Chapter 1

代数学基础

1.1 常用符号

- $\forall$: 对所有 (for all).
- $\exists$: 存在 (there exists).
- $\exists!$: 存在且唯一 (there exists exactly one).
- s.t.: 使得 (such that).
- $\mathbb{N}$: 自然数.
- $\mathbb{Z}$: 整数.
- $\mathbb{Q}$: 有理数.
- $\mathbb{R}$: 实数.
- $\mathbb{C}$: 复数.

1.2 集合

定义 1.1 集合(Set):

元素与集合之间的关系: 对元素 a 和集合 S,

- $a \in S$ 或
- $a \notin S$.

集合中元素之间的关系: $\forall a, b \in S$,

- $a = b$ 或
- $a \neq b$.

集合与集合之间的关系: 对集合 A, B 和全集 I,

(1) **交集**: $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ 且 } a \in B\}$.

(2) **并集**: $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ 或 } a \in B\}$.

(3) **差**: $B - A = \{a \mid a \in B \text{ 且 } a \notin A\}$.

(4) **补集**: $A' = I - A = \{a \mid a \in I \text{ 且 } a \notin A\}$.

(5) **包含**: $A \subseteq B$, 称 A 包含于 B, 或称 B 包含 A, 或称 B 是 A 的子集
$\iff A \cup B = A \iff A \cup B = B$.

证: $\underline{A \subseteq B \Longrightarrow A \cap B = A}$: $\because A \subseteq B$, $\therefore \forall a \in A$, $a \in B \Longrightarrow A \subseteq A \cap B$.
$\forall a \in A \cup B$, 由交集定义, $a \in A \Longrightarrow A \cap B \subseteq A$.
故 $A \cap B = A$.

$\underline{A \subseteq B \Longleftarrow A \cap B = A}$: $\because A \cap B = A$, $\therefore \forall a \in A$, $a \in B \Longrightarrow A \subseteq B$.

$\underline{A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B}$: $\because A \subseteq B$, $\forall a \in A$, $a \in B$, $\therefore \forall a \in A \cup B$, $a \in B \Longrightarrow A \cup B \subseteq B$.
$\because A \subseteq B$, $\forall a \in A$, 由并集定义, $a \in A \cup B \Longrightarrow B \subseteq A \cup B$.
故 $A \cup B = B$.

$\underline{A \subseteq B \Longleftarrow A \cup B = B}$: $\forall a \in A$, 由并集定义, $a \in A \cup B$, 又 $\because A \cup B = B$, $\therefore a \in B \Longrightarrow A \subseteq B$.

综上, 得证. □

常用公式:

(1) $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$.

证: $\forall a \in A(\cup_i B_i) \iff a \in A$ 且 $a \in \cup_i B_i$
$\iff a \in A$ 且 $\exists k$, s.t. $a \in B_k$
$\iff \exists k$, s.t. $a \in A \cap B_k \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$
$\iff a \in \cup_i (A \cap B_i)$, 故 $A \cap (\cup_i B_i) \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$.

$\forall a \in \cup_i (A \cap B_i) \iff \exists k$, s.t. $a \in A \cap B_k$
$\iff \exists k$, s.t. $a \in A$ 且 $a \in B_k$
$\iff a \in A$ 且 $\exists k$, s.t. $a \in B_k$
$\iff a \in A$ 且 $a \in \cup_i B_i$
$\iff a \in A \cap (\cup_i B_i)$, 故 $\cup_i (A \cap B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i)$.

综上, 得证. □

(2) $A \cup (\cap_i B_i) = \cap_i (A \cup B_i)$.

证: $\forall a \in A \cup (\cap_i B_i) \iff a \in A$ 或 $a \in \cap_i B_i$
$\iff a \in A$ 或 $\forall i$, s.t. $a \in B_i$
$\iff \forall i$, $a \in A$ 或 $a \in B_k$
$\iff \forall i$, $a \in A \cup B_k$
$\iff \cap_i (A \cup B_i)$, 故 $A \cup (\cap_i B_i) \subseteq \cap_i (A \cup B_i)$.

$\forall a \in \cap_i (A \cup B_i) \iff \forall i$, $a \in A \cup B_i$
$\iff \forall i$, $a \in A$ 或 $a \in B_i$
$\iff a \in A$ 或 $\forall i$, $a \in B_i$

$\iff a \in A$ 或 $a \in \cup_i B_i$

$\iff a \in A \cap (\cup_i B_i)$, 故 $\cap_i (A \cup B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i)$.

综上, 得证. □

(3) $(\cup_i A_i)' = \cap_i A_i'$.

证: $\forall a \in (\cup_i A_i)' \iff a \in I$ 且 $a \notin \cup_i A_i$

$\iff a \in I$ 且 $\forall i,\ a \notin A_i$

$\iff \forall i,\ a \in I$ 且 $a \notin A_i$

$\iff \forall i,\ a \in A_i'$

$\iff a \in \cap_i A_i'$, 故 $(\cup_i A_i)' \subseteq \cap_i A_i'$.

$\forall a \in \cap_i A_i' \iff \forall i,\ a \in I$ 且 $a \notin A_i$

$\iff a \in I$ 且 $\forall i,\ a \notin A_i$

$\iff a \in I$ 且 $a \notin \cup_i A_i'$

$\iff a \in (\cup_i A_i)'$, 故 $\cap_i A_i' \in (\cup_i A_i)'$.

综上, 得证. □

(4) $(\cap_i A_i)' = \cup_i A_i'$.

证: $\forall a \in (\cap_i A_i)' \iff a \in I$ 且 $a \notin \cap_i A_i$

$\iff a \in I$ 且 $\exists k$, s.t. $a \notin A_k$

$\iff \exists k$, s.t. $a \in I$ 且 $a \notin A_k$

$\iff \exists k$, s.t. $a \in A_k'$

$\iff a \in \cup_i A_i'$, 故 $(\cap_i A_i)' \subseteq \cup_i A_i'$.

$\forall a \in \cup_i A_i' \iff \exists k$, s.t. $a \in A_k'$

$\iff \exists k$, s.t. $a \in I$ 且 $a \notin A_k$

$\iff a \in I$ 且 $\exists k$, s.t. $a \notin A_k$

$\iff a \in I$ 且 $a \notin \cap_i A_i$

$\iff a \in (\cap_i A_i)'$, 故 $\cup_i A_i' \subseteq (\cap_i A_i)'$.

综上, 得证. □

1.3 映射

定义 1.2 映射: $\forall a \in S_1$, $\exists! b \in S_2$, s.t. $b = f(a)$, 记作 $f : S_1 \to S_2$, $a \mapsto b$, 其中称 S_1 为定义域, S_2 为值域, b 为 a 的像, a 为 b 的原像.

例 1.1 恒等映射: $1_S : S \to S$, $a \mapsto 1_S(a) = a$. □

定义 1.3 映射相等: 映射 $f : S_1 \to S_2$, $g : S_1 \to S_3$, $\forall a \in S_1$, $f(a) = g(a)$, 则称 f 与 g 相等, 记作 $f = g$.

$\forall a \in S_1$, $\{f(a)\} \subseteq S_2$ 且 $|\{f(a)\}| = 1$.

定义 1.4 <u>原像集</u>: $f^{-1}(b) \equiv \{a \in S_1 \mid f(a) = b\}$.

$f^{-1}(b) \subseteq S_1$, $f^{-1}(b)$ 可能 $= \emptyset$.

定义 1.5 <u>像集</u>: $\operatorname{Im} f = f(S_1) \equiv \{b \in S_2 \mid b = f(a) \forall a \in S_1\}$.

$\operatorname{Im} f \subseteq S_2$.
基本性质:

(1) $A \subseteq S_1 \Longrightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

证: $\forall a \in A, \because A \subseteq S_1, \therefore a \in S_1$.
又 $\because f(a) \in f(A), \therefore a \in f^{-1}(f(A))$, 故 $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. □

若 $\exists a \in S_1 - A$, s.t. $f(a) \in f(A)$, 则 $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$.

(2) $B \subseteq S_2 \Longrightarrow B \supseteq f(f^{-1}(B))$.

证: $\because f^{-1}(B) = \{a \in S_1 \mid f(a) \in B\}, \therefore \forall a \in f^{-1}(B), f(a) \in B \Longrightarrow f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. □

若 $\exists b \in B$, s.t. $\forall a \in S_1$, $f(a) \neq b$ (即 B 中有元素在 S_1 中无原像), 则 $B \supsetneq f(f^{-1}(B))$.

若 $\forall b \in B, \exists a \in A$, s.t. $f(a) = b$, 则 $B = f(f^{-1}(B))$.

(3) $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$.

证: $\forall a \in f^{-1}(\cup_i B_i), \exists k$, s.t. $f(a) \in B_k$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in f^{-1}(B_k)$
$\Longleftrightarrow a \in \cup_i f^{-1}(B_i)$, 故 $f^{-1}(\cup_i B_i) \subseteq \cup_i f^{-1}(B_i)$.

$\forall a \in \cup_i f^{-1}(B_i), \exists k$, s.t. $a \in f^{-1}(B_k)$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $f(a) \in B_k$
$\Longleftrightarrow f(a) \in \cup_i B_i$
$\Longleftrightarrow a \in f^{-1}(\cup_i B_i)$, 故 $\cup_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cup_i B_i)$.

综上, 得证. □

(4) $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$.

证: $\forall a \in f^{-1}(\cap_i B_i), \exists k$, s.t. $f(a) \in B_k$
$\Longleftrightarrow \exists k$, s.t. $a \in f^{-1}(B_k)$
$\Longleftrightarrow a \in \cup_i f^{-1}(B_k)$, 故 $f^{-1}(\cap_i B_i) \subseteq \cap_i f^{-1}(B_i)$.

$\forall a \in \cap_i f^{-1}(B_i), \forall i$, s.t. $a \in f^{-1}(B_i)$
$\Longleftrightarrow \forall i$, s.t. $f(a) \in B_i$
$\Longleftrightarrow f(a) \in \cap_i B_i$
$\Longleftrightarrow a \in f^{-1}(\cap_i B_i)$, 故 $\cap_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cap_i B_i)$.

综上, 得证. □

定义 1.6 映射的复合: 映射 $f: S_1 \to S_2$, $g: S_2 \to S_3$, 则称映射 $g \circ f: S_1 \to S_2$, $a \mapsto g \circ f(a) \equiv g(f(a))$ 为 f 和 g 的复合.

定理 1.1 映射复合的结合律: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

故连续复合 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ 无需括号.

定义 1.7 交换图: $f: S_1 \to S_1$, $h: S_2 \to S_3$, $g: S_1 \to S_3$, 若 $g = f \circ h$, 则称该图交换.

$$\begin{tikzcd} & S_3 & \\ S_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"] & & S_2 \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

$f: S_1 \to S_2$, $g: S_2 \to S_4$, $h: S_1 \to S_3$, $l: S_3 \to S_4$, 若 $g \circ f = l \circ h$, 则称该图交换.

$$\begin{tikzcd} S_3 \arrow[r, "l"] & S_4 \\ S_1 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & S_2 \arrow[u, "g"] \end{tikzcd}$$

定义 1.8 单射(Injective 或One-to-one): 映射 $f: S_1 \to S_2$, $\forall a, b \in S_1$, 若 $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$, 则称 f 单射.

单射的性质:

(1) $c \in S_2$, f 单射, 若 $f^{-1}(c) \neq \emptyset$, 则 $|f^{-1}(c)| = 1$.

(2) f 单射 $\Longleftrightarrow A = f^{-1}(f(A))$.

定义 1.9 满射(Surjective): 映射 $f: S_1 \to S_2$, 若 $\forall b \in S_2$, $\exists a \in S_1$, s.t. $f(a) = b$ (即 $\operatorname{Im} f = S_2$), 则称 f 满射.

满射的性质:

(1) f 满射 $\Longleftrightarrow \forall B \subseteq S_2$, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

(2) f 满射 $\Longleftrightarrow \forall B \subseteq S_2$, $B = f(f^{-1}(B))$.

定义 1.10 双射: 映射 f 单射且满射 $\Longleftrightarrow f$ 双射.

例 1.2: 恒等映射是双射的. □

常用结论:

(1) f, g 单射 $\Longrightarrow g \circ f$ 单射.

证: $\forall a, b \in S_1$, 若 $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, $\because g$ 单射, $\therefore f(a) = f(b)$,
又 $\because f$ 单射, $\therefore a = b$, 故 $g \circ f$ 单射. □

(2) $g \circ f$ 单射 $\Longrightarrow f$ 单射.

证: $\forall a, b \in S_1$, 若 $f(a) = f(b)$, 则 $g \circ f(a) = g \circ f(b)$,
又 $\because g \circ f$ 单射, $\therefore a = b$, 故 f 单射. □

例 1.3 **$g \circ f$ 单射, 而g 非单射的例子:** 集合 $S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{0, 1\}$, $S_3 = \{0\}$,
映射 $f : S_1 \to S_2$, $f(a) = 0 \forall a \in S_1$, 单射,
$g : S_2 \to S_3$, $g(b) = 0 \forall S_2$, 非单射, $g \circ f : S_1 \to S_3$, $g(a) = 0$, 单射. □

(3) f, g 满射 $\Longrightarrow g \circ f$ 满射.

证: $\forall c \in S_3$, $\because g$ 满射, $\therefore \exists b \in S_2$, s.t. $g(b) = c$,
又 $\because f$ 满射, $\therefore \exists a \in S_1$, s.t. $f(a) = b \Longrightarrow g \circ f(a) = c$, 故 $g \circ f$ 满射. □

(4) $g \circ f$ 满射 $\Longrightarrow g$ 满射.

证: $\because g \circ f$ 满射, $\therefore \forall c \in S_3$, $\exists a \in S_1$, s.t. $g \circ f(a) = c$
$\Longrightarrow \exists b = f(a) \in S_2$, s.t. $g(b) = c$, 故 g 满射. □

例 1.4 **$g \circ f$ 满射, 而f 非满射的例子:** 集合 $S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{0, 1\}$, $S_3 = \{0\}$,
映射 $f : S_1 \to S_2$, $f(a) = 0 \forall a \in S_1$, 非满射,
$g : S_2 \to S_3$, $g(b) = 0 \forall S_2$, 满射, $g \circ f : S_1 \to S_3$, $g(a) = 0$, 满射. □

定理 1.2: 映射 $f : S_1 \to S_2$ 单射 $\Longleftrightarrow \exists$ 映射 $g : S_2 \to S_1$, s.t. $g \circ f = 1_{S_1}$, 这样的 g 称为 f 的左逆.

证: "$\Longrightarrow$": 构造 $g(b) = \begin{cases} a, & a \in f^{-1}(b), \\ \text{任意取一个 } a_0 \in S_1, & f^{-1}(b) = \emptyset, \end{cases}$,
$\forall a \in S_1$, 记$b = f(a)$, $\because f$ 单射且 $a \in f^{-1}(b) \neq \emptyset$, $\therefore |f^{-1}(b)| = 1$,
$\Longrightarrow g \circ f(a) = a \Longrightarrow g \circ f = 1_{S_1}$.
"$\Longleftarrow$": $\forall a, b \in S_1$, 若 $f(a) = f(b)$, 则 $a = 1_{S_1} = g \circ f(a) = g \circ f(b) = 1_{S_1}(b) = b$, 故 f 单射. □

由于当 $f^{-1}(b) = \emptyset$ 时, $g(b)$ 的取值具有任意性, 故若左逆存在, 则不唯一.

定理 1.3: 映射 $f : S_1 \to S_2$ 满射 $\Longleftrightarrow \exists$ 映射 $h : S_2 \to S_1$, s.t. $f \circ h = 1_{S_2}$, 这样的 h 称为 f 的右逆.

证: "$\Longrightarrow$": $\because f$ 满射, $\therefore \forall b \in S_2$, $\exists a \in S_1$, s.t. $f(a) = b$, 故可构造 $h(b) = a \in f^{-1}(b)$,
从而 $f \circ h(b) = b \Longrightarrow f \circ h = 1_{S_2}$.
"$\Longleftarrow$": $\forall b \in S_2$, $\exists a = h(b) \in S_1$, s.t. $f \circ h(b) = 1_{S_2}(b) = b$, 故 f 满射. □

由于 $|f^{-1}(b)| \geq 1$, $h(b)$ 的取值可能具有任意性, 故若右逆存在, 则不唯一.

定理 1.4: 若映射 f 同时存在左逆和右逆, 则其左逆 $=$ 右逆, 此时称 f 可逆, 且此时 f 双射.

证: 因为 f 同时存在左逆和右逆, 由定理 1.2 和 1.3 得 f 双射.
设左逆 $g: S_2 \to S_1$, s.t. $g \circ f = 1_{S_1}$, 右逆 $h: S_2 \to S_1$, s.t. $f \circ h = 1_{S_2}$.
假设 $g \neq h$, 则 $\exists b \in S_2$, s.t. $g(b) \neq h(b)$,
又 $\because f$ 单射, $\therefore b = 1_{S_2}(b) = f \circ g(b) \neq f \circ h(b)$.
$\because f$ 满射, $\therefore \exists a \in S_1$, s.t. $b = f(a) \Longrightarrow f(a) = b \neq f \circ g \circ f(a) = 1_{S_2}(f(a)) = f(a)$, 这显然是荒谬的, 故假设错误, $g = h$. □

1.4 等价关系和等价类

定义 1.11 <u>卡氏积</u>**:** 集合 S_1 和 S_2 的卡氏积 $S_1 \times S_2 \equiv \{(a,b) \mid a \in S_1, b \in S_2\}$.
集合 S 的卡氏积 $S \times S \equiv \{(a,b) \mid a, b \in S\}$.

注意, 一般 $(a,b) \neq (b,a)$.

定义 1.12 <u>关系</u>**:** 卡氏积的子集. $\mathcal{R} \in S \times S$, 称为 S 上的关系.

例 1.5: 自然数集 $\mathbb{N}$ 的卡氏积 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.
小于关系: $\mathcal{R}_1 = \{(n,m) \mid n - m < 0\}$. $(1,2) \in \mathcal{R}_1$, 记作 $1\mathcal{R}_1 2$.
等于关系: $\mathcal{R}_2 = \{(n,m) \mid n - m = 0\}$. $(1,1) \in \mathcal{R}_2$, 记作 $1\mathcal{R}_2 1$. □

定义 1.13 <u>图</u>**:** 对映射 $f: S_1 \to S_2$, 有关系 $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in S_1\} \subseteq S_1 \times S_2$, 称 G_f 为 f 的图.

(第一个坐标在此关系中仅出现一次, 不会重复.)
映射与图一一对应.

定义 1.14 <u>等价关系</u>**:** 关系 $\mathcal{R} \in S \times S$, 若满足
反身性: $\forall a \in S$, $(a,a) \in \mathcal{R}$ (即 $a \sim a \forall a \in S$)

(2) **对称性**: 若 $(a,b) \in \mathcal{R}$, 则 $(b,a) \in \mathcal{R}$ (即$a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$)

(3) **传递性**: 若 $(a,b) \in \mathcal{R}$, $(b,c) \in \mathcal{R}$, 则 $(a,c) \in \mathcal{R}$ (即$a \sim b, b \sim c \Longleftrightarrow a \sim c$)

则称 $\mathcal{R}$ 为 S 上的等价关系. 若元素 a, b 具有等价关系, 记为 $a \sim b$.

定义 1.15 <u>等价类</u>**:** 由具有等价关系的元素组成的集合. $\forall a \in S$, $[a] \equiv \{b \in S \mid b \sim a\} \subseteq$ 称为 a 的等价类, a 称为该等价类的代表元.

$\because a \in [a]$, $\therefore [a]$ 非空.
$c \in S$, 则有且仅有以下两种情况:

(1) $c \in [a] \Longleftrightarrow c \sim a \Longleftrightarrow a \sim c \Longleftrightarrow a \in [c] \Longleftrightarrow [a] = [c]$.

(2) $c \notin [a] \Longleftrightarrow [a] \cap [c] = \emptyset$.

证: 假设 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, 则 $\exists c \in [a] \cap [b]$
$\Longleftrightarrow c \in [a]$ 且 $c \in [b]$, 即 $c \sim a$ 且 $c \sim b$
$\Longrightarrow a \sim b \Longrightarrow [a] = [b]$, 得证. □

等价类的性质

(1) $a \in [b] \iff b \in [a] \iff [a] = [b]$.

(2) $a \notin [b] \iff [a] \cap [b] = \emptyset$.

(3) $\forall a, b \in S$, 要么 $[a] = [b]$, 要么 $[a] \cap [b] = \emptyset$.
(以上三条证明见前文.)

(4) $S = \cup_{i \in K, a_i \in S} [a_i]$, 其中 $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \forall i \neq j$.

证: $S = \cup_a \{a\}$, 合并各等价类, 即得证. □

等价类这一概念可用于将大问题分解为小问题加以解决.

定义 1.16 剖分: 集合 $S \neq \emptyset$, 若 $S = \cup_{i \in K, S_i \subseteq S} S_i$ 且 $S_i \cap S_j = \emptyset \forall i \neq j$, 则称 $\{S_i \subseteq S \mid i \in K\}$ 为 S 的一个剖分.

可由集合的等价类得到它的一个剖分.

定义 1.17 商类: 所有等价类的集合. $\frac{S}{\sim} \equiv \{[a] \mid a \in S\}$. $\pi : S \to \frac{S}{\sim}$, $a \mapsto [a]$ 称为自然映射.

自然映射满射, 但未必单射.

定义 1.18 运算: 映射 $* : S \times S \to S$ 称为 S 上的一个运算, 记为 $(S, *)$.

$\forall a, b \in S$, $a * b \in S$.

1.5 群

定义 1.19 群: 若 $(G, *)$ 满足
结合律: $(a * b) * c = a * (b * c)$
(故 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ 无需括号, 可写为 $\prod_{i=1}^{n} a_i$.)

(2) **有单位元** e: s.t. $e * a = a * e = a$

(3) **有逆元**: $\forall a \in G$, $\exists b$, s.t. $a * b = b * a = e$, 则称 b 为 a 的逆, 记为 $b = a^{-1}$

则称 $(G, *)$ 为一个群.

定理 1.5: 单位元是唯一的.

证: 假设 e_1, e_2 均为单位元, 则 $e_1 * e_2 = e_1 * e_2$, 得证. □

定理 1.6: 每个元素的逆元是唯一的.

证: 假设 b_1 和 b_2 均为 a 的逆元, 则 $b_1 a = b_2 a = e \Longrightarrow b_1 = b_2$, 得证. □

例 1.6: $(\mathbb{Z}, \times)$ 非群, 因 0 无逆元. □

特殊的群:

(1)

例 1.7 <u>循环群</u>: $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. □

(2)

例 1.8 <u>交换群(Abel 群)</u>: $\forall a, b \in G$, $a * b = b * a$. □

群的性质:

(1) $c * c = c \Longleftrightarrow c = e$.

(2) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(3) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(4) 左消去律: $a * b = a * c \Longleftrightarrow b = c$,
右消去律: $b * a = c * a \Longleftrightarrow b = c$.

定义 1.20 <u>群的阶</u>: $|G| \equiv$ 群中元素的个数.

定义 1.21 <u>有限群</u>: 若 $|G| < \infty$, 则称 G 为有限群.

定义 1.22 <u>群元素的阶</u>: $g \in G$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$, 若 $g^n = e$, 则称最小的这样的 n 为 g 的阶, 记为 $|g|$, 若 n 不存在, 则称 g 无穷阶.

若 $|G| < \infty$, 则 $\forall g \in G$, $|g| < \infty$.

证: $g \in G$, $g^2 \in G$, $\cdots$, $g^n \in G \Longrightarrow \{g, g^2, \cdots, g^n\} \in G$
$\because |G| < \infty$, $\therefore |\{g, g^2, \cdots, g^n\}| < \infty$
当 $n > |G|$, $\{g, g^2, \cdots, g^n\}$ 中必有元素重复, 故 $\exists n_1 < n_2$, s.t. $g^{n_1} = g^{n_2} \Longrightarrow e = g^{n_1} g^{-n_1} = g^{n_2} g^{-n_1} = g^{n_2 - n_1}$.
最小的这样的 $n_2 - n_1$ 即为 $|g|$, 故 $|g| < \infty$. □

定义 1.23 <u>子群</u>: 对群 $(G, *)$, H 为 G 的非空子集, 若 $(H, *)$ 亦为群, 则称 $(H, *)$ 为 $(G, *)$ 的子群, 记为 $(H, *) < (G, *)$.

例 1.9: $(\mathbb{Q}, +)$ 为群, $(\mathbb{Q}^* \equiv \mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ 亦为群, 虽然 $\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{Q}$, 但由于两者运算不同, 故 $(\mathbb{Q}^*, \times)$ 并非 $(\mathbb{Q}, +)$ 的子群. □

定理 1.7: $(H, *) < (G, *) \Longleftrightarrow H \subseteq G, \forall a, b \in H,\ a * b \in H$ 且 $a^{-1} \in H \Longleftrightarrow H \subseteq G, \forall a, b \in H,\ a * b^{-1} = H$.

证: $\underline{(H,*)<(G,*) \Longleftrightarrow H\subseteq G,\ \forall a,b\in H,\ a*b\in H \text{ 且} a^{-1}\in H}$: 由子群和群的定义即得证.

$\underline{(H,*)<(G,*) \Longleftarrow H\subseteq G,\ \forall a,b\in H,\ a*b^{-1}\in H}$: 由子群和群的定义即得证.

$\underline{(H,*)<(G,*) \Longleftarrow H\subseteq G,\ \forall a,b\in H,\ a*b^{-1}\in H}$: 取 $b=a$, 得 $a*a^{-1}=e\in H \Longrightarrow H$ 有单位元.
取 $a=e$, 得 $\forall b\in H,\ \exists e*b^{-1}=b^{-1}\in H \Longrightarrow H$ 有逆元.
H 中的运算 $*$ 的结合律继承自 G 中的 $*$ 的结合律.
综上, H 为群. 又 $\because H\subseteq G, \therefore H<G$. □

定义 1.24 <u>平凡子群</u>: $(G,*)$ 和 $(\{e\},*)$ 为 $(G,*)$ 的平凡子群.

定义 1.25 <u>真子群(非平凡子群)</u>: 除平凡子群以外的子群.

定义 1.26 <u>单群</u>: 无真子群的群.

定理 1.8 <u>任意多个子群的交为子群</u>: $(G,*)$ 为群, $(H_i,*)<(G,*)\forall i$, 则 $(\cap_{i\in K}H_i,*)<(G,*)$.

证: $\forall a,b\in\cap_{i\in K}H_i \Longrightarrow \forall i\in K,\ a,b\in H_i$,
$\because (H_i,*)<(G,*), \therefore a*b^{-1}\in H_i\subseteq\cap_{i\in K}H_i \Longrightarrow a*b^{-1}\in\cap_{i\in K}H_i$. □

定理 1.9: $(H,*)<(G,*)$, 则 H 的单位元即为 G 的单位元.

证: 设 G 的单位元为 e.
$\forall a\in H, \because H\in G, \therefore a\in G,\ e*a=a*e=a \Longrightarrow e$ 为 $(H,*)$ 的单位元,
又 $\because (H,*)$ 的单位元是唯一的, 故得证. □

例 1.10: $(\mathbb{Z},+)$ 为群, $(\mathbb{E}=\langle 2\rangle =\equiv \{vp\},+)$, $(\langle 3\rangle\equiv\{3n\mid n\in\mathbb{Z}\},+)<(\mathbb{Z},+)$. □

定义 1.27 <u>陪集(Coset)</u>: 真子群 $H<G, \forall g\in G$, 左陪集 $gH\equiv\{g{*}h\mid\forall h\in H\}$, 右陪集 $Hg\equiv\{h{*}g\mid\forall h\in H\}$.

简便起见, 以下讨论针对左陪集, 右陪集同理.

例 1.11: $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{Z}$ 中的陪集: $\forall g,\ n\mathbb{E}=\{n+m\mid m\in\mathbb{E}\}=\begin{cases}\mathbb{E}, & n \text{ 为偶数},\\ 1\mathbb{E}=\mathbb{O}\equiv\{\text{奇数}\}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 故 $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{Z}$ 中仅有两个陪集: $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{O}$, 且 $\mathbb{Z}=\mathbb{E}\cup\mathbb{O}$, $\mathbb{E}\cap\mathbb{O}=\emptyset$. □

陪集的性质: 真子群 $H<G, \forall g_1,g_2\in G$,

(1) $g_1H\cap g_2H=\emptyset$ 或 $g_1H=g_2H$.

证: 假设 $g_1H\cap g_2H\neq\emptyset$, 则 $\exists c\in g_1H\cap g_2H$
$\Longleftrightarrow c\in g_1H$ 且 $c\in g_2H$
$\Longleftrightarrow \exists h_1,h_2$, s.t. $c=g_1*h_1=g_2*h_2$
$\Longrightarrow g_2^{-1}g_1=h_2*h_1^{-1}$
又 $\because h_2*h_1^{-1}\in H, \therefore g_2^{-1}*g_1\in H$
$\Longrightarrow (g_2^{-1}*g_1)*H=H$
$\Longrightarrow g_1H=g_2H$. □

(2) $|gH| = |H|$.

证: 要证 $|gH| = |H|$, 只需证 $H \to gH$ 双射.
若 $ga = gb$, 则 $a = b$, 故 $g \to gH$ 单射.
$\forall c \in gH$, $\exists a = g^{-1}c \in H$ 且 $ga = b$, 故 $H \to gH$ 满射.
综上, $H \to gH$ 双射, 故得证. □

(3) $G = H \cup g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_\alpha H$, 其中 $g_iH \cap g_jH = \emptyset \forall i, j$, α 仅为一指标.

证: $G = \cup_{g \in G} gH$, 去除这些并集中的重复集合, 即得证. □

(4) $g_1H = g_2H \iff g_1^{-1} * g_2 \in H$.

证: "$\Longrightarrow$": $g_1H = g_2H \Longrightarrow \forall g_1 * h_1 \in g_1H$, $g_1 * h_1 \in g_2H$
$\Longrightarrow \exists h_2 \in H$, s.t. $g_1 * h_1 = g_2 * h_2$
$\iff g_1^{-1}g_2 = h_1 * h_2^{-1}$
又 $\because h_1 * h_2^{-1} \in H$, $\therefore g_1^{-1} * g_2 \in H$.
"$\Longleftarrow$": $g_1^{-1} * g_2 \in H \Longrightarrow g_1^{-1} * g_2H = H$
$\Longrightarrow g_1H = g_2H$. □

(5)

定理 1.10 拉格朗日(Lagrange) 定理: $|G| < \infty$, 真子集 $H < G$, $|H| \mid |G|$ [a].

[a] $a \mid b$ 表示 b 可被 a 整除.

故若 $|G|$ 为质数, 其子群仅有 $\{e\}$ 和 G 两个, 此时 $\forall g \in G$, $G = \{g, g^2, \cdots, g^{|G|}\}$, 即 G 为有限阶循环交换群.

最小的有限非交换群为 6 阶.

根据 (3), 由陪集可得剖分, 由剖分可得等价关系, 由此我们引入:

(6) $g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} * g_2 \in H$.

例 1.12: 群 $(\mathbb{Z}, -)$, 可分为两个子群: $(\mathbb{E}, -)$ 和 $(\mathbb{O}, -)$, 其中 $\mathbb{E} \cap \mathbb{O} = \emptyset$, 故由这两个子群可得 $\mathbb{Z}$ 的一个剖分, 这两个子群中的元素各存在等价关系: $n \sim m \iff n - m \in \mathbb{E}$. □

定义 1.28 商群: H 为 G 的正规子群, $\frac{G}{H} = \{[g] \equiv gH \mid g \in G\}$.

问题 1.1: $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 是否或在何种条件下具有相同的代数结构? □

答: $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 具有相同的代数结构, 即 $\forall [g_1], [g_2] \in \frac{G}{H}$, $[g_1] * [g_2] = [g_1 * g_2] \in \frac{G}{H}$,
即存在映射 $\frac{G}{H} * \frac{G}{H} \to \frac{G}{H}$, $([g_1], [g_2]) \mapsto [g_1, g_2])$,
即若 $g_1 \sim g_1'$, $g_2 \sim g_2'$, 则 $g_1 * g_2 \sim g_1' * g_2'$,
即若 $g_1H = g_1'H$, $g_2H = g_2'H$, 则 $(g_1 * g_2)H = (g_1' * g_2')H$.
$\because g_1H = g_1'H$, $\therefore \exists h_1, h_1' \in H$, s.t. $g_1h_1 = g_1'h_1' \iff g_1 = g_1' * h_1' * h_1^{-1}$,
$\because g_2H = g_2'H$, $\therefore \exists h_2, h_2' \in H$, s.t. $g_2h_2 = g_2'h_2' \iff g_2 = g_2' * h_1' * h_2^{-1}$,
从而 $g_1 * g_2 = g_1' * h_1' * h_1^{-1} * g_2' * h_2' * h_2^{-1}$,
若 $\exists h' \in H$, s.t. $(h_1' * h_1^{-1}) * g_2' = g_2' * h'$, 则 $g_1 * g_2 = g_1' * g_2' * h' * h_2' * h_2^{-1} \equiv g_1' * g_2' * h$,
$\Longrightarrow (g_1 * g_2)H = (g_1' * g_2' * h)H = (g_1' * g_2')H$.

故当 $gH = Hg$ 时, $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 具有相同的代数结构. □

定理 1.11 正规子群: 若 $gH = Hg$, 则 $\frac{G}{H}$ 与 G 和 H 具有相同的代数结构, 此时称 H 为 G 的正规子群.

定理 1.12: 交换群的任意一个子群为正规子群.

例 1.13: $(\mathbb{Z}, +)$ 的子群均为循环群, $\langle m\rangle \equiv \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n\rangle}$, $\mathbb{Z}_m$ 有 m 个等价类: $\mathbb{Z}_m = \cap_{i=0}^{m-1}[i]$. □

定义 1.29 群同态: 对群 $(G_1, *)$ 和 $(G_2, \circ)$, 若映射 $f : G_1 \to G_2$ 满足 $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ (即映射后保持代数结构), 则称 f 为 G_1 到 G_2 的群同态.

(类似于集合间的映射)

定义 1.30 单同态: 单射的群同态.

定义 1.31 满同态: 满射的群同态.

定义 1.32 同构: 双射的群同态.

定理 1.13: f 为 G_1 到 G_2 的群同态, e_1 和 e_2 分别是 G_1 和 G_2 的单位元, 则 $f(e_1) = e_2$.

证: $f(e_1) = f(e_1 * e_1) = f(e_1) \circ f(e_1) \Longrightarrow f(e_1) = e_2$. □

定理 1.14: f 为 G_1 到 G_2 的群同态, $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

证: $e_2 = f(e_1) = f(a * a^{-1}) = f(a) \circ f(a^{-1}) \Longrightarrow f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$. □

定义 1.33 群同态的核(Kernel): 单位元的原像. f 为 G_1 到 G_2 的群同态, e_1 和 e_2 分别是 G_1 和 G_2 的单位元, 则称 $\operatorname{Ker} f \equiv f^{-1}(e_2) = \{a \in G_1 \mid f(a) = e_2\}$ 为 f 的核.

$\because e_1 \in \operatorname{Ker} f$, $\therefore \operatorname{Ker} f \neq \emptyset$.
$\operatorname{Ker} f \subseteq G_1$.

证: $\forall a, b \in \operatorname{Ker} f$, $f(a * b^{-1}) = f(a) \circ f(b) = f(a) \circ [f(b)]^{-1} = e_2 * e_2^{-1} = e_2 \Longrightarrow a * b^{-1} \in \operatorname{Ker} f$, 故 $\operatorname{Ker} f \subseteq G_1$. □

定义 1.34 群同态的像: f 为 G_1 到 G_2 的群同态, 则称 $\operatorname{Im} f \equiv f(G_1) = \{f(a) \mid a \in G_1\}$ 为 f 的像.

$\operatorname{Im} f \in G_2$.

定理 1.15: f 单同态 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$.

证: "$\Longrightarrow$": $\forall a, b \in \operatorname{Ker} f$, $f(a) = f(b) = e_2$,
又 $\because f$ 单同态, $\therefore a = b = e$.

"$\Longrightarrow$": 若 $f(a) = f(b)$, 则 $f(a) \circ [f(b)]^{-1} = e_2$

$\Longrightarrow f(a) \circ f(b^{-1}) = e_2$

$\Longrightarrow f(a * b^{-1}) = e_2$

$\Longrightarrow a * b^{-1} \in \operatorname{Ker} f = \{e_1\}$

$\Longrightarrow a = b = e_1$, 故 f 单同态. □

1.6 环

定义 1.35 **<u>环</u>:** 若 $(R, +, \cdot)$ 满足

$(R, +)$ 为交换群 (单位元记作 0)

(2) **结合律**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(3) **左分配律**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
右分配律: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

则称 $(R, +, \cdot)$ 为环.

例 1.14: $(\mathbb{Z}, +, \times)$ 为环. □

常用结论:

(1) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

证: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 * a + 0 * a = 0 * a + a * 0 \Longrightarrow 0 \times a = a \cdot 0 = 0$. □

(2) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.

证: $(-a) \cdot b + a \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0 \Longrightarrow (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot [b + (-b)] = a \cdot 0 = 0 \Longrightarrow a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. □

(3) $\left(\sum_i a_i\right) \cdot \left(\sum_j b_j\right) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j$.

证: 由左右分配律即得证. □

特殊的环:

(1)

定义 1.36 **<u>交换环</u>:** 若 $\forall a, b \in R$, $a \cdot b = b \cdot a$, 则称 R 为交换环.

(2)

定义 1.37 有单位元的环: 若 $\exists 1$, s.t. $\forall a \in R$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, 则称 R 为有单位元的环, 称 1 为 R 的单位元.

例 1.15: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 交换且有单位元. □

例 1.16: $(M_{n\times n}, +, \times)$ [1] 非交换, 有单位元 $I_{n\times n}$. □

例 1.17: $(\mathbb{E}, +, \times)$ 交换, 无单位元. □

定义 1.38 零因子: $0 \neq a \in R$, 若 $\exists 0 \neq b \in R$, s.t. $a \cdot b = 0$ 或 $b \cdot a = 0$, 则称 a 为 R 的零因子.

定义 1.39 整环: 有单位元, 交换, 无零因子的环.

定义 1.40 子环: 非空真子集 $\emptyset \neq R_1 \subseteq R$, 若 $(R_1, +, \cdot)$ 亦为环, 则称 R_1 为 R 的子环.

$\because (R_1, +)$ 为交换群, $\therefore (R_1, +) < (R, +)$.

定理 1.16 子环的判定: R_1 为 R 的子环 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in R_1$, $a - b \in R_1$, $a \cdot b \in R_1$.

定理 1.17: R 为有单位元的交换环, 则 R 为整环 $\Longleftrightarrow \forall 0 \neq r \in R$, $a, b \in R$, 若 $r \cdot a = r \cdot b$, 则必有 $a = b$.

证: "$\Longrightarrow$": $r \cdot a = r \cdot b \Longleftrightarrow r \cdot (a - b) = r \cdot a - r \cdot b = r \cdot b - r \cdot b = 0$,
$\because r \neq 0$ 且 R 为整环 (无零因子), $\therefore a - b = 0 \Longrightarrow a = b$.

"$\Longleftarrow$": 假设 R 有零因子, $r_0 \cdot a_0 = 0$, 则令 $r = r_0$, $\forall a, b \in R$, 若 $r \cdot a = r \cdot b = 0$, 则 $a - b = 0$ 或 $a - b = a_0$ 或 $a - b = a_0 + a_0, \cdots$, 矛盾, 故假设错误, R 无零因子.
又 $\because R$ 为有单位元的交换环, $\therefore R$ 为整环. □

定义 1.41 理想: 非空子集 $I \subseteq R$, 若 $\forall a, b \in I$, $r \in R$, $a - b \in I$, $r \cdot a \in I$, $a \cdot r \in I$, 则称 I 为 R 的理想.

定义 1.42 平凡理想: $(\{0\}, +, \cdot)$ 和 $(R, +, \cdot)$ 为 $(R, +, \cdot)$ 的平凡理想.

定义 1.43 单环: 只有平凡理想的环.

定理 1.18: 任意多个理想的交为理想.

证: $\because 0 \in \cap_{i\in K} I_i$, $\cap_{i\in K} I_i = \emptyset$.
$\because \forall a, b \in \cap_{i\in K} I_i$, $\therefore \forall a, b$, $\forall k \in K$, $a, b \in I_k$,
又 $\because \forall k \in K$,$(I_k, +) < (R, +)$, $\therefore \forall k \in K$,$a - b \in I_k \Longrightarrow a - b \in \cap_{i\in K} I_i$.

$\forall k \in K$, $a_k \in I_k$, 又 $\because I_k$ 为理想, $r \cdot a \in I_k$, $a \cdot r \in I_k \Longrightarrow r \cdot a \in I_k$, $a \cdot r \in I_k$.

综上, $\cap_{i\in K} I_k$ 为 R 的理想. □

[1] $M_{n\times m} \equiv \{(a_{i,j})_{m\times n} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$.

定理 1.19: 若 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ 是 R 中理想的升链, 则 $\cup_i I_i$ 是 R 的理想.

定义 1.44 生成理想: R 为交换环, 非空子集 $\emptyset \neq S \in R$, 由 S 生成的理想是 R 中包含 S 的最小理想, 即 R 中包含 S 的所有理想的交, 记作 $\langle S \rangle$.

证: 假设 I_0 是 R 中包含 S 的最小理想, $J = \{I_k \mid k \in K\}$ 是 R 中包含 S 的所有理想的集合.
显然 $I_0 \in J$, 故 $\cap_k I_k \subseteq I_0$.
$\because \cap_{i\in K} I_k$ 为理想, 又 $\because I_0$ 为最小的理想, $\therefore |I_0| \leq |\cap_k I_k|$.
综上, 必有 $I_0 = \cap_k I_k$. □

- 由某个元素 a 生成的理想: $\langle a \rangle = \{r \cdot a \mid r \in R\}$.
- 由多个元素 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 生成的理想: $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in R\}$.
- 由集合 S 生成的理想: $\langle S \rangle = \{\sum_{i=1}^m \mid r_i \in R, a_i \in S, m \in \mathbb{Z}^+\}$.

可用理想得等价关系: I 是 R 的理想, 则 $r_1 \sim r_2 \iff r_1 - r_2 \in \mathbb{I}$, 从而得到等价关系: $[a] = a + I = \{a + r \mid r \in I\}$.

定义 1.45 商环: $\frac{R}{\sim} \equiv \{[a] \mid a \in R\}$.

$([a],[b]) \mapsto [a+b]$ 和 $([a],[b]) \mapsto [a \cdot b]$ 都是运算.

证: 要证 $([a],[b]) \mapsto [a+b]$ 和 $([a],[b]) \mapsto [a \cdot b]$ 都是运算, 即证这些映射与代表元无关,
即证 $a \sim a'$, $b \sim b'$, $[a'] + [b'] = [a+b]$, $[a'] \cdot [b'] = [a \cdot b]$.
$\because a \sim a'$, $b \sim b'$, $\therefore a - a' \in I$, $b - b' \in I \Longrightarrow a + b - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in I$
$\Longrightarrow a + b \sim a' + b'$, 故 $([a,b]) \mapsto [a+b]$ 与代表无关, 是运算.
$\because a \sim a'$, $b \sim b'$, $\therefore a - a' \in I$, $b - b' \in I$,
设 $a - a' \equiv h_1 \in I$, $b - b' \equiv h_2 \in I$, 则 $a' \cdot b' = (a + h_1) \cdot (b + h_2) = a' \cdot b' + a' \cdot h_2 + h_1 \cdot b' + h_1 \cdot h_2$,
其中 $\because h_1, h_2 \in I \Longrightarrow h_1 \cdot h_2 \in I$, 而由理想的定义, $a' \cdot h \in I$, $h_1 \cdot b' \in I$,
$\Longrightarrow a' \cdot b' = a \cdot b - a' \cdot h_1 - h_2 \cdot b \in I$, 故 $[a'] \cdot [b'] = [a' \cdot b'] = [a \cdot b]$. □

定义 1.46 环同态: $(R_1, +, *)$ 和 $(R_2, +, \cdot)$ 为环, 映射 $f : R_1 \to R_2$ 满足

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(2) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

则称 f 为 R_1 到 R_2 的同态.

由环同态的定义, f 必为 $(R_1, +)$ 到 $(R_2, +)$ 的群同态, 故 $f(0) = 0$, $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

定义 1.47 核: $\operatorname{Ker} f \equiv \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$.

定义 1.48 像: $\mathrm{Im}\, f \equiv \{f(a) \mid a \in R_1\}$.

$\mathrm{Im}\, f \subseteq R_2$.

定理 1.20: $\mathrm{Ker}\, f$ 为理想.

证: $\forall a, b \in \mathrm{Ker}\, f$, $r \in R_1$, $f(a-b) = f(a+(-b)) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b) = 0 - 0 = 0 \Longrightarrow a - b \in \mathrm{Ker}\, f$.
$f(r \cdot a) = f(r) \cdot f(a) = f(r) \cdot 0 = 0 \Longrightarrow r \cdot a \in I$,
同理 $a \cdot r \in I$.

综上, $\mathrm{Ker}\, f$ 为 R_1 的理想. □

定义 1.49 单同态: 单射的环同态.

单同态 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

定义 1.50 满同态: 满射的环同态.

满同态 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f = R_2$.

定义 1.51 同构: 双射的环同态.

定义 1.52 典范同态: I 为 R 的理想, $\pi : R \to \frac{R}{I}$, $a \mapsto [a]$ 称为典范同态.

典范同态是满同态.

例 1.18: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 为环.
$\langle 2 \rangle = \mathbb{O} \equiv \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
$\langle 3 \rangle \equiv \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
$\langle 2, 3 \rangle \equiv \{2n + 3m \mid n, m \in Z\} = \mathbb{Z}$. $\langle 1 \rangle \equiv \mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ 的任何理想均由一个数生成. 更准确地说, 若 I 为 $\mathbb{Z}$ 的理想, 则 $I = \langle n \rangle$, 其中 n 为 I 中最小的正整数. □

(此处其实用到了这样一个定理: 任何一个由自然数组成的集合均存在最小正整数.)

证: 若 $p \in \mathbb{Z}$, $p \in \langle n \rangle$, 我们无妨假设 $p > n$, 设 $p = kn + r$, 其中 $0 \le r < n$.
若 $r \neq 0$, 则 $r = p - kn \in I$, 但 $0 \le r < n$ 而 n 为 $\langle n \rangle$ 中最小的正整数矛盾, 故 $r = 0$, $p = kn$. □

定义 1.53 剩余类环: $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$.

例 1.19: $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$, $[2] \cdot [3] = [6] = [0]$, 故 $\mathbb{Z}_6$ 有零因子. □

1.7 域

定义 1.54 域: 若 $(F,+,\cdot)$ 满足

$(F,+)$ 为交换群 (单位元记作 0)

(2) $(F^*,\cdot)$ 为交换群 (单位元记作 1), 其中 $F^* = F - \{0\}$

(3) **左分配律**: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$,
右分配律: $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

则称 $(F,+,\cdot)$ 为域.

由于有 0 和 1 这两个元素, $|F| \geq 2$. 当 $|F| = 2$ 时, $F = \{0,1\} \approxeq \mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{\langle 2\rangle}$.

例 1.20: $\mathbb{Z}_2$ 是最小的有限域. $\mathbb{Q}$ 为最小的无限域. □

定义 1.55 有理数: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid n \neq 0, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$, 即 $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\exists m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $q = \frac{m}{n}$.

定义 1.56 域的特征: $\operatorname{char} F \equiv$ 使得 $n\cdot 1 = \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{ 个 }1\text{ 相加}} = 0$ 的最小正整数.

例 1.21: $\operatorname{char}\mathbb{Z}_2 = 2,\ \operatorname{char}\mathbb{Q} = 0.$ □

$p = \operatorname{char} F$ 必为质数, 否则 $\exists m, n < p$, s.t. $0 = p\cdot 1 = (n\cdot m)\cdot 1 = (m\cdot 1)\cdot(n\cdot 1) \Longrightarrow n\cdot 1 = 0$ 或 $m\cdot 1 = 0$ 与域的特征的定义矛盾.

当 p 为质数且 $\operatorname{char}\mathbb{Z}_p = p$ 时, $\mathbb{Z}_p$ 为域.

定义 1.57 域同态: $(F_1,+,\cdot)$ 和 $(F_2,+,\cdot)$ 为域, 映射 $f: F_1 \to F_2$ 满足

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(2) $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$

则称 f 为 F_1 到 F_2 的同态.

域同态的性质:

(1) $f(0) = 0$.

(2) $f(1) = 1$ 或 0.

证: $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)\cdot f(1) \Longrightarrow f(1) - f(1)\cdot f(1) = 0 \Longrightarrow f(1) = 0$ 或 1. □

(3) 若 $f(1) = 0$, 则 $\forall r \in F_1$, $f(r) = f(r\cdot 1) = f(r)\cdot f(1) = f(r)\cdot 0 = 0$.

(4) 若 $f(1) = 1$, 则 $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, 此时 f 单射.

证: $\forall r \in F^*$, $r^{-1} \in F^*$, $1 = f(1) = f(r\cdot r^{-1}) = f(r)\cdot f(r^{-1}) \Longrightarrow f(r) \neq 0$, $f(r^{-1}) \neq 0$, 故 $\forall r \neq 0$, $f(r) \neq 0$, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. □