高等线性代数
PHYS6653P
2019-2020 学年

期末考试

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 得分: ________. 群 G, 群元 a, b, 定义共轭为: 若 a 与 b 共轭, 则 $\exists g \in G$, s.t. $b = g^{-1}ag$. 证明: 共轭是一个等价关系.

证: □

第 2 题 得分: ________. 向量空间中四个元素

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明 $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是线性无关的.

(2) 证明对任意自伴随、迹为 1 的矩阵 A, 可以写成 $A = \frac{1}{2}(I + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)$ 的形式, 其中 a, b, c 为实数, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. 特别地, 当 A 的秩为 1 时, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

证: (1)

(2)

□

第 3 题 得分: ________. V 为向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为一组标准基, 且

$$\begin{aligned} \tau(e_1) &= e_1 + e_2 \\ \tau(e_2) &= e_2 + e_3 \\ \tau(e_3) &= e_3 + e_1 \end{aligned}$$

(1) 求标准基 $\mathcal{E}$ 下 τ 的矩阵表示 $[\tau]_{\mathcal{E}}$.

(2) 若另一组基在标准基下表示为 $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$, 求 τ 在 $\mathcal{B}$ 下的表示 $[\tau]_{\mathcal{B}}$.

(3) 写出 τ 的极小多项式, 并写出其有理标准型. 再写出域为复时的约当标准型.

解: (1)

(2)

(3)

□

第 4 题 得分: ________. 映射 $f: M_1 \to M_2$

(1) 证明 f 是连续的当且仅当闭集的原像集也是闭的.

(2) 若 f 等距, (x_n) 是 M_1 中的柯西列, 证明 $f((x_n))$ 也是柯西列.

解: (a)

(b)

□

第 5 题 得分: ________. V 是有限维内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$

(a) 若 A 是非空子集, 证明 $A^{\perp}$ 是完备的.

(b) 设 $\tau=\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2+\cdots+\lambda_k\rho_k$, 其中 $\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_k=I$ 是单位分解. 证明:

$$f(\tau)=f(\lambda_1)\rho_1+f(\lambda_2)\rho_2+\cdots+f(\lambda_k)\rho_k.$$

(c) 证明 V 的线性算子都是有界的.

(d) 求酉算子的范数.

(e) 证明 τ 是半正定的当且仅当 $\exists\sigma\in\mathcal{L}(V)$, s.t. $\tau=\sigma^*\sigma$, 并说明 σ 不是唯一的.

解: (a)

(b)

(c)

(d)

(e)

□

第 6 题 得分: _________. H 是希尔伯特空间, B 是其有界算子的集合, 证明

(a) 若 $\tau\in B$, 则 $\ker\tau$ 是完备的.

(b) 若 $\tau,\sigma\in B$, 则它们的复合 $\sigma\circ\tau$ 也是有界的.

证: (a)

(b)

□