Chapter 9

实数和复数内积空间

定义 9.1 **内积和内积空间:** $F=\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), 映射 $\langle,\rangle: V\times V\to F$, $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$ 满足

(1) **正定性**: $\langle u,u\rangle\geq 0$, 且 $\langle u,u\rangle=0\Longleftrightarrow u=0$,

(2) **对称 (或共轭对称)**: 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$,

(3) **关于第一坐标线性, 关于第二坐标线性 (或共轭线性)**: 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=r\langle u,v_1\rangle+t\langle u,v_2\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=\bar{r}\langle u,v_1\rangle+\bar{t}\langle u,v_2\rangle$,

则称 $\langle,\rangle$ 是 V 上的**内积**, 称 V 为**内积向量空间**.

对给定的向量空间, 内积不唯一.

例 9.1: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$,
内积又称点积, $\langle x,y\rangle=x\cdots y=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. □

例 9.2: 在 $\mathbb{C}^n$ 上, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,
$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\bar{\beta}_i$. □

引理 9.1 **(课本引理9.1):** V 为内积向量空间, $u,v\in V$, $\forall x\in V$, $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\Longleftrightarrow u=v$.

证: "$\Longrightarrow$": $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\Longleftrightarrow\langle u,x\rangle-\langle v,x\rangle=0\Longleftrightarrow\langle u-v,x\rangle=0$.
不妨取 $x=u-v$, 则 $\langle u-v,u-v\rangle=0\Longleftrightarrow u-v=0\Longleftrightarrow u=v$.

"$\Longleftarrow$": 显然.

综上, 得证. □

定理 9.1 **(课本第3 版定理9.2):** V 为内积向量空间, $\tau\in\mathcal{L}(V)$, 则

(1) $\forall v,w\in V$, $\langle\tau(v),w\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\forall v\in V$, $\langle\tau(v),v\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

证: (1) 不妨取 $w=\tau(v)$, 则 $\langle\tau(v),w\rangle=\langle\tau(v),\tau(v)\rangle=0\Longrightarrow\forall v$, $\tau(v)=0$, 故 $\tau=0$.

(2) $\forall v, w \in V$, $v + w \in V$, $v + iw \in V$.
$\langle \tau(v+w), v+w\rangle = 0 = \cancel{\langle \tau(v), v\rangle}0 + \langle \tau(v), w\rangle + \langle \tau(w), v\rangle + \cancel{\langle \tau(w), w\rangle}0$, $\langle \tau(v+iw), v+iw\rangle = \cancel{\langle \tau(v), v\rangle}0 + \langle \tau(v), iw\rangle + \langle \tau(iw), v\rangle + \cancel{\langle \tau(iw), iw\rangle}0$
$\Longrightarrow \langle \tau(v), w\rangle + \langle \tau(w), v\rangle = 0$, $-i\langle \tau(v), w\rangle + i\langle \tau(w), v\rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle \tau(v), w\rangle = 0$.
利用 (1) 中的结论, $\tau(v) = 0$.

□

内积向量空间的子空间和商空间与普通的向量空间同.
S 是内积向量空间 V 的子空间, 则对应的商空间 $\frac{V}{S}$ 为 F 上的向量空间.
但在何种条件下, $\frac{V}{S}$ 是 F 上的内积向量空间 (内积定义同 V 上的内积定义)?

9.1 范数和距离

定义 9.2 (内积诱导出的)范数和赋范向量空间: u 的 (由内积诱导出的) **范数** $\|u\| \equiv \sqrt{\langle u, u\rangle}$, 此时称 V 为**赋范向量空间**.

定义 9.3 单位向量: 若 $\|u\| = 1$, 则称 u 为单位向量.

例 9.3: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. □

定理 9.2 范数的性质(课本定理9.2): (1) $\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(2) $\forall r \in F$, $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$.

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式**: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, 且 $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \Longleftrightarrow u$ 与 v 线性相关.

(4) **三角不等式**: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(5) $\forall x \in V$, $\|u - v\| \leq \|u - x\| + \|v - x\|$.

(6) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

(7) **平行四边形法则**: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

证: (7) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$, $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$.
以上两式相加得, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\langle u, u\rangle + 2\langle v, v\rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

□

定义 9.4 范数和赋范向量空间: 映射 $\|\| : V \to F$, $v \mapsto \|v\|$, 若满足

$\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$,

(2) $\|rv\| = |r| \|v\|$,

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

则称 $\|\|$ 为 V 上的一个**范数**, 称 V 为**赋范向量空间**.

给定向量空间, 范数不唯一, 其中内积诱导的范数是一类特殊的范数, 故内积向量空间必为赋范向量空间. 内积诱导的范数可反向构建内积, 但利用一般的范数未必能构建内积 (因为或无法满足内积的线性性质).

定理 9.3 极化恒等式(课本定理9.3): 对内积诱导出的范数,

对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)+\frac{i}{4}(\|u+iv\|^2-\|u-iv\|^2)$.

定义 9.5 度量/距离: $d(u,v)\equiv\|u-v\|$, 此时称 V 为**度量向量空间**.

定理 9.4 度量的性质(课本定理9.4): (1) $d(u,v)\geq 0$, 且 $d(u,v)=0\iff u=v$.

(2) **对称性**: $d(u,v)=d(v,u)$.

(3) **三角不等式**: $d(u,v)\leq d(u,x)+d(x,v)$.

内积向量空间必为赋范向量空间, 赋范向量空间必为度量向量空间.

9.2 等距算子

定义 9.6 等距: V,W 是 F 上的内积向量空间, $\tau\in\mathcal{L}(V,W)$, 若 τ 保持内积不变, 即 $\langle\tau(u),\tau(v)\rangle=\langle u,v\rangle$, 则称 τ **等距**.

定义 9.7 等距同构: 若 τ 等距且双射, 则称 τ **等距同构**.

定理 9.5 (课本定理9.5): τ 等距 $\iff\|\tau(u)\|=\|u\|$.

证: "$\Longrightarrow$": 由定义即得.

"$\Longleftarrow$": 由极化恒等式 $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2+\|u-v\|^2)$, 有 $\langle\tau(u),\tau(v)\rangle=\frac{1}{4}(\|\tau(u)+\tau(v)\|^2+\|\tau(u)-\tau(v)\|^2)=\frac{1}{4}(\|\tau(u+v)\|^2+\|\tau(u-v)\|^2)=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2+\|u-v\|^2)=\langle u,v\rangle$, 即 τ 等距.

综上, 得证. □

若 τ 等距, 则 $\tau(u)=0\iff u=0$, 此时 $\ker\tau=\{0\}$, τ 单射.

9.3 正交性

定义 9.8 正交: (1) V 为内积向量空间, $u,v\in V$, 若 $\langle u,v\rangle=0$, 则称 u 与 v **正交**, 记作 $u\perp v$.

(2) X,Y 为 V 的子集, 若 $\forall x\in X,\forall y\in Y$, 有 $x\perp y$, 则称 X 与 Y **正交**, 记作 $X\perp Y$.

(3) X 的**正交补** $X^\perp = \{v \in V \mid v \perp X\}$.

$\langle 0, v\rangle = \langle 0+0, v\rangle = \langle 0, v\rangle + \langle 0, v\rangle \Longrightarrow \langle 0, v\rangle = 0.$

$\because 0 \in X^\perp$, $\therefore X^\perp$ 必非空.

定理 9.6 (课本定理9.7): (1) $X^\perp$ 为 V 的子空间.

(2) 子空间 $S \subseteq V$, $S \cap S^\perp = \{0\}$.

证: (1) $\forall u, v \in X^\perp$, $\forall x \in X$, $\langle u, x\rangle = 0$, $\langle v, x\rangle = 0$

$\Longrightarrow \langle ru + tv, x\rangle = r\langle u, x\rangle + t\langle v, x\rangle = r0 + t0 = 0$

$\Longrightarrow ru + tv \in X^\perp$, 故 $X^\perp$ 是 V 的子空间.

(2) 设 $x \in S \cap S^\perp$, 则 $x \in S$ 且 $x \in S^\perp \Longleftrightarrow x \perp S \Longrightarrow x \perp x$

$\Longrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$, 故得证.

□

定义 9.9 正交直和: $V = S \oplus T$ 且 $S \perp T$, 则称 V 为 S 与 T 的**正交直和**, 记作 $V = S \odot T$.

S 为 V 的子空间, S^c 为 S 的补空间, 则 $V = S \oplus S^c$.

给定子空间, 其补空间不唯一, 但正交补空间唯一.

例 9.4: 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 子空间 S 为过原点的一条直线, 任一过原点而不与 S 平行的直线均为 S 的补空间, 而仅过原点且与 S 正交的直线为 S 的正交补空间. □

定理 9.7 (课本第3 版定理9.8): $V = S \odot T \Longleftrightarrow V = S \oplus T$ 且 $T = S^\perp$.

给定子空间, 其正交补空间一定存在? 关于正交补空间的存在性问题, 我们稍后讨论.

给定 $S \subseteq V$ 和 $S^\perp$, 是否必有 $V = S \odot S^\perp$?

定义 9.10 正交(归一)集: $\mathcal{O} = \{u_1, \cdots, u_k \mid k \in K\}$, 若 $\mathcal{O}$ 中向量两两正交, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交集**, 特别地, 若 $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交归一集**.

不含零的正交集均可归一化为正交归一集.

定理 9.8 (课本定理9.8): 不含零的正交集线性无关.

证: 设 $\{u_i \mid i \in K\}$ 是正交集且 $u_i \neq 0 \forall i \in K$.

设 $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$.

$\forall k \in K$, $0 = \langle 0, u_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^m r_i u_i, u_k\rangle = \sum_{i=1}^m r_i \langle u_i, u_k\rangle = r_k \langle u_k, u_k\rangle$.

又 $\because u_k \neq 0$, $\therefore \langle u_k, u_k\rangle \neq 0 \Longrightarrow r_k = 0$, 故得证. □

线性无关集未必正交, 但可通过 Gram-Schmidt 正交化过程将线性无关集正交化.

定理 9.9 Gram-Schmidt 正交化过程(课本定理9.10): $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n, \cdots\}$ 是向量空间 V 中线性独立集且 $v_i \neq 0 \forall i$, 则可通过

$$o_1 = v_1,$$

$$
\begin{aligned}
o_2 =& v_2 - \frac{\langle v_2, o_1\rangle}{\langle o_1, o_1\rangle} o_1, \\
o_3 =& v_3 - \frac{\langle v_3, o_2\rangle}{\langle o_2, o_2\rangle} o_2 - \frac{\langle v_3, o_1\rangle}{\langle o_1, o_1\rangle} o_1, \\
& \cdots \\
o_n =& v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, o_j\rangle}{\langle o_j, o_j\rangle} o_j, \\
& \cdots,
\end{aligned}
$$

再对 $o_1, \cdots, o_n, \cdots$ 归一化, 得到正交归一集 $\mathcal{O} = \langle o_1, \cdots, o_n, \cdots\rangle$, s.t. $\langle\mathcal{B}\rangle = \langle\mathcal{O}\rangle$.

定义 9.11 Hamel 基: 极大线性无关集或极小生成集.

定义 9.12 Hilbert 基: 极大正交归一基.

定理 9.10 (课本第3 版定理9.13): 当 $\dim V < \infty$ 时, Hilbert 基 $\Longrightarrow$ Hamel 基.

例 9.5 Hilbert 基并非Hamel 基的例子(课本第3 版例9.5): $V = l^2$ 空间 (所有平方收敛级数列构成的空间), $M = \{e_1 = (1, 0, \cdots), e_2 = (0, 1, 0, \cdots), \cdots\}$ 显然正交归一. 若 $v = (x_n) \in l^2$ 且 $v \perp M$, 则 $\forall i$, $x_i = \langle v, e_i\rangle = 0 \Longrightarrow v = 0$, 故 M 为 V 的 Hilbert 基,

然而, M 张成的 l^2 的子空间中的平方收敛级数列必仅有有限个非零项 $\Longrightarrow \mathrm{span} S \neq l^2$, 故 M 非 Hamel 基. □

定理 9.11 (课本定理9.11): $\mathcal{O}$ 为正交归一集, $\langle\mathcal{O}\rangle = S \subseteq V$, $\forall v \in V$, 令 v 的**傅里叶展开** $\hat{v} = \langle v, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_k\rangle u_k$, 则 $\hat{v} \in S$ 且

(1) $\hat{v}$ 是 S 中唯一满足 $v - \hat{v} \perp S$ 的向量.

(2) $\hat{v}$ 是 S 中与 v 最近的向量 (即 $\forall w \in S$, $d(v, \hat{v}) \leq d(v, w)$), 称 $\hat{v}$ 为 v 在 S 中的**最佳近似**.

(3) **Bessel 不等式**: $\|\hat{v}\| \leq \|v\|$.

证: (1) $\forall w \in S$, $w = \sum_{i=1}^k r_i u_i$.

先证正交: $\langle v - \hat{v}, w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle\hat{v}, w\rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k r_i u_i\rangle - \langle\sum_{i=1}^k \langle v, u_i\rangle u_i, \sum_{j=1}^k r_j u_j\rangle$
$= \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i\rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i\rangle \sum_{i=1}^k \bar{r}_j \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i\rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i\rangle \sum_{j=1}^k \bar{r}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i\rangle - \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i\rangle = 0 \Longrightarrow v - \hat{v} \perp S$.

再证唯一: 若取 $u \in S$, s.t. $v - u \perp S$, 设 $u = \sum_{i=1}^k l_i u_i$.

$\because v - u \perp S$, $\therefore \forall u_j \in S$, $j = 1, \cdots, k$, $\langle v - u, u_j\rangle = 0 \Longrightarrow \langle v, u_j\rangle - \langle u, u_j\rangle = 0 \Longrightarrow \langle v, u_j\rangle = \langle u, u_j\rangle = l_j \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^k l_i u_i = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i\rangle u_i = v$.

综上, 得证.

(2) $\forall w \in S$, $d^2(v, w) = \|v - w\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v} - w\|^2$.

$\because \hat{v} \in S$, $w \in S$, $\therefore \hat{v} - w \in S$.

又 $\because v-\hat{v}\perp S$, $\therefore v-\hat{v}\perp\hat{v}-w$
$\Longrightarrow d^2(u,w)=\|v-\hat{v}\|^2+\|\hat{v}-w\|^2$.
$\because \|\hat{v}-w\|^2\geq 0$, $\therefore d^2(u,w)\geq\|v-\hat{v}\|^2=d^2(v,\hat{v})$.

(3) $\|v\|^2=\|v-\hat{v}+\hat{v}\|^2$.
$\because v-\hat{v}\perp S$, $\hat{v}\in S$, $\therefore v-\hat{v}\perp\hat{v}$.
由勾股定理, $\|v-\hat{v}+\hat{v}\|^2=\|v-\hat{v}\|^2+\|\hat{v}\|^2\geq\|\hat{v}\|^2\Longrightarrow\|v\|\geq\|\hat{v}\|$.

□

定理 9.12 投影定理(课本定理9.12): S 是 V 的有限维子空间, 则 $V=S\odot S^{\perp}$, 且 $\forall v\in V$, $v=\hat{v}+(v-\hat{v})$, 其中 $\hat{v}\in S$ 为 v 在 S 中的最佳近似, $v-\hat{v}\in S^{\perp}$, $\dim V=\dim S+\dim S^{\perp}$.

定理 9.13 (课本定理9.12): (1) S 为 V 的有限维子空间, 则 $S^{\perp\perp}=S$.

(2) 子集 $X\subseteq V$ 且 $\dim\langle X\rangle<\infty$, 则 $X^{\perp\perp}=\langle X\rangle$.

证: (1) $S^{\perp}=\{v\in V\mid v\perp S\}$, $S^{\perp\perp}=\{u\in V\mid u\perp S^{\perp}\}$, 显然, $S\subseteq S^{\perp\perp}$.
$\forall w\in S^{\perp\perp}\subseteq V$, $\because S$ 有限维, $\therefore V=S\odot S^{\perp}\Longrightarrow w=w_S+w_{S^{\perp}}\Longrightarrow w_S=w-w_{S^{\perp}}$.
$0=\langle w_{S^{\perp}},w_S\rangle=\langle w_{S^{\perp}},w-w_{S^{\perp}}\rangle=\langle w_{S^{\perp}},w\rangle-\langle w_{S^{\perp}},w_{S^{\perp}}\rangle$.
$\because w\in S^{\perp\perp}$, $\therefore\langle w_{S^{\perp}},w\rangle=0\Longrightarrow\langle w_{S^{\perp}},w_{S^{\perp}}\rangle=0\Longrightarrow w_{S^{\perp}}=0\Longrightarrow w=w_S\in S$, 故 $S^{\perp\perp}\subseteq S$.
综上, 得证.

(2) $\because\dim\langle X\rangle<\infty$, $\therefore |X|<\infty$, 设 $X=\{u_1,\cdots,u_k\}$.
$\forall w_1\in\langle X\rangle$, $w_1=\sum_{i=1}^{k}r_iu_i$.
$\forall w_2\in X^{\perp}$, $\langle w_1,w_2\rangle=\langle\sum_{i=1}^{k}r_iu_i,w_2\rangle=\sum_{i=1}^{k}r_i\langle u_i,w_2\rangle=0\Longrightarrow\langle X\rangle\subseteq X^{\perp\perp}$.
$\forall w\in X^{\perp\perp}$, 令 w 在 $\langle X\rangle$ 上的最佳近似 $\hat{w}=\sum_{i=1}^{k}l_iu_i\in\langle X\rangle$.
$\langle w-\hat{w},w-\hat{w}\rangle=\langle w,w-\hat{w}\rangle-\langle\hat{w},w-\hat{w}\rangle$,
其中 $\because w-\hat{w}\in\langle X\rangle^{\perp}$, $\hat{w}\in\langle X\rangle$, $\therefore\langle\hat{w},w-\hat{w}\rangle=0$,
$\because w-\hat{w}\in X^{\perp}$, $w\in X^{\perp\perp}$, $\therefore\langle w,w-\hat{w}\rangle=0$
$\Longrightarrow\langle w-\hat{w},w-\hat{w}\rangle=0\Longrightarrow w-\hat{w}=0\Longrightarrow w=\hat{w}\in\langle X\rangle\Longrightarrow X^{\perp\perp}\in\langle X\rangle$.
综上, 得证.

□

定理 9.14 (课本第3 版定理9.17): $\mathcal{O}=\{u_1,\cdots,u_k\}$ 为正交归一集, $S=\langle\mathcal{O}\rangle$, 则下列叙述等价:

(1) $\mathcal{O}$ 为 V 的正交归一基.

(2) $\mathcal{O}^{\perp}=\{0\}$.

(3) $\forall v\in V$, $v=\hat{v}=\sum_{i=1}^{k}\langle v,u_i\rangle u_i$.

(4) **Bessel 不等式**: $\|v\|=\|\hat{v}\|$.

(5) **Parserval 不等式**: $\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^k\langle v,u_i\rangle\overline{\langle w,u_i\rangle}$, 即在定序基 $\mathcal{O}$ 下, $V\to F^k$, $v\mapsto[v]_{\mathcal{O}}=\begin{pmatrix}\langle v,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle v,u_k\rangle\end{pmatrix}$,

$w\mapsto[w]_{\mathcal{O}}=\begin{pmatrix}\langle w,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle w,u_k\rangle\end{pmatrix}$, $\langle u,w\rangle=[v]_{\mathcal{O}}\cdot[w]_{\mathcal{O}}$.

证: "(1) $\Longrightarrow$ (2)": $V=\langle\mathcal{O}\rangle$, $\forall u\in\mathcal{O}^\perp\subseteq V$, $u=\sum_{i=1}^k l_iu_i$.
$\because u\in\mathcal{O}^\perp$, $\therefore\forall i=1,\cdots,k$, $\langle u,u_i\rangle=0$.
$0=\langle u,u_j\rangle=\sum_{i=1}^k l_i\langle u_i,u_j\rangle=\sum_{i=1}^k l_i\delta_{ij}=l_j\Longrightarrow u=\sum_{i=1}^k l_iu_i=0$, 故得证. □

9.4 Riesz 表示定理

$F=\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), V 为 F 上的有限维内积向量空间, $\dim V=n$, 内积 $\langle,\rangle:V\times V\to F$, $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$, 固定第二坐标 $v=x$, 定义线性泛函 $\langle,x\rangle\in V^*:V\to F$, $v\mapsto\langle v,x\rangle$.

定理 9.15 Riesz 表示定理(课本定理9.15): $\dim V=n$, $\forall f\in V^*$, $\exists!x\in V$, s.t. $f(v)=\langle v,x\rangle$.

即对偶空间中的任一函数均可用与唯一向量的内积代替, 或对偶空间中的任一函数均与唯一向量对应.

证: $\because\operatorname{Im}f\subseteq F$, $\therefore\dim\operatorname{Im}f\le\dim F=1$.
若 $\dim\operatorname{Im}f=0$, 即 $\operatorname{Im}f=\{0\}$, 则 $f=0\Longrightarrow x=0$;
若 $\dim\operatorname{Im}f\ne0$, 则 $\dim\operatorname{Im}f=1$, $\exists0\ne u\in V$, s.t. $f(u)\ne0$.
$\because V=\ker f\oplus\ker f^c$ 且 $\ker f^c\approx\operatorname{Im}f$, $\therefore\dim\ker f^c=\dim\operatorname{Im}f=1\Longrightarrow\ker f^c=\langle u\rangle$.
选取适当的 u, 则可将 V 分解为 $V=\ker f\odot\langle u\rangle=\langle u\rangle^\perp\odot\langle u\rangle$, 其中 $\ker f=\langle u\rangle^\perp$.
$\because V=\langle u\rangle\odot\langle u\rangle^\perp$, $\therefore\forall v\in V$, $v=ru+w$, 其中 $w\in\langle u\rangle^\perp=\ker f\Longrightarrow f(v)=f(ru+w)=rf(u)+f(w)=rf(u)$.
取 $x=\overline{\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}}u$, 则 $\langle v,x\rangle=\langle v,\overline{\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}}u\rangle=\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}\langle v,u\rangle=\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}\langle ru+w,u\rangle=\frac{rf(u)}{\langle u,u\rangle}\langle u,u\rangle=rf(u)=f(v)$. □

由对偶空间中函数与向量空间中向量的一一对应的关系, 可引出

定义 9.13 Riesz 映射: $\mathcal{R}:V^*\to V$, $f\mapsto x$, s.t. $\forall v\in V$, $f(v)=\langle v,x\rangle$.

(1) $\mathcal{R}$ 是映射.

(2) $\mathcal{R}$ 满射.

(3) $\mathcal{R}$ 单射.

(4) $\mathcal{R}$ 共轭线性.

证:

(1) 由定理 9.15 即得.

(2) 显然.

(3) $\ker\mathcal{R}=\{f\in V^*\mid\mathcal{R}(f)=0\}=\{f\in V^*\mid f(v)=\langle v,0\rangle=0\forall v\}=\{0\}$, 故得证.

(4) 令 $\mathcal{R}(f) = x_f$, $\mathcal{R}(g) = x_g$, $\mathcal{R}(rf + tg) = x_{rf+tg}$.
一方面, $(rf + tg)(v) = \langle v, x_{rf+tg} \rangle$;
另一方面, $(rf + tg)(v) = rf(v) + tg(v) = r\langle v, x_f \rangle + t\langle v, x_g \rangle = \langle v, \bar{r}x_f + \bar{t}x_g \rangle$
$\Longrightarrow x_{rf+tg} = \bar{r}x_f + \bar{t}x_g$, 即 $\mathcal{R}(rf + tg) = r\mathcal{R}(f) + t\mathcal{R}(g)$. $\square$

综上, $\mathcal{R}$ **共轭同构**.