

# Chapter 1

## 向量空间

### 1.1 向量空间

**定义 1.1 向量空间:** 交换群  $(V, +)$  和域  $F$ , 数乘映射  $\alpha: F \times V \rightarrow V$ , 若满足

$$\alpha(r, u + v) = \alpha(r, u) + \alpha(r, v) \text{ (可简写为 } r(u + v) = ru + rv),$$

$$(2) \alpha(r + t, u) = \alpha(r, u) + \alpha(t, u) \text{ (可简写为 } (r + t)u = ru + tu),$$

$$(3) \alpha(r \cdot t, u) = \alpha(r, \alpha(t, u)) \text{ (可简写为 } (rt)u = r(tu)),$$

$$(4) \text{ 有单位元: } \exists 1 \in F, \text{ s.t. } \alpha(1, u) = u \text{ (可简写为 } 1u = u),$$

则称  $V$  是  $F$  上的向量空间.

**例 1.1 直角坐标系:**  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  为域,  $(\mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, +)$  为交换群, 满足

$$(1) r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2),$$

$$(2) (r + t)(x, y) = ((r + t)x, (r + t)y) = (rx + tx, ry + ty) = (rx, ry) + (tx, ty) = r(x, y) + t(x, y),$$

$$(3) (rt)(x, y) = (rtx, rty) = r(tx, ty) = r(t(x, y)),$$

$$(4) 1(x, y) = (x, y),$$

故  $\mathbb{R}^2$  为  $\mathbb{R}$  上的向量空间. □

$0v = 0$ . (注意两个 0 的区别, 等号左边的 0 为域  $F$  中的零元, 等号右边的 0 为  $V$  中的零向量.)

**证:**  $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \implies 0v = 0$ . □

$r \in F, 0 \in V$ , 则  $r0 = 0$ .

**证:**  $r0 = r(0 + 0) = r0 + r0 \implies r0 = 0$ . □

$-1v = -v$ .

**证:**  $-1v = -(1v) = -v$ . □

**例 1.2:**  $\mathbb{R}^2$  为  $\mathbb{R}$  上的向量空间.

$\mathbb{R}^2$  为  $\mathbb{Q}$  上的向量空间.

$\therefore$  对  $c \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{R}^2, cv \notin \mathbb{R}^2, \therefore \mathbb{R}^2$  不是  $\mathbb{C}$  上的向量空间. □

**例 1.3:**  $F^n \equiv \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F\}$ , 满足  $(r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n) = (r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n)$ ,  $r(r_1, \dots, r_n) = (rr_1, \dots, rr_n)$ , 故  $F^n$  为  $F$  上的向量空间.  $\square$

**证:**  $\because r((r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n)) = r(r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n) = (rr_1 + rl_1, \dots, rr_n + rl_n) = (rr_1, \dots, rr_n) + (rl_1, \dots, rl_n) = r(r_1, \dots, r_n) + r(l_1, \dots, l_n)$ ,

且  $(r+t)(r_1, \dots, r_n) = ((r+t)r_1, \dots, (r+t)r_n) = (rr_1 + tr_1, \dots, rr_n + tr_n) = (rr_1, \dots, rr_n) + (tr_1, \dots, tr_n) = r(r_1, \dots, r_n) + t(r_1, \dots, r_n)$ ,

且  $(r \cdot t)(r_1, \dots, r_n) = (rtr_1, \dots, rtr_n) = r(tr_1, \dots, tr_n) = r(t(r_1, \dots, r_n))$ ,

且  $1(r_1, \dots, r_n) = (r_1, \dots, r_n)$ ,

$\therefore F^n$  为  $F$  上的向量空间.  $\square$

## 1.2 子空间

**定义 1.2 子空间:**  $\emptyset \neq S \subseteq V$ , 若  $S$  为  $V$  的子群, 且在相同的数乘下构成  $F$  上的向量空间, 则称  $S$  是  $V$  的子空间.

**定理 1.1 子空间的判定(课本定理1.1):**  $S$  为  $V$  的子空间  $\iff \forall a, b \in S, \forall r, t \in F, ra + tb \in S$  (即线性运算封闭).

**证:** “ $\implies$ ”:  $\because ra \in S, -tb \in S$  且  $S$  为  $V$  的子群,  $\therefore ra - (-tb) = ra + tb \in S$ .

“ $\impliedby$ ”: 令  $r = 1, t = -1$ , 有  $a - b \in S \implies S < V$ .

令  $t = 0$ , 有  $ra \in S$ , 故  $S$  为  $V$  的子空间.

综上, 得证.  $\square$

子空间的交是子空间.

**证:** 设  $S_1, \dots, S_n$  为  $V$  的子空间, 则  $S_1, \dots, S_n$  为  $V$  的子群  $\implies \cap_{i=1}^n S_i$  为  $V$  的子群.

$\forall u, v \in \cap_{i=1}^n S_i, \forall k, u, v \in S_k \implies u, v$  满足与  $F$  中向量相同的数乘映射.

综上, 得证.  $\square$

若  $S, T$  是  $V$  的子空间, 则  $S + T \equiv \{u + v \mid u \in S, v \in T\}$  为  $V$  的子空间.

**证:**  $\forall w_1, w_2 \in S + T, r, t \in F$ ,

$w_1 \in S + T \implies w_1 = u_1 + v_1, u_1 \in S, v_1 \in T$ ,

$w_2 \in S + T \implies w_2 = u_2 + v_2, u_2 \in S, v_2 \in T$

$\implies rw_1 + tw_2 = r(u_1 + v_1) + t(u_2 + v_2) = (ru_1 + tu_2) + (rv_1 + tv_2)$ , 其中  $ru_1 + tu_2 \in S, rv_1 + tv_2 \in T \implies rw_1 + tw_2 \in S + T$ , 故  $S + T$  为  $V$  的子空间.  $\square$

## 1.3 生成集和线性无关

**定义 1.3 生成子空间和生成集:**  $\emptyset \neq S \subseteq V$ ,  $S$  的生成子空间  $\langle S \rangle \equiv$  包含  $S$  的最小子空间  $= \{\sum_{i=1}^n r_i u_i \mid r_i \in F, u_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$  其中称  $S$  为生成集.

例 1.4: 向量空间  $\mathbb{R}^2$  中,

$$S_x = \langle \{(1, 0)\} \rangle = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = x \text{ 轴},$$

$$S_y = \langle \{(0, 1)\} \rangle = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = y \text{ 轴},$$

$$\langle \{(1, 0), (0, 1)\} \rangle = \langle \{(1, 1), (1, -1)\} \rangle = \mathbb{R}^2, \text{ 故对同一生成子空间, 生成集不唯一.}$$

□

**定义 1.4 线性无关:** 非零元  $u_1, \dots, u_m$ , 若  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0 \implies r_1 = \dots = r_m = 0$ , 则称  $u_1, \dots, u_m$  线性无关.

若  $S$  中任意有限个元素线性无关, 则称  $S$  线性无关.

例 1.5:  $(1, 0)$  与  $(0, 1)$  线性无关.

□

$$\text{证: } r_1(1, 0) + r_2(0, 1) = (r_1, r_2) = 0 = (0, 0) \implies r_1 = 0, r_2 = 0.$$

□

例 1.6:  $\mathbb{R}^2$  上线性无关, 即两非零元夹角非零.

□

单个非零元  $v$  线性无关.

证:  $rv = 0$  且  $v \neq 0 \implies r = 0$ , 故  $v$  线性无关.

□

**定义 1.5 线性相关:**  $u_1, \dots, u_m$ , 若  $\exists$  不全为零的  $r_1, \dots, r_m$ , s.t.  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$ , 则称  $u_1, \dots, u_m$  线性相关.

若  $u, v$  线性相关, 则两者共线.

证:  $\because u, v$  线性无关,  $\therefore \exists r, t$  不全为零, s.t.  $ru + tv = 0 \implies ru = -tv$ .

不妨设  $0 \neq r \in F$ , 则  $ru = -tv \implies u = r^{-1}ru = -r^{-1}tv = -\frac{t}{r}v$

□

**定义 1.6 线性表示:**  $v$  可由  $u_1, \dots, u_n$  线性表示  $\iff \exists r_1, \dots, r_n \in F$ , s.t.  $v = \sum_{i=1}^n r_i u_i$ .

**定理 1.2 (课本定理1.6):**  $S$  线性无关  $\iff \langle S \rangle$  中的每个向量可由  $S$  中元素唯一地线性表示

$\iff S$  中任一向量不能由  $S$  中其余向量线性表示.

证: 设  $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ .

第一个 “ $\implies$ ”:  $v \in \langle S \rangle$ , 则  $v$  可由  $S$  中的元素线性表示, 即  $\exists r_1, \dots, r_m$ , s.t.  $v = r_1 u_1 + \dots + r_m u_m$ .

要证这种线性表示是唯一的, 假设  $v$  的另一种线性表示为  $v = r'_1 u_1 + \dots + r'_m u_m$ .

$v - v = (r_1 - r'_1)u_1 + \dots + (r_m - r'_m)u_m = 0$ , 又  $\because S$  线性无关, 即  $u_1, \dots, u_m$  线性无关,  $\therefore r_1 - r'_1 = \dots = r_m - r'_m = 0 \implies r'_1 = r_1, \dots, r'_m = r_m$ , 故两种线性表示相同.

第一个 “ $\impliedby$ ”:  $0 \in \langle S \rangle$ ,  $\because 0 = 0u_1 + \dots + 0u_m$  是且是  $0$  唯一的线性表示,  $\therefore S$  线性无关.

第二个 “ $\implies$ ”: 不妨假设  $u_1$  可由  $u_2, \dots, u_m$  线性表示, 即  $u_1 = t_2 u_2 + \dots + t_m u_m$ .

若  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$ , 则  $r_1 = \dots = r_m = 0$  或  $r_1 \neq 0, r_2 = -r_1 t_2, \dots, r_m = -r_1 t_m$ , 从而  $S$  线性相关, 矛盾, 故假设错误,  $u_1$  不可由  $u_2, \dots, u_m$  线性表示.

第二个 “ $\impliedby$ ”: 假设  $S$  线性相关, 则  $\exists$  不全为零的  $r_1, \dots, r_m$ , s.t.  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$ , 不妨设  $r_1$  非零, 则  $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 - \dots - \frac{r_m}{r_1} u_m$ , 即  $u_1$  可由  $S$  中其余向量线性表示, 矛盾, 故假设错误,  $S$  线性无关.

□

**定理 1.3 (课本定理1.7):**  $\emptyset \neq S \subseteq V$ , 下列等价:

- (1)  $S$  线性无关, 且  $V = \langle S \rangle$ .
- (2)  $\forall v \in V$ , 可用  $S$  中元素唯一地线性表示.
- (3)  $S$  是  $V$  的极小生成集 (即  $S$  去除任意元素都无法生成  $V$ , 或  $S$  的任意真子集都无法生成  $V$ ).
- (4)  $S$  是  $V$  的极大线性无关集 (即  $S$  增加任意元素都线性相关,  $\forall u \in V$  且  $u \notin S$ ,  $S \cup \{u\}$  线性相关).

**证:** 由定理 1.2 证得 (1)(2) 等价.

设  $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ .

(1) $\implies$ (3): 假设  $\exists S' \subsetneq S$ , s.t.  $V = \langle S' \rangle$ , 则  $\forall v \in S - S' \subseteq V$ ,  $v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$ , 其中  $r_i \in F$ ,  $u_i \in S'$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , 即  $v$  可由  $S$  中的部分向量线性表示, 与  $S$  线性无关矛盾, 故假设错误,  $S$  是  $V$  的极小生成集.

(3) $\implies$ (1):  $S$  为  $V$  的生成集, 即  $V = \langle S \rangle$ .

假设  $S$  线性相关, 即  $\exists r_1, \dots, r_m$  不全为零, s.t.  $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$ , 不妨设  $r_1 \neq 0$ , 则  $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 + \dots + \frac{r_m}{r_1} u_m$ , 则  $S - \{u_1\}$  仍可以生成  $V$ , 矛盾, 故假设错误,  $S$  线性无关.

(1) $\implies$ (4): 假设  $S$  不是极大线性无关集, 则  $\exists v \in V \setminus \langle S \rangle$ , s.t.  $S \cup \{v\}$  线性无关.

又  $\because V = \langle S \rangle$ ,  $\therefore v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$ , 其中  $r_i \in F$ ,  $u_i \in S$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , 即线性无关集  $S \cup \{v\}$  中的向量  $v$  可由其中的部分向量线性表示, 与  $S \cup \{v\}$  线性无关矛盾, 故假设错误,  $S$  是极大线性无关集.

(4) $\implies$ (1):  $\because S$  是  $V$  的极大线性无关集,  $\therefore S$  线性无关.

假设  $V \neq \langle S \rangle$ ,  $\exists v \in V \setminus \langle S \rangle$ , s.t.  $v$  无法由  $S$  中的元素线性表示  $\implies S \cup \{v\}$  为线性无关集, 与  $S$  为最大线性无关集矛盾, 故假设错误,  $V = \langle S \rangle$ .

综上, 得证. □

**定义 1.7 基:** 任何生成向量空间  $V$  的线性无关集. 基的阶数称为  $V$  的维数, 记作  $\dim V$ .

**定理 1.4 (课本定理1.12):** 向量空间的任何基都有相同的阶, 即  $\dim V$  不依赖于基的选取.

**例 1.7:**  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$  为  $F^n$  的一组基. □

**证:**  $r_1 e_1 + \dots + r_n e_n = (r_1, \dots, r_n) = 0 \implies r_1 = \dots = r_n = 0$ , 故  $e_1, \dots, e_n$  线性无关.

又  $\langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle = \{r_1 e_1 + \dots + r_n e_n = (r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F, \text{ 其中 } i = 1, \dots, n\} = F$ , 故得证. □

**找基的方法:**

- (1) 若  $0 \neq u_1 \in V$ , 则  $\{u_1\}$  线性无关.
- (2) 若  $u_2 \in V \setminus \langle u_1 \rangle$  且  $u_2$  与  $u_1$  线性无关, 则  $\{u_1, u_2\}$  线性无关.
- (3) 重复以上操作, 直至无法找到新的线性无关元素, 即得到极大线性无关集, 此即向量空间的基.

**定理 1.5 (课本定理1.9):** 线性无关集  $I \subseteq V$ ,  $S$  是  $V$  的生成集, 且  $I \subseteq S$ , 则  $\exists V$  的基  $\mathcal{B}$ , s.t.  $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$ .

## 1.4 直和

**定义 1.8 直和:** (1) **外直和:** 若  $V_1, \dots, V_n$  是  $F$  上的向量空间,  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n \equiv \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$ , 满足

$$\begin{aligned} - (v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) &= (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n), \\ - r(v_1, \dots, v_n) &= (rv_1, \dots, rv_n), \end{aligned}$$

则  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  为  $F$  的向量空间,  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  为  $V_1, \dots, V_n$  的**外直和**.

(2) **内直和:**  $V$  是  $F$  上的向量空间,  $V_1, \dots, V_n$  是  $V$  的子空间, 若  $V = \sum_{i=1}^n V_i$ , 其中  $v_i \in V_i$  且  $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ , 则称  $V$  为  $V_1, \dots, V_n$  的**内直和**, 记作  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ , 称  $V_i$  为**直和项**.

**内/外直和的关系:**  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ ,  $V'_1 = \{(v_1, 0, \dots, 0) \mid v_i \in V_i\}, \dots, V'_n = \{(0, 0, \dots, v_n) \mid v_m \in V_m\}$  是  $V$  的子空间, 则  $V = \sum_{i=1}^n V'_i$  且  $V'_i \cap (\cup_{j \neq i} V'_j) = \{0\} \implies V_i = \bigoplus_{i=1}^n V'_i$ , 故内/外直和是等价的, 以下我们不明确区分内/外直和, 均用内直和.

**例 1.8:**  $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y$ . □

**定理 1.6 (课本定理1.5):**  $\{V_i \mid i \in J\}$  是  $V$  的子空间集合,  $V = \sum_{i \in J} V_i$ , 则下列等价:

- (1)  $V = \bigoplus_{i \in J} V_i$ .
- (2)  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .
- (3)  $0 = 0 + \dots + 0$  是  $0$  的唯一分解式.
- (4)  $V$  中任一向量  $v$  具有唯一分解式  $v = v_1 + \dots + v_n$ , 分解式中的有限个非零元  $v_i \in V_i$  组成的集合称为**支集**.

**证:** (1) $\iff$ (2): 由直积的定义即得证.

(2) $\implies$ (3): 假设  $0 = s_{i1} + \dots + s_{in}$  且  $s_{ij}$  不全为零, 不妨设  $s_{i1} \neq 0$ , 则  $V_{i1} \ni s_{i1} = -s_{i2} - \dots - s_{in} \in \sum_{j=2}^n V_{ij} \implies s_{i1} \in V_{i1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{ij})$ ,  $s_{i1} \neq 0$  与  $V_{i1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{ij}) = \{0\}$  矛盾, 故假设错误,  $0 = 0 + \dots + 0$  是  $0$  的唯一分解式.

(3) $\implies$ (4):  $\forall v \in V, v = u_1 + \dots + u_n$ , 其中  $u_i \in V_i$ .

假设  $v = w_1 + \dots + w_m$ , 其中  $w_i \in V_i$ .

$0 = v - v = u_1 + \dots + u_n - w_1 - \dots - w_m$ , 将属于相同子空间的元素合并到一起, 得  $0 = (u_{t_1} - w_{t_1}) + \dots + (u_{t_k} - w_{t_k}) + \dots + (u_{t_n} - w_{t_n})$ , 由 (2) 知  $u_{t_i} = w_{t_i}$ , 故  $v$  具有唯一分解式  $v = v_1 + \dots + v_n$ .

(4) $\implies$ (2): 假设  $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$ , 则  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \supsetneq \{0\}$ , 即  $\exists 0 \neq u \in V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j)$ ,

不妨设  $u \in V_1$  且  $u \in V_2$ , 则  $v = v_1 + \dots + v_n = (v_1 + u) + (v_2 - u) + \dots + v_n$ , 其中  $v_i \in V_i$  且  $v_1 + u \in V_1$ ,  $v_2 - u \in V_2$ ,  $v$  的分解式不唯一, 矛盾, 故假设错误,  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .

综上, 得证. □

**定理 1.7 (课本定理1.8):**  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  是向量空间  $V$  的基  $\iff V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$ .

**证:** “ $\implies$ ”:  $\because \mathcal{B}$  为  $V$  的基,  $\therefore V = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F\} = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$ .

$\because \mathcal{B}$  为  $V$  的基,  $\therefore v_1, \dots, v_n$  线性无关  $\implies \forall 0 \neq u \in \langle v_i \rangle, u = r_i v_i$  且无法由  $\{v_j \mid j \neq i\}$  线性表示  $\implies u \notin V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j)$ .

又  $\because 0 = 0v_i \in \langle v_i \rangle$  且  $0 = \sum_{j \neq i} 0v_j \implies 0 \in V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j)$ ,  $\therefore V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .

故  $V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$ .

“ $\Leftarrow$ ”: 一方面,  $V = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_n \rangle = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$ ;

另一方面, 假设  $\{v_1, \cdots, v_n\}$  线性相关, 则  $\exists$  不全为零的  $r_1, \cdots, r_n$ , s.t.  $\sum_i r_i v_i = 0$ ,

不妨设  $r_i \neq 0$ , 则  $r_i v_i = -\sum_{j \neq i} r_j v_j \Rightarrow 0 \neq r_i v_i \in V_i$  且  $r_i v_i = -\sum_{j \neq i} r_j v_j \in \cup_{j \neq i} V_j \Rightarrow r_i v_i \in V_0 \cap (\cup_{j \neq i} V_j) \Rightarrow V_0 \cap (\cup_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$ , 与直和的定义矛盾, 故假设错误,  $\{v_1, \cdots, v_n\}$  线性无关.

故  $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$  是  $V$  的基.

综上, 得证. □

**定理 1.8 (课本定理1.4):**  $S$  为  $V$  的子空间, 则  $\exists V$  的子空间  $S^c$ , s.t.  $V = S \oplus S^c$ , 称  $S^c$  为  $S$  的补空间.

证:  $\mathcal{B}_1$  为  $S$  的基, 则  $\mathcal{B}_1$  为  $V$  中的线性无关集.

$\mathcal{B}_1$  总可以扩张 (即添加一些元素) 成  $V$  的基, 即  $\exists \mathcal{B}_2$ , s.t.  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ ,  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  线性无关且  $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Rightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ , 故  $S^c = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ . □

例 1.9:  $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y = S_l \oplus S_{l'}$ , 其中  $S_l$  和  $S_{l'}$  分别为过原点、不共线的直线  $l$  和  $l'$ . □

补空间总存在, 但不唯一.

**定理 1.9 (课本定理1.13):** (1)  $\mathcal{B}$  是  $V$  的基, 若  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  且  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ , 则  $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ .

(2)  $V = S \oplus T$ , 若  $\mathcal{B}_1$  是  $S$  的基,  $\mathcal{B}_2$  是  $T$  的基, 则  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ ,  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  是  $V$  的基.

证: (1)  $\because \mathcal{B}$  是  $V$  的基,  $\therefore \forall u \in V$ ,  $u = \sum_{i=1}^k r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F$ ,  $v_i \in \mathcal{B}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_2, n \in \mathbb{N}\}$ .

$u = \sum_{i=1}^t r_i v_i + \sum_{i=t+1}^k r_i v_i$ , 其中  $v_1, \cdots, v_t \in \mathcal{B}_1$ ,  $v_{t+1}, \cdots, v_k \in \mathcal{B}_2 \Rightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ .

$\forall u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{B}_2 \rangle, u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \Rightarrow u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F$ ,  $v_i \in \mathcal{B}_1$ ,

且  $u \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Rightarrow u = \sum_{i=1}^n l_i w_i$ , 其中  $l_i \in F$ ,  $w_i \in \mathcal{B}_2$

$\Rightarrow 0 = u - u = \sum r_i v_i - \sum l_i w_i$ .

又  $\because \mathcal{B}$  为基,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  且  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ ,  $\therefore r_i, w_i$  线性无关  $\Rightarrow r_i = l_i = 0 \forall i \Rightarrow u = 0$ .

综上,  $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ .

(2)  $V = S \oplus T \iff V = S + T$  且  $S \cap T = \{0\}$ .

假设  $\exists 0 \neq v \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ , 则  $\langle v \rangle = S \cap T = \{0\} \Rightarrow v = 0$ , 矛盾, 故假设错误,  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ .

$\because V = S + T$ ,  $\therefore \forall u \in V$ ,  $u = u_1 + u_2$ , 其中  $u_1 \in S$ ,  $u_2 \in T$ .

$\because \mathcal{B}_1$  是  $S$  的基,  $\mathcal{B}_2$  是  $T$  的基,  $\therefore u_1 = \sum_{i=1}^k r_i v_i$ ,  $u_2 = \sum_{i=k+1}^n r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F$ , 对  $i = 1, \cdots, k$ ,  $v_i \in \mathcal{B}_1$ , 对  $i = k+1, \cdots, n$ ,  $v_i \in \mathcal{B}_2$

$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F$ ,  $v_i \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ , 即  $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle$ .

假设  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  线性相关, 则  $\exists r_i \in F$  不全为零,  $\sum_{i=1}^n r_i v_i = \sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$ , 其中  $r_i \in F$ , 对  $i = 1, \cdots, k$ ,  $v_i \in \mathcal{B}_1$ , 对  $i = k+1, \cdots, n$ ,  $v_i \in \mathcal{B}_2$ .

$\because \mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_2$  为基,  $\therefore \mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_2$  线性无关  $\Rightarrow \sum_{i=1}^k r_i v_i \neq 0$ ,  $\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \neq 0$ , 与  $0 = 0 + \cdots + 0$  是 0 的唯一分解式矛盾, 故假设错误,  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  线性无关  $\Rightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  是  $V$  的基.

综上, 得证. □

**定理 1.10 (课本定理1.14):**  $S, T$  为  $V$  的子空间,  $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$ .  
 特别地, 若  $T$  为  $S$  的补空间, 则  $\dim S + \dim T = \dim(S \oplus T)$ .

证: 设  $S \cap T$  的基为  $\mathcal{B}$ .

$\because S \cap T$  为  $S$  的子空间,  $\therefore$  可将  $\mathcal{B}$  扩张成  $S$  的基  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , 其中  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ .

$\because S \cap T$  为  $T$  的子空间,  $\therefore$  可将  $\mathcal{B}$  扩张成  $T$  的基  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ , 其中  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ .

接下来需要用到这样一个事实:  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  是  $S + T$  的基. 所以先来证明它:

证:  $\forall w \in S + T, w = u + v$ , 其中  $u \in S, v \in T \implies u \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle, v \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$ , 故  $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S + T$ .

不妨设  $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$ , 其中  $v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ .

设  $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{A}$ , 则  $\sum_{i=1}^k r_i v_i = -\sum_{i=k+1}^n r_i v_i$ .

令  $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i$ , 则  $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i \in \langle \mathcal{A} \rangle$  且  $x = -\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \implies x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$ .

$\because x \in \langle \mathcal{A} \rangle, \therefore x \in S$ .

又  $\because x \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle, \therefore x \in T \implies x \in S \cap T = \langle \mathcal{B} \rangle \implies x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle \implies x = \sum_{i=1}^k r_i v_i = -\sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$ .

又  $\because \mathcal{A}$  和  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  线性独立,  $\therefore r_i = 0 \forall i \implies \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  线性无关.

综上,  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  是  $S + T$  的基. □

故

$$\dim S + \dim T = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + \dim(S \cap T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

□