

# Chapter 3

## 同构定理

### 3.1 商空间

**定义 3.1 商空间:**  $F$  为域,  $V$  为  $F$  上的向量空间,  $S$  为  $V$  的子空间, 则称  $\frac{V}{S} \equiv \{[v] \mid v \in V\}$  为  $F$  的商空间, 其中  $[v] \equiv \{u \in V \mid u - v \in S\} = S + v$ .

$\frac{V}{S}$  为  $F$  上的向量空间.

**证:**  $[u] + [v] = \{a \in V \mid a - u \in S\} + \{b \in V \mid b - v \in S\} = \{(a + b) \in V \mid a - u \in S, b - v \in S\}$ .

$[u + v] = \{w \in V \mid w - (u + v) \in S\}$ .

$\forall (a + b) \in [u] + [v], (a - u) + (b - v) = (a + b) - (u + v) \in S \implies (a + b) \in [u + v] \implies [u] + [v] \subseteq [u + v]$ .

$\forall w \in [u + v], \exists c, d \in S, \text{ s.t. } w = c + d + (u + v) = (c + u) + (d + v), \text{ 其中 } (c + u) \in [u], (d + v) \in [v] \implies w \in [u] + [v] \implies [u + v] \subseteq [u] + [v]$ .

故  $[u] + [v] = [u + v]$ .

假设  $u \sim u', v \sim v'$ , 即  $[u] = [u'], [v] = [v']$ .

$\because [u] = [u'], \therefore u + S = u' + S \implies \exists s_1, s'_1 \in S, \text{ s.t. } u + s_1 = u' + s'_1 \iff u' = u + s_1 - s'_1$ ,

$\because [v] = [v'], \therefore v + S = v' + S \implies \exists s_2, s'_2 \in S, \text{ s.t. } v + s_2 = v' + s'_2 \iff v' = v + s_2 - s'_2$

$\implies u' + v' = u + s_1 - s'_1 + v + s_2 - s'_2$ , 其中  $\because s_1, s'_1, s_2, s'_2 \in S, \therefore s_1 - s'_1 \in S, s_2 - s'_2 \in S$ .

又  $\because V$  是交换群,  $\therefore u' + v' = u + v + (s_1 - s'_1 + s_2 - s'_2)$

$\implies (u' + v') + S = (u + v + (s_1 - s'_1 + s_2 - s'_2)) + S \implies [u' + v'] = [u + v]$ ,

即  $[u] + [v] = [u + v]$  与代表元选取无关, 故  $[u] + [v] = [u + v]$  为运算.

$r[u] = r\{v \in V \mid v - u \in S\} = \{rv \mid v \in V, v - u \in S\} = \{rv \in V \mid rv - ru \in S\} = [ru]$ .

假设  $u \sim u'$ , 即  $[u] = [u']$ .

$\because [u] = [u'], \therefore u + S = u' + S \implies \exists s, s' \in S, \text{ s.t. } u + s = u' + s' \iff u' = u + s - s'$

$\implies ru' = r(u + s - s') = ru + r(s - s')$ , 其中  $s - s' \in S \implies (ru') + S = (ru + r(s - s')) + S = (ru) + S \implies r[u'] = [ru]$ ,

即  $r[u] = [ru]$  与代表元选取无关, 故  $r[u] = [ru]$  为运算.

$(\frac{V}{S}, +)$  满足

(1) **结合律:**  $([v] + [u]) + [w] = [u + v] + [w] = [u + v + w] = [u + (v + w)] = [u] + [v + w] = [u] + ([v] + [w]),$

(2) **有单位元**  $[0]$ :  $[0] + [u] = [0 + u] = [u] = [u + 0] = [u] + [0],$

(3) **有逆元:**  $\forall v \in V, \exists -v, \text{ s.t. } [a] + [-a] = [a + (-a)] = [0] = [(-a) + a] = [-a] + [a],$

且  $[u] + [v] = [u + v] = [v + u] = [v] + [u]$ , 即  $(\frac{V}{S}, +)$  交换, 故  $(\frac{V}{S}, +)$  为交换群. (总之就是因为  $\frac{V}{S}$  中的元素  $[v]$  保持了  $V$  中的元素  $v$  的各种运算性质, 所以  $(V, +)$  是交换群就可以推出  $\frac{V}{S}$  也是交换群.)

$\frac{V}{S}$  满足

- (1)  $r([u + v]) = r([u] + [v]) = r[u] + r[v]$ ,
- (2)  $(r + t)[u] = [(r + t)u] = [ru + tu] = [ru] + [tu] = r[u] + t[u]$ ,
- (3)  $(r \cdot t)[u] = [(r \cdot t)u] = [r(tu)] = r[tu] = r(t[u])$ ,
- (4) 有单位元 1:  $[1][u] = [1u] = [u]$ ,

故  $\frac{V}{S}$  为  $F$  上的向量空间. □

**定理 3.1 (课本定理3.2):** (1)  $\Pi_S : V \rightarrow \frac{V}{S}, v \mapsto [v]$  是线性变换.

(2)  $\Pi_S$  是满线性变换, 即  $\text{Im } \Pi_S = \frac{V}{S}$ .

(3)  $\ker \Pi_S = S$ .

**证:** (1) 显然  $\Pi_S$  是唯一的, 故  $\Pi_S$  是映射.

如前所证,  $V$  和  $\frac{V}{S}$  均为  $F$  上的向量空间.

$\because [u] + [v] = [u + v], r[u] = [ru], \therefore r[u] + t[v] = [ru] + [tv] = [ru + tv]$ , 故  $\Pi_S$  为线性变换.

(2)  $\forall [v] \in \frac{V}{S}, \exists v \in V, \text{ s.t. } \Pi_S(v) = [v]$ , 故  $\Pi_S$  是满线性变换.

(3)  $\ker \Pi_S = \{v \in S \mid \Pi_S(v) = [0]\}$ .

$v \in \ker \Pi_S, \Pi_S(v) = [v] = v + S = [0] = 0 + S = S \iff v \in S$ , 故  $\ker \Pi_S \subseteq S$ . □

**定理 3.2 (课本定理3.3):** (1)  $S, T$  为  $V$  的子空间且  $S \subseteq T$ , 则  $\frac{T}{S}$  是  $\frac{V}{S}$  的子空间.

(2) 取  $X$  为  $\frac{V}{S}$  的子空间, 则  $\exists V$  的子空间  $T$ , s.t.  $\emptyset \neq S \subseteq T, \frac{T}{S} = X$ .

**证:** (1)  $\frac{T}{S} = \{[u] \mid u \in T\}, \frac{V}{S} = \{[v] \mid v \in V\}$ .

$\forall [u] \in \frac{T}{S}, u \in T, \because T$  是  $V$  的子空间,  $\therefore u \in V \implies [u] \in \frac{V}{S}$ , 故  $\frac{T}{S} \subseteq \frac{V}{S}$ .

$\forall [u_1], [u_2] \in \frac{T}{S}, \forall r, t \in F, r[u_1] + t[u_2] = [ru_1 + tu_2]$ .

$\because u_1, u_2 \in T, \therefore ru_1 + tu_2 \in T \implies [ru_1 + tu_2] \in \frac{T}{S}$ , 故  $\frac{T}{S}$  为向量空间.

综上, 得证.

(2) 取  $T = \cup_{[v] \in X} [v]$ . 显然  $T \subseteq V$ .

$\forall u, v \in T$ , 根据  $T$  的定义,  $[u], [v] \in X$ .

$\because X$  为子空间,  $\therefore r[u] + t[v] = [ru + tv] \in X \subseteq T = \cup_{[v] \in X} [v] \implies ru + tv \in T$ .

故  $T$  为  $V$  的子空间.

$\because S = [0] \in X, \therefore S \subseteq T = \cup_{[v] \in X} [v]$ .

$\frac{T}{S} = \{[v] = S + v \mid v \in T\}$ .

$\forall [u] \in \frac{T}{S}, u \in T = \cup_{[v] \in X} [v] \implies [u] \in X \implies \frac{T}{S} \subseteq X$ .

$$\forall [u] \in X, u \in T = \cap_{[v] \in X} [v] \implies [u] \in \frac{T}{S} \implies X \subseteq \frac{T}{S}.$$

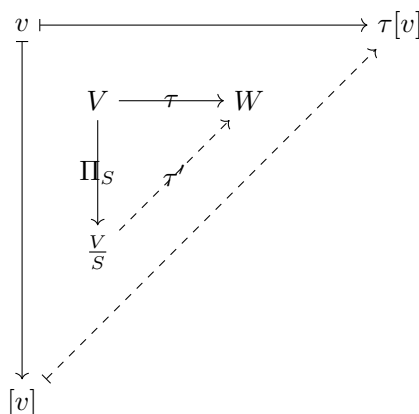
$$\text{故 } \frac{T}{S} = X.$$

综上, 得证.

□

## 3.2 第一同构定理

**定理 3.3 第一同态基本定理(课本定理3.4):**  $S$  是  $V$  的子空间,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ ,



若  $S \subseteq \ker \tau$ , 即  $\ker \Pi_S \subseteq \ker \tau$ , 则  $\exists! \tau' : \frac{V}{S} \rightarrow W$ , s.t.  $\tau = \tau' \circ \Pi_S$ , 即  $\forall v \in V, \tau(v) = \tau'([v])$ , 此时上图可交换,  $\ker \tau' = \frac{\ker \tau}{S}$ ,  $\text{Im } \tau' = \text{Im } \tau$ .

<sup>a</sup>该定理回答了  $\tau'$  的存在性 (即  $\tau'$  在什么条件下存在) 的问题. 之所以称“基本”, 是因为若将该定理中的向量空间换成其他代数结构, 定理仍然成立.

**证:**  $\tau'$  的唯一性要求, 若  $[u] = [v]$ , 则  $\tau'([u]) = \tau'([v])$ ,

即若  $u \sim v$ , 则  $\tau(u) = \tau(v)$ ,

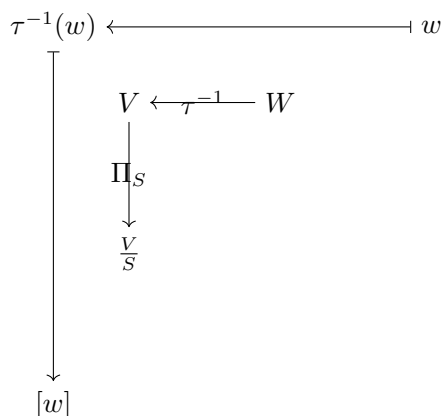
即若  $u - v \in S$ , 则  $\tau(u - v) = 0$ ,

即  $S \subseteq \ker \tau$ .

此时,  $\ker \tau' = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau'([v]) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau(v) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid v \in \ker \tau\} = \frac{\ker \tau}{S}$ ,

$\text{Im } \tau' = \{\tau'([v]) \mid [v] \in \frac{V}{S}\} = \{\tau'([v]) \mid v \in V\} = \{\tau(v) \mid v \in V\} = \text{Im } \tau$  ( $\because \Pi_S$  满射,  $\therefore \forall [v] \in \frac{V}{S}, \exists v \in V$ ). □

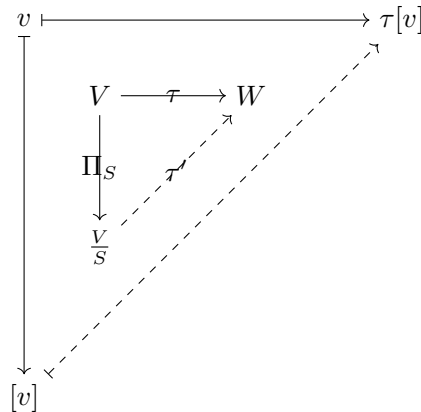
那么, 若  $\tau$  双射, 即  $\exists \tau^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ , 且  $\ker \tau = S$ , 如何?



此时,  $\ker \tau' = \frac{\ker \tau}{S} = \{[v] \mid v \in \ker \tau\} = \{[v] \mid v \in S\} = \{[0]\} \implies \tau'$  单射.

由上面关于第一同态基本定理的延伸讨论我们得到:

**定理 3.4 第一同构定理(课本定理3.5):** 若  $\ker \tau = S$ , 则  $\tau'$  单射,  $\frac{V}{\ker \tau} = \frac{V}{S} \approx \text{Im } \tau$ .



证:  $V = \ker \tau \oplus (\ker \tau)^c$ , 其中  $(\ker \tau)^c \approx \text{Im } \tau \implies \frac{V}{\ker \tau} \approx (\ker \tau)^c \approx \text{Im } \tau$ . □

更一般地, 若  $V = S \oplus T$ , 则  $\frac{V}{S} \approx T, \frac{V}{T} \approx S$ .

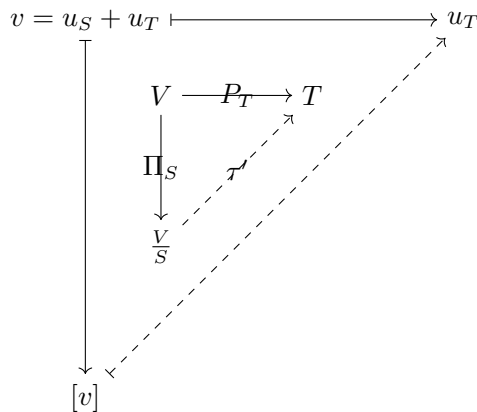
证:  $\forall v \in V, v = u_S + u_T$ , 其中  $u_S \in S, u_T \in T$ .

令投影映射  $P_T: V \rightarrow T, v = u_S + u_T \mapsto u_T$ .

$\ker P_T = \{v \in V \mid P_T(v) = 0\} = S = [0] = \ker \Pi_S$ .

由第一同构定理 (定理 3.4),  $\exists! \tau'$  单射, s.t.  $P_T = \tau' \circ \Pi_S$ .

又  $\because \text{Im } P_T = T$ , 即  $P_T$  满射,  $\therefore \tau'$  满射  $\implies \tau'$  同构  $\implies \frac{V}{S} \approx T$ .



同理可证  $\frac{V}{T} \approx S$ . □

### 3.3 线性泛函

**定义 3.2 对偶(空间)和线性泛函:**  $V^* = \mathcal{L}(V, F)$  为  $F$  上的向量空间, 称  $V^*$  为  $V$  的对偶(空间).  
若  $f \in V^*$ , 则称  $f$  为线性泛函.

(1)  $\ker V^*$  为  $F$  上的向量空间.

(2)  $\because \dim F = 1, \text{Im } f \subseteq F, \therefore \dim \text{Im } f \leq 1, \dim \ker f \geq \dim V - 1$ .

(3)  $\because$  必有零映射  $0 \in V^*, 0: V \rightarrow F, v \mapsto 0, \therefore V^*$  非空.

(4) 若  $\dim \operatorname{Im} f = 0$ , 则  $\operatorname{Im} f = \{0\}$ ,  $f$  为零映射.

(5) 若  $\dim \operatorname{Im} f = 1$ , 则  $\operatorname{Im} f = \langle r \rangle$ , 其中  $0 \neq r \in F \implies \operatorname{Im} f = F$ .

由反证法易证, 若  $v \in f^{-1}(r) = \{v \in V \mid f(v) = r\}$ , 其中  $r \neq 0$ , 则  $v \neq 0$ , 且必有  $f(\langle v \rangle^c) = \{0\}$ .

证明 (5) 的末句:

证: 假设  $\exists u \in \langle v \rangle^c$ , s.t.  $f(u) \neq 0$ .

$$f\left(\frac{ru}{f(u)}\right) = r \implies \frac{ru}{f(u)} \in f^{-1}(r).$$

又  $\because u \in \langle v \rangle^c$ ,  $\therefore \dim f^{-1}(r) \geq 2$ , 这与  $f^{-1}(r) \subseteq (\ker f)^c$ ,  $\dim(\ker f)^c = \dim \operatorname{Im} f \leq 1$  矛盾,

故假设错误,  $\forall u \in \langle v \rangle^c$ ,  $f(u) = 0 \implies f(\langle v \rangle^c) = \{0\}$ . □

**定理 3.5 (课本定理3.11):** (1)  $\forall 0 \neq v \in V$ ,  $\exists 0 \neq f \in V^*$ , s.t.  $f(v) \neq 0$ .

(2)  $v = 0 \iff \forall f \in V^*, f(v) = 0$ .

(3)  $f \in V^*$ , 若  $f(x) \neq 0$ , 则  $V = \ker f \oplus \langle x \rangle$ , 即  $\operatorname{Im} f \approx \langle x \rangle$ .

(4)  $0 \neq f, g \in V^*, \ker f = \ker g \iff \exists 0 \neq \lambda \in F$ , s.t.  $f = \lambda g$ .

证: (1)  $v \neq 0$ , 则  $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^c$ , 其中  $\langle v \rangle = \{rv \mid r \in F\}$ .

令  $f: V \rightarrow F$ ,  $rv + w \mapsto r$ , 其中  $rv \in \langle v \rangle$ ,  $w \in \langle v \rangle^c$ , 故  $f(v) = 1$ ,  $f \in V^*$ .

下证  $f$  为线性变换:  $\forall u_1, u_2 \in V$ ,  $u_1 = r_1v + w_1$ ,  $u_2 = r_2v + w_2$ , 其中  $w_1, w_2 \in \langle v \rangle^c$ ,

$$f(ru_1 + tu_2) = f(r(r_1v + w_1) + t(r_2v + w_2)) = f((rr_1v + rw_1) + (tr_2v + tw_2)) = f((rr_1 + tr_2)v + (rw_1 + tw_2)) = rr_1 + tr_2 = rf(r_1v + w_1) + tf(r_2v + w_2) = rf(u_1) + tf(u_2).$$

故得证.

注意此处  $f$  的构造并非唯一: 构造  $f: V \rightarrow F$ ,  $rv + u \mapsto rt$ , 其中  $u \in \langle v \rangle^c$ , 同理可得证.

(2) “ $\implies$ ”: 若  $v = 0$ , 则  $\forall u \in V$ ,  $f(v) + f(u) = f(v + u) = f(u) \implies f(v) = 0$ .

“ $\impliedby$ ”: 假设  $v \neq 0$ , 则由 (1),  $\exists f \in V^*$ , s.t.  $f(v) \neq 0$ , 矛盾, 故假设错误,  $v = 0$ .

(3)  $f(x) \neq 0 \implies \operatorname{Im} f \neq \{0\} \implies \dim \operatorname{Im} f \neq 0 \implies \dim(\ker f)^c = \dim \operatorname{Im} f = 1$

$\implies \exists v \in V$ , s.t.  $\ker f^c = \langle v \rangle \implies V = \ker f \oplus \ker f^c = \langle v \rangle^c \oplus \langle v \rangle$  且  $\operatorname{Im} f \approx \ker f^c = \langle v \rangle$ .  $\because f(x) \neq 0$ ,  $\therefore x = rv + w$ , 其中  $rv \in \langle v \rangle$ ,  $w \in \langle v \rangle^c \implies \langle x \rangle \approx \langle v \rangle \implies V = \ker f \oplus \langle x \rangle$  且  $\operatorname{Im} f \approx \langle x \rangle$ .

(4) “ $\implies$ ”: 令  $K = \ker f = \ker g$ .

$\forall x \notin K$ , 由 (3) 有,  $V = K \oplus \langle x \rangle$ .

取  $\lambda = \frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $\forall v \in V$ ,  $x = rx + w$ , 其中  $rx \in \langle x \rangle$ ,  $w \in K$

$$\implies f(v) = f(rx + w) = rf(x) = r\frac{f(x)}{g(x)}g(x) = r\lambda g(x) = \lambda g(rx) = \lambda g(rx + w) = \lambda g(v) \implies f = \lambda g.$$

“ $\impliedby$ ”: 若  $\exists 0 \neq \lambda \in F$ , s.t.  $f = \lambda g$ , 则显然  $\ker f = \ker g$ . □

## 3.4 对偶基

**定义 3.3 对偶基:**  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  为  $V$  的基, 则  $\forall i, \exists b_i^* \in V^*$ , s.t.  $b_i^*(b_i) = 1$ ,  $b_i^*(b_j) = 0 \forall i \neq j$ , 即  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ ,

从而可构造出  $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subseteq V^*$ , 称为  $\mathcal{B}$  的对偶基.

**定理 3.6 (课本定理3.12):** (1)  $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$  线性无关.

(2)  $\dim V < \infty$ , 则  $\mathcal{B}^*$  是  $V^*$  的基.

**证:** (1)  $\sum_{i=1}^m r_i b_i^* = 0 \implies \forall v \in V, \sum_{i=1}^m r_i b_i^*(v) = (\sum_{i=1}^m r_i b_i^*)(v) = 0(v) = 0$ .

取  $v = b_j$ , 则  $\sum_{i=1}^m r_i b_i^*(b_j) = \sum_{i=1}^m r_i \delta_{ij} = r_j = 0$ .

对各个  $b_j$  如法炮制, 从而可得  $r_j = 0 \forall i$ , 故得证.

(2)  $\forall f \in V^*, \forall v \in V, \because \mathcal{B}$  是  $V$  的基,  $\therefore v = \sum_{i=1}^n r_i b_i$

$\implies b_j^*(v) = b_j^*(\sum_{i=1}^n r_i b_i) = \sum_{i=1}^n r_i b_j^*(b_i) = \sum_{i=1}^n r_i \delta_{ij} = r_j$

回代得  $v = \sum_{i=1}^n b_i^*(v) b_i$

$\implies f(v) = f(\sum_{i=1}^n b_i^*(v) b_i) = \sum_{i=1}^n b_i^*(v) f(b_i) = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*(v) = (\sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*)(v)$ , 此处  $b_i^*(v), f(b_i) \in F$ ,

因此可交换位置, 我们可视  $\{b_i^*(v)\}$  为基,  $f(b_i)$  为  $f(v)$  在这组基上的展开系数

$\implies f = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*$ , 即  $f$  可展开为  $\{\mathcal{B}^*\}$  的线性表示, 结合 (1) 得证. □

仿照上面的方法,  $\forall v \in V$ , 我们都可构造  $v^* \in V^*$ , s.t.  $v^*(v) = 1, \forall u_2 \in \langle v \rangle^c, v^*(u_2) = 0$ , 从而有映射  $V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto v^*, 0 \mapsto 0$  (零映射).

$V^*$  本身也是向量空间.

**定义 3.4 二重对偶(空间):**  $V^{**} = \mathcal{L}(V^*, F)$  称为二重对偶(空间), 其中的元素为  $v^{**} : V^* \rightarrow F, f \mapsto v^{**}(f) = f(v)$ .

$V \rightarrow V^* \rightarrow V^{**}, v \mapsto v^* \mapsto v^{**}, b_i \mapsto b_i^* \mapsto b_i^{**}$ , 满足  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}, b_i^{**}(b_j^*) = b_j^*(b_i)$ , 两个映射复合得  $\tau : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto v^{**}$ .

(1)  $\tau$  是映射.

(2)  $\tau$  是线性变换.

(3)  $\ker \tau = \{v \in V \mid \tau(v) = 0\} = \{0\} \iff \tau$  单射.

**证:** (1) 若  $u = v \in V$ , 则  $\forall f \in V^*, u^{**}(f) = f(u) = f(v) = v^{**}(f)$ , 即得证.

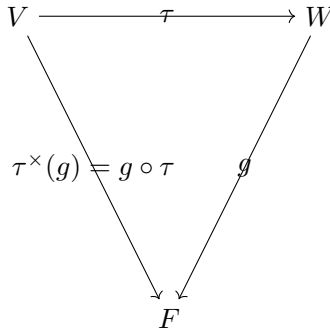
(2)  $\forall f \in V^*, (\tau(ru + tv))(f) = (ru + tv)^{**}(f) = f(ru + tv) = rf(u) + tf(v) = ru^{**}(f) + tv^{**}(f) = r\tau(u)(f) + t\tau(v)(f) = (r\tau(u) + t\tau(v))(f) \implies \tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$ , 结合 (1) 得证.

(3)  $\tau(v) = 0 \implies \forall f \in V^*, v^{**}(f) = 0 \implies f(v) = 0 \implies$  (定理 3.5 (1))  $v = 0$ , 即得证. □

**引理 3.1 (课本引理3.13):** 若  $\dim V < \infty$ , 则  $\dim V^* = \dim V^{**}$ ,  $V^{**}$  与  $V$  同构, 一个线性空间的二重对偶就回到自身, 故实际上套娃式的  $V^{****}$  是没有意义的, 此处我们就写成  $V^{**} = V$ .

## 3.5 伴随算子

**定义 3.5 伴随算子:** 由线性变换  $\tau: V \rightarrow W$  可引出伴随算子  $\tau^\times: W^* \rightarrow V^*$ ,  $g \mapsto \tau^\times(g) = g \circ \tau$ .



(1)  $\tau^\times$  是映射.

(2)  $\tau^\times$  是线性变换.

**证:** (1) 若  $f = g \in W^*$ , 则  $\tau^\times(f) = f \circ \tau = g \circ \tau = \tau^\times(g)$ , 故得证.

(2)  $\tau^\times(rg_1 + tg_2) = (rg_1 + tg_2) \circ \tau = rg_1 \circ \tau + tg_2 \circ \tau = r\tau^\times(g_1) + t\tau^\times(g_2)$ , 结合 (1) 得证.

□

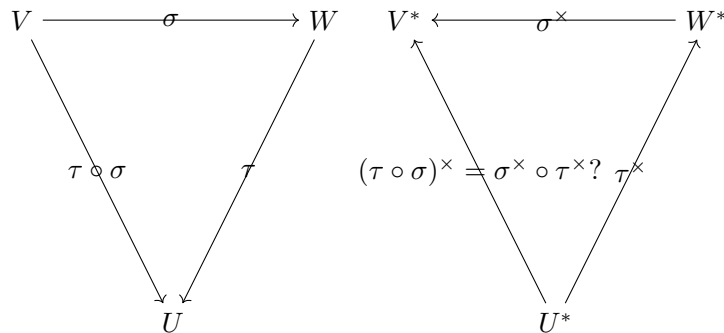
**定理 3.7 (课本定理3.18):** (1)  $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W), \forall a, b \in F, (a\tau + b\sigma)^\times = a\tau^\times + b\sigma^\times$ .

(2)  $\sigma \in \mathcal{L}(V, W), \tau \in \mathcal{L}(W, U)$ , 则  $(\tau \circ \sigma)^\times = \sigma^\times \circ \tau^\times$ .

(3)  $\tau \in \mathcal{L}(V)$  可逆  $\implies (\tau^{-1})^\times = (\tau^\times)^{-1}$ .

**证:** (1)  $\forall f \in W^*, (a\tau + b\sigma)^\times(f) = f \circ (a\tau + b\sigma) = af \circ \tau + bf \circ \sigma = a\tau^\times(f) + b\sigma^\times(f) = (a\tau^\times + b\sigma^\times)(f)$ , 即得证.

(2)  $\forall f \in U^*, (\tau \circ \sigma)^\times(f) = f \circ (\tau \circ \sigma) = (f \circ \tau) \circ \sigma = \sigma^\times(f \circ \tau) = \sigma^\times(\tau^\times(f)) = (\sigma^\times \circ \tau^\times)(f)$ , 即得证.



(3)  $1^\times = (\tau \circ \tau^{-1})^\times = (\tau^{-1})^\times \circ \tau^\times \implies (\tau^{-1})^\times = (\tau^\times)^{-1}$ .

□

**定理 3.8 (课本定理3.18):**  $\dim V < \infty, \dim W < \infty, \tau \in \mathcal{L}(V, W), \tau^\times \in \mathcal{L}(W^*, V^*), \tau^{\times \times} \in \mathcal{L}(V^{**}, W^{**}) = \mathcal{L}(V, W)$ , 则  $\tau^{\times \times} = \tau$ .

**定理 3.9 (课本定理3.22):**  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ , 其中  $\dim V < \infty$ ,  $\dim W < \infty$ ,  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  分别是  $V$  和  $W$  的定序基,  $\mathcal{B}^*$  和  $\mathcal{C}^*$  分别是  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  的对偶基, 则  $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*} = ([\tau]_{\mathcal{B} \mathcal{C}})^T$ .

**证:** 设  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ ,  $V$  的定序基  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $W$  的定序基  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$  的矩阵表示为  $[\tau]_{\mathcal{B} \mathcal{C}} = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\tau^\times \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$  的矩阵表示为  $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*} = [\beta_{ij}]_{n \times m}$ .

$$[\tau]_{\mathcal{B} \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } [\tau(b_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}, \text{ 即 } \tau(b_i) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} c_k.$$

$$[\tau^\times]_{\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} [\tau^\times(c_1^*)]_{\mathcal{B}^*} & \cdots & [\tau^\times(c_m^*)]_{\mathcal{B}^*} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } [\tau^\times(c_i^*)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{pmatrix}, \text{ 即 } \tau^\times(c_i^*) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*.$$

又由  $\tau^\times$  的定义,  $\tau^\times(c_i^*) = c_i^* \circ \tau$ , 故将该复合函数作用于  $b_j$  上有  $c_i^*(\tau(b_j)) = (c_i^* \circ \tau)(b_j) = (\tau^\times(c_i^*))(b_j) = (\sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*)(b_j) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*(b_j) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} \delta_{lj} = \beta_{ji} \implies \beta_{ji} = c_i^*(\tau(b_j))$ ,

代入上面的  $\tau(b_j)$  的展开式得  $\beta_{ji} = c_i^*(\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_i^*(c_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}$ , 故得证.  $\square$