

# Chapter 13

## 希尔伯特空间

$F = \mathbb{C}(\mathbb{R})$ ,  $V$  是  $F$  上的内积向量空间, 则可诱导出范数  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ , 度量  $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$ , 故  $(V, d)$  为度量空间.

$v \in V, r > 0, B(v, r) = \{u \in V \mid d(u, v) < r\} = \{u \in V \mid \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} < r\}$ .

收敛:  $(v_n) \rightarrow v \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\langle v_n - v, v_n - v \rangle} = 0$ .

线性变换  $\tau: V \rightarrow W$  连续  $\iff (\tau(v_n)) \rightarrow \tau(v)$ .

### 13.1 希尔伯特空间

**定理 13.1 (课本定理13.5):** (1)  $(x_n) \rightarrow x, (y_n) \rightarrow y \implies (\langle x_n, y_n \rangle) \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

(2) 序列收敛  $\implies$  序列的范数收敛.  $(x_n) \rightarrow x$ , 则  $(\|x_n\|) \rightarrow \|x\|$ .

**证:** (2)  $(x_n) \rightarrow x \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,  $d(x_n, x) = \|x_n - x\| < \epsilon$   
 $\implies \|\|x_n\| - \|x\|\| \leq \|x_n - x\| < \epsilon$ , 故  $(\|x_n\|) \rightarrow \|x\|$ .

(1)  $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|$ .

$\because (x_n) \rightarrow x, (y_n) \rightarrow y, \therefore \|x_n - x\| \rightarrow 0, \|y_n - y\| \rightarrow 0 \implies |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \rightarrow 0 \implies (\langle x_n, y_n \rangle) \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

□

注意 (2) 反之不真, 如  $(x_n = (-1)^n)$  的范数收敛, 但序列本身不收敛.

上述定理说明内积向量空间上天然  $\exists$  连续映射  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|, \langle x, \cdot \rangle: V \rightarrow F, v \mapsto \langle x, v \rangle$ .

**定义 13.1 希尔伯特空间:** 在内积诱导的度量下完备的度量空间.

**定理 13.2 完备化定理(课本定理13.6):** 对内积向量空间  $V$ ,  $\exists$  希尔伯特空间  $H$  及等距映射  $\tau: V \rightarrow H$ , s.t.  $\tau(V)$  在  $H$  中稠密.

**定理 13.3 (课本定理13.7):**  $V$  为内积向量空间, 子空间  $S \subseteq V$ , 则

(1)  $S$  完备  $\implies S$  闭.

(2)  $V$  为希尔伯特空间,  $S$  为  $V$  的子空间,  $S$  闭  $\iff S$  完备.

(3)  $\dim S < \infty$ , 则  $S$  闭且完备.

证(1)(2) 与定理 ?? 的证明同.

(3)  $\because \dim S = n, \therefore \exists$  正交归一基  $\{b_1, \dots, b_n\}$ .

取  $S$  中序列  $(v_n) \rightarrow v \in V$ , 下证  $v \in S$ .

假设  $v \notin S$ , 则  $\hat{v} \in S$  且  $v - \hat{v} \perp S$ .

$\|v_n - v\|^2 = \|v_n - \hat{v} + \hat{v} - v\|^2$ , 其中  $v_n - \hat{v} \in S, \hat{v} - v \in S^\perp$

$\implies \|v_n - v\|^2 = \|v_n - \hat{v}\|^2 + \|v - \hat{v}\|^2 \geq \|v - \hat{v}\|^2 > 0$ , 与  $(v_n) \rightarrow v$  矛盾, 故假设错误,  $v \in S \implies S$  闭.

由完备化定理,  $\exists$  希尔伯特空间  $H$  及等距映射  $\tau: S \rightarrow H$ , s.t.  $\tau(S)$  在  $H$  中稠密.

$\because \tau$  等距,  $\therefore \tau$  单射  $\implies \tau: S \rightarrow \tau(S)$  等距同构.

又  $\because \dim S = n, \therefore \dim \tau(S) = n \implies \tau(S)$  闭.

又  $\because \tau(S)$  在  $H$  中稠密,  $\therefore H = \text{cl}(\tau(S)) = \tau(S) \implies S \approx H$ .

又  $\because H$  为希尔伯特空间,  $\therefore S$  为希尔伯特空间.

□

## 13.2 无穷级数

此前我们已经证明, 对给定的向量, 由有限维子空间有正交归一基可表示其在有限维子空间中的最佳近似; 由于无限维子空间有最大正交归一集, 但该最大正交归一集未必为基, 故向量在无限维子空间中未必有最佳近似; 以开子集为例可说明, 向量在子集中未必有最佳近似.

**定义 13.2 级数收敛和绝对收敛:** 序列  $(x_n)$  的前  $n$  项和  $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ , 若  $(s_n)$  在  $V$  中收敛于  $s$ , 则称级数  $\sum_{i=1}^\infty x_i$  在  $V$  中收敛于  $s$ , 记作  $\sum_{i=1}^\infty x_i = s$ ; 若  $\sum_{i=1}^\infty |x_i|$  收敛, 则称  $\sum_{i=1}^\infty x_i$  绝对收敛.

**定理 13.4 收敛和绝对收敛的关系(课本定理13.8):** 内积向量空间  $V$  完备  $\iff V$  上绝对收敛级数收敛.

证: “ $\implies$ ”: 取绝对收敛级数  $\sum_{i=1}^\infty x_i$ , 则  $\sum_{i=1}^\infty |x_i|$  收敛.

令  $s_n = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ , 则  $(s_n)$  收敛  $\implies (s_n)$  柯西, 即  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n, m > N$  时,  $\|s_n - s_m\| < \epsilon$ .

不妨  $n < m$ , 则  $|s_n - s_m| = |\sum_{i=1}^n \|x_i\| - \sum_{i=1}^m \|x_i\|| = |\sum_{i=n+1}^m \|x_i\|| < \epsilon$ .

令  $a_n = \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\|a_n - a_m\| = \|\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^m x_i\| = \|\sum_{i=n+1}^m x_i\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|x_i\| < \epsilon \implies a_n = \sum_{i=1}^n x_i$  柯西.

又  $\because V$  完备,  $\therefore a_n$  收敛  $\implies \sum_{i=1}^\infty x_i$  在  $V$  中收敛.

“ $\impliedby$ ”: 取  $V$  中柯西序列  $(x_n)$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , s.t. 当  $n > N$  时,  $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ .

特别地,  $\forall \epsilon > 0$ , 令  $\epsilon_k = \frac{\epsilon}{2^k}$ , 其中  $k = 0, 1, \dots, \exists N_k > 0$ , s.t. 当  $n, m > N_k$  时,  $\|x_n - x_m\| < \epsilon_k = \frac{\epsilon}{2^k}$ .

选  $N_1 < N_2 < \dots$ , 则  $\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| < \frac{\epsilon}{2^k} \implies \sum_{k=1}^\infty \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| < \sum_{k=1}^\infty \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon \implies \sum_{k=1}^\infty \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\|$  收敛.

又  $\because V$  上绝对收敛级数收敛,  $\therefore \sum_{k=1}^\infty x_{N_{k+1}} - x_{N_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{N_{k+1}} - x_{N_1}$  收敛  $\implies x_{N_{k+1}}$  收敛.

由引理 13.1 得  $x_n$  收敛, 故  $V$  完备.

综上, 得证.

□

**引理 13.1:** 柯西序列的子列收敛, 则其必收敛.

**证:** 设柯西序列  $(x_n)$  的子列  $(x_{N_k}) \rightarrow x$ , 即  $\forall \epsilon > 0, \exists K > 0$ , s.t. 当  $k > K$  时,  $\|x_{N_k} - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ .

$\therefore (x_n)$  柯西,  $\therefore \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , s.t. 当  $n, m > N$  时,  $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2}$ .

取  $m = \max\{N + 1, N_K + 1\}$ ,  $\|x_n - x\| = \|x_n - x_m + x_m - x\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m - x\| < \epsilon \implies (x_n) \rightarrow x$ .  $\square$

### 13.3 近似问题

**定义 13.3 凸集:** 若  $\forall x, y \in C, \forall p \in [0, 1], px + (1 - p)y \in C$ , 则称  $C$  为凸集.

**例 13.1:** 三角形、矩形、圆形均为凸集.

三角形中任一点可表为其三个顶点的凸组合 ( $\sum_i p_i x_i$ , 其中  $p_i > 0 \forall i, \sum_i p_i = 1$ ).

无法写成其他点的凸组合的点称为极点, 如三角形的三个顶点.

过凸集的极限点且将整个空间划分为含有凸集和不含凸集的两部分的超平面称为面 (face), 如过三角形的一个顶点但未过三角形内部的直线.

过凸集的不止一个极限点的面, 称为 facet, 如三角形的边所在的直线.  $\square$

**定理 13.5 (课本定理13.9):**  $V$  为内积向量空间,  $S$  为  $V$  的完备的凸闭子集, 则  $\forall x \in V, \exists! \hat{x} \in S$ , s.t.  $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in S} \|x - y\|$ , 称  $\hat{x}$  为  $x$  在  $S$  中的最佳近似.

**证:** 令  $\delta = \inf_{y \in S} \|x - y\|$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists y \in S$ , s.t.  $\|x - y\| < \delta + \epsilon$ .

取  $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ , 则  $\exists y_1 \in S$ , s.t.  $\|x - y_1\| < \delta + \epsilon_1$ ,

$\dots, \exists y_n \in S$ , s.t.  $\|x - y_n\| \leq \delta + \epsilon_n$ ,

$\dots$ , 从而得序列  $(y_n) \in S$ .

令  $s_n = x - y_n$ , 则  $(\|s_n\|) \rightarrow \delta$ .

$\|s_i - s_j\|^2 = 2(\|s_i\|^2 + \|s_j\|^2) - \|s_i + s_j\|^2$ , 其中  $\|s_i + s_j\|^2 = \|x - y_i + x - y_j\|^2 = 4\|x - \frac{y_i + y_j}{2}\|^2$ ,

$\therefore y_i, y_j \in S$  且  $S$  凸,  $\therefore \frac{y_i + y_j}{2} \in S \implies \|x - \frac{y_i + y_j}{2}\|^2 \geq \delta^2$

$\implies \|s_i - s_j\|^2 \leq 2(\|s_i\|^2 + \|s_j\|^2) - 4\delta^2 \rightarrow 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \implies \|s_i - s_j\|^2 = \|x - y_i - x + y_j\|^2 = \|y_i - y_j\|^2 \rightarrow 0$ , 故  $(y_n)$  为  $S$  中柯西列.

又  $\therefore S$  完备,  $\therefore (y_n) \rightarrow x \implies \|x - \hat{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \delta$ .

下证  $\hat{x}$  的唯一性: 设  $w \in S$ , s.t.  $\|x - w\| = \delta$ .

$\|\hat{x} - w\|^2 = \|\hat{x} - x + x - w\|^2 = 2(\|x - \hat{x}\|^2 + \|x - w\|^2) - \|\hat{x} - x - (x - w)\|^2$ , 其中  $\|\hat{x} - x - (x - w)\| = 4\|x - \frac{\hat{x} + w}{2}\|^2$ .

$\therefore \hat{x}, w \in S$  且  $S$  凸,  $\therefore \frac{\hat{x} + w}{2} \in S \implies \|x - \frac{\hat{x} + w}{2}\|^2 \geq \delta^2$

$\implies \|\hat{x} - w\|^2 \leq 2(\|x - \hat{x}\|^2 + \|x - w\|^2) - 4\delta^2 = 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \implies \|\hat{x} - w\|^2 = 0 \implies w = \hat{x}$ .

综上, 得证.  $\square$

若  $S$  非凸, 则  $\hat{x}$  未必唯一.

由上述定理, 可定义  $\min_{y \in S} \|x - y\| \equiv \inf_{y \in S} \|x - y\|$ .

**定理 13.6 (课本定理13.10):**  $V$  为内积向量空间,  $S$  为  $V$  的完备子空间, 则  $\forall x \in V, \exists \hat{x}$  在  $S$  中的最佳近似  $\hat{x}$  且  $x - \hat{x} \perp S$ .

证:  $S$  为子空间  $\iff S$  中线性运算封闭  $\implies S$  凸, 由定理 13.5 得,  $\exists!x$  在  $S$  中的最佳近似  $\hat{x} \in S$ , s.t.  $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in S} \|x - y\|$ .

下证  $x - \hat{x} \perp S$ :  $\forall y \in S, \forall r \in F, \|v - ry\|^2 = \langle v - ry, v - ry \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, -ry \rangle + \langle -ry, v \rangle + \langle -ry, -ry \rangle = \|v\|^2 - \bar{r}\langle v, y \rangle - r\langle y, v \rangle + |r|^2 \|y\|^2 = \|v\|^2 + \|y\|^2 \left( r\bar{r} - \bar{r}\frac{\langle v, y \rangle}{\|y\|^2} - r\frac{\langle y, v \rangle}{\|y\|^2} \right) = \|v\|^2 + \|y\|^2 \left( r - \frac{\langle v, y \rangle}{\|y\|^2} \right) \left( \bar{r} - \frac{\langle y, v \rangle}{\|y\|^2} \right) - \|y\|^2 \frac{\langle v, y \rangle \langle y, v \rangle}{\|y\|^4} = \|v\|^2 + \|y\|^2 \left| r - \frac{\langle v, y \rangle}{\|y\|^2} \right|^2 - \frac{|\langle v, y \rangle|^2}{\|y\|^2}.$

当  $r = \frac{\langle v, y \rangle}{\|y\|^2}$  时,  $\|v - ry\|^2$  取最小值, 此时  $\|v - ry\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle v, y \rangle|^2}{\|y\|^2}.$

特别地, 令  $v = x - \hat{x}$ , 则  $\|x - \hat{x} - ry\|^2 \geq \|x - \hat{x}\|^2 - \frac{|\langle x - \hat{x}, y \rangle|^2}{\|y\|^2}.$

又  $\because \|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in S} \|x - y\| \leq \|x - (\hat{x} + ry)\|, \therefore \frac{|\langle x - \hat{x}, y \rangle|^2}{\|y\|^2} = 0 \implies x - \hat{x} \perp y \implies x - \hat{x} \perp S.$

综上, 得证. □

**定理 13.7 投影定理(课本定理13.11):**  $V$  为内积向量空间,  $S$  为  $V$  的完备子空间, 则  $V = S \odot S^\perp$ .  
特别地, 若  $H$  为希尔伯特空间,  $S$  为  $H$  的闭子空间, 则  $H = S \odot S^\perp$ .

**定理 13.8 (课本定理13.12):**  $S, T$  为  $V$  的子空间, 则

- (1) 若  $V = S \odot T$ , 则  $T = S^\perp$ .
- (2) 若正交补  $\exists$ , 则唯一. 若  $S \odot T = S \odot T'$ , 则  $T = T'$ .

证: (1)  $\because V = S \odot T, \therefore \forall x \in T, x \perp S \implies T \subseteq S^\perp$ .

$\forall w \in S^\perp \subseteq V = S \odot T, w = w_S + w_T$ , 其中  $w_S \in S, w_T \in T$ .

$\because w \in S^\perp, w_S \in S, \therefore 0 = \langle w_S, w \rangle = \langle w_S, w_S + w_T \rangle = \langle w_S, w_S \rangle + \langle w_S, w_T \rangle = 0 \implies w_S = 0 \implies w = w_T \in T \implies S^\perp \subseteq T.$

综上, 得证.

(2)  $\because V' \equiv S \odot T = S \odot T'$ , 则  $T = T' = S^\perp$ . □

补空间不唯一, 但补空间之间互相同构.

**定理 13.9 (课本定理13.13):**  $H$  为希尔伯特空间, 则

- (1) 若  $A \subseteq H$ , 则  $\text{cspan}(A) = A^{\perp\perp}$  <sup>a</sup>.
- (2) 若  $S$  为  $H$  的子空间, 则  $\text{cl}(S) = S^{\perp\perp}$ .
- (3) 若  $K$  为  $H$  的完备子空间, 则  $K = K^{\perp\perp}$ .

<sup>a</sup> $\text{cspan}(A) = \text{cl}(\text{span } A)$  为  $A$  中向量所张成的空间的闭包.

证: (1) 即证  $\text{cspan}(A)^\perp = A^\perp$ :  $\because A \subseteq \text{cspan}(A), \therefore \text{cspan}(A)^\perp \subseteq A^\perp$ .

$\text{cspan}(A) = \text{span}(A) \cup \text{l}(\text{span}(A)).$

$\forall x \in A^\perp, x \perp A.$

$\forall y \in \text{span}(A), y = \sum_i r_i x_i$ , 其中  $r_i \in F, x_i \in A$ .

$\because x \perp A, \therefore \langle x, x_i \rangle = 0 \forall i \implies \langle x, y \rangle = \langle x, \sum_i r_i x_i \rangle = \sum_i \bar{r}_i \langle x, x_i \rangle = 0 \implies x \perp \text{span}(A).$

$\forall z \in \text{l}(\text{span}(A)), \forall r, B(z, r) \cap \text{span}(A)$  中包含异于  $z$  的点.

取  $r_n = \frac{1}{n}$ , 则可得序列  $(z_n) \in \text{span}(A)$ . s.t.  $z_n \neq z \forall n$  且  $B(z_n, z) < r_n$  即  $(z_n) \rightarrow z$ .

$\because x \in A^\perp, \therefore x \perp \text{span}(A)$ .

又  $\because (z_n) \in \text{span}(A), \therefore x \perp z_n$  即  $\langle x, z_n \rangle = 0 \forall n$ .

又  $\because \langle x, \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \langle x, v \rangle$  连续,  $(z_n) \rightarrow z, \therefore \langle x, z_n \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$ .

又  $\because \langle x, z_n \rangle = 0$  为常序列,  $\therefore \langle x, z \rangle = 0 \implies x \perp \text{l}(\text{span}(A))$ .

$\because x \perp \text{span}(A), x \perp \text{l}(\text{span}(A)), \therefore x \perp \text{span}(A) \cup \text{l}(\text{span}(A)) = \text{cspan}(A) \implies A^\perp \subseteq \text{cspan}(A)$ .

综上,  $\text{cspan}(A) = A^{\perp\perp} \implies H = \text{cspan}(A) \odot \text{cspan}(A)^\perp = \text{cspan}(A) \odot A^\perp \implies \text{cspan}(A) = A^{\perp\perp}$ .

(2) 将 (1) 中的  $\text{span}(A)$  换成  $S$  即得证.

(3)  $\because K$  为  $H$  的完备子空间,  $\therefore K$  闭  $\implies K = \text{cl}(K)$ , 利用 (2) 即得证.

□

利用上述定理可得如下推论:

**定理 13.10 (课本定理13.14):**  $H$  为希尔伯特空间,  $A \subseteq H$ , 若  $\text{span}(A)$  在  $H$  中稠密, 则  $A^\perp = \{0\}$ .

证:  $\because \text{span}(A)$  在  $H$  中稠密,  $\therefore \text{cspan}(A) = \text{cl}(\text{span}(A)) = H$ .

$\because H$  为希尔伯特空间,  $A \subseteq H, \therefore \text{cspan}(A) = A^{\perp\perp} \implies H = A^{\perp\perp} \implies A^\perp = H^\perp = \{0\}$ .

□

**定理 13.11 (课本定理13.15):**  $\mathcal{O}$  为 Hilbert 基, 则  $\mathcal{O}^\perp = \{0\}$ .

证:  $\because \mathcal{O}$  为 Hilbert 基,  $\therefore \mathcal{O}$  为极大的正交集, 即得证.

□

**定理 13.12 (课本定理13.25):**  $H$  为 Hilbert 空间,  $\mathcal{O} = \{o_k \mid k \in K\}$  为  $H$  中的正交归一簇, 则  $\forall x \in H$ ,  $\hat{x} = \sum_{k \in K} \langle x, o_k \rangle o_k$  在  $H$  中收敛, 为  $x$  在  $\text{span}(\mathcal{O})$  中的最佳近似,  $\sum_{k \in K} |\langle x, o_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ .

**定理 13.13 (课本定理13.26):**  $H$  为 Hilbert 空间,  $\mathcal{O} = \{u_k \mid k \in K\}$  为  $H$  中的正交归一簇, 则下列叙述等价:

(1)  $\mathcal{O}$  为 Hilbert 基.

(2)  $\mathcal{O}^\perp = \{0\}$ .

(3)  $x = \hat{x}$ .

(4)  $\|x\| = \|\hat{x}\|$ .

## 13.4 有界线性变换的 Riesz 表示定理

**定义 13.4 有界线性变换:**  $H_1, H_2$  为希尔伯特空间,  $\tau \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , 若  $\sup_{0 \neq x \in H_1} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} < \infty$ , 则称  $\tau$  有界, 记  $\|\tau\| \equiv \sup_{0 \neq x \in H_1} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|}$ , 称为  $\tau$  的范数.

记  $\mathcal{B}(H_1, H_2) = \{H_1 \text{ 到 } H_2 \text{ 的有界线性变换}\}$ ,  $\mathcal{B}(H_1) \equiv \{H_1 \text{ 的有界线性算子}\}$ .

**例 13.2:** (1) 零变换有界,  $\|0\| = 0$ .

(2) 恒等变换有界,  $\|1\| = 1$ .

(3) 若  $\dim H_1 < \infty$ ,  $\dim H_2 < \infty$ , 则  $\forall \tau \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  有界.

□

**定理 13.14:** 若  $\tau$  有界, 则  $\|\tau(y)\| \leq \|\tau\| \|y\|$ .

**证:** 若  $y = 0$ , 则显然.

$$\forall 0 \neq y, \frac{\|\tau(y)\|}{\|y\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \|\tau\| \implies \|\tau(y)\| \leq \|\tau\| \|y\|.$$

综上, 得证.

□

**定理 13.15 (课本定理13.30):**  $\tau$  有界, 则

$$(1) \|\tau\| = \sup_{\|x\|=1} \|\tau(x)\|.$$

$$(2) \|\tau\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\tau(x)\|.$$

$$(3) \|\tau\| = \inf\{c \mid \|\tau(x)\| \leq c \cdot \|x\|\}.$$

**证:** (1)  $\frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \sqrt{\frac{\langle \tau(x), \tau(x) \rangle}{\|x\|^2}} = \sqrt{\langle \frac{\tau(x)}{\|x\|}, \frac{\tau(x)}{\|x\|} \rangle} = \sqrt{\langle \tau\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \tau\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rangle} = \left\| \tau\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|.$

$$\text{令 } y = \frac{x}{\|x\|}, \text{ 则 } \|y\| = 1, \|\tau\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|\tau(y)\|.$$

(2) 一方面,  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|\tau(x)\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|\tau(x)\| = \|\tau\|;$

$$\text{另一方面, } \sup_{\|x\| \leq 1} \|\tau(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \|\tau\|,$$

$$\text{故 } \|\tau\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\tau(x)\|.$$

(3) 由定理 13.14 即得证.

□

**定理 13.16 (课本定理13.31):**  $\tau$  有界  $\iff \tau$  连续.

**证:** “ $\implies$ ”: 取  $H_1$  中收敛序列  $(x_n) \rightarrow x$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , s.t. 当  $n > N$  时,  $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{\|\tau\|}$   
 $\implies \|\tau(x_n) - \tau(x)\| = \|\tau(x_n - x)\| \leq \|\tau\| \|x_n - x\| < \epsilon \implies (\tau(x_n)) \rightarrow \tau(x)$ , 故  $\tau$  连续.

“ $\impliedby$ ”: 以 0 为例, 其余点同理可证.

$\because \tau$  连续,  $\therefore \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $\tau(B(0, \delta)) \subseteq B(\tau(0), \epsilon) = B(0, \epsilon)$ .

特别地, 令  $\epsilon = 1$ , 则  $\exists \delta_1 > 0$ , s.t.  $\tau(B(0, \delta_1)) \subseteq B(0, 1)$ .

若  $\|x\| \leq \delta_1$ , 则  $\|\tau(x)\| \leq 1 \implies$  若  $\|x\| = \delta_1$ , 则  $\|\tau(x)\| \leq 1, \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\delta_1}$

$\implies \forall \|x\| = 1, \|\delta_1 x\| = \delta_1, \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|\tau(\delta_1 x)\|}{\|\delta_1 x\|} \leq \frac{1}{\delta_1} \implies \tau$  有界.

综上, 得证.

□

**有界线性变换/算子的性质:**  $\tau, \sigma \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ , 则

(1)  $\tau + \sigma \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  且  $\|\tau + \sigma\| \leq \|\tau\| + \|\sigma\|$ .

$$\text{证: } \|\tau + \sigma\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(\tau + \sigma)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\tau(x) + \sigma(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|\tau(x)\| + \|\sigma(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|\sigma(x)\|}{\|x\|} = \|\tau\| + \|\sigma\| \implies \tau + \sigma \in \mathcal{B}(H_1, H_2). \quad \square$$

$$(2) \quad \forall r \in F, r\tau \in \mathcal{B}(H_1, H_2) \text{ 且 } \|r\tau\| = |r| \|\tau\|.$$

$$\text{证: } \|r\tau\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|r\tau(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|r| \|\tau(x)\|}{\|x\|} = |r| \|\tau\| \implies r\tau \in \mathcal{B}(H_1, H_2). \quad \square$$

$\tau, \sigma \in \mathcal{B}(H_1)$ , 则

$$(3) \quad \sigma \circ \tau \in \mathcal{B}(H_1) \text{ 且 } \|\sigma \circ \tau\| \leq \|\sigma\| \|\tau\|.$$

$$\text{证: } \because \|\sigma \circ \tau(x)\| = \|\sigma(\tau(x))\| \leq \|\sigma\| \|\tau(x)\| \leq \|\sigma\| \|\tau\| \|x\|, \therefore \|\sigma \circ \tau\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\sigma \circ \tau(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \|\sigma\| \|\tau\| = \|\sigma\| \|\tau\| \implies \sigma \circ \tau \in \mathcal{B}(H_1). \quad \square$$

$(\mathcal{B}(H_1, H_2), +)$  为交换群.

**证:**  $(\mathcal{B}(H_1, H_2), +)$  满足

(1) **结合律:** 由线性变换加法的结合律即得,

$$(2) \quad \text{有单位元: 零映射 } 0 \in \mathcal{B}(H_1, H_2), \forall \tau \in \mathcal{B}(H_1, H_2), \|0 + \tau\| = \sup_{0 \neq x \in H_1} \frac{\|(0 + \tau)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{0 \neq x \in H_1} \frac{\|\tau(x)\|}{\|x\|} = \|\tau\|, \\ \text{同理 } \|\tau + 0\| = \|\tau\|,$$

$$(3) \quad \text{有逆元: } \forall \tau \in \mathcal{B}(H_1, H_2), \exists -\tau \in \mathcal{B}(H_1, H_2), \text{ s.t. } \tau + (-\tau) = (-\tau) + \tau = 0,$$

故得证.  $\square$

$\mathcal{B}(H_1, H_2)$  为向量空间.

**证:** 前面已定义了有界线性变换的数乘及  $(\mathcal{B}(H_1, H_2), +)$  为交换群, 由于其满足

$$(1) \quad r(\tau + \sigma) = r\tau + r\sigma,$$

$$(2) \quad (r + t)\tau = r\tau + t\tau,$$

$$(3) \quad (rt)\tau = r(t\tau),$$

$$(4) \quad \text{有单位元: } \exists 1 \in F, \text{ s.t. } 1\tau = \tau,$$

故得证.  $\square$

$(\mathcal{B}(H), +, \circ)$  为环.

**证:**  $(\mathcal{B}(H), +, \circ)$  满足

$$(1) \quad (\mathcal{B}(H_1), +) \text{ 为交换群,}$$

(2) **结合律:** 由线性变换的复合即得,

$$(3) \quad \text{左分配律: } \tau \circ (\sigma + \pi) = \tau \circ \sigma + \tau \circ \pi,$$

$$\text{右分配律: } (\tau + \sigma) \circ \pi = \tau \circ \pi + \sigma \circ \pi,$$

故得证.  $\square$

**定理 13.17 Riesz 表示定理(课本定理13.32):**  $H$  为希尔伯特空间,  $\forall f \in H^* \equiv \{H \text{ 到 } F \text{ 上的有界线性变换}\} = \mathcal{B}(H, F)$ ,  $\exists! z \in H$ , s.t.  $\forall x \in H$ ,  $f(x) = \langle x, z \rangle$  且  $\|z\| = \|f\|$ .

**证:** 若  $f = 0$ , 则取  $z = 0$  即得证, 下证  $f \neq 0$  的情况:

由引理 13.2 得,  $\ker f$  为闭子空间, 又  $\because H$  为希尔伯特空间,  $\therefore \ker f$  完备子空间  $\implies H = \ker f \odot \ker f^\perp$ .

由同构第一基本定理得  $\frac{H}{\ker f} \approx F \approx \ker f^\perp \implies \dim \ker f^\perp = 1 \implies \exists x \in H$ , s.t.  $\ker f^\perp = \langle x \rangle$ .

$\forall y \in H$ ,  $y = rx + w$ , 其中  $w \in \langle x \rangle^\perp = \ker f \implies f(y) = f(rx + w) = rf(x) + f(w) = rf(x)$ .

取  $z = \frac{f(x)}{\langle x, x \rangle} x$ , 则  $\langle y, \frac{f(x)}{\langle x, x \rangle} x \rangle = \frac{f(x)}{\langle x, x \rangle} \langle rx + w, x \rangle = \frac{rf(x)}{\langle x, x \rangle} \langle x, x \rangle = rf(x) = f(y)$ . □

**引理 13.2:**  $\tau \in \mathcal{B}(H, F)$ , 则  $\ker \tau$  为闭子空间.

**证:**  $\ker f = \{v \in H \mid f(v) = \langle v, z_0 \rangle = 0\}$ , 其中  $z_0$  为  $f$  的 Riesz 向量.

$\forall \ker f$  中序列  $(x_n) \rightarrow x_0$ ,  $\because \langle \cdot, z_0 \rangle$  连续,  $\therefore 0 = \langle x_n, z_0 \rangle \rightarrow \langle x_0, z_0 \rangle = 0 \implies x_0 \in \ker f$ , 故  $\ker f$  收敛封闭  $\implies f$  闭. □

$\tau^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$  且  $\|\tau^*\| \leq \|\tau\|$ , 即  $\mathcal{B}(H_1, H_2)$  是伴随封闭的 (证略).

$\because \mathcal{B}(H)$  是伴随封闭的,  $\mathcal{B}(H)$  关于线性算子的加法和复合成环, 关于线性算子的加法和点乘成向量空间,  $\therefore \mathcal{B}(H)$  为辛代数.