Chapter 3

同构定理

定义 3.1 商空间**:** F 为域, V 是 F 上的向量空间, S 是 V 的子空间, 则称 $\frac{V}{S} \equiv \{[v] \mid v \in V\}$ 是 F 的**商空间**, 其中 $[v] \equiv \{u \in V \mid u - v \in S\} = S + v$.

$\frac{V}{S}$ 是 F 上的向量空间.

证: $[u]+[v] = \{a \in V \mid a-u \in S\} + \{b \in V \mid b-v \in S\} = \{(a+b) \in V \mid a-u \in S, b-v \in S\}$.
$[u+v] = \{w \in V \mid w-(u+v) \in S\}$.
$\forall a+b \in [u]+[v]$, $(a-u)+(b-v) = (a+b)-(u+v) \in S \Longrightarrow (a+b) \in [u+v] \Longrightarrow [u]+[v] \in [u+v]$.
$\forall w \in [u+v]$, $\exists c, d \in S$, s.t. $c+d = w-(u+v) \Longrightarrow w = (c+d)+(u+v) = (c+u)+(d+v)$, 其中 $(c+u) \in [u]$, $(d+v) \in [v] \Longrightarrow w \in [u]+[v]$.
故 $[u]+[v] = [u+v]$.

假设 $u \sim u'$, $v \sim v'$, 即 $[u] = [u']$, $[v] = [v']$.
$\because [u] = [u']$, $\therefore uS = u'S \Longrightarrow \exists s_1, s_1' \in S$, s.t. $u+s_1 = u'+s_1' \Longleftrightarrow v' = u+s_1-s_1'$,
$\because [v] = [v']$, $\therefore vS = v'S \Longrightarrow \exists s_2, s_2' \in S$, s.t. $v+s_2 = v'+s_2' \Longleftrightarrow v' = v+s_2-s_2'$,
从而 $u'+v' = u+s_1-s_1'+v+s_1-s_1'$, 其中 $\because s_1, s_1', s_1, s_1' \in S$, $s_1-s_1' \in S$, $s_2-s_2' \in S$,
$\because V$ 是交换群, $\therefore$, s.t. $s_1-s_1'+v = v+s_1-s_1' \Longrightarrow u'+v' = u+v+(s_1-s_1'+s_2-s_2')$
$\Longrightarrow (u'+v')S = (u+v+(s_1-s_1'+s_2-s_2'))S \Longrightarrow [u'+v'] = [u'+v'] = [u+v]$,
即 $[u]+[v] = [u+v]$ 与代表元选取无关, 故 $[u]+[v] = [u+v]$ 是运算.

$r[u] = r\{v \in V \mid v-u \in S\} = \{rv \mid v \in V, v-u \in S\} = \{rv \in V \mid rv-ru \in S\} = [ru]$.

假设 $u \sim u'$, 即 $[u] = [u']$.
$\because [u] = [u']$, $\therefore uS = u'S \Longrightarrow \exists s, s' \in S$, s.t. $u+s = u'+s' \Longleftrightarrow u' = u+s-s'$,
从而 $ru' = r(u+s-s') = ru+r(s-s')$, 其中 $s-s' \in S \Longrightarrow (ru')S = (ru+r(s-s'))S = (ru)S \Longrightarrow r[u'] = [ru'] = [ru]$,
即 $r[u] = [ru]$ 与代表元选取无关, 故 $r[u] = [ru]$ 是运算.

$(\frac{V}{S}, +)$ 满足

(1) **结合律**: $([v]+[u])+[w] = [u+v]+[w] = [u+v+w] = [u+(v+w)] = [u]+[v+w] = [u]+([v]+[w])$

(2) **有单位元** $[0]$: $[0]+[u] = [0+u] = [u] = [u+0] = [u]+[0]$

(3) **有逆元**: $\forall v \in V$, $\exists -v$, s.t. $[a]+[-a] = [a+(-a)] = [0] = [(-a)+a] = [-a]+[a]$

且 $[u]+[v] = [u+v] = [v+u] = [v]+[u]$, 即 $(\frac{V}{S}, +)$ 交换, 故 $(\frac{V}{S}, +)$ 是交换群. (总之就是因为 $\frac{V}{S}$ 中的元素 $[v]$ 保持了 V 中的元素 v 的各种运算性质, 所以 $(V, +)$ 是交换群就可以推出 $\frac{V}{S}$ 也是交换群.)

$\frac{V}{S}$ 满足

(1) $r([u+v]) = r([u]+[v]) = r[u] + r[v]$

(2) $(r+t)[u] = [(r+t)u] = [ru+tu] = [ru] + [tu] = r[u] + t[u]$

(3) $(r \cdot t)[u] = [(r \cdot t)u] = [r(tu)] = r[tu] = r(t[u])$

(4) **有单位元** 1: $[1][u] = [1u] = [u]$

故 $\frac{V}{S}$ 是 F 上的向量空间. □

定理 3.1 (课本定理3.2): (1) $\Pi_S : V \to \frac{V}{S}$, $v \mapsto [v]$ 是线性变换.

(2) Π_S 是满线性变换, 即 $\operatorname{Im} \Pi_S = \frac{V}{S}$.

(3) $\ker \Pi_S = S$.

证: (1) 显然 Π_S 是唯一的, 故 Π_S 是映射.
如前所证, V 和 $\frac{V}{S}$ 均为 F 上的向量空间.
$\because [u+v] = \{w \in V \mid w - (u+v) \in S\}$, $r[u] = [ru]$, $\therefore r[u] + t[v] = [ru] + [tv] = [ru+tv]$, 故 Π_S 为线性变换.

(2) $\forall [v] \in \frac{V}{S}$, $\exists v \in V$, s.t. $\Pi_S(v) = [v]$, 即 $\operatorname{Im} \Pi_S = \frac{V}{S}$, 故 Π_S 是满线性变换.

(3) $\ker \Pi_S = \{v \in S \mid \Pi_S(v) = [0]\}$.
$\Pi_S(v) = [v] = S + v = [0] = S \Longrightarrow v \in S \Longrightarrow \ker \Pi_S = S$.

□

定理 3.2 (课本定理3.3): (1) S, T 是子空间, 且 $S \subseteq T$, 则 $\frac{T}{S}$ 是 $\frac{V}{S}$ 的子空间.

(2) 取 X 为 $\frac{V}{S}$ 的子空间, 则 $\exists V$ 的子空间 T, s.t. $\emptyset \neq S \subseteq T$, $\frac{T}{S} = X$.

证: (1) $\frac{T}{S} = \{[u] \mid u \in T\}$, $\frac{V}{S} = \{[v] \mid v \in V\}$.
$\forall [u] \in \frac{T}{S}$, $u \in T$, $\because T$ 是 V 的子空间, $\therefore u \in V \Longrightarrow [u] \in \frac{V}{S}$, 故 $\frac{T}{S} \subseteq \frac{V}{S}$.
$\forall [u_1], [u_2] \in \frac{T}{S}$, $r, t \in F$, $r[u_1] + t[u_2] = [ru_1 + tu_2]$, $\because u_1, u_2 \in T$, $\therefore ru_1 + tu_2 \in T \Longrightarrow [ru_1 + tu_2] \in \frac{T}{S}$, 故 $\frac{T}{S}$ 是线性空间.

综上, 得证.

(2) 取 $T = \cup_{[v] \in X} [v]$.
显然 $T \subseteq V$.
$\forall u, v \in T$, 根据 T 的定义, $[u], [v] \in X$,
$\because X$ 为子空间, $\therefore r[u] + t[v] = [ru+tv] \in X \Longrightarrow ru + tv \in [ru+tv] \subseteq T = \cup_{v \in X} [v] \Longrightarrow ru + tv \in T$.
故 T 为 V 的子空间.

$\because [0] = S$, $\therefore S \subseteq T$.

$\frac{T}{S} = \{[v] = S + v \mid v \in T\}$.
$\forall [v] \in \frac{T}{S}$, $v \in T \Longrightarrow [v] \in X$.
$\forall [v] \in X$, $v \in T \Longrightarrow [v] \in \frac{T}{S}$.
故 $\frac{T}{S} = X$.

综上, 得证.

□

定理 3.3 <u>第一同态基本定理(课本定理3.4)</u>: [a] S 是 V 的子空间, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$,

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tau[v] \\
& V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Pi_S"'] & W & \\
& \frac{V}{S} \arrow[ur, dashed, "\tau'"] & & \\
{[v]} \arrow[uuurrr, dashed, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

若 $S \subseteq \ker \tau$, 即 $\ker \Pi_S \subseteq \ker \tau$, 则 $\exists! \tau'$, s.t. $\tau = \tau' \circ \Pi_S$, 即 $\forall v \in V$, $\tau(v) = \tau'([v])$, 此时上图可交换.

[a] 该定理回答了 τ' 的存在性 (即 τ' 在什么条件下存在) 的问题. 之所以称"基本", 是因为若将该定理中的向量空间换成其他代数结构, 定理仍然成立.

证: τ' 的唯一性要求, 若 $[u] = [v]$, 则 $\tau'([u]) = \tau'([v])$,
即若 $u \sim v$, 则 $\tau(u) = \tau(v)$,
即若 $u - v \in S$, 则 $\tau(u - v) = 0$,
即 $S \subseteq \ker \tau$. □

此时, $\ker \tau' = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau'([v]) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau(v) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid v \in \ker \tau\} = \{[v] \mid v \in \ker \tau\} = \frac{\ker \tau}{S}$, $\operatorname{Im} \tau' = \{\tau'([v]) \mid [v] \in \frac{V}{S}\} = \{\tau'([v]) \mid v \in V\} = \{\tau(v) \mid v \in V\} = \operatorname{Im} \tau$ ($\because \Pi_S$ 满射, $\therefore \forall [v] \in \frac{V}{S}$, $\exists v \in V$).

那么, 如果 τ 双射, 即 $\exists \tau^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$, 再加上条件 $\ker \tau \subseteq S$, 即 $\ker \tau = S$, 如何?

$$\begin{tikzcd}
\tau^{-1}(w) \arrow[ddd, mapsto] & & & w \arrow[lll, mapsto] \\
& V \arrow[d, "\Pi_S"'] & W \arrow[l, "\tau^{-1}"'] & \\
& \frac{V}{S} & & \\
{[w]} & & &
\end{tikzcd}$$

此时, $\ker \tau' = \frac{\ker \tau}{S} = \{[v] \mid v \in \ker \tau\} = \{[v] \mid v \in S\} = \{[0]\} \Longrightarrow \tau'$ 单射.

由上面关于第一同态定理的延伸讨论我们得到:

定理 3.4 <u>第一同构定理(课本定理3.5)</u>: 若 $\ker \tau = S$, 则 τ' 单射, $\frac{V}{\ker \tau} = \frac{V}{S} \approx \operatorname{Im} \tau$.

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dddd, mapsto] & & & \tau[v] \\
& V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Pi_S"'] & W & \\
& \frac{V}{S} \arrow[ur, dashed, "\tau'"] & & \\
& & & \\
{[v]} \arrow[uuuurrr, dashed, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

证: $V = \ker\tau \oplus (\ker\tau)^c$, 其中 $(\ker\tau)^c \approx \operatorname{Im}\tau \Longrightarrow \frac{V}{\ker\tau} = (\ker\tau)^c$. □

更一般地, 若 $V = S \oplus T$, 则 $\frac{V}{S} = T$, $\frac{V}{T} \approx S$.

证: $\forall v \in V$, $v = u_S + u_T$, 其中 $u_S \in S$, $u_T \in T$. 令投影映射 $P_T : V \to T$, $v = u_S + u_T \mapsto u_T$.
$\ker P_T = \{v \in V \mid P_T(v) = 0\} = S = [0] = \ker\Pi_S$.
$\exists!\tau'$ 单射, s.t. $P_T = \tau' \circ \Pi_S$.
又 $\operatorname{Im} P_T = T$, 即 P_T 满射, $\therefore \tau'$ 满射 $\Longrightarrow \tau'$ 同构 $\Longrightarrow \frac{V}{S} \approx T$.

$$\begin{tikzcd}
v = u_S + u_T \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dddd, mapsto] & & & u_T \\
& V \arrow[r, "P_T"] \arrow[d, "\Pi_S"'] & T & \\
& \frac{V}{S} \arrow[ur, dashed, "\tau'"] & & \\
& & & \\
{[v]} \arrow[uuuurrr, dashed, mapsto] & & &
\end{tikzcd}$$

同理可证 $\frac{V}{T} \approx S$. □

定义 3.2 对偶(空间)和线性泛函: $V^* = \mathcal{L}(V, F)$ 是 F 上的向量空间, 称 V^* 为 V 的**对偶(空间)**. 若 $f \in V^*$, 称 f 为**线性泛函**.

(1) $\ker V^*$ 为 F 上的向量空间.

(2) $\dim F = 1$, $\operatorname{Im} f \subseteq F$, $\therefore \dim\operatorname{Im} f \leq 1$, $\dim\ker f \geq \dim V - 1$.

(3) V^* 非空, $\because$ 必有零映射 $0 \in V^*$, $0 : V \to F$, $v \mapsto 0$.

(4) 若 $\dim\operatorname{Im} f = 0$, 则 $\operatorname{Im} f = \{0\}$, f 为零映射.

(5) 若 $\dim\operatorname{Im} f = 1$, 则 $\operatorname{Im} f = \langle r\rangle$, 其中 $0 \neq r \in F \Longrightarrow \operatorname{Im} f = F$,
由反证法易证, 若 $v \in f^{-1}(r) = \{v \in V \mid f(v) = r\}$, 其中 $r \neq 0$, 则 $v \neq 0$, 且必有 $f(\langle v\rangle^c) = \{0\}$.

证明一下 (5) 的末句:

证: 假设 $\exists u \in \langle v\rangle^c$, s.t. $f(u) \neq 0$,
则有 $f\left(\frac{ru}{f(u)}\right) = r \Longrightarrow \frac{ru}{f(u)} \in f^{-1}(r) \Longrightarrow f^{-1} = \langle v\rangle \oplus \langle u\rangle$,
又 $\because u \in \langle v\rangle^c$, $\therefore \dim f^{-1} \geq 2$, 这与 $f^{-1} \subseteq (\ker f)^c$, $\dim(\ker f)^c = \dim \operatorname{Im} f \leq 1$ 矛盾,
故假设错误, $\forall u \in \langle v\rangle^c$, $f(u) = 0 \Longrightarrow f(\langle v\rangle^c) = \{0\}$. $\square$

定理 3.5 (课本定理3.11): (1) 若 $0 \neq v \in V$, $\exists 0 \neq f \in V^*$, s.t. $f(v) \neq 0$.

(2) $v = 0 \Longleftrightarrow \forall f \in V^*$, $f(v) = 0$.

(3) $f \in V^*$, 若 $f(x) \neq 0$, 则 $V = \ker f \oplus \langle x\rangle$, 即 $\operatorname{Im} f \approx \langle x\rangle$.

(4) $0 \neq f, g \in V^*$, $\ker f = \ker g \Longleftrightarrow \exists 0 \neq \lambda \in F$, s.t. $f = \lambda g$.

证: (1) $v \neq 0$, 则 $V = \langle v\rangle \oplus \langle v\rangle^c$, 其中 $\langle v\rangle = \{rv \mid r \in F\}$.
令 $f: V \to F$, $rv + w \mapsto r$, 其中 $rv \in \langle v\rangle$, $w \in \langle v\rangle^c$, 故 $f(v) = 1$, $f \in V^*$.
我们来验证一下: $\forall u_1, u_2 \in V$, $r, t \in F$, u_1 和 u_2 可写成 $u_1 = r_1 v + w_2$, $u_2 = r_2 v + w_2$
$\Longrightarrow f(ru_1 + tu_2) = f(r(r_1 v + w_1) + t(r_2 v + w_2)) = f((rr_1 v + rw_1) + (tr_2 v + tw_2)) = rr_1 + tr_2 = rf(r_1 v + w_1) + tf(r_2 v + w_2) = rf(u_1) + tf(u_2)$.
故得证.

并且需要注意这里的 f 的构造不是唯一的: 我们可以构造 $f: V \to F$, $rv + u \mapsto rt$, 其中 $u \in \langle v\rangle^c$, 如此一来, $f(v) = t$.

(2) "$\Longrightarrow$": 若 $v = 0$, 则 $\forall u \in V$, $f(v) + f(u) = f(v + u) = f(u) \Longrightarrow f(v) = 0$.

"$\Longleftarrow$": 若 $\forall f \in V^*$, $f(v) = 0$, 则假设 $v \neq 0$, 则由 (1), $\exists v \in V^*$, s.t. $f(v) \neq 0$, 矛盾, 故假设错误, $v = 0$.

(3) $f(x) \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{Im} f \neq \{0\} \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f \neq 0 \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f \dim(\ker f)^c = 1 \Longrightarrow \dim \ker f = \dim V - \dim(\ker f)^c = \dim V - 1$
$\Longrightarrow \exists v \in V$, s.t. $V = \ker f \oplus (\ker f)^c = \langle v\rangle$,
又 $\because f(x) \neq 0$, $\therefore x \in \langle v\rangle \Longrightarrow \langle x\rangle = \langle w\rangle \Longrightarrow V = \ker f \oplus \langle x\rangle$, 故得证.

(4) "$\Longrightarrow$": 令 $K = \ker f = \ker g$.
$\because \ker f = \ker g$, $\forall x \notin K$, 由 (3) 有, $V = \langle x\rangle \oplus K$.
取 $\lambda = \frac{f(x)}{g(x)}$ 即得.
"$\Longrightarrow$": 若 $\exists \lambda \neq 0$, $f = \lambda g$, 则显然 $\ker f = \ker g$.

$\square$

定义 3.3 对偶基: $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ 为 V 的基, 则 $\forall i$, $\exists b_i^* \in V$, s.t. $b_i^*(b_i) = 1$, 对 $j \neq i$, $b_i^*(b_j) = 0$, 即 $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$, 从而可以构造出 $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\} \subseteq V^*$, 称为 $\mathcal{B}$ 的**对偶基**.

定理 3.6 (课本定理3.12): (1) $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ 线性无关.

(2) $\dim V < \infty$, 则 $\mathcal{B}^*$ 是 V^* 的基.

证: (1) $\sum_{i=1}^m r_i b_i^* = 0 \Longrightarrow \forall v \in V$, $\left(\sum_{i=1}^m r_i b_i^*\right)(v) = 0(v) = 0$
$\Longrightarrow \sum_{i=1}^m r_i b_i^*(v) = 0$

取 $v=b_j$, 则 $\sum_{i=1}^{m} r_i b_i^*(b_j)=\sum_{i=1}^{m} r_i\delta_{ij}=r_j=0$,
对各个 b_j 如法炮制, 从而得到 $r_j=0\forall i$, 故得证.

(2) $\forall f\in V^*, \forall v\in V, \because \mathcal{B}$ 是 V 的基, $\therefore v=\sum_{i=1}^{n} r_i b_i$
$\Longrightarrow b_j^*(v)=b_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right)=\sum_{i=1}^{n} r_i b_j^*(b_i)=\sum_{i=1}^{n} r_i\delta_{ij}=r_j$
回代得 $v=\sum_{i=1}^{n} b_i^*(v)b_i$
$\Longrightarrow f(v)=f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^*(v)b_i\right)=\sum_{i=1}^{n} b_i^*(v)f(b_i)=\sum_{i=1}^{n} f(b_i)b_i^*(v)=\left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)b_i^*\right)(v)$, 这里 $b_i^*(v), f(b_i)\in F$,
因此可以交换位置, 我们可视 $\{b_i^*(v)\}$ 为基, $f(b_i)$ 为 $f(v)$ 在这组基上的展开系数
$\Longrightarrow f=\sum_{i=1}^{n} f(b_i)b_i^*$, 即 f 可展开为 $\{\mathcal{B}^*\}$ 的线性表示, 结合 (1) 得证.

□

按照类似上面的方法, $\forall v\in V$, 我们都可构造 $v^*\in V^*$, s.t. $\forall u_1\in\langle v\rangle$, $v^*(u)=1$, $\forall u_2\in\langle v\rangle^c$, $v^*(u_2)=0$,
从而有映射 $V\to V^*$, $v\mapsto v^*$, $0\mapsto 0$ (零映射).
V^* 本身也是向量空间.

定义 3.4 二重对偶(空间): $V^{**}=\mathcal{L}(V^*,F)$ 称为**二重对偶(空间)**, 其中的元素为 $v^{**}: V^*\to F$, $f\to f(v)$.

$V\to V^*\to V^{**}$, $v\mapsto v^*\mapsto v^{**}$, $b_i\mapsto b_i^*\mapsto b_i^{**}$, 满足 $b_i^*(b_j)=\delta_{ij}$, $b_i^{**}(b_j^*)=b_j^*(b_i)$, 两个映射复合得 $\tau: V\to V^{**}$, $v\mapsto v^{**}$.

(1) τ 是映射.

(2) τ 是线性变换.

(3) $\ker\tau=\{v\in V\mid \tau(v)=0\}=\{0\}\Longleftrightarrow\tau$ 单射.

证: (1) 若 $u=v$, 则 $\forall f\in V^*$, $u^{**}(f)=f(u)=f(v)=v^{**}(v)$, 即得证.

(2) $\tau(ru+tv)=(ru+tv)^{**}$,
$\forall f\in V^*$, $(ru+tv)^{**}(f)=f(ru+tv)=rf(u)+tf(v)=ru^{**}(f)+tv^{**}(f)=r\tau(u)(f)+t\tau(v)(f)\Longrightarrow$ $\tau(ru+tv)=r\tau(u)+t\tau(v)$,
结合 (1) 即得证.

(3) $\tau(v)=0\Longrightarrow\forall f\in V^*$, $v^{**}(f)=0\Longrightarrow f(v)=0\Longrightarrow$(定理 3.5 (1)) $v=0$, 即得证.

□

引理 3.1 (课本引理3.13): 若 $\dim V=n<\infty$, 则 $\dim V^*=\dim V^{**}=n$, V^{**} 与 V 同构, 一个线性空间的二重对偶就回到自身, 所以实际上套娃式的 $V^{*\cdots *}$ 是没有意义的, 这里我们就写成 $V^{**}=V$.

定义 3.5 算子伴随: 由线性变换 τ 可引出**算子伴随** $\tau^{\times}: W^*\to V^*$, $g\mapsto g\circ\tau$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\tau^{\times} = g \circ \tau"'] & & W \arrow[dl, "g"] \\
& F &
\end{tikzcd}
$$

(1) $\tau^{\times}$ 是映射.

(2) $\tau^{\times}$ 是线性的.

证: (1) 若 $f = g \in W^{*}$, $v^{*}* \in \tau^{\times}$, 则 $\tau^{\times}(f) = f \circ \tau = g \circ \tau = \tau^{\times}(g)$, 故得证.

(2) $\tau^{\times}(rg_1 + tg_2) = (rg_1 + tg_2) \circ \tau = rg_1 \circ \tau + tg_2 \circ \tau = r\tau^{\times}(g_1) + t\tau^{\times}(g_2)$, 故得证.

□

定理 3.7 (课本定理3.18): (1) $\tau . \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $a, b \in F$, 则 $(a\tau + b\sigma)^{*} = a\tau^{\times} + b\sigma^{*}$, 即求和与算子伴随可交换.

(2) $\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $\tau \in \mathcal{L}(W, U)$, 则 $(\tau \circ \sigma)^{*} = \sigma^{*} \circ \tau^{\times}$.

(3) $\tau \in \mathcal{L}(V)$ 可逆 $\Longrightarrow (\tau^{-1})^{*} = (\tau^{\times})^{-1}$.

证: (1) $\forall f \in W^{*}$, $(a\tau + b\sigma)^{*}(f) = f \circ (a\tau + b\sigma) = af \circ \tau + bf \circ \sigma = a\tau^{\times}(f) + b\tau^{\times}(f)$, 即得证.

(2) $\forall f \in V^{*}$, $(\tau \circ \sigma)^{*}(f) = f \circ (t \circ \sigma) = f \circ (\tau \circ \sigma) = (f \circ \tau) \circ \sigma = \sigma^{*}(f \circ \tau) = \sigma^{*}(\tau^{\times}(f)) = (\sigma^{*} \circ \tau^{\times}(f)) = (\sigma^{*} \circ \tau^{\times})(f) \Longrightarrow (\tau \circ \sigma)^{*} = \sigma^{*} \circ \tau^{\times}$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tau \circ \sigma"'] & & W \arrow[dl, "\tau"] \\
& U &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V^{*} & & W^{*} \arrow[ll, "\sigma^{*}"'] \\
& U^{*} \arrow[ul, "(\tau \circ \sigma)^{*} = \sigma^{*} \circ \tau^{\times}?"] \arrow[ur, "\tau^{\times}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(3) $1^{*} = (\tau \circ \tau^{-1})^{*} = (\tau^{-1})^{*} \circ \tau^{\times} \Longrightarrow (\tau^{-1})^{*} = (\tau^{\times})^{-1}$.

□

定理 3.8 (课本定理3.18): $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, $\tau^{\times} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\tau^{**} \in \mathcal{L}(V^{**}, W^{**}) = \mathcal{L}(V, W)$, 则 $\tau^{**} = \tau$.

定理 3.9 (课本定理3.22): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 其中 $\dim V < \infty$, $\dim W < \infty$, $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别是 V 和 W 的定序基, $\mathcal{B}^*$ 和 $\mathcal{C}^*$ 分别是 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的对偶基, 则 $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^\times} = ([\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^T$.

证: 设 $\dim V = n$, $\dim W = m$, V 的定序基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, W 的定序基 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_m\}$, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ 的矩阵表示为 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$, $\tau^\times \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ 的矩阵表示为 $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = [\beta_{ij}]_{n\times m}$,

即 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$, 令 $[\tau(b_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$, $\tau(b_i) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} c_k$.

$[\tau^*]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} [\tau^*(c_1^*)]_{\mathcal{B}^*} & \vdots & [\tau^*(c_n)] \end{pmatrix}$, 其中 $[\tau^*(c_i^*)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{pmatrix}$, $\tau^*(c_i^*) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*$.

又 $\because \tau^*(c_i^*) = c_i^* \circ \tau$, 我们将这一复合函数作用在 b_j 上有 $(c_i^* \circ \tau)(b_j) = \left(\sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*\right)(b_j) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*(b_j) = \beta_{ji}$ $\Longrightarrow \beta_{ji} = c_i^*(\tau(b_j))$, 代入上面的 $\tau(b_j)$ 的展开式得 $\beta_{ji} = c_i^*\left(\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_k\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_i^*(c_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}$, 故得证. $\square$