目录

Chapter 0

代数学基础

0.1 常用符号

- $\forall$: 对所有 (for all).
- $\exists$: 存在 (there exists).
- $\exists!$: 存在且唯一 (there exists exactly one).
- s.t.: 使得 (such that).
- $\mathbb{N}$: 自然数.
- $\mathbb{Z}$: 整数.
- $\mathbb{Q}$: 有理数.
- $\mathbb{R}$: 实数.
- $\mathbb{C}$: 复数.

0.2 集合

定义 0.1 集合(Set): 略.

元素与集合之间的关系: 对元素 a 和集合 S,

- $a \in S$ 或
- $a \notin S$.

集合中元素之间的关系: $\forall a, b \in S$,

- $a = b$ 或
- $a \neq b$.

集合与集合之间的关系: 对集合 A, B 和全集 I,

(1) **交集**: $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ 且 } a \in B\}$.

(2) **并集**: $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ 或 } a \in B\}$.

(3) **差**: $B - A = \{a \mid a \in B \text{ 且 } a \notin A\}$.

(4) **补集**: $A' = I - A = \{a \mid a \in I \text{ 且 } a \notin A\}$.

(5) **包含**: $A \subseteq B$, 称 A 包含于 B, 或称 B 包含 A, 或称 B 是 A 的子集
$\iff A \cup B = A \iff A \cup B = B$.

证: $\underline{A \subseteq B \Longrightarrow A \cap B = A}$: $\because A \subseteq B$, $\therefore \forall a \in A$, $a \in B \Longrightarrow A \subseteq A \cap B$.
$\forall a \in A \cup B$, 由交集定义, $a \in A \Longrightarrow A \cap B \subseteq A$.
故 $A \cap B = A$.

$\underline{A \subseteq B \Longleftarrow A \cap B = A}$: $\because A \cap B = A$, $\therefore \forall a \in A$, $a \in B \Longrightarrow A \subseteq B$.

$\underline{A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B}$: $\because A \subseteq B$, $\forall a \in A$, $a \in B$, $\therefore \forall a \in A \cup B$, $a \in B \Longrightarrow A \cup B \subseteq B$.
$\because A \subseteq B$, $\forall a \in A$, 由并集定义, $a \in A \cup B \Longrightarrow B \subseteq A \cup B$.
故 $A \cup B = B$.

$\underline{A \subseteq B \Longleftarrow A \cup B = B}$: $\forall a \in A$, 由并集定义, $a \in A \cup B$, 又 $\because A \cup B = B$, $\therefore a \in B \Longrightarrow A \subseteq B$.

综上, 得证. □

常用公式:

(1) $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$.

证: $\forall a \in A(\cup_i B_i) \iff a \in A$ 且 $a \in \cup_i B_i$
$\iff a \in A$ 且 $\exists k$, s.t. $a \in B_k$
$\iff \exists k$, s.t. $a \in A \cap B_k \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$
$\iff a \in \cup_i (A \cap B_i)$, 故 $A \cap (\cup_i B_i) \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$.

$\forall a \in \cup_i (A \cap B_i) \iff \exists k$, s.t. $a \in A \cap B_k$
$\iff \exists k$, s.t. $a \in A$ 且 $a \in B_k$
$\iff a \in A$ 且 $\exists k$, s.t. $a \in B_k$
$\iff a \in A$ 且 $a \in \cup_i B_i$
$\iff a \in A \cap (\cup_i B_i)$, 故 $\cup_i (A \cap B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i)$.

综上, 得证. □

(2) $A \cup (\cap_i B_i) = \cap_i (A \cup B_i)$.

证: $\forall a \in A \cup (\cap_i B_i) \iff a \in A$ 或 $a \in \cap_i B_i$
$\iff a \in A$ 或 $\forall i$, s.t. $a \in B_i$
$\iff \forall i$, $a \in A$ 或 $a \in B_k$
$\iff \forall i$, $a \in A \cup B_k$
$\iff \cap_i (A \cup B_i)$, 故 $A \cup (\cap_i B_i) \subseteq \cap_i (A \cup B_i)$.

$\forall a \in \cap_i (A \cup B_i) \iff \forall i$, $a \in A \cup B_i$
$\iff \forall i$, $a \in A$ 或 $a \in B_i$
$\iff a \in A$ 或 $\forall i$, $a \in B_i$

$\Longleftrightarrow a \in A$ 或 $a \in \cup_i B_i$
$\Longleftrightarrow a \in A \cap (\cup_i B_i)$, 故 $\cap_i (A \cup B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i)$.

综上, 得证. □

(3) $(\cup_i A_i)' = \cap_i A_i'$.

证: $\forall a \in (\cup_i A_i)' \Longleftrightarrow a \in I$ 且 $a \notin \cup_i A_i$
$\Longleftrightarrow a \in I$ 且 $\forall i,\ a \notin A_i$
$\Longleftrightarrow \forall i,\ a \in I$ 且 $a \notin A_i$
$\Longleftrightarrow \forall i,\ a \in A_i'$
$\Longleftrightarrow a \in \cap_i A_i'$, 故 $(\cup_i A_i)' \subseteq \cap_i A_i'$.

$\forall a \in \cap_i A_i' \Longleftrightarrow \forall i,\ a \in I$ 且 $a \notin A_i$
$\Longleftrightarrow a \in I$ 且 $\forall i,\ a \notin A_i$
$\Longleftrightarrow a \in I$ 且 $a \notin \cup_i A_i'$
$\Longleftrightarrow a \in (\cup_i A_i)'$, 故 $\cap_i A_i' \in (\cup_i A_i)'$.

综上, 得证. □

(4) $(\cap_i A_i)' = \cup_i A_i'$.

证: $\forall a \in (\cap_i A_i)' \Longleftrightarrow a \in I$ 且 $a \notin \cap_i A_i$
$\Longleftrightarrow a \in I$ 且 $\exists k$, s.t. $a \notin A_k$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in I$ 且 $a \notin A_k$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in A_k'$
$\Longleftrightarrow a \in \cup_i A_i'$, 故 $(\cap_i A_i)' \subseteq \cup_i A_i'$.

$\forall a \in \cup_i A_i' \Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in A_k'$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in I$ 且 $a \notin A_k$
$\Longleftrightarrow a \in I$ 且 $\exists k$, s.t. $a \notin A_k$
$\Longleftrightarrow a \in I$ 且 $a \notin \cap_i A_i$
$\Longleftrightarrow a \in (\cap_i A_i)'$, 故 $\cup_i A_i' \subseteq (\cap_i A_i)'$.

综上, 得证. □

0.3 映射

定义 0.2 映射: $\forall a \in S_1$, $\exists! b \in S_2$, s.t. $b = f(a)$, 记作 $f: S_1 \to S_2$, $a \mapsto b$, 其中称 S_1 为**定义域**, S_2 为**值域**, b 为 a 的**像**, a 为 b 的**原像**.

例 0.1 恒等映射: $1_S: S \to S$, $a \mapsto 1_S(a) = a$. □

定义 0.3 映射相等: 映射 $f: S_1 \to S_2$, $g: S_1 \to S_3$, $\forall a \in S_1$, $f(a) = g(a)$, 则称 f 与 g **相等**, 记作 $f = g$.

$\forall a \in S_1$, $\{f(a)\} \subseteq S_2$ 且 $|\{f(a)\}| = 1$.

定义 0.4 原像集: $f^{-1}(b) \equiv \{a \in S_1 \mid f(a) = b\}$.

$f^{-1}(b) \subseteq S_1$, $f^{-1}(b)$ 可能 $= \emptyset$.

定义 0.5 像集: $\operatorname{Im} f = f(S_1) \equiv \{b \in S_2 \mid b = f(a) \forall a \in S_1\}$.

$\operatorname{Im} f \subseteq S_2$.

基本性质:

(1) $A \subseteq S_1 \Longrightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

证: $\forall a \in A$, $\because A \subseteq S_1$, $\therefore a \in S_1$.
又 $\because f(a) \in f(A)$, $\therefore a \in f^{-1}(f(A))$, 故 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. $\square$

若 $\exists a \in S_1 - A$, s.t. $f(a) \in f(A)$, 则 $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$.

(2) $B \subseteq S_2 \Longrightarrow B \supseteq f(f^{-1}(B))$.

证: $\because f^{-1}(B) = \{a \in S_1 \mid f(a) \in B\}$, $\therefore \forall a \in f^{-1}(B)$, $f(a) \in B \Longrightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. $\square$

若 $\exists b \in B$, s.t. $\forall a \in S_1$, $f(a) \neq b$ (即 B 中有元素在 S_1 中无原像), 则 $B \supsetneq f(f^{-1}(B))$.

若 $\forall b \in B$, $\exists a \in A$, s.t. $f(a) = b$, 则 $B = f(f^{-1}(B))$.

(3) $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$.

证: $\forall a \in f^{-1}(\cup_i B_i)$, $\exists k$, s.t. $f(a) \in B_k$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in f^{-1}(B_k)$
$\Longleftrightarrow a \in \cup_i f^{-1}(B_i)$, 故 $f^{-1}(\cup_i B_i) \subseteq \cup_i f^{-1}(B_i)$.

$\forall a \in \cup_i f^{-1}(B_i)$, $\exists k$, s.t. $a \in f^{-1}(B_k)$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $f(a) \in B_k$
$\Longleftrightarrow f(a) \in \cup_i B_i$
$\Longleftrightarrow a \in f^{-1}(\cup_i B_i)$, 故 $\cup_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cup_i B_i)$.

综上, 得证. $\square$

(4) $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$.

证: $\forall a \in f^{-1}(\cap_i B_i)$, $\exists k$, s.t. $f(a) \in B_k$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in f^{-1}(B_k)$
$\Longleftrightarrow a \in \cup_i f^{-1}(B_k)$, 故 $f^{-1}(\cap_i B_i) \subseteq \cap_i f^{-1}(B_i)$.

$\forall a \in \cap_i f^{-1}(B_i)$, $\forall i$, s.t. $a \in f^{-1}(B_i)$
$\Longleftrightarrow \forall i$, s.t. $f(a) \in B_i$
$\Longleftrightarrow f(a) \in \cap_i B_i$
$\Longleftrightarrow a \in f^{-1}(\cap_i B_i)$, 故 $\cap_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cap_i B_i)$.

综上, 得证. $\square$

定义 0.6 映射的复合: 映射 $f: S_1 \to S_2$, $g: S_2 \to S_3$, 则称映射 $g \circ f: S_1 \to S_2$, $a \mapsto g \circ f(a) \equiv g(f(a))$ 为 f 和 g 的**复合**.

定理 0.1 映射复合的结合律: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

故连续复合 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ 无需括号.

定义 0.7 交换图: $f: S_1 \to S_1$, $h: S_2 \to S_3$, $g: S_1 \to S_3$, 若 $g = f \circ h$, 则称该图**交换**.

$$\begin{tikzcd} & S_3 & \\ S_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"] & & S_2 \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

$f: S_1 \to S_2$, $g: S_2 \to S_4$, $h: S_1 \to S_3$, $l: S_3 \to S_4$, 若 $g \circ f = l \circ h$, 则称该图**交换**.

$$\begin{tikzcd} S_3 \arrow[r, "l"] & S_4 \\ S_1 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & S_2 \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

定义 0.8 单射(Injective 或One-to-one): 映射 $f: S_1 \to S_2$, $\forall a, b \in S_1$, 若 $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$, 则称 f **单射**.

单射的性质:

(1) $c \in S_2$, f 单射, 若 $f^{-1}(c) \neq \emptyset$, 则 $|f^{-1}(c)| = 1$.

(2) f 单射 $\Longleftrightarrow A = f^{-1}(f(A))$.

定义 0.9 满射(Surjective): 映射 $f: S_1 \to S_2$, 若 $\forall b \in S_2, \exists a \in S_1$, s.t. $f(a) = b$ (即 $\operatorname{Im} f = S_2$), 则称 f **满射**.

满射的性质:

(1) f 满射 $\Longleftrightarrow \forall B \subseteq S_2$, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

(2) f 满射 $\Longleftrightarrow \forall B \subseteq S_2$, $B = f(f^{-1}(B))$.

定义 0.10 双射: 映射 f 单射且满射 $\Longleftrightarrow f$ **双射**.

例 0.2: 恒等映射是双射的. □

常用结论:

(1) f, g 单射 $\Longrightarrow g \circ f$ 单射.

证: $\forall a,b\in S_1$, 若 $g\circ f(a)=g\circ f(b)$, $\because g$ 单射, $\therefore f(a)=f(b)$,
又 $\because f$ 单射, $\therefore a=b$, 故 $g\circ f$ 单射. $\square$

(2) $g\circ f$ 单射 $\Longrightarrow f$ 单射.

证: $\forall a,b\in S_1$, 若 $f(a)=f(b)$, 则 $g\circ f(a)=g\circ f(b)$,
又 $\because g\circ f$ 单射, $\therefore a=b$, 故 f 单射. $\square$

例 0.3 **$g\circ f$ 单射, 而g 非单射的例子:** 集合 $S_1=\{0\}$, $S_2=\{0,1\}$, $S_3=\{0\}$,
映射 $f:S_1\to S_2$, $f(a)=0\forall a\in S_1$, 单射,
$g:S_2\to S_3$, $g(b)=0\forall S_2$, 非单射, $g\circ f:S_1\to S_3$, $g(a)=0$, 单射. $\square$

(3) f,g 满射 $\Longrightarrow g\circ f$ 满射.

证: $\forall c\in S_3$, $\because g$ 满射, $\therefore \exists b\in S_2$, s.t. $g(b)=c$,
又 $\because f$ 满射, $\therefore \exists a\in S_1$, s.t. $f(a)=b\Longrightarrow g\circ f(a)=c$, 故 $g\circ f$ 满射. $\square$

(4) $g\circ f$ 满射 $\Longrightarrow g$ 满射.

证: $\because g\circ f$ 满射, $\therefore \forall c\in S_3$, $\exists a\in S_1$, s.t. $g\circ f(a)=c$
$\Longrightarrow \exists b=f(a)\in S_2$, s.t. $g(b)=c$, 故 g 满射. $\square$

例 0.4 **$g\circ f$ 满射, 而f 非满射的例子:** 集合 $S_1=\{0\}$, $S_2=\{0,1\}$, $S_3=\{0\}$,
映射 $f:S_1\to S_2$, $f(a)=0\forall a\in S_1$, 非满射,
$g:S_2\to S_3$, $g(b)=0\forall S_2$, 满射, $g\circ f:S_1\to S_3$, $g(a)=0$, 满射. $\square$

定理 0.2: 映射 $f:S_1\to S_2$ 单射 $\Longleftrightarrow \exists$ 映射 $g:S_2\to S_1$, s.t. $g\circ f=1_{S_1}$, 这样的 g 称为 f 的左逆.

证: "$\Longrightarrow$": 构造 $g(b)=\begin{cases} a, & a\in f^{-1}(b),\\ \text{任意取一个 } a_0\in S_1, & f^{-1}(b)=\emptyset,\end{cases}$,
$\forall a\in S_1$, 记 $b=f(a)$, $\because f$ 单射且 $a\in f^{-1}(b)\neq\emptyset$, $\therefore |f^{-1}(b)|=1$,
$\Longrightarrow g\circ f(a)=a\Longrightarrow g\circ f=1_{S_1}$.
"$\Longleftarrow$": $\forall a,b\in S_1$, 若 $f(a)=f(b)$, 则 $a=1_{S_1}=g\circ f(a)=g\circ f(b)=1_{S_1}(b)=b$, 故 f 单射. $\square$

由于当 $f^{-1}(b)=\emptyset$ 时, $g(b)$ 的取值具有任意性, 故若左逆存在, 则不唯一.

定理 0.3: 映射 $f:S_1\to S_2$ 满射 $\Longleftrightarrow \exists$ 映射 $h:S_2\to S_1$, s.t. $f\circ h=1_{S_2}$, 这样的 h 称为 f 的右逆.

证: "$\Longrightarrow$": $\because f$ 满射, $\therefore \forall b\in S_2$, $\exists a\in S_1$, s.t. $f(a)=b$, 故可构造 $h(b)=a\in f^{-1}(b)$,
从而 $f\circ h(b)=b\Longrightarrow f\circ h=1_{S_2}$.
"$\Longleftarrow$": $\forall b\in S_2$, $\exists a=h(b)\in S_1$, s.t. $f\circ h(b)=1_{S_2}(b)=b$, 故 f 满射. $\square$

由于 $|f^{-1}(b)|\geq 1$, $h(b)$ 的取值可能具有任意性, 故若右逆存在, 则不唯一.

定理 0.4: 若映射 f 同时存在左逆和右逆, 则其左逆 $=$ 右逆, 此时称 f 可逆, 且此时 f 双射.

证: 因为 f 同时存在左逆和右逆, 由定理 0.2 和 0.3 得 f 双射.
设左逆 $g: S_2 \to S_1$, s.t. $g \circ f = 1_{S_1}$, 右逆 $h: S_2 \to S_1$, s.t. $f \circ h = 1_{S_2}$.
假设 $g \neq h$, 则 $\exists b \in S_2$, s.t. $g(b) \neq h(b)$,
又 $\because f$ 单射, $\therefore b = 1_{S_2}(b) = f \circ g(b) \neq f \circ h(b)$.
$\because f$ 满射, $\therefore \exists a \in S_1$, s.t. $b = f(a) \Longrightarrow f(a) = b \neq f \circ g \circ f(a) = 1_{S_2}(f(a)) = f(a)$, 这显然是荒谬的, 故假设错误, $g = h$. □

0.4 等价关系和等价类

定义 0.11 卡氏积: 集合 S_1 和 S_2 的**卡氏积** $S_1 \times S_2 \equiv \{(a, b) \mid a \in S_1, b \in S_2\}$.
集合 S 的**卡氏积** $S \times S \equiv \{(a, b) \mid a, b \in S\}$.

注意, 一般 $(a, b) \neq (b, a)$.

定义 0.12 关系: 卡氏积的子集. $\mathcal{R} \in S \times S$, 称为 S 上的**关系**.

例 0.5: 自然数集 $\mathbb{N}$ 的卡氏积 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.
小于关系: $\mathcal{R}_1 = \{(n, m) \mid n - m < 0\}$. $(1, 2) \in \mathcal{R}_1$, 记作 $1\mathcal{R}_1 2$.
等于关系: $\mathcal{R}_2 = \{(n, m) \mid n - m = 0\}$. $(1, 1) \in \mathcal{R}_2$, 记作 $1\mathcal{R}_2 1$. □

定义 0.13 图: 对映射 $f: S_1 \to S_2$, 有关系 $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in S_1\} \subseteq S_1 \times S_2$, 称 G_f 为 f 的**图**.

(第一个坐标在此关系中仅出现一次, 不会重复.)
映射与图一一对应.

定义 0.14 等价关系: 关系 $\mathcal{R} \in S \times S$, 若满足
反身性: $\forall a \in S$, $(a, a) \in \mathcal{R}$ (即 $a \sim a \forall a \in S$)

(2) **对称性**: 若 $(a, b) \in \mathcal{R}$, 则 $(b, a) \in \mathcal{R}$ (即$a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$)

(3) **传递性**: 若 $(a, b) \in \mathcal{R}$, $(b, c) \in \mathcal{R}$, 则 $(a, c) \in \mathcal{R}$ (即$a \sim b, b \sim c \Longleftrightarrow a \sim c$)

则称 $\mathcal{R}$ 为 S 上的**等价关系**. 若元素 a, b 具有等价关系, 记作 $a \sim b$.

定义 0.15 等价类: 由具有等价关系的元素组成的集合. $\forall a \in S$, $[a] \equiv \{b \in S \mid b \sim a\} \subseteq$ 称为 a 的**等价类**, a 称为该等价类的**代表元**.

$\because a \in [a]$, $\therefore [a]$ 非空.
$c \in S$, 则有且仅有以下两种情况:

(1) $c \in [a] \Longleftrightarrow c \sim a \Longleftrightarrow a \sim c \Longleftrightarrow a \in [c] \Longleftrightarrow [a] = [c]$.

(2) $c \notin [a] \Longleftrightarrow [a] \cap [c] = \emptyset$.

证: 假设 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, 则 $\exists c \in [a] \cap [b]$
$\Longleftrightarrow c \in [a]$ 且 $c \in [b]$, 即 $c \sim a$ 且 $c \sim b$
$\Longrightarrow a \sim b \Longrightarrow [a] = [b]$, 得证. □

等价类的性质

(1) $a \in [b] \Longleftrightarrow b \in [a] \Longleftrightarrow [a] = [b]$.

(2) $a \notin [b] \Longleftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.

(3) $\forall a, b \in S$, 要么 $[a] = [b]$, 要么 $[a] \cap [b] = \emptyset$.
(以上三条证明见前文.)

(4) $S = \cup_{i \in K, a_i \in S} [a_i]$, 其中 $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \forall i \neq j$.

证: $S = \cup_a \{a\}$, 合并各等价类, 即得证. □

等价类这一概念可用于将大问题分解为小问题加以解决.

定义 0.16 剖分: 集合 $S \neq \emptyset$, 若 $S = \cup_{i \in K, S_i \subseteq S} S_i$ 且 $S_i \cap S_j = \emptyset \forall i \neq j$, 则称 $\{S_i \subseteq S \mid i \in K\}$ 为 S 的**剖分**.

可由集合的等价类得到它的一个剖分.

定义 0.17 商类: 所有等价类的集合. $\frac{S}{\sim} \equiv \{[a] \mid a \in S\}$. $\pi : S \to \frac{S}{\sim}$, $a \mapsto [a]$ 称为**自然映射**.

自然映射满射, 但未必单射.

定义 0.18 运算: 映射 $* : S \times S \to S$ 称为 S 上的**运算**, 记作 $(S, *)$.

$\forall a, b \in S$, $a * b \in S$.

0.5 群

定义 0.19 群: 若 $(G, *)$ 满足
结合律: $(a * b) * c = a * (b * c)$
(故 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ 无需括号, 可写为 $\prod_{i=1}^{n} a_i$.)

(2) **有单位元** e: s.t. $e * a = a * e = a$

(3) **有逆元**: $\forall a \in G$, $\exists b$, s.t. $a * b = b * a = e$, 则称 b 为 a 的逆, 记作 $b = a^{-1}$

则称 $(G, *)$ 为**群**.

定理 0.5: 单位元是唯一的.

证: 假设 e_1, e_2 均为单位元, 则 $e_1 * e_2 = e_1 * e_2$, 得证. □

定理 0.6: 每个元素的逆元是唯一的.

证: 假设 b_1 和 b_2 均为 a 的逆元, 则 $b_1 a = b_2 a = e \Longrightarrow b_1 = b_2$, 得证. □

例 0.6: $(\mathbb{Z}, \times)$ 非群, 因 0 无逆元. □

特殊的群:

(1)

例 0.7 **循环群:** $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. □

(2)

例 0.8 **交换群(Abel 群):** $\forall a, b \in G$, $a * b = b * a$. □

群的性质:

(1) $c * c = c \Longleftrightarrow c = e$.

(2) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(3) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(4) **左消去律**: $a * b = a * c \Longleftrightarrow b = c$,
右消去律: $b * a = c * a \Longleftrightarrow b = c$.

定义 0.20 **群的阶:** $|G| \equiv$ 群中元素的个数.

定义 0.21 **有限群:** 若 $|G| < \infty$, 则称 G 为**有限群**.

定义 0.22 **群元素的阶:** $g \in G$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$, 若 $g^n = e$, 则称最小的这样的 n 为 g 的**阶**, 记作 $|g|$, 若 n 不存在, 则称 g **无穷阶**.

若 $|G| < \infty$, 则 $\forall g \in G$, $|g| < \infty$.

证: $g \in G$, $g^2 \in G$, $\cdots$, $g^n \in G \Longrightarrow \{g, g^2, \cdots, g^n\} \in G$
$\because |G| < \infty$, $\therefore |\{g, g^2, \cdots, g^n\}| < \infty$
当 $n > |G|$, $\{g, g^2, \cdots, g^n\}$ 中必有元素重复, 故 $\exists n_1 < n_2$, s.t. $g^{n_1} = g^{n_2} \Longrightarrow e = g^{n_1} g^{-n_1} = g^{n_2} g^{-n_1} = g^{n_2 - n_1}$.
最小的这样的 $n_2 - n_1$ 即为 $|g|$, 故 $|g| < \infty$. □

定义 0.23 **子群:** 对群 $(G, *)$, H 为 G 的非空子集, 若 $(H, *)$ 亦为群, 则称 $(H, *)$ 为 $(G, *)$ 的**子群**, 记作 $(H, *) < (G, *)$.

例 0.9: $(\mathbb{Q}, +)$ 为群, $(\mathbb{Q}^* \equiv \mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ 亦为群, 虽然 $\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{Q}$, 但由于两者运算不同, 故 $(\mathbb{Q}^*, \times)$ 并非 $(\mathbb{Q}, +)$ 的子群. □

定理 0.7: $(H, *) < (G, *) \Longleftrightarrow H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b \in H$ 且 $a^{-1} \in H \Longleftrightarrow H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} = H$.

证: $\underline{(H, *) < (G, *) \Longleftrightarrow H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b \in H \text{ 且} a^{-1} \in H}$: 由子群和群的定义即得证.
$\underline{(H, *) < (G, *) \Longleftarrow H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H}$: 由子群和群的定义即得证.
$\underline{(H, *) < (G, *) \Longleftarrow H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H}$: 取 $b = a$, 得 $a * a^{-1} = e \in H \Longrightarrow H$ 有单位元.
取 $a = e$, 得 $\forall b \in H$, $\exists e * b^{-1} = b^{-1} \in H \Longrightarrow H$ 有逆元.
H 中的运算 $*$ 的结合律继承自 G 中的 $*$ 的结合律.
综上, H 为群. 又 $\because H \subseteq G$, $\therefore H < G$. □

定义 0.24 平凡子群: $(G,*)$ 和 $(\{e\},*)$ 为 $(G,*)$ 的**平凡子群**.

定义 0.25 真子群(非平凡子群): 除平凡子群以外的子群.

定义 0.26 单群: 无真子群的群.

定理 0.8 任意多个子群的交为子群: $(G,*)$ 为群, $(H_i,*)<(G,*)\forall i$, 则 $(\cap_{i\in K}H_i,*)<(G,*)$.

证: $\forall a,b\in\cap_{i\in K}H_i\Longrightarrow\forall i\in K,\ a,b\in H_i$,
$\because(H_i,*)<(G,*)$, $\therefore a*b^{-1}\in H_i\subseteq\cap_{i\in K}H_i\Longrightarrow a*b^{-1}\in\cap_{i\in K}H_i$. □

定理 0.9: $(H,*)<(G,*)$, 则 H 的单位元即为 G 的单位元.

证: 设 G 的单位元为 e.
$\forall a\in H$, $\because H\in G$, $\therefore a\in G$, $e*a=a*e=a\Longrightarrow e$ 为 $(H,*)$ 的单位元,
又 $\because(H,*)$ 的单位元是唯一的, 故得证. □

例 0.10: $(\mathbb{Z},+)$ 为群, $(\mathbb{E}=\langle2\rangle=\equiv\{vp\},+)$, $(\langle3\rangle\equiv\{3n\mid n\in\mathbb{Z}\},+)<(\mathbb{Z},+)$. □

定义 0.27 陪集(Coset): 真子群 $H<G,\forall g\in G$, **左陪集** $gH\equiv\{g*h\mid\forall h\in H\}$, **右陪集** $Hg\equiv\{h*g\mid\forall h\in H\}$.

简便起见, 以下讨论针对左陪集, 右陪集同理.

例 0.11: $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{Z}$ 中的陪集: $\forall g$, $n\mathbb{E}=\{n+m\mid m\in\mathbb{E}\}=\begin{cases}\mathbb{E}, & n\text{ 为偶数},\\ 1\mathbb{E}=\mathbb{O}\equiv\{\text{奇数}\}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 故 $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{Z}$ 中仅有两个陪集: $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{O}$, 且 $\mathbb{Z}=\mathbb{E}\cup\mathbb{O}$, $\mathbb{E}\cap\mathbb{O}=\emptyset$. □

陪集的性质: 真子群 $H<G,\forall g_1,g_2\in G$,

(1) $g_1H\cap g_2H=\emptyset$ 或 $g_1H=g_2H$.

证: 假设 $g_1H\cap g_2H\neq\emptyset$, 则 $\exists c\in g_1H\cap g_2H$
$\Longleftrightarrow c\in g_1H$ 且 $c\in g_2H$
$\Longleftrightarrow\exists h_1,h_2$, s.t. $c=g_1*h_1=g_2*h_2$
$\Longrightarrow g_2^{-1}g_1=h_2*h_1^{-1}$
又 $\because h_2*h_1^{-1}\in H$, $\therefore g_2^{-1}*g_1\in H$
$\Longrightarrow(g_2^{-1}*g_1)*H=H$
$\Longrightarrow g_1H=g_2H$. □

(2) $|gH|=|H|$.

证: 要证 $|gH|=|H|$, 只需证 $H\to gH$ 双射.
若 $ga=gb$, 则 $a=b$, 故 $g\to gH$ 单射.
$\forall c\in gH$, $\exists a=g^{-1}c\in H$ 且 $ga=b$, 故 $H\to gH$ 满射.
综上, $H\to gH$ 双射, 故得证. □

(3) $G = H \cup g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_\alpha H$, 其中 $g_iH \cap g_jH = \emptyset \forall i, j$, α 仅为一指标.

证: $G = \cup_{g\in G} gH$, 去除这些并集中的重复集合, 即得证. □

(4) $g_1H = g_2H \Longleftrightarrow g_1^{-1} * g_2 \in H$.

证: "$\Longrightarrow$": $g_1H = g_2H \Longrightarrow \forall g_1 * h_1 \in g_1H$, $g_1 * h_1 \in g_2H$
$\Longrightarrow \exists h_2 \in H$, s.t. $g_1 * h_1 = g_2 * h_2$
$\Longleftrightarrow g_1^{-1}g_2 = h_1 * h_2^{-1}$
又 $\because h_1 * h_2^{-1} \in H$, $\therefore g_1^{-1} * g_2 \in H$.
"$\Longleftarrow$": $g_1^{-1} * g_2 \in H \Longrightarrow g_1^{-1} * g_2H = H$
$\Longrightarrow g_1H = g_2H$. □

(5)

> **定理 0.10 拉格朗日(Lagrange) 定理:** $|G| < \infty$, 真子集 $H < G$, $|H| \mid |G|$ [a].
>
> [a] $a \mid b$ 表示 b 可被 a 整除.

故若 $|G|$ 为质数, 其子群仅有 $\{e\}$ 和 G 两个, 此时 $\forall g \in G$, $G = \{g, g^2, \cdots, g^{|G|}\}$, 即 G 为有限阶循环交换群.

最小的有限非交换群为 6 阶.

根据 (3), 由陪集可得剖分, 由剖分可得等价关系, 由此我们引入:

(6) $g_1 \sim g_2 \Longleftrightarrow g_1^{-1} * g_2 \in H$.

例 0.12: 群 $(\mathbb{Z}, -)$, 可分为两个子群: $(\mathbb{E}, -)$ 和 $(\mathbb{O}, -)$, 其中 $\mathbb{E} \cap \mathbb{O} = \emptyset$, 故由这两个子群可得 $\mathbb{Z}$ 的一个剖分, 这两个子群中的元素各存在等价关系: $n \sim m \Longleftrightarrow n - m \in \mathbb{E}$. □

> **定义 0.28 商群:** H 为 G 的正规子群, $\frac{G}{H} = \{[g] \equiv gH \mid g \in G\}$.

问题 0.1: $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 是否或在何种条件下具有相同的代数结构? □

答: $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 具有相同的代数结构, 即 $\forall [g_1], [g_2] \in \frac{G}{H}$, $[g_1] * [g_2] = [g_1 * g_2] \in \frac{G}{H}$,
即存在映射 $\frac{G}{H} * \frac{G}{H} \to \frac{G}{H}$, $([g_1], [g_2]) \mapsto [g_1, g_2])$,
即若 $g_1 \sim g_1'$, $g_2 \sim g_2'$, 则 $g_1 * g_2 \sim g_1' * g_2'$,
即若 $g_1H = g_1'H$, $g_2H = g_2'H$, 则 $(g_1 * g_2)H = (g_1' * g_2')H$.
$\because g_1H = g_1'H$, $\therefore \exists h_1, h_1' \in H$, s.t. $g_1h_1 = g_1'h_1' \Longleftrightarrow g_1 = g_1' * h_1' * h_1^{-1}$,
$\because g_2H = g_2'H$, $\therefore \exists h_2, h_2' \in H$, s.t. $g_2h_2 = g_2'h_2' \Longleftrightarrow g_2 = g_2' * h_1' * h_2^{-1}$,
从而 $g_1 * g_2 = g_1' * h_1' * h_1^{-1} * g_2' * h_2' * h_2^{-1}$,
若 $\exists h' \in H$, s.t. $(h_1' * h_1^{-1}) * g_2' = g_2' * h'$, 则 $g_1 * g_2 = g_1' * g_2' * h' * h_2' * h_2^{-1} \equiv g_1' * g_2' * h$,
$\Longrightarrow (g_1 * g_2)H = (g_1' * g_2' * h)H = (g_1' * g_2')H$.
故当 $gH = Hg$ 时, $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 具有相同的代数结构. □

> **定理 0.11 正规子群:** 若 $gH = Hg$, 则 $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 具有相同的代数结构, 此时称 H 为 G 的**正规子群**.

定理 0.12: 交换群的任意一个子群为正规子群.

例 0.13: $(\mathbb{Z},+)$ 的子群均为循环群, $\langle m\rangle \equiv \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n\rangle}$, $\mathbb{Z}_m$ 有 m 个等价类: $\mathbb{Z}_m = \cap_{i=0}^{m-1}[i]$. □

定义 0.29 群同态: 对群 $(G_1,*)$ 和 $(G_2,\circ)$, 若映射 $f: G_1 \to G_2$ 满足 $f(a*b) = f(a)\circ f(b)$ (即映射后保持代数结构), 则称 f 为 G_1 到 G_2 的**群同态**.

(类似于集合间的映射)

定义 0.30 单同态: 单射的群同态.

定义 0.31 满同态: 满射的群同态.

定义 0.32 同构: 双射的群同态.

定理 0.13: f 为 G_1 到 G_2 的群同态, e_1 和 e_2 分别是 G_1 和 G_2 的单位元, 则 $f(e_1) = e_2$.

证: $f(e_1) = f(e_1 * e_1) = f(e_1)\circ f(e_1) \Longrightarrow f(e_1) = e_2$. □

定理 0.14: f 为 G_1 到 G_2 的群同态, $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

证: $e_2 = f(e_1) = f(a*a^{-1}) = f(a)\circ f(a^{-1}) \Longrightarrow f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$. □

定义 0.33 群同态的核(Kernel): 单位元的原像. f 为 G_1 到 G_2 的群同态, e_1 和 e_2 分别是 G_1 和 G_2 的单位元, 则称 $\ker f \equiv f^{-1}(e_2) = \{a \in G_1 \mid f(a) = e_2\}$ 为 f 的**核**.

$\because e_1 \in \ker f$, $\therefore \ker f \neq \emptyset$.

$\ker f \subseteq G_1$.

证: $\forall a,b \in \ker f$, $f(a*b^{-1}) = f(a)\circ f(b) = f(a)\circ [f(b)]^{-1} = e_2 * e_2^{-1} = e_2 \Longrightarrow a*b^{-1} \in \ker f$, 故 $\ker f \subseteq G_1$. □

定义 0.34 群同态的像: f 为 G_1 到 G_2 的群同态, 则称 $\operatorname{Im} f \equiv f(G_1) = \{f(a) \mid a \in G_1\}$ 为 f 的**像**.

$\operatorname{Im} f \in G_2$.

定理 0.15: f 单同态 $\Longleftrightarrow \ker f = \{e_1\}$.

证: "$\Longrightarrow$": $\forall a,b \in \ker f$, $f(a) = f(b) = e_2$,
又 $\because f$ 单同态, $\therefore a = b = e$.

"$\Longrightarrow$": 若 $f(a) = f(b)$, 则 $f(a)\circ [f(b)]^{-1} = e_2$
$\Longrightarrow f(a)\circ f(b^{-1}) = e_2$
$\Longrightarrow f(a*b^{-1}) = e_2$
$\Longrightarrow a*b^{-1} \in \ker f = \{e_1\}$
$\Longrightarrow a = b = e_1$, 故 f 单同态. □

0.6 环

定义 0.35 环: 若 $(R,+,\cdot)$ 满足

$(R,+)$ 为交换群 (单位元记作 0)

(2) **结合律**: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

(3) **左分配律**: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$,
右分配律: $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

则称 $(R,+,\cdot)$ 为**环**.

例 0.14: $(\mathbb{Z},+,\times)$ 为环. □

常用结论:

(1) $0\cdot a = a\cdot 0 = 0$.

证: $a\cdot 0 = 0\cdot a = (0+0)\cdot a = 0*a+0*a = 0*a+a*0 \Longrightarrow 0\times a = a\cdot 0 = 0$. □

(2) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$.

证: $(-a)\cdot b + a\cdot b = [a+(-a)]\cdot b = 0\cdot b = 0 \Longrightarrow (-a)\cdot b = -(a\cdot b)$.
$a\cdot(-b) + a\cdot b = a\cdot[b+(-b)] = a\cdot 0 = 0 \Longrightarrow a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$. □

(3) $\left(\sum_i a_i\right)\cdot\left(\sum_j b_j\right) = \sum_{i,j} a_i\cdot b_j$.

证: 由左右分配律即得证. □

特殊的环:

(1)

定义 0.36 交换环: 若 $\forall a,b\in R$, $a\cdot b = b\cdot a$, 则称 R 为**交换环**.

(2)

定义 0.37 有单位元的环: 若 $\exists 1\in R$, s.t. $\forall a\in R$, $1\cdot a = a\cdot 1 = a$, 则称 R 为**有单位元的环**, 称 1 为 R 的**单位元**.

例 0.15: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 交换且有单位元. □

例 0.16: $(M_{n\times n},+,\times)$ [1] 非交换, 有单位元 $I_{n\times n}$. □

例 0.17: $(\mathbb{E},+,\times)$ 交换, 无单位元. □

定义 0.38 零因子: $0\neq a\in R$, 若 $\exists 0\neq b\in R$, s.t. $a\cdot b = 0$ 或 $b\cdot a = 0$, 则称 a 为 R 的**零因子**.

[1] $M_{n\times m} \equiv \{(a_{i,j})_{m\times n} \mid a_{i,j}\in\mathbb{R}\}$.

定义 0.39 整环: 有单位元, 交换, 无零因子的环.

定义 0.40 子环: 非空真子集 $\emptyset \neq R_1 \subseteq R$, 若 $(R_1, +, \cdot)$ 亦为环, 则称 R_1 为 R 的**子环**.

$\because (R_1, +)$ 为交换群, $\therefore (R_1, +) < (R, +)$.

定理 0.16 子环的判定: R_1 为 R 的子环 $\iff \forall a, b \in R_1$, $a - b \in R_1$, $a \cdot b \in R_1$.

定理 0.17: R 为有单位元的交换环, 则 R 为整环 $\iff \forall 0 \neq r \in R$, $a, b \in R$, 若 $r \cdot a = r \cdot b$, 则必有 $a = b$.

证: "$\Longrightarrow$": $r \cdot a = r \cdot b \iff r \cdot (a - b) = r \cdot a - r \cdot b = r \cdot b - r \cdot b = 0$,
$\because r \neq 0$ 且 R 为整环 (无零因子), $\therefore a - b = 0 \Longrightarrow a = b$.

"$\Longleftarrow$": 假设 R 有零因子, $r_0 \cdot a_0 = 0$, 则令 $r = r_0$, $\forall a, b \in R$, 若 $r \cdot a = r \cdot b = 0$, 则 $a - b = 0$ 或 $a - b = a_0$ 或 $a - b = a_0 + a_0, \cdots$, 矛盾, 故假设错误, R 无零因子.
又 $\because R$ 为有单位元的交换环, $\therefore R$ 为整环. □

定义 0.41 理想: 非空子集 $I \subseteq R$, 若 $\forall a, b \in I$, $r \in R$, $a - b \in I$, $r \cdot a \in I$, $a \cdot r \in I$, 则称 I 为 R 的**理想**.

定义 0.42 平凡理想: $(\{0\}, +, \cdot)$ 和 $(R, +, \cdot)$ 为 $(R, +, \cdot)$ 的**平凡理想**.

定义 0.43 单环: 只有平凡理想的环.

定理 0.18: 任意多个理想的交为理想.

证: $\because 0 \in \cap_{i \in K} I_i$, $\cap_{i \in K} I_i = \emptyset$.
$\because \forall a, b \in \cap_{i \in K} I_i$, $\therefore \forall a, b$, $\forall k \in K$, $a, b \in I_k$,
又 $\because \forall k \in K$,$(I_k, +) < (R, +)$, $\therefore \forall k \in K$,$a - b \in I_k \Longrightarrow a - b \in \cap_{i \in K} I_i$.

$\forall k \in K$, $a_k \in I_k$, 又 $\because I_k$ 为理想, $r \cdot a \in I_k$, $a \cdot r \in I_k \Longrightarrow r \cdot a \in I_k$, $a \cdot r \in I_k$.

综上, $\cap_{i \in K} I_k$ 为 R 的理想. □

定理 0.19: 若 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ 是 R 中理想的升链, 则 $\cup_i I_i$ 是 R 的理想.

定义 0.44 生成理想: R 为交换环, 非空子集 $\emptyset \neq S \in R$, 由 S 生成的理想是 R 中包含 S 的最小理想, 即 R 中包含 S 的所有理想的交, 记作 $\langle S \rangle$.

证: 假设 I_0 是 R 中包含 S 的最小理想, $J = \{I_k \mid k \in K\}$ 是 R 中包含 S 的所有理想的集合.
显然 $I_0 \in J$, 故 $\cap_k I_k \subseteq I_0$.
$\because \cap_{i \in K} I_k$ 为理想, 又 $\because I_0$ 为最小的理想, $\therefore |I_0| \leq |\cap_k I_k|$.
综上, 必有 $I_0 = \cap_k I_k$. □

- 由某个元素 a 生成的理想: $\langle a\rangle = \{r\cdot a \mid r\in R\}$.
- 由多个元素 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 生成的理想: $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i\in R\}$.
- 由集合 S 生成的理想: $\langle S\rangle = \{\sum_{i=1}^m \mid r_i\in R, a_i\in S, m\in\mathbb{Z}^+\}$.

可用理想得等价关系: I 是 R 的理想, 则 $r_1\sim r_2 \Longleftrightarrow r_1-r_2\in\mathbb{I}$, 从而得到等价关系: $[a]=a+I=\{a+r \mid r\in I\}$.

定义 0.45 商环: $\frac{R}{\sim}\equiv\{[a]\mid a\in R\}$.

$([a],[b])\mapsto[a+b]$ 和 $([a],[b])\mapsto[a\cdot b]$ 都是运算.

证: 要证 $([a],[b])\mapsto[a+b]$ 和 $([a],[b])\mapsto[a\cdot b]$ 都是运算, 即证这些映射与代表元无关,
即证 $a\sim a'$, $b\sim b'$, $[a']+[b']=[a+b]$, $[a']\cdot[b']=[a\cdot b]$.

$\because a\sim a'$, $b\sim b'$, $\therefore a-a'\in I$, $b-b'\in I \Longrightarrow a+b-(a'+b')=(a-a')+(b-b')\in I$
$\Longrightarrow a+b\sim a'+b'$, 故 $([a,b])\mapsto[a+b]$ 与代表无关, 是运算.

$\because a\sim a'$, $b\sim b'$, $\therefore a-a'\in I$, $b-b'\in I$,
设 $a-a'\equiv h_1\in I$, $b-b'\equiv h_2\in I$, 则 $a'\cdot b'=(a+h_1)\cdot(b+h_2)=a'\cdot b'+a'\cdot h_2+h_1\cdot b'+h_1\cdot h_2$,
其中 $\because h_1,h_2\in I\Longrightarrow h_1\cdot h_2\in I$, 而由理想的定义, $a'\cdot h\in I$, $h_1\cdot b'\in I$,
$\Longrightarrow a'\cdot b'=a\cdot b-a'\cdot h_1-h_2\cdot b\in I$, 故 $[a']\cdot[b']=[a'\cdot b']=[a\cdot b]$. □

定义 0.46 环同态: $(R_1,+,*)$ 和 $(R_2,+,\cdot)$ 为环, 映射 $f:R_1\to R_2$ 满足

(1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$

(2) $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$

则称 f 为 R_1 到 R_2 的**环同态**.

由环同态的定义, f 必为 $(R_1,+)$ 到 $(R_2,+)$ 的群同态, 故 $f(0)=0$, $f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}$.

定义 0.47 核: $\ker f\equiv\{a\in R_1\mid f(a)=0\}$.

定义 0.48 像: $\operatorname{Im} f\equiv\{f(a)\mid a\in R_1\}$.

$\operatorname{Im} f\subseteq R_2$.

定理 0.20: $\ker f$ 为理想.

证: $\forall a,b\in\ker f$, $r\in R_1$, $f(a-b)=f(a+(-b))=f(a)+f(-b)=f(a)-f(b)=0-0=0\Longrightarrow a-b\in\ker f$.
$f(r\cdot a)=f(r)\cdot f(a)=f(r)\cdot 0=0\Longrightarrow r\cdot a\in I$,
同理 $a\cdot r\in I$.

综上, $\ker f$ 为 R_1 的理想. □

定义 0.49 单同态: 单射的环同态.

单同态 $\iff \ker f = \{0\}$.

定义 0.50 满同态: 满射的环同态.

满同态 $\iff \operatorname{Im} f = R_2$.

定义 0.51 同构: 双射的环同态.

定义 0.52 典范同态: I 为 R 的理想, $\pi : R \to \frac{R}{I}$, $a \mapsto [a]$ 称为**典范同态**.

典范同态是满同态.

例 0.18: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 为环.
$\langle 2 \rangle = \mathbb{O} \equiv \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
$\langle 3 \rangle \equiv \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
$\langle 2, 3 \rangle \equiv \{2n + 3m \mid n, m \in Z\} = \mathbb{Z}$. $\langle 1 \rangle \equiv \mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ 的任何理想均由一个数生成. 更准确地说, 若 I 为 $\mathbb{Z}$ 的理想, 则 $I = \langle n \rangle$, 其中 n 为 I 中最小的正整数. □

(此处其实用到了这样一个定理: 任何一个由自然数组成的集合均存在最小正整数.)

证: 若 $p \in \mathbb{Z}$, $p \in \langle n \rangle$, 我们无妨假设 $p > n$, 设 $p = kn + r$, 其中 $0 \leq r < n$.
若 $r \neq 0$, 则 $r = p - kn \in I$, 但 $0 \leq r < n$ 而 n 为 $\langle n \rangle$ 中最小的正整数矛盾, 故 $r = 0$, $p = kn$. □

定义 0.53 剩余类环: $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$.

例 0.19: $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$, $[2] \cdot [3] = [6] = [0]$, 故 $\mathbb{Z}_6$ 有零因子. □

0.7 域

定义 0.54 域: 若 $(F, +, \cdot)$ 满足
$(F, +)$ 为交换群 (单位元记作 0)

(2) $(F^*, \cdot)$ 为交换群 (单位元记作 1), 其中 $F^* = F - \{0\}$

(3) **左分配律**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
右分配律: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

则称 $(F, +, \cdot)$ 为**域**.

由于有 0 和 1 这两个元素, $|F| \geq 2$. 当 $|F| = 2$ 时, $F = \{0, 1\} \approxeq \mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{\langle 2 \rangle}$.

例 0.20: $\mathbb{Z}_2$ 是最小的有限域. $\mathbb{Q}$ 为最小的无限域. □

定义 0.55 **有理数:** $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\mid n\neq 0,n,m\in\mathbb{Z}\right\}$, 即 $\forall q\in\mathbb{Q}$, $\exists m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, $q=\frac{m}{n}$.

定义 0.56 **域的特征:** $\operatorname{char}F\equiv$ 使得 $n\cdot 1=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{ 个 }1\text{ 相加}}=0$ 的最小正整数.

例 0.21: $\operatorname{char}\mathbb{Z}_2=2$, $\operatorname{char}\mathbb{Q}=0$. $\square$

$p=\operatorname{char}F$ 必为质数, 否则 $\exists m,n<p$, s.t. $0=p\cdot 1=(n\cdot m)\cdot 1=(m\cdot 1)\cdot(n\cdot 1)\Longrightarrow n\cdot 1=0$ 或 $m\cdot 1=0$ 与域的特征的定义矛盾.

当 p 为质数且 $\operatorname{char}\mathbb{Z}_p=p$ 时, $\mathbb{Z}_p$ 为域.

定义 0.57 **域同态:** $(F_1,+,\cdot)$ 和 $(F_2,+,\cdot)$ 为域, 映射 $f:F_1\to F_2$ 满足

(1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$

(2) $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$

则称 f 为 F_1 到 F_2 的**域同态**.

域同态的性质:

(1) $f(0)=0$.

(2) $f(1)=1$ 或 0.

证: $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)\Longrightarrow f(1)-f(1)\cdot f(1)=0\Longrightarrow f(1)=0$ 或 1. $\square$

(3) 若 $f(1)=0$, 则 $\forall r\in F_1$, $f(r)=f(r\cdot 1)=f(r)\cdot f(1)=f(r)\cdot 0=0$.

(4) 若 $f(1)=1$, 则 $\ker f=\{0\}$, 此时 f 单射.

证: $\forall r\in F^*$, $r^{-1}\in F^*$, $1=f(1)=f(r\cdot r^{-1})=f(r)\cdot f(r^{-1})\Longrightarrow f(r)\neq 0$, $f(r^{-1})\neq 0$, 故 $\forall r\neq 0$, $f(r)\neq 0$, $\ker f=\{0\}$. $\square$

Chapter 1

向量空间

定义 1.1 <u>向量空间</u>**:** 交换群 $(V, +)$ 和域 F, 数乘映射 $\alpha : F \times V \to V$, 若满足

$\alpha(r, u+v) = \alpha(r, u) + \alpha(r, v)$ (可简写为 $r(u+v) = ru + rv$)

(2) $\alpha(r+t, u) = \alpha(r, u) + \alpha(t, u)$ (可简写为 $(r+t)u = ru + tu$)

(3) $\alpha(r \cdot t, u) = \alpha(r, \alpha(t, u))$ (可简写为 $(rt)u = r(tu)$)

(4) **有单位元**: $\exists 1 \in F$, s.t. $\alpha(1, u) = u$ (可简写为 $1u = u$)

则称 V 是 F 上的**向量空间**.

例 1.1 <u>直角坐标系</u>**:** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 为域, $(\mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, +)$ 为交换群, 满足

(1) $r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)$

(2) $(r+t)(x, y) = ((r+t)x, (r+t)y) = (rx + tx, ry + ty) = (rx, ry) + (tx, ty) = r(x, y) + t(x, y)$

(3) $(r \cdot t)(x, y) = (rtx, rty) = r(tx, ty) = r(t(x, y))$

(4) $1(x, y) = (x, y)$

故 $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. □

$0v = 0$. (注意两个 0 的区别, 等号左边的 0 为域 F 中的零元, 等号右边的 0 为 V 中的零向量.)

证: $0v = (0+0)v = 0v + 0v \Longrightarrow 0v = 0$. □

$r \in F$, $0 \in V$, 则 $r0 = 0$.

证: $r0 = r(0+0) = r0 + r0 \Longrightarrow r0 = 0$. □

$-1v = -v$.

证: $-1v = -(1v) = -v$. □

例 1.2: $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.
$\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间.
$\because$ 对 $c \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^2$, $cv \notin \mathbb{R}^2$, $\therefore \mathbb{R}^2$ 不是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. □

例 1.3: $F^n \equiv \{(r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1, \cdots, r_n) + (l_1, \cdots, l_n) = (r_1 + l_1, \cdots, r_n + l_n)$, $r(r_1, \cdots, r_n) = (rr_1, \cdots, rr_n)$. F^n 为 F 上的向量空间. $\square$

证: $\because$ $r((r_1, \cdots, r_n) + (l_1, \cdots, l_n)) = r(r_1 + l_1, \cdots, r_n + l_n) = (rr_1 + rl_1, \cdots, rr_n + rl_n) = (rr_1, \cdots, rr_n) + (rl_1, \cdots, rl_n) = r(r_1, \cdots, r_n) + r(l_1, \cdots, l_n)$,
且 $(r+t)(r_1, \cdots, r_n) = ((r+t)r_1, \cdots, (r+t)r_n) = (rr_1 + tr_1, \cdots, rr_n + tr_n) = (rr_1, \cdots, rr_n) + (tr_1, \cdots, tr_n) = r(r_1, \cdots, r_n) + t(r_1, \cdots, r_n)$,
且 $(r \cdot t)(r_1, \cdots, r_n) = (rtr_1, \cdots, rtr_n) = r(tr_1, \cdots, tr_n) = r(t(r_1, \cdots, r_n))$,
且 $1(r_1, \cdots, r_n) = (r_1, \cdots, r_n)$,
$\therefore F^n$ 为 F 上的向量空间. $\square$

定义 1.2 子空间: $\emptyset \neq S \subseteq V$, 若 S 为 V 的子群, 且在相同的数乘下构成 F 上的向量空间, 则称 S 是 V 的子空间.

定理 1.1 子空间的判定(课本定理1.1): S 为 V 的子空间 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in S$, $r, t \in F$, $ra + tb \in S$ (即线性运算封闭).

证: "$\Longrightarrow$": $ra \in S$, $-tb \in S$, 又 $\because S$ 为 V 的子群, $ra - (-tb) \in S$.

"$\Longrightarrow$": 令 $r = 1$, $t = -1$, 有 $a - b \in S \Longrightarrow S < V$.
令 $t = 0$, 有 $ra \in S$, 故 S 为 V 的子空间.

综上, 得证. $\square$

子空间的交是子空间.

证: 设 $S_1, \cdots, S_n$ 为 V 的子空间, 则 $S_1, \cdots, S_n$ 为 V 的子群 $\Longrightarrow \cap_{i=1}^n S_i$ 为 V 的子群.

$\forall u, v \in \cap_{i=1}^n S_i$, $\forall k$, $u, v \in S_k \Longrightarrow u, v$ 满足与 F 中向量相同的数乘映射.

综上, 得证. $\square$

S, T 是 V 的子空间, $S + V \equiv \{u + v \mid u \in S, v \in T\}$ 为 V 的子空间.

证: $\forall w_1, w_2 \in S + T$, $r, t \in F$,
$w_1 \in S + T \Longrightarrow w_1 = u_1 + v_1$, $u_1 \in S$, $v_1 \in T$,
$w_2 \in S + T \Longrightarrow w_2 = u_2 + v_2$, $u_2 \in S$, $v_2 \in T$.
$rw_1 + tw_2 = r(u_1 + v_1) + t(u_2 + v_2) = (ru_1 + tu_2) + (rv1 + tv_2)$, 其中 $ru_1 + tu_2 \in S$, $rv_1 + tv_2 \in T \Longrightarrow rw_1 + tw_2 \in S + T$,
故 $S + T$ 为 V 的子空间. $\square$

定义 1.3 生成子空间和生成集: $\emptyset \neq S \subseteq V$, S 的**生成子空间**为 $\langle S \rangle \equiv$ 包含 S 的最小子空间 $= \{\sum_{i=1}^n r_i u_i \mid r_i \in F, u_i \in S, r$
其中称 S 为**生成集**.

例 1.4: 向量空间 $\mathbb{R}^2$,
$S_x = \langle\{(1, 0)\}\rangle = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = x$ 轴,
$S_y = \langle\{(0, 1)\}\rangle = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = y$ 轴,
$\langle\{(1, 0), (0, 1)\}\rangle = \langle\{(1, 1), (1, -1)\}\rangle = \mathbb{R}^2$, 故对同一生成子空间, 生成集不唯一. $\square$

定义 1.4 <u>线性无关</u>: 非零元 $u_1,\cdots,u_m$, 若 $r_1u_1+\cdots+\cdots+r_mu_m=0\Longrightarrow r_1=\cdots=r_m=0$, 则称 $u_1,\cdots,u_m$ **线性无关**.
若 S 中任意有限个元素线性无关, 则称 S **线性无关**.

例 1.5: $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 线性无关. □

证: $r_1(1,0)+r_2(0,1)=(r_1,r_2)=0=(0,0)\Longrightarrow r_1=0,\ r_2=0$. □

例 1.6: $\mathbb{R}^2$ 上线性无关, 即两非零元夹角非零. □

单个非零元 v 线性无关.

证: $rv=0$ 且 $v\neq 0\Longrightarrow r=0$, 故 v 线性无关. □

定义 1.5 <u>线性相关</u>: $u_1,\cdots,u_m$, 若 $\exists$ 不全为零的 $r_1,\cdots,r_m$, s.t. $r_1u_1+\cdots+r_mu_m=0$, 则称 $u_1,\cdots,u_m$ **线性相关**.

若 u,v 线性相关, 则两者共线.

证: $\exists r,t$ 不全为零, s.t. $ru+tv=0$, 无妨设 $0\neq r\in F$, 则 $ru=-tv\Longrightarrow r^{-1}ru=-r^{-1}tv\Longrightarrow u=-\frac{u}{r}v$ □

定义 1.6 <u>线性表示</u>: v 可由 $u_1,\cdots,u_n$ **线性表示** $\Longleftrightarrow \exists r_1,\cdots,r_n\in F$, s.t. $v=\sum_{i=1}^n r_iu_i$.

定理 1.2 <u>(课本定理1.6)</u>: S 线性无关 $\Longleftrightarrow \langle S\rangle$ 中的每个向量可由 S 中元素唯一地线性表示
$\Longleftrightarrow S$ 中任一向量不能由 S 中其余向量线性表示.

证: 设 $S=\{u_1,\cdots,u_m\}$.

第一个 "$\Longrightarrow$": $v\in\langle S\rangle$, 则 v 可由 S 中的元素线性表示, 即 $\exists r_1,\cdots,r_m$, s.t. $v=r_1u_1+\cdots+r_mu_m$.
要证这种线性表示是唯一的, 假设 v 的另一种线性表示为 $v=r_1'u_1+\cdots+r_m'u_m$.
$v-v=(r_1-r_1')u_1+\cdots+(r_m-r_m')u_m=0$, 又 $\because S$ 线性无关, 即 $u_1,\cdots,u_m$ 线性无关, $\therefore r_1'=r_1,\ r_m'=r_m$, 故两种线性表示相同.

第一个 "$\Longleftarrow$": $0\in\langle S\rangle$, 由于 $0u_1+\cdots+0u_m=$ 是且是 0 唯一的线性表示, 故 S 线性无关.

第二个 "$\Longrightarrow$": 不妨假设 u_1 可由 $u_2,\cdots,u_m$ 线性表示, 即 $u_1=t_2u_2+\cdots+t_mu_m$.
若 $r_1u_1+\cdots+r_mu_m=0$, 则 $r_1=\cdots=r_m=0$ 或 $r_1\neq 0,\ r_2=-r_1t_2,\cdots,r_m=-r_mt_m$, 从而 S 线性相关, 故假设错误, u_1 不可由 $u_2,\cdots,u_m$ 线性表示.

第二个 "$\Longleftarrow$": 假设 S 线性相关, 则 $\exists$ 非零 $r_1,\cdots,r_m$, s.t. $r_1u_1+\cdots+r_mu_m=0$, 不妨设 r_1 非零, 则 $u_1=-\frac{r_2}{r_1}u_2-\cdots-\frac{r_m}{r_1}u_m$, 即 u_1 可由 S 中其余向量线性表示, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关. □

定理 1.3 <u>(课本定理1.7)</u>: $\emptyset\neq S\subseteq V$, 下列等价:

(1) S 线性无关, 且 $V=\langle S\rangle$.

(2) $\forall v\in V$, 可用 S 中元素唯一地线性表示.

(3) S 是 V 的极小生成集 (即 S 去除任意元素都无法生成 V, 或 S 的任意真子集都无法生成 V).

(4) S 是 V 的极大线性无关集 (即 S 增加任意元素都线性相关, $\forall u \in V$ 且 $u \notin S$, $S \cup \{u\}$ 线性相关).

证: 由定理 1.2 证得 (1)(2) 等价.

设 $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$.

(1)$\Longrightarrow$(3): 假设 $\exists S' \subsetneq S$, s.t. $V = \langle S' \rangle$, 则 $\forall v \in S - S' \subseteq V$, $v = \sum_{i=1}^{m} r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S'$, $m \in \mathbb{N}$, 即 v 可由 S 中的部分向量线性表示, 与 S 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是 V 的极小生成集.

(3)$\Longrightarrow$(1): S 为 V 的生成集, 即 $V = \langle S \rangle$.

假设 S 线性相关, 即 $\exists r_1, \cdots, r_m$ 不全为零, s.t. $\sum_{i=1}^{m} r_i u_i = 0$, 不妨设 $r_1 \neq 0$, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 + \cdots + \frac{r_m}{r_1} u_m$, 则 $S - \{u_1\}$ 仍可以生成 V, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关.

(1)$\Longrightarrow$(4): 假设 S 不是极大线性无关集, 则 $\exists v \in V - S$, s.t. $S \cup \{v\}$ 线性无关.

又 $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore v = \sum_{i=1}^{m} r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S$, $m \in \mathbb{N}$, 即线性无关集 $S \cup \{v\}$ 中的向量 v 可由其中的部分向量线性表示, 与 $S \supseteq$ 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是极大线性无关集.

(4)$\Longrightarrow$(1): $\because S$ 是 V 的极大线性无关集, $\therefore S$ 线性无关.

假设 $V \neq \langle S \rangle$, $\exists v \in V - S$, s.t. v 无法由 S 中的元素线性表示 $\Longrightarrow S \cup \{v\}$ 为线性无关集, 与 S 为最大线性无关集矛盾, 故假设错误, $V = \langle S \rangle$.

综上, 得证. □

定义 1.7 基: 任何生成向量空间 V 的线性无关集. 基的阶数称为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

定理 1.4 (课本定理1.12): 向量空间的任何基都有相同的阶, 即 $\dim V$ 不依赖于基的选取.

例 1.7: $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 为 F^n 的一组基. □

证: $r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) = 0 \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$, 故 $e_1, \cdots, e_n$ 线性无关.

又 $\langle \{e_1, \cdots, e_n\} \rangle = \{r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F,\ 对\ i = 1, \cdots, n\} = F$, 故得证. □

找基的方法:

(1) 若 $0 \neq u_1 \in V$, 则 $\{u_1\}$ 线性无关.

(2) 若 $u_2 \in V - \langle u_1 \rangle$ 且 u_2 与 u_1 线性无关, 则 $\{u_1, u_2\}$ 线性无关.

(3) 重复以上操作, 直至无法找到新的线性无关元素, 即得到极大线性无关集, 此即向量空间的基.

定理 1.5 (课本定理1.9): 线性无关集 $I \subseteq V$, $S \subseteq V$ 是 V 的生成集, 且 $I \subseteq S$, 则 $\exists V$ 的基 $\mathcal{B}$, s.t. $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.

定义 1.8 直和: (1) **外直和**: 若 $V_1, \cdots, V_n$ 是 F 上的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \equiv \{(v_1, \cdots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$, 满足

- $(v_1, \cdots, v_n) + (u_1, \cdots, u_n) = (v_1 + u_1, \cdots, v_n + u_n)$
- $r(v_1, \cdots, v_n) = (rv_1, \cdots, rv_n)$

则$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 F 的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 $V_1, \cdots, V_n$ 的**外直和**.

(2) **内直和**: V 是 F 上的向量空间, $V_1, \cdots, V_n$ 是 V 的子空间, 若 $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) =$

$\{0\}$, 则称 V 为 $V_1, \cdots, V_m$ 的**内直和**, 记作 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, 称 V_i 为**直和项**.

内/外直和的关系: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, $V_1' = \{(v_1, 0, \cdots, 0) \mid v_i \in V_i\}$, $\cdots$, $V_m' = \{(0, 0, \cdots, v_m) \mid v_m \in V_m\}$ 是 V 的子空间, 则 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ 且 $V_i' \cap (\cup_{j\neq i} V_j) = \{0\} \Longrightarrow V_i = \bigoplus_{i=1}^m V_i'$, 故内/外直和是等价的, 以下我们不明确区分内/外直和, 均用内直和.

例 1.8: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y$. □

定理 1.6 (<u>课本定理1.5</u>): $\{V_i \mid i \in J\}$ 是 V 的子空间集合, $V = \sum_{i\in J} V_i$, 则下列等价:

(1) $V = \bigoplus_{i\in J} V_i$.

(2) $V_i \cap (\sum_{j\neq i} V_j) \neq \{0\}$.

(3) $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式.

(4) V 中任一向量 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \cdots + v_n$, 分解式中的有限个非零元 $v_i \in V_i$ 组成的集合成为支集.

证: (1)$\Longleftrightarrow$(2): 由直积的定义即得证.

(2)$\Longrightarrow$(3): 假设 $0 = s_{i1} + \cdots + s_{in}$ 且 s_{ij} 不全为零, 不妨设 $s_{i1} \neq 0$, 则 $V_{i1} \ni s_{i1} = -s_{i2} - \cdots - s_{ij} \in \sum_{j=2}^n V_{ij}$ $\Longrightarrow s_{i_1} \in V_{i_1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{i_j})$, $s_{i_1} \neq 0$ 与 $V_{i_1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{i_j}) = \{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式.

(3)$\Longrightarrow$(4): $\forall v \in V$, $v = u_1 + \cdots + u_n$, 其中 $u_i \in V_i$.
假设 $v = w_1 + \cdots + w_m$, 其中 $w_i \in V_i$.
$0 = v - v = u_1 + \cdots + u_n - w_1 - \cdots - w_n$, 将属于相同子空间的元素合并到一起, 得 $0 = (u_{t_1} - w_{t_1}) + \cdots + (u_{t_k} - w_{t_k}) + u_{t_{k+1}} + \cdots + u_{t_n} - w_{t_{k+1}} - w_{t_m}$, 由 (2) 知 $k = n = m$ 且 $v_{t_i} = u_{t_i}$, 故 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \cdots + v_n$.

(4)$\Longrightarrow$(2): 假设 $V_i \cap (\sum_{j\neq i} V_j) \neq \{0\}$, 则 $V_i \cap (\sum_{j\neq i} V_j) \supsetneq \{0\}$, 即 $\exists 0 \neq u \in V_i \cap (\cup_{j\neq i} V_j)$,
不妨设 $u \in V_1$ 且 $u \in V_2$, 则 $v = v_1 + \cdots + v_n = (v_1 + u) + (v_2 - u) + \cdots + v_n$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $v_1 + u \in V_1$,$v_2 - u \in V_2$, v 的分解式不唯一, 矛盾, 故假设错误, $V_i \cap (\sum_{j\neq i} V_j) = \{0\}$.

综上, 得证. □

定理 1.7 (<u>课本定理1.8</u>): $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 是向量空间 V 的基 $\Longleftrightarrow V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$.

证: "$\Longrightarrow$": $\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore V = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F\} = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_n \rangle$.
$\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore v_1, \cdots, v_n$ 线性无关 $\Longrightarrow \forall 0 \neq u \in \langle v_i \rangle$, $u = r_i v_i$ 且无法由 $\{v_j \mid j \neq i\}$ 线性表示 $\Longrightarrow u \notin V_i \cap (\cup_{j\neq i} V_j)$,
$0 = 0 v_i \in \langle v_i \rangle$ 且 $0 = \sum_{j\neq i} 0 v_j \Longrightarrow 0 \in V_i \cap (\cup_{j\neq i} V_j)$
$\Longrightarrow V_i \cap (\cup_{j\neq i} V_j) = \{0\}$.
故 $V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$.

"$\Longleftarrow$": 一方面, $V = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$;
另一方面, 假设 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性相关, 则 $\exists$ 不全为零的 $r_1, \cdots, r_n$, s.t. $\sum_i r_i v_i = 0$,
不妨设 $r_i \neq 0$, 则 $r_i v_i = -\sum_{j\neq i} r_j v_j \Longrightarrow 0 \neq r_i v_i \in V_i$ 且 $r_i v_i = -\sum_{j\neq i} r_j v_j \in \cup_{j\neq i} V_j \Longrightarrow r_i v_i \in V_0 \cap (\cup_{j\neq i} V_j) \Longrightarrow V_0 \cap (\cup_{j\neq i} V_j) \neq \{0\}$, 与直和的定义矛盾, 故假设错误, $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关.
故 $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 V 的基. □

定理 1.8 (课本定理1.4): S 为 V 的子空间, 则 $\exists V$ 的子空间 S^c, s.t. $V = S \oplus S^c$, 称 S^c 为 S 的补空间.

证: $\mathcal{B}_1$ 为 S 的基, 则 $\mathcal{B}_1$ 为 V 中的线性无关集,
$\mathcal{B}_1$ 总可以扩张为 (即添加一些元素) 成 V 的基, 即 $\exists \mathcal{B}_2$, s.t. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关且 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Longrightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$, 故 $S^c = \langle \mathcal{B} \rangle$. □

例 1.9: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y = S_l \oplus S_{l'}$, 其中 S_l 和 $S_{l'}$ 分别为过原点直线 l 和 l' 对应的子空间, l 与 l' 不共线. □

补空间总存在, 但不唯一.

定理 1.9 (课本定理1.13): (1) $\mathcal{B}$ 是 V 的基, 若 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, 则 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T$, 若 $\mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, 则 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

证: (1) $\because \mathcal{B}$ 是 V 的基, $\therefore \forall u \in V$, $u = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$.
$\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1, n \in \mathbb{N}\}$, $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_2, n \in \mathbb{N}\}$.
$u = \sum_{i=1}^t r_i v_i + \sum_{i=t+1}^k r_i v_i$, 其中 $v_1, \cdots, v_t \in \mathcal{B}_1$, $v_{t+1}, \cdots, v_k \in \mathcal{B}_2 \Longrightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.
$\forall u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{B}_2 \rangle$,$u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1$,
且 $u \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^n l_i w_i$, 其中 $l_i \in F$, $w_i \in \mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow 0 = u - u = \sum r_i v_i - \sum l_i w_i$,
又 $\because \mathcal{B}$ 为基, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\therefore r_i, w_i$ 线性无关 $\Longrightarrow r_i = l_i = 0$, $\forall i$
$\Longrightarrow u = 0$.
综上, $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T \Longleftrightarrow V = S + T$ 且 $S \cap T = \{0\}$.
假设 $v \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, 则 $v \neq 0$, $\langle v \rangle = S \cap T$, 与 $S \cap T = \{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.
$\because V = S + T$, $\therefore \forall u \in V$, $u = u_1 + u_2$, 其中 $u_1 \in S$, $u_2 \in T$,
$\because \mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, $\therefore u_1 = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, $u_2 = \sum_{i=k+1}^n$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \cdots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \cdots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow u = \sum_{i=1}^m r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, 即 $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle$.
假设 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性相关, 则 $\exists r_i \in F$ 不全为零, $\sum_{i=1}^n r_i v_i = \sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \cdots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \cdots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$,
$\because \mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 为基, $\therefore \mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow \sum_{i=1}^k r_i v_i \neq 0$, $\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \neq 0$, 与 $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

□

定理 1.10 (课本定理1.14): S, T 是 V 的子空间, $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$. 特别地, 若 T 是 S 的补空间, 则 $\dim S + \dim T = \dim(S \oplus T)$.

证: 设 $S \cap T$ 的基为 $\mathcal{A}$,
$\because S \cap T$ 为 S 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{A}$ 扩张成 S 的基 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$,
$\because S \cap T$ 为 T 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{A}$ 扩张成 T 的基 $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$.

接下来需要用到这样一个事实: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S + T$ 的基. 所以先来证明它:

证: $\forall w \in S+T$, $w=u+v$, 其中 $u \in S$, $v \in T \Longrightarrow u \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle$, $v \in \langle \mathcal{A} + \mathcal{C} \rangle$, 故 $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S+T$.

不妨设 $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$, 其中 $v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

设 $v_1, \cdots, v_k \in \mathcal{A}$, 则 $\sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$,
令 $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, 则 $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i \in \langle \mathcal{A} \rangle$ 且 $x = -\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \Longrightarrow x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = (S-T) \cap T = \emptyset$.
$\because x \in \langle \mathcal{B} \rangle$, $\therefore x \in \mathcal{S}$, 又 $\because x \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$, $\therefore x \in T \Longrightarrow x \in S \cap T = \langle \mathcal{B} \rangle$. $\Longrightarrow x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle \Longrightarrow x = 0$.
又 $\because \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性独立, 故 $\forall i$, $r_i = 0 \Longrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性无关.

综上, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S+T$ 的基. □

故

$$\dim S + \dim T = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + \dim(S \cap T) = \dim(S+T) + \dim(S \cap T).$$

□

Chapter 2

线性变换

2.1 线性变换

定义 2.1 线性变换: 向量空间之间的映射. F 为域, V, W 为 F 上的向量空间, 映射 $\tau : V \to W$, 若 $\tau(ru+tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$, $r, t \in F$, $u, v \in V$, 则称 τ 为 V 到 W 的**线性变换**.

(类似于同态)

取 $r = 1$, $t = 1$, 则 $\tau(u+v) = \tau(u) + \tau(v)$, 故 τ 是 V 到 W 的群同态, 从而 $\tau(0) = 0$, $\tau(-v) = -\tau(v)$.

$\mathcal{L}(V, W) \equiv \{V$ 到 W 的线性变换$\}$, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V) = \{V$ 到 V 的线性变换$\} = \{V$ 上的线性算子$\}$.

定义 2.2 单线性变换: 单射的线性变换.

定义 2.3 满线性变换: 满射的线性变换.

定义 2.4 同构: 双射的线性变换. 若两个向量空间 V, W 之间存在同构, 也称这两个向量空间同构, 记作 $V \approx W$.

取 $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$, $v \overset{\sigma}{\mapsto} \sigma(v) \Longrightarrow v \overset{\tau+\sigma}{\mapsto} \tau(v) + \sigma(v)$ 也是线性变换, 且 $\tau + \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$.

证: 由映射的像的唯一性, 若 $v = u$, 则 $\tau(v) = \tau(u)$, $\sigma(v) = \sigma(u) \Longrightarrow (\tau+\sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \tau(u) + \sigma(u) + (\tau + \sigma)(u)$, 故 $\tau + \sigma$ 是映射.

$(\tau+\sigma)(ru+tv) = \tau(ru+tv) + \sigma(ru+tv) = r\tau(u) + t\tau(v) + r\sigma(u) + t\sigma(v) = r[\tau(u) + \sigma(u)] + t[\tau(v) + \sigma(v)] = r[(\tau+\sigma)(u)] + t[(\tau+\sigma)(v)]$, 故 $\tau + \sigma$ 为 V 到 W 的线性变换. □

由此定义了线性变换之间的加法.

$(\mathcal{L}(V, W), +)$ 为交换群.

证: $(\mathcal{L}(V, W), +)$ 满足

(1) **结合律**: $\forall v \in V$, $[(\tau+\sigma)+\delta](v) = (\tau+\sigma)(v) + \delta(v) = \tau(v) + \sigma(v) + \delta(v) = \tau(v) + (\sigma(v) + \delta(v)) = \tau(v) + (\sigma+\delta)(v) = [\tau + (\sigma+\delta)](v) \Longrightarrow [(\tau+\sigma)+\delta] = [\tau + (\sigma+\delta)]$.

(2) **有单位元** 0: 零映射 $0(v) = 0$, $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W)$, $(0+\tau)(v) = 0(v) + \tau(v) = 0 + \tau(v) = \tau(v) + 0 = \tau(v) + 0(v) = (\tau+0)(v)$.

(3) **有逆元**: $\forall \tau \in \mathcal{L}(V,W)$, $\exists -\tau$, s.t. $(-\tau)(v) = -\tau(v) \Longrightarrow [\tau + (-\tau)](v) = \tau(v) - \tau(v) = 0 = 0(v)$.

(4) **交换律**: $\forall v \in V$, $(\tau+\sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \sigma(v) + \tau(v) = [\sigma+\tau](v)$.

故 $\mathcal{L}(V,W)$ 为交换群. □

$\forall r \in F$, $v \in \mathcal{L}(V,W)$, $v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v) \Longrightarrow v \overset{r\tau}{\mapsto} r\tau(v)$ 是线性变换, 且 $r\tau \in \mathcal{L}(V,W)$.

证: 由映射的像的唯一性, $\because v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$ 是唯一的, $\therefore v \overset{r\tau}{\mapsto} r\tau(v)$ 是唯一的, 故 $r\tau$ 是映射.
$(r\tau)(v) = r\tau(v) = r[\tau(v)]$, 故 $r\tau$ 为 V 到 W 的线性变换. □

$\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V,W),+)$ 为交换群, 且其满足

(1) $\forall v \in V$, $[(r+t)\tau](v) = (r+t)\tau(v) = r\tau(v) + t\tau(v) = (r\tau + t\tau)(v) \Longrightarrow (r+t)\tau = r\tau + t\tau$

(2) $\forall v \in V$, $[(rt)\tau](v) = (rt)\tau(v) = r[t\tau(v)] = [r(t\tau)](v) \Longrightarrow (rt)\tau = r(t\tau)$

(3) $\forall v \in V$, $[r(\tau+\sigma)](v) = r(\tau+\sigma)(v) = r[\tau(v)+\sigma(v)] = r\tau(v) + r\sigma(v) = (r\tau + r\sigma)(v) \Longrightarrow r(\tau+\sigma) = r\tau + r\sigma$

(4) 恒等映射 $1 : \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(V,W)$, $\tau \overset{1}{\mapsto}$, $\forall v \in V$, $(1\tau)(v) = 1[\tau(v)] = \tau(v) \Longrightarrow 1\tau = \tau$

故得证. □

定理 2.1 (<u>课本定理2.1</u>): (1) $\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间.

(2) $\tau \in \mathcal{L}(V,W)$, $\sigma \in \mathcal{L}(W,U)$, 则 $\sigma \circ \tau \in \mathcal{L}(V,U)$.

(3) τ 是 V 到 W 的同构, 则 $\tau^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$.

(4) $\mathcal{L}(V)$ 既是向量空间, 也是环, 且两者的加法运算是相同的, 故 $\mathcal{L}(V)$ 是**代数**.

$\mathcal{L}(V)$ 是环.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V),+)$ 为交换群, 且满足

(1) **结合律**: $\because$ 映射的复合有结合律, $\therefore \mathcal{L}(V)$ 中元素的复合有结合律

(2) **左右分配律**: $\forall v \in V$, $[(\sigma+\tau)\delta](v) = (\sigma+\tau)[\delta(v)] = \sigma[\delta(v)] + \tau[\delta(v)] = (\sigma\delta)(v) + (\tau\delta)(v) \Longrightarrow (\sigma+\tau)\delta = \sigma\delta + \tau\delta$
$[\sigma(\tau+\delta)](v) = \sigma[(\tau+\delta)(v)] = \sigma[\tau(v)+\delta(v)] = \sigma[\tau(v)] + \sigma[\delta(v)] = \sigma\tau(v) + \sigma\delta(v) \Longrightarrow \sigma(\tau+\delta) = \sigma\tau + \sigma\delta$

故得证. □

定义 2.5 <u>核空间</u>: $\ker \tau \equiv \{v \mid \tau(v) = 0\} \subseteq V$.

定义 2.6 <u>像空间</u>: $\operatorname{Im} \tau \equiv \{\tau(v) \mid v \in V\}$.

定理 2.2 (课本定理2.3): (1) τ 满线性变换 $\iff \operatorname{Im}\tau = W$.

(2) τ 单线性变换 $\iff \ker\tau = \{0\}$.

定理 2.3 (课本定理2.2): $\mathcal{B}$ 是 V 的基, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 则 τ 可由 τ 在 $\mathcal{B}$ 上的像唯一确定.

证: 若已知 $\tau(b_i) \forall b_i \in \mathcal{B}$, 则 $\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$, $r_i \in F$, $b_i \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}^+$
$\Longrightarrow \tau(v) = \tau\left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i \tau(b_i)$. □

同构的向量空间有很多性质可以相互传递, 下面我们就来讨论这件事.

定理 2.4 (课本定理2.4): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ 同构, S 是 V 真子集, 则

(1) $V = \langle S \rangle \iff W = \langle \tau(S) \rangle$.

(2) S 线性无关 $\iff \tau(S)$ 线性无关.

(3) S 是 V 的基 $\iff \tau(S)$ 是 V 的基.

证: (1) "$\Longrightarrow$": $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore \forall v \in V$, $v = \sum_i r_i s_i$,
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall w \in W$, $\exists v \in V$, s.t. $w = \tau(v) \Longrightarrow \tau(v) = \tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i)$.
"$\Longleftarrow$": $\because W = \langle \tau(S) \rangle$, $\therefore \forall w \in W$, $w = \sum_i r_i \tau(s_i)$,
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall v \in W$, $\exists w \in W$, s.t. $v = \tau^{-1}(w) = \tau^{-1}\left(\sum_i r_i \tau(s_i)\right) = \sum_i r_i \tau^{-1}(\tau(s_i)) = \sum_i r_i \tau(s_i)$.
综上, (1) 得证.

(2) "$\Longrightarrow$": 假设 $\sum_i r_i \tau(s_i) = 0$, 则 $\tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = 0$,
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \ker\tau = \{0\} \Longrightarrow \sum_i r_i s_i = 0$,
又 $\because S$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \Longrightarrow \tau(S)$ 线性无关.
"$\Longleftarrow$": 假设 $\sum_i r_i s_i = 0$, 则 $\tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i) = 0$,
又 $\because \tau(S)$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \Longrightarrow S$ 线性无关.
综上, (2) 得证.

(3) (1), (2) $\Longrightarrow$ (3).

□

定理 2.5 (课本定理2.6): $V \approx W \iff \dim V = \dim W$.

定理 2.6 (课本定理2.7): 若 $\dim V = n$, 则 $V \approx F^n$.

定理 2.7 (课本定理2.8): $\tau \in (L)(V, W)$,

(1) $(\ker\tau)^c \approx \operatorname{Im}\tau$.

(2) $\dim V=\dim\ker\tau+\dim\operatorname{Im}\tau\equiv\operatorname{null}\tau+\operatorname{rk}\tau$, 其中称 $\operatorname{null}\tau\equiv\dim\ker\tau$ 为 τ 的**零度**, $\operatorname{rk}\tau\equiv\dim\operatorname{Im}\tau$ 为 τ 的**秩**.

证: (1) 设映射 $\tau^c:\ker(\tau)^c\to\operatorname{Im}\tau$, $u\mapsto\tau(u)$.

先证 τ^c 是单射: $\ker(\tau^c)=\ker(\tau)\cap\ker(\tau)^c$ (即 $\ker(\tau^c)$ 中的元素同时满足 $\ker(\tau)$ 的条件, 且在定义域 $\ker(\tau)^c$ 中),
又 $\because V=\ker(\tau)\oplus\ker(\tau)^c$, $\therefore\ker(\tau)\cap\ker(\tau)^c=\{0\}\Longrightarrow\ker(\tau^c)=\{0\}$, 故 τ^c 单射.

再证 τ^c 是满射: 一方面, $\operatorname{Im}(\tau^c)\subseteq\operatorname{Im}(\tau)$;
另一方面, $\forall\tau(v)$, $v=u+w$, 其中 $u\in\ker(\tau)$, $w\in\ker(\tau)^c\Longrightarrow\tau(v)=\tau(u+w)=\tau(u)+\tau(w)=0+\tau(w)=\tau(w)\in\operatorname{Im}(\tau^c)\Longrightarrow\operatorname{Im}(\tau)\subseteq\operatorname{Im}(\tau^c)$.
故 $\operatorname{Im}(\tau^c)=\operatorname{Im}(\tau)$, 即 τ^c 满射.

综上, (1) 得证.

(2) $\dim V=\dim\ker(\tau)+\dim\ker(\tau)^c=\dim\ker(\tau)+\dim\operatorname{Im}(\tau)$.

□

x 为 n 维向量, $\dim\{x\mid Ax=0\}=n-\operatorname{rk}A$, 故 $\dim\{x\mid Ax=0\}=\operatorname{null}A$.

2.2 表示

“表示”其实就是用已知的东西展现未知的东西, 在这里, 我们用已知的矩阵乘法展现未知的线性变换, 这就是线性变换的表示.

F 为域, $F^n=\{(r_1,\cdots,r_n)\mid r_i\in F\}$, 满足 $(r_1,\cdots,r_n)+(l_1,\cdots,l_n)=(r_1+l_1,\cdots,r_n+l_n)$ 及 $r(r_1,\cdots,r_n)=(rr_1,\cdots,rr_n)$, $\dim F^n=n$, F^n 的标准基为 $\{e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)\}$; $F^m=\{(r_1,\cdots,r_m)\mid r_i\in F\}$, $\dim F=m$, 标准基为 $\{f_1=(1,0,\cdots,0),f_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,f_m=(0,0,\cdots,1)\}$. 如何确定/展现 F^n 到 F^m 的线性变换?

根据定理 2.3, 我们只需确定一组基在线性变换下的表现, 就可以确定这一线性变换. 因此, $\forall\tau\in\mathcal{L}(F^n,F^m)$, 若 $\tau(e_i)=(a_{1i},\cdots,a_{mi})=\sum_{j=1}^m a_{ji}f_j$.
$\forall(r_1,\cdots,r_n)\in F^n$,

$$\begin{aligned}\tau((r_1,\cdots,r_n))=&\tau\left(\sum_{i=1}^n r_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n r_i\tau(e_i)=\sum_{i=1}^n r_i\left(\sum_{j=1}^m a_{ji}f_j\right)=\sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n r_ia_{ji}\right)f_j=\left(\sum_{i=1}^n r_ia_{1i},\cdots,\sum_{i=1}^n r_ia_{mi}\right)\\&=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau(e_1)&\tau(e_2)&\cdots&\tau(e_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}=M_\tau\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $M_\tau=\begin{pmatrix}\tau(e_1)&\tau(e_2)&\cdots&\tau(e_n)\end{pmatrix}$.
故 $\forall\vec{r}\in F^n$, $\tau(\vec{r})=M_\tau\vec{r}$.

综上:

$$\boxed{\mathcal{L}(F^n,F^m)\approx M_{m\times n}(F),\quad\tau\mapsto M_\tau=\begin{pmatrix}\tau(e_1)&\cdots&\tau(e_2)\end{pmatrix}}.$$

$f:\mathcal{L}(F^n,F^m)\to M_{m\times n}(F)$, $\tau\mapsto M_\tau$ 是线性变换.

证: 由上述的 M_τ 构造过程知, $f(\tau)=M_\tau$ 是唯一的, 故 f 是映射.

$$\begin{aligned}f(r\tau+t\sigma)=&M_{r\tau+t\sigma}=\begin{pmatrix}(r\tau+t\sigma)(e_1) & \cdots & (r\tau+t\sigma)(e_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\tau(e_1)+t\sigma(e_1) & \cdots & r\tau(e_n)+t\sigma(e_n)\end{pmatrix}\\=&r\begin{pmatrix}\tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n)\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\sigma(e_1) & \cdots & \sigma(e_n)\end{pmatrix}=rM_\tau+tM_\sigma=rf(\tau)+tf(\sigma).\end{aligned}$$

故 f 是线性的.

综上, $f:\mathcal{L}(F^n)\to M_{m\times n}(F)$, $\tau\mapsto M_\tau$ 是线性变换. □

f 单射.

证: $\ker f\equiv\{\tau\mid f(\tau)=0\}=\{\tau\mid M_\tau=0\}$.
$\forall\tau\in\ker f$, $\forall\vec{r}\in F^n$, $\tau(\vec{r})=M_\tau\vec{r}=\vec{0}\Longrightarrow M_\tau=0_{m\times n}\Longrightarrow\tau=0$.
故 $\ker f=\{0\}$ (这里的“0”代表的是零变换) $\Longleftrightarrow f$ 单射. □

f 满射.

证: $\forall A\in M_{m\times n}(F)$, 可由 $\begin{pmatrix}\tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n)\end{pmatrix}=M_\tau=A$ 构造 τ, 从而 f 满射. □

综上, f 同构.

取 V 的基 $\mathcal{B}=\{b_1,\cdots,b_n\}$, $\forall v\in V$, $v=\sum_i r_ib_i$.

当 $\mathcal{B}$ 定序, $\phi_{\mathcal{B}}:V\to F^n$, $v\mapsto\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}\equiv[v]_{\mathcal{B}}$ 是一个映射.

证: 由于 $\mathcal{B}$ 是 V 的基, 展开式 $v=\sum_i r_ib_i$ 唯一确定, 又 $\because\mathcal{B}$ 定序, 从而映射 $v\mapsto\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}$ 唯一确定, 故 $\phi_{\mathcal{B}}$ 为映射.

$\forall u,v\in V$, $u=\sum_{i=1}^n w_ib_i$, $v=\sum_{i=1}^n r_ib_i$,

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{B}}(r\vec{u}+t\vec{v})=&\phi_{\mathcal{B}}\left(r\left(\sum_{i=1}^n w_ib_i\right)+t\left(\sum_{i=1}^n r_ib_i\right)\right)=\phi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n(rw_i+tr_i)b_i\right)=\begin{pmatrix}rw_1+tr_1\\ \vdots\\ rw_n+tr_n\end{pmatrix}\\=&r\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}=r\phi_{\mathcal{B}}(u)+t\phi_{\mathcal{B}}(v),\end{aligned}$$

故 ϕ_B 为 V 到 F^n 的线性变换. □

$\phi_{\mathcal{B}}$ 单射.

证: $\ker\phi_{\mathcal{B}}=\{v\mid\phi_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\}$.

$\phi_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow v=\sum_{i=1}^n 0b_i=0$.
故 $\ker\phi_{\mathcal{B}}=\{0\}\Longleftrightarrow\phi_{\mathcal{B}}$ 单射. □

$\phi_{\mathcal{B}}$ 满射.

证: $\forall \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in F^n$, $\exists v \in V$, s.t. $\sum_{i=1}^{n} r_i b_i \in V$, 故 $\phi_{\mathcal{B}}$ 满射. □

综上, $\phi_{\mathcal{B}}$ 同构.

取 V 的一组定序基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, 另一组定序基 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_n\}$, v 在 $\mathcal{B}$ 下的表象为 $[v]_{\mathcal{B}}$, 在 $\mathcal{C}$ 下的表象为 $[v]_{\mathcal{C}}$, 映射关系见如下的交换图. 如何联系 v 在不同基下的表象, $[v]_{\mathcal{B}}$ 和 $[v]_{\mathcal{C}}$, 从而得到 τ?

$$\begin{tikzcd}
 & & v \arrow[llddd, mapsto] \arrow[rrddd, mapsto] & & \\
 & & V \arrow[dl, "\phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{C}}"] & & \\
 & F^n \arrow[rr, "\tau = \phi_{\mathcal{C}} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & & F^n & \\
 {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrrr, mapsto] & & & & {[v]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}$$

$[v]_{\mathcal{C}} = \tau([v]_{\mathcal{B}}) = M_\tau [v]_{\mathcal{B}}$, 其中 $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$.
$\tau : F^n \to F^n, \quad e_i \mapsto \tau(e_i) = \phi_{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)) = \phi_{\mathcal{C}}(b_i)$,
$M_\tau = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathcal{BC}}$.

定理 2.8 (课本定理2.12):

$$\boxed{[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}} [v]_{\mathcal{B}}}$$

其中 $[v]_{\mathcal{B}}$ 和 $[v]_{\mathcal{C}}$ 分别是向量 v 在基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 表象下的坐标表示, $M_{\mathcal{BC}}$ 是在两种坐标表示之间线性变换对应的矩阵.

$$\begin{tikzcd}
b_i \arrow[rrrrr, mapsto] \arrow[ddddd, mapsto] & & & & & \tau(b_i) \arrow[ddddd, mapsto] \\
& v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tau(v) \arrow[ddd, mapsto] & \\
& & V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] & & \\
& & F^n \arrow[r, "\tau_A = \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & F^n & & \\
& {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrr, mapsto] & & & \tau([v]_{\mathcal{B}}) = [v]_{\mathcal{C}} & \\
e_i \arrow[rrrrr, mapsto] & & & & & \tau_A(e_i) = [\tau(b_i)]_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
M_{\tau_A} &= \begin{pmatrix} \tau_A(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) & \cdots & \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau(b_1) & \cdots & \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau(b_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv [\tau]_{\mathcal{BC}}.
\end{aligned}$$

定理 2.9 (课本定理2.14):

$$\boxed{[\tau(v)]_{\mathcal{C}} = [\tau]_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{B}}}$$

其中 $[\tau(v)]_{\mathcal{C}}$ 是 $\tau(v)$ 在基 $\mathcal{C}$ 的表象下的坐标表示, $[\tau]_{\mathcal{BC}}$ 是从基 $\mathcal{B}$ 的表象到基 $\mathcal{C}$ 的表象的线性变换的矩阵表示, $[v]_{\mathcal{B}}$ 是 v 在基 $\mathcal{B}$ 的表象下的坐标表示.

定理 2.10 (课本定理2.15): $\mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m\times n}(F)$, $\tau \mapsto \tau_A \mapsto [\tau]_{\mathcal{BC}}$.

若我们改变 V 和 W 的基, 那么映射所联系的向量的坐标会如何?

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "\tau'_A"] & F^n \\
V \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] \\
F^n \arrow[r, "\tau_A"] & F^n
\end{tikzcd}$$

$\tau'_A = \phi'_{\mathcal{C}} \phi_{\mathcal{C}}^{-1} \tau_A \phi_{\mathcal{B}} \phi'^{-1}_{\mathcal{B}}$.

定理 2.11 (课本定理2.16):

$$\boxed{[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = M_{CC'}[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$$

其中 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$ 分别是线性变换 τ 在基 $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ 和 $(\mathcal{B}',\mathcal{C}')$ 下的表示, 矩阵 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 和 $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ 分别对应了从基 $\mathcal{B}$ 到基 $\mathcal{B}'$ 和从基 $\mathcal{C}$ 到基 $\mathcal{C}'$ 的变换矩阵.

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆.

证: 设 $\phi_{\mathcal{B}} : V \to F^n$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $\phi_{\mathcal{B}'} : V \to F^n$, $v = \sum_{i=1}^n r_i' b_i' \mapsto [v]_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} r_1' \\ \vdots \\ r_n' \end{pmatrix}$, 即

$$\begin{tikzcd}
& & v \arrow[dddll, mapsto] \arrow[dddrr, mapsto] & & \\
& & V \arrow[dl, "\phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{B}'}"] & & \\
& F^n \arrow[rr, "\tau"] & & F^n & \\
{[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrrr, mapsto] & & & & {[v]_{\mathcal{B}'}}
\end{tikzcd}$$

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_\tau = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$, s.t. $[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}$.
同理可以构造 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} [b_1']_{\mathcal{B}} & \cdots & [b_n']_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$, s.t. $[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'}$.
$\forall [v]_{\mathcal{B}} \in F^n$, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}} \Longrightarrow M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = n \times n$ 维的单位矩阵, 即 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 是 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 的逆, 故 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆. □

定理 2.12 (课本定理2.18): $B = PAQ$, 其中 P 和 Q 可逆, 则 B 与 A **等价**.

(因为 B 和 A 是同一线性变换在两组不同的基下的表示.)

定理 2.13 (课本定理2.19): $B = PAP^{-1}$, 其中 P 可逆, 则 B 与 A **相似**.

(因为 B 和 A 是同一线性算子在两组不同的基下的表示.)

Chapter 3

同构定理

定义 3.1 <u>商空间</u>**:** F 为域, V 是 F 上的向量空间, S 是 V 的子空间, 则称 $\frac{V}{S} \equiv \{[v] \mid v \in V\}$ 是 F 的**商空间**, 其中 $[v] \equiv \{u \in V \mid u - v \in S\} = S + v$.

$\frac{V}{S}$ 是 F 上的向量空间.

证: $[u] + [v] = \{a \in V \mid a - u \in S\} + \{b \in V \mid b - v \in S\} = \{(a + b) \in V \mid a - u \in S, b - v \in S\}$.
$[u + v] = \{w \in V \mid w - (u + v) \in S\}$.
$\forall a + b \in [u] + [v]$, $(a - u) + (b - v) = (a + b) - (u + v) \in S \Longrightarrow (a + b) \in [u + v] \Longrightarrow [u] + [v] \in [u + v]$.
$\forall w \in [u + v]$, $\exists c, d \in S$, s.t. $c + d = w - (u + v) \Longrightarrow w = (c + d) + (u + v) = (c + u) + (d + v)$, 其中 $(c + u) \in [u]$, $(d + v) \in [v] \Longrightarrow w \in [u] + [v]$.
故 $[u] + [v] = [u + v]$.

假设 $u \sim u'$, $v \sim v'$, 即 $[u] = [u']$, $[v] = [v']$.
$\because [u] = [u']$, $\therefore uS = u'S \Longrightarrow \exists s_1, s_1' \in S$, s.t. $u + s_1 = u' + s_1' \Longleftrightarrow v' = u + s_1 - s_1'$,
$\because [v] = [v']$, $\therefore vS = v'S \Longrightarrow \exists s_2, s_2' \in S$, s.t. $v + s_2 = v' + s_2' \Longleftrightarrow v' = v + s_2 - s_2'$,
从而 $u' + v' = u + s_1 - s_1' + v + s_1 - s_1'$, 其中 $\because s_1, s_1', s_1, s_1' \in S$, $s_1 - s_1' \in S$, $s_2 - s_2' \in S$,
$\because V$ 是交换群, $\therefore$, s.t. $s_1 - s_1' + v = v + s_1 - s_1' \Longrightarrow u' + v' = u + v + (s_1 - s_1' + s_2 - s_2')$
$\Longrightarrow (u' + v')S = (u + v + (s_1 - s_1' + s_2 - s_2'))S \Longrightarrow [u' + v'] = [u' + v'] = [u + v]$,
即 $[u] + [v] = [u + v]$ 与代表元选取无关, 故 $[u] + [v] = [u + v]$ 是运算.

$r[u] = r\{v \in V \mid v - u \in S\} = \{rv \mid v \in V, v - u \in S\} = \{rv \in V \mid rv - ru \in S\} = [ru]$.

假设 $u \sim u'$, 即 $[u] = [u']$.
$\because [u] = [u']$, $\therefore uS = u'S \Longrightarrow \exists s, s' \in S$, s.t. $u + s = u' + s' \Longleftrightarrow u' = u + s - s'$,
从而 $ru' = r(u+s-s') = ru+r(s-s')$, 其中 $s-s' \in S \Longrightarrow (ru')S = (ru+r(s-s'))S = (ru)S \Longrightarrow r[u'] = [ru'] = [ru]$,
即 $r[u] = [ru]$ 与代表元选取无关, 故 $r[u] = [ru]$ 是运算.

$(\frac{V}{S}, +)$ 满足

(1) **结合律**: $([v] + [u]) + [w] = [u + v] + [w] = [u + v + w] = [u + (v + w)] = [u] + [v + w] = [u] + ([v] + [w])$

(2) **有单位元** $[0]$: $[0] + [u] = [0 + u] = [u] = [u + 0] = [u] + [0]$

(3) **有逆元**: $\forall v \in V$, $\exists - v$, s.t. $[a] + [-a] = [a + (-a)] = [0] = [(-a) + a] = [-a] + [a]$

且 $[u] + [v] = [u + v] = [v + u] = [v] + [u]$, 即 $(\frac{V}{S}, +)$ 交换, 故 $(\frac{V}{S}, +)$ 是交换群. (总之就是因为 $\frac{V}{S}$ 中的元素 $[v]$ 保持了 V 中的元素 v 的各种运算性质, 所以 $(V, +)$ 是交换群就可以推出 $\frac{V}{S}$ 也是交换群.)

$\frac{V}{S}$ 满足

(1) $r([u+v]) = r([u]+[v]) = r[u]+r[v]$

(2) $(r+t)[u] = [(r+t)u] = [ru+tu] = [ru]+[tu] = r[u]+t[u]$

(3) $(r\cdot t)[u] = [(r\cdot t)u] = [r(tu)] = r[tu] = r(t[u])$

(4) **有单位元** 1: $[1][u] = [1u] = [u]$

故 $\frac{V}{S}$ 是 F 上的向量空间. □

定理 3.1 (课本定理3.2): (1) $\Pi_S : V \to \frac{V}{S}$, $v \mapsto [v]$ 是线性变换.

(2) Π_S 是满线性变换, 即 $\operatorname{Im}\Pi_S = \frac{V}{S}$.

(3) $\ker \Pi_S = S$.

证: (1) 显然 Π_S 是唯一的, 故 Π_S 是映射.
如前所证, V 和 $\frac{V}{S}$ 均为 F 上的向量空间.
$\because [u+v] = \{w \in V \mid w-(u+v) \in S\}$, $r[u] = [ru]$, $\therefore r[u]+t[v] = [ru]+[tv] = [ru+tv]$, 故 Π_S 为线性变换.

(2) $\forall [v] \in \frac{V}{S}$, $\exists v \in V$, s.t. $\Pi_S(v) = [v]$, 即 $\operatorname{Im}\Pi_S = \frac{V}{S}$, 故 Π_S 是满线性变换.

(3) $\ker \Pi_S = \{v \in S \mid \Pi_S(v) = [0]\}$.
$\Pi_S(v) = [v] = S+v = [0] = S \Longrightarrow v \in S \Longrightarrow \ker\Pi_S = S$.

□

定理 3.2 (课本定理3.3): (1) S, T 是子空间, 且 $S \subseteq T$, 则 $\frac{T}{S}$ 是 $\frac{V}{S}$ 的子空间.

(2) 取 X 为 $\frac{V}{S}$ 的子空间, 则 $\exists V$ 的子空间 T, s.t. $\emptyset \neq S \subseteq T$, $\frac{T}{S} = X$.

证: (1) $\frac{T}{S} = \{[u] \mid u \in T\}$, $\frac{V}{S} = \{[v] \mid v \in V\}$.
$\forall [u] \in \frac{T}{S}$, $u \in T$, $\because T$ 是 V 的子空间, $\therefore u \in V \Longrightarrow [u] \in \frac{V}{S}$, 故 $\frac{T}{S} \subseteq \frac{V}{S}$.
$\forall [u_1], [u_2] \in \frac{T}{S}$, $r, t \in F$, $r[u_1]+t[u_2] = [ru_1+tu_2]$, $\because u_1, u_2 \in T$, $\therefore ru_1+tu_2 \in T \Longrightarrow [ru_1+tu_2] \in \frac{T}{S}$, 故 $\frac{T}{S}$ 是线性空间.

综上, 得证.

(2) 取 $T = \cup_{[v]\in X}[v]$.
显然 $T \subseteq V$.
$\forall u, v \in T$, 根据 T 的定义, $[u], [v] \in X$,
$\because X$ 为子空间, $\therefore r[u]+t[v] = [ru+tv] \in X \Longrightarrow ru+tv \in [ru+tv] \subseteq T = \cup_{v\in X}[v] \Longrightarrow ru+tv \in T$.
故 T 为 V 的子空间.

$\because [0] = S$, $\therefore S \subseteq T$.

$\frac{T}{S} = \{[v] = S+v \mid v \in T\}$.
$\forall [v] \in \frac{T}{S}$, $v \in T \Longrightarrow [v] \in X$.
$\forall [v] \in X$, $v \in T \Longrightarrow [v] \in \frac{T}{S}$.
故 $\frac{T}{S} = X$.

综上, 得证.

□

定理 3.3 第一同态基本定理(课本定理3.4): [a] S 是 V 的子空间, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$,

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tau[v] \\
& V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Pi_S"'] & W & \\
& \frac{V}{S} \arrow[ur, dashed, "\tau'"] & & \\
{[v]} \arrow[uuurrr, dashed, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

若 $S \subseteq \ker\tau$, 即 $\ker\Pi_S \subseteq \ker\tau$, 则 $\exists!\tau'$, s.t. $\tau = \tau' \circ \Pi_S$, 即 $\forall v \in V$, $\tau(v) = \tau'([v])$, 此时上图可交换.

[a] 该定理回答了 τ' 的存在性 (即 τ' 在什么条件下存在) 的问题. 之所以称"基本", 是因为若将该定理中的向量空间换成其他代数结构, 定理仍然成立.

证: τ' 的唯一性要求, 若 $[u] = [v]$, 则 $\tau'([u]) = \tau'([v])$,
即若 $u \sim v$, 则 $\tau(u) = \tau(v)$,
即若 $u - v \in S$, 则 $\tau(u - v) = 0$,
即 $S \subseteq \ker\tau$. □

此时, $\ker\tau' = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau'([v]) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau(v) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid v \in \ker\tau\} = \{[v] \mid v \in \ker\tau\} = \frac{\ker\tau}{S}$, $\operatorname{Im}\tau' = \{\tau'([v]) \mid [v] \in \frac{V}{S}\} = \{\tau'([v]) \mid v \in V\} = \{\tau(v) \mid v \in V\} = \operatorname{Im}\tau$ ($\because \Pi_S$ 满射, $\therefore \forall [v] \in \frac{V}{S}, \exists v \in V$).

那么, 如果 τ 双射, 即 $\exists\tau^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$, 再加上条件 $\ker\tau \subseteq S$, 即 $\ker\tau = S$, 如何?

$$\begin{tikzcd}
\tau^{-1}(w) \arrow[ddd, mapsto] & & & w \arrow[lll, mapsto] \\
& V \arrow[d, "\Pi_S"'] & W \arrow[l, "\tau^{-1}"'] & \\
& \frac{V}{S} & & \\
{[w]} & & &
\end{tikzcd}$$

此时, $\ker\tau' = \frac{\ker\tau}{S} = \{[v] \mid v \in \ker\tau\} = \{[v] \mid v \in S\} = \{[0]\} \Longrightarrow \tau'$ 单射.

由上面关于第一同态定理的延伸讨论我们得到:

定理 3.4 第一同构定理(课本定理3.5): 若 $\ker\tau = S$, 则 τ' 单射, $\frac{V}{\ker\tau} = \frac{V}{S} \approx \operatorname{Im}\tau$.

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tau[v] \\
& V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Pi_S"'] & W & \\
& \frac{V}{S} \arrow[ur, dashed, "\tau'"] & & \\
{[v]} \arrow[uuurrr, dashed, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

证: $V = \ker\tau \oplus (\ker\tau)^c$, 其中 $(\ker\tau)^c \approx \operatorname{Im}\tau \Longrightarrow \frac{V}{\ker\tau} = (\ker\tau)^c$. □

更一般地, 若 $V = S \oplus T$, 则 $\frac{V}{S} = T$, $\frac{V}{T} \approx S$.

证: $\forall v \in V$, $v = u_S + u_T$, 其中 $u_S \in S$, $u_T \in T$. 令投影映射 $P_T : V \to T$, $v = u_S + u_T \mapsto u_T$.
$\ker P_T = \{v \in V \mid P_T(v) = 0\} = S = [0] = \ker\Pi_S$.
$\exists!\tau'$ 单射, s.t. $P_T = \tau' \circ \Pi_S$.
又 $\operatorname{Im} P_T = T$, 即 P_T 满射, $\therefore \tau'$ 满射 $\Longrightarrow \tau'$ 同构 $\Longrightarrow \frac{V}{S} \approx T$.

$$\begin{tikzcd}
v = u_S + u_T \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & u_T \\
& V \arrow[r, "P_T"] \arrow[d, "\Pi_S"'] & T & \\
& \frac{V}{S} \arrow[ur, dashed, "\tau'"] & & \\
{[v]} \arrow[uuurrr, dashed, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

同理可证 $\frac{V}{T} \approx S$. □

定义 3.2 对偶(空间)和线性泛函: $V^* = \mathcal{L}(V, F)$ 是 F 上的向量空间, 称 V^* 为 V 的**对偶(空间)**. 若 $f \in V^*$, 称 f 为**线性泛函**.

(1) $\ker V^*$ 为 F 上的向量空间.

(2) $\dim F = 1$, $\operatorname{Im} f \subseteq F$, $\therefore \dim\operatorname{Im} f \leq 1$, $\dim\ker f \geq \dim V - 1$.

(3) V^* 非空, $\because$ 必有零映射 $0 \in V^*$, $0 : V \to F$, $v \mapsto 0$.

(4) 若 $\dim\operatorname{Im} f = 0$, 则 $\operatorname{Im} f = \{0\}$, f 为零映射.

(5) 若 $\dim\operatorname{Im} f = 1$, 则 $\operatorname{Im} f = \langle r\rangle$, 其中 $0 \neq r \in F \Longrightarrow \operatorname{Im} f = F$,
由反证法易证, 若 $v \in f^{-1}(r) = \{v \in V \mid f(v) = r\}$, 其中 $r \neq 0$, 则 $v \neq 0$, 且必有 $f(\langle v\rangle^c) = \{0\}$.

证明一下 (5) 的末句:

证: 假设 $\exists u \in \langle v\rangle^c$, s.t. $f(u) \neq 0$,
则有 $f\left(\frac{ru}{f(u)}\right) = r \Longrightarrow \frac{ru}{f(u)} \in f^{-1}(r) \Longrightarrow f^{-1} = \langle v\rangle \oplus \langle u\rangle$,
又 $\because u \in \langle v\rangle^c$, $\therefore \dim f^{-1} \geq 2$, 这与 $f^{-1} \subseteq (\ker f)^c$, $\dim(\ker f)^c = \dim \operatorname{Im} f \leq 1$ 矛盾,
故假设错误, $\forall u \in \langle v\rangle^c$, $f(u) = 0 \Longrightarrow f(\langle v\rangle^c) = \{0\}$. □

定理 3.5 (课本定理3.11): (1) 若 $0 \neq v \in V$, $\exists 0 \neq f \in V^*$, s.t. $f(v) \neq 0$.

(2) $v = 0 \Longleftrightarrow \forall f \in V^*$, $f(v) = 0$.

(3) $f \in V^*$, 若 $f(x) \neq 0$, 则 $V = \ker f \oplus \langle x\rangle$, 即 $\operatorname{Im} f \approx \langle x\rangle$.

(4) $0 \neq f, g \in V^*$, $\ker f = \ker g \Longleftrightarrow \exists 0 \neq \lambda \in F$, s.t. $f = \lambda g$.

证: (1) $v \neq 0$, 则 $V = \langle v\rangle \oplus \langle v\rangle^c$, 其中 $\langle v\rangle = \{rv \mid r \in F\}$.
令 $f : V \to F$, $rv + w \mapsto r$, 其中 $rv \in \langle v\rangle$, $w \in \langle v\rangle^c$, 故 $f(v) = 1$, $f \in V^*$.
我们来验证一下: $\forall u_1, u_2 \in V$, $r, t \in F$, u_1 和 u_2 可写成 $u_1 = r_1 v + w_2$, $u_2 = r_2 v + w_2$
$\Longrightarrow f(ru_1 + tu_2) = f(r(r_1 v + w_1) + t(r_2 v + w_2)) = f((rr_1 v + rw_1) + (tr_2 v + tw_2)) = rr_1 + tr_2 = rf(r_1 v + w_1) + tf(r_2 v + w_2) = rf(u_1) + tf(u_2)$.
故得证.

并且需要注意这里的 f 的构造不是唯一的: 我们可以构造 $f : V \to F$, $rv + u \mapsto rt$, 其中 $u \in \langle v\rangle^c$, 如此一来, $f(v) = t$.

(2) "$\Longrightarrow$": 若 $v = 0$, 则 $\forall u \in V$, $f(v) + f(u) = f(v + u) = f(u) \Longrightarrow f(v) = 0$.

"$\Longleftarrow$": 若 $\forall f \in V^*$, $f(v) = 0$, 则假设 $v \neq 0$, 则由 (1), $\exists v \in V^*$, s.t. $f(v) \neq 0$, 矛盾, 故假设错误, $v = 0$.

(3) $f(x) \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{Im} f \neq \{0\} \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f \neq 0 \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f \dim(\ker f)^c = 1 \Longrightarrow \dim \ker f = \dim V - \dim(\ker f)^c = \dim V - 1$
$\Longrightarrow \exists v \in V$, s.t. $V = \ker f \oplus (\ker f)^c = \langle v\rangle$,
又 $\because f(x) \neq 0$, $\therefore x \in \langle v\rangle \Longrightarrow \langle x\rangle = \langle w\rangle \Longrightarrow V = \ker f \oplus \langle x\rangle$, 故得证.

(4) "$\Longrightarrow$": 令 $K = \ker f = \ker g$.
$\because \ker f = \ker g$, $\forall x \notin K$, 由 (3) 有, $V = \langle x\rangle \oplus K$.
取 $\lambda = \frac{f(x)}{g(x)}$ 即得.
"$\Longrightarrow$": 若 $\exists \lambda \neq 0$, $f = \lambda g$, 则显然 $\ker f = \ker g$.

□

定义 3.3 对偶基: $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ 为 V 的基, 则 $\forall i$, $\exists b_i^* \in V$, s.t. $b_i^*(b_i) = 1$, 对 $j \neq i$, $b_i^*(b_j) = 0$, 即 $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$, 从而可以构造出 $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\} \subseteq V^*$, 称为 $\mathcal{B}$ 的**对偶基**.

定理 3.6 (课本定理3.12): (1) $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ 线性无关.

(2) $\dim V < \infty$, 则 $\mathcal{B}^*$ 是 V^* 的基.

证: (1) $\sum_{i=1}^m r_i b_i^* = 0 \Longrightarrow \forall v \in V$, $\left(\sum_{i=1}^m r_i b_i^*\right)(v) = 0(v) = 0$
$\Longrightarrow \sum_{i=1}^m r_i b_i^*(v) = 0$

取 $v = b_j$, 则 $\sum_{i=1}^m r_i b_i^*(b_j) = \sum_{i=1}^m r_i \delta_{ij} = r_j = 0$,
对各个 b_j 如法炮制, 从而得到 $r_j = 0 \forall i$, 故得证.

(2) $\forall f \in V^*, \forall v \in V, \because \mathcal{B}$ 是 V 的基, $\therefore v = \sum_{i=1}^n r_i b_i$
$\Longrightarrow b_j^*(v) = b_j^* \left(\sum_{i=1}^n r_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i b_j^*(b_i) = \sum_{i=1}^n r_i \delta_{ij} = r_j$
回代得 $v = \sum_{i=1}^n b_i^*(v) b_i$
$\Longrightarrow f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n b_i^*(v) b_i\right) = \sum_{i=1}^n b_i^*(v) f(b_i) = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*(v) = \left(\sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*\right)(v)$, 这里 $b_i^*(v), f(b_i) \in F$,
因此可以交换位置, 我们可视 $\{b_i^*(v)\}$ 为基, $f(b_i)$ 为 $f(v)$ 在这组基上的展开系数
$\Longrightarrow f = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*$, 即 f 可展开为 $\{\mathcal{B}^*\}$ 的线性表示, 结合 (1) 得证.

□

按照类似上面的方法, $\forall v \in V$, 我们都可构造 $v^* \in V^*$, s.t. $\forall u_1 \in \langle v \rangle$, $v^*(u) = 1$, $\forall u_2 \in \langle v \rangle^c$, $v^*(u_2) = 0$,
从而有映射 $V \to V^*$, $v \mapsto v^*$, $0 \mapsto 0$ (零映射).
V^* 本身也是向量空间.

定义 3.4 二重对偶(空间): $V^{**} = \mathcal{L}(V^*, F)$ 称为**二重对偶(空间)**, 其中的元素为 $v^{**} : V^* \to F$, $f \to f(v)$.

$V \to V^* \to V^{**}$, $v \mapsto v^* \mapsto v^{**}$, $b_i \mapsto b_i^* \mapsto b_i^{**}$, 满足 $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$, $b_i^{**}(b_j^*) = b_j^*(b_i)$, 两个映射复合得 $\tau : V \to V^{**}$, $v \mapsto v^{**}$.

(1) τ 是映射.

(2) τ 是线性变换.

(3) $\ker \tau = \{v \in V \mid \tau(v) = 0\} = \{0\} \Longleftrightarrow \tau$ 单射.

证: (1) 若 $u = v$, 则 $\forall f \in V^*$, $u^{**}(f) = f(u) = f(v) = v^{**}(v)$, 即得证.

(2) $\tau(ru + tv) = (ru + tv)^{**}$,
$\forall f \in V^*$, $(ru + tv)^{**}(f) = f(ru + tv) = rf(u) + tf(v) = ru^{**}(f) + tv^{**}(f) = r\tau(u)(f) + t\tau(v)(f) \Longrightarrow \tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$,
结合 (1) 即得证.

(3) $\tau(v) = 0 \Longrightarrow \forall f \in V^*$, $v^{**}(f) = 0 \Longrightarrow f(v) = 0 \Longrightarrow$(定理 3.5 (1)) $v = 0$, 即得证.

□

引理 3.1 (课本引理3.13): 若 $\dim V = n < \infty$, 则 $\dim V^* = \dim V^{**} = n$, V^{**} 与 V 同构, 一个线性空间的二重对偶就回到自身, 所以实际上套娃式的 $V^{*\cdots*}$ 是没有意义的, 这里我们就写成 $V^{**} = V$.

定义 3.5 算子伴随: 由线性变换 τ 可引出**算子伴随** $\tau^\times : W^* \to V^*$, $g \mapsto g \circ \tau$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\tau^\times = g\circ\tau"'] & & W \arrow[dl, "g"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

(1) $\tau^\times$ 是映射.

(2) $\tau^\times$ 是线性的.

证: (1) 若 $f = g \in W^*$, $v^* * \in \tau^\times$, 则 $\tau^\times(f) = f \circ \tau = g \circ \tau = \tau^\times(g)$, 故得证.

(2) $\tau^\times(rg_1 + tg_2) = (rg_1 + tg_2) \circ \tau = rg_1 \circ \tau + tg_2 \circ \tau = r\tau^\times(g_1) + t\tau^\times(g_2)$, 故得证.

□

定理 3.7 (课本定理3.18): (1) $\tau.\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $a, b \in F$, 则 $(a\tau + b\sigma)^* = a\tau^\times + b\sigma^*$, 即求和与算子伴随可交换.

(2) $\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $\tau \in \mathcal{L}(W, U)$, 则 $(\tau \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^\times$.

(3) $\tau \in \mathcal{L}(V)$ 可逆 $\Longrightarrow (\tau^{-1})^* = (\tau^\times)^{-1}$.

证: (1) $\forall f \in W^*$, $(a\tau + b\sigma)^*(f) = f \circ (a\tau + b\sigma) = af \circ \tau + bf \circ \sigma = a\tau^\times(f) + b\tau^\times(f)$, 即得证.

(2) $\forall f \in V^*$, $(\tau \circ \sigma)^*(f) = f \circ (t \circ \sigma) = f \circ (\tau \circ \sigma) = (f \circ \tau) \circ \sigma = \sigma^*(f \circ \tau) = \sigma^*(\tau^\times(f)) = (\sigma^* \circ \tau^\times(f)) = (\sigma^* \circ \tau^\times)(f) \Longrightarrow (\tau \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^\times$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tau\circ\sigma"'] & & W \arrow[dl, "\tau"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V^* & & W^* \arrow[ll, "\sigma^*"'] \\ & U^* \arrow[ul, "(\tau\circ\sigma)^* = \sigma^*\circ\tau^\times ?"] \arrow[ur, "\tau^\times"'] & \end{tikzcd}$$

(3) $1^* = (\tau \circ \tau^{-1})^* = (\tau^{-1})^* \circ \tau^\times \Longrightarrow (\tau^{-1})^* = (\tau^\times)^{-1}$.

□

定理 3.8 (课本定理3.18): $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, $\tau^\times \in \mathcal{L}(V, W)$, $\tau^{**} \in \mathcal{L}(V^{**}, W^{**}) = \mathcal{L}(V, W)$, 则 $\tau^{**} = \tau$.

定理 3.9 (课本定理3.22): $\tau \in \mathcal{L}(V,W)$, 其中 $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$, $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别是 V 和 W 的定序基, $\mathcal{B}^*$ 和 $\mathcal{C}^*$ 分别是 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的对偶基, 则 $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^\times} = ([\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^T$.

证: 设 $\dim V = n$, $\dim W = m$, V 的定序基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, W 的定序基 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_m\}$, $\tau \in \mathcal{L}(V,W)$ 的矩阵表示为 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$, $\tau^\times \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ 的矩阵表示为 $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = [\beta_{ij}]_{n\times m}$,

即 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$, 令 $[\tau(b_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$, $\tau(b_i) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} c_k$.

$[\tau^*]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} [\tau^*(c_1^*)]_{\mathcal{B}^*} & \vdots & [\tau^*(c_n)] \end{pmatrix}$, 其中 $[\tau^*(c_i^*)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{pmatrix}$, $\tau^*(c_i^*) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*$.

又 $\because \tau^*(c_i^*) = c_i^* \circ \tau$, 我们将这一复合函数作用在 b_j 上有 $(c_i^* \circ \tau)(b_j) = \left(\sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*\right)(b_j) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*(b_j) = \beta_{ji}$ $\Longrightarrow \beta_{ji} = c_i^*(\tau(b_j))$, 代入上面的 $\tau(b_j)$ 的展开式得 $\beta_{ji} = c_i^*\left(\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_k\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_i^*(c_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}$, 故得证. $\square$

Chapter 4

模 I: 基本性质

定义 4.1 模: R 为有单位元交换环, $(M,+)$ 为交换群, 数乘 : $R\times M\to M$, $(r,m)\mapsto m$ 满足

(1) $(r+t)m=rm+tm$

(2) $(rt)m=r(tm)$

(3) $r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$

(4) $1m=m$

则称 M 为 R 上的**模**, 记作 $R-\mathrm{mod}\equiv\{R\text{ 上的模}\}$.

$\because$ 域是一种特殊的环, $\therefore$ 向量空间是一种特殊的模.

$0m=0$.

证: $0m+0m=(0+0)m=0m\Longrightarrow 0m=0$. □

$r0=0$.

证: $r0+r0=r(0+0)=r0\Longrightarrow r0=0$. □

$(-r)m=r(-m)=-(rm)$.

证: $(-r)m+rm=(-r+r)m=0m=0\Longrightarrow(-r)m=-rm$.
$r(-m)+rm=r(m+(-m))=r0=0\Longrightarrow r(-m)=-rm$. □

$\forall r\in R$, 可构造映射 $\bar r: M\to M$, $m\mapsto rm$. $\bar r$ 是 M 上的群同态, 又称**自同态**, 记作 $\bar r\in\mathrm{End}(M)\equiv\{M\text{ 上的自同态}\}$, $\mathrm{End}(M)$ 关于同态的加法、复合成环, 其单位元为 M 上的恒等映射, 记作 1_M, 故还可构造映射 $\phi:R\to\mathrm{End}(M)$, $r\mapsto\bar r$.

证: $\bar r(m+n)=r(m+n)=rm+rn=\bar r(m)+\bar r(n)$, 即映射 $\bar r$ 下保持运算结构, 故得证. □

例 4.1: 在交换群 $(G,+)$ 上定义 $1a=a$, $2a=a+a$, $\cdots$, $na=\overbrace{a+\cdots+a}^{n\text{ 个 }a\text{ 相加}}$, $-a=-1a$, $-2a=(-a)+(-a)$, $-na=\overbrace{(-a)+\cdots+(-a)}^{n\text{ 个 }(-a)\text{ 相加}}$, 数乘 $\alpha:\mathbb{Z}\times G\to G$, $(n,a)\mapsto na$, 满足

(1) α 是映射

(2) $(n+m)a = na + ma$

(3) $(nm)a = n(ma)$

(4) $n(a+b) = na + nb$

证: (1) na 的定义依赖于 G 中的运算, 而运算的本质是卡氏积至原集合的映射, 有唯一的结果, 故得证.

(2) $(n+m)a = \overbrace{a+\cdots+a}^{(n+m)\text{ 个 } a \text{ 相加}} = \overbrace{a+\cdots+a}^{n \text{ 个 } a \text{ 相加}} + \overbrace{a+\cdots+a}^{m \text{ 个 } a \text{ 相加}} = na + ma.$

(3) $(nm)a = \overbrace{a+\cdots+a}^{nm \text{ 个 } a \text{ 相加}} = \overbrace{\overbrace{a+\cdots+a}^{m \text{ 个 } a \text{ 相加}} + \cdots + \overbrace{a+\cdots+a}^{m \text{ 个 } a \text{ 相加}}}^{n \text{ 组}} = \overbrace{ma+\cdots+ma}^{n \text{ 个 } ma \text{ 相加}} = n(ma).$

(4) $n(a+b) = \overbrace{(a+b)+\cdots+(a+b)}^{n \text{ 个 } (a+b) \text{ 相加}} = \overbrace{a+\cdots+a}^{n \text{ 个 } a \text{ 相加}} + \overbrace{b+\cdots+b}^{n \text{ 个 } b \text{ 相加}} = na + nb.$

(5) 由定义显然.

□

故 $M \in \mathbb{Z}-\text{mod}$. □

例 4.2: $\forall$ 交换群 $(G,+)$, $G \in \mathbb{Z}-\text{mod}$. □

例 4.3: $R \in R-\text{mod}$, 其中的数乘即 R 中的乘法. □

例 4.4: $\mathbb{Z}_p = \frac{\mathbb{Z}}{p} = \{[0],\cdots,[p-1]\}$, $(\mathbb{Z}_p,+)$ 是交换群, 故 $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{Z}-\text{mod}$.

$\mathbb{Z}_6 = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$, $n[k] = \overbrace{[k]+\cdots+[k]}^{n \text{ 个 } [k] \text{ 相加}} = [nk]$,
注意到 $[2] \neq [0]$, $3 \neq 0$, 但 $3[2] = [6] = [0]$, 即非零元素的卡氏积在数乘映射下得到零元素, 这意味着非零的单个元素不再线性无关.

实际上, $\mathbb{Z}_p$ 中无线性无关元素. □

例 4.5: $R^n = \{(r_1,\cdots,r_n) \mid r_i \in R\} \in R-\text{mod}$, 其中 $(r_1,\cdots,r_n)+(l_1,\cdots,l_n) = (r_1+l_1,\cdots,r_n+l_n)$, $r(r_1,\cdots,r_n) = (rr_1,\cdots,rr_n)$. □

定义 4.2 子模: $\emptyset \neq S \subseteq M$, 若在 M 的运算下, S 是 R 上的模, 则称 S 为 M 的子模.

定理 4.1 判定子模的方法(课本定理4.1): $\emptyset \neq S \subseteq M$ 是 M 的子模 $\Longleftrightarrow \forall u,v \in S, \forall r,t \in R, ru+tv \in S$ (即线性运算封闭).

定理 4.2 (课本定理4.2): $S,T \subseteq M$ 是 M 的子模, 则 $S \cap T$ 为 M 的子模, $S+T \equiv \{u+v \mid u \in S, v \in T\}$ 为 M 的子模.

定理 4.3: $R \in R-\text{mod}$, R 的子模即 R 上的理想.

证: 设 S 为 R 的子模, 则

(1) $\emptyset \neq S \subseteq R$

(2) $\forall u, v \in S, \forall r, t \in R, ru + tv \in S$. 特别地, 令 $r = 1, t = -1$, 得 $u - v \in S$, 令 $t = 0$, 得 $ru \in S$

故 S 为 R 的理想. □

定义 4.3 生成子模和生成集: $\emptyset \neq S \subseteq M \in R-\mathrm{mod}$, S 的**生成子模**为 $\langle\langle S\rangle\rangle \equiv$ 包含 S 的最小子模 $\equiv$ 包含 S 的所有子模的交 $= \{\sum_{i=1}^{n} r_i u_i \mid r_i \in R, u_i \in S, n \in \mathbb{Z}^+\}$, 其中称 S 为**生成集**.

$\forall M \in R-\mathrm{mod}$, 都有生成集, $\because M = \langle\langle M\rangle\rangle$.

定义 4.4 有限生成模: 生成集由有限个元素构成的生成模.

定义 4.5 循环模: 由一个元素生成的模.

例 4.6: $R \in R-\mathrm{mod}$ 是一个循环模, $\because R = \langle\langle 1\rangle\rangle = \{r1 \mid r \in R\}$. □

有限生成模的子模未必是有限生成的, 即有限生成的性质未必会由模遗传至其子模.

例 4.7: 多项式环 $R = F[x_1, \cdots, x_n, \cdots] \equiv \left\{\sum_{k_i=0}^{N} a_{i_1,\cdots,i_n} x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_n}^{k_n} \mid a_{i_1\cdots i_n} \in F, N_i \in \mathbb{Z}^+\right\}$, $R \in R-\mathrm{mod}$ 且 $R = \langle\langle 1\rangle\rangle$.
假设 S 是有限生成的, $S = \langle\langle f_1, \cdots, f_m\rangle\rangle$, $f_i = \sum_{j_1,\cdots,j_m=0}^{N_i} a_{i_1,\cdots,i_n}^{j_1,\cdots,j_n} x_{i_1}^{j_1} \cdots x_{i_n}^{j_n}$ 是有限个变元的有限次多项式, 故 S 无法生成无限个变元的无限次多项式, 即 S 并非是有限生成的. □

定义 4.6 线性无关: $\emptyset \neq S \subseteq M$, 若 $\sum_{i=1}^{n} r_i u_i = 0$ 其中 $u_i \in S$, $r_i \in R \forall i \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$, 则称 S 线性无关.

在模中, 线性无关元素未必存在, 如例 4.4 中 $\mathbb{Z}_p$ 无线性无关元素.

在向量空间中, 我们有: u, v 线性相关 $\Longleftrightarrow \exists$ 不全为零的 $r, t \in R$, s.t. $ru + tv = 0$, 无妨设 $r \neq 0$, 则 $ru = -tv \Longrightarrow u = -\frac{t}{r}v$.

在模中, 上述说法未必成立: u, v 线性相关 $\Longleftrightarrow \exists$ 不全为零的 r, t, s.t. $ru + tv = 0$, (无妨设 $r \neq 0$,) 则 $ru = -tv$, 但由于未必能找到 r 的逆元, 所以未必有 $u = -\frac{t}{r}v$. 故在模中, 线性相关元素未必能相互表示, 即一个线性相关元素未必能由与其线性相关的元素线性表示.

定义 4.7 自由模: $M \in R-\mathrm{mod}$, $M = \langle\langle \mathcal{B}\rangle\rangle$ 且 $\mathcal{B}$ 线性无关, 则称 M 为**自由模**, $\mathcal{B}$ 为 M 的基.

定理 4.4 (课本定理4.3): $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq M$ 是 M 的基, 则 $\forall v \in M$, v 可由 $\mathcal{B}$ 中的元素唯一地线性表示.

定理 4.5 (课本定理4.4): $\mathcal{B}$ 是 M 的基 $\Longleftrightarrow \mathcal{B}$ 为 M 的极小生成集且为 M 的极大线性无关集.

例 4.8: $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$, $\mathbb{Z}_6 = \langle\langle [1]\rangle\rangle = \langle\langle [5]\rangle\rangle$,
$\because 0[1] = [0], 1[1] = [1], 2[1] = [2], 3[1] = [3], 4[1] = [4], 5[1] = [5]$,
$0[5] = [0], 1[5] = [5], 2[5] = [10] = [4], 3[5] = [15] = [3], 4[5] = [20] = [2], 5[5] = [25] = [1]$.
故 $\mathbb{Z}_6$ 的表示不唯一. □

$M \in R-\mathrm{mod}$, 但 M 的子模未必自由.

例 4.9: $R=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\{(n,m)\mid n,m\in\mathbb{Z}\}$, 其中 $(n,m)(k,l)=(nk,ml)$, $(n,m)+(k,l)=(n+k,m+l)$ 是仅为交换环 (而非域), $R\in R-\mathrm{mod}$, $R=\langle\langle(1,1)\rangle\rangle=\{r(1,1)\mid r\in R=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$, $\therefore R$ 自由.
但子模 $S=\mathbb{Z}\times\{0\}=\{(n,0)\mid n\in\mathbb{Z}\}$, $\because \forall n\neq 0$, $(n,0)(0,1)=(0,0)$, $\therefore$ 无线性无关元, 从而非自由. □

定义 4.8 **模同态:** $M,N\in R-\mathrm{mod}$, 映射 $\tau: M\to N$, 若 $\forall u,v\in M$, $r,t\in R$, $\tau(ru+tv)=r\tau(u)+t\tau(v)$, 则 τ 为 M 到 N 的**模同态**, 记作 $\tau\in\hom(M,N)=\{M$ 到 N 的模同态$\}$.

取 $r=t=1$, 则 $\forall u,v\in M$, $\tau(u+v)=\tau(u)+\tau(v)$, 故 τ 为群同态.

定理 4.6 **(课本定理4.6):** (1) $\ker\tau\equiv\{v\in M\mid\tau(v)=0\}$ 是 M 的子模. τ 单射 $\iff \ker\tau=\{0\}$.

(2) $\mathrm{Im}\,\tau\equiv\{\tau(v)\mid v\in M\}$ 是 N 的子模. τ 满射 $\iff \mathrm{Im}\,\tau=N$.

定义 4.9 **商模:** S 是 M 的子模, **商群** $\frac{M}{S}\equiv\{[v]\mid v\in M\}$.

$[u]+[v]=[u+v]$, $r[u]=[ru]$ 是合法运算, $\because$ 结果与代表元选取无关.

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tau[v] \\
& M \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Pi_S"'] & N & \\
& \frac{M}{S} \arrow[ur, dashed, "\tau'"'] & & \\
{[v]} \arrow[uuurrr, dashed, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

$\Pi_S: M\to\frac{M}{S}$, $v\mapsto[v]$, 且满足

(1) Π_S 满射.

(2) $\ker\Pi_S=S$.

定理 4.7 **同态第一基本定理:** 若 $S\subseteq\ker\tau$, 则 $\exists!\tau'$, s.t. $\tau=\tau'\circ\Pi_S$.

$\ker\tau'=\frac{\ker\tau}{S}$.

定理 4.8 **同构第一基本定理:** 若 $S=\ker\tau$, 则 $\tau'=\frac{\ker\tau}{S}=\{[0]\}$, 即 τ' 单射.
$\because \mathrm{Im}\,\tau'=\mathrm{Im}\,\tau$, $\therefore$ 若进一步有 τ, 则 τ' 同构.

Chapter 5

模 II: 自由与诺特模

定义 5.1 **诺特(Notherian) 模:** $M \in R-\text{mod}$, $S_1, \cdots, S_n, \cdots$ 是 M 的子模且 $S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$, 若 $\exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \cdots$, 则称 M 满足**升链条件 (A.C.C.)**, 称满足 ACC 的模为**诺特模**.

定理 5.1 (课本定理5.7): (1) $M \in R-\text{mod}$ 为诺特模 $\Longleftrightarrow$ M 的子模是有限生成的.

(2) R 是诺特环 $\Longleftrightarrow$ R 的理想都是有限生成的.

证: (1) "$\Longrightarrow$": 设 S 是 M 的子模. 若 $S = \{0\}$, 则 $S = \langle\langle 0 \rangle\rangle$ 显然有限生成,

若 $S \neq \{0\}$, 则 $\exists 0 \neq v_1 \in S$, 令 $S_1 = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \subseteq S$,

若 $S_1 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_1 \neq S$, 则 $\exists v_2 \in S - S_1$, 令 $S_2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$,

若 $S_2 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_2 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_3 \in S - S_2$, 令 $S_3 = \langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S$,

若 $S_3 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_3 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_4 \in S - S_3$, 令 $S_4 = \langle\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle\rangle \in S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S_3 \subseteq S_4 \subseteq S$,

$\cdots$

以此类推, 得 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$,

$\because S$ 满足 ACC, $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \cdots = S = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle$, 故 S 有限生成.

"$\Longleftarrow$": 取 M 的任一子模升链 $S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$, 则 $S = \cap_{i \in J} S_i$ 是 M 的子模,

$\because M$ 的子模是有限生成的, $\therefore S$ 必然是有限生成, 故设 $S = \langle\langle v_m, \cdots, v_m \rangle\rangle$,

$\forall K = 1, \cdots, m$, $u_k \in S = \cup_{i \in J} S_i \Longrightarrow \exists i_k \in J$, s.t. $u_k \in S_{i_k}$,

令 $K = \max\{i_1, \cdots, i_m\}$, 则由升链的性质, $u_1, \cdots, u_m \in S_K$

$\Longrightarrow S_K = S$, 故升链必终止于 S_K.

综上, 得证.

□

例 5.1: $\because \mathbb{Z}$ 的任意理想均有单个元素生成, 具体地说, I 是 $\mathbb{Z}$ 的理想, 则 $I = \langle n \rangle$, 其中 n 为 I 中的最小整数, $\therefore \mathbb{Z}$ 是诺特环. □

例 5.2: $F[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in F, n \in \mathbb{Z}\}$, I 是 $F[x]$ 的理想, 则 $I = \langle f(x) \rangle$, 其中 $\deg f(x)$ 是 I 中最小的[1], 故

[1] 多项式间的除法: 若 $\deg g(x) \geq \deg f(x)$, 则 $\exists q(x), r(x) \in F[x]$, s.t. $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ 且 ($r(x) = 0$ 或 $0 < \deg r(x) < \deg f(x)$)

$(F[x],+,\cdot)$ 是诺特环. □

定义 5.2 主理想: 由一个元素生成的诺特环.

定理 5.2 (课本定理5.8): R 为有单位元的交换环,
R 是诺特环 $\Longleftrightarrow$ R 上的有限生成模都是诺特模.

上述定理意味着有限生成的性质对诺特环是遗传的.

证: "$\Longleftarrow$": $R \in R-\mathrm{mod}$ 且 $R = \langle\langle 1\rangle\rangle$, 故 R 为诺特环.

"$\Longrightarrow$": 取 R 上的有限生成模 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n\rangle\rangle \in R-\mathrm{mod}$, $M = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R\}$.
定义映射 $\tau: R^n \to M$, $(r_1, \cdots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i u_i$.

(1) $\because \tau(r(r_1,\cdots,r_n)+t(l_1,\cdots,l_n)) = \tau(rr_1+tl_1,\cdots,rr_n+tl_n) = \sum_{i=1}^n(rr_i+tl_i)u_i = r\sum_{i=1}^n r_iu_i + t\sum_{i=1}^n l_iu_i = r\tau(r_1,\cdots,r_n)+t\tau(l_1,\cdots,l_n)$, $\therefore \tau$ 是 R^n 到 M 上的模同态.

(2) $\because \forall(r_1,\cdots,r_n)$, $\exists \sum_{i=1}^n r_iu_i$, $\therefore \tau$ 满射.

$\Longrightarrow \tau$ 满同态.

设 S 是 M 的任一子模, 则 $\tau^{-1}(S)$ 是 R^n 的子模, 且 $\because \tau$ 满同态, $\therefore \tau(\tau^{-1}(S)) = S$.

【思路】根据定理 5.2, 要证 M 诺特, 即证 M 的子模 S 有限生成, 于是先证 R^n 的子模有限生成, 从而 R^n 诺特, 进而利用引理 5.1 得 S 有限生成.

数学归纳法: 当 $n=1$ 时, R 诺特 $\Longrightarrow R^n$ 诺特.
假设当 $n=k$ 时, R^k 诺特, 则当 $n=k+1$ 时, 要证 R^{k+1} 诺特, 即证 R^{k+1} 的子模有限生成.
取 I 为 R^{n+1} 子模, 取 $I_1 = \{(0,\cdots,0,a_{k+1}) \mid \exists a_1,\cdots,a_k \in R,\ \text{s.t.}\ (a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}) \in I\}$, $I_2 = \{(a_1,\cdots,a_k,0) \mid \exists a_k \in R,\ \text{s.t.}\ (a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}) \in I\}$.
$\forall(0,\cdots,0,a_{k+1}),(0,\cdots,0,b_{k+1}) \in I_1$, $\exists a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_k \in R$, s.t. $(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}),(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1}) \in I$,
$\because I$ 是子模, $\therefore \forall r,t \in R$, $r(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})+t(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1}) = (ra_1+tb_1,\cdots,ra_k+ta_k) \in I \Longrightarrow r(0,\cdots,0,a_{k+1})+t(0,\cdots,0,b_{k+1}) = (0,\cdots,0,ra_{k+1}+tb_{k+1}) \in I_2$, 故 I_1 为 R^{k+1} 的子模.
$\forall(a_1,\cdots,a_k,0),(b_1,\cdots,b_k,0) \in I_2$, $\exists a_{k+1},b_{k+1}$, s.t. $(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}),(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1}) \in I$
$\therefore I$ 是子模, $\therefore \forall r,t \in R$, $r(a_1,\cdots,a_k,a_{k+1})+t(b_1,\cdots,b_k,b_{k+1}) = (ra_1+tb_1,\cdots,ra_k+ta_k) \in I \Longrightarrow r(a_1,\cdots,a_k,0)+t(b_1,\cdots,b_k,0) = (ra_1+tb_1,\cdots,ra_k+tb_k,0) \in I_2$, 故 I_2 为 R^{k+1} 的子模.
令 $J_1 = \{a_{k+1} \mid (0,\cdots,0,a_{k+1}) \in I_1\}$, $J_2 = \{(a_1,\cdots,a_k) \mid (a_1,\cdots,a_k) \in I_2\}$, 易证 J_1 是 R 的子模, J_2 是 R^k 的子模.
$\because R, R^k$ 诺特, $\therefore J_1, J_2$ 有限生成, 设 $J_1 = \langle\langle g_1,\cdots,g_m\rangle\rangle$, $J_2 = \langle\langle f_1,\cdots,f_n\rangle\rangle$, 其中 $g_1 \in R$, $f_i \in R^k$.
于是 $\forall i = 1,\cdots,m$, $(0,\cdots,0,g_i) \in I_1$, 由 I_1 的定义, $\exists g_{i_1},\cdots,g_{i_k} \in R$, s.t. $\bar{g}_i \equiv (g_{i_1},\cdots,g_{i_n},g_i) \in I$,
又有 $\bar{f}_i = (f_i, 0)$,
$\forall r = (r_1,\cdots,r_k,r_{k+1}) \in I$, 则 $(0,\cdots,0,r_{k+1}) \in I_1$, 即 $r_{k+1} \in J_1 = \langle\langle g_1,\cdots,g_m\rangle\rangle$,
于是 $r_{k+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$, $(h,0) \equiv r - \sum_{i=1}^m \alpha_i\bar{g}_i = (*,\cdots,*,0) \in I$, 从而 $(h,0) \in I_2$, $h \in J_2$, 设 $h = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i$
$\Longrightarrow r = \sum_{i=1}^m \alpha_i\bar{g}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i\bar{f}_i$, 故 I 由 $\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_m,\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_n$ 生成 $\Longrightarrow R^{k+1}$ 诺特 $\Longrightarrow R^n$ 诺特 $\forall n \Longrightarrow S = \tau(\tau^{-1}(S))$ 有限生成. □

引理 5.1: $\tau: M \to N$ 满同态, 则 M 有限生成 $\Longrightarrow N$ 有限生成, 即有限生成模的满同态像有限生成.

证: $\because M$ 有限生成, $\therefore$ 设 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n\rangle\rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R\}$,
$\because \tau$ 满同态, $\therefore N = \operatorname{Im}\tau = \{\tau(u) \mid u \in M\} = \{\tau(u) \mid u = \sum_{i=1}^n r_i v_i, r_i \in R\} = \{\tau(\sum_{i=1}^n r_i v_i) \mid r_i \in R\} = \{\sum_{i=1}^n r_i \tau(v_i) \mid r_i \in R\} = \langle\langle \tau(v_1), \cdots, \tau(v_n)\rangle\rangle$, 故 N 有限生成. □

定理 5.3 <u>Hilbert 基本定理(课本定理5.9)</u>: R 是诺特环 $\Longrightarrow R[x] \equiv \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in R, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 诺特, 其中 $\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^m b_j x^j = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}}(a_k + b_k)x^k$, $(\sum_{i=0}^n a_i x^i)\left(\sum_{j=0}^m b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{nm}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k$.

证: 设 I 是 $R[x]$ 的理想, $I_k = \{r_k \in R \mid \exists a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} + r_k x^k \in I\}$ 是 R 的理想,
且 $\because \forall f(x) \in I$, $xf(x) \in I$, $\therefore I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_K \subseteq \cdots$
又 $\because R$ 诺特, $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $I_K = I_{K+1} = \cdots$, 且 R 的理想均有限生成,
故设 $I_0 = \langle r_{01}, r_{02}, \cdots, r_{0t_0}\rangle$, $I_1 = \langle r_{11}, r_{12}, \cdots, r_{1t_1}\rangle$, $\cdots$, $I_K = \langle r_{K1}, r_{K2}, \cdots, r_{Kt_K}\rangle$,
$g_{01} = r_{01} \in I$, $g_{02} = r_{02} \in I$, $\cdots$, $g_{0t_0} = r_{0t_0} \in I$,
$g_{11} = r_{11}x + O(1) \in I$, $g_{12} = r_{12}x + O(1) \in I$, $\cdot$, $g_{1t_1} = r_{1t_1}x + O(1) \in I$,
$\cdots$,
$g_{K1} = r_{K1}x^k + O(x^{k-1}) \in I$, $r_{K2}x^K + O(x^{K-1}) \in I$, $\cdots$, $g_{Kt_K} = r_{Kt_K}x^K + O(x^{K-1}) \in I$,
则 I 由 $\{g_{ij} \mid i = 1, \cdots, K; j = 1, \cdots t_i\}$ 生成,
$\forall f(x) \in I$, 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$,
取 $a_n \in I_n$, 若 $n > K$, 则 $I_n = I_K = \langle r_{K1}, \cdots, r_{Kt_K}\rangle$, 从而 $a_n = \sum_{i=r}^{t_K} \alpha_i r_i$,
$\Longrightarrow f(x) = a_n x^n + O(x^{n-1}) = x^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki}\right) + O(x^{n-K}) = x^{n-K}\left(\sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki}\right) + O(x^{K-1}) = \sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i r_{Ki} x^n + O(x^{n-1})$,
$f(x) \to f(x) - x^{n-K}\left(\sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki}\right) = \beta_{n-1}x^{n-1} + O(x^{n-2})$,
重复以上操作直至多项式的最高次数 $n < K$, 此时, $a^n \in I_n = \langle r_{n1}, \cdots, r_{nt_n}\rangle$, $a_n = \sum_{j=1}^{t_n} \beta_j r_{nj}$, $f(x) - \sum_{j=1}^{t_n} \beta_j g_{nj} =$,
即执行以上操作有限次后, $f(x)$ 完全由 g_{ij} 表示 $\Longrightarrow I$ 有限生成, 故由定理 5.1 得, $R[x]$ 诺特. □

例 5.3: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 诺特 $\Longrightarrow \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ 诺特.
$\mathbb{R}[z] = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+\}$,
方程组 $\begin{cases} f_1(x) = a_{1n}x^n + a_{1,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{11}x + a_{10} = 0, \\ \cdots \\ f_m(x) = a_{mn}x^n + a_{m,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{m1}x + a_{m0} = 0, \end{cases}$ 的解为 $\mathbb{R}$ 的子集合,
令 $h(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x)$, 若 $f_i(x) = 0 \forall i$, 则 $h(x) = 0$.
方程组与解集合之间存在的一一对应的关系, 正如 $\mathbb{R}[x]$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的对应关系. □

Chapter 6

主理想整环上的模

定义 6.1 **主理想整环(PID):** 每个理想均由一个元素生成的整环.

例 6.1: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}[x]$ 为 PID. $\square$

PID 必诺特.

$\mathbb{R}$ 为整环, $a, b, r, s \in R$,

(1)

定义 6.2 **整除:** r 整除 $s \Longleftrightarrow s = xr$, $x \in R$, 记作 $r \mid s$.

(2)

定义 6.3 **单位:** R 中的可逆元.

例 6.2: $\mathbb{Z}$ 中的 1 和 -1 互逆, 故 1 和 -1 均为单位.
实际上, 若 F 为域, 则 $F^* \equiv \mathbb{Z} - \{0\}$ 中的元素均为单位. $\square$

(3)

定义 6.4 **素元:** $0 \neq q \in R$, 若 $p \mid ab \Longrightarrow p \mid a$ 或 $p \mid b$, 则称 p 为**素元**.

(4)

定义 6.5 **不可约元:** $0 \neq r \in R$, 若 $r = ab \Longrightarrow a$ 或 b 为单位, 则称 r 为**不可约元**.

(5)

定义 6.6 **互素:** r 与 b **互素** $\Longrightarrow a$ 与 b 无非单位公因子.

注意:

- 单元必素, 必不可约.

证: 设 $0 \neq r \in R$ 为单位, 则必 $\exists a$ 的逆 a^{-1}.
若 $r \mid ab$, 则 $(ar^{-1})r = a$, $(br^{-1})r = b \Longrightarrow r$ 为素元.
若 $r = ab$, 则 $r^{-1}r = r^{-1}(ab) = (r^{-1}a)b = 1$, $r^{-1}a$ 为 b 的逆元, 即 b 可逆 $\Longrightarrow r$ 为不可约元. □

- 对于整环来说, 素元不可约, 反之未必.

证: 设 p 为素元, 若 $p = ab$, 则 $1p = p = ab \Longrightarrow p \mid ab$.
$\because p$ 为素元, $\therefore p \mid a$ 或 $p = b$.
无妨 $p \mid a$, 则 $a = px$, 其中 $x \in R$
$\Longrightarrow p = ab = pxb \Longrightarrow p(1 - xb) = 0$,
$\because p \neq 0$ 且 R 为整环 (R 无零因子), $\therefore 1 - xb = 0 \Longrightarrow xb = 1 \Longrightarrow b$ 为单位, 故 p 为不可约元. □

例 6.3: (不可约元非素的例子) $R = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 为整环.
$9 = 3^2 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$,
3 不可约 (证略), $3 \mid (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$, 但 $3 \nmid (2 + \sqrt{-5})$, $3 \nmid (2 - \sqrt{-5}) \Longrightarrow 3$ 非素. □

- 对于非整环来说, 素元未必不可约.

例 6.4: $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ 非整环, $[2]$ 为素元, 但 $[2] = [2][4]$, $[2]$ 和 $[4]$ 均非单位 $\Longrightarrow [2]$ 可约. □

定理 6.1 (课本定理0.29): R 为 PID, $a, b \in R$,
a 与 b 互素 $\Longleftrightarrow \exists r, t \in R$, s.t. $ra + tb = 1$.

证: "$\Longrightarrow$": R 为 PID, 令 $I = \langle a, b \rangle$,
$\because R$ 是主理想, $\therefore I$ 可由一个元素生成, 设 $I = \langle c \rangle$, 其中 $c \in R$,
又 $\because a \in I$, $b \in I$, $\therefore c \mid a$, $c \mid b \Longrightarrow c$ 为 a 和 b 的公因子,
$\because a, b$ 互素, $\therefore c$ 为单位, 即 $\exists c^{-1} \in R$, s.t. $1 = c^{-1}c \in I$,
$\because 1 \in I$, $\therefore 1 = ra + tb$.
"$\Longleftarrow$": 取 c 为 a 和 b 的公因子,
$\because 1 = ra + tb$, $\therefore c \mid 1 \Longrightarrow c$ 可逆, 即 c 为单位. □

有算法可以在给定 a, b 下找到 s, t, 此处不赘述.

定理 6.2 (课本定理0.29): R 是 PID, $\forall 0 \neq r \in R$, $r = up_1 \cdots p_n$ 且该分解式唯一, 其中 u 为单位, p_i 是 R 中的不可约元, $n \in \mathbb{Z}^+$.

证: 若 r 不可约, 则直接得证.
若 r 可约, 则设 $r = r_1 r_2$, r_1 和 r_2 至少有一个非单位,
无妨 r_1 不是单位, 则 r_1 不可约.
若 r_2 不可约, 则得证,
若 r_2 可约, 则 $\langle r \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle$,
对 r_2 继续如上分解, 可得 $\langle r \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle \subseteq \cdots$,
又 $\because R$ 为 PID, $\therefore R$ 诺特, 即 $\exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $\langle r_K \rangle = \langle r_{K+1} \rangle = \cdots$,
故重复如上分解操作, 最终可将 r 表为有限个不可约元的乘积. □

定义 6.7 挠元(Torsion): $M \in R-\text{mod}$, $v \in M$, 若 $\exists 0 \neq r \in R$, s.t. $rv = 0$, 则称 v 为 M 的**挠元**.

定义 6.8 挠模: 所有元素均为挠元的模.

定义 6.9 无挠: 若一模无非零挠元, 则称该模**无挠**.

与线性无关类似, 若 $0 \neq v \in M$, $r \in R$, $rv = 0$, 且 M 无挠, 则 $r = 0$.

定义 6.10 挠子模: $M_{\text{tor}} = \{v \in M \mid v \text{ 为挠元}\}$.

$\because 0$ 为 M 的挠元, $0 \in M_{\text{tor}}$, $\therefore M_{\text{tor}} \neq \emptyset$.

M_{tor} 为 M 的子模.

证: $\forall u, v \in M_{\text{tor}}$, $\exists 0 \neq r_1, r_2 \in R$, s.t. $r_1 u = 0$, $r_2 v = 0$,
$\forall s, t \in R$, $(r_1 r_2)(su + tv) = r_2 s(r_1 u) + r_1 t(r_2 v) = r_2 s \cdot 0 + r_1 t \cdot 0 = 0 + 0 = 0$ 且 $r_1 r_2 \neq 0 \Longrightarrow (su + tv) \in M_{\text{tor}}$, 故得证. □

$\frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 无挠.

证: 假设 $[0] \neq [v] \in \frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 为挠元, 则 $\exists 0 \neq r \in R$, $r[v] = [rv] = [0] = M_{\text{tor}} \Longrightarrow rv \in M_{\text{tor}} \Longrightarrow v = r^{-1}(rv) \in M_{\text{tor}} \Longrightarrow [v] = M_{\text{tor}} = [0]$, 与假设矛盾, 故假设错误, 得证. □

定义 6.11 零化子: $v \in M \in R-\text{mod}$, v 的**零化子** $\text{ann}(v) \equiv \{r \in R \mid rv = 0\} \subseteq R$.
N 是 M 的子模, 则 $\text{ann}(N) = \{r \in R \mid rN \equiv \{rv \mid v \in N\} = \{0\}\} \subseteq R$.

$\text{ann}(v)$ 是 R 的理想.

证: $\forall s, t \in \text{ann}(v)$, $sv = tv = 0 \Longrightarrow sv - tv = (s-t)v = 0 \Longrightarrow s - t \in \text{ann}(v)$,
$\forall r \in R$, $(rs)v = r(sv) = r \cdot 0 = 0 \Longrightarrow rs \in \text{ann}(v)$.
综上, 得证. □

同理, $\text{ann}(N)$ 也是 R 的理想

定义 6.12 阶: 若 R 为 PID, 则 $\text{ann}(v), \text{ann}(N)$ 均为主理想, 其生成元分别称为 v 和 N 的**阶**.

定理 6.3 (课本定理6.5): R 为 PID, $M \in R-\text{mod}$ 自由, 则 M 的子模均自由.

证: (不严谨的证明, 仅针对) M 有限生成 (的特殊情况) 且自由. 设 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle = \{\sum_{i=0}^n r_i v_i \mid r_i \in R\}$, 其中 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关.

$\forall v \in M$, $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ 展开唯一, 定序后, $M \longleftrightarrow R^n$, $v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ 模同构.

设 S 是 R^n 的子模, 取 R 的理想 $I_k = \{r_k \in R \mid \exists a_1, \cdots, a_{k-1} \in R, \text{ s.t. } (a_1, \cdots, a_{k-1}, r_k, 0, \cdots, 0) \in S\}$.

$\because R$ 为 PID, $\therefore I_k$ 由一个元素生成, 设 $I_k = \langle r_k \rangle$, 其中 $r_k \neq 0$, $k = 1, \cdots, n$.
取 $u_k = (a_1^k, \cdots, a_{k-1}^k, r_k, 0, \cdots, 0) \in S$, $S = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$ 生成 (下证) 且显然 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 线性无关.
取 $(b_1, \cdots, b_n) \in S$, 若 $b_n \neq 0$, 则 $b_n \in I_n = \langle r_n \rangle \Longrightarrow \exists x_n \in R$, s.t. $b_n = x_n r_n \Longrightarrow (b_1, \cdots, b_n) - x_n b_n = (\cdots, 0)$,
重复如上操作, 最终可将 $(b_1, \cdots, b_n)$ 用 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 表示.
故得证. □

定理 6.4 (课本定理6.6): R 为 PID, $M \in R-\mathrm{mod}$ 有限生成,
M 自由 $\Longleftrightarrow M$ 无挠.

证: "$\Longrightarrow$": 设 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle$ 且 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关.
$\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$,
若 $rv = 0$, 则 $r\left(\sum_{i=1}^n r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n (r r_i) v_i = 0$,
$\because \{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关, $\therefore r r_1 = \cdots = r r_n = 0$,
$\because R$ 为整环 (无零因子), $\therefore$ 若 $r \neq 0$, 则 $r_1 = \cdots = r_n = 0 \Longrightarrow v = 0$, 故 M 无挠.

"$\Longleftarrow$": 取 $M = \langle\langle u_1, \cdots, u_m \rangle\rangle$,
无妨设 $u_1, \cdots, u_k$ 是其中最大的线性无关组, 即 $\forall i = k+1, \cdots, m$, $\{u_1, \cdots, u_k, u_i\}$ 线性相关
$\Longrightarrow \exists$ 不全为零的 $a_{i1}, \cdots, a_{ik}, a_i$, s.t. $a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik}u_k + a_i u_i = 0$,
显然 $a_i \neq 0$ (否则 $a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik}u_k = 0 \Longrightarrow a_{i1} = \cdots = a_{ik} = 0$, 矛盾) $\Longrightarrow a_i u_i = -(a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik}u_k)$.
令 $a = a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_m$, 则 $a \neq 0$,
$aM = \langle\langle au_1, \cdots, au_k, au_{k+1}, \cdots, au_m \rangle\rangle \subseteq \langle\langle u_1, \cdots, u_k \rangle\rangle$,
$\because \{u_1, \cdots, u_k\}$ 线性无关, $\therefore \langle\langle u_1, \cdots, u_k \rangle\rangle$ 是自由模,
$\because R$ 为 PID, 自由具有遗传性, $\therefore aM$ 自由. 构造映射 $\tau : M \to aM$, $v \mapsto av$.

(1) τ 线性.

(2) $\because M$ 无挠且 $a \neq 0$, $\therefore \ker \tau = \{v \in M \mid av = 0\} = \{0\}$.

(3) τ 满射.

故 τ 同构 $\Longrightarrow M$ 也自由.

综上, 得证. □

$\because M$ 自由, $\therefore M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle$,
又 $\because \{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关, $\therefore$ 对 $i \neq j$, $\langle\langle v_i \rangle\rangle \cap \langle\langle v_j \rangle\rangle = \{0\} \Longrightarrow M = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_n \rangle\rangle$.

定理 6.5 (课本定理6.8): R 是 PID, $M \in R-\mathrm{mod}$ 有限生成, 则 $M = M_{\mathrm{free}} \oplus M_{\mathrm{tor}}$, 其中 $M_{\mathrm{free}} = \frac{M}{M_{\mathrm{tor}}}$.

证: M_{tor} 为挠子模且 $\frac{M}{M_{\mathrm{tor}}}$ 无挠.
$\because \Pi : M \to \frac{M}{M_{\mathrm{tor}}}$, $u \to [u]$ 满同态且 M 有限生成, 由引理 6.1 得 $\frac{M}{M_{\mathrm{tor}}}$ 有限生成.
又 $\because \frac{M}{M_{\mathrm{tor}}}$ 无挠, $\therefore \frac{M}{M_{\mathrm{tor}}}$ 自由.
取 $\frac{M}{M_{\mathrm{tor}}} = \langle\langle [u_1], \cdots, [u_t] \rangle\rangle$, 其中 $\{u_1, \cdots, u_t\}$, 线性无关 (下证),

证: 若 $\sum_{i=1}^t r_i u_i = 0$, 则 $\Pi\left(\sum_{i=1}^t r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^t r_i \Pi(u_i) = \sum_{i=1}^t r_i [u_i] = 0$,
又 $\because \{[u_1], \cdots, [u_t]\}$ 线性无关, $\therefore r_1 = \cdots = r_t = 0 \Longrightarrow \{u_1, \cdots, u_t\}$ 线性无关. □

故 $\langle\langle u_1,\cdots,u_t\rangle\rangle$ 为自由模, 记作 M_{free}.

确定了 M_{free} 和 M_{tor} 后, 下面来证 $M = M_{\text{free}} \oplus M_{\text{tor}}$:
$\forall v \in M$, $\Pi(v) = [v] \in \frac{M}{M_{\text{tor}}} = \langle\langle [u_1],\cdots,[u_t]\rangle\rangle \Longrightarrow \Pi(v) = [v] = \sum_{i=1}^t l_i[u_i]$.
令 $u = \sum_{i=1}^t l_i u_i \in M_{\text{free}}$, 则 $\tau(u) = \tau\left(\sum_{i=1}^t l_i u_i\right) = \sum_{i=1}^t l_i \Pi(u_i) = \sum_{i=1}^t l_i[u_i] = \Pi(v)$.
$\Pi(v-u) = \Pi(v) - \Pi(u) = 0 \Longrightarrow v - u \in \ker\Pi = M_{\text{tor}}$,
于是 $v = u + (v-u)$, 其中 $u \in M_{\text{free}}$, $v - u \in M_{\text{tor}} \Longrightarrow M = M_{\text{free}} + M_{\text{tor}}$.

取 $w \in M_{\text{free}} \cap M_{\text{tor}}$, 则 $w \in M_{\text{free}} \Longleftrightarrow w = \sum_{i=1}^t \alpha_i u_i$,
且 $w \in M_{\text{tor}} \Longleftrightarrow \Pi(w) = 0$
$\Longrightarrow 0 = \Pi(w) = \Pi\left(\sum_{i=1}^t \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^t \alpha_t \Pi(u_i) \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_t = 0 \Longrightarrow w = 0 \Longrightarrow M_{\text{free}} \cap M_{\text{tor}} = \{0\}$.

综上, 得证. □

引理 6.1: $\tau: M \to N$ 满同态, 若 M 有限生成, 则 N 有限生成.

证: $\because \tau: M \to N$ 满同态, $\therefore \forall w \in N, \exists u \in M$, s.t. $w = \tau(u)$,
又 $\because M$ 有限生成, 设 $M = \langle\langle v_1,\cdots,v_k\rangle\rangle$, $\therefore u = \sum_{i=1}^k r_i u_i \Longrightarrow \tau(u) = \tau\left(\sum_{i=1}^k r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^k r_i \tau(u_i)$,
故 $N = \langle\langle \tau(u_1),\cdots,\tau(u_k)\rangle\rangle$, 即 N 有限生成. □

至此, $M_{\text{free}} = \langle\langle u_1,\cdots,u_t\rangle\rangle = \langle\langle u_1\rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle u_t\rangle\rangle$ 已拆解到位. 那么能否以及如何继续拆解 M_{tor} 呢?

定理 6.6 (课本定理6.10): R 为 PID, $M \in R-\text{mod}$ 为挠模且 $\text{ann}(M) = \langle\langle \mu\rangle\rangle$, 其中 $\mu = up_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$, u 为单位, p_i 均不可约且互不相等, $e_i \in \mathbb{Z}^+$,
则 $M = M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_m}$, 其中 $M_{p_i} = \{v \in M \mid p_i^{e_i} v = 0\}$ 是阶为 $p_i^{e_i}$ (即 $\text{ann}(M_{p_i}) = \langle p_i^{e_i}\rangle$) 的准素子模.

证: 不失一般性, 设 $\mu = pq$, p 与 q 互素, 要证 $M = M_p \oplus M_q$, 其中 $M_p = \{v \mid pv = 0\}$, $M_q = \{v \mid qv = 0\}$.
$\because p$ 与 q 互素, $\therefore \exists r, t \in R$, s.t. $rp + tq = 1$.
$\forall v \in M$, $v = 1v = (rp+tq)v = (rp)v + (tq)v$,
$q(rp)v = (qrp)v = (rpq)v = r(pq)v = r\mu v$,
又 $\because \langle\langle\mu\rangle\rangle$ 为零化子, $\therefore q(rpv) = r\mu v = 0 \Longrightarrow rpv \in M_q$,
同理, $tqv \in M_p$, 故 $M = M_p + M_q$.

若 $v \in M_p \cap M_q$, 则 $v \in M_p \Longleftrightarrow pv = 0$,
且 $v \in M_q \Longleftrightarrow qv = 0$
$\Longrightarrow v = 1v = (rp+tq)v = rpv + tqv = r0 + t0 = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow M_p = M_q = \{0\}$.

$\because M_p = \{v \mid pv = 0\}$, $\therefore \text{ann}(M_p) = \langle p\rangle$, 易推广得 $M_{p_i} = \langle p_i^{e_i}\rangle$.

综上, 得证. □

然后准素子模能否进一步分解呢?

定理 6.7 (课本定理6.11): R 为 PID, $M \in R-\text{mod}$ 有限生成且为挠模, $\text{ann}(M) = \langle p^e\rangle$, 其中 p 不可约, $e \in \mathbb{Z}^+$,
则 $M = \langle\langle v_1\rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_n\rangle\rangle$, 其中 $\text{ann}(v_i) = \langle p^{e_i}\rangle$, 且 $e = e_1 \geq \cdots \geq e_n$.

证: (存在性证明) 不失一般性, 只需证 M 由两个生成元时, 定理成立, 即可由数学归纳法推广到一般情况.
设 $M = \langle\langle u_1, u_2\rangle\rangle$ 且 $u_1, u_2 \neq 0$, $\text{ann}(M) = \{r \in R \mid rM = \{0\}\} = \langle p^e\rangle$.
$\because u_1 \in M$, $\therefore p^e u_1 = 0 \Longrightarrow p^e \in \text{ann}(u_1)$,
同理, $p^e \in \text{ann}(u_2)$.

若 $\mathrm{ann}(u_1)=\langle b_1\rangle$, 则 $\because p$ 不可约, $\therefore b_1 \mid p^e \Longrightarrow b_1=p^{l_1}$, $l_1\le e$,
同理, 若 $\mathrm{ann}(u_2)=\langle b_2\rangle$, 则 $b_2=p^{l_2}$, $l_2\le e$.
假设 $l_1<e$, $l_2<e$, 令 $l=\max\{l_1,l_2\}$, 则 $p^e\nmid p^l$ 且 $p^l\in\mathrm{ann}(M)$, 与 $\mathrm{ann}(M)=\langle p^e\rangle$ 矛盾, 故假设错误, l_1,l_2 中至少有一个 $=e$.
无妨设 $l_1=e$ 即 $\mathrm{ann}(u_1)=\langle p^e\rangle$.
$M=\langle\langle u_1,u_2\rangle\rangle\Longrightarrow M=\langle\langle u_1\rangle\rangle+\langle\langle u_2\rangle\rangle$,
若 $\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle u_2\rangle\rangle=\{0\}$, 则 $M=\langle\langle u_1\rangle\rangle\oplus\langle\langle u_2\rangle\rangle$, 得证.
若 $\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle u_2\rangle\rangle\ne\{0\}$, 则 $\exists 0\ne r\in R$, s.t. $ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$.
取 R 的理想 $J=\{r\in R\mid ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle\}$.
$\because R$ 为 PID, $\therefore J$ 由一个元素生成, 设 $J=\langle\langle t\rangle\rangle$.
$\because p^eu_2=0\Longrightarrow p^e\in J$, $\therefore p^e\in J\Longrightarrow t\mid p^e$,
又 $\because p$ 不可约, $\therefore t=p^{e_2}$ 且 $e_2\le e$,
又 $\because J=\{r\in R\mid ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle\}=\langle t\rangle$, $\therefore p^{e_2}u_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$, 即 $\exists\alpha\in R$, s.t. $p^{e_2}u_2-\alpha u_1=0$
$\Longrightarrow p^{e-e_2}(p^{e_2}u_2-\alpha u_1)=0\Longrightarrow p^eu_2-p^{e-e_2}\alpha u_1=0$,
又 $\because p^eu_2=0$, $\therefore p^{e-e_2}\alpha u_1=0\Longrightarrow p^{e-e_2}\alpha\in\mathrm{ann}(u_1)$,
又 $\because \mathrm{ann}(u_1)=\langle p^e\rangle$, $\therefore p^e\mid p^{e-e_2}\alpha\Longrightarrow p^{e_2}\mid\alpha\Longrightarrow\exists\beta\in R$, s.t. $\alpha=\beta p^{e_2}$,
回代到 $p^{e_2}u_2-\alpha u_1=0$ 得 $p^{e_2}u_2-p^{e_2}\beta u_1=0\Longrightarrow p^{e_2}(u_2-\beta u_1)=0$.
令 $w=u_2-\beta u_1$, 则 $M=\langle\langle u_1,w\rangle\rangle$, 且 $\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle w\rangle\rangle=\{0\}$ (下证),

证: 设 $v\in\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle w\rangle\rangle$, 则 $v\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$,
且 $v\in\langle\langle w\rangle\rangle\Longrightarrow\exists r\in R$, $v=rw$
$\Longrightarrow v=rw=ru_2-r\beta u_1\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$,
$\because r\beta u_1\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$, $\therefore ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$, (由 J 的定义) 即 $r=p^{e_2}r_1$,
回代得 $v=rw=p^{e_2}r_1u_2-p^{e_2}r\beta u_1=p^{e_2}r_1u_2-p^{e_2}r_1\beta u_1=p^{e_2}r_1u_2-r_1(\beta p^{e_2})u_1=r_2(p^{e_2}u_2-\alpha u_1)=r_20=0\Longrightarrow$ $\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle w\rangle\rangle=\{0\}$. □

故 $M=\langle\langle u_1\rangle\rangle\oplus\langle\langle w\rangle\rangle$, 其中 u_1 的阶为 p^{e_1}, w 的阶为 p^{e_2}, $e_2\le e_1=e$. □

总结定理 6.5, 6.6 和 6.7, 可得:

定理 6.8 (课本定理6.12): R 为 PID, $M\in R-\mathrm{mod}$ 有限生成,
则 $M=M_{\text{free}}\oplus M_{\text{tor}}$, 其中 $M_{\text{free}}=\frac{M}{M_{\text{tor}}}$.
若 $\mathrm{ann}(M_{\text{tor}})=\langle\mu\rangle$, 其中 $\mu=up_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n}$, u 为单位, p_i 不可约且互不相等, $e_i\in\mathbb{Z}^+$,
则 $M_{\text{tor}}=M_{p_1}\oplus\cdots\oplus M_{p_n}$, 其中 $M_{p_i}=\{v\in M_{\text{tor}}\mid p_i(v)=0\}$ 即 $\mathrm{ann}(M_{p_i})=\langle p_i^{e_i}\rangle$,
$M_{p_i}=\langle\langle v_i\rangle\rangle\oplus\cdots\langle\langle v_{it_i}\rangle\rangle$, 其中 $\mathrm{ann}(v_{ij})=\langle p_i^{e_{ij}}\rangle$, $e_i=e_{i1}\ge\cdots\ge e_{it_i}$.

$$\text{故 } M=\overbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\langle\langle u_i\rangle\rangle\right)}^{M_{\text{free}}}\oplus\overbrace{\left[\bigoplus_{i=1}^{n}\overbrace{\left(\bigoplus_{j=1}^{t_i}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle\right)}^{M_{p_i}}\right]}^{M_{\text{tor}}}.$$

由定理 6.7, $M_{\mathrm{tor}}=\bigoplus_{ij}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 其中 $\operatorname{ann}(v_{ij})=\langle p_i^{e_{ij}}\rangle$, $e_{i1}\geq\cdots\geq e_{it_i}$. 这里,

$$\begin{Bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1t_1} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2t_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nt_n} \end{Bmatrix}$$

生成了 M_{tor}, 其阶为

定义 6.13 初等因子: M 的初等因子:

$$\begin{Bmatrix} p_1^{e_{11}} & p_1^{e_{12}} & \cdots & p_1^{e_{1t_1}} \\ p_2^{e_{21}} & p_2^{e_{22}} & \cdots & p_2^{e_{2t_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n^{e_{n1}} & p_n^{e_{n2}} & \cdots & p_n^{e_{nt_n}} \end{Bmatrix}.$$

此外, 还定义了

定义 6.14 不变因子: M 的不变因子:

$$\begin{aligned} q_1 &= \prod_i p_i^{e_{1i}}, \\ q_2 &= \prod_i p_i^{e_{2i}}, \\ &\vdots, \\ q_t &= \prod_i p_i^{e_{ti}}. \end{aligned}$$

Chapter 7

线性算子的结构

先来回顾一下**线性算子**: V 为域 F 上的向量空间, $\dim V = n$, $\mathcal{L}(V) = M_{n\times n}(F)$, $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$, 取 $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{L}(V)$, 有

(1) $(\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v)$

(2) $(\tau \circ \sigma)(v) = \tau(\sigma(v))$

(3) $(r\tau)(v) = r \cdot \tau(v)$

其中 $\mathcal{L}(V)$ 关于 (1) 中的加法和 (2) 中的复合成环, 关于 (1) 中的加法和 (3) 中的点乘成向量空间, 故 $\mathcal{L}$ 为代数.
设 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$ 分别是 V 的两组定序基,

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "\tau'_A"] & F^n \\
V \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{B}}"'] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] \\
F^n \arrow[r, "\tau_A"] & F^n
\end{tikzcd}$$

定理 7.1 (课本定理7.1): 线性算子 τ 在定序基 $\mathcal{B}$ 下的表示为 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \Big([\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} \quad \cdots \quad [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}'}\Big)$.
当 τ 作用于 $v \in V$, 可表为矩阵与向量相乘, $[\tau(v)]_{\mathcal{B}} = [\tau]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$.

定理 7.2 (课本定理7.2): τ 在两组定序基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 下的表示之间的关系是 $[\tau]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$, 其中 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \Big([b_1]_{\mathcal{B}'} \quad \cdots \quad [b_n]_{\mathcal{B}'}\Big)$.

定义 7.1 相似: 类似上面的 $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'}$, 若两个矩阵 A, B 满足 $B = PAP^{-1}$, 则称 A 与 B **相似**, 由两两相似的矩阵组成的集合称为**相似类**.

取线性算子 $1, \tau, \tau^2, \cdots, \tau^{n^2} \in \mathcal{L}(V)$,
$\because$ 这些线性算子的数量 $n^2+1 > \dim \mathcal{L}(V) = n^2$, $\therefore$ 这些线性算子线性相关,
即 $\exists$ 不全为 0 的 $r_0, \cdots, r_{n^2} \in F$, s.t. $r_0 + r_1\tau + \cdots + r_{n^2}\tau^{n^2} = 0$
$\Longrightarrow \forall v \in V$, $\left(\sum_{i=0}^{n^2} r_i\tau^i\right)(v) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n^2} r_i\tau^i(v) = 0$.
令 $f(x) = \sum_{i=0}^{n^2} r_i x^i \in \mathcal{L}(V)$, 则 $f(\tau)(v) = 0$.

定理 7.3 (课本定理7.5): V 为域 F 上的向量空间, 则 V 为 $F[x]$ 上的模.

证: $\forall g(x) \in F[x]$, $g(x)$ 可表为 $g(x) = \sum_i a_i x^i$, 其中 $a_i \in F$, 则 $g(\tau) = \sum_i a_i\tau^i \in \mathcal{L}(V)$,
$\forall h(x) \in F[x]$, $h(x)$ 可表为 $h(x) = \sum b_j x^j$, 其中 $b_j \in F$, 则 $h(\tau) = \sum_j b_j\tau^j \in \mathcal{L}(V)$,
对于给定的 τ, 有类似数乘的运算 $F[x] \times V \to V$, $(g(x), v) = g(x)\cdot v \mapsto g(\tau)(v)$, 满足

(1) $[g(x)+h(x)]v = \left(\sum_i a_i x^i + \sum_j b_j x^j\right)v = \left(\sum_i a_i\tau^i + \sum_j b_j\tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(v) + \left(\sum_j b_j\tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)v + \left(\sum_j b_j x^j\right)v = g(x)v + h(x)v$

(2) $[g(x)h(x)]v = \left[\sum_i a_i x^i \sum_j b_j x^j\right]v = \left[\sum_i a_i\tau^i \circ \sum_j b_j\tau^j\right]v = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)\left(\left(\sum_j b_j\tau^j\right)(v)\right) = \left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\left(\sum_j b_j x^j\right)v\right) = g(x)[h(x)v]$

(3) $g(x)(u+v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(u) + \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)u + \left(\sum_i a_i x^i\right)v = g(x)v + g(x)u$

(4) $1v = 1(v) = v$

故 V 为 $F[x]$ 上的模. □

$F[x]$ 为 PID, $V \in F[x]-\mathrm{mod}$,
$\because \dim V = n$, $\therefore V$ 有限生成,
$\because f(x)v = f(\tau)(v) = 0$, $\therefore V$ 为挠模,
利用定理 6.7, 可将 V 分解为 $V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m} = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 其中 $\mathrm{ann}(v_{ij}) = \langle p^{e_{ij}}(x)\rangle$.

上面说明了分解 V 的可行性和 V 分解出的大致结构, 现在的问题是: 具体如何分解? 我们只要找到 V 的阶 μ, s.t. $\mathrm{ann}(V) = \langle\mu\rangle$, $\mu = up_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$, 就可得到挠子模 V_{p_i}, s.t. $\mathrm{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_1}\rangle$ 及循环子模 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, s.t. $\mathrm{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}\rangle$, $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$.

定义 7.2 极小多项式: $\mathrm{ann}(V) = \{g(x) \in F[x] \mid g(\tau)(V) = \{0\}\} = \langle m_\tau(x)\rangle$, 其中 $m_\tau(x)$ 称 τ 在 V 上的**极小多项式**, 首系数 $= 1$.

极小多项式就是 V 的阶, 对其进行分解: $m_\tau(x) = up_1^{e_1}(x)\cdots p_n^{e_n}(x)$, 其中 u 为单位, $p_i(x) \in F[x]$ 不可约且互不相等, $e_i \in \mathbb{Z}^+$,
$\Longrightarrow V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m}$, 其中 $\mathrm{ann}(V_{p_i}) = \langle p_1^{e_1}(x)\rangle$,
$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1}\rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_{it_i}\rangle\rangle$, 其中 $\mathrm{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x)\rangle$, $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$,
从而实现分解 $V = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$.

接下来我们利用上述对 V 的分解找一组合适的定序基, 以简化 V 上的线性算子 τ 的表示.

定义 7.3 不变子空间: 子空间 $S \subseteq V$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 若 $\tau(S) \subseteq S$, 则称 S 为 V 的 τ **不变子空间**.

定理 7.4 (课本定理7.5): 子模 $S \subseteq V \iff S$ 是 V 的**不变子空间**.

证: "$\Longrightarrow$": $\forall v \in S \subseteq V$, $\forall h(x) \in F[x]$, $h(x) = \sum_i a_i x^i$, $h(x)v = h(\tau)(v) = \sum_i a_i \tau^i(v) \in S$,
特别地, 取 $h(x) = x \in F[x]$, 则 $xv = \tau(v) \in S \Longrightarrow \tau(S) \subseteq S$, 即 S 为 V 的线性子空间.

"$\Longleftarrow$": $\because S$ 是 V 的不变子空间, $\therefore \forall v$, $\tau(v) \in S \Longrightarrow \forall i = 0, \cdots, \dim V$, $\tau^i(v) \in S$,
$g(x)v + h(x)v = g(\tau)(v) + h(\tau)(v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(v) + \left(\sum_j b_j \tau^j\right)(v) = \sum_i (a_i + b_i)\tau^i(v) \in S$, 故 S 为 V 的子模. □

$\because \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ 为 V 的 $F[x]$ 子模, $\therefore \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ 为不变子空间, 即 $\tau(\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle) \subseteq \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, 故之前分解操作实际上是将 V 分解成了一系列由单个向量生成的不变子空间.

让我们用简单的例子来展示一下, 若以不变子空间的基为整个向量空间的基 (的一部分), 线性算子的表示会如何.

例 7.1: 若 $\langle\langle b_1 \rangle\rangle$ 是 τ 不变的, 则 $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$[1]

若 $\langle\langle b_1, b_2 \rangle\rangle$ 是 τ 不变的, 即 $\tau(b_1) \in \langle\langle b_1, b_2 \rangle\rangle$, $\tau(b_2) \in \langle\langle b_1, b_2 \rangle\rangle$, 则 $\begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$,

若 $\langle\langle v_1, \cdots, v_k \rangle\rangle$ 是 τ 不变的, 则 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} *_{k \times k} & 0 \\ 0 & \tau' \end{pmatrix}$. □

在之前我们已将 V 分解成了多个不变子空间, 故若用各 $\langle v_{ij} \rangle$ 的基组成 V 的基, 则可以将 τ 表示为一个仅在对角线上有非零矩阵块而其余部分均为零的矩阵. 但我们仍未满足: 对于给定的不变子空间 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, 能否适当地选取该不变子空间中的基, 从而简化该不变子空间对应的非零矩阵块?

取 $\langle\langle v \rangle\rangle$ 的极小多项式为 $p(x)$ 即 $\operatorname{ann}(v) = \langle p(x) \rangle$, 设 $p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_1 x + r_0$, $r_i \in F$,
则 $p(x)v = p(\tau)(v) = (\tau^m + r_{m-1}\tau^{m-1} + \cdots + r_1\tau + r_0)(v) = \tau^m(v) + r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0 v = 0$,
即 $\tau^m(v)$ 可由 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示: $\tau^m(v) = -\left[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0 v\right]$,
$\Longrightarrow \tau^{m+1}(v) = \tau(\tau^m(v)) = \tau(-\left[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0 v\right])$
$= -\left[r_{m-1}\tau^m(v) + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)\right]$
$= -\left\{r_{m-1}\left[-r_{m-1}\tau^m(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)\right] + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)\right\}$
易证, 任意高阶的 τ 作用于 v 均可由 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示, $\forall f(x) \in F[x]$ 作用于 v 均可由 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示.
由此, 我们引出:

[1] $*$ 代表非零矩阵元.

定理 7.5: $\langle\langle v\rangle\rangle$ 为循环子模, 则 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 是 $\langle\langle v\rangle\rangle$ 的基.

证: 先证 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 线性无关: 设 $l_0v+l_1\tau(v)+\cdots+l_{m-1}\tau^{m-1}(v)=0$,
令 $h(x)=l_0+l_1x+\cdots+l_{m-1}x^{m-1}$, 则 $h(x)v=0\Longrightarrow h(x)\in\operatorname{ann}(v)=\langle p(x)\rangle\Longrightarrow p(x)\mid h(x)$,
然而 $\because \deg p(x)=m\geq\deg h(x)=m-1$, $\therefore$ 只能有 $l_0=l_1=\cdots=l_{m-1}=0$, 故 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 线性无关.

再证 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 生成 $\langle\langle v\rangle\rangle$: $\langle\langle v\rangle\rangle=\{h(x)v\mid h(x)\in F[x]\}=\{h(\tau)(v)\mid h(x)\in F[x]\}$,
$\forall h(\tau)v\in\langle\langle v\rangle\rangle$, 若 $\deg h(x)\leq m-1$, 则 $h(x)v$ 显然可由 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}\}$ 表示,
若 $\deg h(x)>m-1$, 则 $h(x)=q(x)p(x)+r(x)$, 其中 $q(x)$ 为商多项式, 余多项式 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg p(x)=m-1$
$\Longrightarrow h(x)v=(q(\tau)p(\tau)+r(\tau))(v)=q(\tau)p(\tau)(v)+r(\tau)(v)$, 其中 $\because p(x)\in\operatorname{ann}(v)$, $\therefore p(\tau)v=0\Longrightarrow h(x)v=r(\tau)v$ 可由 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}\}$ 表示.

综上, 得证. □

定义 7.4 <u>循环不变子空间</u>: S 是向量空间 V 的 τ 不变子空间, 若 S 有一组基 $\mathcal{B}=\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$, 其中 $v\in V$, $m\geq 1$, 则称 S 是 V 的**循环不变子空间**.

$\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 就是循环不变子空间. 那么, 以 $\mathcal{B}_{ij}=\{v_{ij},\tau(v_{ij}),\cdots,\tau^{m-1}(v_{ij})\}$ 为基, 线性算子 τ 在该循环不变子空间中的表示 (即 τ 的表示中该循环不变子空间对应的非零矩阵块) 如何?

定义 7.5 <u>伴阵</u>: 在定序基 $\mathcal{B}=\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 下, 线性算子 τ 可表为 $[\tau]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$,

其中 $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}}=[\tau(v)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $[\tau(b_2)]_{\mathcal{B}}=[\tau(\tau(v))]_{\mathcal{B}}=[\tau^2(v)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\cdots$, $[\tau(b_m)]_{\mathcal{B}}=[\tau^m(v)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}-r_0\\-r_1\\\vdots\\-r_{m-1}\end{pmatrix}$,

从而 $[\tau]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&\cdots&0&-r_0\\1&0&\cdots&\cdots&0&-r_1\\0&1&\cdots&\cdots&0&-r_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\cdots&0&-r_{m-2}\\0&0&\cdots&\cdots&1&-r_{m-1}\end{pmatrix}\equiv C[p(x)]$, 称为多项式 $p(x)=x^m+r_{m-1}x^{m-1}+\cdots+r_1x+r_0$ 的**伴阵**.

设 $d_{ij}=\deg p_i^{e_{ij}}(x)$, 则 $\mathcal{B}_{ij}=\{v_{ij},\tau(v_{ij}),\cdots,\tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为 $\langle v_{ij}\rangle$ 的基,

以 $\mathcal{B}_{ij}$ 为基, τ 在循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 中的表示就是 $p_i^{e_{ij}}(x)$ 的伴阵: $[\tau]_{\mathcal{B}_{ij}} = C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_1^{(ij)} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_2^{(ij)} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -l_3^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_{d_{ij}-2}^{(ij)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -l_{d_{ij}-1}^{(ij)} \end{pmatrix}$.

上面我们简化了 τ 在循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 中的表示. 又 $\because V = \bigoplus_{ij}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, $\therefore \mathcal{B} = \cup_{ij}\mathcal{B}_{ij}$ 为 V 的基, 利用 $\mathcal{B}$ 我们可简化 τ 在整个向量空间 V 中的表示:

定理 7.6 (课本定理7.10): $\dim V < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, V 的极小多项式为 $m_\tau(x) = p_1^{e_1}(x)\cdots p_n^{e_n}(x)$, 其中 $p_i(x)$ 不可约且互不相等,
$\Longrightarrow V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m}$, 其中 $\operatorname{ann}(V_{p_i}) = \langle p_1^{e_1}(x)\rangle$,
$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1}\rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_{it_i}\rangle\rangle$, 其中 $\operatorname{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x)\rangle$, $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$,
以 $\cup_{ij}\{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{d_{ij}-1}(v)\}$ 为基, 其中 $d_{ij} = \dim\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, τ 的表示可简化为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{ij} C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} C[p_1^{e_{11}}(x)] & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & C[p_1^{e_{1t_1}}(x)] & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & C[p_m^{e_{m1}}(x)] & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C[p_m^{e_{mt_m}}(x)] \end{pmatrix}.$$

定义 7.6 有理标准型: 上述线性变换的矩阵表示称为**有理标准型**.

$n = \dim V = \sum_{ij} d_{ij} = \sum_{ij} \deg p_i^{e_{ij}}(x) = \deg\left[\prod_{ij} p_i^{e_{ij}}(x)\right]$.

Chapter 8

特征值和特征向量

在上一章中, 我们介绍了多项式对应的伴阵, 那么, 如何由伴阵恢复多项式呢?

假设多项式 $p(x)=x^2+ax+b$, 则其伴阵为 $C[p(x)]=\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & -a\end{pmatrix}$,

$\det(xI-C[p(x)])=\begin{vmatrix}x & b\\ -1 & x+a\end{vmatrix}=x^2+ax+b$ 即恢复多项式.

同理, 对循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 设其极小多项式为 $p_i^{e_{ij}}(x)$, 伴阵为 $C[p_i^{e_{ij}}(x)]$, 有 $\det(xI-C[p_i^{e_{ij}}])=p_i^{e_{ij}}(x)$, 由定理 7.6, 线性算子 τ 的表示即为这些伴阵的直和, 故有

定义 8.1 特征多项式: $\det(xI-[\tau]_{\mathcal{B}})=\prod_{ij}p_i^{e_{ij}}(x)\equiv C_\tau(x)$, 称为 τ 的**特征多项式**.

定理 8.1 (课本第3 版引理7.17, 定理7.18): 特征多项式在相似操作下不变, 或线性算子的特征多项式唯一, 与线性算子的表示无关.

证: 设线性算子 τ 在定序基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 下的表示分别为 $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'}$,
则 $C_{[\tau]_{\mathcal{B}'}}(x)=\det(xI-[\tau]_{\mathcal{B}'})=\det(xI-M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1})=\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(xI-[\tau]_{\mathcal{B}})M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1})=\det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(xI-[\tau]_{\mathcal{B}}))=\det(xI-[\tau]_{\mathcal{B}})=C_{[\tau]_{\mathcal{B}}}(x)$. □

$\because C_\tau(x)=\prod_{ij}p_i^{e_{ij}}=\prod_i p_i^{\sum_{j=1}^{t_i}e_{ij}}$, $m_\tau(x)=up_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$, 且 $e_i=e_{i1}\geq\cdots\geq e_{it_i}$ (不可约因子相同, 但幂次不等), $\therefore \deg C_\tau(x)=\sum_{ij}\deg p_i^{e_{ij}}(x)=\sum_{ij}d_{ij}=n\geq\deg m_\tau(x)\Longrightarrow m_\tau(x)\mid C_\tau(x)$.

在 $F[x]$ 中, 任一一次多项式 $x-r$ 都是不可约的.
在 $\mathbb{R}[x]$ 中, 有实根 $\Longleftrightarrow$ 可约.
$\because$ 实系数多项式的复根的共轭亦为该多项式的根, $\therefore$ 实系数多项式的复根总是成对出现[1], 故 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式阶数 ≤ 2.

证: 当多项式阶数 >2, 若阶数为奇数, 则多项式的根两两配对后必留下一个根, 该根必不为复数而为实数 $\Longrightarrow$ 可约; 若阶数为偶数, 以 4 阶为例, 假设多项式不可约, 设复根分别为 $z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2$, 则多项式可写为 $(x-z_1)(x-\bar{z}_1)(x-z_2)(x-\bar{z}_2)=(x-(z_1+\bar{z}_1)x+z_1\bar{z}_1)(x-(z_2+\bar{z}_2)x+z_2\bar{z}_2)$,

[1]

证: $0\neq f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 若 $z\in\mathbb{C}$, s.t. $f(z)=0$, 即 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$
$\Longrightarrow f(\bar{z})=\bar{z}^n+a_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\cdots+a_1\bar{z}+a_0=f(\bar{z})=0$, 故得证. □

$(z_1+\bar{z}_1), z_1\bar{z}_1, (z_2+\bar{z}_2), z_2\bar{z}_2 \in \mathbb{R}$, $\therefore (x-(z_1+\bar{z}_1)x+z_1\bar{z}_1), (x-(z_2+\bar{z}_2)x+z_2\bar{z}_2) \in \mathbb{R}[x] \Longrightarrow$ 多项式可约, 故假设错误, 阶数 >2 的偶数阶实系数多项式必可约. □

例 8.1: $x^2+1=(x+i)(x-i)$ 无实根不可约. □

$\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式可以是任意次.
可用 **Eisenstein 方法** 判别 $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式的可约性: $\forall f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 其中 $a_i\in\mathbb{Z}$, 若 $\exists$ 素数 p, s.t. $p\nmid a_n$, $p\mid a_i|_{i=0,\cdots,i=n-1}$, $p^2\nmid a_0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

定义 8.2 特征值和特征向量: 线性算子 $\tau\in\mathcal{L}(V)$, $\lambda\in F$, 若 $\exists 0\neq v\in V$, s.t. $\tau(v)=\lambda v$, 则称 λ 为 τ 的**特征值**, v 为 τ 的**特征向量**.

定义 8.3: $\mathcal{E}_\lambda \equiv \{$特征值 λ 对应的特征向量$\} = \{v\in V \mid \tau(v)=\lambda v\}$.

$\mathcal{E}_\lambda$ 是 V 的子空间.

证: $\forall u,v\in\mathcal{E}_\lambda$, $\forall r,t\in F$, $\tau(ru+tv)=r\tau(u)+t\tau(v)=r(\lambda v)+t(\lambda v)=\lambda(ru)+\lambda(tv)=\lambda(ru+tv)\Longrightarrow ra+tv\in\mathcal{E}_\lambda$, 故得证. □

定义 8.4 特征谱: $\mathrm{spec}(\tau)\equiv\{\tau$ 的特征值$\}$.

(1) $\tau(v)=\lambda v \Longleftrightarrow \tau(v)-\lambda v=0$
$\Longleftrightarrow (\tau-\lambda)(v)=0$
$\Longleftrightarrow v\in\ker(\tau-\lambda)$
$(\because v\neq 0)$
$\Longleftrightarrow \ker(\tau-\lambda)\neq 0$
$\Longleftrightarrow (\tau-\lambda)$ 非单
$\Longleftrightarrow (\tau-\lambda)$ 是退化的.
(也有教材将 $\tau-\lambda$ 退化作为特征值的定义.)

(2) $v\neq 0$ 是 λ 对应的特征向量, $\tau(v)=\lambda \Longleftrightarrow (\tau-\lambda)(v)=0$,
若 $f(x)=x-\lambda$, 则 $f(x)$ 零化 v, 即 $f(\tau)(v)=0\Longrightarrow f(x)\in\mathrm{ann}(v)$,
又 $\because x-\lambda$ 不可约, $\therefore \mathrm{ann}(v)=\langle x-\lambda\rangle$,
$\because \mathrm{ann}(V)=\langle m_\tau(x)\rangle$, $\therefore \forall u\in V$, $m_\tau(x)(u)=0\Longrightarrow m_\tau(v)=0\Longrightarrow m_\tau(x)\in\mathrm{ann}(v)=\langle x-\lambda\rangle\Longrightarrow (x-\lambda)\mid m_\tau(x)$,
设 $m_\tau(x)=(x-\lambda)q(x)$, 其中 $q(x)\in F[x]$, 故特征值为极小多项式的根.

定理 8.2 (课本定理8.3): (1) $\mathrm{spec}(\tau)$ 是 $m_\tau(x)$ 或 $C_\tau(x)$ 的根的集合.

(2) 矩阵的特征值在相似操作下不变, 即相似矩阵具有相同的特征值.

(3) $\mathcal{E}_\lambda$ 是 $(\lambda I-A)x=0$ 的解空间.

定理 8.3 (课本定理8.4): $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是 τ 的特征值且互不相等, 则

(1) 取 $0 \neq v_i \in \mathcal{E}_{\lambda_i}$, 则 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ 线性无关;

(2) 若 $i \neq j$, $\mathcal{E}_i \neq \mathcal{E}_j = \{0\}$.

证: (1) 若 $\sum_{i=1}^k r_i v_i = 0$, 则 $0 = \tau(0) = \tau\left(\sum_{i=1}^k r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k r_i \tau(v_i) = \sum_{i=1}^k r_i \lambda_i v_i$, 即 $r_1\lambda_1 v_1 + \cdots + r_k \lambda_k v_k = 0$,
又有 $\lambda_k\left(\sum_{i=1}^k r_i v_i\right) = 0$, 即 $r_1\lambda_k v_1 + r_2\lambda_k v_2 + \cdots + r_k\lambda_k v_k = 0$,
以上两式相减消去 v_k 项得, $r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \cdots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$,
将 τ 作用于上式得, $\tau\left[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \cdots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}\right] = r_1(\lambda_1 - \lambda_k)\lambda_1 v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)\lambda_2 v_2 + \cdots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\lambda_{k-1}v_{k-1} = \tau(0) = 0$,
消去 v_{k-1} 项得, $\lambda_{k-1}\left[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \cdots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}\right] - \tau\left[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \cdots\right.$
$r_1(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_{k-1} - \lambda_1)v_1 + r_2(\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_{k-1} - \lambda_2)v_2 + \cdots + r_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-2})(\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})v_{k-2} = 0$,
重复以上操作 $k-1$ 次得, $r_1(\lambda_2 - \lambda_1)\cdots(\lambda_k - \lambda_1)v_1 = 0$,
$\because \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 互不相等且 $v_1 \neq 0$, $\therefore r_1 = 0$,
同理可得 $r_1 = \cdots = r_k = 0$, 故 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 线性无关.

(2) 取 $u \in \mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} \Longrightarrow u \in \mathcal{E}_{\lambda_i} \Longrightarrow \tau(u) = \lambda_i u$,
且 $u \in \mathcal{E}_{\lambda_j} \Longrightarrow \tau(u) = \lambda_j u$
以上两式相减得, $0 = \tau(u) - \tau(u) = \lambda_i u - \lambda_j u = (\lambda_i - \lambda_j)u$,
又 $\because \lambda_i \neq \lambda_j$, $\therefore u = 0 \Longrightarrow \mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} = \{0\}$.

□

若 $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $p(x) \in F[x]$, 则 $p(\tau) \in \mathcal{L}(V)$, 那么 $p(\tau)$ 与 τ 的特征值有何关系?

定理 8.4 特征谱映射定理(课本第3 版定理8.3): F 为代数闭域[a], $p(x) \in F[x]$, 则 $\operatorname{spec}(p(\tau)) = p(\operatorname{spec}(\tau)) \equiv \{p(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{spec}(\tau)\}$.

[a]即 $F[x]$ 中不可约多项式阶数 $= 1$.

证: 首先证 $p(\operatorname{spec}(\tau)) \subseteq \operatorname{spec}(p(\tau))$: $\forall v \in \operatorname{spec}(\tau)$, $\tau(v) = \lambda v \Longrightarrow \tau^k(v) = \lambda^k v$,
设 $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则 $p(\tau) = \tau^d + a_{d-1}\tau^{d-1} + \cdots + a_1\tau + a_0$,
$p(\tau)(v) = \tau^d(v) + a_{d-1}\tau^{d-1}(v) + \cdots + a_1\tau(v) + a_0 = \lambda^d v + a_{d-1}\lambda^{d-1}v + \cdots + a_1\lambda v + a_0 = (\lambda^d + a_{d-1}\lambda_{d-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)v = p(\lambda)v$,
$\Longrightarrow p(\lambda)$ 是 $p(\tau)$ 的特征值, 即 $p(\lambda) \in \operatorname{spec}(p(\tau))$, 故 $p(\operatorname{spec}(\tau)) \subseteq \operatorname{spec}(p(\tau))$.

再证 $\operatorname{spec}(p(\tau)) \subseteq p(\operatorname{spec}(\tau))$: $\forall \lambda \in \operatorname{spec}(p(t))$, $0 \neq v \in \mathcal{E}_\lambda$, 即 $p(\tau)(v) = \lambda v \Longrightarrow (p(\tau) - \lambda)v = 0$,
令 $f(x) = p(x) - \lambda$, 则 $f(\tau)(v) = 0$,
$\because \lambda \in F$, $\therefore f(x) \in F[x]$,
$\because F[x]$ 是代数封闭的, $\therefore f(x)$ 可写为 $f(x) = (x - r_1)\cdots(x - r_m)$, 其中 $r_i \in F$, 或有重复
$\Longrightarrow (\tau - r_1)\cdots(\tau - r_m)(v) = 0$, 其中 $r_i \in \operatorname{spec}(\tau)$
其中必 $\exists r_i$, s.t. $(\tau - r_i)\cdots(t - r_m)(v) = 0 \Longrightarrow p(r_i) - \lambda = 0 \Longrightarrow p(r_i) = \lambda$,
$\Longrightarrow \lambda \in p(\operatorname{spec}(\tau))$, 故 $\operatorname{spec}(p(\tau)) \subseteq p(\operatorname{spec}(\tau))$.

综上, 得证. □

定义 8.5 约当标准型: F 为代数闭域, V 为 F 上的向量空间, $\dim V < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 的最小多项式 $m_\tau(x) = (x-\lambda_1)^{e_1}\cdots(x-\lambda_m)^{e_m}$,
此时 $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, 其中 $\operatorname{ann}(V_i) = \langle (x-\lambda_i)^{e_i}\rangle$,
$V_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 其中 $\operatorname{ann}(v_{ij}) = \langle (x-\lambda_i)^{e_{ij}}\rangle$, $e_i = e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$, $\dim\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle = \deg(x-\lambda_i)^{e_{ij}} = e_{ij}$,
则定序基 $\mathcal{B}'_{ij} = \{v_{ij}, (\tau-\lambda_i)(v_{ij}), \cdots, (\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 下, 线性算子 τ 在 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 中可表为 $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix}[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}'_{ij}} & \cdots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}'_{ij}}\end{pmatrix}$,

其中 $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [\tau(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau-\lambda_i+\lambda_i)(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau-\lambda_i)(v_{ij}) + \lambda_i(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix}\lambda_i\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $[\tau(b_2)]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [\tau(\tau-\lambda_i(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau-\lambda_i+\lambda_i)((\tau-\lambda_i)(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau-\lambda_i)^2(v_{ij})+\lambda_i\tau(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix}0\\\lambda_i\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\cdots$, $[\tau((\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}))] = [(\tau-\lambda_i+\lambda_i)((\tau-\lambda_{ij})^{e_{ij}-1}(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij})+\lambda_i(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [\lambda_i(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\\lambda_i\end{pmatrix}$,

从而 $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix}\lambda_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda_i & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda_i\end{pmatrix} \equiv g(\lambda_i, e_{ij})$, 称为**约当块**,
定序基 $\mathcal{B} = \cup_{ij}\mathcal{B}'_{ij}$ 下, 线性算子 τ 可表为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} g(\lambda_1, e_{11}) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & g(\lambda_1, e_{1t_1}) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & g(\lambda_m, e_{m1}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & g(\lambda_m, e_{mt_m}) \end{pmatrix},$$

称为**约当标准型**.[a]

[a] $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 亦为 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 的一组基, $[\tau]_{\mathcal{B}=\cup_{ij}\mathcal{B}_{ij}}$ 为有理标准型.

$\mathcal{B}'_{ij} = \{v_{ij}, (\tau-\lambda_i)(v_{ij}), \cdots, (\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 的一组基.

证: 先证 $\mathcal{B}'_{ij}$ 线性无关: 设 $l_0 v + l_1(\tau-\lambda_i)(v) + \cdots + l_{m-1}(\tau-\lambda_i)^{m-1}(v) = 0$,
令 $h(x) = l_0 + l_1 x + \cdots + l_{m-1}x^{m-1}$, 则 $h(x)v = 0 \Longrightarrow h(x) \in \operatorname{ann}(v_{ij}) = \langle (x-\lambda_i)^{e_{ij}}\rangle$,
然而 $\because \deg(x-\lambda_i)^{e_{ij}} = e_{ij} \geq \deg h(x) = e_{ij}-1$, $\therefore l_0 = l_1 = \cdots = k_{e_{ij}-1}$, 故 $\mathcal{B}'_{ij}$ 线性无关.

再证 $\mathcal{B}'_{ij}$ 生成 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$: $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle = \{h(x)v \mid h(x) \in F[x]\} = \{h(\tau)(v) \mid h(x) \in F[x]\}$,
$\forall h(\tau)v \in \langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 若 $\deg h(x) \leq e_{ij}-1$, 则 $h(x)v =$, 即 $h(\tau)v = (l_0 + l_0\tau + \cdots + l_{e_{ij}-1}\tau^{e_{ij}-1})(v) = (l_0 + l_0((\tau-\lambda_i)+\lambda_i) + \cdots + l_{e_{ij}-1}((\tau-\lambda_i)+\lambda_i)^{e_{ij}-1})(v)$ 可由 $\mathcal{B}'_{ij}$ 表示,
若 $\deg h(x) > e_{ij}-1$, $h(x) = h((x-\lambda_i)+\lambda_i) = h'(x-\lambda_i) = q(x-\lambda_i)(x-\lambda_i)^{e_{ij}-1} + r(x-\lambda_i)$, 其中 $q(x-\lambda_i)$ 为商多项式, 余多项式 $r(x-\lambda_i) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg(x-\lambda_{ij})^{e_{ij}-1} = e_{ij}-1$,
$\Longrightarrow h(x)v_{ij} = h'(x-\lambda_i)v_{ij} = (q(\tau-\lambda_i)(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}} + r(\tau-\lambda_i))(v_{ij}) = q(\tau-\lambda_i)p(\tau-\lambda_i)(v_{ij}) + r(\tau-\lambda_i)(v_{ij})$, 其中 $\because (x-\lambda_i)^{e_{ij}-1} \in \operatorname{ann}(v_{ij})$, $\therefore (\tau-\lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij}) = 0 \Longrightarrow h(x)v_{ij} = r(\tau)(v_{ij})$ 可由 $\mathcal{B}'_{ij}$ 表示.

综上, 得证. □

有理标准型的存在无需附加条件, 而约当标准型的存在是需要附加条件的: 仅当极小多项式能分解成一次多项式的乘积, 即 $m_\tau(x) = (x-\lambda_1)^{e_1}\cdots(x-\lambda_m)^{e_m}$ 时, 约当标准型才存在.

上面我们看到, $\tau((\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})) = \lambda(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij})$, 即 $(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \in \mathcal{E}_{\lambda_i}$, 那么, 是否还有其他向量 $\in \mathcal{E}_{\lambda_i}$?

$\{(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \mid j = 1, \cdots, t_i\} \subseteq \mathcal{E}_{\lambda_i}$, $\because V_{p_i} = \bigoplus_{j=1}^{t_i}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, $\therefore \{(\tau-\lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \mid j\}$ 线性无关.

定义 8.6 代数重数: 在 $\mathcal{C}_\tau(x)$ 中 λ_i 作为根的重数, 即 $\dim V_{p_i} = \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij}$.

定义 8.7 几何重数: $\dim \mathcal{E}_{\lambda_i} = t_i$.

定理 8.5 (课本定理8.5): 几何重数 $\dim V_{p_i} = \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij} \geq$ 代数重数 $\dim \mathcal{E}_{\lambda_i} = t_i$

证: $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i} \geq 0$, 故得证. □

几何重数 = 代数重数的特殊情况下, $[\tau]$ 的约当标准型何如?

若几何重数 = 代数重数, 即 $\dim V_{p_i} = \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}$, 则 $e_{ij} = 1 \forall j \Longrightarrow e_i = e_{i1} = 1$
$\Longrightarrow m_\tau(\lambda) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)$,
此时 $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \left(\lambda_i\right)$, $[\tau]_{\mathcal{B}'} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$.

定理 8.6 (课本定理8.10, 8.11, 8.18): 下列叙述等价:

τ 可对角化, 即 $\exists$ 一组基 $\mathcal{B}$, s.t. $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 为对角阵.

(2) 几何重数 = 代数重数.

(3) $m_\tau(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)$, λ_i 互不相等.

(4) $V_{p_i} = \mathcal{E}_i$, $V = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_m}$.

(5) 特征向量构成 V 的基.

(6) $\tau = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_k\rho_k$, 其中 $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 为单位分解, $\mathrm{spec}(\tau) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$, $\operatorname{Im}\rho_i = \mathcal{E}_{\lambda_i}$, $\ker\rho_i = \bigoplus_{j\neq i}\mathcal{E}_{\lambda_j}$.

8.1 投影算子

定义 8.8 投影(算子): 向量空间 $V = S \oplus T$, 映射 $\rho_{ST} : V \to V$, $u_S + u_T \mapsto u_S$, 其中 $u_S \in S$, $u_T \in T$, 则 ρ_{ST} 称为在 S 上沿 T 的**投影(算子)**.

$\ker\rho_{ST} = T$, $\operatorname{Im}\rho_{ST} = S$, $V = \ker\rho_{ST} + \operatorname{Im}\rho_{ST}$.

定理 8.7 (课本第3 版定理2.21): (1) $V = S \oplus T$, 则 $\rho_{ST} + \rho_{TS} = 1_V$ (V 上的恒等变换) 且 $\rho_{ST} \circ \rho_{TS} = \rho_{TS} \circ \rho_{ST} = 0_V$ (V 上的恒等变换).

(2) $\sigma \in \mathcal{L}(V)$, 若 $V = \ker\sigma \oplus \operatorname{Im}\sigma$ 且 $\sigma\,|_{\operatorname{Im}\sigma} = 1|_{\operatorname{Im}\sigma}$, 其中 $|_{\operatorname{Im}\sigma}$ 代表算子定义域为 $\operatorname{Im}\sigma$, 则 σ 是在 $\operatorname{Im}\sigma$ 上沿 $\ker\sigma$ 的投影.

证: (1) $\forall v \in V$, $\because V = S \oplus T$, $\therefore v = v_S + v_T$, 其中 $v_S \in S$, $v_T \in T$
$\Longrightarrow (\rho_{ST} + \rho_{TS})(v) = (\rho_{ST} + \rho_{TS})(v_S + v_T) = \rho_{ST}(v_S) + \rho_{ST}(v_T) + \rho_{TS}(v_S) + \rho_{TS}(v_T) = v_S + 0 + 0 + v_T = v \Longrightarrow \rho_{ST} + \rho_{TS} = 1$;
$\Longrightarrow \rho_{ST} \circ \rho_{TS}(v) = \rho_{ST}(\rho_{TS}(v_S + v_T)) = \rho_{ST}(\rho_{TS}(v_S) + \rho_{TS}(v_T)) = \rho_{ST}(0 + v_T) = 0 \Longrightarrow \rho_{ST} \circ \rho_{TS} = 0$,
同理, $\rho_{TS} \circ \rho_{ST} = 0$.

(2) $\forall v \in V$, $\because V = \ker\sigma \oplus \operatorname{Im}\sigma$, $\therefore v = v_{\ker} + v_{\operatorname{Im}}$, 其中 $v_{\ker} \in \ker\sigma$, $v_{\operatorname{Im}} \in \operatorname{Im}\sigma$
$\Longrightarrow \sigma(v) = \sigma(v_{\ker} + v_{\operatorname{Im}}) = \sigma(v_{\ker}) + \sigma(v_{\operatorname{Im}}) = \sigma(v_{\ker}) + 1(v_{\operatorname{Im}}) = 0 + v_{\operatorname{Im}}$, 故 σ 为 $\operatorname{Im}\sigma$ 上沿 $\ker\sigma$ 的投影.

□

定理 8.8 (课本定理第3 版2.22): $\rho \in \mathcal{L}(V)$ 为投影 $\Longleftrightarrow \rho^2 = \rho$.

证: "$\Longrightarrow$": $\forall v \in V$, $v = u_S + u_T$, 其中 $u_S \in S$, $u_T \in T$,
$\rho(v) = u_S$, $\rho(\rho(v)) = \rho(u_S) = u_S \Longrightarrow \rho^2 = \rho$.

"$\Longrightarrow$": 首先将 V 分解成 $V = \ker\rho \oplus \operatorname{Im}\rho$:
一方面, $\forall v \in \ker\rho \cap \operatorname{Im}\rho \Longrightarrow v \in \ker\rho \Longleftrightarrow \rho(v) = 0$
且 $v \in \operatorname{Im}\rho \Longleftrightarrow \exists u \in V$, s.t. $v = \rho(u)$
$\Longleftrightarrow 0 = \rho(v) = \rho(\rho(u)) = \rho^2(u) = \rho(u) = v \Longrightarrow \ker\rho \cap \operatorname{Im}\rho = \{0\}$.
另一方面, $\forall v \in V$, $\rho(v) \in \operatorname{Im}\rho$,
$\because \rho(v - \rho(v)) = \rho(v) - \rho(\rho(v)) = \rho(v) - \rho^2(v) = 0$, $\therefore v = (v - \rho(v)) + \rho(v)$, 其中 $v - \rho(v) \in \ker\rho$, $\rho(v) \in \operatorname{Im}\rho \Longrightarrow V = \ker\rho \oplus \operatorname{Im}\rho$.
故 $V = \ker\rho + \operatorname{Im}\rho$.

又有 $\forall \rho(u) \in \operatorname{Im}\rho$, $\rho(\rho(u)) = \rho^2(u) = \rho(u) \Longrightarrow \rho|_{\operatorname{Im}\rho} = 1|_{\operatorname{Im}\rho}$,
由定理 8.7 得, ρ 为在 $\operatorname{Im}\rho$ 上沿 $\ker\rho$ 的投影.

综上, 得证. □

定义 8.9 正交: $\rho, \sigma \in \mathcal{L}(V)$ 为投影, 若 $\rho\sigma = \sigma\rho = 0$, 则称 ρ 与 σ **正交**, 记作 $\rho \perp \sigma$.

$\rho \perp \sigma \Longleftrightarrow \forall v \in V$, $\rho\sigma(v) = \rho(\sigma(v)) = 0$ 且 $\sigma\rho(v) = \sigma(\rho(v)) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\sigma \subseteq \ker\rho$ 且 $\operatorname{Im}\rho \subseteq \ker\sigma$.

定义 8.10 **单位分解:** $\rho_1+\cdots+\rho_k=1$, 其中 ρ_i 为投影且互相 $\perp$, 则称该式为**单位分解**.

定理 8.9 (课本第3 版定理2.25): (1) $\rho_1+\cdots+\rho_k=1$ 为单位分解, 则 $\operatorname{Im}\rho_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Im}\rho_k=V$.

(2) 若 $V=S_1\oplus\cdots\oplus S_k$, 令 ρ_i 是在 S_i 上沿 $\sum_{j\neq i}S_j$ 的投影, 则 $\rho_1+\cdots+\rho_k=1$ 为单位分解.

证: (1) 先证 V 由 $\{\operatorname{Im}\rho_1,\cdots,\operatorname{Im}\rho_k\}$ 生成: $\forall v\in V$, $v=1(v)=(\rho_1+\cdots+\rho_k)(v)=\rho_1(v)+\cdots+\rho_k(v)$, 其中 $\rho_i(v)\in\operatorname{Im}\rho_i$.

再证 $\operatorname{Im}\rho_i\cap(\cup_{j\neq i}\operatorname{Im}\rho_j)=\{0\}$: $\forall v\in\operatorname{Im}\rho_i\cap(\cup_{j\neq i}\operatorname{Im}\rho_j)\iff v\in\operatorname{Im}\rho_i\iff\rho_i(v)=v$
且 $\exists j\neq i$, s.t. $v\in\operatorname{Im}\rho_j\iff\exists u\in V$, s.t. $\rho_j(u)=v$
$\Longrightarrow v=\rho_i(v)=\rho_i(\rho_j(u))=\rho_i\rho_j(u)=0\Longrightarrow\operatorname{Im}\rho_i\cap\left(\sum_{j\neq i}\operatorname{Im}\rho_j\right)=\{0\}$.

综上, 得证.

(2) $\forall v\in V$, $\because V=S_1\oplus\cdots\oplus S_k$, $\therefore v=v_1+\cdots+v_k$, 其中 $v_i=\rho_i(v)\in S_i$
$\Longrightarrow v=\rho_1(v)+\cdots+\rho_k(v)=(\rho_1+\cdots+\rho_k)(v)\Longrightarrow\rho_1+\cdots+\rho_k=1$.
$\forall v\in V$, $\rho_j(v)\in\operatorname{Im}\rho_j=S_j\subseteq\sum_{j\neq i}S_i\Longrightarrow\rho_j\rho_i(v)=\rho_j(\rho_i(v))=0$, 其中 $i\neq j\Longrightarrow\rho_j\rho_i=0$,
同理, $\rho_j\rho_i=0$, 即 ρ_i 与 ρ_j 正交, 故 $\rho_1+\cdots\rho_k=1$ 为单位分解.

□

若 $V=\mathcal{E}_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{E}_{\lambda_k}$, 令 ρ_i 为在 $\mathcal{E}_{\lambda_i}$ 上沿 $\sum_{j\neq i}\mathcal{E}_{\lambda_i}$ 的投影, 则 $\rho_1+\cdots+\rho_k=1$ 是单位分解, $\rho_i|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}}=1|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}}\Longrightarrow\forall v\in\mathcal{E}_{\lambda_i}$, $\tau(v)=\lambda_i v=\lambda\rho_i(v)$, 即在 $\mathcal{E}_{\lambda_i}$ 上, $\tau|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}}=\lambda\rho_i$, 从而引出定理 8.6 (6).

Chapter 9

实数和复数内积空间

定义 9.1 <u>内积和内积空间</u>: $F=\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), 映射 $\langle,\rangle: V\times V\to F$, $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$ 满足

(1) **正定性**: $\langle u,u\rangle\geq 0$, 且 $\langle u,u\rangle=0\Longleftrightarrow u=0$

(2) **对称 (或共轭对称)**: 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

(3) **关于第一坐标线性, 关于第二坐标线性 (或共轭线性)**: 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=r\langle u,v_1\rangle+t\langle u,v_2\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=\bar{r}\langle u,v_1\rangle+\bar{t}\langle u,v_2\rangle$

则称 $\langle,\rangle$ 是 V 上的**内积**, 称 V 为**内积向量空间**.

对给定的向量空间, 内积不唯一.

例 9.1: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$,
内积又称点积, $\langle x,y\rangle=x\cdots y=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. □

例 9.2: 在 $\mathbb{C}^n$ 上, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,
$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\bar{\beta}_i$. □

引理 9.1 <u>(课本引理9.1)</u>: V 为内积向量空间, $u,v\in V$, $\forall x\in V$, $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\Longleftrightarrow u=v$.

证: "$\Longrightarrow$": $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\Longleftrightarrow\langle u,x\rangle-\langle v,x\rangle=0\Longleftrightarrow\langle u-v,x\rangle=0$,
不妨取 $x=u-v$, 则 $\langle u-v,u-v\rangle=0\Longleftrightarrow u-v=0\Longleftrightarrow u=v$.

"$\Longleftarrow$": 显然.

综上, 得证. □

定理 9.1 <u>(课本第3 版定理9.2)</u>: V 为内积向量空间, $\tau\in\mathcal{L}(V)$,

(1) $\forall v,w\in V$, $\langle\tau(v),w\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\forall v\in V$, $\langle\tau(v),v\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

证: (1) 不妨取 $w=\tau(v)$, 则 $\langle\tau(v),w\rangle=\langle\tau(v),\tau(v)\rangle=0\Longrightarrow\forall v\tau(v)=0$, 故 $\tau=0$.

(2) $\forall v, w \in V$, $v + w \in V$, $v + iw \in V$,
$\langle\tau(v+w), v+w\rangle = 0 = \cancel{\langle\tau(v),v\rangle}0 + \langle\tau(v),w\rangle + \langle\tau(w),v\rangle + \cancel{\langle\tau(w),w\rangle}0$, $\langle\tau(v+iw), v+iw\rangle = \cancel{\langle\tau(v),v\rangle}0 + \langle\tau(v),iw\rangle + \langle\tau(iw),v\rangle + \cancel{\langle\tau(iw),iw\rangle}0$
$\Longrightarrow \langle\tau(v),w\rangle + \langle\tau(w),v\rangle = 0$, $-i\langle\tau(v),w\rangle + i\langle\tau(w),v\rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle\tau(v),w\rangle = 0$,
利用 (1) 中的结论, $\tau(v) = 0$.

□

内积向量空间的子空间和商空间与普通的向量空间同.
S 是内积向量空间 V 的子空间, 则对应的商空间 $\frac{V}{S}$ 为 F 上的向量空间.
但在何种条件下, $\frac{V}{S}$ 是 F 上的内积向量空间 (内积定义同 V 上的内积定义)?

9.1 范数和距离

定义 9.2 (内积诱导出的)范数和赋范向量空间: $\|v\| \equiv \sqrt{\langle u, u\rangle}$, 此时称 V 为**赋范向量空间**

定义 9.3 单位向量: 若 $\|u\| = 1$, 则称 u 为单位向量.

例 9.3: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. □

定理 9.2 范数的性质(课本定理9.2): (1) $\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(2) $\forall r \in F$, $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$.

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式**: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, 且 $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \Longleftrightarrow u$ 与 v 线性相关.

(4) **三角不等式**: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(5) $\forall x \in V$, $\|u - v\| \leq \|u - x\| + \|v - x\|$.

(6) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

(7) **平行四边形法则**: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

证: (7) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$, $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$,
以上两式相加得, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

□

定义 9.4 范数和赋范向量空间: 映射 $\|\| : V \to F$, $v \mapsto \|v\|$, 满足
$\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(2) $\|rv\| = |r| \|v\|$

(3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

则称 $\|\|$ 为 V 上的一个范数, 称 V 为赋范向量空间.

给定向量空间, 范数不唯一, 其中内积诱导的范数是一类特殊的范数, 故内积向量空间必为赋范向量空间. 内积诱导的范数可反向构建内积, 但利用一般的范数未必能构建内积 (因为或无法满足内积的线性性质).

定理 9.3 极化恒等式(课本定理9.3): 对内积诱导出的范数,
对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) + \frac{i}{4}(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2)$.

定义 9.5 度量/距离: $d(u,v) \equiv \|u-v\|$, 此时称 V 为度量向量空间.

定理 9.4 度量的性质(课本定理9.4): (1) $d(u,v) \geq 0$, 且 $d(u,v)=0 \Longleftrightarrow u=v$.

(2) 对称性: $d(u,v)=d(v,u)$.

(3) 三角不等式: $d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v)$.

内积向量空间必为赋范向量空间, 赋范向量空间必为度量向量空间.

9.2 等距算子

定义 9.6 等距: V,W 是 F 上的内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V,W)$, 若 τ 保持内积不变, 即 $\langle \tau(u), \tau(v)\rangle = \langle u,v\rangle$, 则称 τ 等距.

定义 9.7 等距同构: 若 τ 等距且双射, 则称 τ 等距同构.

定理 9.5 (课本定理9.5): τ 等距 $\Longleftrightarrow \|\tau(u)\| = \|u\|$.

证: "$\Longrightarrow$": 由定义即得.

"$\Longleftarrow$": 由极化恒等式 $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$, 有 $\langle \tau(u),\tau(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|\tau(u)+\tau(v)\|^2 + \|\tau(u)-\tau(v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|\tau(u+v)\|^2 + \|\tau(u-v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \langle u,v\rangle$, 即 τ 等距.

综上, 得证. $\square$

若 τ 等距, 则 $\tau(u)=0 \Longleftrightarrow u=0$, 此时 $\ker\tau = \{0\}$, τ 单射.

9.3 正交性

定义 9.8 正交: (1) V 为内积向量空间, $u, v \in V$, 若 $\langle u, v\rangle = 0$, 则称 u 与 v **正交**, 记作 $u \perp v$.

(2) X, Y 为 V 的子集, 若 $\forall x \in X$, $y \in Y$, 有 $x \perp y$, 则称 X 与 Y 正交, 记作 $X \perp Y$.

(3) $X^{\perp} = \{v \in X \mid v \perp X\}$.

$\langle 0, v\rangle = \langle 0+0, v\rangle = \langle 0, v\rangle + \langle 0, v\rangle \Longrightarrow \langle 0, v\rangle = 0$.
$\because 0 \in X^{\perp}$, $\therefore X^{\perp}$ 必非空.

定理 9.6 (课本定理9.7): (1) $X^{\perp}$ 为 V 的子空间.

(2) 子空间 $S \subseteq V$, $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

证: (1) $\forall u, v \in X^{\perp}$, $\forall x \in X$, $\langle u, x\rangle = 0$, $\langle v, x\rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle ru + tv, x\rangle = r\langle u, x\rangle + t\langle v, x\rangle = r0 + t0 = 0$
$\Longrightarrow ru + tv \in X^{\perp}$, 故 $X^{\perp}$ 是 V 的子空间.

(2) 设 $x \in S \cap S^{\perp}$, 则 $x \in S$ 且 $x \in S^{\perp} \Longleftrightarrow x \perp S \Longrightarrow x \perp x$
$\Longrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$, 故得证.

□

定义 9.9 正交直和: $V = S \oplus T$ 且 $S \perp T$, 则称 V 为 S 与 T 的正交直和, 记作 $V = S \odot T$.

S 为 V 的子空间, S^c 为 S 的补空间, 则 $V = S \oplus S^c$.
给定子空间, 其补空间不唯一, 但正交补空间唯一.

例 9.4: 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 子空间 S 为过原点的一条直线, 任一过原点而不与 S 平行的直线均为 S 的补空间, 而仅过原点且与 S 正交的直线为 S 的正交补空间. □

定理 9.7 (课本第3 版定理9.8): $V = S \odot T \Longleftrightarrow V = S \oplus T$ 且 $T = S^{\perp}$.

给定子空间, 其正交补空间一定存在? 关于正交补空间的存在性问题, 我们稍后讨论.
给定 $S \subseteq V$ 和 $S^{\perp}$, 是否必有 $V = S \odot S^{\perp}$.

定义 9.10 正交(归一)集: $\mathcal{O} = \{u_1, \cdots, u_k \mid k \in K\}$, 若 $\mathcal{O}$ 中向量两两正交, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交集**, 特别地, $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交归一集**.

不含零的正交集均可归一化为正交归一集.

定理 9.8 (课本定理9.8): 不含零的正交集线性无关.

证: 设 $\{u_k \mid k \in K\}$ 是正交集且 $u_i \neq 0 \forall i \in K$.
设 $\sum_{i=1}^{m} r_i u_i = 0$,
$\forall k \in K$, $0 = \langle 0, u_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} r_i u_i, u_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} r_i \langle u_i, u_k\rangle = r_k \langle u_k, u_k\rangle$,
又 $\because u_k \neq 0$, $\therefore \langle u_k, u_k\rangle \neq 0 \Longrightarrow r_k = 0$ □

线性无关集未必正交, 但可通过 Gram-Schmidt 正交化过程将线性无关集正交化.

定理 9.9 Gram-Schmidt 正交化过程(课本定理9.10): $\mathcal{B}=\{b_1,\cdots,b_n,\cdots\}$ 是向量空间 V 中线性独立集且 $v_i\neq 0\forall i$, 则可通过

$$o_1=v_1$$

再对 $o_1,\cdots,o_n,\cdots$ 归一化, 得到正交归一集 $\mathcal{O}=\langle o_1,\cdots,o_n,\cdots\rangle$, s.t. $\langle\mathcal{B}\rangle=\langle\mathcal{O}\rangle$.

定义 9.11 Hamel 基: 极大线性无关集.

定义 9.12 Hilbert 基: 极大正交归一基.

定理 9.10 (课本第3 版定理9.13): 当 $\dim V<\infty$ 时, Hilbert 基 $\Longrightarrow$ Hamel 基.

例 9.5 Hilbert 基并非Hamel 基的例子(课本第3 版例9.5): $V=l^2$ 空间 (所有平方收敛级数列构成的空间), $M=\{e_1=(1,0,\cdots),e_2=(0,1,0,\cdots),\cdots\}$ 显然正交归一. 若 $v=(x_n)\in l^2$ 且 $v\perp M$, 则 $\forall i$, $x_i=\langle v,e_i\rangle=0\Longrightarrow v=0$, 故 M 为 V 的 Hilbert 基,

然而, M 张成的 l^2 的子空间中的平方收敛级数列必仅有有限个非零项 $\Longrightarrow \mathrm{span}S\neq l^2$, 故 M 非 Hamel 基. □

定理 9.11 (课本定理9.11): $\mathcal{O}$ 为正交归一集, $S=\langle\mathcal{O}\rangle$, $\forall v\in V$, 令 v 的**傅里叶展开** $\hat{v}=\langle v,u_1\rangle u_1+\cdots+\langle v,u_k\rangle u_k$, 则 $\hat{v}\in S$ 且

(1) $\hat{v}$ 是 S 中唯一满足 $v-\hat{v}\perp S$ 的向量.

(2) $\hat{v}$ 是 S 中与 v 最近的向量 (即 $\forall w\in S$, $d(v,\hat{v})\leq d(d,w)$), 称 $\hat{v}$ 为 v 在 S 中的**最佳近似**.

(3) **Bessel 不等式**: $\|\hat{v}\|\leq\|v\|$.

证: (1) $\forall w\in S$, $w=\sum_{i=1}^k r_iu_i$,

先证正交: $\langle v-\hat{v},w\rangle=\langle v,w\rangle-\langle\hat{v},w\rangle=\langle v,\sum_{i=1}^k r_iu_i\rangle-\langle\sum_{i=1}^k\langle v,u_i\rangle u_i,\sum_{j=1}^k r_ju_j\rangle$
$=\sum_{i=1}^k\bar{r}_i\langle v,u_i\rangle-\sum_{i=1}^k\langle v,u_i\rangle\sum_{i=1}^k\bar{r}_j\langle u_i,u_j\rangle=\sum_{i=1}^k\bar{r}_i\langle v,u_i\rangle-\sum_{i=1}^k\langle v,u_i\rangle\sum_{j=1}^k\bar{r}_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^k\bar{r}_i\langle v,u_i\rangle-\sum_{i=1}^k\bar{r}_i\langle v,u_i\rangle=0\Longrightarrow v-\hat{v}\perp S$.

再证唯一: 若取 $u\in S$, s.t. $v-u\perp S$, 设 $u=\sum_{i=1}^k l_iu_i$,
$v-u\perp S\Longrightarrow\forall u_j\in S$, $j=1,\cdots,k$, $\langle v-u,u_j\rangle=0\Longrightarrow\langle v,u_j\rangle-\langle u,u_j\rangle=0\Longrightarrow\langle v,u_j\rangle=\langle u,u_j\rangle=l_j\Longrightarrow u=\sum_{i=1}^k l_iu_i=\sum_{i=1}^k\langle v,u_i\rangle u_i=v$.

综上, 得证.

(2) $\forall w\in S$, $d^2(u,w)=\|v-w\|^2=\|v-\hat{v}+\hat{v}-w\|^2$,
$\because\hat{v}\in S$, $w\in S$, $\therefore\hat{v}-w\in S$,
又 $\because v-\hat{v}\perp S$, $\therefore v-\hat{v}\perp\hat{v}-w$
$\Longrightarrow d^2(u,w)=\|v-\hat{v}\|^2+\|\hat{v}-w\|^2$,
$\because\|\hat{v}-w\|^2\geq 0$, $\therefore d^2(u,w)\geq\|v-\hat{v}\|^2=d^2(v,\hat{v})$.

(3) $\|v\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v}\|^2$,
$\because v - \hat{v} \perp S$, $\hat{v} \in S$, $\therefore v - \hat{v} \perp \hat{v}$,
由勾股定理, $\|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v}\|^2 \geq \|\hat{v}\|^2 \Longrightarrow \|v\| \geq \|\hat{v}\|$.

□

定理 9.12 投影定理(课本定理9.12): S 是 V 的有限维子空间, 则 $V = S \odot S^{\perp}$, 且 $\forall v \in V$, $v = \hat{v} + (v - \hat{v})$, 其中 $\hat{v} \in S$ 为 v 在 S 中的最佳近似, $v - \hat{v} \in S^{\perp}$,
$\dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$.

定理 9.13 (课本定理9.12): S 为有限维子空间, 则

(1) $S^{\perp\perp} = S$.

(2) 子集 $X \subseteq V$ 且 $\dim\langle X\rangle < \infty$, 则 $X^{\perp\perp} = \langle X\rangle$.

证: (1) $S^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp S\}$, $S^{\perp\perp} = \{u \in V \mid u \perp S^{\perp}\}$,
显然, $S \subseteq S^{\perp\perp}$.

$\forall w \in S^{\perp\perp} \subseteq V$, $\because S$ 有限维, $\therefore V = S \odot S^{\perp} \Longrightarrow w = w_S + w_{S^{\perp}} \Longrightarrow w_S = w - w_{S^{\perp}}$,
$0 = \langle w_S^{\perp}, w_S\rangle = \langle w_{S^{\perp}}, w - w_{S^{\perp}}\rangle = \langle w_{S^{\perp}}, w\rangle - \langle w_{S^{\perp}}, w_{S^{\perp}}\rangle$,
$\because w \in S^{\perp\perp}$, $\therefore \langle w_{S^{\perp}}, w\rangle = 0 \Longrightarrow \langle w_{S^{\perp}}, w_{S^{\perp}}\rangle = 0 \Longrightarrow w_{S^{\perp}} = 0 \Longrightarrow w = w_S \in S$, 故 $S^{\perp\perp} \subseteq S$.

综上, 得证.

(2) $\because \dim\langle X\rangle < 0$, $\therefore |X| < \infty$, 设 $X = \{u_1, \cdots, u_k\}$.
$\forall w_1 \in \langle X\rangle$, $w_1 = \sum_{i=1}^{k} r_i u_i$,
$\forall w_2 \in X^{\perp}$, $\langle w_1, w_2\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} r_i u_i, w_2\rangle = \sum_{i=1}^{k} r_i \langle u_i, w_2\rangle = 0 \Longrightarrow \langle X\rangle \subseteq X^{\perp\perp}$.

$\forall w \in X^{\perp\perp}$, 令 w 在 $\langle X\rangle$ 上的最佳近似 $\hat{w} = \sum_{i=1}^{k} l_i u_i \in \langle X\rangle$,
$\langle w - \hat{w}, w - \hat{w}\rangle = \langle w, w - \hat{w}\rangle - \langle \hat{w}, w - \hat{w}\rangle$,
$\because w - \hat{w} \in \langle X\rangle^{\perp}$, $\hat{w} \in \langle X\rangle$, $\therefore \langle \hat{w}, w - \hat{w}\rangle = 0$,
$\because w - \hat{w} \in X^{\perp}$, $w \in X^{\perp\perp}$, $\therefore \langle w, w - \hat{w}\rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle w - \hat{w}, w - \hat{w}\rangle = 0 \Longrightarrow w - \hat{w} = 0 \Longrightarrow w = \hat{w} \in \langle X\rangle \Longrightarrow X^{\perp\perp} \in \langle X\rangle$.

综上, 得证.

□

定理 9.14 (课本第3 版定理9.17): $\mathcal{O} = \{u_1, \cdots, u_k\}$ 为正交归一集, $S = \langle \mathcal{O}\rangle$, 则下列叙述等价:

(1) $\mathcal{O}$ 为 V 的正交归一基.

(2) $\mathcal{O}^{\perp} = \{0\}$.

(3) $\forall v \in V$, $v = \hat{v} = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i$.

(4) **Bessel 不等式**: $\|v\| = \|\hat{v}\|$.

(5) **Parserval 不等式**: $\langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^{k}\langle v,u_i\rangle\overline{\langle w,u_i\rangle}$, 即在定序基 $\mathcal{O}$ 下, $V\to F^k$, $v\mapsto [v]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix}\langle v,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle v,u_k\rangle\end{pmatrix}$,

$w\mapsto [w]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix}\langle w,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle w,u_k\rangle\end{pmatrix}$, $\langle u,w\rangle = [v]_{\mathcal{O}}\cdot[w]_{\mathcal{O}}$.

证: "(1) $\Longrightarrow$ (2)": $V=\langle\mathcal{O}\rangle$, $\forall u\in\mathcal{O}^{\perp}\subseteq V$, $v=\sum_{i=1}^{k} l_iu_i$
$\because u\in\mathcal{O}^{\perp}$, $\therefore \forall i=1,\cdots,k$, $\langle u,u_i\rangle=0$,
$0=\langle u,u_j\rangle=\sum_{i=1}^{k} l_i\langle u_i,u_j\rangle=\sum_{i=1}^{k} l_i\delta_{ij}=l_j\Longrightarrow u=\sum_{i=1}^{k} l_iu_i=0$.

"(2) $\Longrightarrow$ (3)": $v=v-\hat{v}+\hat{v}$, $\because \mathcal{O}^{\perp}=\{0\}$, $S^{\perp}\subseteq\mathcal{O}^{\perp}$, $\therefore S^{\perp}=\{0\}\Longrightarrow V=S\odot S^{\perp}$. □

9.4 Riesz 表示定理

$F=\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), V 为 F 上的有限维内积向量空间, $\dim V=n$, 内积 $\langle,\rangle: V\times V\to F$, $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$, 固定第二坐标 $v=x$, 定义线性泛函 $\langle,x\rangle\in V^*: V\to F$, $v\mapsto\langle v,x\rangle$.

定理 9.15 Riesz 表示定理(课本定理9.15): $\dim V=n$, $\forall f\in V^*$, $\exists! x\in V$, s.t. $f(v)=\langle v,x\rangle$.

即对偶空间中的任一函数均可用与一向量的内积代替, 或对偶空间中的任一函数均可用一向量表示.

证: $\dim\operatorname{Im} f\le 1$. 若 $\dim\operatorname{Im} f=0$, 则 $f=0\Longrightarrow x=0$;
若 $\dim\operatorname{Im} f\ne 0$, 则 $\dim\operatorname{Im} f=1$, $\exists 0\ne u\in V$, s.t. $f(u)\ne 0$.
$\because V=\ker f\oplus\operatorname{Im} f$ 且 $\ker f^c\approx\operatorname{Im} f$, $\therefore \dim\ker f^c=\dim\operatorname{Im} f=1$,
$\Longrightarrow \ker f^c=\langle u\rangle\Longrightarrow V=\langle u\rangle\odot\ker f$,
$\Longrightarrow \langle u\rangle^{\perp}=\{0\}\Longrightarrow f(\langle u\rangle^{\perp})=0$, 故 $V=\langle u\rangle\odot\langle u\rangle^{\perp}$.

$\because V=\langle u\rangle\odot\langle u\rangle^{\perp}$, $\therefore \forall v\in V$, $v=ru+w$, 其中 $w\in\ker f$, $f(v)=f(ru+w)=rf(u)+f(w)=rf(u)$,
取 $x=\frac{\overline{f(u)}}{\langle u,u\rangle}u$, 则 $\langle v,x\rangle=\langle v,\frac{\overline{f(u)}}{\langle u,u\rangle}u\rangle=\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}\langle v,u\rangle=\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}\langle ru+w,u\rangle=\frac{rf(u)}{\langle u,u\rangle}\langle u,u\rangle=rf(u)$. □

由对偶空间中函数与向量空间中向量的一一对应的关系, 可引出

定义 9.13 Riesz 映射: $\mathcal{R}: V^*\to V$, $f\mapsto x$, s.t. $f(v)=\langle v,x\rangle$.

(1) $\mathcal{R}$ 是映射.

(2) $\mathcal{R}$ 满射.

(3) $\mathcal{R}$ 单射.

(4) $\mathcal{R}$ 共轭线性.

证:

(1) 由定理 9.15 即得.

(2) 显然.

(3) $\ker\mathcal{R}=\{f\in V^*\mid\mathcal{R}(f)=0\}=\{f\in V^*\mid f(v)=\langle v,0\rangle=0\}=\{0\}$, 故得证.

(4) 令 $\mathcal{R}(f) = x_f$, $\mathcal{R}(g) = x_g$, $\mathcal{R}(rf + tg) = x_{rf+tg}$.
一方面, $(rf + tg)(v) = \langle v, x_{rf+tg} \rangle$;
另一方面, $(rf + tg)(v) = rf(v) + tg(v) = r\langle v, x_f \rangle + t\langle v, x_g \rangle = \langle v, \bar{r}x_f + \bar{t}x_g \rangle$
$\Longrightarrow x_{rf+tg} = \bar{r}x_f + \bar{t}x_g$, 即 $\mathcal{R}(rf + tg) = r\mathcal{R}(f) + t\mathcal{R}(g)$. $\square$

综上, $\mathcal{R}$ **共轭同构**.

Chapter 10

正规算子的结构理论

10.1 线性算子的伴随

先来回顾一下算子伴随: $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别为线性空间 V 和 W 的定序基, V^* 和 W 分别为 V 和 W 的对偶空间, $\mathcal{B}^*$ 和 $\mathcal{C}^*$ 分别为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的对偶基, 对给定的线性变换 $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 有算子伴随 $\tau^\times : W^* \to V^*$, $g \mapsto \tau^\times = g \circ \tau$, 线性变换在定序基上与其算子伴随在对偶基上的表示存在关系: $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\tau^\times]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\tau^\times = g \circ \tau"'] & & W \arrow[dl, "g"] \\
& F &
\end{tikzcd}
$$

下面来定义另一种伴随: 对于有限维内积向量空间 V 和 W, $\dim V = n$, $\dim W = m$, Riesz 映射 $\mathcal{R}_V : V^* \to V$, $\mathcal{R}_W : W^* \to W$, $\because \mathcal{R}_W$ 为共轭同构, $\therefore$ 有其逆同构 $\mathcal{R}_W^{-1}$, 从而有映射 $\tau^* = \mathcal{R}_V \circ \tau^\times \circ \mathcal{R}_W$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_V(\tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(u))) & & & u \\
& V \arrow[r, "\tau"] & W \arrow[l, dashed, bend left, "\tau^*?"] & \\
& V^* \arrow[u, "\mathcal{R}_V"] & W^* \arrow[l, "\tau^\times"] \arrow[u, "\mathcal{R}_W"'] & \\
\tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(u)) \arrow[uuu, mapsto] & & & \mathcal{R}_W^{-1}(u) \arrow[lll, mapsto] \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

定理 10.1 (课本定理10.1): (1) τ^* 为线性变换, 即 $\tau^* \in \mathcal{L}(W,V)$.

(2) $\langle v, \tau^*(w)\rangle = \langle \tau(v), w\rangle$, 称 τ^* 为 τ 的伴随.

(3) $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\tau^*]^{\dagger}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

证: (1) $\tau^* = \mathcal{R}_V \circ \tau^\times \circ \mathcal{R}_W^{-1} : W \to V$,
$\forall u_1, u_2 \in W$, $\tau^*(ru_1 + tu_2) = \mathcal{R}_V \circ \tau^\times \circ \mathcal{R}_W^{-1}(ru_1 + tu_2) = \mathcal{R}_V \circ \tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(ru_1 + tu_2)) = \mathcal{R}_V \circ \tau^\times(\bar{r}\mathcal{R}_W^{-1}(u_1) + \bar{t}\mathcal{R}_W^{-1}(u_2)) = \mathcal{R}_V(\tau^\times(\bar{r}\mathcal{R}_W^{-1}(u_1) + \bar{t}\mathcal{R}_W^{-1}(u_2))) = \mathcal{R}_V(\bar{r}\tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(u_1)) + \bar{t}\tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(u_2))) = r\mathcal{R}_V(\tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(u_1))) + t\mathcal{R}_V(\tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(u_2))) = r\tau^*(u_1) + t\tau^*(u_2)$, 其中利用了引理 10.1, 得证.

(2) $\forall v \in V$, $w \in W$, $\langle v, \tau^*(w)\rangle = \langle v, \tau^*(w)\rangle = \langle v, \mathcal{R}_V(\tau^\times \circ \mathcal{R}_W^{-1}(w))\rangle = \tau^\times \circ \mathcal{R}_W^{-1}(w)(v) = \mathcal{R}_W^{-1}(w) \circ \tau(v) = \mathcal{R}_W^{-1}(w)(\tau(v)) = \langle \tau(v), w\rangle$.

(3) 设 V 的正交归一基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, W 的正交归一基 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_n\}$,
$[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}[\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}}\end{pmatrix}$, $[\tau^*]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}[\tau(c_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(c_m)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$,
设 $[\tau(b_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}\alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi}\end{pmatrix}$, $\tau(b_i) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki}c_k$, $\langle \tau(b_i), c_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^m \alpha_{ki}c_k, c_j\rangle = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki}\langle c_k, c_j\rangle = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki}\delta_{kj} = \alpha_{ji}$,
同理, 设 $[\tau(c_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj}\end{pmatrix}$, $\tau^*(c_j) = \sum_{k=1}^n \beta_{kj}b_k$, $\langle \tau^*(c_j), b_i\rangle = \langle \sum_{k=1}^n \beta_{kj}b_k, b_i\rangle = \sum_{k=1}^n \beta_{kj}\langle b_k, b_i\rangle = \sum_{k=1}^n \beta_{kj}\delta_{ki} = \beta_{ij}$,
又 $\because \langle \tau(b_i), c_j\rangle = \langle b_i, \tau^*(c_j)\rangle = \overline{\langle \tau^*(c_j), b_i\rangle}$, $\therefore \alpha_{ji}^* = \beta_{ij} \Longrightarrow [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\tau^*]^{\dagger}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

□

引理 10.1: Riesz 映射的逆 $\mathcal{R}^{-1}$ 共轭线性.

证: $\forall x_1, x_2 \in V$, $\exists f_1 = \mathcal{R}^{-1}(x_1), f_2 = \mathcal{R}^{-1}(x_2) \in V^*$, s.t. $\forall v \in V$, $f_1(v) = \langle v, x_1\rangle$, $f_2(v) = \langle v, x_2\rangle$
$\Longrightarrow \forall \bar{r}, \bar{t} \in F$, $\bar{r}\mathcal{R}^{-1}(x_1)(v) + \bar{t}\mathcal{R}^{-1}(x_2)(v) = (f)(\bar{r}f_1 + \bar{t}f_2)(v) = \bar{r}f_1(v) + \bar{t}f_2(v) = \bar{r}\langle v, x_1\rangle + \bar{t}\langle v, x_2\rangle = \langle v, rx_1\rangle + \langle v, tx_2\rangle = \langle v, rx_1 + tx_2\rangle = \mathcal{R}^{-1}(rx_1 + rx_2)$
$\Longrightarrow \mathcal{R}^{-1}(rx_1 + tx_2) = \bar{r}\mathcal{R}^{-1}(x_1) + \bar{t}\mathcal{R}^{-1}(x_2)$. □

$\because [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\tau^\times]^T_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}$, $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\tau^*]^{\dagger}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, $\therefore [\tau^\times]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = \overline{[\tau^*]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}}$. 当然这也可用类似定理 10.1 (3) 的证明方法证明:

证: $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix}[\tau^\times(c_1^*)]_{\mathcal{B}^*} & \cdots & [\tau^\times(c_n^*)]_{\mathcal{B}^*}\end{pmatrix}$, $[\tau^*]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}[\tau^*(c_1)]_{\mathcal{B}^*} & \cdots & [\tau^*(c_n)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$,
设 $[\tau^\times(c_i^*)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix}\alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni}\end{pmatrix}$, 则 $\tau^\times(c_i^*) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}b_k^*$,
设 $[\tau^*(c_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{mi}\end{pmatrix}$, 则 $\tau^*(c_i) = \sum_{k=1}^m \beta_{ki}b_k$.
一方面, $\because \mathcal{R}_W^{-1}(c_i)(c_j) = \langle c_j, c_i\rangle = \delta_{ij}$, $\therefore \mathcal{R}_V(c_i) = c_i^*$
$\Longrightarrow \langle b_j, \tau^*(c_i)\rangle = \langle b_j, \mathcal{R}_V \circ \tau^\times \circ \mathcal{R}_W^{-1}(c_i)\rangle = \langle b_j, \mathcal{R}_V(\tau^\times(\mathcal{R}_W^{-1}(c_i)))\rangle = \langle b_j, \mathcal{R}_V(\tau^\times(c_i^*))\rangle = \tau^\times(c_i^*)(b_j) = c_i^* \circ \tau^\times(b_j) =$

$\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}b_k^*\right)(b_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}b_k^*(b_j)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}\delta_{jk}=\alpha_{ji}$;
另一方面, $\langle b_j,\tau^*(c_i)\rangle=\langle b_j,\sum_{k=1}^{m}\beta_{ki}b_k\rangle=\sum_{k=1}^{m}\overline{\beta_{ki}}\langle b_j,b_k\rangle=\sum_{k=1}^{m}\overline{\beta_{ki}}\delta_{jk}=\overline{\beta_{ji}}$.
故 $\alpha_{ji}=\overline{\beta_{ji}}$, 得证. □

定理 10.2 (课本定理10.2): V,W 为有限维内积向量空间, $\forall\sigma,\tau\in\mathcal{L}(V,W)$, $\forall r\in F$,

(1) $(\sigma+\tau)^*=\sigma^*+\tau^*$.

(2) $(r\tau)^*=\bar{r}\tau^*$.

(3) $\tau^{**}=\tau$ 且 $\langle\tau^*(v),u\rangle=\langle v,\tau(u)\rangle$.

(4) 若 $V=W$, 则 $(\tau\circ\sigma)^*=\sigma^*\circ\tau^*$.

(5) $V=W$, 若 τ 可逆, 则 $(\tau^{-1})^*=(\tau^*)^{-1}$.

(6) $V=W$, $p(x)\in\mathbb{R}[x]$, 则 $p(\tau)^*=p(\tau^*)$.

(7) S 是 V 的子空间, $\tau\in\mathcal{L}(V)$, 则 S 是 τ 的不变子空间 $\Longleftrightarrow$ $S^\perp$ 是 τ^* 的不变子空间.

证: (1) $\forall u\in W,\forall v\in V$, $\langle v,(\sigma+\tau)^*(u)\rangle=\langle(\sigma+\tau)(v),u\rangle=\langle\sigma(v)+\tau(v),u\rangle=\langle\sigma(v),u\rangle+\langle\tau(v),u\rangle=\langle v,\sigma^*(u)\rangle+\langle v,\tau^*(u)\rangle=\langle v,\sigma^*(u)+\tau^*(u)\rangle=\langle v,(\sigma^*+\tau^*)(u)\rangle\Longrightarrow(\sigma+\tau)^*(u)=(\sigma^*+\tau^*)(u)\Longrightarrow(\sigma+\tau)^*=\sigma^*+\tau^*$.

(2) $\forall u\in W,\forall v\in V$, $\langle v,(r\tau)^*(u)\rangle=\langle r\tau(v),u\rangle=r\langle\tau(v),u\rangle=r\langle v,\tau^*(u)\rangle=\langle v,\bar{r}\tau^*(u)\rangle\Longrightarrow(r\tau)^*(u)=\bar{r}\tau(u)\Longrightarrow(r\tau)^*=\bar{r}\tau^*$.

(3) $\forall u\in W,\forall v\in V$, $\langle u,\tau^{**}(v)\rangle=\langle u,(\tau^*)^*(v)\rangle=\langle\tau^*(u),v\rangle=\overline{\langle v,\tau^*(u)\rangle}=\overline{\langle\tau(v),u\rangle}=\langle u,\tau(v)\rangle\Longrightarrow\tau^{**}(v)=\tau(v)\Longrightarrow\tau^{**}=\tau$.

(4) $\forall v\in V,\forall u\in W$, $\langle u,(\tau\circ\sigma)^*(v)\rangle=\langle(\tau\circ\sigma)(u),v\rangle=\langle\tau(\sigma(u)),v\rangle=\langle\sigma(u),\tau^*(v)\rangle=\langle u,\sigma^*(\tau^*(v))\rangle=\langle u,(\sigma^*\circ\tau^*)(v)\rangle\Longrightarrow(\tau\circ\sigma)^*(v)=(\sigma^*\circ\tau^*)(v)\Longrightarrow(\tau\circ\sigma)^*=\sigma^*\circ\tau^*$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "\sigma"] & V \arrow[l, shift left, "\sigma^*"] \arrow[r, shift left, "\tau"] & V \arrow[l, shift left, "\tau^*"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "\sigma\circ\tau"] & V \arrow[l, shift left, "(\sigma\circ\tau)^*"] \end{tikzcd}$$

(5) $(\tau^{-1})^*\circ\tau^*=(\tau\circ\tau^{-1})^*=1_V^*=1_V\Longrightarrow(\tau^{-1})^*=(\tau^*)^{-1}$.

$$(\because \langle u,v\rangle = \mathcal{R}^{-1}(v)(u) = (\mathcal{R}^{-1}(v)\circ 1_V)(u) = \langle u, \mathcal{R}_V(\mathcal{R}_V^{-1}(v)\circ 1_V)\rangle)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_V(\mathcal{R}_V^{-1}(v)\circ 1_V) = v & & & v \\
& V \arrow[r, "1_V"] & V \arrow[l, dashed, shift left, "1_V^* = 1_V?"] & \\
& V^* \arrow[u, "\mathcal{R}_V"] & V^* \arrow[l, "1_V^\times"] \arrow[u, "\mathcal{R}_V"'] & \\
1_V^\times(\mathcal{R}_V^{-1}(v)) = \mathcal{R}_V^{-1}(v)\circ 1_V \arrow[uuu, mapsto] & & & \mathcal{R}_V^{-1}(v) \arrow[lll, mapsto] \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

(6) $(\tau\circ\tau)^* = \tau^*\circ\tau^*$, $(\tau^k)^* = (\tau^*)^k$,
若 $r\in\mathcal{R}$, 则 $(r\tau)^* = rt^*$, $(r\tau^k)^* = r(\tau^*)^k$
$\Longrightarrow (p(\tau))^* = p(\tau^*)$.

(7) $\because S$ 是 τ 的不变子空间, $\therefore \tau(S)\subseteq S$,
$\forall v\in S^\perp$, $\forall u\in S$, $\tau(u)\in S \Longrightarrow \langle u,\tau^*(v)\rangle = \langle\tau(u),v\rangle = 0 \Longrightarrow \tau^*(v)\in S^\perp \Longrightarrow S^\perp$ 是 τ^* 的线性不变子空间.

□

定理 10.3 (课本定理10.3): V,W 为有限维内积向量空间, $\tau\in\mathcal{L}(V,W)$, 则

(1) $\ker\tau^* = (\operatorname{Im}\tau)^\perp$, 等价地, $\operatorname{Im}\tau^* = (\ker\tau)^\perp$.

(2) $\ker\tau^*\tau = \ker\tau$, $\ker\tau\tau^* = \ker\tau^*$.

(3) $\operatorname{Im}\tau^*\tau = \operatorname{Im}\tau^*$, $\operatorname{Im}\tau\tau^* = \operatorname{Im}\tau$.

(4) $\rho_{ST}^* = \rho_{T^\perp S^\perp}$.

证: (1) $\forall w\in\operatorname{Im}\tau \Longleftrightarrow \exists u\in V$, s.t. $w=\tau(u)$,
$v\in\ker\tau^* \Longleftrightarrow \tau^*(v)=0 \Longleftrightarrow \langle w,v\rangle = \langle\tau(u),v\rangle = \langle u,\tau^*(v)\rangle = \langle u,0\rangle = 0 \Longleftrightarrow v\in(\operatorname{Im}\tau)^\perp$, 故 $\ker\tau^* = (\operatorname{Im}\tau)^\perp$.

$\forall w\in\ker\tau \Longleftrightarrow \tau(w)=0\in W$,
$v\in\operatorname{Im}\tau^* \Longleftrightarrow \exists u\in W$, s.t. $\tau^*(u)=v \Longleftrightarrow \langle w,v\rangle = \langle w,\tau^*(u)\rangle = \langle\tau(w),u\rangle = \langle 0,u\rangle = 0 \Longleftrightarrow v\in(\ker\tau)^\perp$, 故 $\operatorname{Im}\tau^* = (\ker\tau)^\perp$.

(2) $v\in\ker\tau\tau^* \Longleftrightarrow \tau^*\tau = 0 \Longrightarrow \langle v,\tau^*\tau(v)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle\tau(v),\tau(v)\rangle = 0 \Longrightarrow \tau(v)=0 \Longleftrightarrow v\in\ker\tau$, 故 $\ker\tau^*\tau\subseteq\ker\tau$.

$\forall v\in\ker\tau \Longrightarrow \tau(v)=0 \Longrightarrow \tau^*\tau(v)=0 \Longleftrightarrow v\in\ker\tau^*\tau$, 故 $\ker\tau\subseteq\ker\tau^*\tau$.

综上, $\ker\tau^*\tau = \ker\tau$.

同理, $\operatorname{Im}\tau\tau^* = \ker\tau^*$.

(3) $\forall v \in \operatorname{Im} \tau^*\tau$, $\exists u \in V$, s.t. $\tau^*\tau(v) = \tau^*(\tau(v))$, 即 $\exists w = \tau(v) \in W$, s.t. $v = \tau^*(w)$, 故 $\operatorname{Im} \tau^*\tau \in \operatorname{Im} \tau^*$.

$\forall v \in \operatorname{Im} \tau^*$, $\exists w \in W$, s.t. $v = \tau^*(w)$,
$\because \tau$ 为共轭同构, $\therefore \exists u \in V$, s.t. $w = \tau(u) \Longrightarrow v = \tau^*\tau(u)$, 故 $\operatorname{Im} \tau^* \in \operatorname{Im} \tau^*\tau$.

综上, $\operatorname{Im} \tau^*\tau = \operatorname{Im} \tau^*$.

同理, $\operatorname{Im} \tau\tau^* = \operatorname{Im} \tau$.

(4) $\forall u, v \in V$,
$\rho_{ST} : V \to V$, $u = u_S + u_T \mapsto u_S$, $v = v_S + v_T$, 其中 $u_S \in S$, $u_T \in T$, $v_S \in S$, $v_T \in T$, $V = S \oplus T$,
$\rho_{T^\perp S^\perp} : V \to V$, $u = u_{S^\perp} + u_{T^\perp} \mapsto u_{T^\perp}$, $v = v_{S^\perp} + v_{T^\perp} \mapsto v_{T^\perp}$, 其中 $u_{S^\perp} \in S^\perp$, $u_{T^\perp} \in T^\perp$, $v_{S^\perp} \in S^\perp$, $v_{T^\perp} \in T^\perp$, $V = S^\perp \oplus T^\perp$,
$\because \langle u, \rho_{ST}^*(v)\rangle = \langle \rho_{ST}(u), v\rangle = \langle u_S, v\rangle$, $\langle u, \rho_{T^\perp S^\perp}(v)\rangle = \langle u, v_{T^\perp}\rangle$,
$\therefore \langle u, \rho_{ST}^*(v)\rangle - \langle u, \rho_{T^\perp S^\perp}(v)\rangle = \langle u_S, v\rangle - \langle u, v_{T^\perp}\rangle = \langle u_S, v\rangle - \langle u_S, v_{T^\perp}\rangle + \langle u_S, v_{T^\perp}\rangle - \langle u, v_{T^\perp}\rangle = \langle u_S, v - v_{T^\perp}\rangle - \langle u - u_S, v_{T^\perp}\rangle = \langle u_S, v_{S^\perp}\rangle - \langle u_T, v_{T^\perp}\rangle$,
又 $\because v_S \in S$, $u_{S^\perp} \in S^\perp$, $v_T \in T$, $u_{T^\perp} \in T^\perp$, $\therefore \langle u_S, u_{S^\perp}\rangle = 0$, $\langle u_T, v_{T^\perp}\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u, \rho_{ST}^*(v)\rangle - \langle u, \rho_{T^\perp S^\perp}(v)\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u, \rho_{ST}^*(v)\rangle = \langle u, \rho_{T^\perp S^\perp}(v)\rangle \Longrightarrow \rho_{ST}^*(v) = \rho_{T^\perp S^\perp}(v) \Longrightarrow \rho_{ST}^* = \rho_{T^\perp S^\perp}$.

□

10.2 正交(/幺正)对角化

先来回顾一下线性变换可对角化的充要条件: $\tau \in \mathcal{L}(V)$, τ 可对角化 (即 $\exists$ 一组基 $\mathcal{B}$, $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 为对角阵)
$\Longleftrightarrow m_\tau(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$, 其中 λ_i 互不相同
$\Longleftrightarrow V = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_k}$
$\Longleftrightarrow \tau$ 的特征向量构成 V 的一组基
$\Longleftrightarrow$ 几何重数 (特征子空间的维数) = 代数重数 (特征多项式的根的重数)
$\Longleftrightarrow \tau = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_k\rho_k$, 其中 λ_i 互不相同, $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 为单位分解 (即 ρ_i 为投影, $\sum_i \rho_i = 1$ 且 $\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i = \delta_i j\rho_i$).

再来回顾一下向量正交: 向量 u 与 v 正交 $\Longleftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$.
非零元构成的正交集线性无关.
若 $\dim V < \infty$, 则 V 有正交归一基.

那么, τ 是否可正交对角化? 哪一类 τ 可正交对角化?

定义 10.1 **<u>正交(/幺正)对角化</u>:** $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 若 $\exists$ 一组正交归一基 $\mathcal{O}$, s.t. $[\tau]_{\mathcal{O}}$ 为对角阵, 则称 τ 可**正交(/幺正)对角化**.

定理 10.4: τ 可正交归一化 $\Longleftrightarrow \tau$ 的特征向量构成 V 的正交基.

定义 10.2 **<u>正规算子</u>:** $\dim V < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 若 $\tau^*\tau = \tau\tau^*$, 则称 τ 为**正规算子**.

定理 10.5 (课本第3 版定理10.8): 对正规算子 $\tau\in\mathcal{L}(V)$,

τ^*, τ^{-1} (在 τ 可逆的前提下), $p(\tau)$ ($p(x)\in F[x]$) 正规.

(2) $\|\tau(v)\|=\|\tau^*(v)\|$, 从而 $\ker\tau=\ker\tau^*$.

(3) $\forall k\in\mathbb{Z}^+$, $\ker\tau^k=\ker\tau$.

(4) $m_\tau(x)=p_1(x)\cdots p_m(x)$, 其中 $p_i(x)$ 不可约且互不相同.

(5) $\tau(v)=\lambda v\Longrightarrow\tau^*(v)=\bar{\lambda}v$.

(6) $\lambda_i\neq\lambda_j\Longrightarrow\mathcal{E}_{\lambda_i}\perp\mathcal{E}_{\lambda_j}$.

证: (1) $(\tau^*)^*\tau^*=\tau^{**}=\tau\tau^*=\tau^*\tau=\tau^*\tau^{**}=\tau^*(\tau^*)^*\Longrightarrow\tau^*$ 正规.

$(\tau^{-1})^*\tau^{-1}=(\tau^*)^{-1}\tau^{-1}=(\tau\tau^*)^{-1}=(\tau^*\tau)^{-1}=\tau^{-1}(\tau^*)^{-1}=\tau^{-1}(\tau^{-1})^*\Longrightarrow\tau^{-1}$ 正规.

$(\tau^i)^*\tau^i=(\tau^i)^*\tau^i=(\because\tau$ 正规, 即 τ 与 τ^* 可交换$)=\tau^i(\tau^*)^i=\tau^i(\tau^i)^*\Longrightarrow\tau^i$ 正规

$\Longrightarrow(r_i\tau^i)^*(r_i\tau^i)=\bar{r}(\tau^i)^*r\tau^i=r\tau^i\bar{r}(\tau^i)^*=(r\tau^i)(r\tau^i)^*\Longrightarrow r\tau^i$ 正规

$\Longrightarrow p(\tau)p^*(\tau)=(\sum_i r_i\tau^i)\left(\sum_j r_j\tau^j\right)^*=\sum_{i,j}r_i\tau^i\bar{r}_j(\tau^j)^*=\sum_{i,j}\bar{r}_j(\tau^j)^*\bar{r}_i\tau^i=\left(\sum_j r_j\tau^j\right)^*(\sum_i r_i\tau^i)=p^*(\tau)p(\tau)\Longrightarrow p(\tau)$ 正规.

(2) $\|\tau(v)\|^2=\langle\tau(v),\tau(v)\rangle=\langle v,\tau^*(\tau(v))\rangle=\langle v,(\tau^*\circ\tau)(v)\rangle=\langle v,(\tau\circ\tau^*)(v)\rangle=\langle v,\tau(\tau^*(v))\rangle=\langle\tau^*(v),\tau^*(v)\rangle=\|\tau^*(v)\|^2\Longrightarrow\|\tau(v)\|^2=\|\tau^*(v)\|$,

故 $\ker\tau=\{v\mid\tau(v)=0\}=\{v\mid\|\tau(v)\|=0\}=\{v\mid\|\tau^*(v)\|=0\}=\{v\mid\tau^*(v)=0\}=\ker\tau^*$.

(3) $\ker\tau\subseteq\ker\tau^k$ 显然. 下面来证 $\ker\tau^k\subseteq\ker\tau$:

令 $\sigma=\tau^*\tau$, 则 $\sigma^*=(\tau^*\tau)^*=\tau^*\tau^{**}=\tau^*\tau=\sigma$,

$\forall v\in\ker\tau^k$, $\tau^k(v)=0\Longrightarrow\sigma^k(v)=(\tau^*\tau)^k(v)=(\because\tau$ 正规, 即 τ 与 τ^* 可交换$)(\tau^*)^k\tau^k(v)=0$,

$0=\langle 0,\sigma^{k-2}(v)\rangle=\langle\sigma^k(v),\sigma^{k-2}(v)\rangle=\langle\sigma\circ\sigma^{-1}(v),\sigma^{k-2}(v)\rangle=\langle\sigma^{k-1}(v),\sigma^*\circ\sigma^{k-2}\rangle=(\because\sigma^*=\sigma)\langle\sigma^{k-1}(v),\sigma\circ\sigma^{k-2}(v)\rangle=\langle\sigma^{k-1}(v),\sigma^{k-1}(v)\rangle=\left\|\sigma^{k-1}(v)\right\|\Longrightarrow\sigma^{k-1}(v)=0$, 以此类推得 $\sigma(v)=0$

$\Longrightarrow 0=\langle v,0\rangle=\langle v,\sigma(v)\rangle=\langle v,\tau^*(\tau(v))\rangle=\langle\tau(v),\tau(v)\rangle=\|\tau(v)\|^2\Longrightarrow\tau(v)=0\Longrightarrow v\in\ker\tau\Longrightarrow\ker\tau^k\subseteq\ker\tau$.

综上, 得证.

(4) $m_\tau(x)=up_1^{e_1}(x)\cdots p_m^{e_m}(x)$, 其中 p_i 不可约且互不相同, $e_i\in\mathbb{Z}^+$,

要证 $m_\tau(x)=p_1(x)\cdots p_m(x)$, 即证 $e_i=1\forall i$,

$\forall v$, $m_\tau(\tau)(v)=p_1^{e_1}(\tau)\cdots p_m^{e_m}(\tau)(v)=p_1^{e_1}(\tau)[p_2^{e_2}(\tau)\cdots p_m^{e_m}(\tau)(v)]=0$,

$\because\tau$ 正规, $\therefore p_1(\tau)$ 正规 $\Longrightarrow\ker p_1(\tau)=\ker p_1^{e_1}(\tau)$

$\Longrightarrow p_1(\tau)[p_2^{e_2}(\tau)\cdots p_m^{e_m}(\tau)(v)]=0\Longrightarrow p_1(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_m^{e_m}(x)\in\langle m_\tau(x)\rangle\Longrightarrow m_\tau(x)=p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_m^{e_m}(x)\mid p_1^1(x)p_2^{e_2}(x)\cdots p_m^{e_m}(x)\Longrightarrow e_1=1$,

$\because p_i(\tau)$ 正规, 即 $p_i(\tau)$ 可交换, $\therefore$ 同理可得 $e_i=1\forall i$, 故得证.

(5) $\tau(v)=\lambda v\Longrightarrow(\tau-\lambda)(v)=0\Longrightarrow v\in\ker(\tau-\lambda)$,

$\because\tau$ 正规, $\therefore\tau-\lambda$ 正规 $\Longrightarrow\ker(\tau-\lambda)=\ker(\tau-\lambda)^*$

$\Longrightarrow v\in\ker(\tau-\lambda)^*=\ker(\tau^*-\bar{\lambda})$

(6) $\forall 0\neq v\in\mathcal{E}_{\lambda_i}$, $\forall 0\neq u\in\mathcal{E}_{\lambda_j}$, 其中 $\lambda_i\neq\lambda_j$,

$\lambda_i\langle v,u\rangle=\langle\lambda_i v,u\rangle=\langle\tau(v),u\rangle=\langle v,\tau^*(u)\rangle=\langle v,\overline{\lambda_j}u\rangle=\lambda_j\langle v,u\rangle\Longrightarrow(\lambda_i-\lambda_j)\langle v,u\rangle=0$,

$\because\lambda_i-\lambda_j\neq 0$, $\therefore\langle v,u\rangle=0$.

□

定理 10.6 正规算子的谱的结构: 复情形(课本定理10.13): $F=\mathbb{C}$, $\dim V<\infty$, $\tau\in\mathcal{L}(V)$, 则下列叙述等价:

(1) τ 正规.

(2) τ 可正交对角化, $V=\mathcal{E}_{\lambda_i}\odot\cdots\odot\mathcal{E}_{\lambda_k}$.

(3) $\tau=\lambda_1\rho_1+\cdots+\lambda_k\rho_k$, 其中 $\rho_1+\cdots+\rho_k=1$ 为单位分解, 对 $i\neq j$, $\operatorname{Im}\rho_i\perp\operatorname{Im}\rho_j$, $\operatorname{Im}\rho_i\perp\ker\rho_i$.

证: "(1) $\Longrightarrow$ (2)": $\because$ τ 正规, $\therefore$ τ 的极小多项式的不可约多项式的次数均为 1, 即 $m_\tau(x)=p_1(x)\cdots p_k(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$, 其中 $p_i(x)\in\mathbb{C}[x]$ 为不可约多项式, λ_i 互不相等,
$\Longrightarrow V=\mathcal{E}_{\lambda_1}\odot\cdots\odot\mathcal{E}_{\lambda_k}$,
又 $\because$ 对 $i\neq j$, $\mathcal{E}_{\lambda_i}\perp\mathcal{E}_{\lambda_j}$, $\therefore V=\mathcal{E}_{\lambda_i}\odot\cdots\odot\mathcal{E}_{\lambda_k}$.

"(2) $\Longrightarrow$ (1)": $\because\tau$ 可正交对角化, $\therefore\exists$ 正交归一基 $\mathcal{O}$, s.t. $[\tau]_{\mathcal{O}}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$, $[\tau]_{\mathcal{O}}=\operatorname{diag}(\overline{\lambda_1},\cdots,\overline{\lambda_k})$ $\Longrightarrow[\tau]_{\mathcal{O}}[\tau^*]_{\mathcal{O}}=\operatorname{diag}(|\lambda_1|^2,\cdots,|\lambda_k|^2)=[\tau^*]_{\mathcal{O}}[\tau]_{\mathcal{O}}\Longrightarrow[\tau^*\tau(v)]_{\mathcal{O}}=[\tau^*]_{\mathcal{O}}[\tau]_{\mathcal{O}}[v]_{\mathcal{O}}=[\tau]_{\mathcal{O}}[\tau^*]_{\mathcal{O}}[v]_{\mathcal{O}}=[\tau\tau^*(v)]_{\mathcal{O}}\Longrightarrow\tau\tau^*=\tau^*\tau$.

"(3) $\Longleftrightarrow$ (1)": 利用引理 10.2, $\ker\rho^*=(\operatorname{Im}\rho)^\perp=\ker\rho$, $\operatorname{Im}\rho^*=(\ker\rho)^\perp=\operatorname{Im}\rho\Longrightarrow\rho^*=\rho$.
$\tau^*=\overline{\lambda_1}\rho_1+\cdots+\overline{\lambda_k}\rho_k$,
$\tau^*\tau=\left(\sum_i\lambda_i\rho_i\right)\left(\sum_j\overline{\lambda_j}\rho_j\right)=\sum_{ij}\lambda_i\overline{\lambda_j}\rho_i\rho_j=\sum_{ij}\lambda_i\overline{\lambda_j}\delta_{ij}\rho_i=\sum_i|\lambda_i|^2\rho_i=\sum_{ij}\overline{\lambda_j}\lambda_i\rho_j\rho_i=\tau\tau^*\Longrightarrow\tau$ 正规. □

引理 10.2: $V=S\odot T$, 正交投影 $\rho_{ST}:V\to V$, $u=u_S+u_T\to u_S$, 则 $\ker\rho\perp\operatorname{Im}\rho$.

证: $\forall v\in\ker\rho_{ST}$, $v=v_S+v_T$ 其中 $v_S\in S$, $v_T\in T$,
$\rho_{ST}(v)=v_S=0\Longrightarrow v=v_T\in T$.
$\forall w_S\in\operatorname{Im}\rho_{ST}$, $\exists w\in V$, s.t. $\rho_{ST}(w)=w_S\Longrightarrow w=w_S+w_T$, 其中 $w_S\in S$, $w_T\in T$.
$\because v\in T$, $w_S\in S$, $\therefore v\perp w\Longrightarrow\ker\rho\perp\operatorname{Im}\rho$. □

由于 $\mathbb{R}[x]$ 中不可约多项式的最高次数为 2, 故实数域上的向量空间的线性算子的最小多项式的分解形式与复情形有所不同.

定理 10.7 正规算子的谱的结构: 实情形(课本定理10.14): $F=\mathbb{R}$, $\dim V<\infty$, $\tau\in\mathcal{L}(V)$ 正规 $\Longleftrightarrow V=\mathcal{E}_{\lambda_1}\odot\cdots\odot\mathcal{E}_{\lambda_k}\odot D_1\odot\cdots\odot D_l$, 其中 $\mathcal{E}_{\lambda_i}$ 为 τ 的不变子特征空间, λ_i 为 τ 的谱, D_i 为 τ_i 的二维不可约不变子空间且 D_i 中有基 $\mathcal{B}_i'$, s.t. $[\tau]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}s_i&t_i\\-t_i&s_i\end{pmatrix}$,

$$[\tau]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_k&&&\\&&&\begin{pmatrix}s_1&t_1\\-t_1&s_1\end{pmatrix}&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&\begin{pmatrix}s_l&t_l\\-t_l&s_l\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

证: τ 的极小多项式 $m_\tau(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_t)q_1(x)\cdots q_l(x)$, 其中 $q_j(x)$ 不可约, $\deg q_j(x) = 2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 互不相同, $V = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_t} \oplus D_1 \oplus \cdots \oplus D_l$, 其中 $V_{p_i} = \{v \mid (\tau-\lambda_i)v = 0\}$, $\dim V_{p_i} = 1$, $\operatorname{ann}(D_i) = \langle q_i(x) \rangle$, $\deg q_i(x) = 2$, 无妨 $q_i(x) = x^2 + b_i x + c_i$, $\because q_i$ 不可约, $\therefore \Delta = b_i^2 - 4c_i < 0$,
D_i 的基为 $\mathcal{B}_i \equiv \{v_i, \tau(v_i)\}$, $[\tau]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} 0 & -c_i \\ 1 & -b_i \end{pmatrix}$.
为使 τ 在 D_i 中的表示更对称, 对 $[\tau]_{\mathcal{B}_i}$ 做相似变换到基 $\mathcal{B}_i'$ 上, s.t. $[\tau]_{\mathcal{B}_i'} = \begin{pmatrix} s_i & t_i \\ -t_i & s_i \end{pmatrix}$, 其中 $s_i = -\frac{b_i}{2}$, $t_i = \frac{\sqrt{4c_i - b_i^2}}{2}$.

问题 10.1: 如何相似变换? $\mathcal{B}_i' =$? □

解: $\because [\tau]_{\mathcal{B}_i}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}_i'}$ 的特征多项式相同, 均为 $q_i(x)$, 特征值相同, 均为 $q_i(x)$ 的根 $x_i^\pm = \frac{-b_i \pm i\sqrt{4c_i - b_i^2}}{2}$, $\therefore$ 这一相似变换和 $\mathcal{B}_i'$ 必 $\exists$.
$[\tau]_{\mathcal{B}_i}$ 的特征向量为 $\frac{1}{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}\begin{pmatrix} -x_i^- \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}(-x_i^- v_i + \tau(v_i))$, $\frac{1}{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}\begin{pmatrix} -x_i^+ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}(-x_i^+ v_i + \tau(v_i))$,
即 $[\tau]_{\mathcal{B}_i}$ 的特征分解为 $[\tau]_{\mathcal{B}_i} = Q\Lambda Q^{-1}$, 其中 $Q = \frac{1}{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}\begin{pmatrix} -x_i^- & -x_i^+ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} x_i^+ & 0 \\ 0 & x_i^- \end{pmatrix}$.
$[\tau]_{\mathcal{B}_i'}$ 的特征向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, 即 $[\tau]_{\mathcal{B}_i'}$ 的特征分解为 $[\tau]_{\mathcal{B}_i'} = P\Lambda P^{-1}$, 其中 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.
相似变换下, $[\tau]_{\mathcal{B}_i'} = T[\tau]_{\mathcal{B}_i}T^{-1}$, 故其中 $T = PQ^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\frac{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}{x_i^+ - x_i^-}\begin{pmatrix} 1 & x_i^+ \\ -1 & -x_i^- \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}{\sqrt{2}(x_i^+ - x_i^-)}\begin{pmatrix} 0 & x_i^+ - x_i^- \\ 2i & -ib_i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{c_i+1}}{\sqrt{2}\sqrt{4c_i - b_i^2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{4c_i - b_i^2} \\ 2 & -b_i \end{pmatrix}$, $T^{-1} = QP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{s_i^2+t_i^2+1}}\begin{pmatrix} -x_i^- & -x_i^+ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(s_i^2+t_i^2+1)}}\begin{pmatrix} -(x_i^+ + x_i^-) & -i(x_i^+ - \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt{2(c_i+1)}}\begin{pmatrix} b_i & \sqrt{4c_i - b_i^2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
当然, 也可调整 T 前的系数从而得 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{4c_i - b_i^2}} & -\frac{b_i}{\sqrt{4c_i - b_i^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{t_i} & \frac{s_i}{t_i} \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_i}{2} & \frac{\sqrt{4c_i - b_i^2}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_i & t_i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$[\tau]_{\mathcal{B}_i'} = M_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, 其中 $M_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i'} = \begin{pmatrix} [v_i]_{\mathcal{B}_i'} & [\tau(v_i)]_{\mathcal{B}_i'} \end{pmatrix} = T$, $M_{\mathcal{B}_i'\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} [b_1']_{\mathcal{B}_i} & [b_2']_{\mathcal{B}_i'} \end{pmatrix} = T^{-1} \Longrightarrow \mathcal{B}_i' = \{b_1' = -s_i v + \tau(v_i), b_2' = t_i v_i\}$.

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "\tau_A'"] & F^n \\
V \arrow[u, "\phi_{\mathcal{B}}'"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[u, "\phi_{\mathcal{B}}'"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] \\
F^n \arrow[r, "\tau_A"] & F^n
\end{tikzcd}$$

□

□

对 $F = \mathbb{Q}$, 由于 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式无次数限制, 线性算子的极小多项式可分解成任意次数不可约多项式的乘积, 此时子空间没有确定的维数, 故此时没有普适的定理.

10.3 特殊的正规算子

定义 10.3 自伴随(/厄米)算子: 满足 $\tau = \tau^*$.

定义 10.4 斜伴随(/反厄米)算子: 满足 $\tau = -\tau^*$.

定义 10.5 酉(/幺正)算子: 满足 $\tau^* = \tau^{-1}$.

定理 10.8 厄米算子的性质(课本第3 版定理10.11): $\dim V < \infty$, $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V)$, 则

(1) 若 τ, σ 厄米, 则 $\tau + \sigma$, τ^{-1}, $p(\tau)$ ($p(x) \in \mathbb{R}[x]$) 厄米.

(2) $F = \mathbb{C}$, 则 τ 厄米 $\iff \langle \tau(v), v \rangle \in \mathbb{R}$.

(3) τ 为复算子或实对称算子, 则 $\tau = 0 \iff \forall v \in V, \langle \tau(v), v \rangle = 0$.

(4) τ 厄米, 则 $m_\tau(x)$ 仅有实根.

证: (1) $(\tau + \sigma)^* = \tau^* + \sigma^* = \tau + \sigma \Longrightarrow \tau + \sigma$ 厄米.
$(\tau^{-1})^* = (\tau^*)^{-1} = \tau^{-1} \Longrightarrow \tau^{-1}$ 厄米.
$p^*(\tau) = \left(\sum_i r_i \tau^i\right)^* = \sum_i r_i (\tau^i)^* = \sum_i r_i (\tau^*)^i = \sum_i r_i \tau^i = p(\tau) \Longrightarrow p(\tau)$ 厄米.

(2) "$\iff$": $\langle \tau(v), v \rangle = \langle v, \tau^*(v) \rangle = \langle v, \tau(v) \rangle = \overline{\langle \tau(v), v \rangle} \Longrightarrow \langle \tau(v), v \rangle \in \mathbb{R}$.

(3) "$\Longrightarrow$": 显然. 复算子的 "$\Longleftarrow$" 见定理 9.1, 下证实对称算子的 "$\Longleftarrow$".
实对称算子即实厄米算子. $\because F = \mathbb{R}$, $\because \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
$\forall u, v \in V$, $0 = \langle \tau(u+v), u+v \rangle = \cancel{\langle \tau(u), u \rangle}0 + \langle \tau(u), v \rangle + \langle \tau(v), u \rangle + \cancel{\langle \tau(v), v \rangle}0 = \langle \tau(u), v \rangle + \langle \tau(v), u \rangle = \langle u, \tau^*(v) \rangle + \langle \tau(v), u \rangle = \langle u, \tau(v) \rangle + \langle \tau(v), u \rangle = 2\langle \tau(v), u \rangle \Longrightarrow \tau(v) = 0 \Longrightarrow \tau = 0$.

(4) τ 厄米, 则 τ 正规.
设 λ 为 τ 的特征值, 亦即 $m_\tau(x)$ 的根, 则 $\bar{\lambda}$ 为 τ^* 的特征值.
$\lambda v = \tau(v) = \tau^*(v) = \bar{\lambda} v \Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, 故 $m_\tau(x)$ 仅有实根.

□

定理 10.9 酉算子的性质(课本第3 版定理10.12): $\dim V < \infty$, $\sigma, \tau \in \mathcal{L}(V)$, 则

(1) σ, τ 酉 $\Longrightarrow r\tau$ ($|r| = 1$), $\sigma \circ \tau$, τ^{-1} 酉.

(2) τ 酉 $\iff \tau$ 等距同构.

(3) τ 酉 $\iff \tau$ 将一组正交归一基变换为正交归一基.

(4) τ 酉, 则 τ 的特征值模长 $= 1$.

证: (1) $(r\tau)^*(r\tau) = \bar{r}\tau^* r\tau = \bar{r} r \tau^* \tau = \bar{r} r 1 = 1 \Longrightarrow r\tau$ 酉.
$(\sigma \circ \tau)^*(\sigma \circ \tau) = \tau^* \sigma^* \sigma \tau = \tau^{-1} \sigma^{-1} \sigma \tau = 1 \Longrightarrow \sigma \circ \tau$ 酉.
$(\tau^{-1}) * = (\tau^*)^{-1} = (\tau^{-1})^{-1} \Longrightarrow \tau^{-1}$ 可逆.

(2) "$\Longrightarrow$": $\because$ 酉算子有逆, $\therefore$ 必双射, 下证等距.

$\langle\tau(u),\tau(v)\rangle=\langle u,\tau^*(\tau(v))\rangle=\langle u,\tau^{-1}(\tau(v))\rangle=\langle u,v\rangle\Longrightarrow\tau$ 等距, 故 τ 等距同构.

"$\Longleftarrow$": $\because\tau$ 等距同构, $\therefore\langle u,\tau^*(\tau(v))\rangle=\langle\tau(u),\tau(v)\rangle=\langle u,v\rangle\Longrightarrow\tau^*(\tau(v))=v\Longrightarrow\tau^*\circ\tau=1\Longrightarrow\tau$ 酉.

(3) "$\Longrightarrow$": 取一组正交归一基 $\mathcal{O}=\{o_1,\cdots,o_n\}$, $\langle o_i,o_j\rangle=\delta_{ij}$.

$\because\langle\tau(o_i),\tau(o_j)\rangle=\delta_{ij}$ 且 $\dim\tau(\mathcal{O})=\dim\mathcal{O}$, $\therefore\tau(\mathcal{O})$ 为一组正交归一基.

"$\Longleftarrow$": 若 $\tau(\mathcal{O})$ 为正交归一基, 则 $\forall u,v\in V$, $u=\sum_{i=1}^n\alpha_io_i$, $v=\sum_{j=1}^n\beta_jo_j$,

$\langle\tau(u),\tau(v)\rangle=\langle\tau\left(\sum_{i=1}^n\alpha_io_i\right),\tau\left(\sum_{j=1}^n\beta_io_i\right)\rangle=\sum_{i,j=1}^n\alpha_i\overline{\beta_j}\langle\tau(o_i),\tau(o_j)\rangle=\sum_{i,j=1}^n\alpha_i\beta_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_j=\sum_{i=1}^n\alpha_i\overline{\beta_j}\delta_{ij}=\sum_{i,j=1}^n\alpha_i\overline{\beta_j}\langle o_i,o_j\rangle=\langle\sum_{i=1}^n\alpha_io_i,\sum_{j=1}^n\beta_jo_j\rangle=\langle u,v\rangle\Longrightarrow\tau$ 等距同构 $\Longrightarrow\tau$ 酉.

(4) 设 λ 为 τ 的特征值, $\tau(v)=\lambda v$, $\tau^*(v)=\bar\lambda v$.

$v=\tau^{-1}(\tau(v))=\tau^*(\tau(v))=\bar\lambda\lambda v=|\lambda|\,v\Longrightarrow|\lambda|=1$.

□

定理 10.10 正规算子的结构(课本第3 版定理10.18): (1) $F=\mathbb{C}$,

(a) τ 正规 $\Longleftrightarrow\tau$ 正交归一对角化 $\Longleftrightarrow\tau$ 有正交谱分解 $\tau=\lambda_1\rho_1+\cdots+\lambda_k\rho_k$, 其中 λ_i 互不相同, $\rho_1+\cdots+\rho_k=1$ 为单位分解, $\ker\rho_i\perp\operatorname{Im}\rho_i$.

(b) 特征值为实数的正规算子厄米.

(c) 特征值的模长 $=1$ 的正规算子酉.

(2) $F=\mathbb{R}$,

(a) τ 正规 $\Longleftrightarrow\tau=\mathcal{E}_{\lambda_1}\odot\cdots\odot\mathcal{E}_{\lambda_k}\odot D_1\odot\cdots\odot D_l$, 其中 D_i 为二维不可约的 τ 不变子空间, D_i 上 τ 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix}s_i&t_i\\-t_i&s_i\end{pmatrix}$.

(b) 若上述正交直和式中无 D_i, 则 τ 厄米.

(c) 若在 D_i 上的 τ 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, 则 τ 酉, 称为 **正交算子**.

定义 10.6 正交算子: $F=\mathbb{R}$ 的酉算子.

10.4 (半)正定算子

定义 10.7 (半)正定算子: $F=\mathbb{R}$, $\dim V<\infty$, $\tau\in\mathcal{L}(V)$ 厄米, 若 $\forall v\in V$, $\langle\tau(v),v\rangle>(\geq)0$, 则 τ (半)正定.

定理 10.11 (课本第3 版定理10.22): $F=\mathbb{C}$, $\dim V<\infty$, $\tau\in\mathcal{L}(V)$ 厄米, 则

(1) τ 半正定 $\Longleftrightarrow\tau$ 的特征值 ≥0.

(2) τ 正定 $\Longleftrightarrow\tau$ 的特征值 >0.

证: "$\Longrightarrow$": 设 λ 为 τ 的特征值,
$\because \tau$ (半)正定, $\therefore \langle\tau(v), v\rangle > (\geq)0$, 又 $\because \langle\tau(v), v\rangle = \langle\lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle \geq 0 \Longrightarrow \lambda > (\geq)0$, $\therefore \lambda > (\geq)0$.

"$\Longleftarrow$": $\because \rho$ 厄米, $\therefore \tau$ 的正交谱分解 $\tau = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_k\rho_k$.
对 τ 的函数操作均等效于作用于其谱分解的特征值上: $\tau^2 = \sum_{ij} \lambda_i\lambda_j\rho_i\rho_j = \sum_{ij} \lambda_i\lambda_j\delta_{ij}\rho_i = \sum_i \lambda_i^2\rho_i$,
类似地, $\tau^k = \sum_i \lambda^k\rho_k$,
$\rho\tau = r\sum_i \lambda_i\rho_i = \sum_i r\lambda_r\rho_i$,
$\Longrightarrow$ 对 $f(x) \in F[x]$, $f(\tau) = \sum_i f(\lambda_i)\rho_i$,
$\forall$ 可由多项式近似的 $g(x)$, $g(\tau) = \sum_i g(\lambda_i)\rho_i$.
$\because \tau$ (半)正定, $\therefore$ 必可定义其平方根 $\sqrt{\tau} = \sqrt{\lambda_1}\rho_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\rho_k$, 此处 $\lambda_i > (\geq)0$, 否则 $\sqrt{\tau}$ 不一定合法. □

定理 10.12 (课本第3 版定理10.23): τ 厄米, 则

(1) τ 半正定 $\Longleftrightarrow \tau$ 有正平方根.

(2) τ 半正定 $\Longleftrightarrow \tau = \sigma^* \circ \sigma$, 其中 $\sigma \in \mathcal{L}(V)$ (注意这里的 σ 不唯一).

证: (1) τ 半正定, 即 $\tau = \sum_i \lambda_i\rho_i$, 其中 $\lambda_i \geq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\tau} = \sum_i r_i\rho_i$, 其中 $r_i = \sqrt{\lambda_i}$.

(2) "$\Longrightarrow$": 取 $\sigma = \sqrt{\tau}$ 即得证.

"$\Longleftarrow$": $\langle\tau(v), v\rangle = \langle\sigma^* \circ \sigma(v), v\rangle = \langle\sigma(v), \sigma(v)\rangle = \|\sigma(v)\|^2 \geq 0 \Longrightarrow \tau$ 半正定.

□

定理 10.13 半正定算子的复合半正定的条件(课本第3 版定理10.24): $\sigma, \tau \in \mathcal{L}(V)$ 半正定, 若 $\sigma\tau = \tau\sigma$, 则 $\sigma\tau$ 半正定.

证: $\because \sigma\tau = \tau\sigma$, $\therefore \sqrt{\sigma}\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau}\sqrt{\sigma}$
$\Longrightarrow \sigma\tau = \sqrt{\sigma}\sqrt{\sigma}\sqrt{\tau}\sqrt{\tau} = (\sqrt{\sigma}\sqrt{\tau})(\sqrt{\sigma}\sqrt{\tau})$, 故 $\sigma\tau$ 半正定. □

10.5 算子的极分解

定理 10.14 算子的极分解(课本第3 版定理10.25): $F = \mathbb{C}$, 有限维内积向量空间 V, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\exists!$ 半正定算子 ρ 及酉算子 ν, s.t. $\tau = \nu\rho$, 且若 τ 可逆, 则 ν 唯一.

证: 取 $\rho = \sqrt{\tau^*\tau}$, 则 $\|\rho(v)\|^2 = \langle\rho(v), \rho(v)\rangle = \langle v, \rho^*\rho(v)\rangle = \langle v, \rho^2(v)\rangle = \langle v, \tau^*\tau(v)\rangle = \langle\tau(v), \tau(v)\rangle = \|\tau(v)\|^2$.
取 $\nu : \operatorname{Im}\rho \to \operatorname{Im}\tau$, $\rho(v) \mapsto \tau(v)$.
先证 ν 为映射: 若 $\rho(v) = \rho(u)$, 则 $\rho(u-v) = 0 \Longrightarrow \|\rho(u-v)\|^2 = 0 \Longrightarrow \|\tau(u-v)\| =^2= \langle\tau(u-v), \tau(u-v)\rangle = 0 \Longrightarrow \tau(u-v) = 0 \Longrightarrow \tau(v) = \tau(u)$, 故 ν 为映射.
$\because \|\nu(\rho(v))\| = \|\tau(v)\| = \|\rho(v)\|$, $\therefore v$ 等距同构 $\Longrightarrow \nu$ 酉.

当 τ 不可逆时, 拓展 ρ 的像为 τ 的像的方式不唯一, 故 ν 不唯一.

□

若 σ 酉, 则其特征值模 $|\lambda| = 1$, 可记为 $\lambda_i = e^{i\theta_i}$, 其中 $\theta_i \in \mathbb{R}$,
则 $\sigma = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_k\rho_k = e^{i\theta_1}\rho_1 + \cdots + e^{i\theta_k}\rho_k$, 其中 $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 为正交单位分解.
令 $H = \theta_1\rho_1 + \cdots + \theta_k\rho_k$, 则

(1) $H^* = H$.

(2) $\sigma = e^{iH}$.

此处 H 类似量子力学中的哈密顿量, σ 类似演化算子.

Chapter 12

度量空间

定义 12.1 度量和度量空间: 对集合 M, 映射 $d(,) : M \times M \to \mathbb{R}$ 满足:

正定: $d(u, v) \geq 0$, 且 $d(u, v) = 0 \iff u = v$.

(2) 对称: $d(u, v) = d(v, u)$.

(3) 三角不等式: $d(u, v) \leq d(u, v) + d(u, v)$.

则称 d 为 M 上的一个度量, 称 (M, d) 为度量空间.

对任一集合均可定义度量, 如 $d(u, v) = \begin{cases} 1, & u \neq v, \\ 0, & u = v, \end{cases}$ 且度量不唯一.

定义 12.2 子度量空间: 度量空间的非空子集.

12.1 开集和闭集

对度量空间 (M, d), $x_0 \in M$, $r > 0$, 可定义:

定义 12.3 开球: $B(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) < r\}$.

定义 12.4 闭球: $\bar{B}(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) \leq r\}$.

定义 12.5 球面: $S(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) = r\}$.

定义 12.6 开集: $S \subseteq M$, $\forall x_0 \in S$, $\exists r > 0$, s.t. $B(x_0, r) \subseteq S$, 则称 S 为开集.

定义 12.7 闭集: $T \subseteq M$, $T^c = M \backslash T$ 是开集, 则 T 为**闭集**.

定义 12.8 开邻域: 包含 x_0 的任何开集称 x_0 的**开邻域**.

例 12.1: 设 $\mathbb{R}$ 上的度量 $d(r,t) = |r-t|$, 对点 x_0,
$B(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$,
$\bar{B}(x_0,r) = [x_0 - r, x_0 + r]$,
$S(x_0,r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}$.
开区间 (a,b) 为开集.

证: $\forall x \in (a,b)$, 取 $r = \frac{1}{2}\min\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\} > 0$,
$B(x_0,r) = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a,b)$. □

闭区间 $[a,b]$ 为闭集.
$(a,b]$ 既非开集也非闭集. □

定理 12.1 (课本定理12.1): $O = \{M$ 上的开集$\}$, 则

(1) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.

(2) 有限个开集的并仍为开集: $S, T \in \mathcal{O}$, 则 $S \cap T \in \mathcal{O}$.

(3) $S_i \in \mathcal{O}$, 则 $\cup_{i \in K} S_i \in \mathcal{O}$ (S_i 可以是无限个).

证: (1) 显然.

(2) $x_0 \in S \cap T \Longleftrightarrow x_0 \in S$, $x_0 \in T$,
$\because S$ 为开集, $\therefore \exists r_1 > 0$, s.t. $B(x_0,r) \subseteq S$,
$\because T$ 为开集, $\therefore \exists r_2 > 0$, s.t. $B(x_0,r) \subseteq T$.
令 $r = \min\{r_1, r_2\}$, 则 $B(x_0,r) \subseteq S$ 且 $B(x_0,r) \subseteq T \Longrightarrow B(x_0,r) \subseteq S \cap T \Longrightarrow S \cap T$ 开, 即 $S \cap T \in \mathcal{O}$.

(3) $x_0 \in \cup_i S_i \Longleftrightarrow \exists i$, s.t. $x_0 \in S_i$,
$\because S_i$ 为开集, $\therefore \exists r > 0$, s.t. $B(x_0,r) \subseteq S_i \subseteq \cup_i S_i \Longrightarrow \cup_i S_i$ 开, 即 $\cup_i S_i \in \mathcal{O}$.

□

例 12.2 无穷多个开集的交未必开: $S_i = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.
$\cap_i S_i = \lim_{n \to \infty} S_n = \{0\}$ 闭. □

单点集为闭集.

证: 单点集 $S = \{a\}$, 补集 $S^c = M \backslash \{a\}$.
$\forall x \in S^c$, 则 $x \neq a$, $d(x,a) > 0$, 取 $r = \frac{1}{2}d(x,a)$.
取 $r = \frac{1}{2}d(x,a)$, $a \neq B(x,r) \Longrightarrow B(x,r) \subseteq S^c \Longrightarrow S^c$ 开, 故 S 闭. □

有限点集为闭集.

证: 有限点集 $S = \{a_1, \cdots, a_n\}$, 补集 $S^c = M \backslash \{a_1, \cdots, a_n\}$.
$\forall x \in S^c$, 则 $x \neq a_1, \cdots, a_n \Longrightarrow \forall i$, $d(x, a_i) > 0$.
取 $r = \frac{1}{2}\min_i\{d(x,a_i)\}$, 则 $\forall a_i$, $a_i \neq B(x,r) \Longrightarrow S^c$ 开, 故 S 闭. □

定义 12.9 拓扑和拓扑空间: 集合 $X \neq \emptyset$, $\mathcal{O}$ 是 X 的一些子集构成的簇[a], 若

(1) $\emptyset X \in \mathcal{O}$,

(2) $S, T \in \mathcal{O}$, 则 $S \cap T \in \mathcal{O}$,

(3) $\{S_i \in \mathcal{O} \mid i \in K\}$, 则 $\cup_{i \in K} S_i \in \mathcal{O}$,

则称 $\mathcal{O}$ 是 X 上的一个**拓扑**, 称 $(X, \mathcal{O})$ 为**拓扑空间**, 称 $\mathcal{O}$ 中的集合为 X 上的**开集**.

[a] 可理解为"集合的集合", 此处为避免逻辑循环, 故名之

故确定开集 $\Longleftrightarrow$ 确定拓扑.

12.2 度量空间的收敛性

定义 12.10 收敛和极限: 集合 M 中序列 (x_n), $x \in M$, 若 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, 则称序列 (x_n) **收敛**于 x, 记作 $x_n \to x$, 称 x 为序列 (x_n) 的**极限**.

例 12.3: (r_n) 为 $\mathbb{R}$ 上的序列, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, 即 $x_n \to x$, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \epsilon \Longleftrightarrow x_n \in B(x, \epsilon)$. □

收敛的性质:

(1) $\forall r > 0$, $B(x, r)$ 中包含 (x_n) 中无穷个元素.

(2) 有限点列非序列, 无需考虑极限.

(3) 常序列收敛, $(x_n = x_0) \to x_0$.

(4) 对给定序列, 若 $\exists$ 极限, 则极限唯一.

定理 12.2 (课本定理12.2): 闭集关于收敛封闭. S 闭 $\Longleftrightarrow$ S 中序列 $(x_n) \to x \in M$, 则 $x \in S$.

证: "$\Longrightarrow$": 取 S 中序列 (x_n) 且 $(x_n) \to x \in M$.
假设 $x \notin S$, 则 $x \in S^c = M \backslash S$.
$\because S$ 闭, $\therefore S^c$ 开 $\Longrightarrow \exists r > 0$, s.t. $B(x, r) \subseteq S^c$, 即 $B(x, r) \cap S = \emptyset$, 故 S 中序列 $(x_n) \notin B(x, r)$.
又 $\because x_n \to x$, $\therefore \exists N_r > 0$, s.t. 当 $n > N_r$ 时, $x_n \in B(x, r)$, 矛盾, 故假设错误, $x \in S$.

"$\Longleftarrow$": 假设 S 非闭, 则 S^c 非开 $\Longrightarrow \exists x_0 \in S^c$, s.t. $\forall r > 0$, $B(x_0, r) \nsubseteq S^c$.
特别地, 令 $r = 1$, 则 $\exists x_1 \in B(x, r) \Longrightarrow x_1 \notin S^c$, 即 $x \in S$,
$\cdots$,
令 $r = \frac{1}{n}$, 则 $\exists x_n \in B(x_0, r)$, $x_n \notin S^c$, 即 $x_n \in S$,
$\cdots \Longrightarrow x_n \to x$.
但 $\because (x_n) \in S$, $\therefore$ 由题设, $x \in S$, 矛盾, 故假设错误, S 闭.

综上, 得证. □

12.3 集合的闭包

定义 12.11 闭包: $S \subseteq M$, 称包含 S 的最小闭集或包含 S 的所有闭集的交为 S 的**闭包**, 记作 $\mathrm{cl}(S)$.

给定 S, 闭包必 $\exists$.

定义 12.12 极限点(/聚点): $\emptyset \neq S \subseteq M$, $x \in M$, 若 $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap S$ 包含异于 x 的点, 则称 x 为 S 的**极限点**或**聚点**, S 对应的极限点的集合记作 $\mathrm{l}(S)$.

例 12.4: $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, 则 $\mathrm{l}((a,b)) = [a,b]$.
$c \notin [a,b]$, $S = (a,b) \cup \{c\}$, 则 $l(S) = [a,b]$. □

定理 12.3 (课本定理12.3): (1) $x \in \mathrm{l}(S) \iff \exists$ 序列 $(x_n) \in S$, s.t. $\forall n$, $x_n \neq x$ 且 $x_n \to x$.

(2) S 闭 $\iff \mathrm{l}(S) \subseteq S$.

(3) $\mathrm{cl}(S) = S \cup \mathrm{l}(S)$.

证: (1) "$\Longrightarrow$": $\because x \in \mathrm{l}(S)$, $\therefore \exists x_n \neq x$, s.t. $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap S$
$\Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, 故 $\exists (x_n) \in S$, s.t. $\forall n$, $x_n \neq x$, $x_n \to x$.

"$\Longleftarrow$": 设 $(x_n) \to x$ 且 $x \neq x_n \in S$.
$\forall r > 0$, $\exists N$, s.t. 当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x,r)$, 即 $\exists x \neq x_n$, s.t. $x_n \in B(x,r) \cap S$.

综上, 得证.

(2) "$\Longrightarrow$": 设 $x \in \mathrm{l}(S)$, 则由 (1) 得, $\exists (x_n) \in S$, s.t. $\forall n$, $x_n \neq x$ 且 $x_n \to x$.
又 $\because S$ 闭, $\therefore x \in S \Longrightarrow \mathrm{l}(S) \subseteq S$.

"$\Longleftarrow$": $\forall S$ 中序列 $(x_n) \to x$, $\exists n$, s.t. $x_n = x$, 则 $x = x_n \in S$,
或 $\forall n$, $x_n \neq x$, 由 (1) 得 $x \in \mathrm{l}(S) \subseteq S$, 故 S 闭.

综上, 得证.

(3) 显然 $S \subseteq S \cup \mathrm{l}(S) \equiv T$.
设 $x \in \mathrm{l}(T)$, 则由 (1) 得, $\exists$ 序列 $(x_n) \in T$, s.t. $x_n \neq x$ 且 $x_n \to x$.
假设 $x \notin S$ 且 $x \notin \mathrm{l}(S)$, 则 $\because x \notin \mathrm{l}(S)$, $\therefore \exists r > 0$, $B(x,r) \cap S = \emptyset$.
但 $\because (x_n) \to x$, $\therefore \exists x_n \in B(x,r) \Longrightarrow x_n \neq S$.
又 $\because x_n \in T \equiv S \cap \mathrm{l}(S)$, $\therefore x_n \in \mathrm{l}(S)$.
取 x_n, s.t. $d(x_n, x) < r$, 则 $B\left(x_n, \frac{r - d(x_n, x)}{2}\right) \subseteq B(x,r)$,
且 $\because x_n \in \mathrm{l}(S)$, $\therefore \exists y \in S \cap B\left(x_n, \frac{r - d(x_n - x)}{2}\right) \subseteq S \cap B(x,r)$, 与 $B(x,r) \cap S = \emptyset$ 矛盾, 故假设错误, $x \in S$ 或 $x \in \mathrm{l}(S)$, 即 $x \in T \equiv S \cup \mathrm{l}(S) \Longrightarrow T$ 闭.
又 $\because S \subseteq T$, $\therefore \mathrm{cl}(S) \subseteq T$.

另一方面, 由闭包定义, $S \in \mathrm{cl}(S)$.
假设 $\mathrm{l}(S) \nsubseteq \mathrm{cl}(S)$, 即 $\exists x \in \mathrm{l}(S)$ 且 $x \notin \mathrm{cl}(S)$, 则 $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$,
且 $\exists$ 闭集 S', s.t. $x \notin S'$ 即 $x \in (S')^c$,
$\because S'$ 闭 $\Longrightarrow (S')^c$ 开, $\therefore \exists r > 0$, s.t. $B(x,r) \subseteq (S')^c$, 与 $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$ 矛盾, 故假设错误, $\mathrm{l}(S) \subseteq \mathrm{cl}(S) \Longrightarrow T \equiv S \cup \mathrm{l}(S) \subseteq \mathrm{cl}(S)$.

综上, 得证.

□

12.4 稠密子集

定义 12.13 稠密子集: $S \subseteq M$, 若 $\mathrm{cl}(S) = M$, 则称 S 为 M 的**稠密子集**.

若 S 为 M 的稠密子集, 则 $M = \mathrm{cl}(S) = S \cup \mathrm{l}(S)$, 这意味着 M 中任一点均可由 S 中的某一序列逼近.

例 12.5: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$无理数. $\forall$ 无理数 r, $\exists$ 有理数序列 $(r_n) \to r$, $\therefore \mathbb{Q}$ 为 R 的稠密子集.
同理, 无理数也为 $\mathbb{R}$ 的稠密子集.
实际上, $\mathbb{Q}$ 在 $[0,1]$ 上的测度 $= 0$, 即无理数远多于有理数. □

12.5 连续

定义 12.14 连续和不连续: 度量空间 (M,d) 和 (M',d'), 映射 $f: M \to M'$, $x_0 \in M$, 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\epsilon)$, 即 $d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),f(x_0)) < 0$, 则称 f 在 x_0 处**连续**,
若 $\exists 0$, $\forall \epsilon > 0$, $f(B(x_0,\delta)) \nsubseteq B(f(x_0),\epsilon)$, 则称 f 在 x_0 处**不连续**.

定理 12.4 连续的判定(课本定理12.4): $f: M \to M'$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 若 M 中序列 (x_n) 收敛于 x, 则 $(f(x_n)) \to f(x)$ (即 f 保持收敛性不变).

证: "$\Longrightarrow$": $\because f$ 连续, $\therefore \forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\epsilon)$.
$\because (x_n) \to x$, $\therefore \forall \delta > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n,x) < \delta$
$\Longrightarrow d(f(x_n),f(x)) < \epsilon$, 故 $(f(x_n)) \to f(x)$.

"$\Longleftarrow$": 假设 f 在 $x \in M$ 处不连续, 则 $\exists \epsilon > 0$, s.t. $\forall \epsilon$, $f(B(x,\delta)) \nsubseteq B(f(x),\delta)$.
取 $\delta = 1$, $f(B(x,\delta)) \nsubseteq B(f(x),\epsilon)$,
$\cdots$
取 $\delta = \frac{1}{2}$, $\exists x_n \in B(x,\frac{1}{n})$, s.t. $f(x_n) \notin B(f(x),\epsilon)$,
$\cdots$, 则序列 $(x_n) \to x$, 但 $d(f(x_n),f(x)) > \delta$
$\Longrightarrow f(x)$ 不收敛至 $f(x)$, 与题设矛盾, 故假设错误, f 在 x_0 处连续.

综上, 得证. □

定理 12.5 (课本定理12.5): 若 $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$, 则 $(d(x_n,y_n)) \to d(x,y)$.

证: $\forall \epsilon$, $\because (x_n) \to x$, $\therefore \exists N_1 > 0$, s.t. 当 $n > N_1$ 时, $d(x_n,x) < \frac{\epsilon}{2}$,
$\because (y_n) \to y$, $\therefore \exists N_2 > 0$, s.t. 当 $n > N_2$ 时, $d(y_n,y) < \frac{\epsilon}{2}$,
$\Longrightarrow \exists N = \max\{N_1,N_2\}$, s.t. 当 $n > N$ 时, $|d(x_n,y_n) - d(x,y)| = |d(x_n,y_n) - d(x,y_n) + d(x,y_n) - d(x,y)| \leq |d(x_n,y_n) - d(x,y_n)| + |d(x,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y) < \epsilon$, 故得证. □

推论: $(d(x_n,y)) \to d(x_0,y)$, 即 $d(,y): M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,y)$ 为 M 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射.
同理, $d(,): M \times M \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto d(x,y)$ 亦为连续映射.

定义 12.15 柯西序列: (x_n) 为 M 中序列, 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n,m > N$ 时, $d(x_n,x_m) < \epsilon$, 则称 (x_n) 为**柯西序列**.

收敛 $\Longrightarrow$ 柯西, 反之不真.

证: 设 $(x_n) \to x$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$, $\exists N_2 > 0$, s.t. 当 $m > N_2$ 时, $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$
$\Longrightarrow \exists N = \max\{N_1, N_2\}$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$, 故 x_n 柯西. □

例 12.6 不收敛的柯西序列(课本例12.12): $C[0,1] \equiv \{[0,1]$ 区间上的连续函数$\}$.
$f(x), g(x) \in C[0,1]$, 度量 $d(f(x), g(x)) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.
令 $f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \le 1, \end{cases}$ 则 $(f_n(x)) \to \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ 不连续, 故 $(f_n(x))$ 柯西但在 $C[0,1]$ 上不收敛 (极限在 $C[0,1]$ 外). □

12.6 完备

定义 12.16 完备: 称柯西序列均收敛的空间为**完备**的.

定义 12.17 完备子集: S 为度量空间 M 的子集, 若 S 完备, 若 S 完备, 则称 S 为 M 的**完备子群**.

定理 12.6 (课本定理12.6): 对度量空间 M,
任一完备子集闭.
(2) 若 M 完备, $S \subseteq M$, 则 S 闭 $\Longleftrightarrow$ S 完备.

证: (1) 取完备子集 $S \subset M$, 取 S 中任意序列 $(x_n) \to x \in M \Longrightarrow (x_n)$ 柯西.
又 $\because S$ 为完备子集, $\therefore (x_n) \to y \in S$.
又 $\because$ 极限唯一, $\therefore x = y \in S \Longrightarrow S$ 闭.

(2) "$\Longleftarrow$": 已由 (1) 证.
"$\Longrightarrow$": $\forall$ 柯西序列 $(x_n) \in S$, $\because S \subseteq M$, $\therefore (x_n)$ 为 M 中的柯西列.
又 $\because M$ 完备, $\therefore (x_n)$ 收敛, 设 $(x_n) \to x$.
又 $\because S$ 闭, $\therefore x \in S$, 故 S 完备.
综上, 得证.

□

例 12.7: 在欧氏度量 $d(u, v) = \sqrt{\sum_i |u_i - v_i|^2}$ 下, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ 完备. □

例 12.8 (课本例12.11): $C[a,b]$ 上度量 $d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]}\{|f(x) - g(x)|\}$, $(C[a,b], d)$ 完备.

证: 在 $(C[a,b], d)$ 上, $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\} < \epsilon \Longleftrightarrow |f(x) - g(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.
设 (f_n) 柯西, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, s.t. 当 $m, n > N$ 时, $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$,
即给定 $\forall x \in [a,b]$, $(f_n(x))$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的柯西序列.
又 $\because \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 完备, $\therefore (f_n(x))$ 收敛.
设 $f(x) = \lim_{n\to\infty}(x)$, 则取 $m \to \infty$ 得当 $n > N$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$
$\Longrightarrow (f_n) \to f$, 故 $C[a,b]$ 完备. □

□

12.7 等距

定义 12.18 等距: (M,d) 和 (M',d') 为度量空间, 若映射 $f:M\to M'$ 满足 $d'(f(x),f(y))=d(x,y)$, 则称 f 等距.

定理 12.7 等距的性质(课本定理12.7): $f:(M,d)\to(M',d')$ 等距, 则

(1) f 单射.

(2) f 连续.

(3) 若 f 可逆, 则 f^{-1} 等距.

证: (1) (此处的 M 和 M 仅为集合, 没有定义额外的运算, 故 0 (加法单位元) 不一定存在, 必须从定义证明单射.)
设 $f(x)=f(y)$, 则 $d(f(x),f(y))=0$.
又 $\because f$ 等距, $\therefore d(x,y)=d(f(x),f(y))=0\Longrightarrow x=y$, 故得证.

(2) $\forall M$ 的收敛序列 $(x_n)\to x$, $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$, s.t. 当 $n>N$ 时, $d(x_n,x)<\epsilon$.
$\because f$ 等距, $\therefore d(f(x_n),f(x))=d(x_n,x)<\epsilon\Longrightarrow(f(x_n))\to f(x)$.
$\because f$ 保持收敛, $\therefore f$ 连续.

(3) 若 f 可逆, 则 $f^{-1}(f(x))=x\Longrightarrow f^{-1}f=1_M$.
$\because f$ 等距, $\therefore d(f(x),f(y))=d(x,y)=f(f^{-1}(f(x)),f^{-1}(f(y)))\Longrightarrow f^{-1}$ 等距.

□

12.8 度量空间的完备化

定理 12.8 完备化定理(课本定理12.8): 对度量空间 (M,d), $\exists$ 完备度量空间 (M',d') 及等距 $\tau:M\to M'$, s.t. $\tau(M)$ 在 M 中稠密.

具体如何完备化?
取 $V=\{M$ 中所有柯西序列$\}$, 定义等价关系 $(x_n)\sim(y_n)\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$, 则等价类 $\frac{V}{\sim}$ 即 M'.

Chapter 13

希尔伯特空间

$F = \mathbb{C}(\mathbb{R})$, V 是 F 上的内积向量空间, 则可诱导出范数 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, 度量 $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$, 故 (V,d) 为度量空间.
$v \in V$, $r > 0$, $B(v,r) = \{u \in V \mid d(u,v) < r\} = \{u \in V \mid \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} < r\}$.
收敛: $(v_n) \to v \iff \lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\langle v_n - v, v_n - v\rangle} = 0$.
线性变换 $\tau : V \to W$ 连续 $\iff (\tau(v_n)) \to \tau(v)$.

13.1 希尔伯特空间

定理 13.1 (课本定理13.5): (1) $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y \Longrightarrow (\langle x_n, y_n\rangle) \to \langle x, y\rangle$.

(2) 序列收敛 $\Longrightarrow$ 序列的范数收敛. $(x_n) \to x$, 则 $(\|x_n\|) \to \|x\|$.

证: (2) $(x_n) \to x \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) = \|x_n - x\| < \epsilon$
$\Longrightarrow |\|x_n\| - \|x\|| < \|x_n - x\| < \epsilon$, 故 $(\|x_n\|) \to \|x\|$.

(1) $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \le \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\|$.
$\because (x_n) \to x$, $(y_n) \to y$, $\therefore \|x_n - x\| \to 0$, $\|y_n - y\| \to 0 \Longrightarrow |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0 \Longrightarrow (\langle x_n, y_n\rangle) \to \langle x, y\rangle$.

□

注意 (2) 反之不真, 如 $(x_n = (-1)^n)$ 的范数收敛, 但序列本身不收敛.
上述定理说明内积向量空间上天然 $\exists$ 连续映射 $\|\| : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, $\langle x, \rangle : V \to F$, $v \mapsto \langle x, v\rangle$.

定义 13.1 希尔伯特空间: 在内积诱导的度量下完备的度量空间.

定理 13.2 完备化定理(课本定理13.6): 对内积向量空间 V, $\exists$ 希尔伯特空间 H 及等距映射 $\tau : V \to H$, s.t. $\tau(V)$ 在 H 中稠密.

定理 13.3 (课本定理13.7): V 为内积向量空间, 子空间 $S \subseteq V$, 则

(1) S 完备 $\Longrightarrow S$ 闭.

(2) V 为希尔伯特空间, S 为 V 的子空间, S 闭 $\Longleftrightarrow$ S 完备.

(3) $\dim S < \infty$, 则 S 闭且完备.

证: (1)(2) 与定理 12.6 的证明同.

(3) $\because \dim S = n, \therefore \exists$ 正交归一基 $\{b_1, \cdots, b_n\}$.
取 S 中序列 $(v_n) \to v \in V$, 下证 $v \in S$.
假设 $v \notin S$, 则 $\hat{v} \in S$ 且 $v - \hat{v} \perp S$.
$\|v_n - v\|^2 = \|v_n - \hat{v} + \hat{v}_n + \hat{v}\|^2$, 其中 $v - \hat{v} \in S^{\perp}$, $\hat{v}_n + \hat{v} \in S$
$\Longrightarrow \|v_n - v\|^2 = \|v - \hat{v}\|^2 - \|\hat{v}_n + v\|^2 \geq \|v - \hat{v}\|^2 > 0$, 与 $(v_n) \to v$ 矛盾, 故假设错误, $v \in S \Longrightarrow S$ 闭.
由完备化定理, $\exists$ 希尔伯特空间 H 及等距映射 $\tau : S \to H$, s.t. $\tau(S)$ 在 H 中稠密.
$\because \tau$ 等距, $\therefore \tau$ 单射 $\Longrightarrow S$ 等距同构.
又 $\because \dim S = n, \therefore \dim \tau(S) = n \Longrightarrow \tau(S)$ 闭.
又 $\tau(S)$ 在 H 中稠密, $\therefore H = \mathrm{cl}(\tau(S)) = \tau(S) \Longrightarrow S \approx H$.
又 H 为希尔伯特空间, $\therefore S$ 为希尔伯特空间.

□

13.2 无穷级数

此前, 我们已经证明, 对给定的向量, 由有限维子空间有正交归一基可表示其在有限维子空间中的最佳近似; 由于无限维子空间有最大正交归一集, 但该最大正交归一集未必为基, 故向量在无限维子空间中未必有最佳近似; 以开子集为例可说明, 向量在子集中未必有最佳近似.

定义 13.2 级数收敛和绝对收敛: 序列 (x_n) 的前 n 项和 $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, 若 (s_n) 在 V 中收敛于 s, 则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 在 V 中**收敛**于 s, 记作 $\sum_{i=1}^{\infty} = s$; 若 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ 收敛, 则称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 绝对收敛.

定理 13.4 收敛和绝对收敛的关系(课本定理13.8): 内积向量空间 V 完备 $\Longleftrightarrow$ V 上绝对收敛级数收敛.

证: "$\Longrightarrow$": 取绝对收敛级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, 则 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 收敛.
令 $s_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, 则 (s_n) 收敛 $\Longrightarrow (s_n)$ 柯西, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, $\|s_n - s_m\| < \epsilon$.
无妨 $n < m$, 则 $|s_n - s_m| = |\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\|\right| < \epsilon$.
令 $a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\|a_n - a_m\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right\| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\| < \epsilon \Longrightarrow a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ 柯西.
又 $\because V$ 完备, $\therefore a_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}$ 在 V 中收敛.

"$\Longleftarrow$": 取 V 中柯西序列 (x_n), 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.
特别地, 令 $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 其中 $k = 0, 1, \cdots$, 则 $\forall \epsilon_k, \exists N_k > 0$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $\|x_n - x_m\| < \epsilon_k = \frac{1}{2^k}$.
选 $N_1 < N_2 < \cdots$, 则 $\left\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\right\| < \frac{1}{2^k} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\right\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\right\|$ 收敛.
又 $\because V$ 上绝对收敛级数收敛, $\therefore \sum_{k=1}^{\infty} x_{N_{k+1}} - x_{N_k} = x_{N_{n+1}} - x_{N_1}$ 收敛 $\Longrightarrow x_{N_{k+1}}$ 收敛.
由引理 13.1 得 x_n 收敛, 故 V 完备.

综上, 得证. □

引理 13.1: 柯西序列的子列收敛, 则其必收敛.

证: 设柯西序列 (x_n) 的子列 $(x_{N_k}) \to x$, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists K > 0$, s.t. 当 $k > K$ 时, $\|x_{N_k} - x\| < \frac{\epsilon}{2}$.
$\because (x_n)$ 柯西, $\therefore \forall \epsilon$, $\exists N > 0$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2}$.
取 $m = \max\{N+1, N_K+1\}$, $\|x_n - x\| = \|x_n - x_m + x_m - x\| \le \|x_n - x_m\| + \|x_m - x\| < \epsilon \Longrightarrow (x_n) \to x$. □

13.3 近似问题

定义 13.3 凸集: 若 $\forall x, y \in C$, $\forall p \in [0,1]$, $px + (1-p)y \in C$, 则称 C 为凸集.

例 13.1: 三角形、矩形、圆形均为凸集.
三角形中任一点可表为其三个顶点的凸组合 ($\sum_i p_i x_i$, 其中 $p_i > 0 \forall i$, $\sum_i p_i = 1$).
无法写成其他点的凸组合的点称为**极点**, 如三角形的三个顶点.
过凸集的极限点且将整个空间划分为含有凸集和不含凸集的两部分的超平面称为面 (face), 如过三角形的一个顶点但未过三角形内部的直线.
过凸集的不止一个极限点的面, 称为 facet, 如三角形的边所在的直线. □

定理 13.5 (课本定理13.9): S 为内积向量空间 V 的完备的凸闭子集, 则 $\forall x \in V$, $\exists! \hat{x} \in S$, s.t. $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in S} \|x - y\|$, 称 $\hat{x}$ 为 x 在 S 中的最佳近似.