because \|\sigma\circ\tau(x)\| = \|\sigma(\tau(x))\| \leq \|\sigma\|\,\|\tau(x)\| \leq \|\sigma\|\,\|\tau\|\,\|x\|$, $\therefore \|\sigma\circ\tau\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|\sigma\circ\tau(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0}\|\sigma\|\,\|\tau\| = \|\sigma\|\,\|\tau\|$, 故 $\sigma\circ\tau$ 也是有界的.

$\square$

第 7 题 得分: ________. 写出 $(x-1)^2(x^2+x+1)$ 的 2 个有理标准型 $(F = \mathbb{R})$ 和 2 个约当标准型 $(F = \mathbb{C})$.
F