

# Chapter 12

## 度量空间

定义 12.1 度量和度量空间: 对集合  $M$ , 映射  $d(,): M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , 若满足

正定:  $d(u, v) \geq 0$ , 且  $d(u, v) = 0 \iff u = v$ ,

(2) 对称:  $d(u, v) = d(v, u)$ ,

(3) 三角不等式:  $d(u, v) \leq d(u, v) + d(u, v)$ ,

则称  $d$  为  $M$  上的一个度量, 称  $(M, d)$  为度量空间.

对任一集合均可定义度量, 如  $d(u, v) = \begin{cases} 1, & u \neq v, \\ 0, & u = v, \end{cases}$  且度量不唯一.

定义 12.2 子度量空间: 度量空间的非空子集.

### 12.1 开集和闭集

对度量空间  $(M, d)$ ,  $x_0 \in M$ ,  $r > 0$ , 可定义:

定义 12.3 开球:  $B(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) < r\}$ .

定义 12.4 闭球:  $\bar{B}(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) \leq r\}$ .

定义 12.5 球面:  $S(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) = r\}$ .

定义 12.6 开集:  $S \subseteq M$ ,  $\forall x_0 \in S$ ,  $\exists r > 0$ , s.t.  $B(x_0, r) \subseteq S$ , 则称  $S$  为开集.

**定义 12.7 闭集:**  $T \subseteq M$ ,  $T^c = M \setminus T$  是开集, 则  $T$  为闭集.

**定义 12.8 开邻域:** 包含  $x_0$  的任何开集称  $x_0$  的开邻域.

开球为开集, 闭球为闭集.

**证:**  $\forall$  开球  $B(x_0, r_0) = \{y \in M \mid d(y, x_0) < r_0\}$ ,  $\forall x \in B(x_0, r_0)$ ,  $\exists r = \frac{1}{2}(r_0 - d(x, x_0)) > 0$ , s.t.  $B(x, r) \subseteq B(x_0, r_0) \implies$  开球  $B(x_0, r_0)$ .

$\forall$  闭球  $\bar{B}(x_0, r_0) = \{y \in M \mid d(y, x_0) \leq r_0\}$ ,  $\forall x \in (\bar{B}(x_0, r_0))^c = \{y \in M \mid d(y, x_0) > r_0\}$ ,  $\exists r = \frac{1}{2}(d(x, x_0) - r_0) > 0$ , s.t.  $B(x, r) \subseteq (\bar{B}(x_0, r_0))^c \implies (\bar{B}(x_0, r_0))^c$  为开集, 即  $\bar{B}(x_0, r_0)$  为闭集.  $\square$

**例 12.1:** 设  $\mathbb{R}$  上的度量  $d(r, t) = |r - t|$ . 对点  $x_0$ ,

$$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r),$$

$$\bar{B}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r],$$

$$S(x_0, r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}.$$

开区间  $(a, b)$  为开集.

**证:**  $\forall x \in (a, b)$ , 取  $r = \frac{1}{2} \min\{|x - a|, |x - b|\} > 0$ ,  $B(x, r) = (x - r, x + r) \subseteq (a, b)$ , 故得证.  $\square$

闭区间  $[a, b]$  为闭集.

$(a, b]$  既非开集也非闭集.  $\square$

**定理 12.1 (课本定理12.1):**  $\mathcal{O} = \{M \text{ 上的开集}\}$ , 则

- (1)  $\emptyset, M \in \mathcal{O}$ .
- (2) 有限个开集的交仍为开集:  $S, T \in \mathcal{O}$ , 则  $S \cap T \in \mathcal{O}$ .
- (3)  $S_i \in \mathcal{O}$ , 则  $\cup_{i \in K} S_i \in \mathcal{O}$  ( $S_i$  可以是无限个).

**证:** (1) 显然.

(2)  $x_0 \in S \cap T \iff x_0 \in S, x_0 \in T$ .

$\because S$  为开集,  $\therefore \exists r_1 > 0$ , s.t.  $B(x_0, r_1) \subseteq S$ ;

$\because T$  为开集,  $\therefore \exists r_2 > 0$ , s.t.  $B(x_0, r_2) \subseteq T$ .

令  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , 则  $B(x_0, r) \subseteq S$  且  $B(x_0, r) \subseteq T \implies B(x_0, r) \subseteq S \cap T \implies S \cap T$  开, 即  $S \cap T \in \mathcal{O}$ .

(3)  $x_0 \in \cup_i S_i \iff \exists i$ , s.t.  $x_0 \in S_i$ .

$\because S_i$  为开集,  $\therefore \exists r > 0$ , s.t.  $B(x_0, r) \subseteq S_i \subseteq \cup_i S_i \implies \cup_i S_i$  开, 即  $\cup_i S_i \in \mathcal{O}$ .  $\square$

**例 12.2 无穷多个开集的交未必开:**  $S_i = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ .

$$\cap_i S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \{0\} \text{ 闭.} \quad \square$$

单点集为闭集.

**证:** 单点集  $S = \{a\}$ , 补集  $S^c = M \setminus \{a\}$ .

$\forall x \in S^c$ , 则  $x \neq a$ ,  $d(x, a) > 0$ .

取  $r = \frac{1}{2}d(x, a)$ , 则  $a \notin B(x, r) \implies B(x, r) \subseteq S^c \implies S^c$  开, 故  $S$  闭.  $\square$

有限点集为闭集.

证: 有限点集  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , 补集  $S^c = M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ .

$\forall x \in S^c$ , 则  $x \neq a_1, \dots, a_n \implies \forall i, d(x, a_i) > 0$ .

取  $r = \frac{1}{2} \min_i \{d(x, a_i)\}$ , 则  $\forall a_i, a_i \notin B(x, r) \implies S^c$  开, 故  $S$  闭. □

**定义 12.9 拓扑和拓扑空间:** 集合  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{O}$  是  $X$  的一些子集构成的簇<sup>a</sup>, 若  
 $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ ,

(1)  $S, T \in \mathcal{O}$ , 则  $S \cap T \in \mathcal{O}$ ,

(3)  $\{S_i \in \mathcal{O} \mid i \in K\}$ , 则  $\bigcup_{i \in K} S_i \in \mathcal{O}$ ,

则称  $\mathcal{O}$  为  $X$  上的一个拓扑, 称  $(X, \mathcal{O})$  为拓扑空间, 称  $\mathcal{O}$  中的集合为  $X$  上的开集.

<sup>a</sup>可理解为“集合的集合”, 此处为避免逻辑循环, 故名之

故确定开集  $\iff$  确定拓扑.

## 12.2 度量空间的收敛性

**定义 12.10 收敛和极限:** 集合  $M$  中序列  $(x_n)$ ,  $x \in M$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ , 则称序列  $(x_n)$  收敛于  $x$ , 记作  $x_n \rightarrow x$ , 称  $x$  为序列  $(x_n)$  的极限.

**例 12.3:**  $(r_n)$  为  $\mathbb{R}$  上的序列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ , 即  $r_n \rightarrow 0$ , 即  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,  $d(r_n, 0) < \epsilon \iff r_n \in B(0, \epsilon)$ . □

收敛的性质:

- (1)  $\forall r > 0, B(x, r)$  中包含  $(x_n)$  中无穷个元素.
- (2) 有限点列非序列, 无需考虑极限.
- (3) 常序列收敛,  $(x_n = x_0) \rightarrow x_0$ .
- (4) 对给定序列, 若  $\exists$  极限, 则极限唯一.

**定理 12.2 (课本定理12.2):** 闭集关于收敛封闭.  $S$  闭  $\iff S$  中序列  $(x_n) \rightarrow x \in M$ , 则  $x \in S$ .

证: “ $\implies$ ”: 取  $S$  中序列  $(x_n)$  且  $(x_n) \rightarrow x \in M$ .

假设  $x \notin S$ , 则  $x \in S^c = M \setminus S$ .

$\because S$  闭,  $\therefore S^c$  开  $\implies \exists r > 0$ , s.t.  $B(x, r) \subseteq S^c$ , 即  $B(x, r) \cap S = \emptyset$ , 故  $S$  中序列  $(x_n) \notin B(x, r)$ .

又  $\because x_n \rightarrow x$ ,  $\therefore \exists N_r > 0$ , s.t. 当  $n > N_r$  时,  $x_n \in B(x, r)$ , 矛盾, 故假设错误,  $x \in S$ .

“ $\Leftarrow$ ”: 假设  $S$  非闭, 则  $S^c$  非开  $\implies \exists x_0 \in S^c$ , s.t.  $\forall r > 0, B(x_0, r) \not\subseteq S^c$ .

特别地, 令  $r = 1$ , 则  $\exists x_1 \in B(x_0, 1)$ , s.t.  $x_1 \notin S^c$ , 即  $x_1 \in S$ ,

$\dots$ , 令  $r = \frac{1}{n}$ , 则  $\exists x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ , s.t.  $x_n \notin S^c$ , 即  $x_n \in S$ ,

$\dots \implies x_n \rightarrow x_0$ .

又  $\because (x_n) \in S$ ,  $\therefore$  由题设,  $x_0 \in S$ , 矛盾, 故假设错误,  $S$  闭.

综上, 得证. □

## 12.3 集合的闭包

**定义 12.11 闭包:**  $S \subseteq M$ , 称包含  $S$  的最小闭集或包含  $S$  的所有闭集的交为  $S$  的闭包, 记作  $\text{cl}(S)$ .

给定  $S$ , 必  $\exists$  其闭包.

**定义 12.12 极限点(/聚点):**  $\emptyset \neq S \subseteq M, x \in M$ , 若  $\forall r > 0, B(x, r) \cap S$  包含异于  $x$  的点, 则称  $x$  为  $S$  的极限点或聚点,  $S$  对应的极限点的集合记作  $l(S)$ .

**例 12.4:**  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , 则  $l((a, b)) = [a, b]$ .

$c \notin [a, b], S = (a, b) \cup \{c\}$ , 则  $l(S) = [a, b]$ . □

**定理 12.3 (课本定理12.3):** (1)  $x \in l(S) \iff \exists$  序列  $(x_n) \in S$ , s.t.  $x_n \neq x \forall n$  且  $x_n \rightarrow x$ .

(2)  $S$  闭  $\iff l(S) \subseteq S$ .

(3)  $\text{cl}(S) = S \cup l(S)$ .

**证:** (1) “ $\implies$ ”:  $\because x \in l(S), \therefore \exists x_n \neq x$ , s.t.  $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$   
 $\implies d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ , 故  $\exists (x_n) \in S$ , s.t.  $\forall n, x_n \neq x, x_n \rightarrow x$ .

“ $\impliedby$ ”: 设  $(x_n) \rightarrow x$  且  $x \neq x_n \in S$ .

$\forall r > 0, \exists N$ , s.t. 当  $n > N$  时,  $x_n \in B(x, r)$ , 即  $\exists x_n \neq x$ , s.t.  $x_n \in B(x, r) \cap S$ , 故  $x \in l(S)$ .

综上, 得证.

(2) “ $\implies$ ”: 设  $x \in l(S)$ , 则由 (1) 得,  $\exists (x_n) \in S$ , s.t.  $x_n \neq x \forall n$  且  $x_n \rightarrow x$ .

又  $\because S$  闭,  $\therefore x \in S \implies l(S) \subseteq S$ .

“ $\impliedby$ ”:  $\forall S$  中序列  $(x_n) \rightarrow x$ , 若  $\exists n$ , s.t.  $x_n = x$ , 则  $x = x_n \in S$ ,

或  $x_n \neq x \forall n$ , 则由 (1) 得  $x \in l(S) \subseteq S$ , 故  $S$  闭.

综上, 得证.

(3) 显然  $S \subseteq S \cup l(S) \equiv T$ .

设  $x \in l(T)$ , 则由 (1) 得,  $\exists$  序列  $(x_n) \in T$ , s.t.  $x_n \neq x \forall n$  且  $x_n \rightarrow x$ .

假设  $x \notin S$  且  $x \notin l(S)$ , 则  $\because x \notin l(S), \therefore \exists r > 0, B(x, r) \cap S = \emptyset$ .

但  $\because (x_n) \rightarrow x, \therefore \exists x_n \in B(x, r) \implies x_n \notin S$ .

又  $\because x_n \in T \equiv S \cup l(S), \therefore x_n \in l(S)$ .

取  $x_n$ , s.t.  $d(x_n, x) < r$ , 则  $B(x_n, \frac{r-d(x_n, x)}{2}) \subseteq B(x, r)$ ,

且  $\because x_n \in l(S), \therefore \exists y \in S \cap B(x_n, \frac{r-d(x_n, x)}{2}) \subseteq S \cap B(x, r)$ , 与  $B(x, r) \cap S = \emptyset$  矛盾, 故假设错误,  $x \in S$  或  $x \in l(S)$ , 即  $x \in T \equiv S \cup l(S) \implies T$  闭.

又  $\because S \subseteq T, \therefore$  由闭包定义,  $\text{cl}(S) \subseteq T$ .

另一方面, 由闭包定义,  $S \in \text{cl}(S)$ .

假设  $l(S) \not\subseteq \text{cl}(S)$ , 即  $\exists x \in l(S)$  且  $x \notin \text{cl}(S)$ , 则  $\forall r > 0, B(x, r) \cap S \neq \emptyset$ , 且  $\exists$  闭集  $S'$ , s.t.  $x \notin S'$  即  $x \in (S')^c$ .

$\because S'$  闭  $\implies (S')^c$  开,  $\therefore \exists r > 0$ , s.t.  $B(x, r) \subseteq (S')^c$ , 与  $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$  矛盾, 故假设错误,  $l(S) \subseteq \text{cl}(S) \implies T \equiv S \cup l(S) \subseteq \text{cl}(S)$ .

综上, 得证. □

## 12.4 稠密子集

**定义 12.13 稠密子集:**  $S \subseteq M$ , 若  $\text{cl}(S) = M$ , 则称  $S$  为  $M$  的稠密子集.

若  $S$  为  $M$  的稠密子集, 则  $M = \text{cl}(S) = S \cup I(S)$ , 这意味着  $M$  中任一点均可由  $S$  中的某一序列逼近.

**例 12.5:**  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{无理数}$ .  $\forall$  无理数  $r$ ,  $\exists$  有理数序列  $(r_n) \rightarrow r$ ,  $\therefore \mathbb{Q}$  为  $\mathbb{R}$  的稠密子集.

同理, 无理数也为  $\mathbb{R}$  的稠密子集.

实际上,  $\mathbb{Q}$  在  $[0, 1]$  上的测度  $= 0$ , 即无理数远多于有理数. □

## 12.5 连续

**定义 12.14 连续和不连续:** 度量空间  $(M, d)$  和  $(M', d')$ , 映射  $f: M \rightarrow M'$ ,  $x_0 \in M$ , 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$ , 即  $d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处连续, 若  $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq B(f(x_0), \epsilon)$ , 则称  $f$  在  $x_0$  处不连续.

**定理 12.4 连续的判定(课本定理12.4):**  $f: M \rightarrow M'$  连续  $\iff$  若  $M$  中序列  $(x_n)$  收敛于  $x$ , 则  $(f(x_n)) \rightarrow f(x)$  (即  $f$  保持收敛性不变).

**证:** “ $\implies$ ”:  $\because f$  连续,  $\therefore \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$ .

$\because (x_n) \rightarrow x, \therefore \forall \delta > 0, \exists N > 0$ , 当  $n > N$  时,  $d(x_n, x) < \delta$

$\implies d(f(x_n), f(x)) < \epsilon$ , 故  $(f(x_n)) \rightarrow f(x)$ .

“ $\impliedby$ ”: 假设  $f$  在  $x \in M$  处不连续, 则  $\exists \epsilon > 0$ , s.t.  $\forall \delta > 0, f(B(x, \delta)) \not\subseteq B(f(x), \epsilon)$ , 即  $\exists x' \in B(x, \delta)$ , s.t.  $f(x') \notin B(f(x), \epsilon)$ .

特别地, 取  $\delta = 1, \exists x_1 \in B(x, 1)$ , s.t.  $f(x_1) \notin B(f(x), \epsilon)$ ,

$\dots$ , 取  $\delta = \frac{1}{n}, \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ , s.t.  $f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon)$ ,

$\dots$ , 从而得到序列  $(x_n) \rightarrow x$ , 但  $d(f(x_n), f(x)) > \epsilon$

$\implies f(x)$  不收敛至  $f(x)$ , 与题设矛盾, 故假设错误,  $f$  在  $x_0$  处连续.

综上, 得证. □

**定理 12.5 (课本定理12.5):** 若  $(x_n) \rightarrow x, (y_n) \rightarrow y$ , 则  $(d(x_n, y_n)) \rightarrow d(x, y)$ .

**证:**  $\forall \epsilon > 0, \because (x_n) \rightarrow x, \therefore \exists N_1 > 0$ , s.t. 当  $n > N_1$  时,  $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ ,

$\because (y_n) \rightarrow y, \therefore \exists N_2 > 0$ , s.t. 当  $n > N_2$  时,  $d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{2}$

$\implies \exists N = \max\{N_1, N_2\}$ , s.t. 当  $n > N$  时,  $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| = |d(x_n, y_n) - d(x, y_n) + d(x, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x, y_n)| + |d(x, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \epsilon$ , 故得证. □

**推论:**  $(d(x_n, y)) \rightarrow d(x_0, y)$ , 即  $d(\cdot, y): M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, y)$  为  $M$  到  $\mathbb{R}$  的连续映射.

同理,  $d(\cdot, \cdot): M \times M \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$  亦为连续映射.

**定义 12.15 柯西序列:**  $(x_n)$  为  $M$  中序列, 若  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 当  $n, m > N$  时,  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ , 则称  $(x_n)$  为柯西序列.

**定理 12.6:** 收敛  $\implies$  柯西, 反之不真.

**证:** 设  $(x_n) \rightarrow x$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0$ , s.t. 当  $n > N_1$  时,  $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ ,

$\exists N_2 > 0$ , s.t. 当  $m > N_2$  时,  $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$

$\implies \exists N = \max\{N_1, N_2\}$ , s.t. 当  $n, m > N$  时,  $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$ , 故  $(x_n)$  柯西.  $\square$

**例 12.6 不收敛的柯西序列(课本例12.12):**  $C[0, 1] \equiv \{[0, 1] \text{ 区间上的连续函数}\}$ .

$f(x), g(x) \in C[0, 1]$ , 度量  $d(f(x), g(x)) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ .

令  $f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases}$  则  $(f_n(x)) \rightarrow \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$  不连续, 故  $(f_n(x))$  柯西但在  $C[0, 1]$  上不收敛 (极限在  $C[0, 1]$  外).  $\square$

## 12.6 完备

**定义 12.16 完备:** 称柯西序列均收敛的空间为完备的.

**定义 12.17 完备子空间:**  $S$  为度量空间  $M$  的子集, 若  $S$  完备, 则称  $S$  为  $M$  的完备子空间.

**定理 12.7 (课本定理12.6):** 对度量空间  $M$ ,  
任一完备子集闭.

(2) 若  $M$  完备,  $S \subseteq M$ , 则  $S$  闭  $\iff S$  完备.

**证:** (1) 取完备子集  $S \subseteq M$ , 取  $S$  中任意序列  $(x_n) \rightarrow x \in M \implies (x_n)$  柯西.

又  $\because S$  为完备子集,  $\therefore (x_n)$  收敛, 设  $(x_n) \rightarrow y \in S$ .

又  $\because$  极限唯一,  $\therefore x = y \in S \implies S$  闭.

(2) “ $\Leftarrow$ ”: 已由 (1) 证.

“ $\Rightarrow$ ”:  $\forall$  柯西列  $(x_n) \in S, \because S \subseteq M, \therefore (x_n)$  为  $M$  中的柯西列.

又  $\because M$  完备,  $\therefore (x_n)$  收敛, 设  $(x_n) \rightarrow x$ .

又  $\because S$  闭,  $\therefore x \in S$ , 故  $S$  完备.

综上, 得证.  $\square$

**例 12.7:** 在欧氏度量  $d(u, v) = \sqrt{\sum_i |u_i - v_i|^2}$  下,  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  完备.  $\square$

**例 12.8 (课本例12.11):**  $C[a, b]$  上度量  $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\}$ ,  $(C[a, b], d)$  完备.

**证:** 在  $(C[a, b], d)$  上,  $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\} < \epsilon \iff |f(x) - g(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$ .

设  $(f_n)$  柯西, 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , s.t. 当  $m, n > N$  时,  $d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon \iff |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$ ,  
即给定  $\forall x \in [a, b], (f_n(x))$  为  $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$  上的柯西列.

又  $\because \mathbb{R}$  和  $\mathbb{C}$  完备,  $\therefore (f_n(x))$  收敛.

设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x))$ , 则取  $m \rightarrow \infty$  得当  $n > N$  时,  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$

$\implies (f_n) \rightarrow f$ , 故  $C[a, b]$  完备.  $\square$

□

## 12.7 等距

**定义 12.18 等距:**  $(M, d)$  和  $(M', d')$  为度量空间, 若映射  $f: M \rightarrow M'$  满足  $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ , 则称  $f$  等距.

**定理 12.8 等距的性质(课本定理12.7):**  $f: (M, d) \rightarrow (M', d')$  等距, 则

- (1)  $f$  单射.
- (2)  $f$  连续.
- (3) 若  $f$  可逆, 则  $f^{-1}$  等距.

**证:** (1) (此处的  $M$  和  $M'$  仅为集合, 没有定义额外的运算, 故 0 (加法单位元) 不一定存在, 必须从定义证明单射.)

设  $f(x) = f(y)$ , 则  $d(f(x), f(y)) = 0$ .

又  $\because f$  等距,  $\therefore d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \implies x = y$ , 故得证.

(2)  $\forall M$  的收敛序列  $(x_n) \rightarrow x, \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , s.t. 当  $n > N$  时,  $d(x_n, x) < \epsilon$ .

$\because f$  等距,  $\therefore d(f(x_n), f(x)) = d(x_n, x) < \epsilon \implies (f(x_n)) \rightarrow f(x)$ .

$\therefore f$  保持收敛,  $\therefore f$  连续.

(3) 若  $f$  可逆, 则  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

$\because f$  等距,  $\therefore d(f(x), f(y)) = d(x, y) = d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) \implies f^{-1}$  等距.

□

## 12.8 度量空间的完备化

**定理 12.9 完备化定理(课本定理12.8):** 对度量空间  $(M, d)$ ,  $\exists$  完备度量空间  $(M', d')$  及等距  $\tau: M \rightarrow M'$ , s.t.  $\tau(M)$  在  $M'$  中稠密.

具体如何完备化?

取  $V = \{M \text{ 中所有柯西序列}\}$ , 定义等价关系  $(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ , 则等价类  $\frac{V}{\sim}$  即  $M'$ .