

## 目录

|          |                     |           |
|----------|---------------------|-----------|
| <b>0</b> | <b>代数学基础</b>        | <b>2</b>  |
| 0.1      | 常用符号                | 2         |
| 0.2      | 集合                  | 2         |
| 0.3      | 映射                  | 4         |
| 0.4      | 等价关系和等价类            | 8         |
| 0.5      | 群                   | 9         |
| 0.6      | 环                   | 14        |
| 0.7      | 域                   | 17        |
| <b>1</b> | <b>向量空间</b>         | <b>19</b> |
| <b>2</b> | <b>线性变换</b>         | <b>26</b> |
| 2.1      | 线性变换                | 26        |
| 2.2      | 表示                  | 29        |
| <b>3</b> | <b>同构定理</b>         | <b>34</b> |
| <b>4</b> | <b>模 I: 基本性质</b>    | <b>42</b> |
| <b>5</b> | <b>模 II: 自由与诺特模</b> | <b>46</b> |
| <b>6</b> | <b>主理想整环上的模</b>     | <b>49</b> |
| <b>7</b> | <b>线性算子的结构</b>      | <b>56</b> |
| <b>8</b> | <b>特征值和特征向量</b>     | <b>61</b> |
| 8.1      | 投影算子                | 66        |
| <b>9</b> | <b>实数和复数内积空间</b>    | <b>68</b> |
| 9.1      | 范数和距离               | 69        |
| 9.2      | 等距算子                | 70        |
| 9.3      | 正交性                 | 70        |
| 9.4      | Riesz 表示定理          | 74        |

# Chapter 0

## 代数学基础

### 0.1 常用符号

- $\forall$ : 对所有 (for all).
- $\exists$ : 存在 (there exists).
- $\exists!$ : 存在且唯一 (there exists exactly one).
- s.t.: 使得 (such that).
- $\mathbb{N}$ : 自然数.
- $\mathbb{Z}$ : 整数.
- $\mathbb{Q}$ : 有理数.
- $\mathbb{R}$ : 实数.
- $\mathbb{C}$ : 复数.

### 0.2 集合

定义 0.1 集合(Set): 略.

元素与集合之间的关系: 对元素  $a$  和集合  $S$ ,

- $a \in S$  或
- $a \notin S$ .

集合中元素之间的关系:  $\forall a, b \in S$ ,

- $a = b$  或
- $a \neq b$ .

集合与集合之间的关系: 对集合  $A, B$  和全集  $I$ ,

- (1) 交集:  $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ 且 } a \in B\}$ .
- (2) 并集:  $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ 或 } a \in B\}$ .
- (3) 差:  $B - A = \{a \mid a \in B \text{ 且 } a \notin A\}$ .
- (4) 补集:  $A' = I - A = \{a \mid a \in I \text{ 且 } a \notin A\}$ .
- (5) 包含:  $A \subseteq B$ , 称  $A$  包含于  $B$ , 或称  $B$  包含  $A$ , 或称  $B$  是  $A$  的子集  
 $\iff A \cup B = A \iff A \cup B = B$ .

证:  $A \subseteq B \implies A \cap B = A$ :  $\because A \subseteq B, \therefore \forall a \in A, a \in B \implies A \subseteq A \cap B$ .

$\forall a \in A \cup B$ , 由交集定义,  $a \in A \implies A \cap B \subseteq A$ .

故  $A \cap B = A$ .

$A \subseteq B \iff A \cap B = A$ :  $\because A \cap B = A, \therefore \forall a \in A, a \in B \implies A \subseteq B$ .

$A \subseteq B \implies A \cup B = B$ :  $\because A \subseteq B, \forall a \in A, a \in B, \therefore \forall a \in A \cup B, a \in B \implies A \cup B \subseteq B$ .

$\because A \subseteq B, \forall a \in A$ , 由并集定义,  $a \in A \cup B \implies B \subseteq A \cup B$ .

故  $A \cup B = B$ .

$A \subseteq B \iff A \cup B = B$ :  $\forall a \in A$ , 由并集定义,  $a \in A \cup B$ , 又  $\because A \cup B = B, \therefore a \in B \implies A \subseteq B$ .

综上, 得证. □

常用公式:

- (1)  $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$ .

证:  $\forall a \in A(\cup_i B_i) \iff a \in A \text{ 且 } a \in \cup_i B_i$

$\iff a \in A \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \in B_k$

$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A \cap B_k \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$

$\iff a \in \cup_i (A \cap B_i)$ , 故  $A \cap (\cup_i B_i) \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$ .

$\forall a \in \cup_i (A \cap B_i) \iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A \cap B_k$

$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A \text{ 且 } a \in B_k$

$\iff a \in A \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \in B_k$

$\iff a \in A \text{ 且 } a \in \cup_i B_i$

$\iff a \in A \cap (\cup_i B_i)$ , 故  $\cup_i (A \cap B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i)$ .

综上, 得证. □

- (2)  $A \cup (\cap_i B_i) = \cap_i (A \cup B_i)$ .

证:  $\forall a \in A \cup (\cap_i B_i) \iff a \in A \text{ 或 } a \in \cap_i B_i$

$\iff a \in A \text{ 或 } \forall i, \text{ s.t. } a \in B_i$

$\iff \forall i, a \in A \text{ 或 } a \in B_i$

$\iff \forall i, a \in A \cup B_i$

$\iff \cap_i (A \cup B_i)$ , 故  $A \cup (\cap_i B_i) \subseteq \cap_i (A \cup B_i)$ .

$\forall a \in \cap_i (A \cup B_i) \iff \forall i, a \in A \cup B_i$

$\iff \forall i, a \in A \text{ 或 } a \in B_i$

$\iff a \in A \text{ 或 } \forall i, a \in B_i$

$$\iff a \in A \text{ 或 } a \in \cup_i B_i$$

$$\iff a \in A \cap (\cup_i B_i), \text{ 故 } \cap_i (A \cup B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i).$$

综上, 得证. □

$$(3) (\cup_i A_i)' = \cap_i A_i'.$$

$$\text{证: } \forall a \in (\cup_i A_i)' \iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cup_i A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \forall i, a \notin A_i$$

$$\iff \forall i, a \in I \text{ 且 } a \notin A_i$$

$$\iff \forall i, a \in A_i'$$

$$\iff a \in \cap_i A_i', \text{ 故 } (\cup_i A_i)' \subseteq \cap_i A_i'.$$

$$\forall a \in \cap_i A_i' \iff \forall i, a \in I \text{ 且 } a \notin A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \forall i, a \notin A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cup_i A_i'$$

$$\iff a \in (\cup_i A_i)', \text{ 故 } \cap_i A_i' \subseteq (\cup_i A_i)'.$$

综上, 得证. □

$$(4) (\cap_i A_i)' = \cup_i A_i'.$$

$$\text{证: } \forall a \in (\cap_i A_i)' \iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cap_i A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \notin A_k$$

$$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in I \text{ 且 } a \notin A_k$$

$$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A_k'$$

$$\iff a \in \cup_i A_i', \text{ 故 } (\cap_i A_i)' \subseteq \cup_i A_i'.$$

$$\forall a \in \cup_i A_i' \iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A_k'$$

$$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in I \text{ 且 } a \notin A_k$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \notin A_k$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cap_i A_i$$

$$\iff a \in (\cap_i A_i)', \text{ 故 } \cup_i A_i' \subseteq (\cap_i A_i)'.$$

综上, 得证. □

## 0.3 映射

**定义 0.2 映射:**  $\forall a \in S_1, \exists! b \in S_2, \text{ s.t. } b = f(a)$ , 记作  $f : S_1 \rightarrow S_2, a \mapsto b$ , 其中称  $S_1$  为定义域,  $S_2$  为值域,  $b$  为  $a$  的像,  $a$  为  $b$  的原像.

**例 0.1 恒等映射:**  $1_S : S \rightarrow S, a \mapsto 1_S(a) = a$ . □

**定义 0.3 映射相等:** 映射  $f : S_1 \rightarrow S_2, g : S_1 \rightarrow S_3, \forall a \in S_1, f(a) = g(a)$ , 则称  $f$  与  $g$  相等, 记作  $f = g$ .

$$\forall a \in S_1, \{f(a)\} \subseteq S_2 \text{ 且 } |\{f(a)\}| = 1.$$

**定义 0.4 原像集:**  $f^{-1}(b) \equiv \{a \in S_1 \mid f(a) = b\}$ .

$f^{-1}(b) \subseteq S_1$ ,  $f^{-1}(b)$  可能  $= \emptyset$ .

**定义 0.5 像集:**  $\text{Im } f = f(S_1) \equiv \{b \in S_2 \mid b = f(a) \forall a \in S_1\}$ .

$\text{Im } f \subseteq S_2$ .

**基本性质:**

$$(1) A \subseteq S_1 \implies A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

**证:**  $\forall a \in A$ ,  $\because A \subseteq S_1$ ,  $\therefore a \in S_1$ .

又  $\because f(a) \in f(A)$ ,  $\therefore a \in f^{-1}(f(A))$ , 故  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ . □

若  $\exists a \in S_1 - A$ , s.t.  $f(a) \in f(A)$ , 则  $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$ .

$$(2) B \subseteq S_2 \implies B \supseteq f(f^{-1}(B)).$$

**证:**  $\because f^{-1}(B) = \{a \in S_1 \mid f(a) \in B\}$ ,  $\therefore \forall a \in f^{-1}(B)$ ,  $f(a) \in B \implies f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ . □

若  $\exists b \in B$ , s.t.  $\forall a \in S_1$ ,  $f(a) \neq b$  (即  $B$  中有元素在  $S_1$  中无原像), 则  $B \supsetneq f(f^{-1}(B))$ .

若  $\forall b \in B$ ,  $\exists a \in A$ , s.t.  $f(a) = b$ , 则  $B = f(f^{-1}(B))$ .

$$(3) f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i).$$

**证:**  $\forall a \in f^{-1}(\cup_i B_i)$ ,  $\exists k$ , s.t.  $f(a) \in B_k$

$\iff \exists k$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_k)$

$\iff a \in \cup_i f^{-1}(B_i)$ , 故  $f^{-1}(\cup_i B_i) \subseteq \cup_i f^{-1}(B_i)$ .

$\forall a \in \cup_i f^{-1}(B_i)$ ,  $\exists k$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_k)$

$\iff \exists k$ , s.t.  $f(a) \in B_k$

$\iff f(a) \in \cup_i B_i$

$\iff a \in f^{-1}(\cup_i B_i)$ , 故  $\cup_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cup_i B_i)$ .

综上, 得证. □

$$(4) f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i).$$

**证:**  $\forall a \in f^{-1}(\cap_i B_i)$ ,  $\exists k$ , s.t.  $f(a) \in B_k$

$\iff \exists k$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_k)$

$\iff a \in \cap_i f^{-1}(B_i)$ , 故  $f^{-1}(\cap_i B_i) \subseteq \cap_i f^{-1}(B_i)$ .

$\forall a \in \cap_i f^{-1}(B_i)$ ,  $\forall i$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_i)$

$\iff \forall i$ , s.t.  $f(a) \in B_i$

$\iff f(a) \in \cap_i B_i$

$\iff a \in f^{-1}(\cap_i B_i)$ , 故  $\cap_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cap_i B_i)$ .

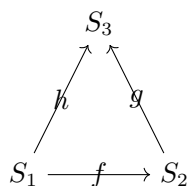
综上, 得证. □

**定义 0.6 映射的复合:** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2, g: S_2 \rightarrow S_3$ , 则称映射  $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3, a \mapsto g \circ f(a) \equiv g(f(a))$  为  $f$  和  $g$  的复合.

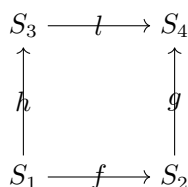
**定理 0.1 映射复合的结合律:**  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

故连续复合  $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$  无需括号.

**定义 0.7 交换图:**  $f: S_1 \rightarrow S_2, h: S_1 \rightarrow S_3, g: S_2 \rightarrow S_3$ , 若  $g \circ f = h$ , 则称该图交换.



$f: S_1 \rightarrow S_2, g: S_2 \rightarrow S_4, h: S_1 \rightarrow S_3, l: S_3 \rightarrow S_4$ , 若  $g \circ f = l \circ h$ , 则称该图交换.



**定义 0.8 单射(Injective 或 One-to-one):** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2, \forall a, b \in S_1$ , 若  $f(a) = f(b) \implies a = b$ , 则称  $f$  单射.

单射的性质:

(1)  $c \in S_2$ ,  $f$  单射, 若  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ , 则  $|f^{-1}(c)| = 1$ .

(2)  $f$  单射  $\iff A = f^{-1}(f(A))$ .

**定义 0.9 满射(Surjective):** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ , 若  $\forall b \in S_2, \exists a \in S_1, \text{ s.t. } f(a) = b$  (即  $\text{Im } f = S_2$ ), 则称  $f$  满射.

满射的性质:

(1)  $f$  满射  $\iff \forall B \subseteq S_2, f^{-1}(B) \neq \emptyset$ .

(2)  $f$  满射  $\iff \forall B \subseteq S_2, B = f(f^{-1}(B))$ .

**定义 0.10 双射:** 映射  $f$  单射且满射  $\iff f$  双射.

**例 0.2:** 恒等映射是双射的. □

常用结论:

(1)  $f, g$  单射  $\implies g \circ f$  单射.

证:  $\forall a, b \in S_1$ , 若  $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ ,  $\because g$  单射,  $\therefore f(a) = f(b)$ ,  
又  $\because f$  单射,  $\therefore a = b$ , 故  $g \circ f$  单射. □

(2)  $g \circ f$  单射  $\implies f$  单射.

证:  $\forall a, b \in S_1$ , 若  $f(a) = f(b)$ , 则  $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ ,  
又  $\because g \circ f$  单射,  $\therefore a = b$ , 故  $f$  单射. □

**例 0.3**  $g \circ f$  单射, 而  $g$  非单射的例子: 集合  $S_1 = \{0\}$ ,  $S_2 = \{0, 1\}$ ,  $S_3 = \{0\}$ ,  
映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $f(a) = 0 \forall a \in S_1$ , 单射,  
 $g: S_2 \rightarrow S_3$ ,  $g(b) = 0 \forall S_2$ , 非单射,  $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ ,  $g(a) = 0$ , 单射. □

(3)  $f, g$  满射  $\implies g \circ f$  满射.

证:  $\forall c \in S_3$ ,  $\because g$  满射,  $\therefore \exists b \in S_2$ , s.t.  $g(b) = c$ ,  
又  $\because f$  满射,  $\therefore \exists a \in S_1$ , s.t.  $f(a) = b \implies g \circ f(a) = c$ , 故  $g \circ f$  满射. □

(4)  $g \circ f$  满射  $\implies g$  满射.

证:  $\because g \circ f$  满射,  $\therefore \forall c \in S_3$ ,  $\exists a \in S_1$ , s.t.  $g \circ f(a) = c$   
 $\implies \exists b = f(a) \in S_2$ , s.t.  $g(b) = c$ , 故  $g$  满射. □

**例 0.4**  $g \circ f$  满射, 而  $f$  非满射的例子: 集合  $S_1 = \{0\}$ ,  $S_2 = \{0, 1\}$ ,  $S_3 = \{0\}$ ,  
映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $f(a) = 0 \forall a \in S_1$ , 非满射,  
 $g: S_2 \rightarrow S_3$ ,  $g(b) = 0 \forall S_2$ , 满射,  $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ ,  $g(a) = 0$ , 满射. □

**定理 0.2:** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$  单射  $\iff \exists$  映射  $g: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $g \circ f = 1_{S_1}$ , 这样的  $g$  称为  $f$  的左逆.

证: “ $\implies$ ”: 构造  $g(b) = \begin{cases} a, & a \in f^{-1}(b), \\ \text{任意取一个 } a_0 \in S_1, & f^{-1}(b) = \emptyset, \end{cases}$ ,  
 $\forall a \in S_1$ , 记  $b = f(a)$ ,  $\because f$  单射且  $a \in f^{-1}(b) \neq \emptyset$ ,  $\therefore |f^{-1}(b)| = 1$ ,  
 $\implies g \circ f(a) = a \implies g \circ f = 1_{S_1}$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $\forall a, b \in S_1$ , 若  $f(a) = f(b)$ , 则  $a = 1_{S_1} = g \circ f(a) = g \circ f(b) = 1_{S_1}(b) = b$ , 故  $f$  单射. □

由于当  $f^{-1}(b) = \emptyset$  时,  $g(b)$  的取值具有任意性, 故若左逆存在, 则不唯一.

**定理 0.3:** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$  满射  $\iff \exists$  映射  $h: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $f \circ h = 1_{S_2}$ , 这样的  $h$  称为  $f$  的右逆.

证: “ $\implies$ ”:  $\because f$  满射,  $\therefore \forall b \in S_2$ ,  $\exists a \in S_1$ , s.t.  $f(a) = b$ , 故可构造  $h(b) = a \in f^{-1}(b)$ ,  
从而  $f \circ h(b) = b \implies f \circ h = 1_{S_2}$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $\forall b \in S_2$ ,  $\exists a = h(b) \in S_1$ , s.t.  $f \circ h(b) = 1_{S_2}(b) = b$ , 故  $f$  满射. □

由于  $|f^{-1}(b)| \geq 1$ ,  $h(b)$  的取值可能具有任意性, 故若右逆存在, 则不唯一.

**定理 0.4:** 若映射  $f$  同时存在左逆和右逆, 则其左逆 = 右逆, 此时称  $f$  可逆, 且此时  $f$  双射.

证: 因为  $f$  同时存在左逆和右逆, 由定理 0.2 和 0.3 得  $f$  双射.

设左逆  $g: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $g \circ f = 1_{S_1}$ , 右逆  $h: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $f \circ h = 1_{S_2}$ .

假设  $g \neq h$ , 则  $\exists b \in S_2$ , s.t.  $g(b) \neq h(b)$ ,

又  $\because f$  单射,  $\therefore b = 1_{S_2}(b) = f \circ g(b) \neq f \circ h(b)$ .

$\because f$  满射,  $\therefore \exists a \in S_1$ , s.t.  $b = f(a) \implies f(a) = b \neq f \circ g \circ f(a) = 1_{S_2}(f(a)) = f(a)$ , 这显然是荒谬的, 故假设错误,  $g = h$ .  $\square$

## 0.4 等价关系和等价类

**定义 0.11 卡氏积:** 集合  $S_1$  和  $S_2$  的卡氏积  $S_1 \times S_2 \equiv \{(a, b) \mid a \in S_1, b \in S_2\}$ .

集合  $S$  的卡氏积  $S \times S \equiv \{(a, b) \mid a, b \in S\}$ .

注意, 一般  $(a, b) \neq (b, a)$ .

**定义 0.12 关系:** 卡氏积的子集.  $\mathcal{R} \in S \times S$ , 称为  $S$  上的关系.

**例 0.5:** 自然数集  $\mathbb{N}$  的卡氏积  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ .

小于关系:  $\mathcal{R}_1 = \{(n, m) \mid n - m < 0\}$ .  $(1, 2) \in \mathcal{R}_1$ , 记作  $1\mathcal{R}_1 2$ .

等于关系:  $\mathcal{R}_2 = \{(n, m) \mid n - m = 0\}$ .  $(1, 1) \in \mathcal{R}_2$ , 记作  $1\mathcal{R}_2 1$ .  $\square$

**定义 0.13 图:** 对映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ , 有关系  $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in S_1\} \subseteq S_1 \times S_2$ , 称  $G_f$  为  $f$  的图.

(第一个坐标在此关系中仅出现一次, 不会重复.)

映射与图一一对应.

**定义 0.14 等价关系:** 关系  $\mathcal{R} \in S \times S$ , 若满足

reflexivity:  $\forall a \in S, (a, a) \in \mathcal{R}$  (即  $a \sim a \forall a \in S$ )

(2) 对称性: 若  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , 则  $(b, a) \in \mathcal{R}$  (即  $a \sim b \iff b \sim a$ )

(3) 传递性: 若  $(a, b) \in \mathcal{R}, (b, c) \in \mathcal{R}$ , 则  $(a, c) \in \mathcal{R}$  (即  $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$ )

则称  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的等价关系. 若元素  $a, b$  具有等价关系, 记作  $a \sim b$ .

**定义 0.15 等价类:** 由具有等价关系的元素组成的集合.  $\forall a \in S, [a] \equiv \{b \in S \mid b \sim a\} \subseteq S$  称为  $a$  的等价类,  $a$  称为该等价类的代表元.

$\because a \in [a], \therefore [a]$  非空.

$c \in S$ , 则有且仅有以下两种情况:

(1)  $c \in [a] \iff c \sim a \iff a \sim c \iff a \in [c] \iff [a] = [c]$ .

(2)  $c \notin [a] \iff [a] \cap [c] = \emptyset$ .

证: 假设  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ , 则  $\exists c \in [a] \cap [b]$

$\iff c \in [a]$  且  $c \in [b]$ , 即  $c \sim a$  且  $c \sim b$

$\implies a \sim b \implies [a] = [b]$ , 得证.  $\square$



### 等价类的性质

- (1)  $a \in [b] \iff b \in [a] \iff [a] = [b]$ .
- (2)  $a \notin [b] \iff [a] \cap [b] = \emptyset$ .
- (3)  $\forall a, b \in S$ , 要么  $[a] = [b]$ , 要么  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .  
(以上三条证明见前文.)
- (4)  $S = \cup_{i \in K, a_i \in S} [a_i]$ , 其中  $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \forall i \neq j$ .

证:  $S = \cup_a \{a\}$ , 合并各等价类, 即得证. □

等价类这一概念可用于将大问题分解为小问题加以解决.

**定义 0.16 剖分:** 集合  $S \neq \emptyset$ , 若  $S = \cup_{i \in K, S_i \subseteq S} S_i$  且  $S_i \cap S_j = \emptyset \forall i \neq j$ , 则称  $\{S_i \subseteq S \mid i \in K\}$  为  $S$  的剖分.

可由集合的等价类得到它的一个剖分.

**定义 0.17 商类:** 所有等价类的集合.  $\frac{S}{\sim} \equiv \{[a] \mid a \in S\}$ .  $\pi: S \rightarrow \frac{S}{\sim}, a \mapsto [a]$  称为自然映射.

自然映射满射, 但未必单射.

**定义 0.18 运算:** 映射  $*$ :  $S \times S \rightarrow S$  称为  $S$  上的运算, 记作  $(S, *)$ .

$$\forall a, b \in S, a * b \in S.$$

## 0.5 群

**定义 0.19 群:** 若  $(G, *)$  满足

结合律:  $(a * b) * c = a * (b * c)$

(故  $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$  无需括号, 可写为  $\prod_{i=1}^n a_i$ .)

(2) 有单位元  $e$ : s.t.  $e * a = a * e = a$

(3) 有逆元:  $\forall a \in G, \exists b$ , s.t.  $a * b = b * a = e$ , 则称  $b$  为  $a$  的逆, 记作  $b = a^{-1}$

则称  $(G, *)$  为群.

**定理 0.5:** 单位元是唯一的.

证: 假设  $e_1, e_2$  均为单位元, 则  $e_1 * e_2 = e_1 * e_2$ , 得证. □

**定理 0.6:** 每个元素的逆元是唯一的.

证: 假设  $b_1$  和  $b_2$  均为  $a$  的逆元, 则  $b_1 a = b_2 a = e \implies b_1 = b_2$ , 得证. □

例 0.6:  $(\mathbb{Z}, \times)$  非群, 因 0 无逆元. □

特殊的群:

(1)

例 0.7 循环群:  $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . □

(2)

例 0.8 交换群(Abel 群):  $\forall a, b \in G, a * b = b * a$ . □

群的性质:

(1)  $c * c = c \iff c = e$ .

(2)  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

(3)  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .

(4) 左消去律:  $a * b = a * c \iff b = c$ ,

右消去律:  $b * a = c * a \iff b = c$ .

定义 0.20 群的阶:  $|G| \equiv$  群中元素的个数.

定义 0.21 有限群: 若  $|G| < \infty$ , 则称  $G$  为有限群.

定义 0.22 群元素的阶:  $g \in G, 0 \neq n \in \mathbb{N}$ , 若  $g^n = e$ , 则称最小的这样的  $n$  为  $g$  的阶, 记作  $|g|$ , 若  $n$  不存在, 则称  $g$  无穷阶.

若  $|G| < \infty$ , 则  $\forall g \in G, |g| < \infty$ .

证:  $g \in G, g^2 \in G, \dots, g^n \in G \implies \{g, g^2, \dots, g^n\} \subseteq G$

$\because |G| < \infty, \therefore |\{g, g^2, \dots, g^n\}| < \infty$

当  $n > |G|$ ,  $\{g, g^2, \dots, g^n\}$  中必有元素重复, 故  $\exists n_1 < n_2$ , s.t.  $g^{n_1} = g^{n_2} \implies e = g^{n_1} g^{-n_1} = g^{n_2} g^{-n_1} = g^{n_2 - n_1}$ .

最小的这样的  $n_2 - n_1$  即为  $|g|$ , 故  $|g| < \infty$ . □

定义 0.23 子群: 对群  $(G, *)$ ,  $H$  为  $G$  的非空子集, 若  $(H, *)$  亦为群, 则称  $(H, *)$  为  $(G, *)$  的子群, 记作  $(H, *) < (G, *)$ .

例 0.9:  $(\mathbb{Q}, +)$  为群,  $(\mathbb{Q}^* \equiv \mathbb{Q} - \{0\}, \times)$  亦为群, 虽然  $\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{Q}$ , 但由于两者运算不同, 故  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  并非  $(\mathbb{Q}, +)$  的子群. □

定理 0.7:  $(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b \in H$  且  $a^{-1} \in H \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} = H$ .

证:  $(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b \in H$  且  $a^{-1} \in H$ : 由子群和群的定义即得证.

$(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$ : 由子群和群的定义即得证.

$(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$ : 取  $b = a$ , 得  $a * a^{-1} = e \in H \implies H$  有单位元.

取  $a = e$ , 得  $\forall b \in H, \exists e * b^{-1} = b^{-1} \in H \implies H$  有逆元.

$H$  中的运算  $*$  的结合律继承自  $G$  中的  $*$  的结合律.

综上,  $H$  为群. 又  $\because H \subseteq G, \therefore H < G$ . □

**定义 0.24 平凡子群:**  $(G, *)$  和  $(\{e\}, *)$  为  $(G, *)$  的平凡子群.

**定义 0.25 真子群(非平凡子群):** 除平凡子群以外的子群.

**定义 0.26 单群:** 无真子群的群.

**定理 0.8 任意多个子群的交为子群:**  $(G, *)$  为群,  $(H_i, *) < (G, *) \forall i$ , 则  $(\cap_{i \in K} H_i, *) < (G, *)$ .

证:  $\forall a, b \in \cap_{i \in K} H_i \implies \forall i \in K, a, b \in H_i$ ,

$\therefore (H_i, *) < (G, *)$ ,  $\therefore a * b^{-1} \in H_i \subseteq \cap_{i \in K} H_i \implies a * b^{-1} \in \cap_{i \in K} H_i$ . □

**定理 0.9:**  $(H, *) < (G, *)$ , 则  $H$  的单位元即为  $G$  的单位元.

证: 设  $G$  的单位元为  $e$ .

$\forall a \in H$ ,  $\therefore H < G$ ,  $\therefore a \in G$ ,  $e * a = a * e = a \implies e$  为  $(H, *)$  的单位元,

又  $\therefore (H, *)$  的单位元是唯一的, 故得证. □

**例 0.10:**  $(\mathbb{Z}, +)$  为群,  $(\mathbb{E} = \langle 2 \rangle \equiv \{vp\}, +)$ ,  $(\langle 3 \rangle \equiv \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}, +) < (\mathbb{Z}, +)$ . □

**定义 0.27 陪集(Coset):** 真子群  $H < G$ ,  $\forall g \in G$ , 左陪集  $gH \equiv \{g * h \mid \forall h \in H\}$ , 右陪集  $Hg \equiv \{h * g \mid \forall h \in H\}$ .

简便起见, 以下讨论针对左陪集, 右陪集同理.

**例 0.11:**  $\mathbb{E}$  在  $\mathbb{Z}$  中的陪集:  $\forall g, n\mathbb{E} = \{n + m \mid m \in \mathbb{E}\} = \begin{cases} \mathbb{E}, & n \text{ 为偶数}, \\ 1\mathbb{E} = \mathbb{O} \equiv \{\text{奇数}\}, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$  故  $\mathbb{E}$  在  $\mathbb{Z}$  中仅有两个陪集:  $\mathbb{E}$  和  $\mathbb{O}$ , 且  $\mathbb{Z} = \mathbb{E} \cup \mathbb{O}$ ,  $\mathbb{E} \cap \mathbb{O} = \emptyset$ . □

**陪集的性质:** 真子群  $H < G$ ,  $\forall g_1, g_2 \in G$ ,

(1)  $g_1 H \cap g_2 H = \emptyset$  或  $g_1 H = g_2 H$ .

证: 假设  $g_1 H \cap g_2 H \neq \emptyset$ , 则  $\exists c \in g_1 H \cap g_2 H$

$\iff c \in g_1 H$  且  $c \in g_2 H$

$\iff \exists h_1, h_2$ , s.t.  $c = g_1 * h_1 = g_2 * h_2$

$\implies g_2^{-1} g_1 = h_2 * h_1^{-1}$

又  $\therefore h_2 * h_1^{-1} \in H$ ,  $\therefore g_2^{-1} * g_1 \in H$

$\implies (g_2^{-1} * g_1) * H = H$

$\implies g_1 H = g_2 H$ . □

(2)  $|gH| = |H|$ .

证: 要证  $|gH| = |H|$ , 只需证  $H \rightarrow gH$  双射.

若  $ga = gb$ , 则  $a = b$ , 故  $g \rightarrow gH$  单射.

$\forall c \in gH$ ,  $\exists a = g^{-1}c \in H$  且  $ga = b$ , 故  $H \rightarrow gH$  满射.

综上,  $H \rightarrow gH$  双射, 故得证. □

(3)  $G = H \cup g_1 H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_\alpha H$ , 其中  $g_i H \cap g_j H = \emptyset \forall i, j, \alpha$  仅为一个指标.

证:  $G = \cup_{g \in G} gH$ , 去除这些并集中的重复集合, 即得证. □

(4)  $g_1 H = g_2 H \iff g_1^{-1} * g_2 \in H$ .

证: “ $\implies$ ”:  $g_1 H = g_2 H \implies \forall g_1 * h_1 \in g_1 H, g_1 * h_1 \in g_2 H$

$\implies \exists h_2 \in H, \text{ s.t. } g_1 * h_1 = g_2 * h_2$

$\iff g_1^{-1} g_2 = h_1 * h_2^{-1}$

又  $\because h_1 * h_2^{-1} \in H, \therefore g_1^{-1} * g_2 \in H$ .

“ $\impliedby$ ”:  $g_1^{-1} * g_2 \in H \implies g_1^{-1} * g_2 H = H$

$\implies g_1 H = g_2 H$ . □

(5)

**定理 0.10 拉格朗日(Lagrange) 定理:**  $|G| < \infty$ , 真子集  $H < G, |H| \mid |G|$ .

$^a a \mid b$  表示  $b$  可被  $a$  整除.

故若  $|G|$  为质数, 其子群仅有  $\{e\}$  和  $G$  两个, 此时  $\forall g \in G, G = \{g, g^2, \dots, g^{|G|}\}$ , 即  $G$  为有限阶循环交换群. 最小的有限非交换群为 6 阶.

根据 (3), 由陪集可得剖分, 由剖分可得等价关系, 由此我们引入:

(6)  $g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} * g_2 \in H$ .

**例 0.12:** 群  $(\mathbb{Z}, -)$ , 可分为两个子群:  $(\mathbb{E}, -)$  和  $(\mathbb{O}, -)$ , 其中  $\mathbb{E} \cap \mathbb{O} = \emptyset$ , 故由这两个子群可得  $\mathbb{Z}$  的一个剖分, 这两个子群中的元素各存在等价关系:  $n \sim m \iff n - m \in \mathbb{E}$ . □

**定义 0.28 商群:**  $H$  为  $G$  的正规子群,  $\frac{G}{H} = \{[g] \equiv gH \mid g \in G\}$ .

**问题 0.1:**  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  是否或在何种条件下具有相同的代数结构? □

答:  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  具有相同的代数结构, 即  $\forall [g_1], [g_2] \in \frac{G}{H}, [g_1] * [g_2] = [g_1 * g_2] \in \frac{G}{H}$ ,

即存在映射  $\frac{G}{H} * \frac{G}{H} \rightarrow \frac{G}{H}, ([g_1], [g_2]) \mapsto [g_1, g_2]$ ,

即若  $g_1 \sim g'_1, g_2 \sim g'_2$ , 则  $g_1 * g_2 \sim g'_1 * g'_2$ ,

即若  $g_1 H = g'_1 H, g_2 H = g'_2 H$ , 则  $(g_1 * g_2)H = (g'_1 * g'_2)H$ .

$\because g_1 H = g'_1 H, \therefore \exists h_1, h'_1 \in H, \text{ s.t. } g_1 h_1 = g'_1 h'_1 \iff g_1 = g'_1 * h'_1 * h_1^{-1}$ ,

$\because g_2 H = g'_2 H, \therefore \exists h_2, h'_2 \in H, \text{ s.t. } g_2 h_2 = g'_2 h'_2 \iff g_2 = g'_2 * h'_2 * h_2^{-1}$ ,

从而  $g_1 * g_2 = g'_1 * h'_1 * h_1^{-1} * g'_2 * h'_2 * h_2^{-1}$ ,

若  $\exists h' \in H, \text{ s.t. } (h'_1 * h_1^{-1}) * g'_2 = g'_2 * h'$ , 则  $g_1 * g_2 = g'_1 * g'_2 * h' * h'_2 * h_2^{-1} \equiv g'_1 * g'_2 * h$ ,

$\implies (g_1 * g_2)H = (g'_1 * g'_2 * h)H = (g'_1 * g'_2)H$ .

故当  $gH = Hg$  时,  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  具有相同的代数结构. □

**定理 0.11 正规子群:** 若  $gH = Hg$ , 则  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  具有相同的代数结构, 此时称  $H$  为  $G$  的正规子群.

**定理 0.12:** 交换群的任意一个子群为正规子群.

**例 0.13:**  $(\mathbb{Z}, +)$  的子群均为循环群,  $\langle m \rangle \equiv \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle}$ ,  $\mathbb{Z}_m$  有  $m$  个等价类:  $\mathbb{Z}_m = \cap_{i=0}^{m-1} [i]$ .  $\square$

**定义 0.29 群同态:** 对群  $(G_1, *)$  和  $(G_2, \circ)$ , 若映射  $f: G_1 \rightarrow G_2$  满足  $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$  (即映射后保持代数结构), 则称  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态.

(类似于集合间的映射)

**定义 0.30 单同态:** 单射的群同态.

**定义 0.31 满同态:** 满射的群同态.

**定义 0.32 同构:** 双射的群同态.

**定理 0.13:**  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态,  $e_1$  和  $e_2$  分别是  $G_1$  和  $G_2$  的单位元, 则  $f(e_1) = e_2$ .

**证:**  $f(e_1) = f(e_1 * e_1) = f(e_1) \circ f(e_1) \implies f(e_1) = e_2$ .  $\square$

**定理 0.14:**  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态,  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ .

**证:**  $e_2 = f(e_1) = f(a * a^{-1}) = f(a) \circ f(a^{-1}) \implies f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ .  $\square$

**定义 0.33 群同态的核(Kernel):** 单位元的原像.  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态,  $e_1$  和  $e_2$  分别是  $G_1$  和  $G_2$  的单位元, 则称  $\ker f \equiv f^{-1}(e_2) = \{a \in G_1 \mid f(a) = e_2\}$  为  $f$  的核.

$\because e_1 \in \ker f, \therefore \ker f \neq \emptyset$ .

$\ker f \subseteq G_1$ .

**证:**  $\forall a, b \in \ker f, f(a * b^{-1}) = f(a) \circ f(b) = f(a) \circ [f(b)]^{-1} = e_2 * e_2^{-1} = e_2 \implies a * b^{-1} \in \ker f$ , 故  $\ker f \subseteq G_1$ .  $\square$

**定义 0.34 群同态的像:**  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态, 则称  $\text{Im } f \equiv f(G_1) = \{f(a) \mid a \in G_1\}$  为  $f$  的像.

$\text{Im } f \subseteq G_2$ .

**定理 0.15:**  $f$  单同态  $\iff \ker f = \{e_1\}$ .

**证:** “ $\implies$ ”:  $\forall a, b \in \ker f, f(a) = f(b) = e_2$ ,

又  $\because f$  单同态,  $\therefore a = b = e_1$ .

“ $\impliedby$ ”: 若  $f(a) = f(b)$ , 则  $f(a) \circ [f(b)]^{-1} = e_2$

$\implies f(a) \circ f(b^{-1}) = e_2$

$\implies f(a * b^{-1}) = e_2$

$\implies a * b^{-1} \in \ker f = \{e_1\}$

$\implies a = b = e_1$ , 故  $f$  单同态.  $\square$

## 0.6 环

**定义 0.35 环:** 若  $(R, +, \cdot)$  满足  
 $(R, +)$  为交换群 (单位元记作 0)

(2) 结合律:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(3) 左分配律:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ,  
 右分配律:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

则称  $(R, +, \cdot)$  为环.

**例 0.14:**  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  为环. □

常用结论:

(1)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .

证:  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a + a \cdot 0 \implies 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ . □

(2)  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ .

证:  $(-a) \cdot b + a \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0 \implies (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ .

$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot [b + (-b)] = a \cdot 0 = 0 \implies a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ . □

(3)  $(\sum_i a_i) \cdot (\sum_j b_j) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j$ .

证: 由左右分配律即得证. □

特殊的环:

(1)

**定义 0.36 交换环:** 若  $\forall a, b \in R, a \cdot b = b \cdot a$ , 则称  $R$  为交换环.

(2)

**定义 0.37 有单位元的环:** 若  $\exists 1 \in R, \text{ s.t. } \forall a \in R, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ , 则称  $R$  为有单位元的环, 称 1 为  $R$  的单位元.

**例 0.15:**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  交换且有单位元. □

**例 0.16:**  $(M_{n \times n}, +, \times)$ <sup>1</sup> 非交换, 有单位元  $I_{n \times n}$ . □

**例 0.17:**  $(\mathbb{E}, +, \times)$  交换, 无单位元. □

**定义 0.38 零因子:**  $0 \neq a \in R$ , 若  $\exists 0 \neq b \in R, \text{ s.t. } a \cdot b = 0$  或  $b \cdot a = 0$ , 则称  $a$  为  $R$  的零因子.

<sup>1</sup>  $M_{n \times m} \equiv \{(a_{i,j})_{m \times n} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$ .

**定义 0.39 整环:** 有单位元, 交换, 无零因子的环.

**定义 0.40 子环:** 非空真子集  $\emptyset \neq R_1 \subseteq R$ , 若  $(R_1, +, \cdot)$  亦为环, 则称  $R_1$  为  $R$  的子环.

$\therefore (R_1, +)$  为交换群,  $\therefore (R_1, +) < (R, +)$ .

**定理 0.16 子环的判定:**  $R_1$  为  $R$  的子环  $\iff \forall a, b \in R_1, a - b \in R_1, a \cdot b \in R_1$ .

**定理 0.17:**  $R$  为有单位元的交换环, 则  $R$  为整环  $\iff \forall 0 \neq r \in R, a, b \in R$ , 若  $r \cdot a = r \cdot b$ , 则必有  $a = b$ .

证: “ $\implies$ ”:  $r \cdot a = r \cdot b \iff r \cdot (a - b) = r \cdot a - r \cdot b = r \cdot b - r \cdot b = 0$ ,

$\therefore r \neq 0$  且  $R$  为整环 (无零因子),  $\therefore a - b = 0 \implies a = b$ .

“ $\impliedby$ ”: 假设  $R$  有零因子,  $r_0 \cdot a_0 = 0$ , 则令  $r = r_0, \forall a, b \in R$ , 若  $r \cdot a = r \cdot b = 0$ , 则  $a - b = 0$  或  $a - b = a_0$  或  $a - b = a_0 + a_0, \dots$ , 矛盾, 故假设错误,  $R$  无零因子.

又  $\therefore R$  为有单位元的交换环,  $\therefore R$  为整环. □

**定义 0.41 理想:** 非空子集  $I \subseteq R$ , 若  $\forall a, b \in I, r \in R, a - b \in I, r \cdot a \in I, a \cdot r \in I$ , 则称  $I$  为  $R$  的理想.

**定义 0.42 平凡理想:**  $(\{0\}, +, \cdot)$  和  $(R, +, \cdot)$  为  $(R, +, \cdot)$  的平凡理想.

**定义 0.43 单环:** 只有平凡理想的环.

**定理 0.18:** 任意多个理想的交为理想.

证:  $\therefore 0 \in \bigcap_{i \in K} I_i, \bigcap_{i \in K} I_i = \emptyset$ .

$\therefore \forall a, b \in \bigcap_{i \in K} I_i, \therefore \forall a, b, \forall k \in K, a, b \in I_k$ ,

又  $\therefore \forall k \in K, (I_k, +) < (R, +), \therefore \forall k \in K, a - b \in I_k \implies a - b \in \bigcap_{i \in K} I_i$ .

$\forall k \in K, a_k \in I_k$ , 又  $\therefore I_k$  为理想,  $r \cdot a \in I_k, a \cdot r \in I_k \implies r \cdot a \in I_k, a \cdot r \in I_k$ .

综上,  $\bigcap_{i \in K} I_i$  为  $R$  的理想. □

**定理 0.19:** 若  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  是  $R$  中理想的升链, 则  $\bigcup_i I_i$  是  $R$  的理想.

**定义 0.44 生成理想:**  $R$  为交换环, 非空子集  $\emptyset \neq S \in R$ , 由  $S$  生成的理想是  $R$  中包含  $S$  的最理想, 即  $R$  中包含  $S$  的所有理想的交, 记作  $\langle S \rangle$ .

证: 假设  $I_0$  是  $R$  中包含  $S$  的最理想,  $J = \{I_k \mid k \in K\}$  是  $R$  中包含  $S$  的所有理想的集合.

显然  $I_0 \in J$ , 故  $\bigcap_k I_k \subseteq I_0$ .

$\therefore \bigcap_{i \in K} I_i$  为理想, 又  $\therefore I_0$  为最小的理想,  $\therefore |I_0| \leq |\bigcap_k I_k|$ .

综上, 必有  $I_0 = \bigcap_k I_k$ . □

- 由某个元素  $a$  生成的理想:  $\langle a \rangle = \{r \cdot a \mid r \in R\}$ .
- 由多个元素  $\{a_1, \dots, a_n\}$  生成的理想:  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in R\}$ .
- 由集合  $S$  生成的理想:  $\langle S \rangle = \{\sum_{i=1}^m r_i a_i \mid r_i \in R, a_i \in S, m \in \mathbb{Z}^+\}$ .

可用理想得等价关系:  $I$  是  $R$  的理想, 则  $r_1 \sim r_2 \iff r_1 - r_2 \in I$ , 从而得到等价关系:  $[a] = a + I = \{a + r \mid r \in I\}$ .

**定义 0.45 商环:**  $\frac{R}{\sim} \equiv \{[a] \mid a \in R\}$ .

$([a], [b]) \mapsto [a + b]$  和  $([a], [b]) \mapsto [a \cdot b]$  都是运算.

**证:** 要证  $([a], [b]) \mapsto [a + b]$  和  $([a], [b]) \mapsto [a \cdot b]$  都是运算, 即证这些映射与代表元无关, 即证  $a \sim a', b \sim b', [a'] + [b'] = [a + b], [a'] \cdot [b'] = [a \cdot b]$ .

$\because a \sim a', b \sim b', \therefore a - a' \in I, b - b' \in I \implies a + b - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in I$   
 $\implies a + b \sim a' + b',$  故  $([a], [b]) \mapsto [a + b]$  与代表无关, 是运算.

$\because a \sim a', b \sim b', \therefore a - a' \in I, b - b' \in I,$

设  $a - a' \equiv h_1 \in I, b - b' \equiv h_2 \in I$ , 则  $a' \cdot b' = (a + h_1) \cdot (b + h_2) = a' \cdot b' + a' \cdot h_2 + h_1 \cdot b' + h_1 \cdot h_2$ ,  
 其中  $\because h_1, h_2 \in I \implies h_1 \cdot h_2 \in I$ , 而由理想的定义,  $a' \cdot h \in I, h_1 \cdot b' \in I$ ,  
 $\implies a' \cdot b' = a \cdot b - a' \cdot h_1 - h_2 \cdot b \in I$ , 故  $[a'] \cdot [b'] = [a' \cdot b'] = [a \cdot b]$ . □

**定义 0.46 环同态:**  $(R_1, +, *)$  和  $(R_2, +, \cdot)$  为环, 映射  $f: R_1 \rightarrow R_2$  满足

$$(1) f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$(2) f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

则称  $f$  为  $R_1$  到  $R_2$  的环同态.

由环同态的定义,  $f$  必为  $(R_1, +)$  到  $(R_2, +)$  的群同态, 故  $f(0) = 0, f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ .

**定义 0.47 核:**  $\ker f \equiv \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$ .

**定义 0.48 像:**  $\text{Im } f \equiv \{f(a) \mid a \in R_1\}$ .

$$\text{Im } f \subseteq R_2.$$

**定理 0.20:**  $\ker f$  为理想.

**证:**  $\forall a, b \in \ker f, r \in R_1, f(a - b) = f(a + (-b)) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b) = 0 - 0 = 0 \implies a - b \in \ker f$ .  
 $f(r \cdot a) = f(r) \cdot f(a) = f(r) \cdot 0 = 0 \implies r \cdot a \in \ker f$ ,

同理  $a \cdot r \in \ker f$ .

综上,  $\ker f$  为  $R_1$  的理想. □



**定义 0.49 单同态:** 单射的环同态.

$$\text{单同态} \iff \ker f = \{0\}.$$

**定义 0.50 满同态:** 满射的环同态.

$$\text{满同态} \iff \text{Im } f = R_2.$$

**定义 0.51 同构:** 双射的环同态.

**定义 0.52 典范同态:**  $I$  为  $R$  的理想,  $\pi: R \rightarrow \frac{R}{I}, a \mapsto [a]$  称为典范同态.

典范同态是满同态.

**例 0.18:**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  为环.

$$\langle 2 \rangle = \mathbb{O} \equiv \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\langle 3 \rangle \equiv \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\langle 2, 3 \rangle \equiv \{2n + 3m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}. \quad \langle 1 \rangle \equiv \mathbb{Z}.$$

$\mathbb{Z}$  的任何理想均由一个数生成. 更准确地说, 若  $I$  为  $\mathbb{Z}$  的理想, 则  $I = \langle n \rangle$ , 其中  $n$  为  $I$  中最小的正整数. □

(此处其实用到了这样一个定理: 任何一个由自然数组成的集合均存在最小正整数.)

**证:** 若  $p \in \mathbb{Z}, p \in \langle n \rangle$ , 我们不妨假设  $p > n$ , 设  $p = kn + r$ , 其中  $0 \leq r < n$ .

若  $r \neq 0$ , 则  $r = p - kn \in I$ , 但  $0 \leq r < n$  而  $n$  为  $\langle n \rangle$  中最小的正整数矛盾, 故  $r = 0, p = kn$ . □

**定义 0.53 剩余类环:**  $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}.$

**例 0.19:**  $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}, [2] \cdot [3] = [6] = [0]$ , 故  $\mathbb{Z}_6$  有零因子. □

## 0.7 域

**定义 0.54 域:** 若  $(F, +, \cdot)$  满足

$(F, +)$  为交换群 (单位元记作 0)

(2)  $(F^*, \cdot)$  为交换群 (单位元记作 1), 其中  $F^* = F - \{0\}$

(3) 左分配律:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ,

右分配律:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

则称  $(F, +, \cdot)$  为域.

由于有 0 和 1 这两个元素,  $|F| \geq 2$ . 当  $|F| = 2$  时,  $F = \{0, 1\} \cong \mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{\langle 2 \rangle}.$

**例 0.20:**  $\mathbb{Z}_2$  是最小的有限域.  $\mathbb{Q}$  为最小的无限域. □

**定义 0.55 有理数:**  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \neq 0, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ , 即  $\forall q \in \mathbb{Q}, \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, q = \frac{m}{n}$ .

**定义 0.56 域的特征:**  $\text{char } F \equiv$  使得  $n \cdot 1 = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n \text{ 个 } 1 \text{ 相加}} = 0$  的最小正整数.

**例 0.21:**  $\text{char } \mathbb{Z}_2 = 2, \text{char } \mathbb{Q} = 0$ . □

$p = \text{char } F$  必为质数, 否则  $\exists m, n < p$ , s.t.  $0 = p \cdot 1 = (n \cdot m) \cdot 1 = (m \cdot 1) \cdot (n \cdot 1) \implies n \cdot 1 = 0$  或  $m \cdot 1 = 0$  与域的特征的定义矛盾.

当  $p$  为质数且  $\text{char } \mathbb{Z}_p = p$  时,  $\mathbb{Z}_p$  为域.

**定义 0.57 域同态:**  $(F_1, +, \cdot)$  和  $(F_2, +, \cdot)$  为域, 映射  $f: F_1 \rightarrow F_2$  满足

$$(1) f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$(2) f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

则称  $f$  为  $F_1$  到  $F_2$  的域同态.

**域同态的性质:**

$$(1) f(0) = 0.$$

$$(2) f(1) = 1 \text{ 或 } 0.$$

$$\text{证: } f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \implies f(1) - f(1) \cdot f(1) = 0 \implies f(1) = 0 \text{ 或 } 1. \quad \square$$

$$(3) \text{ 若 } f(1) = 0, \text{ 则 } \forall r \in F_1, f(r) = f(r \cdot 1) = f(r) \cdot f(1) = f(r) \cdot 0 = 0.$$

$$(4) \text{ 若 } f(1) = 1, \text{ 则 } \ker f = \{0\}, \text{ 此时 } f \text{ 单射.}$$

$$\text{证: } \forall r \in F^*, r^{-1} \in F^*, 1 = f(1) = f(r \cdot r^{-1}) = f(r) \cdot f(r^{-1}) \implies f(r) \neq 0, f(r^{-1}) \neq 0, \text{ 故 } \forall r \neq 0, f(r) \neq 0, \ker f = \{0\}. \quad \square$$

# Chapter 1

## 向量空间

**定义 1.1 向量空间:** 交换群  $(V, +)$  和域  $F$ , 数乘映射  $\alpha : F \times V \rightarrow V$ , 若满足

$$\alpha(r, u + v) = \alpha(r, u) + \alpha(r, v) \text{ (可简写为 } r(u + v) = ru + rv)$$

$$(2) \alpha(r + t, u) = \alpha(r, u) + \alpha(t, u) \text{ (可简写为 } (r + t)u = ru + tu)$$

$$(3) \alpha(r \cdot t, u) = \alpha(r, \alpha(t, u)) \text{ (可简写为 } (rt)u = r(tu))$$

$$(4) \text{ 有单位元: } \exists 1 \in F, \text{ s.t. } \alpha(1, u) = u \text{ (可简写为 } 1u = u)$$

则称  $V$  是  $F$  上的向量空间.

**例 1.1 直角坐标系:**  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  为域,  $(\mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, +)$  为交换群, 满足

$$(1) r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)$$

$$(2) (r + t)(x, y) = ((r + t)x, (r + t)y) = (rx + tx, ry + ty) = (rx, ry) + (tx, ty) = r(x, y) + t(x, y)$$

$$(3) (r \cdot t)(x, y) = (rtx, rty) = r(tx, ty) = r(t(x, y))$$

$$(4) 1(x, y) = (x, y)$$

故  $\mathbb{R}^2$  为  $\mathbb{R}$  上的向量空间. □

$0v = 0$ . (注意两个 0 的区别, 等号左边的 0 为域  $F$  中的零元, 等号右边的 0 为  $V$  中的零向量.)

**证:**  $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \implies 0v = 0$ . □

$r \in F, 0 \in V$ , 则  $r0 = 0$ .

**证:**  $r0 = r(0 + 0) = r0 + r0 \implies r0 = 0$ . □

$$-1v = -v.$$

**证:**  $-1v = -(1v) = -v$ . □

**例 1.2:**  $\mathbb{R}^2$  为  $\mathbb{R}$  上的向量空间.

$\mathbb{R}^2$  为  $\mathbb{Q}$  上的向量空间.

$\therefore$  对  $c \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{R}^2, cv \notin \mathbb{R}^2, \therefore \mathbb{R}^2$  不是  $\mathbb{C}$  上的向量空间. □

## 1. 向量空间

**例 1.3:**  $F^n \equiv \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F\}$ , 满足  $(r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n) = (r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n)$ ,  $r(r_1, \dots, r_n) = (rr_1, \dots, rr_n)$ .  $F^n$  为  $F$  上的向量空间.  $\square$

**证:**  $\because r((r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n)) = r(r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n) = (rr_1 + rl_1, \dots, rr_n + rl_n) = (rr_1, \dots, rr_n) + (rl_1, \dots, rl_n) = r(r_1, \dots, r_n) + r(l_1, \dots, l_n)$ ,

且  $(r+t)(r_1, \dots, r_n) = ((r+t)r_1, \dots, (r+t)r_n) = (rr_1 + tr_1, \dots, rr_n + tr_n) = (rr_1, \dots, rr_n) + (tr_1, \dots, tr_n) = r(r_1, \dots, r_n) + t(r_1, \dots, r_n)$ ,

且  $(r \cdot t)(r_1, \dots, r_n) = (rtr_1, \dots, rtr_n) = r(tr_1, \dots, tr_n) = r(t(r_1, \dots, r_n))$ ,

且  $1(r_1, \dots, r_n) = (r_1, \dots, r_n)$ ,

$\therefore F^n$  为  $F$  上的向量空间.  $\square$

**定义 1.2 子空间:**  $\emptyset \neq S \subseteq V$ , 若  $S$  为  $V$  的子群, 且在相同的数乘下构成  $F$  上的向量空间, 则称  $S$  是  $V$  的子空间.

**定理 1.1 子空间的判定(课本定理1.1):**  $S$  为  $V$  的子空间  $\iff \forall a, b \in S, r, t \in F, ra + tb \in S$  (即线性运算封闭).

**证:** “ $\implies$ ”:  $ra \in S, -tb \in S$ , 又  $\because S$  为  $V$  的子群,  $ra - (-tb) \in S$ .

“ $\impliedby$ ”: 令  $r = 1, t = -1$ , 有  $a - b \in S \implies S < V$ .

令  $t = 0$ , 有  $ra \in S$ , 故  $S$  为  $V$  的子空间.

综上, 得证.  $\square$

子空间的交是子空间.

**证:** 设  $S_1, \dots, S_n$  为  $V$  的子空间, 则  $S_1, \dots, S_n$  为  $V$  的子群  $\implies \cap_{i=1}^n S_i$  为  $V$  的子群.

$\forall u, v \in \cap_{i=1}^n S_i, \forall k, u, v \in S_k \implies u, v$  满足与  $F$  中向量相同的数乘映射.

综上, 得证.  $\square$

$S, T$  是  $V$  的子空间,  $S + T \equiv \{u + v \mid u \in S, v \in T\}$  为  $V$  的子空间.

**证:**  $\forall w_1, w_2 \in S + T, r, t \in F$ ,

$w_1 \in S + T \implies w_1 = u_1 + v_1, u_1 \in S, v_1 \in T$ ,

$w_2 \in S + T \implies w_2 = u_2 + v_2, u_2 \in S, v_2 \in T$ .

$rw_1 + tw_2 = r(u_1 + v_1) + t(u_2 + v_2) = (ru_1 + tu_2) + (rv_1 + tv_2)$ , 其中  $ru_1 + tu_2 \in S, rv_1 + tv_2 \in T \implies rw_1 + tw_2 \in S + T$ , 故  $S + T$  为  $V$  的子空间.  $\square$

**定义 1.3 生成子空间和生成集:**  $\emptyset \neq S \subseteq V$ ,  $S$  的生成子空间为  $\langle S \rangle \equiv$  包含  $S$  的最小子空间  $= \{\sum_{i=1}^n r_i u_i \mid r_i \in F, u_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$ , 其中称  $S$  为生成集.

**例 1.4:** 向量空间  $\mathbb{R}^2$ ,

$S_x = \langle \{(1, 0)\} \rangle = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = x$  轴,

$S_y = \langle \{(0, 1)\} \rangle = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = y$  轴,

$\langle \{(1, 0), (0, 1)\} \rangle = \langle \{(1, 1), (1, -1)\} \rangle = \mathbb{R}^2$ , 故对同一生成子空间, 生成集不唯一.  $\square$

## 1. 向量空间

**定义 1.4 线性无关:** 非零元  $u_1, \dots, u_m$ , 若  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0 \implies r_1 = \dots = r_m = 0$ , 则称  $u_1, \dots, u_m$  线性无关.

若  $S$  中任意有限个元素线性无关, 则称  $S$  线性无关.

**例 1.5:**  $(1, 0)$  与  $(0, 1)$  线性无关. □

**证:**  $r_1(1, 0) + r_2(0, 1) = (r_1, r_2) = 0 = (0, 0) \implies r_1 = 0, r_2 = 0$ . □

**例 1.6:**  $\mathbb{R}^2$  上线性无关, 即两非零元夹角非零. □

单个非零元  $v$  线性无关.

**证:**  $rv = 0$  且  $v \neq 0 \implies r = 0$ , 故  $v$  线性无关. □

**定义 1.5 线性相关:**  $u_1, \dots, u_m$ , 若  $\exists$  不全为零的  $r_1, \dots, r_m$ , s.t.  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$ , 则称  $u_1, \dots, u_m$  线性相关.

若  $u, v$  线性相关, 则两者共线.

**证:**  $\exists r, t$  不全为零, s.t.  $ru + tv = 0$ , 无妨设  $0 \neq r \in F$ , 则  $ru = -tv \implies r^{-1}ru = -r^{-1}tv \implies u = -\frac{t}{r}v$  □

**定义 1.6 线性表示:**  $v$  可由  $u_1, \dots, u_n$  线性表示  $\iff \exists r_1, \dots, r_n \in F$ , s.t.  $v = \sum_{i=1}^n r_i u_i$ .

**定理 1.2 (课本定理1.6):**  $S$  线性无关  $\iff \langle S \rangle$  中的每个向量可由  $S$  中元素唯一地线性表示  
 $\iff S$  中任一向量不能由  $S$  中其余向量线性表示.

**证:** 设  $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ .

第一个 “ $\implies$ ”:  $v \in \langle S \rangle$ , 则  $v$  可由  $S$  中的元素线性表示, 即  $\exists r_1, \dots, r_m$ , s.t.  $v = r_1 u_1 + \dots + r_m u_m$ .

要证这种线性表示是唯一的, 假设  $v$  的另一种线性表示为  $v = r'_1 u_1 + \dots + r'_m u_m$ .

$v - v = (r_1 - r'_1)u_1 + \dots + (r_m - r'_m)u_m = 0$ , 又  $\because S$  线性无关, 即  $u_1, \dots, u_m$  线性无关,  $\therefore r'_1 = r_1, r'_m = r_m$ , 故两种线性表示相同.

第一个 “ $\Leftarrow$ ”:  $0 \in \langle S \rangle$ , 由于  $0u_1 + \dots + 0u_m = 0$  是且是  $0$  唯一的线性表示, 故  $S$  线性无关.

第二个 “ $\implies$ ”: 不妨假设  $u_1$  可由  $u_2, \dots, u_m$  线性表示, 即  $u_1 = t_2 u_2 + \dots + t_m u_m$ .

若  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$ , 则  $r_1 = \dots = r_m = 0$  或  $r_1 \neq 0, r_2 = -r_1 t_2, \dots, r_m = -r_1 t_m$ , 从而  $S$  线性相关, 故假设错误,  $u_1$  不可由  $u_2, \dots, u_m$  线性表示.

第二个 “ $\Leftarrow$ ”: 假设  $S$  线性相关, 则  $\exists$  非零  $r_1, \dots, r_m$ , s.t.  $r_1 u_1 + \dots + r_m u_m = 0$ , 不妨设  $r_1$  非零, 则  $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 - \dots - \frac{r_m}{r_1} u_m$ , 即  $u_1$  可由  $S$  中其余向量线性表示, 矛盾, 故假设错误,  $S$  线性无关. □

**定理 1.3 (课本定理1.7):**  $\emptyset \neq S \subseteq V$ , 下列等价:

(1)  $S$  线性无关, 且  $V = \langle S \rangle$ .

(2)  $\forall v \in V$ , 可用  $S$  中元素唯一地线性表示.

(3)  $S$  是  $V$  的极小生成集 (即  $S$  去除任意元素都无法生成  $V$ , 或  $S$  的任意真子集都无法生成  $V$ ).

## 1. 向量空间

(4)  $S$  是  $V$  的极大线性无关集 (即  $S$  增加任意元素都线性相关,  $\forall u \in V$  且  $u \notin S$ ,  $S \cup \{u\}$  线性相关).

证: 由定理 1.2 证得 (1)(2) 等价.

设  $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ .

(1) $\implies$ (3): 假设  $\exists S' \subsetneq S$ , s.t.  $V = \langle S' \rangle$ , 则  $\forall v \in S - S' \subseteq V$ ,  $v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$ , 其中  $r_i \in F$ ,  $u_i \in S'$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , 即  $v$  可由  $S$  中的部分向量线性表示, 与  $S$  线性无关矛盾, 故假设错误,  $S$  是  $V$  的极小生成集.

(3) $\implies$ (1):  $S$  为  $V$  的生成集, 即  $V = \langle S \rangle$ .

假设  $S$  线性相关, 即  $\exists r_1, \dots, r_m$  不全为零, s.t.  $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$ , 不妨设  $r_1 \neq 0$ , 则  $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 + \dots + \frac{r_m}{r_1} u_m$ , 则  $S - \{u_1\}$  仍可以生成  $V$ , 矛盾, 故假设错误,  $S$  线性无关.

(1) $\implies$ (4): 假设  $S$  不是极大线性无关集, 则  $\exists v \in V - S$ , s.t.  $S \cup \{v\}$  线性无关.

又  $\because V = \langle S \rangle$ ,  $\therefore v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$ , 其中  $r_i \in F$ ,  $u_i \in S$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , 即线性无关集  $S \cup \{v\}$  中的向量  $v$  可由其中的部分向量线性表示, 与  $S \supseteq$  线性无关矛盾, 故假设错误,  $S$  是极大线性无关集.

(4) $\implies$ (1):  $\because S$  是  $V$  的极大线性无关集,  $\therefore S$  线性无关.

假设  $V \neq \langle S \rangle$ ,  $\exists v \in V - S$ , s.t.  $v$  无法由  $S$  中的元素线性表示  $\implies S \cup \{v\}$  为线性无关集, 与  $S$  为最大线性无关集矛盾, 故假设错误,  $V = \langle S \rangle$ .

综上, 得证. □

**定义 1.7 基:** 任何生成向量空间  $V$  的线性无关集. 基的阶数称为  $V$  的维数, 记作  $\dim V$ .

**定理 1.4 (课本定理1.12):** 向量空间的任何基都有相同的阶, 即  $\dim V$  不依赖于基的选取.

**例 1.7:**  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$  为  $F^n$  的一组基. □

证:  $r_1 e_1 + \dots + r_n e_n = (r_1, \dots, r_n) = 0 \implies r_1 = \dots = r_n = 0$ , 故  $e_1, \dots, e_n$  线性无关.

又  $\langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle = \{r_1 e_1 + \dots + r_n e_n = (r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F, \text{ 对 } i = 1, \dots, n\} = F^n$ , 故得证. □

找基的方法:

(1) 若  $0 \neq u_1 \in V$ , 则  $\{u_1\}$  线性无关.

(2) 若  $u_2 \in V - \langle u_1 \rangle$  且  $u_2$  与  $u_1$  线性无关, 则  $\{u_1, u_2\}$  线性无关.

(3) 重复以上操作, 直至无法找到新的线性无关元素, 即得到极大线性无关集, 此即向量空间的基.

**定理 1.5 (课本定理1.9):** 线性无关集  $I \subseteq V$ ,  $S \subseteq V$  是  $V$  的生成集, 且  $I \subseteq S$ , 则  $\exists V$  的基  $\mathcal{B}$ , s.t.  $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$ .

**定义 1.8 直和:** (1) 外直和: 若  $V_1, \dots, V_n$  是  $F$  上的向量空间,  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n \equiv \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$ , 满足

$$- (v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$$

$$- r(v_1, \dots, v_n) = (rv_1, \dots, rv_n)$$

则  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  为  $F$  的向量空间,  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  为  $V_1, \dots, V_n$  的外直和.

(2) 内直和:  $V$  是  $F$  上的向量空间,  $V_1, \dots, V_n$  是  $V$  的子空间, 若  $V = \sum_{i=1}^n V_i$ , 其中  $v_i \in V_i$  且  $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .

$\{0\}$ , 则称  $V$  为  $V_1, \dots, V_m$  的内直和, 记作  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ , 称  $V_i$  为直和项.

内/外直和的关系:  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ ,  $V'_1 = \{(v_1, 0, \dots, 0) \mid v_1 \in V_1\}, \dots, V'_m = \{(0, 0, \dots, v_m) \mid v_m \in V_m\}$  是  $V$  的子空间, 则  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$  且  $V'_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V'_j) = \{0\} \implies V_i = \bigoplus_{i=1}^m V'_i$ , 故内/外直和是等价的, 以下我们不明确区分内/外直和, 均用内直和.

例 1.8:  $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y$ . □

**定理 1.6 (课本定理1.5):**  $\{V_i \mid i \in J\}$  是  $V$  的子空间集合,  $V = \sum_{i \in J} V_i$ , 则下列等价:

- (1)  $V = \bigoplus_{i \in J} V_i$ .
- (2)  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .
- (3)  $0 = 0 + \dots + 0$  是  $0$  的唯一分解式.
- (4)  $V$  中任一向量  $v$  具有唯一分解式  $v = v_1 + \dots + v_n$ , 分解式中的有限个非零元  $v_i \in V_i$  组成的集合成为支集.

证: (1) $\iff$ (2): 由直积的定义即得证.

(2) $\implies$ (3): 假设  $0 = s_{i1} + \dots + s_{in}$  且  $s_{ij}$  不全为零, 不妨设  $s_{i1} \neq 0$ , 则  $V_{i1} \ni s_{i1} = -s_{i2} - \dots - s_{in} \in \sum_{j=2}^n V_{ij} \implies s_{i1} \in V_{i1} \cap (\bigcup_{j=2}^n V_{ij})$ ,  $s_{i1} \neq 0$  与  $V_{i1} \cap (\bigcup_{j=2}^n V_{ij}) = \{0\}$  矛盾, 故假设错误,  $0 = 0 + \dots + 0$  是  $0$  的唯一分解式.

(3) $\implies$ (4):  $\forall v \in V, v = u_1 + \dots + u_n$ , 其中  $u_i \in V_i$ .

假设  $v = w_1 + \dots + w_m$ , 其中  $w_i \in V_i$ .

$0 = v - v = u_1 + \dots + u_n - w_1 - \dots - w_m$ , 将属于相同子空间的元素合并到一起, 得  $0 = (u_{t_1} - w_{t_1}) + \dots + (u_{t_k} - w_{t_k}) + u_{t_{k+1}} + \dots + u_{t_n} - w_{t_{k+1}} - \dots - w_{t_m}$ , 由 (2) 知  $k = n = m$  且  $v_{t_i} = u_{t_i}$ , 故  $v$  具有唯一分解式  $v = v_1 + \dots + v_n$ .

(4) $\implies$ (2): 假设  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$ , 则  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \supsetneq \{0\}$ , 即  $\exists 0 \neq u \in V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j)$ ,

不妨设  $u \in V_1$  且  $u \in V_2$ , 则  $v = v_1 + \dots + v_n = (v_1 + u) + (v_2 - u) + \dots + v_n$ , 其中  $v_i \in V_i$  且  $v_1 + u \in V_1, v_2 - u \in V_2$ ,  $v$  的分解式不唯一, 矛盾, 故假设错误,  $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .

综上, 得证. □

**定理 1.7 (课本定理1.8):**  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  是向量空间  $V$  的基  $\iff V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$ .

证: “ $\implies$ ”:  $\because \mathcal{B}$  为  $V$  的基,  $\therefore V = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F\} = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle$ .

$\because \mathcal{B}$  为  $V$  的基,  $\therefore v_1, \dots, v_n$  线性无关  $\implies \forall 0 \neq u \in \langle v_i \rangle, u = r_i v_i$  且无法由  $\{v_j \mid j \neq i\}$  线性表示  $\implies u \notin V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j)$ ,

$0 = 0v_i \in \langle v_i \rangle$  且  $0 = \sum_{j \neq i} 0v_j \implies 0 \in V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j)$

$\implies V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ .

故  $V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$ .

“ $\Leftarrow$ ”: 一方面,  $V = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$ ;

另一方面, 假设  $\{v_1, \dots, v_n\}$  线性相关, 则  $\exists$  不全为零的  $r_1, \dots, r_n$ , s.t.  $\sum_i r_i v_i = 0$ ,

不妨设  $r_i \neq 0$ , 则  $r_i v_i = -\sum_{j \neq i} r_j v_j \implies 0 \neq r_i v_i \in V_i$  且  $r_i v_i = -\sum_{j \neq i} r_j v_j \in \bigcup_{j \neq i} V_j \implies r_i v_i \in V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j) \implies V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$ , 与直和的定义矛盾, 故假设错误,  $v_1, \dots, v_n$  线性无关.

故  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  是  $V$  的基. □

**定理 1.8 (课本定理1.4):**  $S$  为  $V$  的子空间, 则  $\exists V$  的子空间  $S^c$ , s.t.  $V = S \oplus S^c$ , 称  $S^c$  为  $S$  的补空间.

证:  $\mathcal{B}_1$  为  $S$  的基, 则  $\mathcal{B}_1$  为  $V$  中的线性无关集,

$\mathcal{B}_1$  总可以扩张为 (即添加一些元素) 成  $V$  的基, 即  $\exists \mathcal{B}_2$ , s.t.  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ ,  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  线性无关且  $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle \implies V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ , 故  $S^c = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ .  $\square$

例 1.9:  $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y = S_l \oplus S_{l'}$ , 其中  $S_l$  和  $S_{l'}$  分别为过原点直线  $l$  和  $l'$  对应的子空间,  $l$  与  $l'$  不共线.  $\square$

补空间总存在, 但不唯一.

**定理 1.9 (课本定理1.13):** (1)  $\mathcal{B}$  是  $V$  的基, 若  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  且  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ , 则  $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ .

(2)  $V = S \oplus T$ , 若  $\mathcal{B}_1$  是  $S$  的基,  $\mathcal{B}_2$  是  $T$  的基, 则  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ ,  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  是  $V$  的基.

证: (1)  $\because \mathcal{B}$  是  $V$  的基,  $\therefore \forall u \in V, u = \sum_{i=1}^k r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}, k \in \mathbb{N}$ .

$\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \{ \sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1, n \in \mathbb{N} \}, \langle \mathcal{B}_2 \rangle = \{ \sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_2, n \in \mathbb{N} \}.$

$u = \sum_{i=1}^t r_i v_i + \sum_{i=t+1}^k r_i v_i$ , 其中  $v_1, \dots, v_t \in \mathcal{B}_1, v_{t+1}, \dots, v_k \in \mathcal{B}_2 \implies V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle.$

$\forall u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{B}_2 \rangle, u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \implies u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1$ ,

且  $u \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle \implies u = \sum_{i=1}^n l_i w_i$ , 其中  $l_i \in F, w_i \in \mathcal{B}_2$

$\implies 0 = u - u = \sum r_i v_i - \sum l_i w_i,$

又  $\because \mathcal{B}$  为基,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  且  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset, \therefore r_i, w_i$  线性无关  $\implies r_i = l_i = 0, \forall i$

$\implies u = 0.$

综上,  $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle.$

(2)  $V = S \oplus T \iff V = S + T$  且  $S \cap T = \{0\}.$

假设  $v \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ , 则  $v \neq 0, \langle v \rangle = S \cap T$ , 与  $S \cap T = \{0\}$  矛盾, 故假设错误,  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset.$

$\because V = S + T, \therefore \forall u \in V, u = u_1 + u_2$ , 其中  $u_1 \in S, u_2 \in T,$

$\because \mathcal{B}_1$  是  $S$  的基,  $\mathcal{B}_2$  是  $T$  的基,  $\therefore u_1 = \sum_{i=1}^k r_i v_i, u_2 = \sum_{i=k+1}^n r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F$ , 对  $i = 1, \dots, k, v_i \in \mathcal{B}_1$ , 对  $i = k+1, \dots, n, v_i \in \mathcal{B}_2$

$\implies u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ , 其中  $r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ , 即  $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle.$

假设  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  线性相关, 则  $\exists r_i \in F$  不全为零,  $\sum_{i=1}^n r_i v_i = \sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$ , 其中  $r_i \in F$ , 对  $i = 1, \dots, k, v_i \in \mathcal{B}_1$ , 对  $i = k+1, \dots, n, v_i \in \mathcal{B}_2,$

$\because \mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_2$  为基,  $\therefore \mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_2$  线性无关  $\implies \sum_{i=1}^k r_i v_i \neq 0, \sum_{i=k+1}^n r_i v_i \neq 0$ , 与  $0 = 0 + \dots + 0$  是 0 的唯一分解式矛盾, 故假设错误,  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  线性无关  $\implies \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  是  $V$  的基.  $\square$

**定理 1.10 (课本定理1.14):**  $S, T$  是  $V$  的子空间,  $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$ . 特别地, 若  $T$  是  $S$  的补空间, 则  $\dim S + \dim T = \dim(S \oplus T).$

证: 设  $S \cap T$  的基为  $\mathcal{A}$ ,

$\because S \cap T$  为  $S$  的子空间,  $\therefore$  可将  $\mathcal{A}$  扩张成  $S$  的基  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ,

$\because S \cap T$  为  $T$  的子空间,  $\therefore$  可将  $\mathcal{A}$  扩张成  $T$  的基  $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ .

接下来需要用到这样一个事实:  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  是  $S + T$  的基. 所以先来证明它:



证:  $\forall w \in S + T, w = u + v$ , 其中  $u \in S, v \in T \implies u \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle, v \in \langle \mathcal{A} + \mathcal{C} \rangle$ , 故  $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S + T$ .

不妨设  $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$ , 其中  $v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ .

设  $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{A}$ , 则  $\sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$ ,

令  $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i$ , 则  $x = \sum_{i=1}^k r_i v_i \in \langle \mathcal{A} \rangle$  且  $x = -\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \implies x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = (S - T) \cap T = \emptyset$ .

$\because x \in \langle \mathcal{B} \rangle, \therefore x \in S$ , 又  $\because x \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle, \therefore x \in T \implies x \in S \cap T = \langle \mathcal{B} \rangle. \implies x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle \implies x = 0$ .

又  $\because \mathcal{A}$  和  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  线性独立, 故  $\forall i, r_i = 0 \implies \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  线性无关.

综上,  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  是  $S + T$  的基. □

故

$$\dim S + \dim T = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + \dim(S \cap T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

□

# Chapter 2

## 线性变换

### 2.1 线性变换

**定义 2.1 线性变换:** 向量空间之间的映射.  $F$  为域,  $V, W$  为  $F$  上的向量空间, 映射  $\tau: V \rightarrow W$ , 若  $\tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$ ,  $r, t \in F$ ,  $u, v \in V$ , 则称  $\tau$  为  $V$  到  $W$  的线性变换.

(类似于同态)

取  $r = 1, t = 1$ , 则  $\tau(u + v) = \tau(u) + \tau(v)$ , 故  $\tau$  是  $V$  到  $W$  的群同态, 从而  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(-v) = -\tau(v)$ .

$\mathcal{L}(V, W) \equiv \{V \text{ 到 } W \text{ 的线性变换}\}$ ,  $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V) = \{V \text{ 到 } V \text{ 的线性变换}\} = \{V \text{ 上的线性算子}\}$ .

**定义 2.2 单线性变换:** 单射的线性变换.

**定义 2.3 满线性变换:** 满射的线性变换.

**定义 2.4 同构:** 双射的线性变换. 若两个向量空间  $V, W$  之间存在同构, 也称这两个向量空间同构, 记作  $V \approx W$ .

取  $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $v \xrightarrow{\tau} \tau(v)$ ,  $v \xrightarrow{\sigma} \sigma(v) \implies v \xrightarrow{\tau+\sigma} \tau(v) + \sigma(v)$  也是线性变换, 且  $\tau + \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$ .

**证:** 由映射的像的唯一性, 若  $v = u$ , 则  $\tau(v) = \tau(u)$ ,  $\sigma(v) = \sigma(u) \implies (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \tau(u) + \sigma(u) = (\tau + \sigma)(u)$ , 故  $\tau + \sigma$  是映射.

$(\tau + \sigma)(ru + tv) = \tau(ru + tv) + \sigma(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) + r\sigma(u) + t\sigma(v) = r[\tau(u) + \sigma(u)] + t[\tau(v) + \sigma(v)] = r[(\tau + \sigma)(u)] + t[(\tau + \sigma)(v)]$ , 故  $\tau + \sigma$  为  $V$  到  $W$  的线性变换.  $\square$

由此定义了线性变换之间的加法.

$(\mathcal{L}(V, W), +)$  为交换群.

**证:**  $(\mathcal{L}(V, W), +)$  满足

(1) **结合律:**  $\forall v \in V$ ,  $[(\tau + \sigma) + \delta](v) = (\tau + \sigma)(v) + \delta(v) = \tau(v) + \sigma(v) + \delta(v) = \tau(v) + (\sigma(v) + \delta(v)) = \tau(v) + (\sigma + \delta)(v) = [\tau + (\sigma + \delta)](v) \implies [(\tau + \sigma) + \delta] = [\tau + (\sigma + \delta)]$ .

(2) **有单位元 0:** 零映射  $0(v) = 0$ ,  $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $(0 + \tau)(v) = 0(v) + \tau(v) = 0 + \tau(v) = \tau(v) + 0 = \tau(v) + 0(v) = (\tau + 0)(v)$ .

(3) 有逆元:  $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W), \exists -\tau, \text{ s.t. } (-\tau)(v) = -\tau(v) \implies [\tau + (-\tau)](v) = \tau(v) - \tau(v) = 0 = 0(v).$

(4) 交换律:  $\forall v \in V, (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \sigma(v) + \tau(v) = [\sigma + \tau](v).$

故  $\mathcal{L}(V, W)$  为交换群. □

$\forall r \in F, v \in \mathcal{L}(V, W), v \xrightarrow{\tau} \tau(v) \implies v \xrightarrow{r\tau} r\tau(v)$  是线性变换, 且  $r\tau \in \mathcal{L}(V, W).$

证: 由映射的像的唯一性,  $\because v \xrightarrow{\tau} \tau(v)$  是唯一的,  $\therefore v \xrightarrow{r\tau} r\tau(v)$  是唯一的, 故  $r\tau$  是映射.

$(r\tau)(v) = r\tau(v) = r[\tau(v)],$  故  $r\tau$  为  $V$  到  $W$  的线性变换. □

$\mathcal{L}(V, W)$  是  $F$  上的向量空间.

证: 前面已证,  $(\mathcal{L}(V, W), +)$  为交换群, 且其满足

(1)  $\forall v \in V, [(r+t)\tau](v) = (r+t)\tau(v) = r\tau(v) + t\tau(v) = (r\tau + t\tau)(v) \implies (r+t)\tau = r\tau + t\tau$

(2)  $\forall v \in V, [(rt)\tau](v) = (rt)\tau(v) = r[t\tau(v)] = [r(t\tau)](v) \implies (rt)\tau = r(t\tau)$

(3)  $\forall v \in V, [r(\tau + \sigma)](v) = r(\tau + \sigma)(v) = r[\tau(v) + \sigma(v)] = r\tau(v) + r\sigma(v) = (r\tau + r\sigma)(v) \implies r(\tau + \sigma) = r\tau + r\sigma$

(4) 恒等映射  $1: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \tau \xrightarrow{1} \tau, \forall v \in V, (1\tau)(v) = 1[\tau(v)] = \tau(v) \implies 1\tau = \tau$

故得证. □

**定理 2.1 (课本定理2.1):** (1)  $\mathcal{L}(V, W)$  是  $F$  上的向量空间.

(2)  $\tau \in \mathcal{L}(V, W), \sigma \in \mathcal{L}(W, U),$  则  $\sigma \circ \tau \in \mathcal{L}(V, U).$

(3)  $\tau$  是  $V$  到  $W$  的同构, 则  $\tau^{-1} \in \mathcal{L}(W, V).$

(4)  $\mathcal{L}(V)$  既是向量空间, 也是环, 且两者的加法运算是相同的, 故  $\mathcal{L}(V)$  是代数.

$\mathcal{L}(V)$  是环.

证: 前面已证,  $(\mathcal{L}(V), +)$  为交换群, 且满足

(1) 结合律:  $\because$  映射的复合有结合律,  $\therefore \mathcal{L}(V)$  中元素的复合有结合律

(2) 左右分配律:  $\forall v \in V, [(\sigma + \tau)\delta](v) = (\sigma + \tau)[\delta(v)] = \sigma[\delta(v)] + \tau[\delta(v)] = (\sigma\delta)(v) + (\tau\delta)(v) \implies (\sigma + \tau)\delta = \sigma\delta + \tau\delta$   
 $[\sigma(\tau + \delta)](v) = \sigma[(\tau + \delta)(v)] = \sigma[\tau(v) + \delta(v)] = \sigma[\tau(v)] + \sigma[\delta(v)] = \sigma\tau(v) + \sigma\delta(v) \implies \sigma(\tau + \delta) = \sigma\tau + \sigma\delta$

故得证. □

**定义 2.5 核空间:**  $\ker \tau \equiv \{v \mid \tau(v) = 0\} \subseteq V.$

**定义 2.6 像空间:**  $\text{Im } \tau \equiv \{\tau(v) \mid v \in V\}.$

**定理 2.2 (课本定理2.3):** (1)  $\tau$  满线性变换  $\iff \text{Im } \tau = W$ .

(2)  $\tau$  单线性变换  $\iff \ker \tau = \{0\}$ .

**定理 2.3 (课本定理2.2):**  $\mathcal{B}$  是  $V$  的基,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ , 则  $\tau$  可由  $\tau$  在  $\mathcal{B}$  上的像唯一确定.

**证:** 若已知  $\tau(b_i) \forall b_i \in \mathcal{B}$ , 则  $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i, r_i \in F, b_i \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{Z}^+$   
 $\implies \tau(v) = \tau(\sum_{i=1}^n r_i b_i) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(b_i)$ . □

同构的向量空间有很多性质可以相互传递, 下面我们就来讨论这件事.

**定理 2.4 (课本定理2.4):**  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$  同构,  $S$  是  $V$  真子集, 则

(1)  $V = \langle S \rangle \iff W = \langle \tau(S) \rangle$ .

(2)  $S$  线性无关  $\iff \tau(S)$  线性无关.

(3)  $S$  是  $V$  的基  $\iff \tau(S)$  是  $W$  的基.

**证:** (1) “ $\implies$ ”:  $\because V = \langle S \rangle, \therefore \forall v \in V, v = \sum_i r_i s_i$ ,  
 又  $\because \tau$  同构,  $\therefore \forall w \in W, \exists v \in V, \text{ s.t. } w = \tau(v) \implies \tau(v) = \tau(\sum_i r_i s_i) = \sum_i r_i \tau(s_i)$ .  
 “ $\impliedby$ ”:  $\because W = \langle \tau(S) \rangle, \therefore \forall w \in W, w = \sum_i r_i \tau(s_i)$ ,  
 又  $\because \tau$  同构,  $\therefore \forall v \in W, \exists w \in W, \text{ s.t. } v = \tau^{-1}(w) = \tau^{-1}(\sum_i r_i \tau(s_i)) = \sum_i r_i \tau^{-1}(\tau(s_i)) = \sum_i r_i s_i$ .  
 综上, (1) 得证.

(2) “ $\implies$ ”: 假设  $\sum_i r_i \tau(s_i) = 0$ , 则  $\tau(\sum_i r_i s_i) = 0$ ,  
 又  $\because \tau$  同构,  $\therefore \ker \tau = \{0\} \implies \sum_i r_i s_i = 0$ ,  
 又  $\because S$  线性无关,  $\therefore r_i = 0 \forall i \implies \tau(S)$  线性无关.  
 “ $\impliedby$ ”: 假设  $\sum_i r_i s_i = 0$ , 则  $\tau(\sum_i r_i s_i) = \sum_i r_i \tau(s_i) = 0$ ,  
 又  $\because \tau(S)$  线性无关,  $\therefore r_i = 0 \forall i \implies S$  线性无关.

综上, (2) 得证.

(3) (1), (2)  $\implies$  (3). □

**定理 2.5 (课本定理2.6):**  $V \approx W \iff \dim V = \dim W$ .

**定理 2.6 (课本定理2.7):** 若  $\dim V = n$ , 则  $V \approx F^n$ .

**定理 2.7 (课本定理2.8):**  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ ,

(1)  $(\ker \tau)^c \approx \text{Im } \tau$ .

(2)  $\dim V = \dim \ker \tau + \dim \operatorname{Im} \tau \equiv \operatorname{null} \tau + \operatorname{rk} \tau$ , 其中称  $\operatorname{null} \tau \equiv \dim \ker \tau$  为  $\tau$  的零度,  $\operatorname{rk} \tau \equiv \dim \operatorname{Im} \tau$  为  $\tau$  的秩.

证: (1) 设映射  $\tau^c : \ker(\tau)^c \rightarrow \operatorname{Im} \tau$ ,  $u \mapsto \tau(u)$ .

先证  $\tau^c$  是单射:  $\ker(\tau^c) = \ker(\tau) \cap \ker(\tau)^c$  (即  $\ker(\tau^c)$  中的元素同时满足  $\ker(\tau)$  的条件, 且在定义域  $\ker(\tau)^c$  中),

又  $\because V = \ker(\tau) \oplus \ker(\tau)^c$ ,  $\therefore \ker(\tau) \cap \ker(\tau)^c = \{0\} \implies \ker(\tau^c) = \{0\}$ , 故  $\tau^c$  单射.

再证  $\tau^c$  是满射: 一方面,  $\operatorname{Im}(\tau^c) \subseteq \operatorname{Im}(\tau)$ ;

另一方面,  $\forall \tau(v)$ ,  $v = u + w$ , 其中  $u \in \ker(\tau)$ ,  $w \in \ker(\tau)^c \implies \tau(v) = \tau(u + w) = \tau(u) + \tau(w) = 0 + \tau(w) = \tau(w) \in \operatorname{Im}(\tau^c) \implies \operatorname{Im}(\tau) \subseteq \operatorname{Im}(\tau^c)$ .

故  $\operatorname{Im}(\tau^c) = \operatorname{Im}(\tau)$ , 即  $\tau^c$  满射.

综上, (1) 得证.

(2)  $\dim V = \dim \ker(\tau) + \dim \ker(\tau)^c = \dim \ker(\tau) + \dim \operatorname{Im}(\tau)$ .

□

$x$  为  $n$  维向量,  $\dim\{x \mid Ax = 0\} = n - \operatorname{rk} A$ , 故  $\dim\{x \mid Ax = 0\} = \operatorname{null} A$ .

## 2.2 表示

“表示”其实就是用已知的东西展现未知的东西, 在这里, 我们用已知的矩阵乘法展现未知的线性变换, 这就是线性变换的表示.

$F$  为域,  $F^n = \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F\}$ , 满足  $(r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n) = (r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n)$  及  $r(r_1, \dots, r_n) = (rr_1, \dots, rr_n)$ ,  $\dim F^n = n$ ,  $F^n$  的标准基为  $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ ;  $F^m = \{(r_1, \dots, r_m) \mid r_i \in F\}$ ,  $\dim F = m$ , 标准基为  $\{f_1 = (1, 0, \dots, 0), f_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, f_m = (0, 0, \dots, 1)\}$ . 如何确定/展现  $F^n$  到  $F^m$  的线性变换?

根据定理 2.3, 我们只需确定一组基在线性变换下的表现, 就可以确定这一线性变换. 因此,  $\forall \tau \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$ , 若  $\tau(e_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j$ .

$\forall (r_1, \dots, r_n) \in F^n$ ,

$$\begin{aligned} \tau((r_1, \dots, r_n)) &= \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(e_i) = \sum_{i=1}^n r_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{ji}\right) f_j = \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^n r_i a_{mi}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = M_\tau \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$ .

故  $\forall \vec{r} \in F^n$ ,  $\tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r}$ .

综上:

$$\mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m \times n}(F), \quad \tau \mapsto M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}.$$

$f : \mathcal{L}(F^n, F^m) \rightarrow M_{m \times n}(F)$ ,  $\tau \mapsto M_\tau$  是线性变换.

证: 由上述的  $M_\tau$  构造过程知,  $f(\tau) = M_\tau$  是唯一的, 故  $f$  是映射.

$$\begin{aligned} f(r\tau + t\sigma) &= M_{r\tau + t\sigma} = \begin{pmatrix} (r\tau + t\sigma)(e_1) & \cdots & (r\tau + t\sigma)(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\tau(e_1) + t\sigma(e_1) & \cdots & r\tau(e_n) + t\sigma(e_n) \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sigma(e_1) & \cdots & \sigma(e_n) \end{pmatrix} = rM_\tau + tM_\sigma = rf(\tau) + tf(\sigma). \end{aligned}$$

故  $f$  是线性的.

综上,  $f: \mathcal{L}(F^n) \rightarrow M_{m \times n}(F)$ ,  $\tau \mapsto M_\tau$  是线性变换. □

$f$  单射.

证:  $\ker f \equiv \{\tau \mid f(\tau) = 0\} = \{\tau \mid M_\tau = 0\}$ .

$\forall \tau \in \ker f, \forall \vec{r} \in F^n, \tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r} = \vec{0} \implies M_\tau = 0_{m \times n} \implies \tau = 0$ .

故  $\ker f = \{0\}$  (这里的“0”代表的是零变换)  $\iff f$  单射. □

$f$  满射.

证:  $\forall A \in M_{m \times n}(F)$ , 可由  $\begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = M_\tau = A$  构造  $\tau$ , 从而  $f$  满射. □

综上,  $f$  同构.

取  $V$  的基  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $\forall v \in V, v = \sum_i r_i b_i$ .

当  $\mathcal{B}$  定序,  $\phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow F^n, v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \equiv [v]_{\mathcal{B}}$  是一个映射.

证: 由于  $\mathcal{B}$  是  $V$  的基, 展开式  $v = \sum_i r_i b_i$  唯一确定, 又  $\because \mathcal{B}$  定序, 从而映射  $v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$  唯一确定, 故  $\phi_{\mathcal{B}}$  为映射.

$\forall u, v \in V, u = \sum_{i=1}^n w_i b_i, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i,$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{B}}(r\vec{u} + t\vec{v}) &= \phi_{\mathcal{B}} \left( r \left( \sum_{i=1}^n w_i b_i \right) + t \left( \sum_{i=1}^n r_i b_i \right) \right) = \phi_{\mathcal{B}} \left( \sum_{i=1}^n (rw_i + tr_i) b_i \right) = \begin{pmatrix} rw_1 + tr_1 \\ \vdots \\ rw_n + tr_n \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = r\phi_{\mathcal{B}}(u) + t\phi_{\mathcal{B}}(v), \end{aligned}$$

故  $\phi_{\mathcal{B}}$  为  $V$  到  $F^n$  的线性变换. □

$\phi_{\mathcal{B}}$  单射.

证:  $\ker \phi_{\mathcal{B}} = \{v \mid \phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}.$

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies v = \sum_{i=1}^n 0b_i = 0.$$

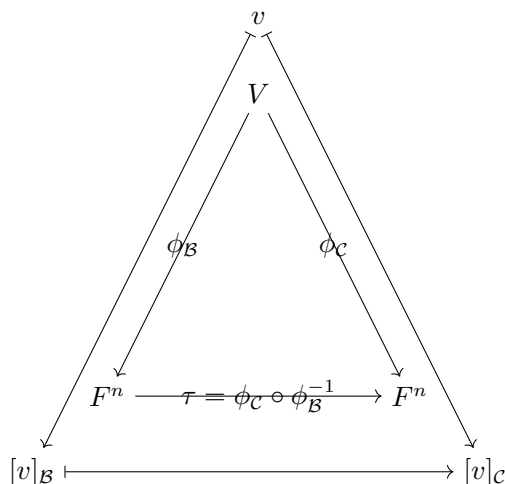
故  $\ker \phi_{\mathcal{B}} = \{0\} \iff \phi_{\mathcal{B}}$  单射. □

$\phi_{\mathcal{B}}$  满射.

证:  $\forall \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in F^n, \exists v \in V, \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n r_i b_i \in V, \text{ 故 } \phi_{\mathcal{B}} \text{ 满射.}$  □

综上,  $\phi_{\mathcal{B}}$  同构.

取  $V$  的一组定序基  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ , 另一组定序基  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ ,  $v$  在  $\mathcal{B}$  下的表象为  $[v]_{\mathcal{B}}$ , 在  $\mathcal{C}$  下的表象为  $[v]_{\mathcal{C}}$ , 映射关系见如下的交换图. 如何联系  $v$  在不同基下的表象,  $[v]_{\mathcal{B}}$  和  $[v]_{\mathcal{C}}$ , 从而得到  $\tau$ ?



$$[v]_{\mathcal{C}} = \tau([v]_{\mathcal{B}}) = M_{\tau}[v]_{\mathcal{B}}, \text{ 其中 } M_{\tau} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}.$$

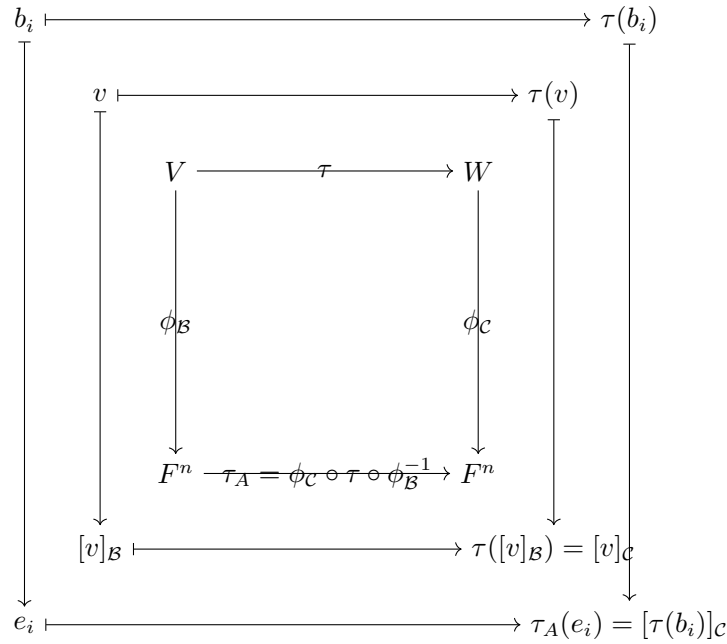
$$\tau: F^n \rightarrow F^n, \quad e_i \mapsto \tau(e_i) = \phi_{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)) = \phi_{\mathcal{C}}(b_i),$$

$$M_{\tau} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathcal{BC}}.$$

**定理 2.8 (课本定理2.12):**

$$[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{B}}$$

其中  $[v]_{\mathcal{B}}$  和  $[v]_{\mathcal{C}}$  分别是向量  $v$  在基  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  表象下的坐标表示,  $M_{\mathcal{BC}}$  是在两种坐标表示之间线性变换对应的矩阵.



$$\begin{aligned} M_{\tau_A} &= \begin{pmatrix} \tau_A(e_1) & \cdots & \tau_A(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_C \circ \tau \circ \phi_B^{-1}(e_1) & \cdots & \phi_C \circ \tau \circ \phi_B^{-1}(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_C \circ \tau(b_1) & \cdots & \phi_C \circ \tau(b_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_C & \cdots & [\tau(b_n)]_C \end{pmatrix} \equiv [\tau]_{BC}. \end{aligned}$$

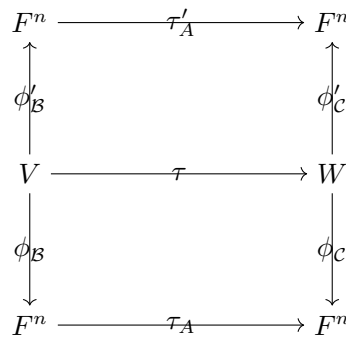
**定理 2.9 (课本定理2.14):**

$$[\tau(v)]_C = [\tau]_{BC} [v]_B$$

其中  $[\tau(v)]_C$  是  $\tau(v)$  在基  $C$  的表象下的坐标表示,  $[\tau]_{BC}$  是从基  $B$  的表象到基  $C$  的表象的线性变换的矩阵表示,  $[v]_B$  是  $v$  在基  $B$  的表象下的坐标表示.

**定理 2.10 (课本定理2.15):**  $\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m \times n}(F)$ ,  $\tau \mapsto \tau_A \mapsto [\tau]_{BC}$ .

若我们改变  $V$  和  $W$  的基, 那么映射所联系的向量的坐标会如何?



$$\tau'_A = \phi'_C \phi_C^{-1} \tau_A \phi_B \phi_B'^{-1}.$$



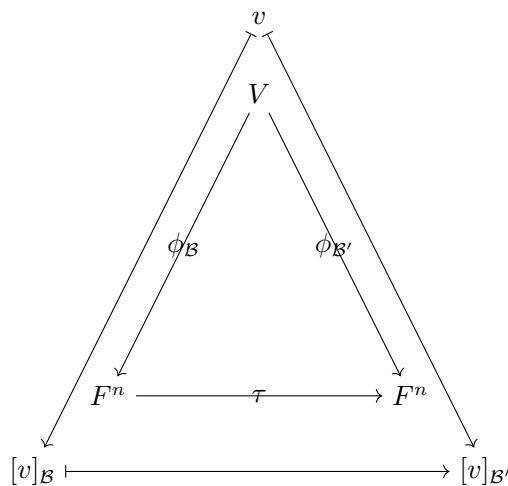
**定理 2.11 (课本定理2.16):**

$$[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

其中  $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  和  $[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$  分别是线性变换  $\tau$  在基  $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  和  $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$  下的表示, 矩阵  $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  和  $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$  分别对应了从基  $\mathcal{B}$  到基  $\mathcal{B}'$  和从基  $\mathcal{C}$  到基  $\mathcal{C}'$  的变换矩阵.

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  可逆.

证: 设  $\phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow F^n, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ ,  $\phi_{\mathcal{B}'} : V \rightarrow F^n, v = \sum_{i=1}^n r'_i b'_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_n \end{pmatrix}$ , 即



$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_{\tau} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}, \text{ s.t. } [v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}.$$

$$\text{同理可以构造 } M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} [b'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [b'_n]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}, \text{ s.t. } [v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'}.$$

$\forall [v]_{\mathcal{B}} \in F^n, M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}} \implies M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = n \times n$  维的单位矩阵, 即  $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  是  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  的逆, 故  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  可逆.  $\square$

**定理 2.12 (课本定理2.18):**  $B = PAQ$ , 其中  $P$  和  $Q$  可逆, 则  $B$  与  $A$  等价.

(因为  $B$  和  $A$  是同一线性变换在两组不同的基下的表示.)

**定理 2.13 (课本定理2.19):**  $B = PAP^{-1}$ , 其中  $P$  可逆, 则  $B$  与  $A$  相似.

(因为  $B$  和  $A$  是同一线性算子在两组不同的基下的表示.)

# Chapter 3

## 同构定理

**定义 3.1 商空间:**  $F$  为域,  $V$  是  $F$  上的向量空间,  $S$  是  $V$  的子空间, 则称  $\frac{V}{S} \equiv \{[v] \mid v \in V\}$  是  $F$  的商空间, 其中  $[v] \equiv \{u \in V \mid u - v \in S\} = S + v$ .

$\frac{V}{S}$  是  $F$  上的向量空间.

**证:**  $[u] + [v] = \{a \in V \mid a - u \in S\} + \{b \in V \mid b - v \in S\} = \{(a + b) \in V \mid a - u \in S, b - v \in S\}$ .

$[u + v] = \{w \in V \mid w - (u + v) \in S\}$ .

$\forall a + b \in [u] + [v], (a - u) + (b - v) = (a + b) - (u + v) \in S \implies (a + b) \in [u + v] \implies [u] + [v] \subseteq [u + v]$ .

$\forall w \in [u + v], \exists c, d \in S, \text{ s.t. } c + d = w - (u + v) \implies w = (c + d) + (u + v) = (c + u) + (d + v),$  其中  $(c + u) \in [u], (d + v) \in [v] \implies w \in [u] + [v]$ .

故  $[u] + [v] = [u + v]$ .

假设  $u \sim u', v \sim v'$ , 即  $[u] = [u'], [v] = [v']$ .

$\therefore [u] = [u'], \therefore uS = u'S \implies \exists s_1, s'_1 \in S, \text{ s.t. } u + s_1 = u' + s'_1 \iff v' = u + s_1 - s'_1,$

$\therefore [v] = [v'], \therefore vS = v'S \implies \exists s_2, s'_2 \in S, \text{ s.t. } v + s_2 = v' + s'_2 \iff v' = v + s_2 - s'_2,$

从而  $u' + v' = u + s_1 - s'_1 + v + s_2 - s'_2$ , 其中  $\therefore s_1, s'_1, s_2, s'_2 \in S, s_1 - s'_1 \in S, s_2 - s'_2 \in S,$

$\therefore V$  是交换群,  $\therefore, \text{ s.t. } s_1 - s'_1 + v = v + s_1 - s'_1 \implies u' + v' = u + v + (s_1 - s'_1 + s_2 - s'_2)$

$\implies (u' + v')S = (u + v + (s_1 - s'_1 + s_2 - s'_2))S \implies [u' + v'] = [u + v],$

即  $[u] + [v] = [u + v]$  与代表元选取无关, 故  $[u] + [v] = [u + v]$  是运算.

$r[u] = r\{v \in V \mid v - u \in S\} = \{rv \mid v \in V, v - u \in S\} = \{rv \in V \mid rv - ru \in S\} = [ru].$

假设  $u \sim u'$ , 即  $[u] = [u']$ .

$\therefore [u] = [u'], \therefore uS = u'S \implies \exists s, s' \in S, \text{ s.t. } u + s = u' + s' \iff u' = u + s - s',$

从而  $ru' = r(u + s - s') = ru + r(s - s')$ , 其中  $s - s' \in S \implies (ru')S = (ru + r(s - s'))S = (ru)S \implies r[u'] = [ru'] = [ru],$

即  $r[u] = [ru]$  与代表元选取无关, 故  $r[u] = [ru]$  是运算.

$(\frac{V}{S}, +)$  满足

(1) **结合律:**  $([v] + [u]) + [w] = [u + v] + [w] = [u + v + w] = [u + (v + w)] = [u] + [v + w] = [u] + ([v] + [w])$

(2) **有单位元**  $[0]$ :  $[0] + [u] = [0 + u] = [u] = [u + 0] = [u] + [0]$

(3) **有逆元:**  $\forall v \in V, \exists -v, \text{ s.t. } [a] + [-a] = [a + (-a)] = [0] = [(-a) + a] = [-a] + [a]$

且  $[u] + [v] = [u + v] = [v + u] = [v] + [u]$ , 即  $(\frac{V}{S}, +)$  交换, 故  $(\frac{V}{S}, +)$  是交换群. (总之就是因为  $\frac{V}{S}$  中的元素  $[v]$  保持了  $V$  中的元素  $v$  的各种运算性质, 所以  $(V, +)$  是交换群就可以推出  $\frac{V}{S}$  也是交换群.)

$\frac{V}{S}$  满足

### 3. 同构定理

- (1)  $r([u + v]) = r([u] + [v]) = r[u] + r[v]$
- (2)  $(r + t)[u] = [(r + t)u] = [ru + tu] = [ru] + [tu] = r[u] + t[u]$
- (3)  $(r \cdot t)[u] = [(r \cdot t)u] = [r(tu)] = r[tu] = r(t[u])$
- (4) 有单位元 1:  $[1][u] = [1u] = [u]$

故  $\frac{V}{S}$  是  $F$  上的向量空间. □

**定理 3.1 (课本定理3.2):** (1)  $\Pi_S : V \rightarrow \frac{V}{S}, v \mapsto [v]$  是线性变换.

(2)  $\Pi_S$  是满线性变换, 即  $\text{Im } \Pi_S = \frac{V}{S}$ .

(3)  $\ker \Pi_S = S$ .

证: (1) 显然  $\Pi_S$  是唯一的, 故  $\Pi_S$  是映射.

如前所证,  $V$  和  $\frac{V}{S}$  均为  $F$  上的向量空间.

$\because [u + v] = \{w \in V \mid w - (u + v) \in S\}, r[u] = [ru], \therefore r[u] + t[v] = [ru] + [tv] = [ru + tv]$ , 故  $\Pi_S$  为线性变换.

(2)  $\forall [v] \in \frac{V}{S}, \exists v \in V, \text{ s.t. } \Pi_S(v) = [v]$ , 即  $\text{Im } \Pi_S = \frac{V}{S}$ , 故  $\Pi_S$  是满线性变换.

(3)  $\ker \Pi_S = \{v \in S \mid \Pi_S(v) = [0]\}$ .

$\Pi_S(v) = [v] = S + v = [0] = S \implies v \in S \implies \ker \Pi_S = S$ . □

**定理 3.2 (课本定理3.3):** (1)  $S, T$  是子空间, 且  $S \subseteq T$ , 则  $\frac{T}{S}$  是  $\frac{V}{S}$  的子空间.

(2) 取  $X$  为  $\frac{V}{S}$  的子空间, 则  $\exists V$  的子空间  $T$ , s.t.  $\emptyset \neq S \subseteq T, \frac{T}{S} = X$ .

证: (1)  $\frac{T}{S} = \{[u] \mid u \in T\}, \frac{V}{S} = \{[v] \mid v \in V\}$ .

$\forall [u] \in \frac{T}{S}, u \in T, \because T$  是  $V$  的子空间,  $\therefore u \in V \implies [u] \in \frac{V}{S}$ , 故  $\frac{T}{S} \subseteq \frac{V}{S}$ .

$\forall [u_1], [u_2] \in \frac{T}{S}, r, t \in F, r[u_1] + t[u_2] = [ru_1 + tu_2], \because u_1, u_2 \in T, \therefore ru_1 + tu_2 \in T \implies [ru_1 + tu_2] \in \frac{T}{S}$ , 故  $\frac{T}{S}$  是线性空间.

综上, 得证.

(2) 取  $T = \cup_{[v] \in X} [v]$ .

显然  $T \subseteq V$ .

$\forall u, v \in T$ , 根据  $T$  的定义,  $[u], [v] \in X$ ,

$\because X$  为子空间,  $\therefore r[u] + t[v] = [ru + tv] \in X \implies ru + tv \in [ru + tv] \subseteq T = \cup_{[v] \in X} [v] \implies ru + tv \in T$ .

故  $T$  为  $V$  的子空间.

$\because [0] = S, \therefore S \subseteq T$ .

$\frac{T}{S} = \{[v] = S + v \mid v \in T\}$ .

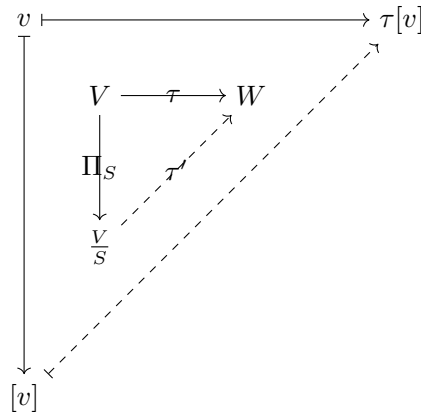
$\forall [v] \in \frac{T}{S}, v \in T \implies [v] \in X$ .

$\forall [v] \in X, v \in T \implies [v] \in \frac{T}{S}$ .

故  $\frac{T}{S} = X$ .

综上, 得证. □

**定理 3.3 第一同态基本定理(课本定理3.4):**  $S$  是  $V$  的子空间,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ ,



若  $S \subseteq \ker \tau$ , 即  $\ker \Pi_S \subseteq \ker \tau$ , 则  $\exists! \tau'$ , s.t.  $\tau = \tau' \circ \Pi_S$ , 即  $\forall v \in V, \tau(v) = \tau'([v])$ , 此时上图可交换.

<sup>a</sup>该定理回答了  $\tau'$  的存在性 (即  $\tau'$  在什么条件下存在) 的问题. 之所以称“基本”, 是因为若将该定理中的向量空间换成其他代数结构, 定理仍然成立.

**证:**  $\tau'$  的唯一性要求, 若  $[u] = [v]$ , 则  $\tau'([u]) = \tau'([v])$ ,

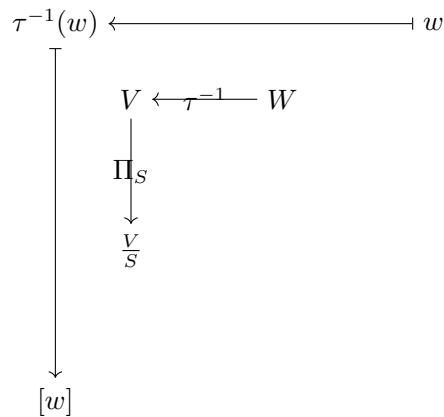
即若  $u \sim v$ , 则  $\tau(u) = \tau(v)$ ,

即若  $u - v \in S$ , 则  $\tau(u - v) = 0$ ,

即  $S \subseteq \ker \tau$ . □

此时,  $\ker \tau' = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau'([v]) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid \tau(v) = 0\} = \{[v] \in \frac{V}{S} \mid v \in \ker \tau\} = \{[v] \mid v \in \ker \tau\} = \frac{\ker \tau}{S}$ ,  
 $\text{Im } \tau' = \{\tau'([v]) \mid [v] \in \frac{V}{S}\} = \{\tau'([v]) \mid v \in V\} = \{\tau(v) \mid v \in V\} = \text{Im } \tau$  ( $\because \Pi_S$  满射,  $\therefore \forall [v] \in \frac{V}{S}, \exists v \in V$ ).

那么, 如果  $\tau$  双射, 即  $\exists \tau^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ , 再加上条件  $\ker \tau \subseteq S$ , 即  $\ker \tau = S$ , 如何?

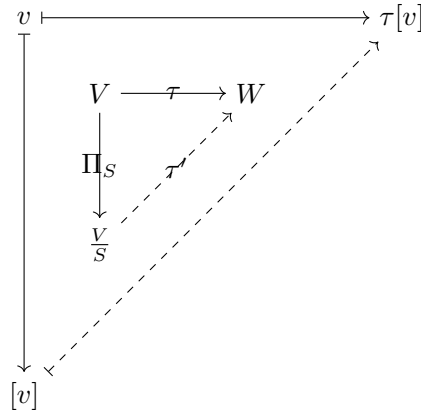


此时,  $\ker \tau' = \frac{\ker \tau}{S} = \{[v] \mid v \in \ker \tau\} = \{[v] \mid v \in S\} = \{[0]\} \implies \tau'$  单射.

由上面关于第一同态定理的延伸讨论我们得到:

**定理 3.4 第一同构定理(课本定理3.5):** 若  $\ker \tau = S$ , 则  $\tau'$  单射,  $\frac{V}{\ker \tau} = \frac{V}{S} \approx \text{Im } \tau$ .

### 3. 同构定理



证:  $V = \ker \tau \oplus (\ker \tau)^c$ , 其中  $(\ker \tau)^c \approx \text{Im } \tau \implies \frac{V}{\ker \tau} = (\ker \tau)^c$ . □

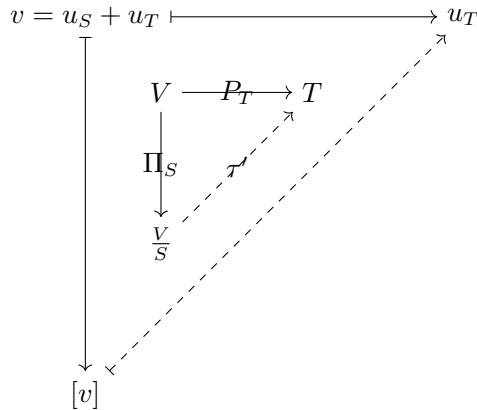
更一般地, 若  $V = S \oplus T$ , 则  $\frac{V}{S} = T$ ,  $\frac{V}{T} \approx S$ .

证:  $\forall v \in V$ ,  $v = u_S + u_T$ , 其中  $u_S \in S$ ,  $u_T \in T$ . 令投影映射  $P_T: V \rightarrow T$ ,  $v = u_S + u_T \mapsto u_T$ .

$\ker P_T = \{v \in V \mid P_T(v) = 0\} = S = [0] = \ker \Pi_S$ .

$\exists! \tau'$  单射, s.t.  $P_T = \tau' \circ \Pi_S$ .

又  $\text{Im } P_T = T$ , 即  $P_T$  满射,  $\therefore \tau'$  满射  $\implies \tau'$  同构  $\implies \frac{V}{S} \approx T$ .



同理可证  $\frac{V}{T} \approx S$ . □

**定义 3.2 对偶(空间)和线性泛函:**  $V^* = \mathcal{L}(V, F)$  是  $F$  上的向量空间, 称  $V^*$  为  $V$  的对偶(空间). 若  $f \in V^*$ , 称  $f$  为线性泛函.

- (1)  $\ker V^*$  为  $F$  上的向量空间.
- (2)  $\dim F = 1$ ,  $\text{Im } f \subseteq F$ ,  $\therefore \dim \text{Im } f \leq 1$ ,  $\dim \ker f \geq \dim V - 1$ .
- (3)  $V^*$  非空,  $\therefore$  必有零映射  $0 \in V^*$ ,  $0: V \rightarrow F$ ,  $v \mapsto 0$ .
- (4) 若  $\dim \text{Im } f = 0$ , 则  $\text{Im } f = \{0\}$ ,  $f$  为零映射.
- (5) 若  $\dim \text{Im } f = 1$ , 则  $\text{Im } f = \langle r \rangle$ , 其中  $0 \neq r \in F \implies \text{Im } f = F$ ,  
由反证法易证, 若  $v \in f^{-1}(r) = \{v \in V \mid f(v) = r\}$ , 其中  $r \neq 0$ , 则  $v \neq 0$ , 且必有  $f(\langle v \rangle^c) = \{0\}$ .

证明一下 (5) 的末句:

### 3. 同构定理

证: 假设  $\exists u \in \langle v \rangle^c$ , s.t.  $f(u) \neq 0$ ,

则有  $f\left(\frac{ru}{f(u)}\right) = r \implies \frac{ru}{f(u)} \in f^{-1}(r) \implies f^{-1} = \langle v \rangle \oplus \langle u \rangle$ ,

又  $\because u \in \langle v \rangle^c$ ,  $\therefore \dim f^{-1} \geq 2$ , 这与  $f^{-1} \subseteq (\ker f)^c$ ,  $\dim(\ker f)^c = \dim \operatorname{Im} f \leq 1$  矛盾,

故假设错误,  $\forall u \in \langle v \rangle^c$ ,  $f(u) = 0 \implies f(\langle v \rangle^c) = \{0\}$ . □

**定理 3.5 (课本定理3.11):** (1) 若  $0 \neq v \in V$ ,  $\exists 0 \neq f \in V^*$ , s.t.  $f(v) \neq 0$ .

(2)  $v = 0 \iff \forall f \in V^*, f(v) = 0$ .

(3)  $f \in V^*$ , 若  $f(x) \neq 0$ , 则  $V = \ker f \oplus \langle x \rangle$ , 即  $\operatorname{Im} f \approx \langle x \rangle$ .

(4)  $0 \neq f, g \in V^*, \ker f = \ker g \iff \exists 0 \neq \lambda \in F$ , s.t.  $f = \lambda g$ .

证: (1)  $v \neq 0$ , 则  $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^c$ , 其中  $\langle v \rangle = \{rv \mid r \in F\}$ .

令  $f: V \rightarrow F, rv + w \mapsto r$ , 其中  $rv \in \langle v \rangle, w \in \langle v \rangle^c$ , 故  $f(v) = 1, f \in V^*$ .

我们来验证一下:  $\forall u_1, u_2 \in V, r, t \in F, u_1$  和  $u_2$  可写成  $u_1 = r_1v + w_1, u_2 = r_2v + w_2$

$\implies f(ru_1 + tu_2) = f(r(r_1v + w_1) + t(r_2v + w_2)) = f((rr_1v + rw_1) + (tr_2v + tw_2)) = rr_1 + tr_2 = rf(r_1v + w_1) + tf(r_2v + w_2) = rf(u_1) + tf(u_2)$ .

故得证.

并且需要注意这里的  $f$  的构造不是唯一的: 我们可以构造  $f: V \rightarrow F, rv + u \mapsto rt$ , 其中  $u \in \langle v \rangle^c$ , 如此一来,  $f(v) = t$ .

(2) “ $\implies$ ”: 若  $v = 0$ , 则  $\forall u \in V, f(v) + f(u) = f(v + u) = f(u) \implies f(v) = 0$ .

“ $\impliedby$ ”: 若  $\forall f \in V^*, f(v) = 0$ , 则假设  $v \neq 0$ , 则由 (1),  $\exists v \in V^*,$  s.t.  $f(v) \neq 0$ , 矛盾, 故假设错误,  $v = 0$ .

(3)  $f(x) \neq 0 \implies \operatorname{Im} f \neq \{0\} \implies \dim \operatorname{Im} f \neq 0 \implies \dim \operatorname{Im} f \dim(\ker f)^c = 1 \implies \dim \ker f = \dim V - \dim(\ker f)^c = \dim V - 1$

$\implies \exists v \in V$ , s.t.  $V = \ker f \oplus (\ker f)^c = \langle v \rangle$ ,

又  $\because f(x) \neq 0, \therefore x \in \langle v \rangle \implies \langle x \rangle = \langle v \rangle \implies V = \ker f \oplus \langle x \rangle$ , 故得证.

(4) “ $\implies$ ”: 令  $K = \ker f = \ker g$ .

$\because \ker f = \ker g, \forall x \notin K$ , 由 (3) 有,  $V = \langle x \rangle \oplus K$ .

取  $\lambda = \frac{f(x)}{g(x)}$  即得.

“ $\implies$ ”: 若  $\exists \lambda \neq 0, f = \lambda g$ , 则显然  $\ker f = \ker g$ . □

**定义 3.3 对偶基:**  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  为  $V$  的基, 则  $\forall i, \exists b_i^* \in V^*$ , s.t.  $b_i^*(b_i) = 1$ , 对  $j \neq i, b_i^*(b_j) = 0$ , 即  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ , 从而可以构造出  $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subseteq V^*$ , 称为  $\mathcal{B}$  的对偶基.

**定理 3.6 (课本定理3.12):** (1)  $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$  线性无关.

(2)  $\dim V < \infty$ , 则  $\mathcal{B}^*$  是  $V^*$  的基.

证: (1)  $\sum_{i=1}^m r_i b_i^* = 0 \implies \forall v \in V, (\sum_{i=1}^m r_i b_i^*)(v) = 0(v) = 0$   
 $\implies \sum_{i=1}^m r_i b_i^*(v) = 0$

### 3. 同构定理

取  $v = b_j$ , 则  $\sum_{i=1}^m r_i b_i^*(b_j) = \sum_{i=1}^m r_i \delta_{ij} = r_j = 0$ ,  
对各个  $b_j$  如法炮制, 从而得到  $r_j = 0 \forall i$ , 故得证.

(2)  $\forall f \in V^*, \forall v \in V, \because \mathcal{B}$  是  $V$  的基,  $\therefore v = \sum_{i=1}^n r_i b_i$   
 $\implies b_j^*(v) = b_j^*(\sum_{i=1}^n r_i b_i) = \sum_{i=1}^n r_i b_j^*(b_i) = \sum_{i=1}^n r_i \delta_{ij} = r_j$   
 回代得  $v = \sum_{i=1}^n b_i^*(v) b_i$   
 $\implies f(v) = f(\sum_{i=1}^n b_i^*(v) b_i) = \sum_{i=1}^n b_i^*(v) f(b_i) = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*(v) = (\sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*)(v)$ , 这里  $b_i^*(v), f(b_i) \in F$ ,  
 因此可以交换位置, 我们可视  $\{b_i^*(v)\}$  为基,  $f(b_i)$  为  $f(v)$  在这组基上的展开系数  
 $\implies f = \sum_{i=1}^n f(b_i) b_i^*$ , 即  $f$  可展开为  $\{\mathcal{B}^*\}$  的线性表示, 结合 (1) 得证. □

按照类似上面的方法,  $\forall v \in V$ , 我们都可构造  $v^* \in V^*$ , s.t.  $\forall u_1 \in \langle v \rangle, v^*(u) = 1, \forall u_2 \in \langle v \rangle^c, v^*(u_2) = 0$ ,  
 从而有映射  $V \rightarrow V^*, v \mapsto v^*, 0 \mapsto 0$  (零映射).  
 $V^*$  本身也是向量空间.

**定义 3.4 二重对偶(空间):**  $V^{**} = \mathcal{L}(V^*, F)$  称为二重对偶(空间), 其中的元素为  $v^{**} : V^* \rightarrow F, f \mapsto f(v)$ .

$V \rightarrow V^* \rightarrow V^{**}, v \mapsto v^* \mapsto v^{**}, b_i \mapsto b_i^* \mapsto b_i^{**}$ , 满足  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}, b_i^{**}(b_j^*) = b_j^*(b_i)$ , 两个映射复合得  $\tau : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto v^{**}$ .

- (1)  $\tau$  是映射.
- (2)  $\tau$  是线性变换.
- (3)  $\ker \tau = \{v \in V \mid \tau(v) = 0\} = \{0\} \iff \tau$  单射.

**证:** (1) 若  $u = v$ , 则  $\forall f \in V^*, u^{**}(f) = f(u) = f(v) = v^{**}(v)$ , 即得证.

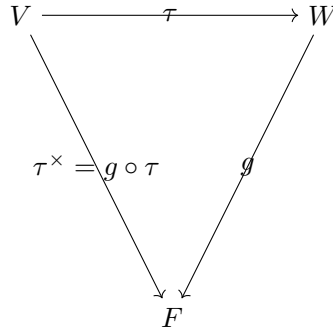
(2)  $\tau(ru + tv) = (ru + tv)^{**}$ ,  
 $\forall f \in V^*, (ru + tv)^{**}(f) = f(ru + tv) = rf(u) + tf(v) = ru^{**}(f) + tv^{**}(f) = r\tau(u)(f) + t\tau(v)(f) \implies$   
 $\tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$ ,  
 结合 (1) 即得证.

(3)  $\tau(v) = 0 \implies \forall f \in V^*, v^{**}(f) = 0 \implies f(v) = 0 \implies$ (定理 3.5 (1))  $v = 0$ , 即得证. □

**引理 3.1 (课本引理3.13):** 若  $\dim V = n < \infty$ , 则  $\dim V^* = \dim V^{**} = n$ ,  $V^{**}$  与  $V$  同构, 一个线性空间的二重对偶就回到自身, 所以实际上套娃式的  $V^{***}$  是没有意义的, 这里我们就写成  $V^{**} = V$ .

**定义 3.5 算子伴随:** 由线性变换  $\tau$  可引出算子伴随  $\tau^\times : W^* \rightarrow V^*, g \mapsto g \circ \tau$ .

### 3. 同构定理



(1)  $\tau^\times$  是映射.

(2)  $\tau^\times$  是线性的.

证: (1) 若  $f = g \in W^*$ ,  $v^{**} \in \tau^\times$ , 则  $\tau^\times(f) = f \circ \tau = g \circ \tau = \tau^\times(g)$ , 故得证.

(2)  $\tau^\times(rg_1 + tg_2) = (rg_1 + tg_2) \circ \tau = rg_1 \circ \tau + tg_2 \circ \tau = r\tau^\times(g_1) + t\tau^\times(g_2)$ , 故得证.

□

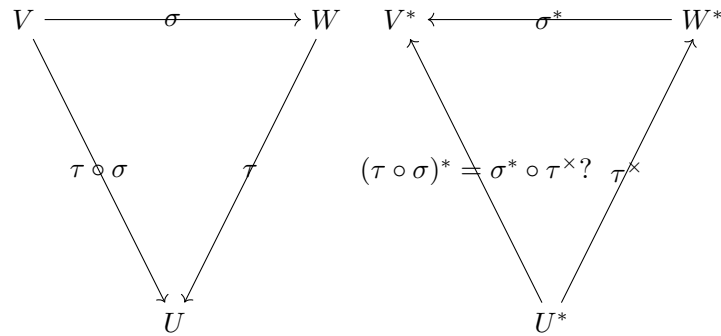
**定理 3.7 (课本定理3.18):** (1)  $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $a, b \in F$ , 则  $(a\tau + b\sigma)^* = a\tau^\times + b\sigma^\times$ , 即求和与算子伴随可交换.

(2)  $\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(W, U)$ , 则  $(\tau \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^\times$ .

(3)  $\tau \in \mathcal{L}(V)$  可逆  $\implies (\tau^{-1})^* = (\tau^\times)^{-1}$ .

证: (1)  $\forall f \in W^*$ ,  $(a\tau + b\sigma)^*(f) = f \circ (a\tau + b\sigma) = af \circ \tau + bf \circ \sigma = a\tau^\times(f) + b\sigma^\times(f)$ , 即得证.

(2)  $\forall f \in V^*$ ,  $(\tau \circ \sigma)^*(f) = f \circ (\tau \circ \sigma) = f \circ \tau \circ \sigma = (f \circ \tau) \circ \sigma = \sigma^*(f \circ \tau) = \sigma^*(\tau^\times(f)) = (\sigma^* \circ \tau^\times)(f) = (\sigma^* \circ \tau^\times)(f) \implies (\tau \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^\times$ .



(3)  $1^* = (\tau \circ \tau^{-1})^* = (\tau^{-1})^* \circ \tau^\times \implies (\tau^{-1})^* = (\tau^\times)^{-1}$ .

□

**定理 3.8 (课本定理3.18):**  $\dim V < \infty$ ,  $\dim W < \infty$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $\tau^\times \in \mathcal{L}(W, V)$ ,  $\tau^{**} \in \mathcal{L}(V^{**}, W^{**}) = \mathcal{L}(V, W)$ , 则  $\tau^{**} = \tau$ .



**定理 3.9 (课本定理3.22):**  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ , 其中  $\dim V < \infty$ ,  $\dim W < \infty$ ,  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  分别是  $V$  和  $W$  的定序基,  $\mathcal{B}^*$  和  $\mathcal{C}^*$  分别是  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  的对偶基, 则  $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*} = ([\tau]_{\mathcal{B} \mathcal{C}})^T$ .

**证:** 设  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ ,  $V$  的定序基  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $W$  的定序基  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$  的矩阵表示为  $[\tau]_{\mathcal{B} \mathcal{C}} = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$ ,  $\tau^\times \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$  的矩阵表示为  $[\tau^\times]_{\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*} = [\beta_{ij}]_{n \times m}$ ,

即  $[\tau]_{\mathcal{B} \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$ , 令  $[\tau(b_i)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$ ,  $\tau(b_i) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} c_k$ .

$[\tau^*]_{\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} [\tau^*(c_1^*)]_{\mathcal{B}^*} & \cdots & [\tau^*(c_m^*)]_{\mathcal{B}^*} \end{pmatrix}$ , 其中  $[\tau^*(c_i^*)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{pmatrix}$ ,  $\tau^*(c_i^*) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*$ .

又  $\because \tau^*(c_i^*) = c_i^* \circ \tau$ , 我们将这一复合函数作用在  $b_j$  上有  $(c_i^* \circ \tau)(b_j) = (\sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*)(b_j) = \sum_{l=1}^n \beta_{li} b_l^*(b_j) = \beta_{ji}$   
 $\implies \beta_{ji} = c_i^*(\tau(b_j))$ , 代入上面的  $\tau(b_j)$  的展开式得  $\beta_{ji} = c_i^*(\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_i^*(c_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}$ ,  
 故得证. □

# Chapter 4

## 模 I: 基本性质

**定义 4.1 模:**  $R$  为有单位元交换环,  $(M, +)$  为交换群, 数乘:  $R \times M \rightarrow M, (r, m) \mapsto m$  满足

$$(1) (r + t)m = rm + tm$$

$$(2) (rt)m = r(tm)$$

$$(3) r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$$

$$(4) 1m = m$$

则称  $M$  为  $R$  上的模, 记作  $R - \text{mod} \equiv \{R \text{ 上的模}\}$ .

$\therefore$  域是一种特殊的环,  $\therefore$  向量空间是一种特殊的模.

$$0m = 0.$$

**证:**  $0m + 0m = (0 + 0)m = 0m \implies 0m = 0.$  □

$$r0 = 0.$$

**证:**  $r0 + r0 = r(0 + 0) = r0 \implies r0 = 0.$  □

$$(-r)m = r(-m) = -(rm).$$

**证:**  $(-r)m + rm = (-r + r)m = 0m = 0 \implies (-r)m = -rm.$

$r(-m) + rm = r(m + (-m)) = r0 = 0 \implies r(-m) = -rm.$  □

$\forall r \in R$ , 可构造映射  $\bar{r} : M \rightarrow M, m \mapsto rm$ .  $\bar{r}$  是  $M$  上的群同态, 又称自同态, 记作  $\bar{r} \in \text{End}(M) \equiv \{M \text{ 上的自同态}\}$ ,  $\text{End}(M)$  关于同态的加法、复合成环, 其单位元为  $M$  上的恒等映射, 记作  $1_M$ , 故还可构造映射  $\phi : R \rightarrow \text{End}(M), r \mapsto \bar{r}$ .

**证:**  $\bar{r}(m + n) = r(m + n) = rm + rn = \bar{r}(m) + \bar{r}(n)$ , 即映射  $\bar{r}$  下保持运算结构, 故得证. □

**例 4.1:** 在交换群  $(G, +)$  上定义  $1a = a, 2a = a + a, \dots, na = \overbrace{a + \dots + a}^{n \text{ 个 } a \text{ 相加}}, -a = -1a, -2a = (-a) + (-a),$   
 $-na = \overbrace{(-a) + \dots + (-a)}^{n \text{ 个 } (-a) \text{ 相加}},$  数乘  $\alpha : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G, (n, a) \mapsto na$ , 满足

(1)  $\alpha$  是映射

#### 4. 模 I: 基本性质

$$(2) (n+m)a = na + ma$$

$$(3) (nm)a = n(ma)$$

$$(4) n(a+b) = na + nb$$

证: (1)  $na$  的定义依赖于  $G$  中的运算, 而运算的本质是卡氏积至原集合的映射, 有唯一的结果, 故得证.

$$(2) (n+m)a = \overbrace{a+\cdots+a}^{(n+m)\text{ 个 } a \text{ 相加}} = \overbrace{a+\cdots+a}^{n\text{ 个 } a \text{ 相加}} + \overbrace{a+\cdots+a}^{m\text{ 个 } a \text{ 相加}} = na + ma.$$

$$(3) (nm)a = \overbrace{a+\cdots+a}^{nm\text{ 个 } a \text{ 相加}} = \overbrace{\overbrace{a+\cdots+a}^{m\text{ 个 } a \text{ 相加}} + \cdots + \overbrace{a+\cdots+a}^{m\text{ 个 } a \text{ 相加}}}^{n\text{ 组}} = \overbrace{ma+\cdots+ma}^{n\text{ 个 } ma \text{ 相加}} = n(ma).$$

$$(4) n(a+b) = \overbrace{(a+b)+\cdots+(a+b)}^{n\text{ 个 } (a+b) \text{ 相加}} = \overbrace{a+\cdots+a}^{n\text{ 个 } a \text{ 相加}} + \overbrace{b+\cdots+b}^{n\text{ 个 } b \text{ 相加}} = na + nb.$$

(5) 由定义显然. □

故  $M \in \mathbb{Z} - \text{mod}$ . □

例 4.2:  $\forall$  交换群  $(G, +)$ ,  $G \in \mathbb{Z} - \text{mod}$ . □

例 4.3:  $R \in R - \text{mod}$ , 其中的数乘即  $R$  中的乘法. □

例 4.4:  $\mathbb{Z}_p = \frac{\mathbb{Z}}{p} = \{[0], \cdots, [p-1]\}$ ,  $(\mathbb{Z}_p, +)$  是交换群, 故  $\mathbb{Z}_p \in \mathbb{Z} - \text{mod}$ .

$$\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}, n[k] = \overbrace{[k]+\cdots+[k]}^{n\text{ 个 } [k] \text{ 相加}} = [nk],$$

注意到  $[2] \neq [0]$ ,  $3 \neq 0$ , 但  $3[2] = [6] = [0]$ , 即非零元素的卡氏积在数乘映射下得到零元素, 这意味着非零的单个元素不再线性无关.

实际上,  $\mathbb{Z}_p$  中无线性无关元素. □

例 4.5:  $R^n = \{(r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in R\} \in R - \text{mod}$ , 其中  $(r_1, \cdots, r_n) + (l_1, \cdots, l_n) = (r_1 + l_1, \cdots, r_n + l_n)$ ,  $r(r_1, \cdots, r_n) = (rr_1, \cdots, rr_n)$ . □

**定义 4.2 子模:**  $\emptyset \neq S \subseteq M$ , 若在  $M$  的运算下,  $S$  是  $R$  上的模, 则称  $S$  为  $M$  的子模.

**定理 4.1 判定子模的方法(课本定理4.1):**  $\emptyset \neq S \subseteq M$  是  $M$  的子模  $\iff \forall u, v \in S, \forall r, t \in R, ru + tv \in S$  (即线性运算封闭).

**定理 4.2 (课本定理4.2):**  $S, T \subseteq M$  是  $M$  的子模, 则  $S \cap T$  为  $M$  的子模,  $S + T \equiv \{u + v \mid u \in S, v \in T\}$  为  $M$  的子模.

**定理 4.3:**  $R \in R - \text{mod}$ ,  $R$  的子模即  $R$  上的理想.

证: 设  $S$  为  $R$  的子模, 则

#### 4. 模 I: 基本性质

(1)  $\emptyset \neq S \subseteq R$

(2)  $\forall u, v \in S, \forall r, t \in R, ru + tv \in S$ . 特别地, 令  $r = 1, t = -1$ , 得  $u - v \in S$ , 令  $t = 0$ , 得  $ru \in S$

故  $S$  为  $R$  的理想. □

**定义 4.3 生成子模和生成集:**  $\emptyset \neq S \subseteq M \in R - \text{mod}$ ,  $S$  的生成子模为  $\langle\langle S \rangle\rangle \equiv$  包含  $S$  的最小子模  $\equiv$  包含  $S$  的所有子模的交  $= \{\sum_{i=1}^n r_i u_i \mid r_i \in R, u_i \in S, n \in \mathbb{Z}^+\}$ , 其中称  $S$  为生成集.

$\forall M \in R - \text{mod}$ , 都有生成集,  $\therefore M = \langle\langle M \rangle\rangle$ .

**定义 4.4 有限生成模:** 生成集由有限个元素构成的生成模.

**定义 4.5 循环模:** 由一个元素生成的模.

**例 4.6:**  $R \in R - \text{mod}$  是一个循环模,  $\therefore R = \langle\langle 1 \rangle\rangle = \{r1 \mid r \in R\}$ . □

有限生成模的子模未必是有限生成的, 即有限生成的性质未必会由模遗传至其子模.

**例 4.7:** 多项式环  $R = F[x_1, \dots, x_n, \dots] \equiv \left\{ \sum_{k_i=0}^N a_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_n}^{k_n} \mid a_{i_1 \dots i_n} \in F, N_i \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ ,  $R \in R - \text{mod}$  且  $R = \langle\langle 1 \rangle\rangle$ .

假设  $S$  是有限生成的,  $S = \langle\langle f_1, \dots, f_m \rangle\rangle$ ,  $f_i = \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^{N_i} a_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n} x_{i_1}^{j_1} \cdots x_{i_n}^{j_n}$  是有限个变元的有限次多项式, 故  $S$  无法生成无限个变元的无限次多项式, 即  $S$  并非有限生成的. □

**定义 4.6 线性无关:**  $\emptyset \neq S \subseteq M$ , 若  $\sum_{i=1}^n r_i u_i = 0$  其中  $u_i \in S, r_i \in R \forall i \implies r_1 = \dots = r_n = 0$ , 则称  $S$  线性无关.

在模中, 线性无关元素未必存在, 如例 4.4 中  $\mathbb{Z}_p$  无线性无关元素.

在向量空间中, 我们有:  $u, v$  线性相关  $\iff \exists$  不全为零的  $r, t \in R$ , s.t.  $ru + tv = 0$ , 不妨设  $r \neq 0$ , 则  $ru = -tv \implies u = -\frac{t}{r}v$ .

在模中, 上述说法未必成立:  $u, v$  线性相关  $\iff \exists$  不全为零的  $r, t$ , s.t.  $ru + tv = 0$ , (不妨设  $r \neq 0$ .) 则  $ru = -tv$ , 但由于未必能找到  $r$  的逆元, 所以未必有  $u = -\frac{t}{r}v$ . 故在模中, 线性相关元素未必能相互表示, 即一个线性相关元素未必能由与其线性相关的元素线性表示.

**定义 4.7 自由模:**  $M \in R - \text{mod}$ ,  $M = \langle\langle \mathcal{B} \rangle\rangle$  且  $\mathcal{B}$  线性无关, 则称  $M$  为自由模,  $\mathcal{B}$  为  $M$  的基.

**定理 4.4 (课本定理4.3):**  $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq M$  是  $M$  的基, 则  $\forall v \in M, v$  可由  $\mathcal{B}$  中的元素唯一地线性表示.

**定理 4.5 (课本定理4.4):**  $\mathcal{B}$  是  $M$  的基  $\iff \mathcal{B}$  为  $M$  的极小生成集且为  $M$  的极大线性无关集.

**例 4.8:**  $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ ,  $\mathbb{Z}_6 = \langle\langle [1] \rangle\rangle = \langle\langle [5] \rangle\rangle$ ,

$\therefore 0[1] = [0], 1[1] = [1], 2[1] = [2], 3[1] = [3], 4[1] = [4], 5[1] = [5]$ ,

$0[5] = [0], 1[5] = [5], 2[5] = [10] = [4], 3[5] = [15] = [3], 4[5] = [20] = [2], 5[5] = [25] = [1]$ .

故  $\mathbb{Z}_6$  的表示不唯一. □

#### 4. 模 I: 基本性质

$M \in R - \text{mod}$ , 但  $M$  的子模未必自由.

**例 4.9:**  $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ , 其中  $(n, m)(k, l) = (nk, ml)$ ,  $(n, m) + (k, l) = (n + k, m + l)$  是仅为交换环 (而非域),  $R \in R - \text{mod}$ ,  $R = \langle\langle(1, 1)\rangle\rangle = \{r(1, 1) \mid r \in R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ ,  $\therefore R$  自由.

但子模  $S = \mathbb{Z} \times \{0\} = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\because \forall n \neq 0, (n, 0)(0, 1) = (0, 0)$ ,  $\therefore$  无线性无关元, 从而非自由.  $\square$

**定义 4.8 模同态:**  $M, N \in R - \text{mod}$ , 映射  $\tau : M \rightarrow N$ , 若  $\forall u, v \in M, r, t \in R, \tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$ , 则  $\tau$  为  $M$  到  $N$  的模同态, 记作  $\tau \in \text{hom}(M, N) = \{M \text{ 到 } N \text{ 的模同态}\}$ .

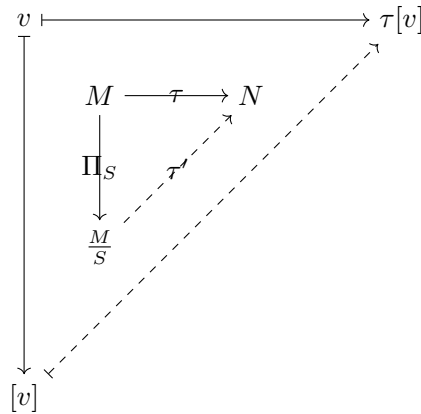
取  $r = t = 1$ , 则  $\forall u, v \in M, \tau(u + v) = \tau(u) + \tau(v)$ , 故  $\tau$  为群同态.

**定理 4.6 (课本定理4.6):** (1)  $\ker \tau \equiv \{v \in M \mid \tau(v) = 0\}$  是  $M$  的子模.  $\tau$  单射  $\iff \ker \tau = \{0\}$ .

(2)  $\text{Im } \tau \equiv \{\tau(v) \mid v \in M\}$  是  $N$  的子模.  $\tau$  满射  $\iff \text{Im } \tau = N$ .

**定义 4.9 商模:**  $S$  是  $M$  的子模, 商群  $\frac{M}{S} \equiv \{[v] \mid v \in M\}$ .

$[u] + [v] = [u + v]$ ,  $r[u] = [ru]$  是合法运算,  $\because$  结果与代表元选取无关.



$\Pi_S : M \rightarrow \frac{M}{S}, v \mapsto [v]$ , 且满足

(1)  $\Pi_S$  满射.

(2)  $\ker \Pi_S = S$ .

**定理 4.7 同态第一基本定理:** 若  $S \subseteq \ker \tau$ , 则  $\exists! \tau'$ , s.t.  $\tau = \tau' \circ \Pi_S$ .

$$\ker \tau' = \frac{\ker \tau}{S}.$$

**定理 4.8 同构第一基本定理:** 若  $S = \ker \tau$ , 则  $\tau' = \frac{\ker \tau}{S} = \{[0]\}$ , 即  $\tau'$  单射.

$\because \text{Im } \tau' = \text{Im } \tau$ ,  $\therefore$  若进一步有  $\tau$ , 则  $\tau'$  同构.

# Chapter 5

## 模 II: 自由与诺特模

**定义 5.1 诺特(Noetherian) 模:**  $M \in R - \text{mod}$ ,  $S_1, \dots, S_n, \dots$  是  $M$  的子模且  $S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots$ , 若  $\exists K \in \mathbb{Z}^+$ , s.t.  $S_K = S_{K+1} = \dots$ , 则称  $M$  满足升链条件 (A.C.C.), 称满足 ACC 的模为诺特模.

**定理 5.1 (课本定理5.7):** (1)  $M \in R - \text{mod}$  为诺特模  $\iff M$  的子模是有限生成的.  
(2)  $R$  是诺特环  $\iff R$  的理想都是有限生成的.

证: (1) “ $\implies$ ”: 设  $S$  是  $M$  的子模. 若  $S = \{0\}$ , 则  $S = \langle\langle 0 \rangle\rangle$  显然有限生成,  
若  $S \neq \{0\}$ , 则  $\exists 0 \neq v_1 \in S$ , 令  $S_1 = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \subseteq S$ ,  
若  $S_1 = S$ , 则  $S$  有限生成,  
若  $S_1 \neq S$ , 则  $\exists v_2 \in S - S_1$ , 令  $S_2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \subseteq S$ , 则  $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$ ,  
若  $S_2 = S$ , 则  $S$  有限生成,  
若  $S_2 \neq S$ , 则  $\exists 0 \neq v_3 \in S - S_2$ , 令  $S_3 = \langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle \subseteq S$ , 则  $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S$ ,  
若  $S_3 = S$ , 则  $S$  有限生成,  
若  $S_3 \neq S$ , 则  $\exists 0 \neq v_4 \in S - S_3$ , 令  $S_4 = \langle\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle\rangle \subseteq S$ , 则  $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S_4 \subseteq S$ ,  
...

以此类推, 得  $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots$ ,

$\therefore S$  满足 ACC,  $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$ , s.t.  $S_K = S_{K+1} = \dots = S = \langle\langle v_1, \dots, v_n \rangle\rangle$ , 故  $S$  有限生成.

“ $\impliedby$ ”: 取  $M$  的任一子模升链  $S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots$ , 则  $S = \bigcap_{i \in J} S_i$  是  $M$  的子模,

$\therefore M$  的子模是有限生成的,  $\therefore S$  必然是有限生成, 故设  $S = \langle\langle v_m, \dots, v_m \rangle\rangle$ ,

$\forall K = 1, \dots, m, u_k \in S = \bigcup_{i \in J} S_i \implies \exists i_k \in J$ , s.t.  $u_k \in S_{i_k}$ ,

令  $K = \max\{i_1, \dots, i_m\}$ , 则由升链的性质,  $u_1, \dots, u_m \in S_K$

$\implies S_K = S$ , 故升链必终止于  $S_K$ .

综上, 得证. □

**例 5.1:**  $\therefore \mathbb{Z}$  的任意理想均有单个元素生成, 具体地说,  $I$  是  $\mathbb{Z}$  的理想, 则  $I = \langle n \rangle$ , 其中  $n$  为  $I$  中的最小整数,  $\therefore \mathbb{Z}$  是诺特环. □

**例 5.2:**  $F[x] = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in F, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $I$  是  $F[x]$  的理想, 则  $I = \langle f(x) \rangle$ , 其中  $\deg f(x)$  是  $I$  中最小的<sup>1</sup>, 故

<sup>1</sup>多项式间的除法: 若  $\deg g(x) \geq \deg f(x)$ , 则  $\exists q(x), r(x) \in F[x]$ , s.t.  $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$  且  $(r(x) = 0 \text{ 或 } 0 < \deg r(x) < \deg f(x))$

$(F[x], +, \cdot)$  是诺特环. □

**定义 5.2 主理想:** 由一个元素生成的诺特环.

**定理 5.2 (课本定理5.8):**  $R$  为有单位元的交换环,  
 $R$  是诺特环  $\iff R$  上的有限生成模都是诺特模.

上述定理意味着有限生成的性质对诺特环是遗传的.

证: “ $\Leftarrow$ ”:  $R \in R - \text{mod}$  且  $R = \langle \langle 1 \rangle \rangle$ , 故  $R$  为诺特环.

“ $\Rightarrow$ ”: 取  $R$  上的有限生成模  $M = \langle \langle v_1, \dots, v_n \rangle \rangle \in R - \text{mod}$ ,  $M = \{ \sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R \}$ .

定义映射  $\tau: R^n \rightarrow M$ ,  $(r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i u_i$ .

$$(1) \because \tau(r(r_1, \dots, r_n) + t(l_1, \dots, l_n)) = \tau(rr_1 + tl_1, \dots, rr_n + tl_n) = \sum_{i=1}^n (rr_i + tl_i)u_i = r \sum_{i=1}^n r_i u_i + t \sum_{i=1}^n l_i u_i = r\tau(r_1, \dots, r_n) + t\tau(l_1, \dots, l_n), \therefore \tau \text{ 是 } R^n \text{ 到 } M \text{ 上的模同态}.$$

$$(2) \because \forall (r_1, \dots, r_n), \exists \sum_{i=1}^n r_i u_i, \therefore \tau \text{ 满射}.$$

$\implies \tau$  满同态.

设  $S$  是  $M$  的任一子模, 则  $\tau^{-1}(S)$  是  $R^n$  的子模, 且  $\because \tau$  满同态,  $\therefore \tau(\tau^{-1}(S)) = S$ .

【思路】根据定理 5.2, 要证  $M$  诺特, 即证  $M$  的子模  $S$  有限生成, 于是先证  $R^n$  的子模有限生成, 从而  $R^n$  诺特, 进而利用引理 5.1 得  $S$  有限生成.

数学归纳法: 当  $n = 1$  时,  $R$  诺特  $\implies R^n$  诺特.

假设当  $n = k$  时,  $R^k$  诺特, 则当  $n = k + 1$  时, 要证  $R^{k+1}$  诺特, 即证  $R^{k+1}$  的子模有限生成.

取  $I$  为  $R^{n+1}$  子模, 取  $I_1 = \{ (0, \dots, 0, a_{k+1}) \mid \exists a_1, \dots, a_k \in R, \text{ s.t. } (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \in I \}$ ,  $I_2 = \{ (a_1, \dots, a_k, 0) \mid \exists a_k \in R, \text{ s.t. } (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \in I \}$ .

$\forall (0, \dots, 0, a_{k+1}), (0, \dots, 0, b_{k+1}) \in I_1$ ,  $\exists a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in R$ , s.t.  $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}), (b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \in I$ ,  
 $\because I$  是子模,  $\therefore \forall r, t \in R$ ,  $r(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) + t(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) = (ra_1 + tb_1, \dots, ra_k + ta_k) \in I \implies r(0, \dots, 0, a_{k+1}) + t(0, \dots, 0, b_{k+1}) = (0, \dots, 0, ra_{k+1} + tb_{k+1}) \in I_2$ , 故  $I_1$  为  $R^{k+1}$  的子模.

$\forall (a_1, \dots, a_k, 0), (b_1, \dots, b_k, 0) \in I_2$ ,  $\exists a_{k+1}, b_{k+1}$ , s.t.  $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}), (b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \in I$   
 $\therefore I$  是子模,  $\therefore \forall r, t \in R$ ,  $r(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) + t(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) = (ra_1 + tb_1, \dots, ra_k + ta_k) \in I \implies r(a_1, \dots, a_k, 0) + t(b_1, \dots, b_k, 0) = (ra_1 + tb_1, \dots, ra_k + tb_k, 0) \in I_2$ , 故  $I_2$  为  $R^{k+1}$  的子模.

令  $J_1 = \{ a_{k+1} \mid (0, \dots, 0, a_{k+1}) \in I_1 \}$ ,  $J_2 = \{ (a_1, \dots, a_k) \mid (a_1, \dots, a_k) \in I_2 \}$ , 易证  $J_1$  是  $R$  的子模,  $J_2$  是  $R^k$  的子模.

$\because R, R^k$  诺特,  $\therefore J_1, J_2$  有限生成, 设  $J_1 = \langle \langle g_1, \dots, g_m \rangle \rangle$ ,  $J_2 = \langle \langle f_1, \dots, f_n \rangle \rangle$ , 其中  $g_1 \in R, f_i \in R^k$ .

于是  $\forall i = 1, \dots, m$ ,  $(0, \dots, 0, g_i) \in I_1$ , 由  $I_1$  的定义,  $\exists g_{i_1}, \dots, g_{i_k} \in R$ , s.t.  $\bar{g}_i \equiv (g_{i_1}, \dots, g_{i_n}, g_i) \in I$ ,

又有  $\bar{f}_i = (f_i, 0)$ ,

$\forall r = (r_1, \dots, r_k, r_{k+1}) \in I$ , 则  $(0, \dots, 0, r_{k+1}) \in I_1$ , 即  $r_{k+1} \in J_1 = \langle \langle g_1, \dots, g_m \rangle \rangle$ ,

于是  $r_{k+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$ ,  $(h, 0) \equiv r - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{g}_i = (*, \dots, *, 0) \in I$ , 从而  $(h, 0) \in I_2$ ,  $h \in J_2$ , 设  $h = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i$   
 $\implies r = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{g}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{f}_i$ , 故  $I$  由  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$  生成  $\implies R^{k+1}$  诺特  $\implies R^n$  诺特  $\forall n \implies S = \tau(\tau^{-1}(S))$  有限生成. □

**引理 5.1:**  $\tau: M \rightarrow N$  满同态, 则  $M$  有限生成  $\implies N$  有限生成, 即有限生成模的满同态像有限生成.

**证:**  $\because M$  有限生成,  $\therefore$  设  $M = \langle \langle v_1, \dots, v_n \rangle \rangle = \{ \sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R \}$ ,

$\because \tau$  满同态,  $\therefore N = \text{Im } \tau = \{ \tau(u) \mid u \in M \} = \{ \tau(u) \mid u = \sum_{i=1}^n r_i v_i, r_i \in R \} = \{ \tau(\sum_{i=1}^n r_i v_i) \mid r_i \in R \} = \{ \sum_{i=1}^n r_i \tau(v_i) \mid r_i \in R \} = \langle \langle \tau(v_1), \dots, \tau(v_n) \rangle \rangle$ , 故  $N$  有限生成.  $\square$

**定理 5.3 Hilbert 基本定理(课本定理5.9):**  $R$  是诺特环  $\implies R[x] \equiv \{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in R, n \in \mathbb{Z}^+ \}$  诺特, 其中  $\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^m b_j x^j = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) x^k$ ,  $(\sum_{i=0}^n a_i x^i) \left( \sum_{j=0}^m b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{nm} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$ .

**证:** 设  $I$  是  $R[x]$  的理想,  $I_k = \{ r_k \in R \mid \exists a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + r_k x^k \in I \}$  是  $R$  的理想,

且  $\because \forall f(x) \in I, xf(x) \in I, \therefore I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_K \subseteq \dots$

又  $\because R$  诺特,  $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$ , s.t.  $I_K = I_{K+1} = \dots$ , 且  $R$  的理想均有限生成,

故设  $I_0 = \langle r_{01}, r_{02}, \dots, r_{0t_0} \rangle, I_1 = \langle r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1t_1} \rangle, \dots, I_K = \langle r_{K1}, r_{K2}, \dots, r_{Kt_K} \rangle$ ,

$g_{01} = r_{01} \in I, g_{02} = r_{02} \in I, \dots, g_{0t_0} = r_{0t_0} \in I$ ,

$g_{11} = r_{11}x + O(1) \in I, g_{12} = r_{12}x + O(1) \in I, \dots, g_{1t_1} = r_{1t_1}x + O(1) \in I$ ,

$\dots$ ,

$g_{K1} = r_{K1}x^K + O(x^{K-1}) \in I, g_{K2} = r_{K2}x^K + O(x^{K-1}) \in I, \dots, g_{Kt_K} = r_{Kt_K}x^K + O(x^{K-1}) \in I$ ,

则  $I$  由  $\{ g_{ij} \mid i = 1, \dots, K; j = 1, \dots, t_i \}$  生成,

$\forall f(x) \in I$ , 设  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,

取  $a_n \in I_n$ , 若  $n > K$ , 则  $I_n = I_K = \langle r_{K1}, \dots, r_{Kt_K} \rangle$ , 从而  $a_n = \sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i r_{Ki}$ ,

$\implies f(x) = a_n x^n + O(x^{n-1}) = x^{n-1} \left( \sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki} \right) + O(x^{n-K}) = x^{n-K} \left( \sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki} \right) + O(x^{K-1}) = \sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i r_{Ki} x^n + O(x^{n-1})$ ,

$f(x) \rightarrow f(x) - x^{n-K} \left( \sum_{i=1}^{t_K} \alpha_i g_{Ki} \right) = \beta_{n-1} x^{n-1} + O(x^{n-2})$ ,

重复以上操作直至多项式的最高次数  $n < K$ , 此时,  $a_n \in I_n = \langle r_{n1}, \dots, r_{nt_n} \rangle, a_n = \sum_{j=1}^{t_n} \beta_j r_{nj}, f(x) - \sum_{j=1}^{t_n} \beta_j g_{nj} =$ , 即执行以上操作有限次后,  $f(x)$  完全由  $g_{ij}$  表示  $\implies I$  有限生成, 故由定理 5.1 得,  $R[x]$  诺特.  $\square$

**例 5.3:**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  诺特  $\implies \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$  诺特.

$\mathbb{R}[z] = \{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \}$ ,

方程组  $\begin{cases} f_1(x) = a_{1n}x^n + a_{1,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{11}x + a_{10} = 0, \\ \dots \\ f_m(x) = a_{mn}x^n + a_{m,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{m1}x + a_{m0} = 0, \end{cases}$  的解为  $\mathbb{R}$  的子集合,

令  $h(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x)$ , 若  $f_i(x) = 0 \forall i$ , 则  $h(x) = 0$ .

方程组与解集合之间存在的一一对应的关系, 正如  $\mathbb{R}[x]$  与  $\mathbb{R}$  之间的对应关系.  $\square$



# Chapter 6

## 主理想整环上的模

定义 6.1 主理想整环(PID): 每个理想均由一个元素生成的整环.

例 6.1:  $\mathbb{Z}, \mathbb{C}[x]$  为 PID. □

PID 必诺特.

$\mathbb{R}$  为整环,  $a, b, r, s \in R$ ,

(1)

定义 6.2 整除:  $r$  整除  $s \iff s = xr, x \in R$ , 记作  $r \mid s$ .

(2)

定义 6.3 单位:  $R$  中的可逆元.

例 6.2:  $\mathbb{Z}$  中的 1 和  $-1$  互逆, 故 1 和  $-1$  均为单位.

实际上, 若  $F$  为域, 则  $F^* \equiv \mathbb{Z} - \{0\}$  中的元素均为单位. □

(3)

定义 6.4 素元:  $0 \neq q \in R$ , 若  $p \mid ab \implies p \mid a$  或  $p \mid b$ , 则称  $p$  为素元.

(4)

定义 6.5 不可约元:  $0 \neq r \in R$ , 若  $r = ab \implies a$  或  $b$  为单位, 则称  $r$  为不可约元.

(5)

定义 6.6 互素:  $r$  与  $b$  互素  $\implies a$  与  $b$  无非单位公因子.

注意:

- 单元必素, 必不可约.

证: 设  $0 \neq r \in R$  为单位, 则必  $\exists a$  的逆  $a^{-1}$ .

若  $r \mid ab$ , 则  $(ar^{-1})r = a$ ,  $(br^{-1})r = b \implies r$  为素元.

若  $r = ab$ , 则  $r^{-1}r = r^{-1}(ab) = (r^{-1}a)b = 1$ ,  $r^{-1}a$  为  $b$  的逆元, 即  $b$  可逆  $\implies r$  为不可约元. □

- 对于整环来说, 素元不可约, 反之未必.

证: 设  $p$  为素元, 若  $p = ab$ , 则  $1p = p = ab \implies p \mid ab$ .

$\because p$  为素元,  $\therefore p \mid a$  或  $p = b$ .

不妨  $p \mid a$ , 则  $a = px$ , 其中  $x \in R$

$\implies p = ab = pxb \implies p(1 - xb) = 0$ ,

$\because p \neq 0$  且  $R$  为整环 ( $R$  无零因子),  $\therefore 1 - xb = 0 \implies xb = 1 \implies b$  为单位, 故  $p$  为不可约元. □

例 6.3: (不可约元非素的例子)  $R = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  为整环.

$9 = 3^2 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ ,

$3$  不可约 (证略),  $3 \mid (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ , 但  $3 \nmid (2 + \sqrt{-5})$ ,  $3 \nmid (2 - \sqrt{-5}) \implies 3$  非素. □

- 对于非整环来说, 素元未必不可约.

例 6.4:  $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$  非整环,  $[2]$  为素元, 但  $[2] = [2][4]$ ,  $[2]$  和  $[4]$  均非单位  $\implies [2]$  可约. □

**定理 6.1 (课本定理0.29):**  $R$  为 PID,  $a, b \in R$ ,

$a$  与  $b$  互素  $\iff \exists r, t \in R$ , s.t.  $ra + tb = 1$ .

证: “ $\implies$ ”:  $R$  为 PID, 令  $I = \langle a, b \rangle$ ,

$\because R$  是主理想,  $\therefore I$  可由一个元素生成, 设  $I = \langle c \rangle$ , 其中  $c \in R$ ,

又  $\because a \in I, b \in I, \therefore c \mid a, c \mid b \implies c$  为  $a$  和  $b$  的公因子,

$\because a, b$  互素,  $\therefore c$  为单位, 即  $\exists c^{-1} \in R$ , s.t.  $1 = c^{-1}c \in I$ ,

$\therefore 1 \in I, \therefore 1 = ra + tb$ .

“ $\Leftarrow$ ”: 取  $c$  为  $a$  和  $b$  的公因子,

$\because 1 = ra + tb, \therefore c \mid 1 \implies c$  可逆, 即  $c$  为单位. □

有算法可以在给定  $a, b$  下找到  $s, t$ , 此处不赘述.

**定理 6.2 (课本定理0.29):**  $R$  是 PID,  $\forall 0 \neq r \in R, r = up_1 \cdots p_n$  且该分解式唯一, 其中  $u$  为单位,  $p_i$  是  $R$  中的不可约元,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

证: 若  $r$  不可约, 则直接得证.

若  $r$  可约, 则设  $r = r_1 r_2$ ,  $r_1$  和  $r_2$  至少有一个非单位,

不妨  $r_1$  不是单位, 则  $r_1$  不可约.

若  $r_2$  不可约, 则得证,

若  $r_2$  可约, 则  $\langle r \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle$ ,

对  $r_2$  继续如上分解, 可得  $\langle r \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle \subseteq \cdots$ ,

又  $\because R$  为 PID,  $\therefore R$  诺特, 即  $\exists K \in \mathbb{Z}^+$ , s.t.  $\langle r_K \rangle = \langle r_{K+1} \rangle = \cdots$ ,

故重复如上分解操作, 最终可将  $r$  表为有限个不可约元的乘积. □

**定义 6.7 挠元(Torsion):**  $M \in R - \text{mod}$ ,  $v \in M$ , 若  $\exists 0 \neq r \in R$ , s.t.  $rv = 0$ , 则称  $v$  为  $M$  的挠元.

**定义 6.8 挠模:** 所有元素均为挠元的模.

**定义 6.9 无挠:** 若一模无非零挠元, 则称该模无挠.

与线性无关类似, 若  $0 \neq v \in M$ ,  $r \in R$ ,  $rv = 0$ , 且  $M$  无挠, 则  $r = 0$ .

**定义 6.10 挠子模:**  $M_{\text{tor}} = \{v \in M \mid v \text{ 为挠元}\}.$

$\because 0$  为  $M$  的挠元,  $0 \in M_{\text{tor}}$ ,  $\therefore M_{\text{tor}} \neq \emptyset$ .

$M_{\text{tor}}$  为  $M$  的子模.

**证:**  $\forall u, v \in M_{\text{tor}}$ ,  $\exists 0 \neq r_1, r_2 \in R$ , s.t.  $r_1 u = 0$ ,  $r_2 v = 0$ ,

$\forall s, t \in R$ ,  $(r_1 r_2)(su + tv) = r_2 s(r_1 u) + r_1 t(r_2 v) = r_2 s \cdot 0 + r_1 t \cdot 0 = 0 + 0 = 0$  且  $r_1 r_2 \neq 0 \implies (su + tv) \in M_{\text{tor}}$ , 故得证.  $\square$

$\frac{M}{M_{\text{tor}}}$  无挠.

**证:** 假设  $[0] \neq [v] \in \frac{M}{M_{\text{tor}}}$  为挠元, 则  $\exists 0 \neq r \in R$ ,  $r[v] = [rv] = [0] = M_{\text{tor}} \implies rv \in M_{\text{tor}} \implies v = r^{-1}(rv) \in M_{\text{tor}} \implies [v] = M_{\text{tor}} = [0]$ , 与假设矛盾, 故假设错误, 得证.  $\square$

**定义 6.11 零化子:**  $v \in M \in R - \text{mod}$ ,  $v$  的零化子  $\text{ann}(v) \equiv \{r \in R \mid rv = 0\} \subseteq R$ .

$N$  是  $M$  的子模, 则  $\text{ann}(N) = \{r \in R \mid rN \equiv \{rv \mid v \in N\} = \{0\}\} \subseteq R$ .

$\text{ann}(v)$  是  $R$  的理想.

**证:**  $\forall s, t \in \text{ann}(v)$ ,  $sv = tv = 0 \implies sv - tv = (s - t)v = 0 \implies s - t \in \text{ann}(v)$ ,

$\forall r \in R$ ,  $(rs)v = r(sv) = r \cdot 0 = 0 \implies rs \in \text{ann}(v)$ .

综上, 得证.  $\square$

同理,  $\text{ann}(N)$  也是  $R$  的理想

**定义 6.12 阶:** 若  $R$  为 PID, 则  $\text{ann}(v), \text{ann}(N)$  均为主理想, 其生成元分别称为  $v$  和  $N$  的阶.

**定理 6.3 (课本定理6.5):**  $R$  为 PID,  $M \in R - \text{mod}$  自由, 则  $M$  的子模均自由.

**证:** (不严谨的证明, 仅针对)  $M$  有限生成 (的特殊情况) 且自由. 设  $M = \langle \langle v_1, \dots, v_n \rangle \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R\}$ , 其中  $\{v_1, \dots, v_n\}$  线性无关.

$\forall v \in M$ ,  $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$  展开唯一, 定序后,  $M \longleftrightarrow R^n$ ,  $v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$  模同构.

设  $S$  是  $R^n$  的子模, 取  $R$  的理想  $I_k = \{r_k \in R \mid \exists a_1, \dots, a_{k-1} \in R, \text{ s.t. } (a_1, \dots, a_{k-1}, r_k, 0, \dots, 0) \in S\}$ .

$\because R$  为 PID,  $\therefore I_k$  由一个元素生成, 设  $I_k = \langle r_k \rangle$ , 其中  $r_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ .

取  $u_k = (a_1^k, \dots, a_{k-1}^k, r_k, 0, \dots, 0) \in S, S = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  生成 (下证) 且显然  $\{u_1, \dots, u_n\}$  线性无关.

取  $(b_1, \dots, b_n) \in S$ , 若  $b_n \neq 0$ , 则  $b_n \in I_n = \langle r_n \rangle \implies \exists x_n \in R, \text{ s.t. } b_n = x_n r_n \implies (b_1, \dots, b_n) - x_n b_n = (\dots, 0)$ , 重复如上操作, 最终可将  $(b_1, \dots, b_n)$  用  $\{u_1, \dots, u_n\}$  表示.

故得证.  $\square$

**定理 6.4 (课本定理6.6):**  $R$  为 PID,  $M \in R - \text{mod}$  有限生成,  
 $M$  自由  $\iff M$  无挠.

**证:** “ $\implies$ ”: 设  $M = \langle \langle v_1, \dots, v_n \rangle \rangle$  且  $\{v_1, \dots, v_n\}$  线性无关.

$\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ ,

若  $rv = 0$ , 则  $r(\sum_{i=1}^n r_i v_i) = \sum_{i=1}^n (rr_i) v_i = 0$ ,

$\because \{v_1, \dots, v_n\}$  线性无关,  $\therefore rr_1 = \dots = rr_n = 0$ ,

$\because R$  为整环 (无零因子),  $\therefore$  若  $r \neq 0$ , 则  $r_1 = \dots = r_n = 0 \implies v = 0$ , 故  $M$  无挠.

“ $\impliedby$ ”: 取  $M = \langle \langle u_1, \dots, u_m \rangle \rangle$ ,

不妨设  $u_1, \dots, u_k$  是其中最大的线性无关组, 即  $\forall i = k+1, \dots, m, \{u_1, \dots, u_k, u_i\}$  线性相关

$\implies \exists$  不全为零的  $a_{i1}, \dots, a_{ik}, a_i$ , s.t.  $a_{i1}u_1 + \dots + a_{ik}u_k + a_i u_i = 0$ ,

显然  $a_i \neq 0$  (否则  $a_{i1}u_1 + \dots + a_{ik}u_k = 0 \implies a_{i1} = \dots = a_{ik} = 0$ , 矛盾)  $\implies a_i u_i = -(a_{i1}u_1 + \dots + a_{ik}u_k)$ .

令  $a = a_{k+1} \dots a_m$ , 则  $a \neq 0$ ,

$aM = \langle \langle au_1, \dots, au_k, au_{k+1}, \dots, au_m \rangle \rangle \subseteq \langle \langle u_1, \dots, u_k \rangle \rangle$ ,

$\because \{u_1, \dots, u_k\}$  线性无关,  $\therefore \langle \langle u_1, \dots, u_k \rangle \rangle$  是自由模,

$\because R$  为 PID, 自由具有遗传性,  $\therefore aM$  自由. 构造映射  $\tau: M \rightarrow aM, v \mapsto av$ .

(1)  $\tau$  线性.

(2)  $\because M$  无挠且  $a \neq 0, \therefore \ker \tau = \{v \in M \mid av = 0\} = \{0\}$ .

(3)  $\tau$  满射.

故  $\tau$  同构  $\implies M$  也自由.

综上, 得证.  $\square$

$\because M$  自由,  $\therefore M = \langle \langle v_1, \dots, v_n \rangle \rangle$ ,

又  $\because \{v_1, \dots, v_n\}$  线性无关,  $\therefore$  对  $i \neq j, \langle \langle v_i \rangle \rangle \cap \langle \langle v_j \rangle \rangle = \{0\} \implies M = \langle \langle v_1 \rangle \rangle \oplus \dots \oplus \langle \langle v_n \rangle \rangle$ .

**定理 6.5 (课本定理6.8):**  $R$  是 PID,  $M \in R - \text{mod}$  有限生成, 则  $M = M_{\text{free}} \oplus M_{\text{tor}}$ , 其中  $M_{\text{free}} = \frac{M}{M_{\text{tor}}}$ .

**证:**  $M_{\text{tor}}$  为挠子模且  $\frac{M}{M_{\text{tor}}}$  无挠.

$\because \Pi: M \rightarrow \frac{M}{M_{\text{tor}}}, u \mapsto [u]$  满同态且  $M$  有限生成, 由引理 6.1 得  $\frac{M}{M_{\text{tor}}}$  有限生成.

又  $\because \frac{M}{M_{\text{tor}}}$  无挠,  $\therefore \frac{M}{M_{\text{tor}}}$  自由.

取  $\frac{M}{M_{\text{tor}}} = \langle \langle [u_1], \dots, [u_t] \rangle \rangle$ , 其中  $\{u_1, \dots, u_t\}$  线性无关 (下证),

**证:** 若  $\sum_{i=1}^t r_i u_i = 0$ , 则  $\Pi(\sum_{i=1}^t r_i u_i) = \sum_{i=1}^t r_i \Pi(u_i) = \sum_{i=1}^t r_i [u_i] = 0$ ,

又  $\because \{[u_1], \dots, [u_t]\}$  线性无关,  $\therefore r_1 = \dots = r_t = 0 \implies \{u_1, \dots, u_t\}$  线性无关.  $\square$

故  $\langle\langle u_1, \dots, u_t \rangle\rangle$  为自由模, 记作  $M_{\text{free}}$ .

确定了  $M_{\text{free}}$  和  $M_{\text{tor}}$  后, 下面来证  $M = M_{\text{free}} \oplus M_{\text{tor}}$ :

$$\forall v \in M, \Pi(v) = [v] \in \frac{M}{M_{\text{tor}}} = \langle\langle [u_1], \dots, [u_t] \rangle\rangle \implies \Pi(v) = [v] = \sum_{i=1}^t l_i [u_i].$$

$$\text{令 } u = \sum_{i=1}^t l_i u_i \in M_{\text{free}}, \text{ 则 } \tau(u) = \tau\left(\sum_{i=1}^t l_i u_i\right) = \sum_{i=1}^t l_i \tau(u_i) = \sum_{i=1}^t l_i [u_i] = \Pi(v).$$

$$\Pi(v - u) = \Pi(v) - \Pi(u) = 0 \implies v - u \in \ker \Pi = M_{\text{tor}},$$

$$\text{于是 } v = u + (v - u), \text{ 其中 } u \in M_{\text{free}}, v - u \in M_{\text{tor}} \implies M = M_{\text{free}} + M_{\text{tor}}.$$

$$\text{取 } w \in M_{\text{free}} \cap M_{\text{tor}}, \text{ 则 } w \in M_{\text{free}} \iff w = \sum_{i=1}^t \alpha_i u_i,$$

$$\text{且 } w \in M_{\text{tor}} \iff \Pi(w) = 0$$

$$\implies 0 = \Pi(w) = \Pi\left(\sum_{i=1}^t \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^t \alpha_i \Pi(u_i) \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0 \implies w = 0 \implies M_{\text{free}} \cap M_{\text{tor}} = \{0\}.$$

综上, 得证. □

**引理 6.1:**  $\tau: M \rightarrow N$  满同态, 若  $M$  有限生成, 则  $N$  有限生成.

**证:**  $\because \tau: M \rightarrow N$  满同态,  $\therefore \forall w \in N, \exists u \in M, \text{ s.t. } w = \tau(u),$

又  $\because M$  有限生成, 设  $M = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle, \therefore u = \sum_{i=1}^k r_i u_i \implies \tau(u) = \tau\left(\sum_{i=1}^k r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^k r_i \tau(u_i),$

故  $N = \langle\langle \tau(u_1), \dots, \tau(u_k) \rangle\rangle$ , 即  $N$  有限生成. □

至此,  $M_{\text{free}} = \langle\langle u_1, \dots, u_t \rangle\rangle = \langle\langle u_1 \rangle\rangle \oplus \dots \oplus \langle\langle u_t \rangle\rangle$  已拆解到位. 那么能否以及如何继续拆解  $M_{\text{tor}}$  呢?

**定理 6.6 (课本定理6.10):**  $R$  为 PID,  $M \in R - \text{mod}$  为挠模且  $\text{ann}(M) = \langle\langle \mu \rangle\rangle$ , 其中  $\mu = up_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$ ,  $u$  为单位,  $p_i$  均不可约且互不相等,  $e_i \in \mathbb{Z}^+$ ,

则  $M = M_{p_1} \oplus \dots \oplus M_{p_m}$ , 其中  $M_{p_i} = \{v \in M \mid p_i^{e_i} v = 0\}$  是阶为  $p_i^{e_i}$  (即  $\text{ann}(M_{p_i}) = \langle p_i^{e_i} \rangle$ ) 的准素子模.

**证:** 不失一般性, 设  $\mu = pq$ ,  $p$  与  $q$  互素, 要证  $M = M_p \oplus M_q$ , 其中  $M_p = \{v \mid pv = 0\}$ ,  $M_q = \{v \mid qv = 0\}$ .

$\because p$  与  $q$  互素,  $\therefore \exists r, t \in R, \text{ s.t. } rp + tq = 1.$

$$\forall v \in M, v = 1v = (rp + tq)v = (rp)v + (tq)v,$$

$$q(rp)v = (qrp)v = (rpq)v = r(pq)v = r\mu v,$$

$$\text{又 } \because \langle\langle \mu \rangle\rangle \text{ 为零化子, } \therefore q(rpv) = r\mu v = 0 \implies rpv \in M_q,$$

同理,  $tqv \in M_p$ , 故  $M = M_p + M_q$ .

$$\text{若 } v \in M_p \cap M_q, \text{ 则 } v \in M_p \iff pv = 0,$$

$$\text{且 } v \in M_q \iff qv = 0$$

$$\implies v = 1v = (rp + tq)v = rpv + tqv = r \cdot 0 + t \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \implies M_p = M_q = \{0\}.$$

$$\because M_p = \{v \mid pv = 0\}, \therefore \text{ann}(M_p) = \langle p \rangle, \text{ 易推广得 } M_{p_i} = \langle p_i^{e_i} \rangle.$$

综上, 得证. □

然后准素子模能否进一步分解呢?

**定理 6.7 (课本定理6.11):**  $R$  为 PID,  $M \in R - \text{mod}$  有限生成且为挠模,  $\text{ann}(M) = \langle p^e \rangle$ , 其中  $p$  不可约,  $e \in \mathbb{Z}^+$ ,

则  $M = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \dots \oplus \langle\langle v_n \rangle\rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_i) = \langle p^{e_i} \rangle$ , 且  $e = e_1 \geq \dots \geq e_n$ .

**证:** (存在性证明) 不失一般性, 只需证  $M$  由两个生成元时, 定理成立, 即可由数学归纳法推广到一般情况.

设  $M = \langle\langle u_1, u_2 \rangle\rangle$  且  $u_1, u_2 \neq 0$ ,  $\text{ann}(M) = \{r \in R \mid rM = \{0\}\} = \langle p^e \rangle$ .

$$\because u_1 \in M, \therefore p^e u_1 = 0 \implies p^e \in \text{ann}(u_1),$$

同理,  $p^e \in \text{ann}(u_2).$

若  $\text{ann}(u_1) = \langle b_1 \rangle$ , 则  $\because p$  不可约,  $\therefore b_1 \mid p^e \implies b_1 = p^{l_1}$ ,  $l_1 \leq e$ ,

同理, 若  $\text{ann}(u_2) = \langle b_2 \rangle$ , 则  $b_2 = p^{l_2}$ ,  $l_2 \leq e$ .

假设  $l_1 < e$ ,  $l_2 < e$ , 令  $l = \max\{l_1, l_2\}$ , 则  $p^e \nmid p^l$  且  $p^l \in \text{ann}(M)$ , 与  $\text{ann}(M) = \langle p^e \rangle$  矛盾, 故假设错误,  $l_1, l_2$  中至少有一个  $= e$ .

不妨设  $l_1 = e$  即  $\text{ann}(u_1) = \langle p^e \rangle$ .

$M = \langle \langle u_1, u_2 \rangle \rangle \implies M = \langle \langle u_1 \rangle \rangle + \langle \langle u_2 \rangle \rangle$ ,

若  $\langle \langle u_1 \rangle \rangle \cap \langle \langle u_2 \rangle \rangle = \{0\}$ , 则  $M = \langle \langle u_1 \rangle \rangle \oplus \langle \langle u_2 \rangle \rangle$ , 得证.

若  $\langle \langle u_1 \rangle \rangle \cap \langle \langle u_2 \rangle \rangle \neq \{0\}$ , 则  $\exists 0 \neq r \in R$ , s.t.  $ru_2 \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle$ .

取  $R$  的理想  $J = \{r \in R \mid ru_2 \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle\}$ .

$\because R$  为 PID,  $\therefore J$  由一个元素生成, 设  $J = \langle \langle t \rangle \rangle$ .

$\because p^e u_2 = 0 \implies p^e \in J$ ,  $\therefore p^e \in J \implies t \mid p^e$ ,

又  $\because p$  不可约,  $\therefore t = p^{e_2}$  且  $e_2 \leq e$ ,

又  $\because J = \{r \in R \mid ru_2 \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle\} = \langle \langle t \rangle \rangle$ ,  $\therefore p^{e_2} u_2 \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle$ , 即  $\exists \alpha \in R$ , s.t.  $p^{e_2} u_2 - \alpha u_1 = 0$

$\implies p^{e-e_2}(p^{e_2} u_2 - \alpha u_1) = 0 \implies p^e u_2 - p^{e-e_2} \alpha u_1 = 0$ ,

又  $\because p^e u_2 = 0$ ,  $\therefore p^{e-e_2} \alpha u_1 = 0 \implies p^{e-e_2} \alpha \in \text{ann}(u_1)$ ,

又  $\because \text{ann}(u_1) = \langle p^e \rangle$ ,  $\therefore p^e \mid p^{e-e_2} \alpha \implies p^{e_2} \mid \alpha \implies \exists \beta \in R$ , s.t.  $\alpha = \beta p^{e_2}$ ,

回代到  $p^{e_2} u_2 - \alpha u_1 = 0$  得  $p^{e_2} u_2 - p^{e_2} \beta u_1 = 0 \implies p^{e_2}(u_2 - \beta u_1) = 0$ .

令  $w = u_2 - \beta u_1$ , 则  $M = \langle \langle u_1, w \rangle \rangle$ , 且  $\langle \langle u_1 \rangle \rangle \cap \langle \langle w \rangle \rangle = \{0\}$  (下证),

**证:** 设  $v \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle \cap \langle \langle w \rangle \rangle$ , 则  $v \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle$ ,

且  $v \in \langle \langle w \rangle \rangle \implies \exists r \in R$ ,  $v = rw$

$\implies v = rw = ru_2 - r\beta u_1 \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle$ ,

$\because r\beta u_1 \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle$ ,  $\therefore ru_2 \in \langle \langle u_1 \rangle \rangle$ , (由  $J$  的定义) 即  $r = p^{e_2} r_1$ ,

回代得  $v = rw = p^{e_2} r_1 u_2 - p^{e_2} r_1 \beta u_1 = p^{e_2} r_1 u_2 - p^{e_2} r_1 \beta u_1 = p^{e_2} r_1 u_2 - r_1 (\beta p^{e_2}) u_1 = r_1 (p^{e_2} u_2 - \alpha u_1) = r_1 0 = 0 \implies \langle \langle u_1 \rangle \rangle \cap \langle \langle w \rangle \rangle = \{0\}$ . □

故  $M = \langle \langle u_1 \rangle \rangle \oplus \langle \langle w \rangle \rangle$ , 其中  $u_1$  的阶为  $p^{e_1}$ ,  $w$  的阶为  $p^{e_2}$ ,  $e_2 \leq e_1 = e$ . □

总结定理 6.5, 6.6 和 6.7, 可得:

**定理 6.8 (课本定理6.12):**  $R$  为 PID,  $M \in R - \text{mod}$  有限生成,

则  $M = M_{\text{free}} \oplus M_{\text{tor}}$ , 其中  $M_{\text{free}} = \frac{M}{M_{\text{tor}}}$ .

若  $\text{ann}(M_{\text{tor}}) = \langle \mu \rangle$ , 其中  $\mu = up_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ ,  $u$  为单位,  $p_i$  不可约且互不相等,  $e_i \in \mathbb{Z}^+$ ,

则  $M_{\text{tor}} = M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_n}$ , 其中  $M_{p_i} = \{v \in M_{\text{tor}} \mid p_i(v) = 0\}$  即  $\text{ann}(M_{p_i}) = \langle p_i^{e_i} \rangle$ ,

$M_{p_i} = \langle \langle v_i \rangle \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \langle v_{it_i} \rangle \rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}} \rangle$ ,  $e_i = e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$ .

$$\text{故 } M = \overbrace{\left( \bigoplus_{i=1}^m \langle \langle u_i \rangle \rangle \right)}^{M_{\text{free}}} \oplus \overbrace{\left[ \bigoplus_{i=1}^n \left( \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle \langle v_{ij} \rangle \rangle \right) \right]}^{M_{\text{tor}}}.$$

由定理 6.7,  $M_{\text{tor}} = \bigoplus_{ij} \langle v_{ij} \rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}} \rangle$ ,  $e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$ . 这里,

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1t_1} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2t_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nt_n} \end{pmatrix}$$

生成了  $M_{\text{tor}}$ , 其阶为

**定义 6.13 初等因子:**  $M$  的初等因子:

$$\begin{pmatrix} p_1^{e_{11}} & p_1^{e_{12}} & \cdots & p_1^{e_{1t_1}} \\ p_2^{e_{21}} & p_2^{e_{22}} & \cdots & p_2^{e_{2t_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n^{e_{n1}} & p_n^{e_{n2}} & \cdots & p_n^{e_{nt_n}} \end{pmatrix}.$$

此外, 还定义了

**定义 6.14 不变因子:**  $M$  的不变因子:

$$\begin{aligned} q_1 &= \prod_i p_i^{e_{1i}}, \\ q_2 &= \prod_i p_i^{e_{2i}}, \\ &\vdots, \\ q_t &= \prod_i p_i^{e_{ti}}. \end{aligned}$$

# Chapter 7

## 线性算子的结构

先回顾一下线性算子:  $V$  为域  $F$  上的向量空间,  $\dim V = n$ ,  $\mathcal{L}(V) = M_{n \times n}(F)$ ,  $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ , 取  $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{L}(V)$ , 有

$$(1) (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v)$$

$$(2) (\tau \circ \sigma)(v) = \tau(\sigma(v))$$

$$(3) (r\tau)(v) = r \cdot \tau(v)$$

其中  $\mathcal{L}(V)$  关于 (1) 中的加法和 (2) 中的复合成环, 关于 (1) 中的加法和 (3) 中的点乘成向量空间, 故  $\mathcal{L}$  为代数. 设  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$  分别是  $V$  的两组定序基,

$$\begin{array}{ccc} F^n & \xrightarrow{\tau'_A} & F^n \\ \uparrow \phi'_B & & \uparrow \phi'_B \\ V & \xrightarrow{\tau} & V \\ \downarrow \phi_B & & \downarrow \phi_B \\ F^n & \xrightarrow{\tau_A} & F^n \end{array}$$

**定理 7.1 (课本定理7.1):** 线性算子  $\tau$  在定序基  $\mathcal{B}$  下的表示为  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$ . 当  $\tau$  作用于  $v \in V$ , 可表为矩阵与向量相乘,  $[\tau(v)]_{\mathcal{B}} = [\tau]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$ .

**定理 7.2 (课本定理7.2):**  $\tau$  在两组定序基  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{B}'$  下的表示之间的关系是  $[\tau]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$ , 其中  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$ .

**定义 7.1 相似:** 类似上面的  $[\tau]_{\mathcal{B}}$  和  $[\tau]_{\mathcal{B}'}$ , 若两个矩阵  $A, B$  满足  $B = PAP^{-1}$ , 则称  $A$  与  $B$  相似, 由两两相似的矩阵组成的集合称为相似类.



## 7. 线性算子的结构

取线性算子  $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n^2} \in \mathcal{L}(V)$ ,

$\therefore$  这些线性算子的数量  $n^2 + 1 > \dim \mathcal{L}(V) = n^2$ ,  $\therefore$  这些线性算子线性相关,

即  $\exists$  不全为 0 的  $r_0, \dots, r_{n^2} \in F$ , s.t.  $r_0 + r_1\tau + \dots + r_{n^2}\tau^{n^2} = 0$

$\implies \forall v \in V, \left(\sum_{i=0}^{n^2} r_i \tau^i\right)(v) = 0 \implies \sum_{i=0}^{n^2} r_i \tau^i(v) = 0$ .

令  $f(x) = \sum_{i=0}^{n^2} r_i x^i \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $f(\tau)(v) = 0$ .

**定理 7.3 (课本定理7.5):**  $V$  为域  $F$  上的向量空间, 则  $V$  为  $F[x]$  上的模.

**证:**  $\forall g(x) \in F[x]$ ,  $g(x)$  可表为  $g(x) = \sum_i a_i x^i$ , 其中  $a_i \in F$ , 则  $g(\tau) = \sum_i a_i \tau^i \in \mathcal{L}(V)$ ,

$\forall h(x) \in F[x]$ ,  $h(x)$  可表为  $h(x) = \sum_j b_j x^j$ , 其中  $b_j \in F$ , 则  $h(\tau) = \sum_j b_j \tau^j \in \mathcal{L}(V)$ ,

对于给定的  $\tau$ , 有类似数乘的运算  $F[x] \times V \rightarrow V$ ,  $(g(x), v) = g(x) \cdot v \mapsto g(\tau)(v)$ , 满足

$$(1) [g(x) + h(x)]v = \left(\sum_i a_i x^i + \sum_j b_j x^j\right)v = \left(\sum_i a_i \tau^i + \sum_j b_j \tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(v) + \left(\sum_j b_j \tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)v + \left(\sum_j b_j x^j\right)v = g(x)v + h(x)v$$

$$(2) [g(x)h(x)]v = \left[\sum_i a_i x^i \sum_j b_j x^j\right]v = \left[\sum_i a_i \tau^i \circ \sum_j b_j \tau^j\right]v = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)\left(\left(\sum_j b_j \tau^j\right)(v)\right) = \left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\left(\sum_j b_j x^j\right)v\right) = g(x)[h(x)v]$$

$$(3) g(x)(u+v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(u) + \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)u + \left(\sum_i a_i x^i\right)v = g(x)u + g(x)v$$

$$(4) 1v = 1(v) = v$$

故  $V$  为  $F[x]$  上的模. □

$F[x]$  为 PID,  $V \in F[x] - \text{mod}$ ,

$\therefore \dim V = n$ ,  $\therefore V$  有限生成,

$\therefore f(x)v = f(\tau)(v) = 0$ ,  $\therefore V$  为挠模,

利用定理 6.7, 可将  $V$  分解为  $V = V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_m} = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle v_{ij} \rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$ .

上面说明了分解  $V$  的可行性和  $V$  分解出的大致结构, 现在的问题是: 具体如何分解? 我们只要找到  $V$  的阶  $\mu$ , s.t.  $\text{ann}(V) = \langle \mu \rangle$ ,  $\mu = up_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$ , 就可得到挠子模  $V_{p_i}$ , s.t.  $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_i} \rangle$  及循环子模  $\langle v_{ij} \rangle$ , s.t.  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}} \rangle$ ,  $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i}$ .

**定义 7.2 极小多项式:**  $\text{ann}(V) = \{g(x) \in F[x] \mid g(\tau)(V) = \{0\}\} = \langle m_\tau(x) \rangle$ , 其中  $m_\tau(x)$  称  $\tau$  在  $V$  上的极小多项式, 首系数 = 1.

极小多项式就是  $V$  的阶, 对其进行分解:  $m_\tau(x) = up_1^{e_1}(x) \dots p_n^{e_n}(x)$ , 其中  $u$  为单位,  $p_i(x) \in F[x]$  不可约且互不相等,  $e_i \in \mathbb{Z}^+$ ,

$\implies V = V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_m}$ , 其中  $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_i}(x) \rangle$ ,

$V_{p_i} = \langle v_{i1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{it_i} \rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$ ,  $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i}$ ,

从而实现分解  $V = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle v_{ij} \rangle$ .

接下来我们利用上述对  $V$  的分解找一组合适的定序基, 以简化  $V$  上的线性算子  $\tau$  的表示.

**定义 7.3 不变子空间:** 子空间  $S \subseteq V$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ , 若  $\tau(S) \subseteq S$ , 则称  $S$  为  $V$  的  $\tau$  不变子空间.

**定理 7.4 (课本定理7.5):** 子模  $S \subseteq V \iff S$  是  $V$  的不变子空间.

**证:** “ $\implies$ ”:  $\forall v \in S \subseteq V, \forall h(x) \in F[x], h(x) = \sum_i a_i x^i, h(x)v = h(\tau)(v) = \sum_i a_i \tau^i(v) \in S$ ,

特别地, 取  $h(x) = x \in F[x]$ , 则  $xv = \tau(v) \in S \implies \tau(S) \subseteq S$ , 即  $S$  为  $V$  的线性子空间.

“ $\impliedby$ ”:  $\because S$  是  $V$  的不变子空间,  $\therefore \forall v, \tau(v) \in S \implies \forall i = 0, \dots, \dim V, \tau^i(v) \in S$ ,

$g(x)v + h(x)v = g(\tau)(v) + h(\tau)(v) = (\sum_i a_i \tau^i)(v) + (\sum_j b_j \tau^j)(v) = \sum_i (a_i + b_i) \tau^i(v) \in S$ , 故  $S$  为  $V$  的子模.  $\square$

$\because \langle v_{ij} \rangle$  为  $V$  的  $F[x]$  子模,  $\therefore \langle v_{ij} \rangle$  为不变子空间, 即  $\tau(\langle v_{ij} \rangle) \subseteq \langle v_{ij} \rangle$ , 故之前分解操作实际上是将  $V$  分解成了一系列由单个向量生成的不变子空间.

让我们用简单的例子来展示一下, 若以不变子空间的基为整个向量空间的基 (的一部分), 线性算子的表示会如何.

**例 7.1:** 若  $\langle b_1 \rangle$  是  $\tau$  不变的, 则  $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, [\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}^1$

若  $\langle b_1, b_2 \rangle$  是  $\tau$  不变的, 即  $\tau(b_1) \in \langle b_1, b_2 \rangle, \tau(b_2) \in \langle b_1, b_2 \rangle$ , 则  $\begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(b_2)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, [\tau]_{\mathcal{B}} =$

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

若  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  是  $\tau$  不变的, 则  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} *_{k \times k} & 0 \\ 0 & \tau' \end{pmatrix}$ .  $\square$

在之前我们已将  $V$  分解成了多个不变子空间, 故若用各  $\langle v_{ij} \rangle$  的基组成  $V$  的基, 则可以将  $\tau$  表示为一个仅在对角线上有非零矩阵块而其余部分均为零的矩阵. 但我们仍未满足: 对于给定的不变子空间  $\langle v_{ij} \rangle$ , 能否适当地选取该不变子空间中的基, 从而简化该不变子空间对应的非零矩阵块?

取  $\langle v \rangle$  的极小多项式为  $p(x)$  即  $\text{ann}(v) = \langle p(x) \rangle$ , 设  $p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_1x + r_0, r_i \in F$ , 则  $p(x)v = p(\tau)(v) = (\tau^m + r_{m-1}\tau^{m-1} + \cdots + r_1\tau + r_0)(v) = \tau^m(v) + r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v = 0$ , 即  $\tau^m(v)$  可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性表示:  $\tau^m(v) = -[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v]$ ,

$\implies \tau^{m+1}(v) = \tau(\tau^m(v)) = \tau(-[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v])$

$= -[r_{m-1}\tau^m(v) + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)]$

$= -\{r_{m-1}[-r_{m-1}\tau^m(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)] + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)\}$

易证, 任意高阶的  $\tau$  作用于  $v$  均可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性表示,  $\forall f(x) \in F[x]$  作用于  $v$  均可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性表示.

由此, 我们引出:

<sup>1</sup>\* 代表非零矩阵元.

**定理 7.5:**  $\langle\langle v \rangle\rangle$  为循环子模, 则  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  是  $\langle\langle v \rangle\rangle$  的基.

**证:** 先证  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性无关: 设  $l_0 v + l_1 \tau(v) + \dots + l_{m-1} \tau^{m-1}(v) = 0$ ,

令  $h(x) = l_0 + l_1 x + \dots + l_{m-1} x^{m-1}$ , 则  $h(x)v = 0 \implies h(x) \in \text{ann}(v) = \langle p(x) \rangle \implies p(x) \mid h(x)$ ,

然而  $\because \deg p(x) = m \geq \deg h(x) = m-1$ ,  $\therefore$  只能有  $l_0 = l_1 = \dots = l_{m-1} = 0$ , 故  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性无关.

再证  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  生成  $\langle\langle v \rangle\rangle$ :  $\langle\langle v \rangle\rangle = \{h(x)v \mid h(x) \in F[x]\} = \{h(\tau)(v) \mid h(x) \in F[x]\}$ ,

$\forall h(\tau)v \in \langle\langle v \rangle\rangle$ , 若  $\deg h(x) \leq m-1$ , 则  $h(x)v$  显然可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  表示,

若  $\deg h(x) > m-1$ , 则  $h(x) = q(x)p(x) + r(x)$ , 其中  $q(x)$  为商多项式, 余多项式  $r(x) = 0$  或  $\deg r(x) < \deg p(x) = m-1$

$\implies h(x)v = (q(\tau)p(\tau) + r(\tau))(v) = q(\tau)p(\tau)(v) + r(\tau)(v)$ , 其中  $\because p(x) \in \text{ann}(v)$ ,  $\therefore p(\tau)v = 0 \implies h(x)v = r(\tau)v$  可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  表示.

综上, 得证. □

**定义 7.4 循环不变子空间:**  $S$  是向量空间  $V$  的  $\tau$  不变子空间, 若  $S$  有一组基  $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ , 其中  $v \in V$ ,  $m \geq 1$ , 则称  $S$  是  $V$  的循环不变子空间.

$\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  就是循环不变子空间. 那么, 以  $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{m-1}(v_{ij})\}$  为基, 线性算子  $\tau$  在该循环不变子空间中的表示 (即  $\tau$  的表示中该循环不变子空间对应的非零矩阵块) 如何?

**定义 7.5 伴阵:** 在定序基  $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  下, 线性算子  $\tau$  可表为  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$ ,

其中  $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = [\tau(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $[\tau(b_2)]_{\mathcal{B}} = [\tau(\tau(v))]_{\mathcal{B}} = [\tau^2(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $[\tau(b_m)]_{\mathcal{B}} = [\tau^m(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -r_0 \\ -r_1 \\ \vdots \\ -r_{m-1} \end{pmatrix}$ ,

从而  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & -r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -r_{m-1} \end{pmatrix} \equiv C[p(x)]$ , 称为多项式  $p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \dots + r_1x + r_0$  的伴阵.

设  $d_{ij} = \deg p_i^{e_{ij}}(x)$ , 则  $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$  为  $\langle v_{ij} \rangle$  的基,

以  $\mathcal{B}_{ij}$  为基,  $\tau$  在循环不变子空间  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  中的表示就是  $p_i^{e_{ij}}(x)$  的伴阵:  $[\tau]_{\mathcal{B}_{ij}} = C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_1^{(ij)} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_2^{(ij)} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -l_3^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_{d_{ij}-2}^{(ij)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -l_{d_{ij}-1}^{(ij)} \end{pmatrix}.$

上面我们简化了  $\tau$  在循环不变子空间  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  中的表示. 又  $\because V = \bigoplus_{ij} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ ,  $\therefore \mathcal{B} = \cup_{ij} \mathcal{B}_{ij}$  为  $V$  的基, 利用  $\mathcal{B}$  我们可简化  $\tau$  在整个向量空间  $V$  中的表示:

**定理 7.6 (课本定理7.10):**  $\dim V < \infty$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ ,  $V$  的极小多项式为  $m_\tau(x) = p_1^{e_1}(x) \cdots p_n^{e_n}(x)$ , 其中  $p_i(x)$  不可约且互不相等,

$\implies V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m}$ , 其中  $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_i}(x) \rangle$ ,

$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1} \rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_{it_i} \rangle\rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$ ,  $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$ ,

以  $\cup_{ij} \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$  为基, 其中  $d_{ij} = \dim \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ ,  $\tau$  的表示可简化为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{ij} C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} C[p_1^{e_{11}}(x)] & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C[p_1^{e_{1t_1}}(x)] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C[p_m^{e_{m1}}(x)] \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & C[p_m^{e_{mt_m}}(x)] \end{pmatrix}.$$

**定义 7.6 有理标准型:** 上述线性变换的矩阵表示称为有理标准型.

$$n = \dim V = \sum_{ij} d_{ij} = \sum_{ij} \deg p_i^{e_{ij}}(x) = \deg \left[ \prod_{ij} p_i^{e_{ij}}(x) \right].$$

# Chapter 8

## 特征值和特征向量

在上一章中, 我们介绍了多项式对应的伴阵, 那么, 如何由伴阵恢复多项式呢?

假设多项式  $p(x) = x^2 + ax + b$ , 则其伴阵为  $C[p(x)] = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ ,

$$\det(xI - C[p(x)]) = \begin{vmatrix} x & b \\ -1 & x+a \end{vmatrix} = x^2 + ax + b \text{ 即恢复多项式,}$$

同理, 对循环不变子空间  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ , 设其极小多项式为  $p_i^{e_{ij}}(x)$ , 伴阵为  $C[p_i^{e_{ij}}(x)]$ , 有  $\det(xI - C[p_i^{e_{ij}}(x)]) = p_i^{e_{ij}}(x)$ , 由定理 7.6, 线性算子  $\tau$  的表示即为这些伴阵的直和, 故有

**定义 8.1 特征多项式:**  $\det(xI - [\tau]_{\mathcal{B}}) = \prod_{ij} p_i^{e_{ij}}(x) \equiv C_{\tau}(x)$ , 称为  $\tau$  的特征多项式.

**定理 8.1 (课本第3 版引理7.17, 定理7.18):** 特征多项式在相似操作下不变, 或线性算子的特征多项式唯一, 与线性算子的表示无关.

**证:** 设线性算子  $\tau$  在定序基  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{B}'$  下的表示分别为  $[\tau]_{\mathcal{B}}$  和  $[\tau]_{\mathcal{B}'}$ ,

$$\text{则 } C_{[\tau]_{\mathcal{B}'}}(x) = \det(xI - [\tau]_{\mathcal{B}'}) = \det(xI - M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(xI - [\tau]_{\mathcal{B}})M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(xI - [\tau]_{\mathcal{B}})) = \det(xI - [\tau]_{\mathcal{B}}) = C_{[\tau]_{\mathcal{B}}}(x). \quad \square$$

$\because C_{\tau}(x) = \prod_{ij} p_i^{e_{ij}} = \prod_i p_i^{\sum_{j=1}^{t_i} e_{ij}}$ ,  $m_{\tau}(x) = up_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ , 且  $e_i = e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$  (不可约因子相同, 但幂次不等),  $\therefore \deg C_{\tau}(x) = \sum_{ij} \deg p_i^{e_{ij}}(x) = \sum_{ij} d_{ij} = n \geq \deg m_{\tau}(x) \implies m_{\tau}(x) \mid C_{\tau}(x)$ .

在  $F[x]$  中, 任一一次多项式  $x - r$  都是不可约的.

在  $\mathbb{R}[x]$  中, 有实根  $\iff$  可约.

$\because$  实系数多项式的复根的共轭亦为该多项式的根,  $\therefore$  实系数多项式的复根总是成对出现<sup>1</sup>, 故  $\mathbb{R}[x]$  中的不可约多项式阶数  $\leq 2$ .

**证:** 当多项式阶数  $> 2$ , 若阶数为奇数, 则多项式的根两两配对后必留下一个根, 该根必不为复数而为实数  $\implies$  可约; 若阶数为偶数, 以 4 阶为例, 假设多项式不可约, 设复根分别为  $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ , 则多项式可写为  $(x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) = (x - (z_1 + \bar{z}_1)x + z_1\bar{z}_1)(x - (z_2 + \bar{z}_2)x + z_2\bar{z}_2)$ ,

<sup>1</sup>

**证:**  $0 \neq f(x) \in \mathbb{R}[x]$ , 若  $z \in \mathbb{C}$ , s.t.  $f(z) = 0$ , 即  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$   
 $\implies f(\bar{z}) = \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 = f(\bar{z}) = 0$ , 故得证.  $\square$

## 8. 特征值和特征向量

$(z_1 + \bar{z}_1), z_1 \bar{z}_1, (z_2 + \bar{z}_2), z_2 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}, \therefore (x - (z_1 + \bar{z}_1)x + z_1 \bar{z}_1), (x - (z_2 + \bar{z}_2)x + z_2 \bar{z}_2) \in \mathbb{R}[x] \implies$  多项式可约, 故假设错误, 阶数  $> 2$  的偶数阶实系数多项式必可约.  $\square$

**例 8.1:**  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$  无实根不可约.  $\square$

$\mathbb{Q}[x]$  中的不可约多项式可以是任意次.

可用 **Eisenstein 方法** 判别  $\mathbb{Q}[x]$  中的多项式的可约性:  $\forall f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ , 其中  $a_i \in \mathbb{Z}$ , 若  $\exists$  素数  $p$ , s.t.  $p \nmid a_n, p \mid a_i, i=0, \dots, i=n-1, p^2 \nmid a_0$ , 则  $f(x)$  在  $\mathbb{Q}[x]$  中不可约.

**定义 8.2 特征值和特征向量:** 线性算子  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\lambda \in F$ , 若  $\exists 0 \neq v \in V$ , s.t.  $\tau(v) = \lambda v$ , 则称  $\lambda$  为  $\tau$  的特征值,  $v$  为  $\tau$  的特征向量.

**定义 8.3:**  $\mathcal{E}_\lambda \equiv \{\text{特征值 } \lambda \text{ 对应的特征向量}\} = \{v \in V \mid \tau(v) = \lambda v\}$ .

$\mathcal{E}_\lambda$  是  $V$  的子空间.

**证:**  $\forall u, v \in \mathcal{E}_\lambda, \forall r, t \in F, \tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) = r(\lambda v) + t(\lambda v) = \lambda(ru) + \lambda(tv) = \lambda(ru + tv) \implies ru + tv \in \mathcal{E}_\lambda$ , 故得证.  $\square$

**定义 8.4 特征谱:**  $\text{spec}(\tau) \equiv \{\tau \text{ 的特征值}\}$ .

$$(1) \tau(v) = \lambda v \iff \tau(v) - \lambda v = 0$$

$$\iff (\tau - \lambda)(v) = 0$$

$$\iff v \in \ker(\tau - \lambda)$$

$$(\because v \neq 0)$$

$$\iff \ker(\tau - \lambda) \neq 0$$

$$\iff (\tau - \lambda) \text{ 非单}$$

$$\iff (\tau - \lambda) \text{ 是退化的.}$$

(也有教材将  $\tau - \lambda$  退化作为特征值的定义.)

$$(2) v \neq 0 \text{ 是 } \lambda \text{ 对应的特征向量, } \tau(v) = \lambda v \iff (\tau - \lambda)(v) = 0,$$

若  $f(x) = x - \lambda$ , 则  $f(x)$  零化  $v$ , 即  $f(\tau)(v) = 0 \implies f(x) \in \text{ann}(v)$ ,

又  $\because x - \lambda$  不可约,  $\therefore \text{ann}(v) = \langle x - \lambda \rangle$ ,

$\because \text{ann}(V) = \langle m_\tau(x) \rangle, \therefore \forall u \in V, m_\tau(x)(u) = 0 \implies m_\tau(v) = 0 \implies m_\tau(x) \in \text{ann}(v) = \langle x - \lambda \rangle \implies (x - \lambda) \mid m_\tau(x),$

设  $m_\tau(x) = (x - \lambda)q(x)$ , 其中  $q(x) \in F[x]$ , 故特征值为极小多项式的根.

**定理 8.2 (课本定理8.3):** (1)  $\text{spec}(\tau)$  是  $m_\tau(x)$  或  $C_\tau(x)$  的根的集合.

(2) 矩阵的特征值在相似操作下不变, 即相似矩阵具有相同的特征值.

(3)  $\mathcal{E}_\lambda$  是  $(\lambda I - A)x = 0$  的解空间.

**定理 8.3 (课本定理8.4):**  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  是  $\tau$  的特征值且互不相等, 则

- (1) 取  $0 \neq v_i \in \mathcal{E}_{\lambda_i}$ , 则  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  线性无关;
- (2) 若  $i \neq j$ ,  $\mathcal{E}_i \neq \mathcal{E}_j = \{0\}$ .

**证:** (1) 若  $\sum_{i=1}^k r_i v_i = 0$ , 则  $0 = \tau(0) = \tau\left(\sum_{i=1}^k r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k r_i \tau(v_i) = \sum_{i=1}^k r_i \lambda_i v_i$ , 即  $r_1 \lambda_1 v_1 + \dots + r_k \lambda_k v_k = 0$ ,  
 又有  $\lambda_k \left(\sum_{i=1}^k r_i v_i\right) = 0$ , 即  $r_1 \lambda_k v_1 + r_2 \lambda_k v_2 + \dots + r_k \lambda_k v_k = 0$ ,  
 以上两式相减消去  $v_k$  项得,  $r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$ ,  
 将  $\tau$  作用于上式得,  $\tau[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}] = r_1(\lambda_1 - \lambda_k)\lambda_1 v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)\lambda_2 v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\lambda_{k-1} v_{k-1} = \tau(0) = 0$ ,  
 消去  $v_{k-1}$  项得,  $\lambda_{k-1}[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}] - \tau[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}] = 0$ ,  
 $r_1(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_{k-1} - \lambda_1)v_1 + r_2(\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_{k-1} - \lambda_2)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-2})(\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})v_{k-2} = 0$ ,  
 重复以上操作  $k-1$  次得,  $r_1(\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_1)v_1 = 0$ ,  
 $\because \lambda_1, \dots, \lambda_k$  互不相等且  $v_1 \neq 0$ ,  $\therefore r_1 = 0$ ,  
 同理可得  $r_1 = \dots = r_k = 0$ , 故  $\{v_1, \dots, v_k\}$  线性无关.

- (2) 取  $u \in \mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} \implies u \in \mathcal{E}_{\lambda_i} \implies \tau(u) = \lambda_i u$ ,  
 且  $u \in \mathcal{E}_{\lambda_j} \implies \tau(u) = \lambda_j u$   
 以上两式相减得,  $0 = \tau(u) - \tau(u) = \lambda_i u - \lambda_j u = (\lambda_i - \lambda_j)u$ ,  
 又  $\because \lambda_i \neq \lambda_j$ ,  $\therefore u = 0 \implies \mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} = \{0\}$ .

□

若  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ ,  $p(x) \in F[x]$ , 则  $p(\tau) \in \mathcal{L}(V)$ , 那么  $p(\tau)$  与  $\tau$  的特征值有何关系?

**定理 8.4 特征谱映射定理(课本第3版定理8.3):**  $F$  为代数闭域<sup>a</sup>,  $p(x) \in F[x]$ , 则  $\text{spec}(p(\tau)) = p(\text{spec}(\tau)) \equiv \{p(\lambda) \mid \lambda \in \text{spec}(\tau)\}$ .

<sup>a</sup>即  $F[x]$  中不可约多项式阶数 = 1.

**证:** 首先证  $p(\text{spec}(\tau)) \subseteq \text{spec}(p(\tau))$ :  $\forall v \in \text{spec}(\tau)$ ,  $\tau(v) = \lambda v \implies \tau^k(v) = \lambda^k v$ ,  
 设  $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1x + a_0$ , 则  $p(\tau) = \tau^d + a_{d-1}\tau^{d-1} + \dots + a_1\tau + a_0$ ,  
 $p(\tau)(v) = \tau^d(v) + a_{d-1}\tau^{d-1}(v) + \dots + a_1\tau(v) + a_0 = \lambda^d v + a_{d-1}\lambda^{d-1}v + \dots + a_1\lambda v + a_0 = (\lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)v = p(\lambda)v$ ,  
 $\implies p(\lambda)$  是  $p(\tau)$  的特征值, 即  $p(\lambda) \in \text{spec}(p(\tau))$ , 故  $p(\text{spec}(\tau)) \subseteq \text{spec}(p(\tau))$ .  
 再证  $\text{spec}(p(\tau)) \subseteq p(\text{spec}(\tau))$ :  $\forall \lambda \in \text{spec}(p(\tau))$ ,  $0 \neq v \in \mathcal{E}_\lambda$ , 即  $p(\tau)(v) = \lambda v \implies (p(\tau) - \lambda)v = 0$ ,  
 令  $f(x) = p(x) - \lambda$ , 则  $f(\tau)(v) = 0$ ,  
 $\because \lambda \in F$ ,  $\therefore f(x) \in F[x]$ ,  
 $\because F[x]$  是代数封闭的,  $\therefore f(x)$  可写为  $f(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_m)$ , 其中  $r_i \in F$ , 或有重复  
 $\implies (\tau - r_1) \cdots (\tau - r_m)(v) = 0$ , 其中  $r_i \in \text{spec}(\tau)$   
 其中必  $\exists r_i$ , s.t.  $(\tau - r_i) \cdots (\tau - r_m)(v) = 0 \implies p(r_i) - \lambda = 0 \implies p(r_i) = \lambda$ ,  
 $\implies \lambda \in p(\text{spec}(\tau))$ , 故  $\text{spec}(p(\tau)) \subseteq p(\text{spec}(\tau))$ .  
 综上, 得证.

□

**定义 8.5 约当标准型:**  $F$  为代数闭域,  $V$  为  $F$  上的向量空间,  $\dim V < \infty$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $V$  的最小多项式  $m_\tau(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdots (x - \lambda_m)^{e_m}$ ,

此时  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ , 其中  $\text{ann}(V_i) = \langle (x - \lambda_i)^{e_i} \rangle$ ,

$V_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle v_{ij} \rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle (x - \lambda_i)^{e_{ij}} \rangle$ ,  $e_i = e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$ ,  $\dim \langle v_{ij} \rangle = \deg(x - \lambda_i)^{e_{ij}} = e_{ij}$ ,

则定序基  $\mathcal{B}'_{ij} = \{v_{ij}, (\tau - \lambda_i)(v_{ij}), \cdots, (\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$  为  $\langle v_{ij} \rangle$  下, 线性算子  $\tau$  在  $\langle v_{ij} \rangle$  中可表为  $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}'_{ij}} & \cdots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}'_{ij}} \end{pmatrix}$ ,

其中  $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [\tau(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i + \lambda_i)(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i)(v_{ij}) + \lambda_i(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $[\tau(b_2)]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [\tau(\tau - \lambda_i + \lambda_i)(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i + \lambda_i)((\tau - \lambda_i)(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i)^2(v_{ij}) + \lambda_i(\tau - \lambda_i)(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\cdots$ ,  $[\tau((\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i + \lambda_i)((\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij}) + \lambda_i(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [\lambda_i(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \end{pmatrix}$ ,

从而  $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \equiv g(\lambda_i, e_{ij})$ , 称为约当块,

定序基  $\mathcal{B} = \bigcup_{ij} \mathcal{B}'_{ij}$  下, 线性算子  $\tau$  可表为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} g(\lambda_1, e_{11}) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & g(\lambda_1, e_{1t_1}) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & g(\lambda_m, e_{m1}) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & g(\lambda_m, e_{mt_m}) \end{pmatrix},$$

称为约当标准型.

<sup>a</sup>

<sup>a</sup> $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$  亦为  $\langle v_{ij} \rangle$  的一组基,  $[\tau]_{\mathcal{B}=\bigcup_{ij} \mathcal{B}_{ij}}$  为有理标准型.



$\mathcal{B}'_{ij} = \{v_{ij}, (\tau - \lambda_i)(v_{ij}), \dots, (\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$  为  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  的一组基.

证: 先证  $\mathcal{B}'_{ij}$  线性无关: 设  $l_0 v + l_1(\tau - \lambda_i)(v) + \dots + l_{m-1}(\tau - \lambda_i)^{m-1}(v) = 0$ ,

令  $h(x) = l_0 + l_1 x + \dots + l_{m-1} x^{m-1}$ , 则  $h(x)v = 0 \implies h(x) \in \text{ann}(v_{ij}) = \langle(x - \lambda_i)^{e_{ij}}\rangle$ ,

然而  $\because \deg(x - \lambda_i)^{e_{ij}} = e_{ij} \geq \deg h(x) = e_{ij} - 1$ ,  $\therefore l_0 = l_1 = \dots = l_{e_{ij}-1} = 0$ , 故  $\mathcal{B}'_{ij}$  线性无关.

再证  $\mathcal{B}'_{ij}$  生成  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ :  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle = \{h(x)v \mid h(x) \in F[x]\} = \{h(\tau)(v) \mid h(x) \in F[x]\}$ ,

$\forall h(\tau)v \in \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ , 若  $\deg h(x) \leq e_{ij} - 1$ , 则  $h(x)v =$ , 即  $h(\tau)v = (l_0 + l_0\tau + \dots + l_{e_{ij}-1}\tau^{e_{ij}-1})(v) = (l_0 + l_0((\tau - \lambda_i) + \lambda_i) + \dots + l_{e_{ij}-1}((\tau - \lambda_i) + \lambda_i)^{e_{ij}-1})(v)$  可由  $\mathcal{B}'_{ij}$  表示,

若  $\deg h(x) > e_{ij} - 1$ ,  $h(x) = h((x - \lambda_i) + \lambda_i) = h'(x - \lambda_i) = q(x - \lambda_i)(x - \lambda_i)^{e_{ij}-1} + r(x - \lambda_i)$ , 其中  $q(x - \lambda_i)$  为商多项式, 余多项式  $r(x - \lambda_i) = 0$  或  $\deg r(x) < \deg(x - \lambda_i)^{e_{ij}-1} = e_{ij} - 1$ ,

$\implies h(x)v_{ij} = h'(x - \lambda_i)v_{ij} = (q(\tau - \lambda_i)(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}} + r(\tau - \lambda_i))(v_{ij}) = q(\tau - \lambda_i)p(\tau - \lambda_i)(v_{ij}) + r(\tau - \lambda_i)(v_{ij})$ , 其中  $\because (x - \lambda_i)^{e_{ij}-1} \in \text{ann}(v_{ij})$ ,  $\therefore (\tau - \lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij}) = 0 \implies h(x)v_{ij} = r(\tau)(v_{ij})$  可由  $\mathcal{B}'_{ij}$  表示.

综上, 得证. □

有理标准型的存在无需附加条件, 而约当标准型的存在是需要附加条件的: 仅当极小多项式能分解成一次多项式的乘积, 即  $m_\tau(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \dots (x - \lambda_m)^{e_m}$  时, 约当标准型才存在.

上面我们看到,  $\tau((\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})) = \lambda(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij})$ , 即  $(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \in \mathcal{E}_{\lambda_i}$ , 那么, 是否还有其他向量  $\in \mathcal{E}_{\lambda_i}$ ?

$\{(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \mid j = 1, \dots, t_i\} \subseteq \mathcal{E}_{\lambda_i}$ ,  $\because V_{p_i} = \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ ,  $\therefore \{(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \mid j\}$  线性无关.

**定义 8.6 代数重数:** 在  $\mathcal{C}_\tau(x)$  中  $\lambda_i$  作为根的重数, 即  $\dim V_{p_i} = \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij}$ .

**定义 8.7 几何重数:**  $\dim \mathcal{E}_{\lambda_i} = t_i$ .

**定理 8.5 (课本定理8.5):** 几何重数  $\dim V_{p_i} = \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij} \geq$  代数重数  $\dim \mathcal{E}_{\lambda_i} = t_i$

证:  $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i} \geq 0$ , 故得证. □

几何重数 = 代数重数的特殊情况下,  $[\tau]$  的约当标准型何如?

若几何重数 = 代数重数, 即  $\dim V_{p_i} = \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}$ , 则  $e_{ij} = 1 \forall j \implies e_i = e_{i1} = 1$

$\implies m_\tau(\lambda) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$ ,

此时  $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} \lambda_i \end{pmatrix}$ ,  $[\tau]_{\mathcal{B}'} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

**定理 8.6 (课本定理8.10, 8.11, 8.18):** 下列叙述等价:

$\tau$  可对角化, 即  $\exists$  一组基  $\mathcal{B}$ , s.t.  $[\tau]_{\mathcal{B}}$  为对角阵.

(2) 几何重数 = 代数重数.

(3)  $m_\tau(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$ ,  $\lambda_i$  互不相等.

(4)  $V_{p_i} = \mathcal{E}_i$ ,  $V = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_m}$ .

(5) 特征向量构成  $V$  的基.

(6)  $\tau = \lambda_1 \rho_1 + \cdots + \lambda_k \rho_k$ , 其中  $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$  为单位分解,  $\text{spec}(\tau) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ ,  $\text{Im } \rho_i = \mathcal{E}_{\lambda_i}$ ,  
 $\ker \rho_i = \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{E}_{\lambda_j}$ .

## 8.1 投影算子

**定义 8.8 投影(算子):** 向量空间  $V = S \oplus T$ , 映射  $\rho_{ST} : V \rightarrow V$ ,  $u_S + u_T \mapsto u_S$ , 其中  $u_S \in S$ ,  $u_T \in T$ , 则  $\rho_{ST}$  称为在  $S$  上沿  $T$  的投影(算子).

$$\ker \rho_{ST} = T, \text{Im } \rho_{ST} = S, V = \ker \rho_{ST} + \text{Im } \rho_{ST}.$$

**定理 8.7 (课本第3 版定理2.21):** (1)  $V = S \oplus T$ , 则  $\rho_{ST} + \rho_{TS} = 1_V$  ( $V$  上的恒等变换) 且  $\rho_{ST} \circ \rho_{TS} = \rho_{TS} \circ \rho_{ST} = 0_V$  ( $V$  上的恒等变换).

(2)  $\sigma \in \mathcal{L}(V)$ , 若  $V = \ker \sigma \oplus \text{Im } \sigma$  且  $\sigma|_{\text{Im } \sigma} = 1|_{\text{Im } \sigma}$ , 其中  $|_{\text{Im } \sigma}$  代表算子定义域为  $\text{Im } \sigma$ , 则  $\sigma$  是在  $\text{Im } \sigma$  上沿  $\ker \sigma$  的投影.

**证:** (1)  $\forall v \in V, \because V = S \oplus T, \therefore v = v_S + v_T$ , 其中  $v_S \in S, v_T \in T$

$$\Rightarrow (\rho_{ST} + \rho_{TS})(v) = (\rho_{ST} + \rho_{TS})(v_S + v_T) = \rho_{ST}(v_S) + \rho_{ST}(v_T) + \rho_{TS}(v_S) + \rho_{TS}(v_T) = v_S + 0 + 0 + v_T = v \Rightarrow \rho_{ST} + \rho_{TS} = 1;$$

$$\Rightarrow \rho_{ST} \circ \rho_{TS}(v) = \rho_{ST}(\rho_{TS}(v_S + v_T)) = \rho_{ST}(\rho_{TS}(v_S) + \rho_{TS}(v_T)) = \rho_{ST}(0 + v_T) = 0 \Rightarrow \rho_{ST} \circ \rho_{TS} = 0,$$

同理,  $\rho_{TS} \circ \rho_{ST} = 0$ .

(2)  $\forall v \in V, \because V = \ker \sigma \oplus \text{Im } \sigma, \therefore v = v_{\ker} + v_{\text{Im}}$ , 其中  $v_{\ker} \in \ker \sigma, v_{\text{Im}} \in \text{Im } \sigma$

$$\Rightarrow \sigma(v) = \sigma(v_{\ker} + v_{\text{Im}}) = \sigma(v_{\ker}) + \sigma(v_{\text{Im}}) = \sigma(v_{\ker}) + 1(v_{\text{Im}}) = 0 + v_{\text{Im}}, \text{ 故 } \sigma \text{ 为 } \text{Im } \sigma \text{ 上沿 } \ker \sigma \text{ 的投影.}$$

□

**定理 8.8 (课本定理第3 版2.22):**  $\rho \in \mathcal{L}(V)$  为投影  $\iff \rho^2 = \rho$ .

**证:** “ $\implies$ ”:  $\forall v \in V, v = u_S + u_T$ , 其中  $u_S \in S, u_T \in T$ ,

$$\rho(v) = u_S, \rho(\rho(v)) = \rho(u_S) = u_S \implies \rho^2 = \rho.$$

“ $\impliedby$ ”: 首先将  $V$  分解成  $V = \ker \rho \oplus \text{Im } \rho$ :

$$\text{一方面, } \forall v \in \ker \rho \cap \text{Im } \rho \implies v \in \ker \rho \iff \rho(v) = 0$$

$$\text{且 } v \in \text{Im } \rho \iff \exists u \in V, \text{ s.t. } v = \rho(u)$$

$$\iff 0 = \rho(v) = \rho(\rho(u)) = \rho^2(u) = \rho(u) = v \implies \ker \rho \cap \text{Im } \rho = \{0\}.$$

另一方面,  $\forall v \in V, \rho(v) \in \text{Im } \rho$ ,

$$\therefore \rho(v - \rho(v)) = \rho(v) - \rho(\rho(v)) = \rho(v) - \rho^2(v) = 0, \therefore v = (v - \rho(v)) + \rho(v), \text{ 其中 } v - \rho(v) \in \ker \rho, \rho(v) \in \text{Im } \rho \implies V = \ker \rho \oplus \text{Im } \rho.$$

故  $V = \ker \rho + \text{Im } \rho$ .

$$\text{又有 } \forall \rho(u) \in \text{Im } \rho, \rho(\rho(u)) = \rho^2(u) = \rho(u) \implies \rho|_{\text{Im } \rho} = 1|_{\text{Im } \rho},$$

由定理 8.7 得,  $\rho$  为在  $\text{Im } \rho$  上沿  $\ker \rho$  的投影.

综上, 得证.

□

**定义 8.9 正交:**  $\rho, \sigma \in \mathcal{L}(V)$  为投影, 若  $\rho\sigma = \sigma\rho = 0$ , 则称  $\rho$  与  $\sigma$  正交, 记作  $\rho \perp \sigma$ .

$$\rho \perp \sigma \iff \forall v \in V, \rho\sigma(v) = \rho(\sigma(v)) = 0 \text{ 且 } \sigma\rho(v) = \sigma(\rho(v)) = 0 \iff \text{Im } \sigma \subseteq \ker \rho \text{ 且 } \text{Im } \rho \subseteq \ker \sigma.$$

**定义 8.10 单位分解:**  $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ , 其中  $\rho_i$  为投影且互相  $\perp$ , 则称该式为单位分解.

**定理 8.9 (课本第3版定理2.25):** (1)  $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$  为单位分解, 则  $\text{Im } \rho_1 \oplus \cdots \oplus \text{Im } \rho_k = V$ .

(2) 若  $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$ , 令  $\rho_i$  是在  $S_i$  上沿  $\sum_{j \neq i} S_j$  的投影, 则  $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$  为单位分解.

**证:** (1) 先证  $V$  由  $\{\text{Im } \rho_1, \cdots, \text{Im } \rho_k\}$  生成:  $\forall v \in V, v = 1(v) = (\rho_1 + \cdots + \rho_k)(v) = \rho_1(v) + \cdots + \rho_k(v)$ , 其中  $\rho_i(v) \in \text{Im } \rho_i$ .

再证  $\text{Im } \rho_i \cap (\cup_{j \neq i} \text{Im } \rho_j) = \{0\}$ :  $\forall v \in \text{Im } \rho_i \cap (\cup_{j \neq i} \text{Im } \rho_j) \iff v \in \text{Im } \rho_i \iff \rho_i(v) = v$

且  $\exists j \neq i$ , s.t.  $v \in \text{Im } \rho_j \iff \exists u \in V$ , s.t.  $\rho_j(u) = v$

$\implies v = \rho_i(v) = \rho_i(\rho_j(u)) = \rho_i \rho_j(u) = 0 \implies \text{Im } \rho_i \cap (\sum_{j \neq i} \text{Im } \rho_j) = \{0\}$ .

综上, 得证.

(2)  $\forall v \in V, \because V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k, \therefore v = v_1 + \cdots + v_k$ , 其中  $v_i = \rho_i(v) \in S_i$

$\implies v = \rho_1(v) + \cdots + \rho_k(v) = (\rho_1 + \cdots + \rho_k)(v) \implies \rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ .

$\forall v \in V, \rho_j(v) \in \text{Im } \rho_j = S_j \subseteq \sum_{j \neq i} S_i \implies \rho_j \rho_i(v) = \rho_j(\rho_i(v)) = 0$ , 其中  $i \neq j \implies \rho_j \rho_i = 0$ ,

同理,  $\rho_j \rho_i = 0$ , 即  $\rho_i$  与  $\rho_j$  正交, 故  $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$  为单位分解.

□

若  $V = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_k}$ , 令  $\rho_i$  为在  $\mathcal{E}_{\lambda_i}$  上沿  $\sum_{j \neq i} \mathcal{E}_{\lambda_j}$  的投影, 则  $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$  是单位分解,  $\rho_i|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}} = 1|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}} \implies \forall v \in \mathcal{E}_{\lambda_i}, \tau(v) = \lambda_i v = \lambda \rho_i(v)$ , 即在  $\mathcal{E}_{\lambda_i}$  上,  $\tau|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}} = \lambda \rho_i$ , 从而引出定理 8.6 (6).

## Chapter 9

# 实数和复数内积空间

**定义 9.1 内积和内积空间:**  $F = \mathbb{R}$  (或  $\mathbb{C}$ ), 映射  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ ,  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$  满足

(1) 正定性:  $\langle u, u \rangle \geq 0$ , 且  $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

(2) 对称 (或共轭对称): 对  $F = \mathbb{R}$ ,  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ; 对  $F = \mathbb{C}$ ,  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

(3) 关于第一坐标线性, 关于第二坐标线性 (或共轭线性): 对  $F = \mathbb{R}$ ,  $\langle ru_1 + tu_2, v \rangle = r\langle u_1, v \rangle + t\langle u_2, v \rangle$ ,  $\langle u, rv_1 + tv_2 \rangle = r\langle u, v_1 \rangle + t\langle u, v_2 \rangle$ ; 对  $F = \mathbb{C}$ ,  $\langle ru_1 + tu_2, v \rangle = r\langle u_1, v \rangle + t\langle u_2, v \rangle$ ,  $\langle u, rv_1 + tv_2 \rangle = \bar{r}\langle u, v_1 \rangle + \bar{t}\langle u, v_2 \rangle$

则称  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是  $V$  上的内积, 称  $V$  为内积向量空间.

对给定的向量空间, 内积不唯一.

**例 9.1:** 在  $\mathbb{R}^n$  上,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,

内积又称点积,  $\langle x, y \rangle = x \cdots y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . □

**例 9.2:** 在  $\mathbb{C}^n$  上,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,

$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i$ . □

**引理 9.1 (课本引理9.1):**  $V$  为内积向量空间,  $u, v \in V$ ,  $\forall x \in V$ ,  $\langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle \iff u = v$ .

**证:** “ $\implies$ ”:  $\langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle \iff \langle u, x \rangle - \langle v, x \rangle = 0 \iff \langle u - v, x \rangle = 0$ ,

不妨取  $x = u - v$ , 则  $\langle u - v, u - v \rangle = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v$ .

“ $\impliedby$ ”: 显然.

综上, 得证. □

**定理 9.1 (课本第3版定理9.2):**  $V$  为内积向量空间,  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ ,

(1)  $\forall v, w \in V$ ,  $\langle \tau(v), w \rangle = 0 \implies \tau = 0$ .

(2) 对  $F = \mathbb{C}$ ,  $\forall v \in V$ ,  $\langle \tau(v), v \rangle = 0 \implies \tau = 0$ .

**证:** (1) 不妨取  $w = \tau(v)$ , 则  $\langle \tau(v), w \rangle = \langle \tau(v), \tau(v) \rangle = 0 \implies \forall v \tau(v) = 0$ , 故  $\tau = 0$ .

(2)  $\forall v, w \in V, v + w \in V, v + iw \in V,$

$$\langle \tau(v + w), v + w \rangle = 0 = \langle \tau(v), v \rangle + \langle \tau(w), w \rangle, \langle \tau(v + iw), v + iw \rangle = \langle \tau(v), v \rangle + \langle \tau(iw), iw \rangle$$

$$\implies \langle \tau(v), w \rangle + \langle \tau(w), v \rangle = 0, -i\langle \tau(v), w \rangle + i\langle \tau(w), v \rangle = 0$$

$$\implies \langle \tau(v), w \rangle = 0,$$

利用 (1) 中的结论,  $\tau(v) = 0$ .

□

内积向量空间的子空间和商空间与普通的向量空间同.

$S$  是内积向量空间  $V$  的子空间, 则对应的商空间  $\frac{V}{S}$  为  $F$  上的向量空间.

但在何种条件下,  $\frac{V}{S}$  是  $F$  上的内积向量空间 (内积定义同  $V$  上的内积定义)?

## 9.1 范数和距离

**定义 9.2 (内积诱导出的)范数和赋范向量空间:**  $\|v\| \equiv \sqrt{\langle v, v \rangle}$ , 此时称  $V$  为赋范向量空间

**定义 9.3 单位向量:** 若  $\|u\| = 1$ , 则称  $u$  为单位向量.

**例 9.3:** 在  $\mathbb{R}^n$  上,  $x = (x_1, \dots, x_n)$   $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .

□

**定理 9.2 范数的性质(课本定理9.2):** (1)  $\|v\| \geq 0$ , 且  $\|v\| = 0 \iff v = 0$ .

$$(2) \forall r \in F, \|rv\| = |r| \cdot \|v\|.$$

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式:**  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ , 且  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \iff u$  与  $v$  线性相关.

$$(4) \text{ 三角不等式: } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

$$(5) \forall x \in V, \|u - v\| \leq \|u - x\| + \|v - x\|.$$

$$(6) |||u| - |v|| \leq \|u - v\|.$$

$$(7) \text{ 平行四边形法则: } \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

**证:** (7)  $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle, \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle,$

$$\text{以上两式相加得, } \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\langle u, u \rangle + 2\langle v, v \rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

□

**定义 9.4 范数和赋范向量空间:** 映射  $\|\cdot\| : V \rightarrow F, v \mapsto \|v\|$ , 满足

$$\|v\| \geq 0, \text{ 且 } \|v\| = 0 \iff v = 0$$

$$(2) \|rv\| = |r| \|v\|$$

$$(3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

则称  $\|\cdot\|$  为  $V$  上的一个范数, 称  $V$  为赋范向量空间.

给定向量空间, 范数不唯一, 其中内积诱导的范数是一类特殊的范数, 故内积向量空间必为赋范向量空间. 内积诱导的范数可反向构建内积, 但利用一般的范数未必能构建内积 (因为或无法满足内积的线性性质).

**定理 9.3 极化恒等式(课本定理9.3):** 对内积诱导出的范数,

$$\text{对 } F = \mathbb{R}, \langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

$$(2) \text{ 对 } F = \mathbb{C}, \langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + \frac{i}{4}(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2).$$

**定义 9.5 度量/距离:**  $d(u, v) \equiv \|u - v\|$ , 此时称  $V$  为度量向量空间.

**定理 9.4 度量的性质(课本定理9.4):** (1)  $d(u, v) \geq 0$ , 且  $d(u, v) = 0 \iff u = v$ .

$$(2) \text{ 对称性: } d(u, v) = d(v, u).$$

$$(3) \text{ 三角不等式: } d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v).$$

内积向量空间必为赋范向量空间, 赋范向量空间必为度量向量空间.

## 9.2 等距算子

**定义 9.6 等距:**  $V, W$  是  $F$  上的内积向量空间,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ , 若  $\tau$  保持内积不变, 即  $\langle \tau(u), \tau(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ , 则称  $\tau$  等距.

**定义 9.7 等距同构:** 若  $\tau$  等距且双射, 则称  $\tau$  等距同构.

**定理 9.5 (课本定理9.5):**  $\tau$  等距  $\iff \|\tau(u)\| = \|u\|$ .

证: “ $\implies$ ”: 由定义即得.

“ $\impliedby$ ”: 由极化恒等式  $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2)$ , 有  $\langle \tau(u), \tau(v) \rangle = \frac{1}{4}(\|\tau(u) + \tau(v)\|^2 + \|\tau(u) - \tau(v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|\tau(u + v)\|^2 + \|\tau(u - v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2) = \langle u, v \rangle$ , 即  $\tau$  等距.

综上, 得证. □

若  $\tau$  等距, 则  $\tau(u) = 0 \iff u = 0$ , 此时  $\ker \tau = \{0\}$ ,  $\tau$  单射.

## 9.3 正交性

**定义 9.8 正交:** (1)  $V$  为内积向量空间,  $u, v \in V$ , 若  $\langle u, v \rangle = 0$ , 则称  $u$  与  $v$  正交, 记作  $u \perp v$ .

(2)  $X, Y$  为  $V$  的子集, 若  $\forall x \in X, y \in Y$ , 有  $x \perp y$ , 则称  $X$  与  $Y$  正交, 记作  $X \perp Y$ .

(3)  $X^\perp = \{v \in V \mid v \perp X\}$ .

$$\langle 0, v \rangle = \langle 0 + 0, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle \implies \langle 0, v \rangle = 0.$$

$\therefore 0 \in X^\perp, \therefore X^\perp$  必非空.

**定理 9.6 (课本定理9.7):** (1)  $X^\perp$  为  $V$  的子空间.

(2) 子空间  $S \subseteq V, S \cap S^\perp = \{0\}$ .

**证:** (1)  $\forall u, v \in X^\perp, \forall x \in X, \langle u, x \rangle = 0, \langle v, x \rangle = 0$   
 $\implies \langle ru + tv, x \rangle = r\langle u, x \rangle + t\langle v, x \rangle = r \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$   
 $\implies ru + tv \in X^\perp$ , 故  $X^\perp$  是  $V$  的子空间.

(2) 设  $x \in S \cap S^\perp$ , 则  $x \in S$  且  $x \in S^\perp \iff x \perp S \implies x \perp x$   
 $\implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ , 故得证.

□

**定义 9.9 正交直和:**  $V = S \oplus T$  且  $S \perp T$ , 则称  $V$  为  $S$  与  $T$  的正交直和, 记作  $V = S \odot T$ .

$S$  为  $V$  的子空间,  $S^c$  为  $S$  的补空间, 则  $V = S \oplus S^c$ .

给定子空间, 其补空间不唯一, 但正交补空间唯一.

**例 9.4:** 在  $\mathbb{R}^2$  上, 子空间  $S$  为过原点的一条直线, 任一过原点而不与  $S$  平行的直线均为  $S$  的补空间, 而仅过原点且与  $S$  正交的直线为  $S$  的正交补空间.

□

**定理 9.7 (课本第3版定理9.8):**  $V = S \odot T \iff V = S \oplus T$  且  $T = S^\perp$ .

给定子空间, 其正交补空间一定存在? 关于正交补空间的存在性问题, 我们稍后讨论.

给定  $S \subseteq V$  和  $S^\perp$ , 是否必有  $V = S \odot S^\perp$ .

**定义 9.10 正交(归一)集:**  $\mathcal{O} = \{u_1, \dots, u_k \mid k \in K\}$ , 若  $\mathcal{O}$  中向量两两正交, 则称  $\mathcal{O}$  为正交集, 特别地,  $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ , 则称  $\mathcal{O}$  为正交归一集.

不含零的正交集均可归一化为正交归一集.

**定理 9.8 (课本定理9.8):** 不含零的正交集线性无关.

**证:** 设  $\{u_k \mid k \in K\}$  是正交集且  $u_i \neq 0 \forall i \in K$ .

设  $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$ ,

$$\forall k \in K, 0 = \langle 0, u_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^m r_i u_i, u_k \rangle = \sum_{i=1}^m r_i \langle u_i, u_k \rangle = r_k \langle u_k, u_k \rangle,$$

又  $\because u_k \neq 0, \therefore \langle u_k, u_k \rangle \neq 0 \implies r_k = 0$

□

线性无关集未必正交, 但可通过 Gram-Schmidt 正交化过程将线性无关集正交化.

**定理 9.9 Gram-Schmidt 正交化过程(课本定理9.10):**  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n, \dots\}$  是向量空间  $V$  中线性独立集且  $v_i \neq 0 \forall i$ , 则可通过

$$o_1 = v_1$$

再对  $o_1, \dots, o_n, \dots$  归一化, 得到正交归一集  $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_n, \dots\}$ , s.t.  $\langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle$ .

**定义 9.11 Hamel 基:** 极大线性无关集.

**定义 9.12 Hilbert 基:** 极大正交归一基.

**定理 9.10 (课本第3版定理9.13):** 当  $\dim V < \infty$  时, Hilbert 基  $\implies$  Hamel 基.

**例 9.5 Hilbert 基并非Hamel 基的例子(课本第3版例9.5):**  $V = l^2$  空间 (所有平方收敛级数列构成的空间),  $M = \{e_1 = (1, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots\}$  显然正交归一. 若  $v = (x_n) \in l^2$  且  $v \perp M$ , 则  $\forall i, x_i = \langle v, e_i \rangle = 0 \implies v = 0$ , 故  $M$  为  $V$  的 Hilbert 基,

然而,  $M$  张成的  $l^2$  的子空间中的平方收敛级数列必仅有有限个非零项  $\implies \text{span} S \neq l^2$ , 故  $M$  非 Hamel 基.  $\square$

**定理 9.11 (课本定理9.11):**  $\mathcal{O}$  为正交归一集,  $S = \langle \mathcal{O} \rangle$ ,  $\forall v \in V$ , 令  $v$  的傅里叶展开  $\hat{v} = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$ , 则  $\hat{v} \in S$  且

- (1)  $\hat{v}$  是  $S$  中唯一满足  $v - \hat{v} \perp S$  的向量.
- (2)  $\hat{v}$  是  $S$  中与  $v$  最近的向量 (即  $\forall w \in S, d(v, \hat{v}) \leq d(v, w)$ ), 称  $\hat{v}$  为  $v$  在  $S$  中的最佳近似.
- (3) **Bessel 不等式:**  $\|\hat{v}\| \leq \|v\|$ .

**证:** (1)  $\forall w \in S, w = \sum_{i=1}^k r_i u_i$ ,

$$\begin{aligned} \text{先证正交: } \langle v - \hat{v}, w \rangle &= \langle v, w \rangle - \langle \hat{v}, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k r_i u_i \rangle - \langle \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^k r_j u_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{j=1}^k \bar{r}_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{j=1}^k \bar{r}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle = 0 \implies v - \hat{v} \perp S. \end{aligned}$$

再证唯一: 若取  $u \in S$ , s.t.  $v - u \perp S$ , 设  $u = \sum_{i=1}^k l_i u_i$ ,

$$\begin{aligned} v - u \perp S &\implies \forall u_j \in S, j = 1, \dots, k, \langle v - u, u_j \rangle = 0 \implies \langle v, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0 \implies \langle v, u_j \rangle = \langle u, u_j \rangle = l_j \implies \\ u &= \sum_{i=1}^k l_i u_i = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i = \hat{v}. \end{aligned}$$

综上, 得证.

- (2)  $\forall w \in S, d^2(u, w) = \|v - w\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v} - w\|^2$ ,  
 $\because \hat{v} \in S, w \in S, \therefore \hat{v} - w \in S$ ,  
 又  $\because v - \hat{v} \perp S, \therefore v - \hat{v} \perp \hat{v} - w$   
 $\implies d^2(u, w) = \|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v} - w\|^2$ ,  
 $\because \|\hat{v} - w\|^2 \geq 0, \therefore d^2(u, w) \geq \|v - \hat{v}\|^2 = d^2(v, \hat{v})$ .



- (3)  $\|v\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v}\|^2$ ,  
 $\because v - \hat{v} \perp S, \hat{v} \in S, \therefore v - \hat{v} \perp \hat{v}$ ,  
 由勾股定理,  $\|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v}\|^2 \geq \|\hat{v}\|^2 \implies \|v\| \geq \|\hat{v}\|$ .

□

**定理 9.12 投影定理(课本定理9.12):**  $S$  是  $V$  的有限维子空间, 则  $V = S \odot S^\perp$ , 且  $\forall v \in V, v = \hat{v} + (v - \hat{v})$ , 其中  $\hat{v} \in S$  为  $v$  在  $S$  中的最佳近似,  $v - \hat{v} \in S^\perp$ ,  
 $\dim V = \dim S + \dim S^\perp$ .

**定理 9.13 (课本定理9.12):**  $S$  为有限维子空间, 则

- (1)  $S^{\perp\perp} = S$ .  
 (2) 子集  $X \subseteq V$  且  $\dim\langle X \rangle < \infty$ , 则  $X^{\perp\perp} = \langle X \rangle$ .

**证:** (1)  $S^\perp = \{v \in V \mid v \perp S\}$ ,  $S^{\perp\perp} = \{u \in V \mid u \perp S^\perp\}$ ,  
 显然,  $S \subseteq S^{\perp\perp}$ .

$\forall w \in S^{\perp\perp} \subseteq V, \because S$  有限维,  $\therefore V = S \odot S^\perp \implies w = w_S + w_{S^\perp} \implies w_S = w - w_{S^\perp}$ ,  
 $0 = \langle w_S^\perp, w_S \rangle = \langle w_{S^\perp}, w - w_{S^\perp} \rangle = \langle w_{S^\perp}, w \rangle - \langle w_{S^\perp}, w_{S^\perp} \rangle$ ,  
 $\because w \in S^{\perp\perp}, \therefore \langle w_{S^\perp}, w \rangle = 0 \implies \langle w_{S^\perp}, w_{S^\perp} \rangle = 0 \implies w_{S^\perp} = 0 \implies w = w_S \in S$ , 故  $S^{\perp\perp} \subseteq S$ .  
 综上, 得证.

(2)  $\because \dim\langle X \rangle < \infty, \therefore |X| < \infty$ , 设  $X = \{u_1, \dots, u_k\}$ .

$\forall w_1 \in \langle X \rangle, w_1 = \sum_{i=1}^k r_i u_i$ ,  
 $\forall w_2 \in X^\perp, \langle w_1, w_2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^k r_i u_i, w_2 \rangle = \sum_{i=1}^k r_i \langle u_i, w_2 \rangle = 0 \implies \langle X \rangle \subseteq X^{\perp\perp}$ .  
 $\forall w \in X^{\perp\perp}$ , 令  $w$  在  $\langle X \rangle$  上的最佳近似  $\hat{w} = \sum_{i=1}^k l_i u_i \in \langle X \rangle$ ,  
 $\langle w - \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = \langle w, w - \hat{w} \rangle - \langle \hat{w}, w - \hat{w} \rangle$ ,  
 $\because w - \hat{w} \in \langle X \rangle^\perp, \hat{w} \in \langle X \rangle, \therefore \langle \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = 0$ ,  
 $\because w - \hat{w} \in X^\perp, w \in X^{\perp\perp}, \therefore \langle w, w - \hat{w} \rangle = 0$   
 $\implies \langle w - \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = 0 \implies w - \hat{w} = 0 \implies w = \hat{w} \in \langle X \rangle \implies X^{\perp\perp} \subseteq \langle X \rangle$ .

综上, 得证.

□

**定理 9.14 (课本第3版定理9.17):**  $\mathcal{O} = \{u_1, \dots, u_k\}$  为正交归一集,  $S = \langle \mathcal{O} \rangle$ , 则下列叙述等价:

- (1)  $\mathcal{O}$  为  $V$  的正交归一基.  
 (2)  $\mathcal{O}^\perp = \{0\}$ .  
 (3)  $\forall v \in V, v = \hat{v} = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i$ .  
 (4) **Bessel 不等式:**  $\|v\| = \|\hat{v}\|$ .

$$(5) \text{ Parseval 不等式: } \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \overline{\langle w, u_i \rangle}, \text{ 即在定序基 } \mathcal{O} \text{ 下, } V \rightarrow F^k, v \mapsto [v]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_k \rangle \end{pmatrix},$$

$$w \mapsto [w]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \langle w, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle w, u_k \rangle \end{pmatrix}, \langle u, w \rangle = [v]_{\mathcal{O}} \cdot [w]_{\mathcal{O}}.$$

证: “(1)  $\implies$  (2)”:  $V = \langle \mathcal{O} \rangle, \forall u \in \mathcal{O}^\perp \subseteq V, v = \sum_{i=1}^k l_i u_i$

$\because u \in \mathcal{O}^\perp, \therefore \forall i = 1, \dots, k, \langle u, u_i \rangle = 0,$

$0 = \langle u, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k l_i \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k l_i \delta_{ij} = l_j \implies u = \sum_{i=1}^k l_i u_i = 0.$

“(2)  $\implies$  (3)”:  $v = v - \hat{v} + \hat{v}, \because \mathcal{O}^\perp = \{0\}, S^\perp \subseteq \mathcal{O}^\perp, \therefore S^\perp = \{0\} \implies V = S \odot S^\perp.$  □

## 9.4 Riesz 表示定理

$F = \mathbb{R}$  (或  $\mathbb{C}$ ),  $V$  为  $F$  上的有限维内积向量空间,  $\dim V = n$ , 内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F, (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ , 固定第二坐标  $v = x$ , 定义线性泛函  $\langle \cdot, x \rangle \in V^* : V \rightarrow F, v \mapsto \langle v, x \rangle$ .

**定理 9.15 Riesz 表示定理(课本定理9.15):**  $\dim V = n, \forall f \in V^*, \exists! x \in V, \text{ s.t. } f(v) = \langle v, x \rangle.$

即对偶空间中的任一函数均可用与一向量的内积代替, 或对偶空间中的任一函数均可用一向量表示.

证:  $\dim \text{Im } f \leq 1$ . 若  $\dim \text{Im } f = 0$ , 则  $f = 0 \implies x = 0$ ;

若  $\dim \text{Im } f \neq 0$ , 则  $\dim \text{Im } f = 1, \exists 0 \neq u \in V, \text{ s.t. } f(u) \neq 0.$

$\because V = \ker f \oplus \text{Im } f$  且  $\ker f^c \approx \text{Im } f, \therefore \dim \ker f^c = \dim \text{Im } f = 1,$

$\implies \ker f^c = \langle u \rangle \implies V = \langle u \rangle \odot \ker f,$

$\implies \langle u \rangle^\perp = \{0\} \implies f(\langle u \rangle^\perp) = 0$ , 故  $V = \langle u \rangle \odot \langle u \rangle^\perp.$

$\because V = \langle u \rangle \odot \langle u \rangle^\perp, \therefore \forall v \in V, v = ru + w$ , 其中  $w \in \ker f, f(v) = f(ru + w) = rf(u) + f(w) = rf(u),$

取  $x = \frac{\overline{f(u)}}{\langle u, u \rangle} u$ , 则  $\langle v, x \rangle = \langle v, \frac{\overline{f(u)}}{\langle u, u \rangle} u \rangle = \frac{f(u)}{\langle u, u \rangle} \langle v, u \rangle = \frac{f(u)}{\langle u, u \rangle} \langle ru + w, u \rangle = \frac{rf(u)}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle = rf(u).$  □

由对偶空间中函数与向量空间中向量的一一对应的关系, 可引出

**定义 9.13 Riesz 映射:**  $\mathcal{R} : V^* \rightarrow V, f \mapsto x, \text{ s.t. } f(v) = \langle v, x \rangle.$

(1)  $\mathcal{R}$  是映射.

(2)  $\mathcal{R}$  满射.

(3)  $\mathcal{R}$  单射.

(4)  $\mathcal{R}$  共轭线性.

证:

(1) 由定理 9.15 即得.

(2) 显然.

(3)  $\ker \mathcal{R} = \{f \in V^* \mid \mathcal{R}(f) = 0\} = \{f \in V^* \mid f(v) = \langle v, 0 \rangle = 0\} = \{0\}$ , 故得证.

(4) 令  $\mathcal{R}(f) = x_f$ ,  $\mathcal{R}(g) = x_g$ ,  $\mathcal{R}(rf + tg) = x_{rf+tg}$ .

一方面,  $(rf + tg)(v) = \langle v, x_{rf+tg} \rangle$ ;

另一方面,  $(rf + tg)(v) = rf(v) + tg(v) = r\langle v, x_f \rangle + t\langle v, x_g \rangle = \langle v, \bar{r}x_f + \bar{t}x_g \rangle$

$\implies x_{rf+tg} = \bar{r}x_f + \bar{t}x_g$ , 即  $\mathcal{R}(rf + tg) = r\mathcal{R}(f) + t\mathcal{R}(g)$ . □

综上,  $\mathcal{R}$  共轭同构.