Chapter 5

模 II: 自由与诺特模

定义 5.1 诺特(Notherian) 模: $M \in R-\text{mod}$, $S_1, \cdots, S_n, \cdots$ 是 M 的子模且 $S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$, 若 $\exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \cdots$, 则称 M 满足**升链条件 (A.C.C.)**, 称满足 ACC 的模为**诺特模**.

定理 5.1 (课本定理5.7): (1) $M \in R-\text{mod}$ 为诺特模 $\Longleftrightarrow M$ 的子模是有限生成的.

(2) R 是诺特环 $\Longleftrightarrow R$ 的理想都是有限生成的.

证: (1) "$\Longrightarrow$": 设 S 是 M 的子模.

若 $S = \{0\}$, 则 $S = \langle\langle 0\rangle\rangle$ 显然有限生成,

若 $S \neq \{0\}$, 则 $\exists 0 \neq v_1 \in S$, 令 $S_1 = \langle\langle v_1\rangle\rangle \subseteq S$,

若 $S_1 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_1 \neq S$, 则 $\exists v_2 \in S - S_1$, 令 $S_2 = \langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$,

若 $S_2 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_2 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_3 \in S - S_2$, 令 $S_3 = \langle\langle v_1, v_2, v_3\rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S$,

若 $S_3 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_3 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_4 \in S - S_3$, 令 $S_4 = \langle\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle\rangle \in S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S_3 \subseteq S_4 \subseteq S$,

$\cdots$, 以此类推, 得 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$.

$\because S$ 满足 ACC, $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \cdots = S = \langle\langle v_1, \cdots, v_n\rangle\rangle$, 故 S 有限生成.

"$\Longleftarrow$": 取 M 的任一子模升链 $S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$, 则 $S = \cup_{i\in J} S_i$ 是 M 的子模.

$\because M$ 的子模是有限生成的, $\therefore S$ 必然是有限生成, 故设 $S = \langle\langle v_1, \cdots, v_m\rangle\rangle$.

$\forall k = 1, \cdots, m$, $v_k \in S = \cup_{i\in J} S_i \Longrightarrow \exists i_k \in J$, s.t. $u_k \in S_{i_k}$.

令 $K = \max\{i_1, \cdots, i_m\}$, 则由升链的性质, $u_1, \cdots, u_m \in S_K$

$\Longrightarrow S_K = S$, 故升链必终止于 S_K.

综上, 得证.

□

例 5.1: $\because \mathbb{Z}$ 的任意理想均由单个元素生成, 具体地说, I 是 $\mathbb{Z}$ 的理想, 则 $I = \langle n\rangle$, 其中 n 为 I 中的最小整数, $\therefore \mathbb{Z}$ 是诺特环. □

例 5.2: $F[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in F, n \in \mathbb{Z}\}$, I 是 $F[x]$ 的理想, 则 $I = \langle f(x)\rangle$, 其中 $\deg f(x)$ 是 I 中最小的[1], 故

[1] 多项式间的除法: 若 $\deg g(x) \geq \deg f(x)$, 则 $\exists q(x), r(x) \in F[x]$, s.t. $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ 且 $(r(x) = 0$ 或 $0 < \deg r(x) < \deg f(x))$

$(F[x],+,\cdot)$ 是诺特环. □

定义 5.2 主理想: 由一个元素生成的诺特环.

定理 5.2 (课本定理5.8): R 为有单位元的交换环, 则 R 是诺特环 $\Longleftrightarrow$ R 上的有限生成模都是诺特模.

上述定理意味着有限生成的性质对诺特环是遗传的.

证: "$\Longleftarrow$": $R\in R-\mathrm{mod}$ 且 $R=\langle\langle 1\rangle\rangle$, 故 R 为诺特环.

"$\Longrightarrow$": 取 R 上的有限生成模 $M=\langle\langle v_1,\cdots,v_n\rangle\rangle\in R-\mathrm{mod}$, $M=\{\sum_{i=1}^n r_iv_i\mid r_i\in R\}$.
映射 $\tau: R^n\to M$, $(r_1,\cdots,r_n)\mapsto\sum_{i=1}^n r_iu_i$ 满足

(1) $\because\tau(r(r_1,\cdots,r_n)+t(l_1,\cdots,l_n))=\tau(rr_1+tl_1,\cdots,rr_n+tl_n)=\sum_{i=1}^n(rr_i+tl_i)u_i=r\sum_{i=1}^n r_iu_i+t\sum_{i=1}^n l_iu_i=r\tau(r_1,\cdots,r_n)+t\tau(l_1,\cdots,l_n)$, $\therefore\tau$ 是 R^n 到 M 上的模同态,

(2) $\because\forall v\in M$, $\exists(r_1,\cdots,r_n)$, s.t. $v=\sum_{i=1}^n r_iu_i=\tau(r_1,\cdots,r_n)$, $\therefore\tau$ 满射,

故 τ 满同态.

设 S 是 M 的任一子模, 则 $\tau^{-1}(S)$ 是 R^n 的子模, 且 $\because\tau$ 满同态, $\therefore\tau(\tau^{-1}(S))=S$.

【思路】根据定理 5.2, 要证 M 诺特, 即证 M 的子模 S 有限生成, 于是先证 R^n 的子模有限生成, 从而 R^n 诺特, 进而利用引理 5.1 得 S 有限生成.

数学归纳法: 当 $n=1$ 时, R 诺特 $\Longrightarrow R^n$ 诺特.
假设当 $n=k$ 时, R^k 诺特, 则当 $n=k+1$ 时, 要证 R^{k+1} 诺特, 即证 R^{k+1} 的子模有限生成.
取 I 为 R^{n+1} 子模, 取 $I_1=\{(0,\cdots,0,a_{k+1})\mid\exists a_1,\cdots,a_k\in R,\ \text{s.t. }(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})\in I\}$, $I_2=\{(a_1,\cdots,a_k,0)\mid\exists a_{k+1}\in R,\ \text{s.t. }(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})\in I\}$.
$\forall(0,\cdots,0,a_{k+1}),(0,\cdots,0,b_{k+1})\in I_1$, $\exists a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_k\in R$, s.t. $(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}),(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1})\in I$.
又 $\because I$ 是子模, $\therefore\forall r,t\in R$, $r(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})+t(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1})=(ra_1+tb_1,\cdots,ra_k+ta_k)\in I\Longrightarrow r(0,\cdots,0,a_{k+1})+t(0,\cdots,0,b_{k+1})=(0,\cdots,0,ra_{k+1}+tb_{k+1})\in I_1$, 故 I_1 为 R^{k+1} 的子模.
$\forall(a_1,\cdots,a_k,0),(b_1,\cdots,b_k,0)\in I_2$, $\exists a_{k+1},b_{k+1}$, s.t. $(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}),(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1})\in I$.
又 $\because I$ 是子模, $\therefore\forall r,t\in R$, $r(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})+t(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1})=(ra_1+tb_1,\cdots,ra_k+ta_k)\in I\Longrightarrow r(a_1,\cdots,a_k,0)+t(b_1,\cdots,b_k,0)=(ra_1+tb_1,\cdots,ra_k+tb_k,0)\in I_2$, 故 I_2 为 R^{k+1} 的子模.
令 $J_1=\{a_{k+1}\mid(0,\cdots,0,a_{k+1})\in I_1\}$, $J_2=\{(a_1,\cdots,a_k)\mid(a_1,\cdots,a_k)\in I_2\}$, 易证 J_1 是 R 的子模, J_2 是 R^k 的子模.
$\because R,R^k$ 诺特, $\therefore J_1,J_2$ 有限生成, 设 $J_1=\langle\langle g_1,\cdots,g_m\rangle\rangle$, $J_2=\langle\langle f_1,\cdots,f_n\rangle\rangle$, 其中 $g_i\in R$, $f_i\in R^k$.
于是 $\forall i=1,\cdots,m$, $(0,\cdots,0,g_i)\in I_1$, 由 I_1 的定义, $\exists g_{i_1},\cdots,g_{i_k}\in R$, s.t. $\bar{g}_i\equiv(g_{i_1},\cdots,g_{i_n},g_i)\in I$.
同理可记 $\bar{f}_i=(f_i,0)$.
$\forall r=(r_1,\cdots,r_k,r_{k+1})\in I$, 有 $(0,\cdots,0,r_{k+1})\in I_1$, 即 $r_{k+1}\in J_1=\langle\langle g_1,\cdots,g_m\rangle\rangle$.
于是 $r_{k+1}=\sum_{i=1}^m\alpha_ig_i$, $(h,0)\equiv r-\sum_{i=1}^m\alpha_i\bar{g}_i=(r_1,\cdots,r_k,0)\in I_2\Longrightarrow h\in J_2$.
设 $h=\sum_{i=1}^n\beta_if_i$, 则 $r=\sum_{i=1}^m\alpha_i\bar{g}_i+\sum_{i=1}^n\beta_i\bar{f}_i$, 故 I 由 $\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_m,\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_n$ 生成 $\Longrightarrow R^{k+1}$ 诺特 $\Longrightarrow R^n$ 诺特 $\forall n\Longrightarrow S=\tau(\tau^{-1}(S))$ 有限生成. □

引理 5.1: $\tau: M\to N$ 满同态, 则 M 有限生成 $\Longrightarrow N$ 有限生成, 即有限生成模的满同态像有限生成.

证: $\because M$ 有限生成, $\therefore$ 设 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R\}$.
$\because \tau$ 满同态, $\therefore N = \operatorname{Im}\tau = \{\tau(u) \mid u \in M\} = \{\tau(u) \mid u = \sum_{i=1}^n r_i v_i, r_i \in R\} = \{\tau(\sum_{i=1}^n r_i v_i) \mid r_i \in R\} = \{\sum_{i=1}^n r_i \tau(v_i) \mid r_i \in R\} = \langle\langle \tau(v_1), \cdots, \tau(v_n) \rangle\rangle$, 故 N 有限生成. □

> **定理 5.3 <u>Hilbert 基底定理(课本定理5.9)</u>:** R 是诺特环 $\Longrightarrow R[x] \equiv \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in R, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 诺特, 其中 $\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^m b_j x^j = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) x^k$, $(\sum_{i=0}^n a_i x^i)\left(\sum_{j=0}^m b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{nm} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k$.

证: 设 I 是 $R[x]$ 的理想, 则 $I_k = \{r_k \in R \mid \exists a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + r_k x^k \in I\}$ 是 R 的理想.
又 $\because \forall f(x) \in I$, $xf(x) \in I$, $\therefore I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_K \subseteq \cdots$.
又 $\because R$ 诺特, $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $I_K = I_{K+1} = \cdots$, 且 R 的理想均有限生成.
设 $I_0 = \langle r_{01}, r_{02}, \cdots, r_{0t_0} \rangle$, $I_1 = \langle r_{11}, r_{12}, \cdots, r_{1t_1} \rangle$, $\cdots$, $I_K = \langle r_{K1}, r_{K2}, \cdots, r_{Kt_K} \rangle$.
$g_{01} = r_{01} \in I$, $g_{02} = r_{02} \in I$, $\cdots$, $g_{0t_0} = r_{0t_0} \in I$,
$g_{11} = r_{11}x + O(1) \in I$, $g_{12} = r_{12}x + O(1) \in I$, $\cdots$, $g_{1t_1} = r_{1t_1}x + O(1) \in I$,
$\cdots$,
$g_{K1} = r_{K1}x^K + O(x^{K-1}) \in I$, $g_{K2} = r_{K2}x^K + O(x^{K-1}) \in I$, $\cdots$, $g_{Kt_K} = r_{Kt_K}x^K + O(x^{K-1}) \in I$,
则 I 由 $\{g_{ij} \mid i = 1, \cdots, K; j = 1, \cdots t_i\}$ 生成.
$\forall f(x) \in I$, 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.
取 $a_n \in I_n$, 若 $n > K$, 则 $I_n = I_K = \langle r_{K1}, \cdots, r_{Kt_K} \rangle$, 从而 $a_n = \sum_{i=r}^{t_K} \alpha_i r_i$,
$\Longrightarrow f(x) = a_n x^n + O(x^{n-1}) = \sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i r_{Ki} x^n + O(x^{n-K}) = x^{n-K}\left(\sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki}\right) + O(x^{n-K})$,
$\Longrightarrow f(x) - x^{n-K}\left(\sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki}\right) = \beta_{n-1}x^{n-1} + O(x^{n-2})$,
重复以上操作有限次直至多项式的最高次数 $n < K$, 此时, $f(x)$ 可完全由 g_{ij} 表示 $\Longrightarrow I$ 有限生成, 故由定理 5.1 得, $R[x]$ 诺特. □

例 5.3: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 诺特 $\Longrightarrow \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ 诺特.
$\mathbb{R}[z] = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\}$.
方程组 $\begin{cases} f_1(x) = a_{1n}x^n + a_{1,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{11}x + a_{10} = 0, \\ \cdots \\ f_m(x) = a_{mn}x^n + a_{m,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{m1}x + a_{m0} = 0, \end{cases}$ 的解为 $\mathbb{R}$ 的子集合,
令 $h(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x)$, 若 $f_i(x) = 0 \forall i$, 则 $h(x) = 0$.
方程组与解集合之间存在的一一对应的关系, 正如 $\mathbb{R}[x]$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的对应关系. □