

Chapter 9

实数和复数内积空间

定义 9.1 内积和内积空间: $F = \mathbb{R}$ (或 \mathbb{C}), 映射 $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow F, (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ 满足

(1) 正定性: $\langle u, u \rangle \geq 0$, 且 $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$,

(2) 对称 (或共轭对称): 对 $F = \mathbb{R}$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$; 对 $F = \mathbb{C}$, $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,

(3) 关于第一坐标线性, 关于第二坐标线性 (或共轭线性): 对 $F = \mathbb{R}$, $\langle ru_1 + tu_2, v \rangle = r\langle u_1, v \rangle + t\langle u_2, v \rangle$,
 $\langle u, rv_1 + tv_2 \rangle = r\langle u, v_1 \rangle + t\langle u, v_2 \rangle$; 对 $F = \mathbb{C}$, $\langle ru_1 + tu_2, v \rangle = r\langle u_1, v \rangle + t\langle u_2, v \rangle$, $\langle u, rv_1 + tv_2 \rangle = \bar{r}\langle u, v_1 \rangle + \bar{t}\langle u, v_2 \rangle$,

则称 \langle, \rangle 是 V 上的内积, 称 V 为内积向量空间.

对给定的向量空间, 内积不唯一.

例 9.1: 在 \mathbb{R}^n 上, $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$,

内积又称点积, $\langle x, y \rangle = x \cdots y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. □

例 9.2: 在 \mathbb{C}^n 上, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$,

$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i$. □

引理 9.1 (课本引理9.1): V 为内积向量空间, $u, v \in V, \forall x \in V, \langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle \iff u = v$.

证: “ \implies ”: $\langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle \iff \langle u, x \rangle - \langle v, x \rangle = 0 \iff \langle u - v, x \rangle = 0$.

不妨取 $x = u - v$, 则 $\langle u - v, u - v \rangle = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v$.

“ \impliedby ”: 显然.

综上, 得证. □

定理 9.1 (课本第3版定理9.2): V 为内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 则

(1) $\forall v, w \in V, \langle \tau(v), w \rangle = 0 \implies \tau = 0$.

(2) 对 $F = \mathbb{C}, \forall v \in V, \langle \tau(v), v \rangle = 0 \implies \tau = 0$.

证: (1) 不妨取 $w = \tau(v)$, 则 $\langle \tau(v), w \rangle = \langle \tau(v), \tau(v) \rangle = 0 \implies \forall v, \tau(v) = 0$, 故 $\tau = 0$.

(2) $\forall v, w \in V, v + w \in V, v + iw \in V.$

$$\langle \tau(v + w), v + w \rangle = 0 = \langle \tau(v), v \rangle + \langle \tau(w), w \rangle, \langle \tau(v + iw), v + iw \rangle = \langle \tau(v), v \rangle + \langle \tau(iw), iw \rangle$$

$$\implies \langle \tau(v), w \rangle + \langle \tau(w), v \rangle = 0, -i\langle \tau(v), w \rangle + i\langle \tau(w), v \rangle = 0$$

$$\implies \langle \tau(v), w \rangle = 0.$$

利用 (1) 中的结论, $\tau(v) = 0.$

□

内积向量空间的子空间和商空间与普通的向量空间同.

S 是内积向量空间 V 的子空间, 则对应的商空间 $\frac{V}{S}$ 为 F 上的向量空间.

但在何种条件下, $\frac{V}{S}$ 是 F 上的内积向量空间 (内积定义同 V 上的内积定义)?

9.1 范数和距离

定义 9.2 (内积诱导出的)范数和赋范向量空间: u 的 (由内积诱导出的) 范数 $\|u\| \equiv \sqrt{\langle u, u \rangle}$, 此时称 V 为赋范向量空间.

定义 9.3 单位向量: 若 $\|u\| = 1$, 则称 u 为单位向量.

例 9.3: 在 \mathbb{R}^n 上, $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$

□

定理 9.2 范数的性质(课本定理9.2): (1) $\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \iff v = 0.$

$$(2) \forall r \in F, \|rv\| = |r| \cdot \|v\|.$$

$$(3) \text{Cauchy-Schwarz 不等式: } |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \text{ 且 } |\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \iff u \text{ 与 } v \text{ 线性相关.}$$

$$(4) \text{三角不等式: } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

$$(5) \forall x \in V, \|u - v\| \leq \|u - x\| + \|v - x\|.$$

$$(6) |||u| - |v|| \leq \|u - v\|.$$

$$(7) \text{平行四边形法则: } \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

证: (7) $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle, \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle.$

$$\text{以上两式相加得, } \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\langle u, u \rangle + 2\langle v, v \rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

□

定义 9.4 范数和赋范向量空间: 映射 $\|\cdot\| : V \rightarrow F, v \mapsto \|v\|$, 若满足

$$\|v\| \geq 0, \text{ 且 } \|v\| = 0 \iff v = 0,$$

$$(2) \|rv\| = |r| \|v\|,$$

$$(3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

则称 $\|\cdot\|$ 为 V 上的一个范数, 称 V 为赋范向量空间.

给定向量空间, 范数不唯一, 其中内积诱导的范数是一类特殊的范数, 故内积向量空间必为赋范向量空间. 内积诱导的范数可反向构建内积, 但利用一般的范数未必能构建内积 (因为或无法满足内积的线性性质).

定理 9.3 极化恒等式(课本定理9.3): 对内积诱导出的范数,

$$\text{对 } F = \mathbb{R}, \langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2).$$

$$(2) \text{ 对 } F = \mathbb{C}, \langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) + \frac{i}{4}(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2).$$

定义 9.5 度量/距离: $d(u, v) \equiv \|u - v\|$, 此时称 V 为度量向量空间.

定理 9.4 度量的性质(课本定理9.4): (1) $d(u, v) \geq 0$, 且 $d(u, v) = 0 \iff u = v$.

$$(2) \text{ 对称性: } d(u, v) = d(v, u).$$

$$(3) \text{ 三角不等式: } d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v).$$

内积向量空间必为赋范向量空间, 赋范向量空间必为度量向量空间.

9.2 等距算子

定义 9.6 等距: V, W 是 F 上的内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 若 τ 保持内积不变, 即 $\langle \tau(u), \tau(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, 则称 τ 等距.

定义 9.7 等距同构: 若 τ 等距且双射, 则称 τ 等距同构.

定理 9.5 (课本定理9.5): τ 等距 $\iff \|\tau(u)\| = \|u\|$.

证: “ \implies ”: 由定义即得.

“ \impliedby ”: 由极化恒等式 $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$, 有 $\langle \tau(u), \tau(v) \rangle = \frac{1}{4}(\|\tau(u) + \tau(v)\|^2 + \|\tau(u) - \tau(v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|\tau(u+v)\|^2 + \|\tau(u-v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \langle u, v \rangle$, 即 τ 等距.

综上, 得证. □

若 τ 等距, 则 $\tau(u) = 0 \iff u = 0$, 此时 $\ker \tau = \{0\}$, τ 单射.

9.3 正交性

定义 9.8 正交: (1) V 为内积向量空间, $u, v \in V$, 若 $\langle u, v \rangle = 0$, 则称 u 与 v 正交, 记作 $u \perp v$.

(2) X, Y 为 V 的子集, 若 $\forall x \in X, \forall y \in Y$, 有 $x \perp y$, 则称 X 与 Y 正交, 记作 $X \perp Y$.

(3) X 的正交补 $X^\perp = \{v \in X \mid v \perp X\}$.

$$\langle 0, v \rangle = \langle 0 + 0, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle \implies \langle 0, v \rangle = 0.$$

$\therefore 0 \in X^\perp, \therefore X^\perp$ 必非空.

定理 9.6 (课本定理9.7): (1) X^\perp 为 V 的子空间.

(2) 子空间 $S \subseteq V, S \cap S^\perp = \{0\}$.

证: (1) $\forall u, v \in X^\perp, \forall x \in X, \langle u, x \rangle = 0, \langle v, x \rangle = 0$
 $\implies \langle ru + tv, x \rangle = r\langle u, x \rangle + t\langle v, x \rangle = r0 + t0 = 0$
 $\implies ru + tv \in X^\perp$, 故 X^\perp 是 V 的子空间.

(2) 设 $x \in S \cap S^\perp$, 则 $x \in S$ 且 $x \in S^\perp \iff x \perp S \implies x \perp x$
 $\implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$, 故得证. □

定义 9.9 正交直和: $V = S \oplus T$ 且 $S \perp T$, 则称 V 为 S 与 T 的正交直和, 记作 $V = S \odot T$.

S 为 V 的子空间, S^c 为 S 的补空间, 则 $V = S \oplus S^c$.

给定子空间, 其补空间不唯一, 但正交补空间唯一.

例 9.4: 在 \mathbb{R}^2 上, 子空间 S 为过原点的一条直线, 任一过原点而不与 S 平行的直线均为 S 的补空间, 而仅过原点且与 S 正交的直线为 S 的正交补空间. □

定理 9.7 (课本第3版定理9.8): $V = S \odot T \iff V = S \oplus T$ 且 $T = S^\perp$.

给定子空间, 其正交补空间一定存在? 关于正交补空间的存在性问题, 我们稍后讨论.

给定 $S \subseteq V$ 和 S^\perp , 是否必有 $V = S \odot S^\perp$?

定义 9.10 正交(归一)集: $\mathcal{O} = \{u_1, \dots, u_k \mid k \in K\}$, 若 \mathcal{O} 中向量两两正交, 则称 \mathcal{O} 为正交集, 特别地, 若 $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, 则称 \mathcal{O} 为正交归一集.

不含零的正交集均可归一化为正交归一集.

定理 9.8 (课本定理9.8): 不含零的正交集线性无关.

证: 设 $\{u_i \mid i \in K\}$ 是正交集且 $u_i \neq 0 \forall i \in K$.

设 $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$.

$$\forall k \in K, 0 = \langle 0, u_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^m r_i u_i, u_k \rangle = \sum_{i=1}^m r_i \langle u_i, u_k \rangle = r_k \langle u_k, u_k \rangle.$$

又 $\because u_k \neq 0, \therefore \langle u_k, u_k \rangle \neq 0 \implies r_k = 0$, 故得证. □

线性无关集未必正交, 但可通过 Gram-Schmidt 正交化过程将线性无关集正交化.

定理 9.9 Gram-Schmidt 正交化过程(课本定理9.10): $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n, \dots\}$ 是向量空间 V 中线性独立集且 $v_i \neq 0 \forall i$, 则可通过

$$o_1 = v_1,$$

$$\begin{aligned}
o_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, o_1 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1, \\
o_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, o_2 \rangle}{\langle o_2, o_2 \rangle} o_2 - \frac{\langle v_3, o_1 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1, \\
&\dots \\
o_n &= v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, o_j \rangle}{\langle o_j, o_j \rangle} o_j, \\
&\dots,
\end{aligned}$$

再对 o_1, \dots, o_n, \dots 归一化, 得到正交归一集 $\mathcal{O} = \langle o_1, \dots, o_n, \dots \rangle$, s.t. $\langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle$.

定义 9.11 Hamel 基: 极大线性无关集.

定义 9.12 Hilbert 基: 极大正交归一基.

定理 9.10 (课本第3版定理9.13): 当 $\dim V < \infty$ 时, Hilbert 基 \implies Hamel 基.

例 9.5 Hilbert 基并非Hamel 基的例子(课本第3版例9.5): $V = l^2$ 空间 (所有平方收敛级数列构成的空间), $M = \{e_1 = (1, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots\}$ 显然正交归一. 若 $v = (x_n) \in l^2$ 且 $v \perp M$, 则 $\forall i, x_i = \langle v, e_i \rangle = 0 \implies v = 0$, 故 M 为 V 的 Hilbert 基,

然而, M 张成的 l^2 的子空间中的平方收敛级数列必仅有有限个非零项 $\implies \text{span} S \neq l^2$, 故 M 非 Hamel 基. \square

定理 9.11 (课本定理9.11): \mathcal{O} 为正交归一集, $\langle \mathcal{O} \rangle = S \subseteq V$, $\forall v \in V$, 令 v 的傅里叶展开 $\hat{v} = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$, 则 $\hat{v} \in S$ 且

- (1) \hat{v} 是 S 中唯一满足 $v - \hat{v} \perp S$ 的向量.
- (2) \hat{v} 是 S 中与 v 最近的向量 (即 $\forall w \in S, d(v, \hat{v}) \leq d(v, w)$), 称 \hat{v} 为 v 在 S 中的最佳近似.
- (3) **Bessel 不等式:** $\|\hat{v}\| \leq \|v\|$.

证: (1) $\forall w \in S, w = \sum_{i=1}^k r_i u_i$.

$$\begin{aligned}
&\text{先证正交: } \langle v - \hat{v}, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle \hat{v}, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k r_i u_i \rangle - \langle \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^k r_j u_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{j=1}^k \bar{r}_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{j=1}^k \bar{r}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle = 0 \implies v - \hat{v} \perp S.
\end{aligned}$$

再证唯一: 若取 $u \in S$, s.t. $v - u \perp S$, 设 $u = \sum_{i=1}^k l_i u_i$.

$$\begin{aligned}
&\because v - u \perp S, \therefore \forall u_j \in S, j = 1, \dots, k, \langle v - u, u_j \rangle = 0 \implies \langle v, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0 \implies \langle v, u_j \rangle = \langle u, u_j \rangle = l_j \implies \\
&u = \sum_{i=1}^k l_i u_i = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i = \hat{v}.
\end{aligned}$$

综上, 得证.

$$(2) \forall w \in S, d^2(v, w) = \|v - w\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v} - w\|^2.$$

$$\because \hat{v} \in S, w \in S, \therefore \hat{v} - w \in S.$$

$$\begin{aligned} & \text{又 } \because v - \hat{v} \perp S, \therefore v - \hat{v} \perp \hat{v} - w \\ & \implies d^2(u, w) = \|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v} - w\|^2. \\ & \because \|\hat{v} - w\|^2 \geq 0, \therefore d^2(u, w) \geq \|v - \hat{v}\|^2 = d^2(v, \hat{v}). \end{aligned}$$

$$(3) \|v\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v}\|^2.$$

$$\because v - \hat{v} \perp S, \hat{v} \in S, \therefore v - \hat{v} \perp \hat{v}.$$

$$\text{由勾股定理, } \|v - \hat{v} + \hat{v}\|^2 = \|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v}\|^2 \geq \|\hat{v}\|^2 \implies \|v\| \geq \|\hat{v}\|.$$

□

定理 9.12 投影定理(课本定理9.12): S 是 V 的有限维子空间, 则 $V = S \odot S^\perp$, 且 $\forall v \in V, v = \hat{v} + (v - \hat{v})$, 其中 $\hat{v} \in S$ 为 v 在 S 中的最佳近似, $v - \hat{v} \in S^\perp$, $\dim V = \dim S + \dim S^\perp$.

定理 9.13 (课本定理9.12): (1) S 为 V 的有限维子空间, 则 $S^{\perp\perp} = S$.

(2) 子集 $X \subseteq V$ 且 $\dim\langle X \rangle < \infty$, 则 $X^{\perp\perp} = \langle X \rangle$.

证: (1) $S^\perp = \{v \in V \mid v \perp S\}$, $S^{\perp\perp} = \{u \in V \mid u \perp S^\perp\}$, 显然, $S \subseteq S^{\perp\perp}$.

$$\forall w \in S^{\perp\perp} \subseteq V, \because S \text{ 有限维}, \therefore V = S \odot S^\perp \implies w = w_S + w_{S^\perp} \implies w_S = w - w_{S^\perp}.$$

$$0 = \langle w_{S^\perp}, w_S \rangle = \langle w_{S^\perp}, w - w_{S^\perp} \rangle = \langle w_{S^\perp}, w \rangle - \langle w_{S^\perp}, w_{S^\perp} \rangle.$$

$$\because w \in S^{\perp\perp}, \therefore \langle w_{S^\perp}, w \rangle = 0 \implies \langle w_{S^\perp}, w_{S^\perp} \rangle = 0 \implies w_{S^\perp} = 0 \implies w = w_S \in S, \text{ 故 } S^{\perp\perp} \subseteq S.$$

综上, 得证.

(2) $\because \dim\langle X \rangle < \infty, \therefore |X| < \infty$, 设 $X = \{u_1, \dots, u_k\}$.

$$\forall w_1 \in \langle X \rangle, w_1 = \sum_{i=1}^k r_i u_i.$$

$$\forall w_2 \in X^\perp, \langle w_1, w_2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^k r_i u_i, w_2 \rangle = \sum_{i=1}^k r_i \langle u_i, w_2 \rangle = 0 \implies \langle X \rangle \subseteq X^{\perp\perp}.$$

$$\forall w \in X^{\perp\perp}, \text{ 令 } w \text{ 在 } \langle X \rangle \text{ 上的最佳近似 } \hat{w} = \sum_{i=1}^k l_i u_i \in \langle X \rangle.$$

$$\langle w - \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = \langle w, w - \hat{w} \rangle - \langle \hat{w}, w - \hat{w} \rangle,$$

$$\text{其中 } \because w - \hat{w} \in \langle X \rangle^\perp, \hat{w} \in \langle X \rangle, \therefore \langle \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = 0,$$

$$\because w - \hat{w} \in X^\perp, w \in X^{\perp\perp}, \therefore \langle w, w - \hat{w} \rangle = 0$$

$$\implies \langle w - \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = 0 \implies w - \hat{w} = 0 \implies w = \hat{w} \in \langle X \rangle \implies X^{\perp\perp} \subseteq \langle X \rangle.$$

综上, 得证.

□

定理 9.14 (课本第3版定理9.17): $\mathcal{O} = \{u_1, \dots, u_k\}$ 为正交归一集, $S = \langle \mathcal{O} \rangle$, 则下列叙述等价:

(1) \mathcal{O} 为 V 的正交归一基.

(2) $\mathcal{O}^\perp = \{0\}$.

(3) $\forall v \in V, v = \hat{v} = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i$.

(4) **Bessel 不等式:** $\|v\| = \|\hat{v}\|$.

$$(5) \text{ Parseval 不等式: } \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \overline{\langle w, u_i \rangle}, \text{ 即在定序基 } \mathcal{O} \text{ 下, } V \rightarrow F^k, v \mapsto [v]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_k \rangle \end{pmatrix},$$

$$w \mapsto [w]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \langle w, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle w, u_k \rangle \end{pmatrix}, \langle u, w \rangle = [v]_{\mathcal{O}} \cdot [w]_{\mathcal{O}}.$$

证: “(1) \implies (2)”: $V = \langle \mathcal{O} \rangle, \forall u \in \mathcal{O}^\perp \subseteq V, u = \sum_{i=1}^k l_i u_i$.

$\because u \in \mathcal{O}^\perp, \therefore \forall i = 1, \dots, k, \langle u, u_i \rangle = 0$.

$0 = \langle u, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k l_i \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k l_i \delta_{ij} = l_j \implies u = \sum_{i=1}^k l_i u_i = 0$, 故得证. \square

9.4 Riesz 表示定理

$F = \mathbb{R}$ (或 \mathbb{C}), V 为 F 上的有限维内积向量空间, $\dim V = n$, 内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F, (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$, 固定第二坐标 $v = x$, 定义线性泛函 $\langle \cdot, x \rangle \in V^* : V \rightarrow F, v \mapsto \langle v, x \rangle$.

定理 9.15 Riesz 表示定理(课本定理9.15): $\dim V = n, \forall f \in V^*, \exists! x \in V, \text{ s.t. } f(v) = \langle v, x \rangle$.

即对偶空间中的任一函数均可用与唯一向量的内积代替, 或对偶空间中的任一函数均与唯一向量对应.

证: $\because \text{Im } f \subseteq F, \therefore \dim \text{Im } f \leq \dim F = 1$.

若 $\dim \text{Im } f = 0$, 即 $\text{Im } f = \{0\}$, 则 $f = 0 \implies x = 0$;

若 $\dim \text{Im } f \neq 0$, 则 $\dim \text{Im } f = 1, \exists 0 \neq u \in V, \text{ s.t. } f(u) \neq 0$.

$\because V = \ker f \oplus \ker f^c$ 且 $\ker f^c \approx \text{Im } f, \therefore \dim \ker f^c = \dim \text{Im } f = 1 \implies \ker f^c = \langle u \rangle$.

选取适当的 u , 则可将 V 分解为 $V = \ker f \oplus \langle u \rangle = \langle u \rangle^\perp \oplus \langle u \rangle$, 其中 $\ker f = \langle u \rangle^\perp$.

$\because V = \langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^\perp, \therefore \forall v \in V, v = ru + w$, 其中 $w \in \langle u \rangle^\perp = \ker f \implies f(v) = f(ru + w) = rf(u) + f(w) = rf(u)$.

取 $x = \frac{\overline{f(u)}}{\langle u, u \rangle} u$, 则 $\langle v, x \rangle = \langle v, \frac{\overline{f(u)}}{\langle u, u \rangle} u \rangle = \frac{f(u)}{\langle u, u \rangle} \langle v, u \rangle = \frac{f(u)}{\langle u, u \rangle} \langle ru + w, u \rangle = \frac{rf(u)}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle = rf(u) = f(v)$. \square

由对偶空间中函数与向量空间中向量的一一对应的关系, 可引出

定义 9.13 Riesz 映射: $\mathcal{R} : V^* \rightarrow V, f \mapsto x, \text{ s.t. } \forall v \in V, f(v) = \langle v, x \rangle$.

(1) \mathcal{R} 是映射.

(2) \mathcal{R} 满射.

(3) \mathcal{R} 单射.

(4) \mathcal{R} 共轭线性.

证:

(1) 由定理 9.15 即得.

(2) 显然.

(3) $\ker \mathcal{R} = \{f \in V^* \mid \mathcal{R}(f) = 0\} = \{f \in V^* \mid f(v) = \langle v, 0 \rangle = 0 \forall v\} = \{0\}$, 故得证.

(4) 令 $\mathcal{R}(f) = x_f$, $\mathcal{R}(g) = x_g$, $\mathcal{R}(rf + tg) = x_{rf+tg}$.

一方面, $(rf + tg)(v) = \langle v, x_{rf+tg} \rangle$;

另一方面, $(rf + tg)(v) = rf(v) + tg(v) = r\langle v, x_f \rangle + t\langle v, x_g \rangle = \langle v, \bar{r}x_f + \bar{t}x_g \rangle$

$\implies x_{rf+tg} = \bar{r}x_f + \bar{t}x_g$, 即 $\mathcal{R}(rf + tg) = r\mathcal{R}(f) + t\mathcal{R}(g)$. □

综上, \mathcal{R} 共轭同构.