Chapter 5

模 II: 自由与诺特模

定义 5.1 诺特(Notherian) 模: $M \in R-\mathrm{mod}$, $S_1, \cdots, S_n, \cdots$ 是 M 的子模且 $S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$, 若 $\exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \cdots$, 则称 M 满足**升链条件 (A.C.C.)**, 称满足 ACC 的模为**诺特模**.

定理 5.1 (课本定理5.7): (1) $M \in R-\mathrm{mod}$ 为诺特模 $\Longleftrightarrow M$ 的子模是有限生成的.

(2) R 是诺特环 $\Longleftrightarrow R$ 的理想都是有限生成的.

证: (1) "$\Longrightarrow$": 设 S 是 M 的子模. 若 $S = \{0\}$, 则 $S = \langle\langle 0\rangle\rangle$ 显然有限生成,

若 $S \neq \{0\}$, 则 $\exists 0 \neq v_1 \in S$, 令 $S_1 = \langle\langle v_1\rangle\rangle \subseteq S$,

若 $S_1 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_1 \neq S$, 则 $\exists v_2 \in S - S_1$, 令 $S_2 = \langle\langle v_1, v_2\rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$,

若 $S_2 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_2 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_3 \in S - S_2$, 令 $S_3 = \langle\langle v_1, v_2, v_3\rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S$,

若 $S_3 = S$, 则 S 有限生成,

若 $S_3 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_4 \in S - S_3$, 令 $S_4 = \langle\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle\rangle \in S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S_3 \subseteq S_4 \subseteq S$,

$\cdots$

以此类推, 得 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$,

$\because S$ 满足 ACC, $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \cdots = S = \langle\langle v_1, \cdots, v_n\rangle\rangle$, 故 S 有限生成.

"$\Longleftarrow$": 取 M 的任一子模升链 $S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \cdots$, 则 $S = \cap_{i\in J} S_i$ 是 M 的子模,

$\because M$ 的子模是有限生成的, $\therefore S$ 必然是有限生成, 故设 $S = \langle\langle v_m, \cdots, v_m\rangle\rangle$,

$\forall K = 1, \cdots, m$, $u_k \in S = \cup_{i\in J} S_i \Longrightarrow \exists i_k \in J$, s.t. $u_k \in S_{i_k}$,

令 $K = \max\{i_1, \cdots, i_m\}$, 则由升链的性质, $u_1, \cdots, u_m \in S_K$

$\Longrightarrow S_K = S$, 故升链必终止于 S_K.

综上, 得证.

$\square$

例 5.1: $\because \mathbb{Z}$ 的任意理想均有单个元素生成, 具体地说, I 是 $\mathbb{Z}$ 的理想, 则 $I = \langle n\rangle$, 其中 n 为 I 中的最小整数, $\therefore \mathbb{Z}$ 是诺特环. $\square$

例 5.2: $F[x] = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in F, n \in \mathbb{Z}\}$, I 是 $F[x]$ 的理想, 则 $I = \langle f(x)\rangle$, 其中 $\deg f(x)$ 是 I 中最小的[1], 故

[1] 多项式间的除法: 若 $\deg g(x) \geq \deg f(x)$, 则 $\exists q(x), r(x) \in F[x]$, s.t. $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ 且 $(r(x) = 0$ 或 $0 < \deg r(x) < \deg f(x))$

$(F[x], +, \cdot)$ 是诺特环. $\square$

定义 5.2 **主理想:** 由一个元素生成的诺特环.

定理 5.2 **(课本定理5.8):** R 为有单位元的交换环,
R 是诺特环 $\iff$ R 上的有限生成模都是诺特模.

上述定理意味着有限生成的性质对诺特环是遗传的.

证: "$\Longleftarrow$": $R \in R-\mathrm{mod}$ 且 $R = \langle\langle 1 \rangle\rangle$, 故 R 为诺特环.

"$\Longrightarrow$": 取 R 上的有限生成模 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle \in R-\mathrm{mod}$, $M = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R\}$.
定义映射 $\tau : R^n \to M$, $(r_1, \cdots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i u_i$.

(1) $\because \tau(r(r_1, \cdots, r_n) + t(l_1, \cdots, l_n)) = \tau(rr_1 + tl_1, \cdots, rr_n + tl_n) = \sum_{i=1}^n (rr_i + tl_i)u_i = r\sum_{i=1}^n r_i u_i + t\sum_{i=1}^n l_i u_i = r\tau(r_1, \cdots, r_n) + t\tau(l_1, \cdots, l_n)$, $\therefore \tau$ 是 R^n 到 M 上的模同态.

(2) $\because \forall (r_1, \cdots, r_n)$, $\exists \sum_{i=1}^n r_i u_i$, $\therefore \tau$ 满射.

$\Longrightarrow \tau$ 满同态.

设 S 是 M 的任一子模, 则 $\tau^{-1}(S)$ 是 R^n 的子模, 且 $\because \tau$ 满同态, $\therefore \tau(\tau^{-1}(S)) = S$.

【思路】根据定理 5.2, 要证 M 诺特, 即证 M 的子模 S 有限生成, 于是先证 R^n 的子模有限生成, 从而 R^n 诺特, 进而利用引理 5.1 得 S 有限生成.

数学归纳法: 当 $n = 1$ 时, R 诺特 $\Longrightarrow R^n$ 诺特.
假设当 $n = k$ 时, R^k 诺特, 则当 $n = k + 1$ 时, 要证 R^{k+1} 诺特, 即证 R^{k+1} 的子模有限生成.
取 I 为 R^{n+1} 子模, 取 $I_1 = \{(0, \cdots, 0, a_{k+1}) \mid \exists a_1, \cdots, a_k \in R,\ \text{s.t. } (a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}) \in I\}$, $I_2 = \{(a_1, \cdots, a_k, 0) \mid \exists a_k \in R,\ \text{s.t. } (a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}) \in I\}$.
$\forall (0, \cdots, 0, a_{k+1}), (0, \cdots, 0, b_{k+1}) \in I_1$, $\exists a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_k \in R$, s.t. $(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}), (b_1, \cdots, b_k, b_{k+1}) \in I$,
$\because I$ 是子模, $\therefore \forall r, t \in R$, $r(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}) + t(b_1, \cdots, b_k, b_{k+1}) = (ra_1 + tb_1, \cdots, ra_k + ta_k) \in I \Longrightarrow r(0, \cdots, 0, a_{k+1}) + t(0, \cdots, 0, b_{k+1}) = (0, \cdots, 0, ra_{k+1} + tb_{k+1}) \in I_2$, 故 I_1 为 R^{k+1} 的子模.
$\forall (a_1, \cdots, a_k, 0), (b_1, \cdots, b_k, 0) \in I_2$, $\exists a_{k+1}, b_{k+1}$, s.t. $(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}), (b_1, \cdots, b_k, b_{k+1}) \in I$
$\therefore I$ 是子模, $\therefore \forall r, t \in R$, $r(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}) + t(b_1, \cdots, b_k, b_{k+1}) = (ra_1 + tb_1, \cdots, ra_k + ta_k) \in I \Longrightarrow r(a_1, \cdots, a_k, 0) + t(b_1, \cdots, b_k, 0) = (ra_1 + tb_1, \cdots, ra_k + tb_k, 0) \in I_2$, 故 I_2 为 R^{k+1} 的子模.
令 $J_1 = \{a_{k+1} \mid (0, \cdots, 0, a_{k+1}) \in I_1\}$, $J_2 = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid (a_1, \cdots, a_k) \in I_2\}$, 易证 J_1 是 R 的子模, J_2 是 R^k 的子模.
$\because R, R^k$ 诺特, $\therefore J_1, J_2$ 有限生成, 设 $J_1 = \langle\langle g_1, \cdots, g_m \rangle\rangle$, $J_2 = \langle\langle f_1, \cdots, f_n \rangle\rangle$, 其中 $g_1 \in R$, $f_i \in R^k$.
于是 $\forall i = 1, \cdots, m$, $(0, \cdots, 0, g_i) \in I_1$, 由 I_1 的定义, $\exists g_{i_1}, \cdots, g_{i_k} \in R$, s.t. $\bar{g}_i \equiv (g_{i_1}, \cdots, g_{i_n}, g_i) \in I$,
又有 $\bar{f}_i = (f_i, 0)$,
$\forall r = (r_1, \cdots, r_k, r_{k+1}) \in I$, 则 $(0, \cdots, 0, r_{k+1}) \in I_1$, 即 $r_{k+1} \in J_1 = \langle\langle g_1, \cdots, g_m \rangle\rangle$,
于是 $r_{k+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$, $(h, 0) \equiv r - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{g}_i = (*, \cdots, *, 0) \in I$, 从而 $(h, 0) \in I_2$, $h \in J_2$, 设 $h = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i$
$\Longrightarrow r = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{g}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{f}_i$, 故 I 由 $\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_m, \bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_n$ 生成 $\Longrightarrow R^{k+1}$ 诺特 $\Longrightarrow R^n$ 诺特 $\forall n \Longrightarrow S = \tau(\tau^{-1}(S))$ 有限生成. $\square$

引理 5.1: $\tau: M \to N$ 满同态, 则 M 有限生成 $\Longrightarrow N$ 有限生成, 即有限生成模的满同态像有限生成.

证: $\because M$ 有限生成, $\therefore$ 设 $M=\langle\langle v_1,\cdots,v_n\rangle\rangle=\{\sum_{i=1}^n r_iv_i \mid r_i\in R\}$,
$\because \tau$ 满同态, $\therefore N=\operatorname{Im}\tau=\{\tau(u)\mid u\in M\}=\{\tau(u)\mid u=\sum_{i=1}^n r_iv_i, r_i\in R\}=\{\tau\left(\sum_{i=1}^n r_iv_i\right)\mid r_i\in R\}=\{\sum_{i=1}^n r_i\tau(v_i)\mid r_i\in R\}=\langle\langle\tau(v_1),\cdots,\tau(v_n)\rangle\rangle$, 故 N 有限生成. □

定理 5.3 <u>Hilbert 基本定理(课本定理5.9)</u>: R 是诺特环 $\Longrightarrow R[x]\equiv\{\sum_{i=0}^n a_ix^i\mid a_i\in R, n\in\mathbb{Z}^+\}$ 诺特, 其中 $\sum_{i=0}^n a_ix^i+\sum_{j=0}^m b_jx^j=\sum_{k=0}^{\max\{n,m\}}(a_k+b_k)x^k$, $(\sum_{i=0}^n a_ix^i)\left(\sum_{j=0}^m b_jx^j\right)=\sum_{k=0}^{nm}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k$.

证: 设 I 是 $R[x]$ 的理想, $I_k=\{r_k\in R\mid \exists a_0+a_1x+\cdots+a_{k-1}x^{k-1}+r_kx^k\in I\}$ 是 R 的理想,
且 $\because \forall f(x)\in I$, $xf(x)\in I$, $\therefore I_0\subseteq I_1\subseteq\cdots\subseteq I_K\subseteq\cdots$
又 $\because R$ 诺特, $\therefore \exists K\in\mathbb{Z}^+$, s.t. $I_K=I_{K+1}=\cdots$, 且 R 的理想均有限生成,
故设 $I_0=\langle r_{01},r_{02},\cdots,r_{0t_0}\rangle$, $I_1=\langle r_{11},r_{12},\cdots,r_{1t_1}\rangle$, $\cdots$, $I_K=\langle r_{K1},r_{K2},\cdots,r_{Kt_K}\rangle$,
$g_{01}=r_{01}\in I$, $g_{02}=r_{02}\in I$, $\cdots$, $g_{0t_0}=r_{0t_0}\in I$,
$g_{11}=r_{11}x+O(1)\in I$, $g_{12}=r_{12}x+O(1)\in I$, $\cdot$, $g_{1t_1}=r_{1t_1}x+O(1)\in I$,
$\cdots$,
$g_{K1}=r_{K1}x^k+O(x^{k-1})\in I$, $r_{K2}x^K+O(x^{K-1})\in I$, $\cdots$, $g_{Kt_K}=r_{Kt_K}x^K+O(x^{K-1})\in I$,
则 I 由 $\{g_{ij}\mid i=1,\cdots,K; j=1,\cdots t_i\}$ 生成,
$\forall f(x)\in I$, 设 $f(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$,
取 $a_n\in I_n$, 若 $n>K$, 则 $I_n=I_K=\langle r_{K1},\cdots,r_{Kt_K}\rangle$, 从而 $a_n=\sum_{i=r}^{t_K}\alpha_ir_i$,
$\Longrightarrow f(x)=a_nx^n+O(x^{n-1})=x^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{t_K}\alpha_ig_{Ki}\right)+O(x^{n-K})=x^{n-K}\left(\sum_{i=1}^{t_K}\alpha_ig_{Ki}\right)+O(x^{K-1})=\sum_{i=1}^{t_K}\alpha_ir_{Ki}x^n+O(x^{n-1})$,
$f(x)\to f(x)-x^{n-K}\left(\sum_{i=1}^{t_K}\alpha_ig_{Ki}\right)=\beta_{n-1}x^{n-1}+O(x^{n-2})$,
重复以上操作直至多项式的最高次数 $n<K$, 此时, $a^n\in I_n=\langle r_{n1},\cdots,r_{nt_n}\rangle$, $a_n=\sum_{j=1}^{t_n}\beta_jr_{nj}$, $f(x)-\sum_{j=1}^{t_n}\beta_jg_{nj}=$,
即执行以上操作有限次后, $f(x)$ 完全由 g_{ij} 表示 $\Longrightarrow I$ 有限生成, 故由定理 5.1 得, $R[x]$ 诺特. □

例 5.3: $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 诺特 $\Longrightarrow \mathbb{Z}[x],\mathbb{Q}[x],\mathbb{R}[x],\mathbb{C}[x]$ 诺特.
$\mathbb{R}[z]=\{\sum_{i=0}^n a_ix^i\mid a_i\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}^+\}$,
方程组 $\begin{cases} f_1(x)=a_{1n}x^n+a_{1,n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{11}x+a_{10}=0,\\ \cdots\\ f_m(x)=a_{mn}x^n+a_{m,n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{m1}x+a_{m0}=0,\end{cases}$ 的解为 $\mathbb{R}$ 的子集合,
令 $h(x)=\sum_{i=1}^m\alpha_if_i(x)$, 若 $f_i(x)=0\forall i$, 则 $h(x)=0$.
方程组与解集合之间存在的一一对应的关系, 正如 $\mathbb{R}[x]$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的对应关系. □