

Chapter 1

向量空间

定义 1.1 向量空间: 交换群 $(V, +)$ 和域 F , 数乘映射 $\alpha: F \times V \rightarrow V$, 若满足

$$\alpha(r, u + v) = \alpha(r, u) + \alpha(r, v) \text{ (可简写为 } r(u + v) = ru + rv)$$

$$(2) \alpha(r + t, u) = \alpha(r, u) + \alpha(t, u) \text{ (可简写为 } (r + t)u = ru + tu)$$

$$(3) \alpha(r \cdot t, u) = \alpha(r, \alpha(t, u)) \text{ (可简写为 } (rt)u = r(tu))$$

$$(4) \text{ 有单位元: } \exists 1 \in F, \text{ s.t. } \alpha(1, u) = u \text{ (可简写为 } 1u = u)$$

则称 V 是 F 上的向量空间.

例 1.1 直角坐标系: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 为域, $(\mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, +)$ 为交换群, 满足

$$(1) r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)$$

$$(2) (r + t)(x, y) = ((r + t)x, (r + t)y) = (rx + tx, ry + ty) = (rx, ry) + (tx, ty) = r(x, y) + t(x, y)$$

$$(3) (r \cdot t)(x, y) = (rtx, rty) = r(tx, ty) = r(t(x, y))$$

$$(4) 1(x, y) = (x, y)$$

故 \mathbb{R}^2 为 \mathbb{R} 上的向量空间. □

$0v = 0$. (注意两个 0 的区别, 等号左边的 0 为域 F 中的零元, 等号右边的 0 为 V 中的零向量.)

证: $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \implies 0v = 0$. □

$r \in F, 0 \in V$, 则 $r0 = 0$.

证: $r0 = r(0 + 0) = r0 + r0 \implies r0 = 0$. □

$$-1v = -v.$$

证: $-1v = -(1v) = -v$. □

例 1.2: \mathbb{R}^2 为 \mathbb{R} 上的向量空间.

\mathbb{R}^2 为 \mathbb{Q} 上的向量空间.

\therefore 对 $c \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{R}^2, cv \notin \mathbb{R}^2, \therefore \mathbb{R}^2$ 不是 \mathbb{C} 上的向量空间. □

1. 向量空间

例 1.3: $F^n \equiv \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n) = (r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n)$, $r(r_1, \dots, r_n) = (rr_1, \dots, rr_n)$. F^n 为 F 上的向量空间. \square

证: $\because r((r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n)) = r(r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n) = (rr_1 + rl_1, \dots, rr_n + rl_n) = (rr_1, \dots, rr_n) + (rl_1, \dots, rl_n) = r(r_1, \dots, r_n) + r(l_1, \dots, l_n)$,

且 $(r+t)(r_1, \dots, r_n) = ((r+t)r_1, \dots, (r+t)r_n) = (rr_1 + tr_1, \dots, rr_n + tr_n) = (rr_1, \dots, rr_n) + (tr_1, \dots, tr_n) = r(r_1, \dots, r_n) + t(r_1, \dots, r_n)$,

且 $(r \cdot t)(r_1, \dots, r_n) = (rtr_1, \dots, rtr_n) = r(tr_1, \dots, tr_n) = r(t(r_1, \dots, r_n))$,

且 $1(r_1, \dots, r_n) = (r_1, \dots, r_n)$,

$\therefore F^n$ 为 F 上的向量空间. \square

定义 1.2 子空间: $\emptyset \neq S \subseteq V$, 若 S 为 V 的子群, 且在相同的数乘下构成 F 上的向量空间, 则称 S 是 V 的子空间.

定理 1.1 子空间的判定(课本定理1.1): S 为 V 的子空间 $\iff \forall a, b \in S, r, t \in F, ra + tb \in S$ (即线性运算封闭).

证: “ \implies ”: $ra \in S, -tb \in S$, 又 $\because S$ 为 V 的子群, $ra - (-tb) \in S$.

“ \impliedby ”: 令 $r = 1, t = -1$, 有 $a - b \in S \implies S < V$.

令 $t = 0$, 有 $ra \in S$, 故 S 为 V 的子空间.

综上, 得证. \square

子空间的交是子空间.

证: 设 S_1, \dots, S_n 为 V 的子空间, 则 S_1, \dots, S_n 为 V 的子群 $\implies \cap_{i=1}^n S_i$ 为 V 的子群.

$\forall u, v \in \cap_{i=1}^n S_i, \forall k, u, v \in S_k \implies u, v$ 满足与 F 中向量相同的数乘映射.

综上, 得证. \square

S, T 是 V 的子空间, $S + T \equiv \{u + v \mid u \in S, v \in T\}$ 为 V 的子空间.

证: $\forall w_1, w_2 \in S + T, r, t \in F$,

$w_1 \in S + T \implies w_1 = u_1 + v_1, u_1 \in S, v_1 \in T$,

$w_2 \in S + T \implies w_2 = u_2 + v_2, u_2 \in S, v_2 \in T$.

$rw_1 + tw_2 = r(u_1 + v_1) + t(u_2 + v_2) = (ru_1 + tu_2) + (rv_1 + tv_2)$, 其中 $ru_1 + tu_2 \in S, rv_1 + tv_2 \in T \implies rw_1 + tw_2 \in S + T$, 故 $S + T$ 为 V 的子空间. \square

定义 1.3 生成子空间和生成集: $\emptyset \neq S \subseteq V$, S 的生成子空间为 $\langle S \rangle \equiv$ 包含 S 的最小子空间 $= \{\sum_{i=1}^n r_i u_i \mid r_i \in F, u_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$, 其中称 S 为生成集.

例 1.4: 向量空间 \mathbb{R}^2 ,

$S_x = \langle \{(1, 0)\} \rangle = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = x$ 轴,

$S_y = \langle \{(0, 1)\} \rangle = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = y$ 轴,

$\langle \{(1, 0), (0, 1)\} \rangle = \langle \{(1, 1), (1, -1)\} \rangle = \mathbb{R}^2$, 故对同一生成子空间, 生成集不唯一. \square

1. 向量空间

定义 1.4 线性无关: 非零元 u_1, \dots, u_m , 若 $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0 \implies r_1 = \dots = r_m = 0$, 则称 u_1, \dots, u_m 线性无关. 若 S 中任意有限个元素线性无关, 则称 S 线性无关.

例 1.5: $(1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 线性无关. □

证: $r_1(1, 0) + r_2(0, 1) = (r_1, r_2) = 0 = (0, 0) \implies r_1 = 0, r_2 = 0$. □

例 1.6: \mathbb{R}^2 上线性无关, 即两非零元夹角非零. □

单个非零元 v 线性无关.

证: $rv = 0$ 且 $v \neq 0 \implies r = 0$, 故 v 线性无关. □

定义 1.5 线性相关: u_1, \dots, u_m , 若 \exists 不全为零的 r_1, \dots, r_m , s.t. $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$, 则称 u_1, \dots, u_m 线性相关.

若 u, v 线性相关, 则两者共线.

证: $\exists r, t$ 不全为零, s.t. $ru + tv = 0$, 不妨设 $0 \neq r \in F$, 则 $ru = -tv \implies r^{-1}ru = -r^{-1}tv \implies u = -\frac{t}{r}v$ □

定义 1.6 线性表示: v 可由 u_1, \dots, u_n 线性表示 $\iff \exists r_1, \dots, r_n \in F$, s.t. $v = \sum_{i=1}^n r_i u_i$.

定理 1.2 (课本定理1.6): S 线性无关 $\iff \langle S \rangle$ 中的每个向量可由 S 中元素唯一地线性表示
 $\iff S$ 中任一向量不能由 S 中其余向量线性表示.

证: 设 $S = \{u_1, \dots, u_m\}$.

第一个 “ \implies ”: $v \in \langle S \rangle$, 则 v 可由 S 中的元素线性表示, 即 $\exists r_1, \dots, r_m$, s.t. $v = r_1 u_1 + \dots + r_m u_m$.

要证这种线性表示是唯一的, 假设 v 的另一种线性表示为 $v = r'_1 u_1 + \dots + r'_m u_m$.

$v - v = (r_1 - r'_1)u_1 + \dots + (r_m - r'_m)u_m = 0$, 又 $\because S$ 线性无关, 即 u_1, \dots, u_m 线性无关, $\therefore r'_1 = r_1, r'_m = r_m$, 故两种线性表示相同.

第一个 “ \Leftarrow ”: $0 \in \langle S \rangle$, 由于 $0u_1 + \dots + 0u_m = 0$ 是且是 0 唯一的线性表示, 故 S 线性无关.

第二个 “ \implies ”: 不妨假设 u_1 可由 u_2, \dots, u_m 线性表示, 即 $u_1 = t_2 u_2 + \dots + t_m u_m$.

若 $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$, 则 $r_1 = \dots = r_m = 0$ 或 $r_1 \neq 0, r_2 = -r_1 t_2, \dots, r_m = -r_1 t_m$, 从而 S 线性相关, 故假设错误, u_1 不可由 u_2, \dots, u_m 线性表示.

第二个 “ \Leftarrow ”: 假设 S 线性相关, 则 \exists 非零 r_1, \dots, r_m , s.t. $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$, 不妨设 r_1 非零, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 - \dots - \frac{r_m}{r_1} u_m$, 即 u_1 可由 S 中其余向量线性表示, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关. □

定理 1.3 (课本定理1.7): $\emptyset \neq S \subseteq V$, 下列等价:

(1) S 线性无关, 且 $V = \langle S \rangle$

(2) $\forall v \in V$, 可用 S 中元素唯一地线性表示

(3) S 是 V 的极小生成集 (即 S 去除任意元素都无法生成 V , 或 S 的任意真子集都无法生成 V)

1. 向量空间

(4) S 是 V 的极大线性无关集 (即 S 增加任意元素都线性相关, $\forall u \in V$ 且 $u \notin S$, $S \cup \{u\}$ 线性相关)

证: 由定理 1.2 证得 (1)(2) 等价.

设 $S = \{u_1, \dots, u_m\}$.

(1) \implies (3): 假设 $\exists S' \subsetneq S$, s.t. $V = \langle S' \rangle$, 则 $\forall v \in S - S' \subseteq V$, $v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S'$, $m \in \mathbb{N}$, 即 v 可由 S 中的部分向量线性表示, 与 S 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是 V 的极小生成集.

(3) \implies (1): S 为 V 的生成集, 即 $V = \langle S \rangle$.

假设 S 线性相关, 即 $\exists r_1, \dots, r_m$ 不全为零, s.t. $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$, 不妨设 $r_1 \neq 0$, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 + \dots + \frac{r_m}{r_1} u_m$, 则 $S - \{u_1\}$ 仍可以生成 V , 矛盾, 故假设错误, S 线性无关.

(1) \implies (4): 假设 S 不是极大线性无关集, 则 $\exists v \in V - S$, s.t. $S \cup \{v\}$ 线性无关.

又 $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S$, $m \in \mathbb{N}$, 即线性无关集 $S \cup \{v\}$ 中的向量 v 可由其中的部分向量线性表示, 与 $S \supseteq$ 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是极大线性无关集.

(4) \implies (1): $\because S$ 是 V 的极大线性无关集, $\therefore S$ 线性无关.

假设 $V \neq \langle S \rangle$, $\exists v \in V - S$, s.t. v 无法由 S 中的元素线性表示 $\implies S \cup \{v\}$ 为线性无关集, 与 S 为最大线性无关集矛盾, 故假设错误, $V = \langle S \rangle$.

综上, 得证. □

定义 1.7 基: 任何生成向量空间 V 的线性无关集. 基的阶数称为 V 的维数, 记作 $\dim V$.

定理 1.4 (课本定理1.12): 向量空间的任何基都有相同的阶, 即 $\dim V$ 不依赖于基的选取.

例 1.7: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ 为 F^n 的一组基. □

证: $r_1 e_1 + \dots + r_n e_n = (r_1, \dots, r_n) = 0 \implies r_1 = \dots = r_n = 0$, 故 e_1, \dots, e_n 线性无关.

又 $\langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle = \{r_1 e_1 + \dots + r_n e_n = (r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F, \text{ 对 } i = 1, \dots, n\} = F^n$, 故得证. □

找基的方法:

(1) 若 $0 \neq u_1 \in V$, 则 $\{u_1\}$ 线性无关.

(2) 若 $u_2 \in V - \langle u_1 \rangle$ 且 u_2 与 u_1 线性无关, 则 $\{u_1, u_2\}$ 线性无关.

(3) 重复以上操作, 直至无法找到新的线性无关元素, 即得到极大线性无关集, 此即向量空间的基.

定理 1.5 (课本定理1.9): 线性无关集 $I \subseteq V$, $S \subseteq V$ 是 V 的生成集, 且 $I \subseteq S$, 则 $\exists V$ 的基 \mathcal{B} , s.t. $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.

定义 1.8 直和: (1) 外直和: 若 V_1, \dots, V_n 是 F 上的向量空间, $V_1 \oplus \dots \oplus V_n \equiv \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$, 满足

$$- (v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$$

$$- r(v_1, \dots, v_n) = (rv_1, \dots, rv_n)$$

则 $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ 为 F 的向量空间, $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ 为 V_1, \dots, V_n 的外直和.

(2) 内直和: V 是 F 上的向量空间, V_1, \dots, V_n 是 V 的子空间, 若 $V = \sum_{i=1}^n V_i$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) = \{0\}$

1. 向量空间

$\{0\}$, 则称 V 为 V_1, \dots, V_m 的内直和, 记作 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, 称 V_i 为直和项.

内/外直和的关系: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, $V'_1 = \{(v_1, 0, \dots, 0) \mid v_1 \in V_1\}, \dots, V'_m = \{(0, 0, \dots, v_m) \mid v_m \in V_m\}$ 是 V 的子空间, 则 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ 且 $V'_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V'_j) = \{0\} \implies V_i = \bigoplus_{i=1}^m V'_i$, 故内/外直和是等价的, 以下我们不明确区分内/外直和, 均用内直和.

例 1.8: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y$. □

定理 1.6 (课本定理1.5): $\{v_i \mid i \in J\}$ 是 V 的子空间集合, $V = \sum_{i \in J} V_i$, 则下列等价:

- (1) $V = \bigoplus_{i \in J} V_i$
- (2) $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$
- (3) $0 = 0 + \dots + 0$ 是 0 的唯一分解式
- (4) V 中任一向量 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \dots + v_n$, 分解式中的有限个非零元 $v_i \in V_i$ 组成的集合成为支集

证: (1) \iff (2): 由直积的定义即得证.

(2) \implies (3): 假设 $0 = s_{i1} + \dots + s_{in}$ 且 s_{ij} 不全为零, 不妨设 $s_{i1} \neq 0$, 则 $V_{i1} \ni s_{i1} = -s_{i2} - \dots - s_{in} \in \sum_{j=2}^n V_{ij} \implies s_{i1} \in V_{i1} \cap (\bigcup_{j=2}^n V_{ij})$, $s_{i1} \neq 0$ 与 $V_{i1} \cap (\bigcup_{j=2}^n V_{ij}) = \{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $0 = 0 + \dots + 0$ 是 0 的唯一分解式.

(3) \implies (4): $\forall v \in V, v = u_1 + \dots + u_n$, 其中 $u_i \in V_i$.

假设 $v = w_1 + \dots + w_m$, 其中 $w_i \in V_i$.

$0 = v - v = u_1 + \dots + u_n - w_1 - \dots - w_m$, 将属于相同子空间的元素合并到一起, 得 $0 = (u_{t_1} - w_{t_1}) + \dots + (u_{t_k} - w_{t_k}) + u_{t_{k+1}} + \dots + u_{t_n} - w_{t_{k+1}} - \dots - w_{t_m}$, 由 (2) 知 $k = n = m$ 且 $v_{t_i} = u_{t_i}$, 故 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \dots + v_n$.

(4) \implies (2): 假设 $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$, 则 $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \supsetneq \{0\}$, 即 $\exists 0 \neq u \in V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j)$,

不妨设 $u \in V_1$ 且 $u \in V_2$, 则 $v = v_1 + \dots + v_n = (v_1 + u) + (v_2 - u) + \dots + v_n$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $v_1 + u \in V_1, v_2 - u \in V_2$, v 的分解式不唯一, 矛盾, 故假设错误, $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$.

综上, 得证. □

定理 1.7 (课本定理1.8): $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 是向量空间 V 的基 $\iff V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$.

证: “ \implies ”: $\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore V = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F\} = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$.

$\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore v_1, \dots, v_n$ 线性无关 $\implies \forall 0 \neq u \in \langle v_i \rangle, u = r_i v_i$ 且无法由 $\{v_j \mid j \neq i\}$ 线性表示 $\implies u \notin V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j)$,

$0 = 0v_i \in \langle v_i \rangle$ 且 $0 = \sum_{j \neq i} 0v_j \implies 0 \in V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j)$

$\implies V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j) = \{0\}$.

故 $V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$.

“ \Leftarrow ”: 一方面, $V = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$;

另一方面, (线性无关的证明存疑), $\implies v_1, \dots, v_n$ 线性无关.

故 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 是 V 的基. □

定理 1.8 (课本定理1.4): S 为 V 的子空间, 则 $\exists V$ 的子空间 S^c , s.t. $V = S \oplus S^c$, 称 S^c 为 S 的补空间.

1. 向量空间

证: \mathcal{B}_1 为 S 的基, 则 \mathcal{B}_1 为 V 中的线性无关集,

\mathcal{B}_1 总可以扩张为 (即添加一些元素) 成 V 的基, 即 $\exists \mathcal{B}_2$, s.t. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关且 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle \implies V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$, 故 $S^\complement = \langle \mathcal{B} \rangle$. \square

例 1.9: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y = S_l \oplus S_{l'}$, 其中 S_l 和 $S_{l'}$ 分别为过原点直线 l 和 l' 对应的子空间, l 与 l' 不共线. \square

补空间总存在, 但不唯一.

定理 1.9 (课本定理1.13): (1) \mathcal{B} 是 V 的基, 若 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, 则 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T$, 若 \mathcal{B}_1 是 S 的基, \mathcal{B}_2 是 T 的基, 则 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

证: (1) $\because \mathcal{B}$ 是 V 的基, $\therefore \forall u \in V$, $u = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$.

$\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \{ \sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1, n \in \mathbb{N} \}$, $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = \{ \sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_2, n \in \mathbb{N} \}$.

$u = \sum_{i=1}^t r_i v_i + \sum_{i=t+1}^k r_i v_i$, 其中 $v_1, \dots, v_t \in \mathcal{B}_1$, $v_{t+1}, \dots, v_k \in \mathcal{B}_2 \implies V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

$\forall u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{B}_2 \rangle, u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \implies u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1$,

且 $u \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle \implies u = \sum_{i=1}^n l_i w_i$, 其中 $l_i \in F$, $w_i \in \mathcal{B}_2$

$\implies 0 = u - u = \sum r_i v_i - \sum l_i w_i$,

又 $\because \mathcal{B}$ 为基, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\therefore r_i, w_i$ 线性无关 $\implies r_i = l_i = 0, \forall i$

$\implies u = 0$.

综上, $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T \iff V = S + T$ 且 $S \cap T = \{0\}$.

假设 $v \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, 则 $v \neq 0$, $\langle v \rangle = S \cap T$, 与 $S \cap T = \{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

$\because V = S + T$, $\therefore \forall u \in V$, $u = u_1 + u_2$, 其中 $u_1 \in S$, $u_2 \in T$,

$\because \mathcal{B}_1$ 是 S 的基, \mathcal{B}_2 是 T 的基, $\therefore u_1 = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, $u_2 = \sum_{i=k+1}^n r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \dots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \dots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$

$\implies u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, 即 $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle$.

假设 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性相关, 则 $\exists r_i \in F$ 不全为零, $\sum_{i=1}^n r_i v_i = \sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \dots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \dots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$,

$\because \mathcal{B}_1$ 和 \mathcal{B}_2 为基, $\therefore \mathcal{B}_1$ 和 \mathcal{B}_2 线性无关 $\implies \sum_{i=1}^k r_i v_i \neq 0$, $\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \neq 0$, 与 $0 = 0 + \dots + 0$ 是 0 的唯一分解式矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关 $\implies \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基. \square

定理 1.10 (课本定理1.14): S, T 是 V 的子空间, $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$. 特别地, 若 T 是 S 的补空间, 则 $\dim S + \dim T = \dim(S \oplus T)$.

证: 设 $S \cap T$ 的基为 \mathcal{A} ,

$\because S \cap T$ 为 S 的子空间, \therefore 可将 \mathcal{A} 扩张成 S 的基 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$,

$\because S \cap T$ 为 T 的子空间, \therefore 可将 \mathcal{A} 扩张成 T 的基 $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$.

接下来需要用到这样一个事实: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S + T$ 的基. 所以先来证明它:

证: $\forall w \in S + T$, $w = u + v$, 其中 $u \in S$, $v \in T \implies u \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle$, $v \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{C} \rangle$, 故 $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S + T$.

不妨设 $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$, 其中 $v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

设 $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{A}$, 则 $\sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$,

令 $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, 则 $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i \in \langle \mathcal{A} \rangle$ 且 $x = -\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \implies x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = (S - T) \cap T = \emptyset$.
 $\because x \in \langle \mathcal{B} \rangle, \therefore x \in S$, 又 $\because x \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle, \therefore x \in T \implies x \in S \cap T = \langle \mathcal{B} \rangle. \implies x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle \implies x = 0$.
又 $\because \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性独立, 故 $\forall i, r_i = 0 \implies \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性无关.

综上, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S + T$ 的基. □

故

$$\dim S + \dim T = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + \dim(S \cap T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

□