

第 1 题 得分：_____。群 G , 群元 a, b , 定义共轭为：若 a 与 b 共轭, 则 $\exists g \in G$, s.t. $b = g^{-1}ag$. 证明：共轭是一个等价关系。

证：共轭满足

(1) **反身性：** $\forall a \in G$, 取 $g = e$, $e^{-1}ae = eae = a \implies a$ 与 a 共轭。

(2) **对称性：** a 与 b 共轭 $\iff \exists g \in G$, s.t. $b = g^{-1}ag \iff \exists g^{-1} \in G$, s.t. $a = gb g^{-1} = (g^{-1})^{-1}bg^{-1} \iff b$ 与 a 共轭。

(3) **传递性：**若 a 与 b 共轭, b 与 c 共轭, 则 $\exists g_1, g_2 \in G$, s.t. $b = g_1^{-1}ag_1$, $c = g_2^{-1}bg_2$.

取 $g = g_1g_2$, 则 $c = g_2^{-1}bg_2 = g_2^{-1}(g_1^{-1}ag_1)g_2 = (g_2^{-1}g_1^{-1})a(g_1g_2) = (g_1g_2)^{-1}a(g_1g_2) = g^{-1}ag \implies a$ 与 c 共轭。

故共轭是一个等价关系。 □

第 2 题 得分：_____。向量空间中四个元素

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明 $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是线性无关的。

(2) 证明对任意半正定、迹为 1 的矩阵 A , 可以写成 $A = \frac{1}{2}(I + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)$ 的形式, 其中 a, b, c 为实数, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. 特别地, 当 A 的秩为 1 时, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

证：(1) 假设

$$a_1I + a_2\sigma_x + a_3\sigma_y + a_4\sigma_z = 0,$$

则

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_4 & a_2 - ia_3 \\ a_2 + ia_3 & a_1 - a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\implies a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

故 $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是线性无关的。

(2) $\because A$ 自伴随, $\therefore A^\dagger = A$, 即 A 关于对角线对称位置上的矩阵元复共轭, 对角线上的矩阵元为实数。

$\because A$ 的迹为 1, $\therefore A$ 的对角线上的矩阵元的求和为 1。

综上, A 可表为

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & a-ib \\ a+ib & 1-c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z).$$

$\because A$ 半正定,

$$\det(A) = \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} 1+c & a-ib \\ a+ib & 1-c \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(1-a^2-b^2-c^2) \geq 0$$
$$\implies a^2 + b^2 + c^2 \leq 1.$$

特别地, 当 A 的秩为 1 时,

$$\frac{1-c}{a-ib} = \frac{a+ib}{1-c}, \tag{1}$$

$$\implies a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{2}$$

□

第 3 题 得分: _____. V 为向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为一组标准基, 且

$$\tau(e_1) = e_1 + e_2$$

$$\tau(e_2) = e_2 + e_3$$

$$\tau(e_3) = e_3 + e_1$$

(1) 求标准基 \mathcal{E} 下 τ 的矩阵表示 $[\tau]_{\mathcal{E}}$.

(2) 若另一组基在标准基下表示为 $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, 求 τ 在 \mathcal{B} 下的表示 $[\tau]_{\mathcal{B}}$.

(3) 写出 τ 的极小多项式, 并写出其有理标准型. 再写出域为复时的约当标准型.

解: (1) 标准基 \mathcal{E} 下 τ 的矩阵表示为

$$[\tau]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} [\tau(e_1)]_{\mathcal{E}} & [\tau(e_2)]_{\mathcal{E}} & [\tau(e_3)]_{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 标准基 $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$, 则 τ 在 \mathcal{B} 下的表示为

$$\begin{aligned} [\tau]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} [\tau(e_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(e_1 + e_2)]_{\mathcal{B}} & [\tau(e_1 + e_2 + e_3)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e_1 + e_2]_{\mathcal{B}} & [e_1 + 2e_2 + e_3]_{\mathcal{B}} & [2e_1 + 2e_2 + 2e_3]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) τ 的特征多项式为

$$|[\tau]_{\mathcal{E}} - xI| = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3 - 1 = (x-2)(x^2 - x + 1) = 0, \quad (3)$$

τ 的最小多项式为

$$m_{\tau}(x) = (x-2)(x^2 - x + 1). \quad (4)$$

$(x-2)$ 和 $(x^2 - x + 1)$ 的伴阵为

$$C[(x-2)] = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad C[(x^2 - x + 1)] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

故 τ 的有理标准型为

$$[\tau] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

在复数域上, τ 的特征多项式为

$$|\det([\tau]_{\mathcal{E}} - xI)| = (x-2) \left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right). \quad (7)$$

对特征值 2,

$$r_1 = \text{rk}(2I - [\tau]_{\mathcal{E}}) = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$r_2 = \text{rk}(2I - [\tau]_{\mathcal{E}})^2 = \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

故以 2 为特征值阶为 1 的约当块的个数为

$$w_1([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) - w_2([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) = [3 - r_1] - [r_1 - r_2] = 1,$$

以 2 为特征值阶为 2 的约当块的个数为

$$w_2([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) - w_3([\tau]_{\mathcal{E}}, 2) = [r_1 - r_2] - (r_2 - r_3) = 0.$$

(实际上, 特征值 2 的阶数为 1, 故只需求到阶 1 的约当块的个数即可.) $(x - 2)$, $\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ 的阶为 1 的约当块分别为

$$g(2, 1) = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad g\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad g\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

故 τ 的约当标准型为

$$[\tau] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

(实际上, $[\tau]$ 可对角化, 即几何重数 = 代数重数, 故约当标准型为对角阵, 即得.)

□

第 4 题 得分: _____. 映射 $f: M_1 \rightarrow M_2$

(1) 证明 f 是连续的当且仅当闭集的原像集也是闭的.

(2) 若 f 等距, (x_n) 是 M_1 中的柯西列, 证明 $(f(x_n))$ 也是柯西列.

解: (a) “ \implies ”: 假设 $S_2 \subseteq M_2$ 为闭集.

S_2 的原像集 $f^{-1}(S_2) \equiv \{x \in M_1 \mid f(x) \in S_2\}$, 记为 S_1 .

假设 (x_n) 为 S_1 中收敛序列且 $(x_n) \rightarrow x_0$, 记 S_2 中序列 $(y_n) = (f(x_n))$, $y_0 = f(x_0)$.

$\because f$ 连续, $\therefore \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon) = B(y_0, \epsilon)$.

又 $\because (x_n) \rightarrow x_0$, $\therefore \exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x_0, \delta) \implies y_n = f(x_n) \in B(y_0, \epsilon) \implies (y_n) \rightarrow y_0$.

又 $\because S_2$ 为闭集, $\therefore y_0 \in S_2$, 即 $f(x_0) \in S_2$

$\implies x_0 \in S_1 \implies S_1$ 为闭集.

“ \Leftarrow ”(存疑): 设闭集 $S_2 \subseteq M_2$, $S_1 = f^{-1}(S_2)$.

$\because S_1$ 是闭的, $\therefore S_1$ 是闭的.

假设 f 不连续, 则 $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq B(f(x_0), \epsilon)$, 即 $\exists x' \in B(x_0, \delta)$, s.t. $f(x') \notin B(f(x_0), \epsilon)$.

特别地, 取 δ_1 , s.t. $B(x_0, \delta_1) \subseteq S_1$, 此时, $\exists x_1 \in B(x_0, \delta_1)$, s.t. $f(x_1) \notin B(f(x_0), \epsilon)$,

...

取 $\delta_n = \frac{\epsilon}{n}$, $\exists x_n \in B(x_0, \delta_n)$, s.t. $f(x_n) \notin B(f(x_0), \epsilon)$,

..., 从而得到序列 $(x_n) \rightarrow x_0$, 序列 $(f(x_n))$ 不收敛至 $f(x_0)$, 与 S_2 是闭的矛盾, 故假设错误, f 是连续的.

综上, 得证.

(b) $\because (x_n)$ 为 M_1 中的柯西列, $\therefore \forall \epsilon, \exists N > 0$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

$\because f$ 等距, $\therefore \|f(x_n) - f(x_m)\| = \|f(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\| \implies (f_n)$ 为 M_2 中的柯西列.

□

第 5 题 得分: _____. V 是有限维内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$

(a) 若 A 是非空子集, 证明 A^\perp 是完备的.

(b) 设 $\tau = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \cdots + \lambda_k \rho_k$, 其中 $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_k = I$ 是单位分解. 证明:

$$f(\tau) = f(\lambda_1) \rho_1 + f(\lambda_2) \rho_2 + \cdots + f(\lambda_k) \rho_k.$$

(c) 证明 V 的线性算子都是有界的.

(d) 求酉算子的范数.

(e) 证明 τ 是半正定的当且仅当 $\exists \sigma \in \mathcal{L}(V)$, s.t. $\tau = \sigma^* \sigma$, 并说明 σ 不是唯一的.

解: (a) 首先证明 A^\perp 为一子空间: $\forall u, v \in A^\perp, \forall r, t \in F, \forall a \in A, \langle ru + tv, a \rangle = r \langle u, a \rangle + t \langle v, a \rangle = 0 \implies (ru + tv) \perp a \implies (ru + tv) \perp A \implies ru + tv \in A^\perp$, 故 A^\perp 为子空间.

又 $\because V$ 有限维, $\therefore A^\perp$ 为有限维.

再利用课本定理 13.7 (3) 即得证.

(b) 展开 f 得 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
 $\implies f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tau^n$, 其中 $\tau^n = (\lambda_1 \rho_1 + \cdots + \lambda_k \rho_k)^n = \lambda_1^n \rho_1 + \cdots + \lambda_k^n \rho_k$,
 故 $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\lambda_1^n \rho_1 + \cdots + \lambda_k^n \rho_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \lambda_1^n \rho_1 + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \lambda_k^n \rho_k = f(\lambda_1) \rho_1 + \cdots + f(\lambda_k) \rho_k$.

(c) $\sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\tau(x)\| < \infty$, 故得证.

(d) 设 $\tau \in \mathcal{L}(V)$ 为酉算子, 则 τ 等距.

$$\|\tau\| = \sup_{\|x\|=1} \|\tau(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

(e) “ \implies ”: $\because \tau$ 是半正定的, \therefore 可设 τ 的正交谱分解 $\tau = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_k \rho_k$ (其中 $0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i$), 并取 $\sigma = \sqrt{\tau} = \sqrt{\lambda_1} \rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \rho_k$.

$$\text{从而 } \sigma^* \sigma = (\sqrt{\lambda_1} \rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \rho_k)^* (\sqrt{\lambda_1} \rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \rho_k) = (\sqrt{\lambda_1} \rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \rho_k) (\sqrt{\lambda_1} \rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \rho_k) = \lambda_1 \rho_1 + \cdots + \lambda_k \rho_k = \tau.$$

“ \Leftarrow ”: $\because \tau = \sigma^* \sigma, \therefore \forall v \in V, \langle \tau(v), v \rangle = \langle \sigma^* \sigma(v), v \rangle = \langle \tau(v), \tau(v) \rangle = \|\tau(v)\|^2 \geq 0$, 故 τ 是半正定的.

显然, σ 并非唯一的, 例如可取 $\sigma = -\sqrt{\lambda_1} \rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \rho_k$.

□

第 6 题 得分: _____. H 是希尔伯特空间, B 是其有界算子的集合, 证明

(a) 若 $\tau \in B$, 则 $\ker \tau$ 是完备的.

(b) 若 $\tau, \sigma \in B$, 则它们的复合 $\sigma \circ \tau$ 也是有界的.

证: (a) 若 $\|\tau\| = 0$, 即 $\tau = 0$, 则显然 $\ker \tau = H$ 是完备的, 故下面只讨论 $\|\tau\| \neq 0$ 的情况. 首先证 $\ker \tau$ 是 H 的子空间: $\forall u, v \in \ker \tau, \tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) = 0 \implies ru + tv \in \ker \tau$, 故 $\ker \tau$ 为 H 的子空间.

再证 $\ker \tau$ 是闭的: 假设 $\ker \tau$ 中收敛序列 (x_n) 收敛至 x_0 ,

即 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $\|x_n - x_0\| \leq \epsilon$.

假设 $\|\tau(x_0)\| \neq 0$, 则取 $\epsilon = \frac{\|\tau(x_0)\|}{2\|\tau\|}$, $\forall N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\|x_n - x_0\| \geq \frac{\|\tau(x_0)\|}{\|\tau\|} > \epsilon$, 与 $(x_n) \rightarrow x_0$ 矛盾, 故假设错误, $\|\tau(x_0)\| = 0$

$\implies \tau(x_0) = 0 \implies x_0 \in \ker \tau$, 故 $\ker \tau$ 是闭的.

$\because H$ 为希尔伯特空间, $\ker \tau$ 为 H 的子空间且 $\ker \tau$ 是闭的, $\therefore S$ 完备.

(b) $\because \|\sigma \circ \tau(x)\| = \|\sigma(\tau(x))\| \leq \|\sigma\| \|\tau(x)\| \leq \|\sigma\| \|\tau\| \|x\|$, $\therefore \|\sigma \circ \tau\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\sigma \circ \tau(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \|\sigma\| \|\tau\| = \|\sigma\| \|\tau\|$, 故 $\sigma \circ \tau$ 也是有界的.

□

第 7 题 得分: _____. 写出 $(x-1)^2(x^2+x+1)$ 的 2 个有理标准型 ($F = \mathbb{R}$) 和 2 个约当标准型 ($F = \mathbb{C}$).

F