Chapter 9

实数和复数内积空间

定义 9.1 <u>内积和内积空间</u>**:** $F=\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), 映射 $\langle,\rangle : V\times V\to F$, $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$ 满足

(1) 正定性: $\langle u,u\rangle\geq 0$, 且 $\langle u,u\rangle=0\iff u=0$

(2) 对称 (或共轭对称): 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

(3) 关于第一坐标线性, 关于第二坐标线性 (或共轭线性): 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=r\langle u,v_1\rangle+t\langle u,v_2\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=\bar{r}\langle u,v_1\rangle+\bar{t}\langle u,v_2\rangle$

则称 $\langle,\rangle$ 是 V 上的内积, 称 V 为内积向量空间.

对给定的向量空间, 内积不唯一.

例 9.1: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$,
内积又称点积, $\langle x,y\rangle=x\cdots y=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. □

例 9.2: 在 $\mathbb{C}^n$ 上, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,
$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\bar{\beta}_i$. □

引理 9.1 <u>(课本引理9.1)</u>**:** V 为内积向量空间, $u,v\in V$, $\forall x\in V$, $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\iff u=v$.

证: "$\Longrightarrow$": $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\iff\langle u,x\rangle-\langle v,x\rangle=0\iff\langle u-v,x\rangle=0$,
不妨取 $x=u-v$, 则 $\langle u-v,u-v\rangle=0\iff u-v=0\iff u=v$.

"$\Longleftarrow$": 显然.

综上, 得证. □

定理 9.1 <u>(课本第3 版定理9.2)</u>**:** V 为内积向量空间, $\tau\in\mathcal{L}(V)$,

(1) $\forall v,w\in V$, $\langle\tau(v),w\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\forall v\in V$, $\langle\tau(v),v\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

证: (1) 不妨取 $w=\tau(v)$, 则 $\langle\tau(v),w\rangle=\langle\tau(v),\tau(v)\rangle=0\Longrightarrow\forall v\tau(v)=0$, 故 $\tau=0$.

(2) $\forall v, w \in V$, $v+w \in V$, $v+iw \in V$,
$\langle \tau(v+w), v+w \rangle = 0 = \cancel{\langle \tau(v), v \rangle}0 + \langle \tau(v), w \rangle + \langle \tau(w), v \rangle + \cancel{\langle \tau(w), w \rangle}0$, $\langle \tau(v+iw), v+iw \rangle = \cancel{\langle \tau(v), v \rangle}0 + \langle \tau(v), iw \rangle + \langle \tau(iw), v \rangle + \cancel{\langle \tau(iw), iw \rangle}0$
$\Longrightarrow \langle \tau(v), w \rangle + \langle \tau(w), v \rangle = 0$, $-i\langle \tau(v), w \rangle + i\langle \tau(w), v \rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle \tau(v), w \rangle = 0$,
利用 (1) 中的结论, $\tau(v) = 0$.

$\square$

内积向量空间的子空间和商空间与普通的向量空间同.
S 是内积向量空间 V 的子空间, 则对应的商空间 $\frac{V}{S}$ 为 F 上的向量空间.
但在何种条件下, $\frac{V}{S}$ 是 F 上的内积向量空间 (内积定义同 V 上的内积定义)?

9.1 范数和距离

定义 9.2 **(内积诱导出的)范数和赋范向量空间:** $\|v\| \equiv \sqrt{\langle u, u \rangle}$, 此时称 V 为**赋范向量空间**

定义 9.3 **单位向量:** 若 $\|u\| = 1$, 则称 u 为单位向量.

例 9.3: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. $\square$

定理 9.2 **范数的性质(课本定理9.2):** (1) $\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(2) $\forall r \in F$, $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$.

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式**: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, 且 $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \Longleftrightarrow u$ 与 v 线性相关.

(4) **三角不等式**: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(5) $\forall x \in V$, $\|u-v\| \leq \|u-x\| + \|v-x\|$.

(6) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|$.

(7) **平行四边形法则**: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

证: (7) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$, $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$,
以上两式相加得, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\langle u, u \rangle + 2\langle v, v \rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

$\square$

定义 9.4 **范数和赋范向量空间:** 映射 $\|\| : V \to F$, $v \mapsto \|v\|$, 满足
$\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(2) $\|rv\| = |r| \|v\|$

(3) $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

则称 $\|\|$ 为 V 上的一个范数, 称 V 为赋范向量空间.

给定向量空间, 范数不唯一, 其中内积诱导的范数是一类特殊的范数, 故内积向量空间必为赋范向量空间. 内积诱导的范数可反向构建内积, 但利用一般的范数未必能构建内积 (因为或无法满足内积的线性性质).

定理 9.3 极化恒等式(课本定理9.3): 对内积诱导出的范数,

对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) + \frac{i}{4}(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2)$.

定义 9.5 度量/距离: $d(u,v) \equiv \|u-v\|$, 此时称 V 为度量向量空间.

定理 9.4 度量的性质(课本定理9.4): (1) $d(u,v) \ge 0$, 且 $d(u,v)=0 \Longleftrightarrow u=v$.

(2) 对称性: $d(u,v)=d(v,u)$.

(3) 三角不等式: $d(u,v) \le d(u,x) + d(x,v)$.

内积向量空间必为赋范向量空间, 赋范向量空间必为度量向量空间.

9.2 等距算子

定义 9.6 等距: V,W 是 F 上的内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V,W)$, 若 τ 保持内积不变, 即 $\langle \tau(u),\tau(v)\rangle = \langle u,v\rangle$, 则称 τ 等距.

定义 9.7 等距同构: 若 τ 等距且双射, 则称 τ 等距同构.

定理 9.5 (课本定理9.5): τ 等距 $\Longleftrightarrow \|\tau(u)\| = \|u\|$.

证: "$\Longrightarrow$": 由定义即得.

"$\Longleftarrow$": 由极化恒等式 $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$, 有 $\langle \tau(u),\tau(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|\tau(u)+\tau(v)\|^2 + \|\tau(u)-\tau(v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|\tau(u+v)\|^2 + \|\tau(u-v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \langle u,v\rangle$, 即 τ 等距.

综上, 得证. □

若 τ 等距, 则 $\tau(u)=0 \Longleftrightarrow u=0$, 此时 $\ker\tau = \{0\}$, τ 单射.

9.3 正交性

定义 9.8 <u>正交</u>: (1) V 为内积向量空间, $u,v\in V$, 若 $\langle u,v\rangle=0$, 则称 u 与 v **正交**, 记作 $u\perp v$.

(2) X,Y 为 V 的子集, 若 $\forall x\in X$, $y\in Y$, 有 $x\perp y$, 则称 X 与 Y 正交, 记作 $X\perp Y$.

(3) $X^\perp=\{v\in X\mid v\perp X\}$.

$\langle 0,v\rangle=\langle 0+0,v\rangle=\langle 0,v\rangle+\langle 0,v\rangle\Longrightarrow\langle 0,v\rangle=0$.
$\because 0\in X^\perp$, $\therefore X^\perp$ 必非空.

定理 9.6 <u>(课本定理9.7)</u>: (1) $X^\perp$ 为 V 的子空间.

(2) 子空间 $S\subseteq V$, $S\cap S^\perp=\{0\}$.

证: (1) $\forall u,v\in X^\perp,\forall x\in X,\langle u,x\rangle=0,\langle v,x\rangle=0$
$\Longrightarrow\langle ru+tv,x\rangle=r\langle u,x\rangle+t\langle v,x\rangle=r0+t0=0$
$\Longrightarrow ru+tv\in X^\perp$, 故 $X^\perp$ 是 V 的子空间.

(2) 设 $x\in S\cap S^\perp$, 则 $x\in S$ 且 $x\in S^\perp\Longleftrightarrow x\perp S\Longrightarrow x\perp x$
$\Longrightarrow\langle x,x\rangle=0\Longrightarrow x=0$, 故得证.

□

定义 9.9 <u>正交直和</u>: $V=S\oplus T$ 且 $S\perp T$, 则称 V 为 S 与 T 的正交直和, 记作 $V=S\odot T$.

S 为 V 的子空间, S^c 为 S 的补空间, 则 $V=S\oplus S^c$.
给定子空间, 其补空间不唯一, 但正交补空间唯一.

例 9.4: 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 子空间 S 为过原点的一条直线, 任一过原点而不与 S 平行的直线均为 S 的补空间, 而仅过原点且与 S 正交的直线为 S 的正交补空间. □

定理 9.7 <u>(课本第3 版定理9.8)</u>: $V=S\odot T\Longleftrightarrow V=S\oplus T$ 且 $T=S^\perp$.

给定子空间, 其正交补空间一定存在? 关于正交补空间的存在性问题, 我们稍后讨论.
给定 $S\subseteq V$ 和 $S^\perp$, 是否必有 $V=S\odot S^\perp$.

定义 9.10 <u>正交(归一)集</u>: $\mathcal{O}=\{u_1,\cdots,u_k\mid k\in K\}$, 若 $\mathcal{O}$ 中向量两两正交, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交集**, 特别地, $\langle u_i,u_j\rangle=\delta_{ij}$, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交归一集**.

不含零的正交集均可归一化为正交归一集.

定理 9.8 <u>(课本定理9.8)</u>: 不含零的正交集线性无关.

证: 设 $\{u_k\mid k\in K\}$ 是正交集且 $u_i\neq 0\forall i\in K$.
设 $\sum_{i=1}^m r_iu_i=0$,
$\forall k\in K$, $0=\langle 0,u_k\rangle=\langle\sum_{i=1}^m r_iu_i,u_k\rangle=\sum_{i=1}^m r_i\langle u_i,u_k\rangle=r_k\langle u_k,u_k\rangle$,
又 $\because u_k\neq 0$, $\therefore\langle u_k,u_k\rangle\neq 0\Longrightarrow r_k=0$ □

线性无关集未必正交, 但可通过 Gram-Schmidt 正交化过程将线性无关集正交化.

定理 9.9 Gram-Schmidt 正交化过程(课本定理9.10): $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n, \cdots\}$ 是向量空间 V 中线性独立集且 $v_i \neq 0 \forall i$, 则可通过

$$o_1 = v_1$$

再对 $o_1, \cdots, o_n, \cdots$ 归一化, 得到正交归一集 $\mathcal{O} = \langle o_1, \cdots, o_n, \cdots \rangle$, s.t. $\langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle$.

定义 9.11 Hammel 基: 极大线性无关集.

定义 9.12 Hilbert 基: 极大正交归一基.

定理 9.10 (课本第3 版定理9.13): 当 $\dim V < \infty$ 时, Hilbert 基 $\Longrightarrow$ Hammel 基.

例 9.5 Hilbert 基并非Hammel 基的例子(课本第3 版例9.5): □

定理 9.11 (课本定理9.11): $\mathcal{O}$ 为正交归一集, $S = \langle \mathcal{O} \rangle$, $\forall v \in V$, 令 v 的**傅里叶展开** $\hat{v} = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_k \rangle u_k$, 则 $\hat{v} \in S$ 且

(1) $\hat{v}$ 是 S 中唯一满足 $v - \hat{v} \perp S$ 的向量.

(2) $\hat{v}$ 是 S 中与 v 最近的向量 (即 $\forall w \in S$, $d(v, \hat{v}) \leq d(d, w)$), 称 $\hat{v}$ 为 v 在 S 中的**最佳近似**.

(3) **Bessel 不等式**: $\|\hat{v}\| \leq \|v\|$.

证: (1) $\forall w \in S$, $w = \sum_{i=1}^k r_i u_i$,

先证正交: $\langle v - \hat{v}, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle \hat{v}, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k r_i u_i \rangle - \langle \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^k r_j u_j \rangle$
$= \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{i=1}^k \bar{r}_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{j=1}^k \bar{r}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle = 0 \Longrightarrow v - \hat{v} \perp S$.

再证唯一: 若取 $u \in S$, s.t. $v - u \perp S$, 设 $u = \sum_{i=1}^k l_i u_i$,
$v - u \perp S \Longrightarrow \forall u_j \in S$, $j = 1, \cdots, k$, $\langle v - u, u_j \rangle = 0 \Longrightarrow \langle v, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0 \Longrightarrow \langle v, u_j \rangle = \langle u, u_j \rangle = l_j \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^k l_i u_i = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i = v$.

综上, 得证.

(2) $\forall w \in S$, $d^2(u, w) = \|v - w\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v} - w\|^2$,
$\because \hat{v} \in S$, $w \in S$, $\therefore \hat{v} - w \in S$,
又 $\because v - \hat{v} \perp S$, $\therefore v - \hat{v} \perp \hat{v} - w$
$\Longrightarrow d^2(u, w) = \|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v} - w\|^2$,
$\because \|\hat{v} - w\|^2 \geq 0$, $\therefore d^2(u, w) \geq \|v - \hat{v}\|^2 = d^2(v, \hat{v})$.

(3) $\|v\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v}\|^2$,
$\because v - \hat{v} \perp S$, $\hat{v} \in S$, $\therefore v - \hat{v} \perp \hat{v}$,
由勾股定理, $\|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v}\|^2 \geq \|\hat{v}\|^2 \Longrightarrow \|v\| \geq \|\hat{v}\|$.

□

定理 9.12 投影定理(课本定理9.12): S 是 V 的有限维子空间, 则 $V = S \odot S^{\perp}$, 且 $\forall v \in V$, $v = \hat{v} + (v - \hat{v})$, 其中 $\hat{v} \in S$ 为 v 在 S 中的最佳近似, $v - \hat{v} \in S^{\perp}$,
$\dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$.

定理 9.13 (课本定理9.12): S 为有限维子空间, 则

(1) $S^{\perp\perp} = S$.

(2) 子集 $X \subseteq V$ 且 $\dim\langle X\rangle < \infty$, 则 $X^{\perp\perp} = \langle X\rangle$.

证: (1) $S^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp S\}$, $S^{\perp\perp} = \{u \in V \mid u \perp S^{\perp}\}$,
显然, $S \subseteq S^{\perp\perp}$.

$\forall w \in S^{\perp\perp} \subseteq V$, $\because S$ 有限维, $\therefore V = S \odot S^{\perp} \Longrightarrow w = w_S + w_{S^{\perp}} \Longrightarrow w_S = w - w_{S^{\perp}}$,
$0 = \langle w_S^{\perp}, w_S\rangle = \langle w_{S^{\perp}}, w - w_{S^{\perp}}\rangle = \langle w_{S^{\perp}}, w\rangle - \langle w_{S^{\perp}}, w_{S^{\perp}}\rangle$,
$\because w \in S^{\perp\perp}$, $\therefore \langle w_{S^{\perp}}, w\rangle = 0 \Longrightarrow \langle w_{S^{\perp}}, w_{S^{\perp}}\rangle = 0 \Longrightarrow w_{S^{\perp}} = 0 \Longrightarrow w = w_S \in S$, 故 $S^{\perp\perp} \subseteq S$.

综上, 得证.

(2) $\because \dim\langle X\rangle < 0$, $\therefore |X| < \infty$, 设 $X = \{u_1, \cdots, u_k\}$.
$\forall w_1 \in \langle X\rangle$, $w_1 = \sum_{i=1}^{k} r_i u_i$,
$\forall w_2 \in X^{\perp}$, $\langle w_1, w_2\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} r_i u_i, w_2\rangle = \sum_{i=1}^{k} r_i \langle u_i, w_2\rangle = 0 \Longrightarrow \langle X\rangle \subseteq X^{\perp\perp}$.
$\forall w \in X^{\perp\perp}$, 令 w 在 $\langle X\rangle$ 上的最佳近似 $\hat{w} = \sum_{i=1}^{k} l_i u_i \in \langle X\rangle$,
$\langle w - \hat{w}, w - \hat{w}\rangle = \langle w, w - \hat{w}\rangle - \langle \hat{w}, w - \hat{w}\rangle$,
$\because w - \hat{w} \in \langle X\rangle^{\perp}$, $\hat{w} \in \langle X\rangle$, $\therefore \langle \hat{w}, w - \hat{w}\rangle = 0$,
$\because w - \hat{w} \in X^{\perp}$, $w \in X^{\perp\perp}$, $\therefore \langle w, w - \hat{w}\rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle w - \hat{w}, w - \hat{w}\rangle = 0 \Longrightarrow w - \hat{w} = 0 \Longrightarrow w = \hat{w} \in \langle X\rangle \Longrightarrow X^{\perp\perp} \in \langle X\rangle$.

综上, 得证.

□

定理 9.14 (课本第3 版定理9.17): $\mathcal{O} = \{u_1, \cdots, u_k\}$ 为正交归一集, $S = \langle \mathcal{O}\rangle$, 则下列叙述等价:

(1) $\mathcal{O}$ 为 V 的正交归一基.

(2) $\mathcal{O}^{\perp} = \{0\}$.

(3) $\forall v \in V$, $v = \hat{v} = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i$.

(4) **Bessel 不等式**: $\|v\| = \|\hat{v}\|$.

(5) **Parserval 不等式**: $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle \overline{\langle w, u_i\rangle}$, 即在定序基 $\mathcal{O}$ 下, $V \to F^k$, $v \mapsto [v]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_k\rangle \end{pmatrix}$,

$$w \mapsto [w]_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} \langle w, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle w, u_k \rangle \end{pmatrix}, \langle u, w \rangle = [v]_{\mathcal{O}} \cdot [w]_{\mathcal{O}}.$$

证: "(1) $\Longrightarrow$ (2)": $V = \langle \mathcal{O} \rangle$, $\forall u \in \mathcal{O}^{\perp} \subseteq V$, $v = \sum_{i=1}^{k} l_i u_i$
$\because u \in \mathcal{O}^{\perp}$, $\therefore \forall i = 1, \cdots, k$, $\langle u, u_i \rangle = 0$,
$0 = \langle u, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} l_i \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} l_i \delta_{ij} = l_j \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{k} l_i u_i = 0.$

"(2) $\Longrightarrow$ (3)": $v = v - \hat{v} + \hat{v}$, $\because \mathcal{O}^{\perp} = \{0\}$, $S^{\perp} \subseteq \mathcal{O}^{\perp}$, $\therefore S^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow V = S \odot S^{\perp}$.

□

9.4 Riesz 表示定理

$F = \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), V 为 F 上的有限维内积向量空间, $\dim V = n$, 内积 $\langle , \rangle : V \times V \to F$, $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$, 固定第二坐标 $v = x$, 定义线性泛函 $\langle , x \rangle \in V^* : V \to F$, $v \mapsto \langle v, x \rangle$.

定理 9.15 Riesz 表示定理(课本定理9.15): $\dim V = n$, $\forall f \in V^*$, $\exists! x \in V$, s.t. $f(v) = \langle v, x \rangle$.

即对偶空间中的任一函数均可用与一向量的内积代替, 或对偶空间中的任一函数均可用一向量表示.

证: $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$. 若 $\dim \operatorname{Im} f = 0$, 则 $f = 0 \Longrightarrow x = 0$;
若 $\dim \operatorname{Im} f \neq 0$, 则 $\dim \operatorname{Im} f = 1$, $\exists 0 \neq u \in V$, s.t. $f(u) \neq 0$.
$\because V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ 且 $\ker f^c \approx \operatorname{Im} f$, $\therefore \dim \ker f^c = \dim \operatorname{Im} f = 1$,
$\Longrightarrow \ker f^c = \langle u \rangle \Longrightarrow V = \langle u \rangle \odot \ker f$,
$\Longrightarrow \langle u \rangle^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow f(\langle u \rangle^{\perp}) = 0$, 故 $V = \langle u \rangle \odot \langle u \rangle^{\perp}$.

$\because V = \langle u \rangle \odot \langle u \rangle^{\perp}$, $\therefore \forall v \in V$, $v = ru + w$, 其中 $w \in \ker f$, $f(v) = f(ru + w) = rf(u) + f(w) = rf(u)$,
取 $x = \frac{\overline{f(u)}}{\langle u, u \rangle} u$, 则 $\langle v, x \rangle = \langle v, \frac{\overline{f(u)}}{\langle u, u \rangle} u \rangle = \frac{f(u)}{\langle u, u \rangle} \langle v, u \rangle = \frac{f(u)}{\langle u, u \rangle} \langle ru + w, u \rangle = \frac{rf(u)}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle = rf(u)$. □

由对偶空间中函数与向量空间中向量的一一对应的关系, 可引出

定义 9.13 Riesz 映射: $\mathcal{R} : V^* \to V$, $f \mapsto x$, s.t. $f(v) = \langle v, x \rangle$.

(1) $\mathcal{R}$ 是映射.

(2) $\mathcal{R}$ 满射.

(3) $\mathcal{R}$ 单射.

(4) $\mathcal{R}$ 共轭线性.

证:

(1) 由定理 9.15 即得.

(2) 显然.

(3) $\ker \mathcal{R} = \{f \in V^* \mid \mathcal{R}(f) = 0\} = \{f \in V^* \mid f(v) = \langle v, 0 \rangle = 0\} = \{0\}$, 故得证.

(4) 令 $\mathcal{R}(f) = x_f$, $\mathcal{R}(g) = x_g$, $\mathcal{R}(rf + tg) = x_{rf+tg}$.
一方面, $(rf + tg)(v) = \langle v, x_{rf+tg} \rangle$;
另一方面, $(rf + tg)(v) = rf(v) + tg(v) = r\langle v, x_f \rangle + t\langle v, x_g \rangle = \langle v, \bar{r} x_f + \bar{t} x_g \rangle$
$\Longrightarrow x_{rf+tg} = \bar{r} x_f + \bar{t} x_g$, 即 $\mathcal{R}(rf + tg) = r\mathcal{R}(f) + t\mathcal{R}(g)$. □

综上, $\mathcal{R}$ 共轭同构.