Chapter 13

希尔伯特空间

$F = \mathbb{C}(\mathbb{R})$, V 是 F 上的内积向量空间, 则可诱导出范数 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, 度量 $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$, 故 (V,d) 为度量空间.

$v \in V$, $r > 0$, $B(v,r) = \{u \in V \mid d(u,v) < r\} = \{u \in V \mid \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} < r\}$.

收敛: $(v_n) \to v \iff \lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\langle v_n - v, v_n - v\rangle} = 0$.

线性变换 $\tau : V \to W$ 连续 $\iff (\tau(v_n)) \to \tau(v)$.

13.1 希尔伯特空间

定理 13.1 (课本定理13.5): (1) $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y \Longrightarrow (\langle x_n, y_n\rangle) \to \langle x, y\rangle$.

(2) 序列收敛 $\Longrightarrow$ 序列的范数收敛. $(x_n) \to x$, 则 $(\|x_n\|) \to \|x\|$.

证: (2) $(x_n) \to x \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) = \|x_n - x\| < \epsilon$
$\Longrightarrow |\|x_n\| - \|x\|| < \|x_n - x\| < \epsilon$, 故 $(\|x_n\|) \to \|x\|$.

(1) $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \le \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|$.
$\because (x_n) \to x$, $(y_n) \to y$, $\therefore \|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0 \Longrightarrow |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0 \Longrightarrow (\langle x_n, y_n\rangle) \to \langle x, y\rangle$.

□

注意 (2) 反之不真, 如 $(x_n = (-1)^n)$ 的范数收敛, 但序列本身不收敛.

上述定理说明内积向量空间上天然 $\exists$ 连续映射 $\|\| : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, $\langle x, \rangle : V \to F$, $v \mapsto \langle x, v\rangle$.

定义 13.1 希尔伯特空间: 在内积诱导的度量下完备的度量空间.

定理 13.2 完备化定理(课本定理13.6): 对内积向量空间 V, $\exists$ 希尔伯特空间 H 及等距映射 $\tau : V \to H$, s.t. $\tau(V)$ 在 H 中稠密.

定理 13.3 (课本定理13.7): V 为内积向量空间, 子空间 $S \subseteq V$, 则

(1) S 完备 $\Longrightarrow S$ 闭.

(2) V 为希尔伯特空间, S 为 V 的子空间, S 闭 $\Longleftrightarrow S$ 完备.

(3) $\dim S<\infty$, 则 S 闭且完备.

证:(1)(2) 与定理 **??** 的证明同.

(3) $\because \dim S=n, \therefore \exists$ 正交归一基 $\{b_1,\cdots,b_n\}$.
取 S 中序列 $(v_n)\to v\in V$, 下证 $v\in S$.
假设 $v\notin S$, 则 $\hat{v}\in S$ 且 $v-\hat{v}\perp S$.
$\|v_n-v\|^2=\|v_n-\hat{v}+\hat{v}_n+\hat{v}\|^2$, 其中 $v-\hat{v}\in S^{\perp}$, $\hat{v}_n+\hat{v}\in S$
$\Longrightarrow \|v_n-v\|^2=\|v-\hat{v}\|^2-\|\hat{v}_n+v\|^2\geq\|v-\hat{v}\|^2>0$, 与 $(v_n)\to v$ 矛盾, 故假设错误, $v\in S\Longrightarrow S$ 闭.
由完备化定理, $\exists$ 希尔伯特空间 H 及等距映射 $\tau:S\to H$, s.t. $\tau(S)$ 在 H 中稠密.
$\because \tau$ 等距, $\therefore \tau$ 单射 $\Longrightarrow S$ 等距同构.
又 $\because \dim S=n, \therefore \dim\tau(S)=n\Longrightarrow \tau(S)$ 闭.
又 $\tau(S)$ 在 H 中稠密, $\therefore H=\mathrm{cl}(\tau(S))=\tau(S)\Longrightarrow S\approx H$.
又 H 为希尔伯特空间, $\therefore S$ 为希尔伯特空间.

□

13.2 无穷级数

此前, 我们已经证明, 对给定的向量, 由有限维子空间有正交归一基可表示其在有限维子空间中的最佳近似; 由于无限维子空间有最大正交归一集, 但该最大正交归一集未必为基, 故向量在无限维子空间中未必有最佳近似; 以开子集为例可说明, 向量在子集中未必有最佳近似.

定义 13.2 级数收敛和绝对收敛: 序列 (x_n) 的前 n 项和 $s_n=\sum_{i=1}^n x_i$, 若 (s_n) 在 V 中收敛于 s, 则称级数 $\sum_{i=1}^\infty x_i$ 在 V 中**收敛**于 s, 记作 $\sum_{i=1}^\infty=s$; 若 $\sum_{i=1}^\infty|x_i|$ 收敛, 则称 $\sum_{i=1}^\infty x_i$ 绝对收敛.

定理 13.4 收敛和绝对收敛的关系(课本定理13.8): 内积向量空间 V 完备 $\Longleftrightarrow V$ 上绝对收敛级数收敛.

证: "$\Longrightarrow$": 取绝对收敛级数 $\sum_{i=1}^\infty x_i$, 则 $\sum_{i=1}^\infty x_i$ 收敛.
令 $s_n=\sum_{i=1}^n\|x_i\|$, 则 (s_n) 收敛 $\Longrightarrow (s_n)$ 柯西, 即 $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n,m>N$ 时, $\|s_n-s_m\|<\epsilon$.
无妨 $n<m$, 则 $|s_n-s_m|=|\sum_{i=1}^n\|x_i\|-\sum_{i=1}^m\|x_i\||=\left|\sum_{i=n+1}^m\|x_i\|\right|<\epsilon$.
令 $a_n=\sum_{i=1}^n x_i$, $\|a_n-a_m\|=\|\sum_{i=1}^n x_i-\sum_{i=1}^m x_i\|=\left\|\sum_{i=n+1}^m x_i\right\|\leq\sum_{i=n+1}^m\|x_i\|<\epsilon\Longrightarrow a_n=\sum_{i=1}^n x_i$ 柯西.
又 $\because V$ 完备, $\therefore a_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{i=1}^\infty$ 在 V 中收敛.

"$\Longleftarrow$": 取 V 中柯西序列 (x_n), 则 $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$, s.t. 当 $n>N$ 时, $\|x_n-x_m\|<\epsilon$.
特别地, 令 $\epsilon_k=\frac{1}{2^k}$, 其中 $k=0,1,\cdots$, 则 $\forall\epsilon_k$, $\exists N_k>0$, s.t. 当 $n,m>N$ 时, $\|x_n-x_m\|<\epsilon_k=\frac{1}{2^k}$.
选 $N_1<N_2<\cdots$, 则 $\left\|x_{N_{k+1}}-x_{N_k}\right\|<\frac{1}{2^k}\Longrightarrow\sum_{k=1}^\infty\left\|x_{N_{k+1}}-x_{N_k}\right\|<\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}=1\Longrightarrow\sum_{k=1}^\infty\left\|x_{N_{k+1}}-x_{N_k}\right\|$ 收敛.
又 $\because V$ 上绝对收敛级数收敛, $\therefore \sum_{k=1}^\infty x_{N_{k+1}}-x_{N_k}=x_{N_{n+1}}-x_{N_1}$ 收敛 $\Longrightarrow x_{N_{k+1}}$ 收敛.
由引理 13.1 得 x_n 收敛, 故 V 完备.

综上, 得证.

□

引理 13.1: 柯西序列的子列收敛, 则其必收敛.

证: 设柯西序列 (x_n) 的子列 $(x_{N_k}) \to x$, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists K > 0$, s.t. 当 $k > K$ 时, $\|x_{N_k} - x\| < \frac{\epsilon}{2}$.
$\because (x_n)$ 柯西, $\therefore \forall \epsilon$, $\exists N > 0$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2}$.
取 $m = \max\{N+1, N_K+1\}$, $\|x_n - x\| = \|x_n - x_m + x_m - x\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m - x\| < \epsilon \Longrightarrow (x_n) \to x$. □

13.3 近似问题

定义 13.3 凸集: 若 $\forall x, y \in C$, $\forall p \in [0,1]$, $px + (1-p)y \in C$, 则称 C 为凸集.

例 13.1: 三角形、矩形、圆形均为凸集.
三角形中任一点可表为其三个顶点的**凸组合** ($\sum_i p_i x_i$, 其中 $p_i > 0 \forall i$, $\sum_i p_i = 1$).
无法写成其他点的凸组合的点称为**极点**, 如三角形的三个顶点.
过凸集的极限点且将整个空间划分为含有凸集和不含凸集的两部分的超平面称为**面 (face)**, 如过三角形的一个顶点但未过三角形内部的直线.
过凸集的不止一个极限点的面, 称为 **facet**, 如三角形的边所在的直线. □

定理 13.5 (课本定理13.9): V 为内积向量空间, S 为 V 的完备的凸闭子集, 则 $\forall x \in V$, $\exists! \hat{x} \in S$, s.t. $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in S} \|x - y\|$, 称 $\hat{x}$ 为 x 在 S 中的最佳近似.

证: 令 $\delta = \inf_{y \in S} \|x - y\|$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists z \in S$, s.t. $\|y - z\| < \delta + \epsilon$.
取 $\epsilon = \frac{1}{n}$, $\exists y_1 \in S$, s.t. $\|x - y_1\| < \delta + \epsilon_1$,
$\cdots$,
$\exists y_n \in S$, s.t. $\|x - y_n\| \leq \delta + \epsilon_n$,
$\cdots$, 于是得序列 $(y_n) \in S$.
令 $s_n = x - y_n$, 则 $(\|s_n\|) \to \delta$.
$\|s_i - s_j\|^2 = 2(\|s_i\|^2 + \|s_j\|) - \|s_i + s_j\|^2$, 其中 $\|s_i + s_j\|^2 = \|x - y_i + x - y_j\|^2 = 4\left\|x - \frac{y_i + y_j}{2}\right\|^2$,
$\because y_i, y_j \in S$ 且 S 凸, $\therefore \frac{y_i+y_j}{2} \in S \Longrightarrow \left\|x - \frac{y_i+y_j}{2}\right\|^2 \geq \delta$
$\Longrightarrow \|s_i - s_j\|^2 \leq 2(\|s_i\|^2 + \|s_j\|^2) - 4\delta^2 \to 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \Longrightarrow \|s_i - s_j\|^2 = \|x - y_i - x + y_j\|^2 = \|y_i - y_j\|^2 \to 0$, 故 (y_n) 为 S 中柯西列.
又 $\because S$ 完备, $\therefore (y_n) \to x \Longrightarrow \|x - \hat{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \delta$.

下证 $\hat{x}$ 的唯一性: 设 $w \in S$, s.t. $\|x - w\| = \delta$.
$\|\hat{x} - w\|^2 = \|\hat{x} - x + x - w\|^2 = 2(\|x - \hat{x}\|^2 + \|x - w\|^2) - \|\hat{x} - x - (x - w)\|^2$, 其中 $\|\hat{x} - x - (x - w)\| = 4\left\|x - \frac{\hat{x}+w}{2}\right\|^2$,
$\because \hat{x}, w \in S$ 且 S 凸, $\therefore \frac{\hat{x}+w}{2} \in S \Longrightarrow \left\|x - \frac{\hat{x}+w}{2}\right\|^2 \geq \delta$
$\Longrightarrow \|\hat{x} - w\|^2 \leq 2(\|x - \hat{x}\|^2 + \|x - w\|^2) - 4\delta^2 = 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \Longrightarrow \|\hat{x} - w\|^2 = 0 \Longrightarrow w = \hat{x}$.

综上, 得证. □

若 S 非凸, 则 $\hat{x}$ 未必唯一.

由上述定理, 可定义 $\min_{y \in S} \|x - y\| \equiv \inf_{y \in S} \|x - y\|$.

定理 13.6 (课本定理13.10): V 为内积向量空间, S 为 V 的完备子空间, 则 $\forall x \in V$, $\exists x$ 在 S 中的最佳近似 $\hat{x}$ 且 $x - \hat{x} \perp S$.

证: S 为子空间 $\iff S$ 中线性运算封闭 $\implies S$ 凸, 由定理 13.5 得, $\exists! x$ 在 S 中的最佳近似 $\hat{x} \in S$, s.t. $\|x-\hat{x}\| = \inf_{y\in S}\|x-y\|$.

下证 $x-\hat{x} \in S$: $\forall y \in S$, $r \in F$, $\|v-ry\|^2 = \langle v-ry, v-ry\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,-ry\rangle + \langle -ry,v\rangle + \langle -ry,-ry\rangle = \|v\|^2 - \bar{r}\langle v,y\rangle - r\langle y,v\rangle + |r|^2\|y\|^2 = \|v\|^2 + \|y\|^2\left(r\bar{r} - \bar{r}\frac{\langle v,y\rangle}{\|y\|^2} - r\frac{\langle y,v\rangle}{\|y\|^2}\right) = \|v\|^2 + \|y\|^2\left(r - \frac{\langle v,y\rangle}{\|y\|^2}\right)\left(\bar{r} - \frac{\langle y,v\rangle}{\|y\|^2}\right) - \|y\|^2\frac{\langle v,y\rangle\langle y,v\rangle}{\|y\|^4} = \|x\|^2 + \|y\|^2\left|r - \frac{\langle v,y\rangle}{\|y\|^2}\right| - \frac{|\langle v,y\rangle|}{\|y\|^2}$.
当 $r = \frac{\langle v,y\rangle}{\|y\|^2}$ 时, $\|v-ry\|^2$ 取最小值, 此时 $\|v-ry\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle v,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$.
特别地, 令 $v = x-\hat{x}$, 则 $\|x-\hat{x}-ry\|^2 \geq \|x-\hat{x}\|^2 - \frac{|\langle x-\hat{x},y\rangle|^2}{\|y\|^2}$.
又 $\because \|x-\hat{x}\| = \inf_{y\in S}\|x-y\|^2 \leq \|x-(\hat{x}+ry)\|^2$, $\therefore \frac{|\langle x-\hat{x},y\rangle|^2}{\|y\|^2} = 0 \implies x-\hat{x} \perp y \implies x-\hat{x} \perp S$.

综上, 得证. □

定理 13.7 投影定理(课本定理13.11): V 为内积向量空间, S 为 V 的完备子集, 则 $V = S \odot S^{\perp}$.
特别地, 若 H 为希尔伯特空间, S 为 H 的闭子空间, 则 $H = S \odot S^{\perp}$.

定理 13.8 (课本定理13.12): S, T 为 V 的子空间, 则

(1) 若 $V = S \odot T$, 则 $V = S \odot T$.

(2) 若正交补 $\exists$, 则唯一. 若 $S \odot T = S \odot T'$, 则 $T = T'$.

证: (1) $\because V = S \odot T$, $\therefore \forall x \in T$, $x \perp S \implies T \subseteq S^{\perp}$.

$\forall w \in S^{\perp} \subseteq V = S \odot T$, $w = w_S + w_T$, 其中 $w_S \in S$, $w_T \in T$.
$\because w \in S^{\perp}$, $w_S \in S$, $\therefore 0 = \langle w_S, w\rangle = \langle w_S, w_S + w_T\rangle = \langle w_S, w_S\rangle + \cancel{\langle w_S, w_T\rangle}0 \implies w_S = 0 \implies w = w_T \in T \implies S^{\perp} \subseteq T$.

综上, 得证.

□

补空间不唯一, 但补空间之间互相同构.

定理 13.9 (课本定理13.13): H 为希尔伯特空间, 则

(1) 若 $A \subseteq H$, 则 $\mathrm{cpan}(A)^{\perp} = A^{\perp\perp}$ [a].

(2) 若 S 为 H 的子空间, 则 $\mathrm{cl}(S) = S^{\perp}$.

(3) 若 K 为 H 的完备子空间, 则 $K = K^{\perp\perp}$.

[a] $\mathrm{cpan}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{span}\, A)$ 为 A 中向量所张成的空间的闭包.

证: (1) 即证 $\mathrm{cpan}(A)^{\perp} = A^{\perp}$: $\because A \subseteq \mathrm{cpan}(A)$, $\therefore \mathrm{cpan}(A)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

$\mathrm{cpan}(A) = \mathrm{span}(A) \cup \mathrm{l}(\mathrm{span}(A))$.
$\forall x \in A$, $x \perp A$.
$\forall y \in \mathrm{span}(A)$, $y = \sum_i r_i x_i$, 其中 $r_i \in F$, $x_i \in A$.
$\because x \perp A$, $\therefore \langle x, x_i\rangle = 0 \forall i \implies \langle x, y\rangle = \langle x, \sum_i r_i x_i\rangle = \sum_i \overline{r_i}\langle x, x_i\rangle = 0 \implies x \perp \mathrm{span}(A)$.
$\forall z \in \mathrm{l}(\mathrm{span}(A))$, $\forall r$, $B(z,r) \cap \mathrm{span}(A)$ 中包含异于 z 的点.
取 $r_n = \frac{1}{n}$, 则可得序列 $(z_n) \in \mathrm{span}(A)$. s.t. $z_n \neq z \forall n$ 且 $B(z_n, z) < r_n$ 即 $(z_n) \to z$.

$\because x \in A^{\perp}$, $\therefore x \perp \operatorname{span}(A)$.
又 $\because (z_n) \in \operatorname{span}(A)$, $\therefore x \perp z_n$ 即 $\langle x, z_n \rangle = 0 \forall n$.
又 $\because \langle x, \rangle : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle x, v \rangle$ 连续, $(z_n) \to z$, $\therefore \langle x, z_n \rangle \to \langle x, z \rangle$.
又 $\because \langle x, z_n \rangle = 0$ 为常序列, $\therefore \langle x, z \rangle = 0 \Longrightarrow x \perp \operatorname{l}(\operatorname{span}(A))$.
$\because x \perp \operatorname{span}(A)$, $x \perp \operatorname{l}(\operatorname{span}(A))$, $\therefore x \perp \operatorname{span}(A) \cup \operatorname{l}(\operatorname{span}(A)) = \operatorname{cpan}(A) \Longrightarrow A^{\perp} \subseteq \operatorname{cpan}(A)$.
综上, $\operatorname{cpan}(A) = A^{\perp\perp} \Longrightarrow H = \operatorname{cpan}(A) \odot \operatorname{cpan}(A)^{\perp} = \operatorname{cpan}(A) \odot A^{\perp} \Longrightarrow \operatorname{cpan}(A) = A^{\perp\perp}$.

(2) 将 (1) 中的 $\operatorname{span}(A)$ 换成 S 即得证.

(3) $\because K$ 为 H 的完备子空间, $\therefore K$ 闭 $\Longrightarrow K = \operatorname{cl}(K)$, 利用 (2) 即得证.

□

利用上述定理可得如下推论:

定理 13.10 (课本定理13.14): H 为希尔伯特空间, $A \subseteq H$, 若 $\operatorname{span}(A)$ 在 H 中稠密, 则 $A^{\perp} = \{0\}$.

证: $\because \operatorname{span}(A)$ 在 H 中稠密, $\therefore \operatorname{cpan}(A) = \operatorname{cl}(\operatorname{span}(A)) = H$.
$\because H$ 为希尔伯特空间, $A \subseteq H$, $\therefore \operatorname{cpan}(A) = A^{\perp\perp} \Longrightarrow H = A^{\perp\perp} \Longrightarrow A^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

□

定理 13.11 (课本定理13.15): $\mathcal{O}$ 为 Hilbert 基, 则 $\mathcal{O}^{\perp} = \{0\}$.

证: $\because \mathcal{O}$ 为 Hilbert 基, $\therefore \mathcal{O}$ 为极大的正交集, 即得证. □

定理 13.12 (课本定理13.25): H 为 Hilbert 空间, $\mathcal{O} = \{o_k \mid k \in K\}$ 为 H 中的正交归一簇, 则 $\forall x \in H$, $\hat{x} = \sum_{k \in K} \langle x, o_k \rangle$ 在 H 中收敛, 为 x 在 $\operatorname{span}(\mathcal{O})$ 中的最佳近似, $\sum_{k \in K} |\langle x, o_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

定理 13.13 (课本定理13.26): H 为 Hilbert 空间, $\mathcal{O} = \{u_k \mid k \in K\}$ 为 H 中的正交归一簇, 则下列叙述等价:

(1) $\mathcal{O}$ 为 Hilbert 基.

(2) $\mathcal{O} = \{0\}$.

(3) $x = \hat{x}$.

(4) $\|x\| = \|\hat{x}\|$.