

# Chapter 2

## 线性变换

### 2.1 线性变换

**定义 2.1 线性变换:** 向量空间之间的线性映射.  $F$  为域,  $V, W$  为  $F$  上的向量空间, 映射  $\tau: V \rightarrow W$ , 若  $\tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$ ,  $r, t \in F$ ,  $u, v \in V$ , 则称  $\tau$  为  $V$  到  $W$  的线性变换.

记  $\mathcal{L}(V, W) \equiv \{V \text{ 到 } W \text{ 的线性变换}\}$ ,  $\mathcal{L}(V) \equiv \mathcal{L}(V, V) = \{V \text{ 到 } V \text{ 的线性变换}\} = \{V \text{ 上的线性算子}\}$ .

取  $r = 1, t = 1$ , 则  $\tau(u + v) = \tau(u) + \tau(v)$ , 故  $\tau$  是  $V$  到  $W$  的群同态, 从而  $\tau(0) = 0$ ,  $\tau(-v) = -\tau(v)$ .

**定义 2.2 单线性变换:** 单射的线性变换.

**定义 2.3 满线性变换:** 满射的线性变换.

**定义 2.4 同构:** 双射的线性变换. 若两个向量空间  $V, W$  之间存在同构, 则称  $V$  与  $W$  同构, 记作  $V \approx W$ .

取  $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $v \xrightarrow{\tau} \tau(v)$ ,  $v \xrightarrow{\sigma} \sigma(v)$ , 则  $v \xrightarrow{\tau+\sigma} \tau(v) + \sigma(v)$  也是线性变换, 且  $\tau + \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$ .

**证:** 由映射的像的唯一性, 若  $v = u$ , 则  $\tau(v) = \tau(u)$ ,  $\sigma(v) = \sigma(u) \implies (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \tau(u) + \sigma(u) = (\tau + \sigma)(u)$ , 故  $\tau + \sigma$  是映射.

$(\tau + \sigma)(ru + tv) = \tau(ru + tv) + \sigma(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) + r\sigma(u) + t\sigma(v) = r[\tau(u) + \sigma(u)] + t[\tau(v) + \sigma(v)] = r(\tau + \sigma)(u) + t(\tau + \sigma)(v)$ , 故  $\tau + \sigma$  为  $V$  到  $W$  的线性变换.  $\square$

由此定义了线性变换之间的加法.

$(\mathcal{L}(V, W), +)$  为交换群.

**证:**  $(\mathcal{L}(V, W), +)$  满足

(1) **结合律:**  $\forall v \in V$ ,  $[(\tau + \sigma) + \delta](v) = (\tau + \sigma)(v) + \delta(v) = \tau(v) + \sigma(v) + \delta(v) = \tau(v) + (\sigma(v) + \delta(v)) = \tau(v) + (\sigma + \delta)(v) = [\tau + (\sigma + \delta)](v) \implies (\tau + \sigma) + \delta = \tau + (\sigma + \delta)$ ,

(2) **有单位元 0:** 零映射  $0(v) = 0$ ,  $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $(0 + \tau)(v) = 0(v) + \tau(v) = 0 + \tau(v) = \tau(v) + 0 = \tau(v) + 0(v) = (\tau + 0)(v)$ ,

(3) 有逆元:  $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W), \exists -\tau \in \mathcal{L}(V, W), \text{ s.t. } (-\tau)(v) = -\tau(v) \implies [\tau + (-\tau)](v) = \tau(v) - \tau(v) = 0 = 0(v),$

(4) 交换律:  $\forall v \in V, (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \sigma(v) + \tau(v) = (\sigma + \tau)(v),$

故  $\mathcal{L}(V, W)$  为交换群. □

$\forall r \in F, \forall v \in \mathcal{L}(V, W), v \xrightarrow{\tau} \tau(v),$  则  $v \xrightarrow{r\tau} r\tau(v)$  是线性变换, 且  $r\tau \in \mathcal{L}(V, W).$

证: 由映射的像的唯一性,  $\because v \xrightarrow{\tau} \tau(v)$  是唯一的,  $\therefore v \xrightarrow{r\tau} r\tau(v)$  是唯一的, 故  $r\tau$  是映射.

$(r\tau)(sv + tu) = r[s\tau(v) + t\tau(u)] = s(r\tau)(v) + t(r\tau)(v) \implies r\tau \in \mathcal{L}(V, W).$  □

$\mathcal{L}(V, W)$  是  $F$  上的向量空间.

证: 前面已证,  $(\mathcal{L}(V, W), +)$  为交换群, 且其满足

(1)  $\forall v \in V, [(r + t)\tau](v) = (r + t)\tau(v) = r\tau(v) + t\tau(v) = (r\tau + t\tau)(v) \implies (r + t)\tau = r\tau + t\tau,$

(2)  $\forall v \in V, [(rt)\tau](v) = (rt)\tau(v) = r[t\tau(v)] = [r(t\tau)](v) \implies (rt)\tau = r(t\tau),$

(3)  $\forall v \in V, [r(\tau + \sigma)](v) = r(\tau + \sigma)(v) = r[\tau(v) + \sigma(v)] = r\tau(v) + r\sigma(v) = (r\tau + r\sigma)(v) \implies r(\tau + \sigma) = r\tau + r\sigma,$

(4)  $\exists$  恒等映射  $1: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \tau \xrightarrow{1} \tau, \text{ s.t. } \forall v \in V, (1\tau)(v) = 1[\tau(v)] = \tau(v) \implies 1\tau = \tau,$

故得证. □

**定理 2.1 (课本定理2.1):** (1)  $\mathcal{L}(V, W)$  是  $F$  上的向量空间.

(2)  $\tau \in \mathcal{L}(V, W), \sigma \in \mathcal{L}(W, U),$  则  $\sigma \circ \tau \in \mathcal{L}(V, U).$

(3)  $\tau$  是  $V$  到  $W$  的同构, 则  $\tau^{-1} \in \mathcal{L}(W, V).$

(4)  $\mathcal{L}(V)$  既是向量空间, 也是环, 且两者的加法运算是相同的, 故  $\mathcal{L}(V)$  是代数.

$\mathcal{L}(V)$  是环.

证: 前面已证,  $(\mathcal{L}(V), +)$  为交换群, 且满足

(1) 结合律:  $\because$  映射的复合有结合律,  $\therefore \mathcal{L}(V)$  中元素的复合有结合律,

(2) 左右分配律:  $\forall v \in V, [(\sigma + \tau)\delta](v) = (\sigma + \tau)[\delta(v)] = \sigma[\delta(v)] + \tau[\delta(v)] = (\sigma\delta)(v) + (\tau\delta)(v) \implies (\sigma + \tau)\delta = \sigma\delta + \tau\delta,$   
 $[\sigma(\tau + \delta)](v) = \sigma[(\tau + \delta)(v)] = \sigma[\tau(v) + \delta(v)] = \sigma[\tau(v)] + \sigma[\delta(v)] = \sigma\tau(v) + \sigma\delta(v) \implies \sigma(\tau + \delta) = \sigma\tau + \sigma\delta,$

故得证. □

**定义 2.5 核空间:**  $\ker \tau \equiv \{v \mid \tau(v) = 0\} \subseteq V.$

**定义 2.6 像空间:**  $\text{Im } \tau \equiv \{\tau(v) \mid v \in V\}.$

**定理 2.2 (课本定理2.3):**  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ , 则

- (1)  $\tau$  满线性变换  $\iff \text{Im } \tau = W$ .
- (2)  $\tau$  单线性变换  $\iff \ker \tau = \{0\}$ .

**定理 2.3 (课本定理2.2):**  $\mathcal{B}$  是  $V$  的基,  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ , 则  $\tau$  可由  $\tau$  在  $\mathcal{B}$  上的像唯一确定.

**证:** 已知  $\tau(b_i) \forall b_i \in \mathcal{B}$ .

$$\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i, r_i \in F, b_i \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{Z}^+ \implies \tau(v) = \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(b_i). \quad \square$$

同构的向量空间有很多性质可以相互传递, 下面我们就来讨论这件事.

**定理 2.4 (课本定理2.4):**  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$  同构,  $S$  是  $V$  真子集, 则

- (1)  $V = \langle S \rangle \iff W = \langle \tau(S) \rangle$ .
- (2)  $S$  线性无关  $\iff \tau(S)$  线性无关.
- (3)  $S$  是  $V$  的基  $\iff \tau(S)$  是  $W$  的基.

**证:** (1) “ $\implies$ ”:  $\because V = \langle S \rangle, \therefore \forall v \in V, v = \sum_i r_i s_i$ .

$$\text{又 } \because \tau \text{ 同构}, \therefore \forall w \in W, \exists v = \tau^{-1}(w) \in V, \text{ s.t. } w = \tau(v) \implies \tau(v) = \tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i).$$

$$\text{“}\Leftarrow\text{”}: \because W = \langle \tau(S) \rangle, \therefore \forall w \in W, w = \sum_i r_i \tau(s_i).$$

$$\text{又 } \because \tau \text{ 同构}, \therefore \forall w \in W, \exists v = \tau^{-1}(w) \in V, \text{ s.t. } v = \tau^{-1}(w) = \tau^{-1}\left(\sum_i r_i \tau(s_i)\right) = \sum_i r_i \tau^{-1}(\tau(s_i)) = \sum_i r_i s_i.$$

综上, (1) 得证.

(2) “ $\implies$ ”: 假设  $\sum_i r_i \tau(s_i) = 0$ , 则  $\tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = 0$ .

$$\text{又 } \because \tau \text{ 同构}, \therefore \ker \tau = \{0\} \implies \sum_i r_i s_i = 0.$$

$$\text{又 } \because S \text{ 线性无关}, \therefore r_i = 0 \forall i \implies \tau(S) \text{ 线性无关}.$$

$$\text{“}\Leftarrow\text{”}: \text{假设 } \sum_i r_i s_i = 0, \text{ 则 } \tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i) = 0.$$

$$\text{又 } \because \tau(S) \text{ 线性无关}, \therefore r_i = 0 \forall i \implies S \text{ 线性无关}.$$

综上, (2) 得证.

(3)  $\Leftarrow$ (1), (2).

$\square$

**定理 2.5 (课本定理2.6):**  $V \approx W \iff \dim V = \dim W$ .

**定理 2.6 (课本定理2.7):** 若  $\dim V = n$ , 则  $V \approx F^n$ .

**定理 2.7 (课本定理2.8):**  $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ , 则

(1)  $(\ker \tau)^c \approx \text{Im } \tau$ .

(2)  $\dim V = \dim \ker \tau + \dim \text{Im } \tau \equiv \text{null } \tau + \text{rk } \tau$ , 其中称  $\text{null } \tau \equiv \dim \ker \tau$  为  $\tau$  的**零度**,  $\text{rk } \tau \equiv \dim \text{Im } \tau$  为  $\tau$  的**秩**.

**证:** (1) 设映射  $\tau^c : \ker(\tau)^c \rightarrow \text{Im } \tau$ ,  $u \mapsto \tau(u)$ .

先证  $\tau^c$  是单射:  $\ker(\tau^c) = \ker(\tau) \cap \ker(\tau)^c$  (即  $\ker(\tau^c)$  中的元素同时满足  $\ker(\tau)$  的条件, 且在定义域  $\ker(\tau)^c$  中).

$\because V = \ker(\tau) \oplus \ker(\tau)^c$ ,  $\therefore \ker(\tau) \cap \ker(\tau)^c = \{0\} \implies \ker(\tau^c) = \{0\}$ , 故  $\tau^c$  单射.

再证  $\tau^c$  是满射: 一方面,  $\text{Im}(\tau^c) \subseteq \text{Im}(\tau)$ ;

另一方面,  $\forall v \in V$ ,  $v = u + w$ , 其中  $u \in \ker(\tau)$ ,  $w \in \ker(\tau)^c \implies \tau(v) = \tau(u + w) = \tau(u) + \tau(w) = 0 + \tau(w) = \tau(w) \in \text{Im}(\tau^c) \implies \text{Im}(\tau) \subseteq \text{Im}(\tau^c)$ .

故  $\text{Im}(\tau^c) = \text{Im}(\tau)$ , 即  $\tau^c$  满射.

综上, (1) 得证.

(2)  $\dim V = \dim \ker(\tau) + \dim \ker(\tau)^c = \dim \ker(\tau) + \dim \text{Im}(\tau)$ .

□

$x$  为  $n$  维向量,  $\text{null } A = \dim\{x \mid Ax = 0\} = n - \text{rk } A$ .

## 2.2 线性变换的表示

“表示”其实就是用已知的东西展现未知的东西, 在这里, 我们用已知的矩阵乘法展现未知的线性变换, 这就是线性变换的表示.

$F$  为域,  $F^n = \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F\}$ , 满足  $(r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n) = (r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n)$  及  $r(r_1, \dots, r_n) = (rr_1, \dots, rr_n)$ ,  $\dim F^n = n$ ,  $F^n$  的标准基为  $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ ;  $F^m = \{(r_1, \dots, r_m) \mid r_i \in F\}$ ,  $\dim F = m$ , 标准基为  $\{f_1 = (1, 0, \dots, 0), f_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, f_m = (0, 0, \dots, 1)\}$ . 如何确定/展现  $F^n$  到  $F^m$  的线性变换?

根据定理 2.3, 我们只需确定一组基在线性变换下的表现, 就可以确定这一线性变换. 因此,  $\forall \tau \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$ , 若  $\tau(e_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j$ .

$\forall (r_1, \dots, r_n) \in F^n$ ,

$$\begin{aligned} \tau((r_1, \dots, r_n)) &= \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(e_i) = \sum_{i=1}^n r_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{ji}\right) f_j = \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^n r_i a_{mi}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = M_\tau \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$ .

故  $\forall \vec{r} \in F^n$ ,  $\tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r}$ .

综上:

$$\mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m \times n}(F), \quad \tau \mapsto M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}.$$

$f: \mathcal{L}(F^n, F^m) \rightarrow M_{m \times n}(F)$ ,  $\tau \mapsto M_\tau$  是线性变换.

证: 由上述的  $M_\tau$  构造过程知, 给定  $\tau$ ,  $f(\tau) = M_\tau$  是唯一的, 故  $f$  是映射.

$$\begin{aligned} f(r\tau + t\sigma) &= M_{r\tau + t\sigma} = \begin{pmatrix} (r\tau + t\sigma)(e_1) & \cdots & (r\tau + t\sigma)(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\tau(e_1) + t\sigma(e_1) & \cdots & r\tau(e_n) + t\sigma(e_n) \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sigma(e_1) & \cdots & \sigma(e_n) \end{pmatrix} = rM_\tau + tM_\sigma = rf(\tau) + tf(\sigma). \end{aligned}$$

故  $f$  是线性的.

综上,  $f$  为线性变换. □

$f$  单射.

证:  $\ker f \equiv \{\tau \mid f(\tau) = 0\} = \{\tau \mid M_\tau = 0\} \implies \forall \tau \in \ker f, M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = 0_{m \times n}$   
 $\implies \forall v \in V, \tau(v) = M_\tau v = 0 \implies \tau = 0$ .

故  $\ker f = \{0\}$  (这里的“0”代表的是零变换)  $\iff f$  单射. □

$f$  满射.

证:  $\forall A \in M_{m \times n}(F)$ , 可由  $\begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = M_\tau = A$  构造  $\tau$ , 从而  $f$  满射. □

综上,  $f$  同构.

取  $V$  的基  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ , 则  $\forall v \in V, v = \sum_i r_i b_i$ .

当  $\mathcal{B}$  定序,  $\phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow F^n, v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \equiv [v]_{\mathcal{B}}$  是一个映射.

证: 由于  $\mathcal{B}$  是  $V$  的基, 展开式  $v = \sum_i r_i b_i$  唯一确定.

又  $\because \mathcal{B}$  定序,  $\therefore$  映射  $v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$  唯一确定, 故  $\phi_{\mathcal{B}}$  为映射.

$$\forall u, v \in V, u = \sum_{i=1}^n w_i b_i, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i,$$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{B}}(r\vec{u} + t\vec{v}) &= \phi_{\mathcal{B}} \left( r \left( \sum_{i=1}^n w_i b_i \right) + t \left( \sum_{i=1}^n r_i b_i \right) \right) = \phi_{\mathcal{B}} \left( \sum_{i=1}^n (rw_i + tr_i) b_i \right) = \begin{pmatrix} rw_1 + tr_1 \\ \vdots \\ rw_n + tr_n \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = r\phi_{\mathcal{B}}(\vec{u}) + t\phi_{\mathcal{B}}(\vec{v}), \end{aligned}$$

故  $\phi_{\mathcal{B}}$  为  $V$  到  $F^n$  的线性变换. □

$\phi_{\mathcal{B}}$  单射.

证:  $\ker \phi_{\mathcal{B}} = \{v \mid \phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}.$

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies v = \sum_{i=1}^n 0b_i = 0.$$

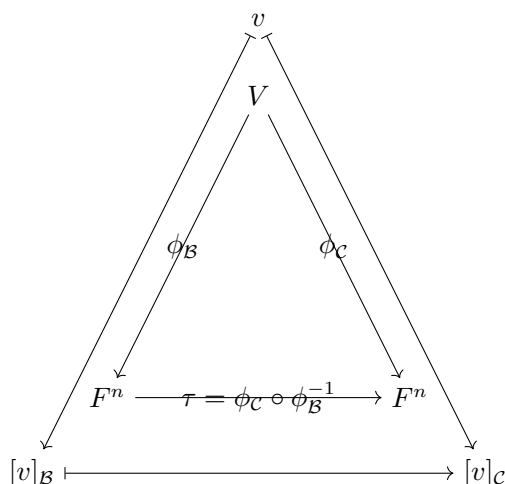
故  $\ker \phi_{\mathcal{B}} = \{0\} \iff \phi_{\mathcal{B}}$  单射. □

$\phi_{\mathcal{B}}$  满射.

证:  $\forall \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in F^n, \exists v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \in V, \text{ s.t. } \phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \text{ 故 } \phi_{\mathcal{B}} \text{ 满射.}$  □

综上,  $\phi_{\mathcal{B}}$  同构.

$\dim V = n$ , 取  $V$  的一组定序基  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ , 另一组定序基  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ , 向量  $v$  在  $\mathcal{B}$  下的坐标表示为  $[v]_{\mathcal{B}}$ , 在  $\mathcal{C}$  下的坐标表示为  $[v]_{\mathcal{C}}$ ,  $\tau$  将  $[v]_{\mathcal{B}}$  转换为  $[v]_{\mathcal{C}}$ , 映射关系如以下的交换图所示. 如何表示映射  $\tau$ ?



$$[v]_{\mathcal{C}} = \tau([v]_{\mathcal{B}}) = M_{\tau}[v]_{\mathcal{B}}, \text{ 其中 } M_{\tau} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}.$$

$$\tau: F^n \rightarrow F^n, \quad e_i \mapsto \tau(e_i) = \phi_{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)) = \phi_{\mathcal{C}}(b_i)$$

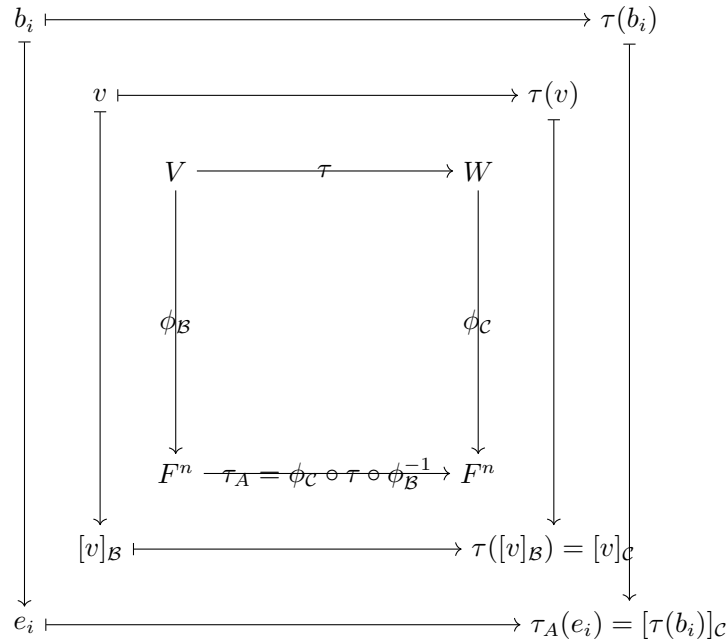
$$\implies M_{\tau} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathcal{BC}}.$$

**定理 2.8 (课本定理2.12):**

$$[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{B}}$$

其中  $[v]_{\mathcal{B}}$  和  $[v]_{\mathcal{C}}$  分别是向量  $v$  在基  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{C}$  表象下的坐标表示,  $M_{\mathcal{BC}}$  是在两种坐标表示之间线性变换对应的矩阵.

$\dim V = n, \dim W = n$ , 故  $V \approx W \approx F^n$ , 取  $V$  的一组定序基  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $W$  的一组定序基  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ ,  $\tau$  为  $V$  到  $W$  的线性变换, 映射关系如下所示. 如何表示  $\tau$ ?



$$\begin{aligned}
 M_{\tau_A} &= \begin{pmatrix} \tau_A(e_1) & \cdots & \tau_A(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_C \circ \tau \circ \phi_B^{-1}(e_1) & \cdots & \phi_C \circ \tau \circ \phi_B^{-1}(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_C \circ \tau(b_1) & \cdots & \phi_C \circ \tau(b_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_C & \cdots & [\tau(b_n)]_C \end{pmatrix} \equiv [\tau]_{BC}.
 \end{aligned}$$

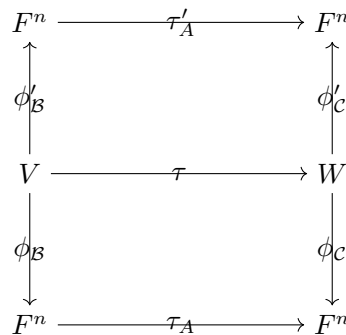
**定理 2.9 (课本定理2.14):**

$$[\tau(v)]_C = [\tau]_{BC}[v]_B$$

其中  $[\tau(v)]_C$  是  $\tau(v)$  在基  $C$  表象下的坐标表示,  $[v]_B$  是  $v$  在基  $B$  表象下的坐标表示,  $[\tau]_{BC}$  是从基  $B$  表象到基  $C$  表象的线性变换的矩阵表示.

**定理 2.10 (课本定理2.15):**  $\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m \times n}(F)$ ,  $\tau \mapsto \tau_A \mapsto [\tau]_{BC}$ .

若我们改变  $V$  和  $W$  的基, 那么映射所联系的向量的坐标会如何?



$$\tau'_A = \phi'_C \phi_C^{-1} \tau_A \phi_B \phi_B'^{-1}.$$

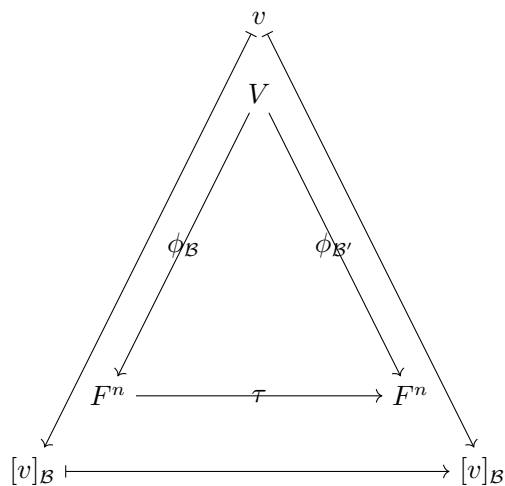
**定理 2.11 (课本定理2.16):**

$$[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

其中  $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  和  $[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$  分别是线性变换  $\tau$  在基  $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  和  $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$  下的表示, 矩阵  $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  和  $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$  分别对应了从基  $\mathcal{B}$  到基  $\mathcal{B}'$  和从基  $\mathcal{C}$  到基  $\mathcal{C}'$  的变换矩阵.

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  可逆.

证: 设  $\phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow F^n, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ ,  $\phi_{\mathcal{B}'} : V \rightarrow F^n, v = \sum_{i=1}^n r'_i b'_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_n \end{pmatrix}$ , 即



$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_{\tau} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$ , s.t.  $[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}$ .

同理可构造  $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [b'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [b'_n]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$ , s.t.  $[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'}$ .

$\forall [v]_{\mathcal{B}} \in F^n, M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}} \implies M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = n \times n$  维的单位矩阵, 即  $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  是  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  的逆, 故  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  可逆.  $\square$

**定理 2.12 (课本定理2.18):**  $B = PAQ$ , 其中  $P$  和  $Q$  可逆, 则  $B$  与  $A$  等价.

**定理 2.13 (课本定理2.19):**  $B = PAP^{-1}$ , 其中  $P$  可逆, 则  $B$  与  $A$  相似.

(因为  $B$  和  $A$  是同一线性算子在两组不同的基下的表示.)