Chapter 1

向量空间

1.1 向量空间

定义 1.1 向量空间**:** 交换群 $(V, +)$ 和域 F, 数乘映射 $\alpha : F \times V \to V$, 若满足

$\alpha(r, u + v) = \alpha(r, u) + \alpha(r, v)$ (可简写为 $r(u + v) = ru + rv$),

(2) $\alpha(r + t, u) = \alpha(r, u) + \alpha(t, u)$ (可简写为 $(r + t)u = ru + tu$),

(3) $\alpha(r \cdot t, u) = \alpha(r, \alpha(t, u))$ (可简写为 $(rt)u = r(tu)$),

(4) **有单位元**: $\exists 1 \in F$, s.t. $\alpha(1, u) = u$ (可简写为 $1u = u$),

则称 V 是 F 上的**向量空间**.

例 1.1 直角坐标系**:** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 为域, $(\mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, +)$ 为交换群, 满足

(1) $r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)$,

(2) $(r + t)(x, y) = ((r + t)x, (r + t)y) = (rx + tx, ry + ty) = (rx, ry) + (tx, ty) = r(x, y) + t(x, y)$,

(3) $(rt)(x, y) = (rtx, rty) = r(tx, ty) = r(t(x, y))$,

(4) $1(x, y) = (x, y)$,

故 $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. □

$0v = 0$. (注意两个 0 的区别, 等号左边的 0 为域 F 中的零元, 等号右边的 0 为 V 中的零向量.)

证: $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \Longrightarrow 0v = 0$. □

$r \in F$, $0 \in V$, 则 $r0 = 0$.

证: $r0 = r(0 + 0) = r0 + r0 \Longrightarrow r0 = 0$. □

$-1v = -v$.

证: $-1v = -(1v) = -v$. □

例 1.2: $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.
$\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间.
$\because$ 对 $c \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^2$, $cv \notin \mathbb{R}^2$, $\therefore \mathbb{R}^2$ 不是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. □

例 1.3: $F^n \equiv \{(r_1,\cdots,r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1,\cdots,r_n)+(l_1,\cdots,l_n)=(r_1+l_1,\cdots,r_n+l_n)$, $r(r_1,\cdots,r_n)=(rr_1,\cdots,rr_n)$, 故 F^n 为 F 上的向量空间. □

证: $\because$ $r((r_1,\cdots,r_n)+(l_1,\cdots,l_n)) = r(r_1+l_1,\cdots,r_n+l_n) = (rr_1+rl_1,\cdots,rr_n+rl_n) = (rr_1,\cdots,rr_n)+(rl_1,\cdots,rl_n)=r(r_1,\cdots,r_n)+r(l_1,\cdots,l_n)$,
且 $(r+t)(r_1,\cdots,r_n)=((r+t)r_1,\cdots,(r+t)r_n)=(rr_1+tr_1,\cdots,rr_n+tr_n)=(rr_1,\cdots,rr_n)+(tr_1,\cdots,tr_n)=r(r_1,\cdots,r_n)+t(r_1,\cdots,r_n)$,
且 $(r\cdot t)(r_1,\cdots,r_n)=(rtr_1,\cdots,rtr_n)=r(tr_1,\cdots,tr_n)=r(t(r_1,\cdots,r_n))$,
且 $1(r_1,\cdots,r_n)=(r_1,\cdots,r_n)$,
$\therefore F^n$ 为 F 上的向量空间. □

1.2 子空间

定义 1.2 子空间: $\emptyset \neq S \subseteq V$, 若 S 为 V 的子群, 且在相同的数乘下构成 F 上的向量空间, 则称 S 是 V 的子空间.

定理 1.1 子空间的判定(课本定理1.1): S 为 V 的子空间 $\iff \forall a,b \in S, \forall r,t \in F$, $ra+tb \in S$ (即线性运算封闭).

证: "$\Longrightarrow$": $\because S$ 为 V 的子空间, $\therefore S$ 构成 F 上的向量空间 $\Longrightarrow ra \in S$, $tb \in S$.
$\because S$ 为 V 的子空间, S 为 V 的子群 $\Longrightarrow ra+tb \in S$.

"$\Longleftarrow$": 令 $r=1$, $t=-1$, 有 $a-b \in S \Longrightarrow S < V$.
令 $t=0$, 有 $ra \in S$, 故 S 为 V 的子空间.

综上, 得证. □

子空间的交是子空间.

证: 设 $S_1,\cdots,S_n$ 为 V 的子空间, 则 $S_1,\cdots,S_n$ 为 V 的子群 $\Longrightarrow \cap_{i=1}^n S_i$ 为 V 的子群.

$\forall u,v \in \cap_{i=1}^n S_i$, $\forall k$, $u,v \in S_k \Longrightarrow u,v$ 满足与 F 中向量相同的数乘映射.

综上, 得证. □

子空间的并未必是子空间.

证: $\because$ 子群的并未必是子群, $\therefore$ 子空间的并未必是子空间. □

若 S,T 是 V 的子空间, 则 $S+T \equiv \{u+v \mid u \in S, v \in T\}$ 为 V 的子空间.

证: $\forall w_1,w_2 \in S+T$, $r,t \in F$,
$w_1 \in S+T \Longrightarrow w_1=u_1+v_1$, $u_1 \in S$, $v_1 \in T$,
$w_2 \in S+T \Longrightarrow w_2=u_2+v_2$, $u_2 \in S$, $v_2 \in T$
$\Longrightarrow rw_1+tw_2=r(u_1+v_1)+t(u_2+v_2)=(ru_1+tu_2)+(rv_1+tv_2)$, 其中 $ru_1+tu_2 \in S$, $rv_1+tv_2 \in T \Longrightarrow rw_1+tw_2 \in S+T$, 故 $S+T$ 为 V 的子空间. □

1.3 生成集和线性无关

定义 1.3 生成子空间和生成集: $\emptyset \neq S \subseteq V$, S 的**生成子空间** $\langle S \rangle \equiv$ 包含 S 的最小子空间 $= \{\sum_{i=1}^{n} r_i u_i \mid r_i \in F, u_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$, 其中称 S 为**生成集**.

例 1.4: 向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中,
$S_x = \langle\{(1,0)\}\rangle = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = x$ 轴,
$S_y = \langle\{(0,1)\}\rangle = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = y$ 轴,
$\langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle = \mathbb{R}^2$, 故对同一生成子空间, 生成集不唯一. □

定义 1.4 线性无关: 非零元 $u_1, \cdots, u_m$, 若 $r_1u_1 + \cdots + \cdots + r_mu_m = 0 \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_m = 0$, 则称 $u_1, \cdots, u_m$ **线性无关**.
若 S 中任意有限个元素线性无关, 则称 S **线性无关**.

例 1.5: $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 线性无关. □

证: $r_1(1,0) + r_2(0,1) = (r_1, r_2) = 0 = (0,0) \Longrightarrow r_1 = 0$, $r_2 = 0$. □

例 1.6: $\mathbb{R}^2$ 上线性无关, 即两非零元夹角非零. □

例 1.7: $\mathbb{R}^3$ 上三个向量线性无关, 即其立体角均非零且不共面. □

单个非零元 v 线性无关.

证: $rv = 0$ 且 $v \neq 0 \Longrightarrow r = 0$, 故 v 线性无关. □

定义 1.5 线性相关: $u_1, \cdots, u_m$, 若 $\exists$ 不全为零的 $r_1, \cdots, r_m$, s.t. $\sum_{i=1}^{m} r_i u_i = 0$, 则称 $u_1, \cdots, u_m$ **线性相关**.

若 u, v 线性相关, 则两者共线.

证: $\because u, v$ 线性无关, $\therefore \exists r, t$ 不全为零, s.t. $ru + tv = 0 \Longrightarrow ru = -tv$.
无妨设 $0 \neq r \in F$, 则 $ru = -tv \Longrightarrow u = r^{-1}ru = -r^{-1}tv = -\frac{u}{r}v$ □

定义 1.6 线性表示: v 可由 $u_1, \cdots, u_n$ **线性表示** $\Longleftrightarrow \exists r_1, \cdots, r_n \in F$, s.t. $v = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i$.

定理 1.2 (课本定理1.6): S 线性无关 $\Longleftrightarrow \langle S \rangle$ 中的每个向量可由 S 中元素唯一地线性表示 $\Longleftrightarrow S$ 中任一向量不能由 S 中其余向量线性表示.

证: 设 $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$.

第一个 "$\Longrightarrow$": $v \in \langle S \rangle$, 则 v 可由 S 中的元素线性表示, 即 $\exists r_1, \cdots, r_m$, s.t. $v = r_1u_1 + \cdots + r_mu_m$.
要证这种线性表示是唯一的, 假设 v 的另一种线性表示为 $v = r_1'u_1 + \cdots + r_m'u_m$.
$v - v = (r_1 - r_1')u_1 + \cdots + (r_m - r_m')u_m = 0$, 又 $\because S$ 线性无关, 即 $u_1, \cdots, u_m$ 线性无关, $\therefore r_1 - r_1' = \cdots = r_m - r_m' = 0 \Longrightarrow r_1' = r_1, \cdots, r_m' = r_m$, 故两种线性表示相同.

第一个 "$\Longleftarrow$": $0 \in \langle S \rangle$, $\because 0 = 0u_1 + \cdots + 0u_m$ 是且是 0 唯一的线性表示, $\therefore S$ 线性无关.

第二个 "$\Longrightarrow$": 不妨假设 u_1 可由 $u_2, \cdots, u_m$ 线性表示, 即 $u_1 = t_2u_2 + \cdots + t_mu_m$.
若 $r_1u_1 + \cdots + r_mu_m = 0$, 则 $r_1 = \cdots = r_m = 0$ 或 $r_1 \neq 0$, $r_2 = -r_1t_2, \cdots, r_m = -r_mt_m$, 从而 S 线性相关, 矛盾, 故假设错误, u_1 不可由 $u_2, \cdots, u_m$ 线性表示.

第二个 "$\Longleftarrow$": 假设 S 线性相关, 则 $\exists$ 不全为零的 $r_1, \cdots, r_m$, s.t. $r_1u_1 + \cdots + r_mu_m = 0$, 不妨设 r_1 非零, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1}u_2 - \cdots - \frac{r_m}{r_1}u_m$, 即 u_1 可由 S 中其余向量线性表示, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关. □

定理 1.3 (课本定理1.7): $\emptyset \neq S \subseteq V$, 下列等价:

(1) S 线性无关, 且 $V = \langle S \rangle$.

(2) $\forall v \in V$, 可用 S 中元素唯一地线性表示.

(3) S 是 V 的极小生成集 (即 S 去除任意元素都无法生成 V, 或 S 的任意真子集都无法生成 V).

(4) S 是 V 的极大线性无关集 (即 S 增加任意元素都线性相关, $\forall u \in V$ 且 $u \notin S$, $S \cup \{u\}$ 线性相关).

证: 由定理 1.2 证得 (1)(2) 等价.

设 $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$.

(1)$\Longrightarrow$(3): 假设 $\exists S' \subsetneq S$, s.t. $V = \langle S' \rangle$, 则 $\forall v \in S - S' \subseteq V$, $v = \sum_{i=1}^{m} r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S'$, $m \in \mathbb{N}$, 即 v 可由 S 中的部分向量线性表示, 与 S 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是 V 的极小生成集.

(3)$\Longrightarrow$(1): S 为 V 的生成集, 即 $V = \langle S \rangle$.
假设 S 线性相关, 即 $\exists r_1, \cdots, r_m$ 不全为零, s.t. $\sum_{i=1}^{m} r_i u_i = 0$, 不妨设 $r_1 \neq 0$, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 + \cdots + \frac{r_m}{r_1} u_m$, 则 $S - \{u_1\}$ 仍可以生成 V, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关.

(1)$\Longrightarrow$(4): 假设 S 不是极大线性无关集, 则 $\exists v \in V \backslash \langle S \rangle$, s.t. $S \cup \{v\}$ 线性无关.
又 $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore v = \sum_{i=1}^{m} r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S$, $m \in \mathbb{N}$, 即线性无关集 $S \cup \{v\}$ 中的向量 v 可由其中的部分向量线性表示, 与 $S \cup \{v\}$ 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是极大线性无关集.

(4)$\Longrightarrow$(1): $\because S$ 是 V 的极大线性无关集, $\therefore S$ 线性无关.
假设 $V \neq \langle S \rangle$, $\exists v \in V \backslash \langle S \rangle$, s.t. v 无法由 S 中的元素线性表示 $\Longrightarrow S \cup \{v\}$ 为线性无关集, 与 S 为最大线性无关集矛盾, 故假设错误, $V = \langle S \rangle$.

综上, 得证. □

定义 1.7 基: 任何生成向量空间 V 的线性无关集. 基的阶数称为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

定理 1.4 (课本定理1.12): 向量空间的任何基都有相同的阶, 即 $\dim V$ 不依赖于基的选取.

例 1.8: $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 为 F^n 的一组基. □

证: $r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) = 0 \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$, 故 $e_1, \cdots, e_n$ 线性无关.
又 $\langle \{e_1, \cdots, e_n\} \rangle = \{r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F$, 其中 $i = 1, \cdots, n\} = F$, 故得证. □

找基的方法:

(1) 若 $0 \neq u_1 \in V$, 则 $\{u_1\}$ 线性无关.

(2) 若 $u_2 \in V \backslash \langle u_1 \rangle$ 且 u_2 与 u_1 线性无关, 则 $\{u_1, u_2\}$ 线性无关.

(3) 重复以上操作, 直至无法找到新的线性无关元素, 即得到极大线性无关集, 此即向量空间的基.

定理 1.5 (课本定理1.9): 线性无关集 $I \subseteq V$, S 是 V 的生成集, 且 $I \subseteq S$, 则 $\exists V$ 的基 $\mathcal{B}$, s.t. $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.

1.4 直和

定义 1.8 直和: (1) **外直和**: 若 $V_1, \cdots, V_n$ 是 F 上的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \equiv \{(v_1, \cdots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$, 满足

- $(v_1, \cdots, v_n) + (u_1, \cdots, u_n) = (v_1 + u_1, \cdots, v_n + u_n)$,
- $\forall r \in F$, $r(v_1, \cdots, v_n) = (rv_1, \cdots, rv_n)$,

则$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 F 的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 $V_1, \cdots, V_n$ 的**外直和**.

(2) **内直和**: V 是 F 上的向量空间, $V_1, \cdots, V_n$ 是 V 的子空间, 满足

- $V = \sum_{i=1}^n V_i$, 其中 $v_i \in V_i$,
- $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$,

则 V 为 $V_1, \cdots, V_m$ 的**内直和**, 记作 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, 称 V_i 为**直和项**.

内/外直和的关系: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, $V_1' = \{(v_1, 0, \cdots, 0) \mid v_i \in V_i\}$, $\cdots$, $V_m' = \{(0, 0, \cdots, v_m) \mid v_m \in V_m\}$ 是 V 的子空间, 则 $V = \sum_{i=1}^n V_i'$ 且 $V_i' \cap (\cup_{j \neq i} V_j') = \{0\} \Longrightarrow V_i = \bigoplus_{i=1}^m V_i'$, 故内/外直和是等价的, 以下我们不明确区分内/外直和, 均用内直和.

例 1.9: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y$. □

定理 1.6 (课本定理1.5): $\{V_i \mid i \in J\}$ 是 V 的子空间集合, $V = \sum_{i \in J} V_i$, 则下列等价:

(1) $V = \bigoplus_{i \in J} V_i$.

(2) $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$.

(3) $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式.

(4) V 中任一向量 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \cdots + v_n$, 分解式中的有限个非零元 $v_i \in V_i$ 组成的集合称为**支集**.

证: (1)$\Longleftrightarrow$(2): 由直积的定义即得证.

(2)$\Longrightarrow$(3): 假设 $0 = s_{i1} + \cdots + s_{in}$ 且 s_{ij} 不全为零, 不妨设 $s_{i1} \neq 0$, 则 $V_{i1} \ni s_{i1} = -s_{i2} - \cdots - s_{ij} \in \sum_{j=2}^n V_{ij}$ $\Longrightarrow s_{i_1} \in V_{i_1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{ij})$, $s_{i_1} \neq 0$ 与 $V_{i_1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{ij}) = \{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式.

(3)$\Longrightarrow$(4): $\forall v \in V$, $v = u_1 + \cdots + u_n$, 其中 $u_i \in V_i$.
假设 $v = w_1 + \cdots + w_m$, 其中 $w_i \in V_i$.
$0 = v - v = u_1 + \cdots + u_n - w_1 - \cdots - w_n$, 将属于相同子空间的元素合并到一起, 得 $0 = (u_{t_1} - w_{t_1}) + \cdots + (u_{t_k} - w_{t_k}) + \cdots + (u_{t_n} - w_{t_n})$, 由 (2) 知 $u_{t_i} = w_{t_i}$, 故 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \cdots + v_n$.

(4)$\Longrightarrow$(2): 假设 $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$, 则 $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \supsetneq \{0\}$, 即 $\exists 0 \neq u \in V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j)$,
不妨设 $u \in V_1$ 且 $u \in V_2$, 则 $v = v_1 + \cdots + v_n = (v_1 + u) + (v_2 - u) + \cdots + v_n$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $v_1 + u \in V_1$, $v_2 - u \in V_2$, v 的分解式不唯一, 矛盾, 故假设错误, $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$.

综上, 得证. □

定理 1.7 (课本定理1.8): $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 是向量空间 V 的基 $\Longleftrightarrow V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$.

证: "$\Longrightarrow$": $\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore V = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F\} = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_n \rangle$.
$\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore v_1, \cdots, v_n$ 线性无关 $\Longrightarrow \forall 0 \neq u \in \langle v_i \rangle$, $u = r_i v_i$ 且无法由 $\{v_j \mid j \neq i\}$ 线性表示 $\Longrightarrow u \notin$

$V_i \cap (\cup_{j\neq i} V_j)$.
又 $\because 0 = 0v_i \in \langle v_i \rangle$ 且 $0 = \sum_{j\neq i} 0v_j \Longrightarrow 0 \in V_i \cap (\cup_{j\neq i} V_j)$, $\therefore V_i \cap (\cup_{j\neq i} V_j) = \{0\}$.
故 $V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$.

"$\Longleftarrow$": 一方面, $V = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_n \rangle = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$;
另一方面, 假设 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性相关, 则 $\exists$ 不全为零的 $r_1, \cdots, r_n$, s.t. $\sum_i r_i v_i = 0$,
不妨设 $r_i \neq 0$, 则 $r_i v_i = -\sum_{j\neq i} r_j v_j \Longrightarrow 0 \neq r_i v_i \in V_i$ 且 $r_i v_i = -\sum_{j\neq i} r_j v_j \in \cup_{j\neq i} V_j \Longrightarrow r_i v_i \in V_0 \cap (\cup_{j\neq i} V_j) \Longrightarrow V_0 \cap (\cup_{j\neq i} V_j) \neq \{0\}$, 与直和的定义矛盾, 故假设错误, $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关.
故 $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 V 的基.

综上, 得证. □

定理 1.8 (课本定理1.4): S 为 V 的子空间, 则 $\exists V$ 的子空间 S^c, s.t. $V = S \oplus S^c$, 称 S^c 为 S 的补空间.

证: $\mathcal{B}_1$ 为 S 的基, 则 $\mathcal{B}_1$ 为 V 中的线性无关集.
$\mathcal{B}_1$ 总可以扩张 (即添加一些元素) 成 V 的基, 即 $\exists \mathcal{B}_2$, s.t. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关且 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Longrightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$, 故 $S^c = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$. □

例 1.10: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y = S_l \oplus S_{l'}$, 其中 S_l 和 $S_{l'}$ 分别为过原点、不共线的直线 l 和 l'. □

补空间总存在, 但不唯一.

定理 1.9 (课本定理1.13): (1) $\mathcal{B}$ 是 V 的基, 若 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, 则 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T$, 若 $\mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, 则 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

证: (1) $\because \mathcal{B}$ 是 V 的基, $\therefore \forall u \in V$, $u = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$.
$\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1, n \in \mathbb{N}\}$, $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_2, n \in \mathbb{N}\}$.
$u = \sum_{i=1}^t r_i v_i + \sum_{i=t+1}^k r_i v_i$, 其中 $v_1, \cdots, v_t \in \mathcal{B}_1$, $v_{t+1}, \cdots, v_k \in \mathcal{B}_2 \Longrightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.
$\forall u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{B}_2 \rangle$,$u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1$,
且 $u \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^n l_i w_i$, 其中 $l_i \in F$, $w_i \in \mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow 0 = u - u = \sum r_i v_i - \sum l_i w_i$.
又 $\because \mathcal{B}$ 为基, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\therefore r_i, w_i$ 线性无关 $\Longrightarrow r_i = l_i = 0 \forall i \Longrightarrow u = 0$.
综上, $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T \Longleftrightarrow V = S + T$ 且 $S \cap T = \{0\}$.
假设 $\exists 0 \neq v \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, 则 $\langle v \rangle = S \cap T = \{0\} \Longrightarrow v = 0$, 矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.
$\because V = S + T$, $\therefore \forall u \in V$, $u = u_1 + u_2$, 其中 $u_1 \in S$, $u_2 \in T$.
$\because \mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, $\therefore u_1 = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, $u_2 = \sum_{i=k+1}^n$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \cdots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \cdots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, 即 $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle$.
假设 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性相关, 则 $\exists r_i \in F$ 不全为零, $\sum_{i=1}^n r_i v_i = \sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \cdots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \cdots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$.
$\because \mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 为基, $\therefore \mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow \sum_{i=1}^k r_i v_i \neq 0$, $\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \neq 0$, 与 $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基.
综上, 得证.

□

定理 1.10 (课本定理1.14): S, T 为 V 的子空间, $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$.
特别地, 若 T 为 S 的补空间, 则 $\dim S + \dim T = \dim(S \oplus T)$.

证: 设 $S \cap T$ 的基为 $\mathcal{B}$.
$\because S \cap T$ 为 S 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{B}$ 扩张成 S 的基 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, 其中 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.
$\because S \cap T$ 为 T 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{B}$ 扩张成 T 的基 $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

接下来需要用到这样一个事实: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S + T$ 的基. 所以先来证明它:

证: $\forall w \in S + T$, $w = u + v$, 其中 $u \in S$, $v \in T \Longrightarrow u \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle$, $v \in \langle \mathcal{B} + \mathcal{C} \rangle$, 故 $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S + T$.

不妨设 $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$, 其中 $v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.
设 $v_1, \cdots, v_k \in \mathcal{A}$, 则 $\sum_{i=1}^{k} r_i v_i = -\sum_{i=k+1}^{n} r_i v_i$.
令 $x = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$, 则 $x = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i \in \langle \mathcal{A} \rangle$ 且 $x = -\sum_{i=k+1}^{n} r_i v_i \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \Longrightarrow x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$.
$\because x \in \langle \mathcal{A} \rangle$, $\therefore x \in S$.
又 $\because x \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$, $\therefore x \in T \Longrightarrow x \in S \cap T = \langle \mathcal{B} \rangle \Longrightarrow x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i = -\sum_{i=k+1}^{n} r_i v_i = 0$.
又 $\because \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性独立, $\therefore r_i = 0 \forall i \Longrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性无关.

综上, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S + T$ 的基. □

故

$$\dim S + \dim T = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + \dim(S \cap T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

□