

Chapter 7

线性算子的结构

先来回顾一下线性算子: V 为域 F 上的向量空间, $\dim V = n$, $\mathcal{L}(V) = M_{n \times n}(F)$, $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$.
取 $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{L}(V)$, 有

$$(1) (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v),$$

$$(2) (\tau \circ \sigma)(v) = \tau(\sigma(v)),$$

$$(3) (r\tau)(v) = r \cdot \tau(v),$$

其中 $\mathcal{L}(V)$ 关于 (1) 中的加法和 (2) 中的复合成环, 关于 (1) 中的加法和 (3) 中的点乘成向量空间, 故 \mathcal{L} 为代数.
设 $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ 分别是 V 的两组定序基,

$$\begin{array}{ccc} F^n & \xrightarrow{\tau'_A} & F^n \\ \uparrow \phi'_B & & \uparrow \phi'_B \\ V & \xrightarrow{\tau} & V \\ \downarrow \phi_B & & \downarrow \phi_B \\ F^n & \xrightarrow{\tau_A} & F^n \end{array}$$

定理 7.1 (课本定理7.1): 线性算子 τ 在定序基 \mathcal{B} 下的表示为 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$.
当 τ 作用于 $v \in V$, 可表为矩阵与向量相乘, $[\tau(v)]_{\mathcal{B}} = [\tau]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$.

定理 7.2 (课本定理7.2): τ 在两组定序基 \mathcal{B} 和 \mathcal{B}' 下的表示之间的关系是 $[\tau]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$, 其中 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$.

定义 7.1 相似: 类似上面的 $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'}$, 若两个矩阵 A, B 满足 $B = PAP^{-1}$, 则称 A 与 B 相似, 由两两相似的矩阵组成的集合称为相似类.

7. 线性算子的结构

取线性算子 $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n^2} \in \mathcal{L}(V)$.

\therefore 这些线性算子的数量 $n^2 + 1 > \dim \mathcal{L}(V) = n^2$, \therefore 这些线性算子线性相关,

即 \exists 不全为 0 的 $r_0, \dots, r_{n^2} \in F$, s.t. $r_0 + r_1\tau + \dots + r_{n^2}\tau^{n^2} = 0$

$\implies \forall v \in V, \left(\sum_{i=0}^{n^2} r_i \tau^i\right)(v) = 0 \implies \sum_{i=0}^{n^2} r_i \tau^i(v) = 0$.

令 $f(x) = \sum_{i=0}^{n^2} r_i x^i \in \mathcal{L}(V)$, 则 $f(\tau)(v) = 0$.

定理 7.3 (课本定理7.5): V 为域 F 上的向量空间, 则 V 为 $F[x]$ 上的模.

证: $\forall g(x) \in F[x]$, $g(x)$ 可表为 $g(x) = \sum_i a_i x^i$, 其中 $a_i \in F$, 则 $g(\tau) = \sum_i a_i \tau^i \in \mathcal{L}(V)$.

$\forall h(x) \in F[x]$, $h(x)$ 可表为 $h(x) = \sum_j b_j x^j$, 其中 $b_j \in F$, 则 $h(\tau) = \sum_j b_j \tau^j \in \mathcal{L}(V)$.

对给定的 τ , 有类似数乘的运算 $F[x] \times V \rightarrow V$, $(g(x), v) = g(x) \cdot v \mapsto g(\tau)(v)$, 满足

- (1) $[g(x)+h(x)]v = \left(\sum_i a_i x^i + \sum_j b_j x^j\right)v = \left(\sum_i a_i \tau^i + \sum_j b_j \tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(v) + \left(\sum_j b_j \tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)v + \left(\sum_j b_j x^j\right)v = g(x)v + h(x)v$,
- (2) $[g(x)h(x)]v = \left[\sum_i a_i x^i \sum_j b_j x^j\right]v = \left[\sum_i a_i \tau^i \circ \sum_j b_j \tau^j\right](v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)\left(\left(\sum_j b_j \tau^j\right)(v)\right) = \left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\left(\sum_j b_j x^j\right)v\right) = g(x)[h(x)v]$,
- (3) $g(x)(u+v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(u) + \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)u + \left(\sum_i a_i x^i\right)v = g(x)u + g(x)v$,
- (4) $1v = 1(v) = v$,

故 V 为 $F[x]$ 上的模. □

$F[x]$ 为 PID, $V \in F[x] - \text{mod}$.

$\therefore \dim V = n$, $\therefore V$ 有限生成.

$\therefore f(x)v = f(\tau)(v) = 0$, $\therefore V$ 为挠模.

利用定理 ??, 可将 V 分解为 $V = V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_m} = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, 其中 $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$.

上面说明了分解 V 的可行性和 V 分解出的大致结构, 现在的问题是: 具体如何分解? 我们只需找到 V 的阶 μ , s.t. $\text{ann}(V) = \langle \mu \rangle$, $\mu = up_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$, 即可得到挠子模 V_{p_i} , s.t. $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_1} \rangle$ 及循环子模 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, s.t. $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}} \rangle$, $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i}$.

定义 7.2 极小多项式: $\text{ann}(V) = \{g(x) \in F[x] \mid g(\tau)(V) = \{0\}\} = \langle m_\tau(x) \rangle$, 其中 $m_\tau(x)$ 称 τ 在 V 上的极小多项式, 首系数 = 1.

极小多项式就是 V 的阶, 对其进行分解: $m_\tau(x) = up_1^{e_1}(x) \dots p_n^{e_n}(x)$, 其中 u 为单位, $p_i(x) \in F[x]$ 不可约且互不相等, $e_i \in \mathbb{Z}^+$

$\implies V = V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_m}$, 其中 $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_1}(x) \rangle$,

$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1} \rangle\rangle \oplus \dots \oplus \langle\langle v_{it_i} \rangle\rangle$, 其中 $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$, $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i}$,

从而实现分解 $V = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$.

接下来我们利用上述对 V 的分解找一组合适的定序基, 以简化 V 上的线性算子 τ 的表示.

定义 7.3 不变子空间: 子空间 $S \subseteq V$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 若 $\tau(S) \subseteq S$, 则称 S 为 V 的 τ 不变子空间.

定理 7.4 (课本定理7.5): 子模 $S \subseteq V \iff S$ 是 V 的不变子空间.

证: “ \implies ”: $\forall v \in S \subseteq V, \forall h(x) \in F[x], h(x) = \sum_i a_i x^i, h(x)v = h(\tau)(v) = \sum_i a_i \tau^i(v) \in S$.

特别地, 取 $h(x) = x \in F[x]$, 则 $xv = \tau(v) \in S \implies \tau(S) \subseteq S$, 即 S 为 V 的不变子空间.

“ \impliedby ”: $\because S$ 是 V 的不变子空间, $\therefore \forall v \in S, \tau(v) \in S \implies \forall i = 0, \dots, \dim V, \tau^i(v) \in S$

$\implies g(x)v + h(x)v = g(\tau)(v) + h(\tau)(v) = (\sum_i a_i \tau^i)(v) + (\sum_j b_j \tau^j)(v) = \sum_i (a_i + b_i) \tau^i(v) \in S$, 故 S 为 V 的子模. \square

$\because \langle v_{ij} \rangle$ 为 V 的 $F[x]$ 子模, $\therefore \langle v_{ij} \rangle$ 为不变子空间, 即 $\tau(\langle v_{ij} \rangle) \subseteq \langle v_{ij} \rangle$, 故之前分解操作实际上是将 V 分解成了一系列由单个向量生成的不变子空间.

让我们用简单的例子来展示一下, 若以不变子空间的基为整个向量空间的基 (的一部分), 线性算子的表示会如何.

例 7.1: 若 $\langle b_1 \rangle$ 是 τ 不变的, 则 $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, [\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$ ¹

若 $\langle b_1, b_2 \rangle$ 是 τ 不变的, 即 $\tau(b_1) \in \langle b_1, b_2 \rangle, \tau(b_2) \in \langle b_1, b_2 \rangle$, 则 $\begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(b_2)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, [\tau]_{\mathcal{B}} =$

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

若 $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ 是 τ 不变的, 则 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} *_{k \times k} & 0 \\ 0 & \tau' \end{pmatrix}.$ \square

在之前我们已将 V 分解成了多个不变子空间, 故若用各 $\langle v_{ij} \rangle$ 的基组成 V 的基, 则可以将 τ 表示为一个仅在对角线上有非零矩阵块而其余部分均为零的矩阵. 但我们仍未满足: 对于给定的不变子空间 $\langle v_{ij} \rangle$, 能否适当地选取该不变子空间中的基, 从而简化该不变子空间对应的非零矩阵块?

取 $\langle v \rangle$ 的极小多项式为 $p(x)$, 即 $\text{ann}(v) = \langle p(x) \rangle$, 设 $p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_1x + r_0, r_i \in F$, 则 $p(x)v = p(\tau)(v) = (\tau^m + r_{m-1}\tau^{m-1} + \cdots + r_1\tau + r_0)(v) = \tau^m(v) + r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v = 0$,

即 $\tau^m(v)$ 可由 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示: $\tau^m(v) = -[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v]$

$\implies \tau^{m+1}(v) = \tau(\tau^m(v)) = \tau(-[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v])$

$= -[r_{m-1}\tau^m(v) + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)]$

$= -\{r_{m-1}[-(r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v))] + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)\}.$

易证, 任意高阶的 τ 作用于 v 均可由 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示, $\forall f(x) \in F[x]$ 作用于 v 均可由 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示.

由此, 我们引出:

¹ 此处 * 代表非零矩阵元.

定理 7.5: $\langle\langle v \rangle\rangle$ 为循环子模, 则 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 是 $\langle\langle v \rangle\rangle$ 的基.

证: 先证 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性无关: 设 $l_0 v + l_1 \tau(v) + \dots + l_{m-1} \tau^{m-1}(v) = 0$,

令 $h(x) = l_0 + l_1 x + \dots + l_{m-1} x^{m-1}$, 则 $h(x)v = 0 \implies h(x) \in \text{ann}(v) = \langle p(x) \rangle \implies p(x) \mid h(x)$

然而 $\because \deg p(x) = m \geq \deg h(x) = m-1$, \therefore 只能有 $l_0 = l_1 = \dots = l_{m-1} = 0$, 故 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性无关.

再证 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 生成 $\langle\langle v \rangle\rangle$: $\langle\langle v \rangle\rangle = \{h(x)v \mid h(x) \in F[x]\} = \{h(\tau)(v) \mid h(x) \in F[x]\}$.

$\forall h(x)v \in \langle\langle v \rangle\rangle$, 若 $\deg h(x) \leq m-1$, 则 $h(x)v$ 显然可由 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 表示,

若 $\deg h(x) > m-1$, 则 $h(x) = q(x)p(x) + r(x)$, 其中 $q(x)$ 为商多项式, 余多项式 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg p(x) = m-1$

$\implies h(x)v = (q(\tau)p(\tau) + r(\tau))(v) = q(\tau)p(\tau)(v) + r(\tau)(v)$, 其中 $\because p(x) \in \text{ann}(v)$, $\therefore p(\tau)v = 0 \implies h(x)v = r(\tau)v$ 可由 $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 表示.

综上, 得证. □

定义 7.4 循环不变子空间: S 是向量空间 V 的 τ 不变子空间, 若 S 有一组基 $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$, 其中 $v \in V$, $m \geq 1$, 则称 S 是 V 的循环不变子空间.

$\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ 就是循环不变子空间. 那么, 以 $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{m-1}(v_{ij})\}$ 为基, 线性算子 τ 在该循环不变子空间中的表示 (即 τ 的表示中该循环不变子空间对应的非零矩阵块) 如何?

定义 7.5 伴阵: 在定序基 $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ 下, 线性算子 τ 可表为 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$,

$$\text{其中 } [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = [\tau(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, [\tau(b_2)]_{\mathcal{B}} = [\tau(\tau(v))]_{\mathcal{B}} = [\tau^2(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}} = [\tau^m(v)]_{\mathcal{B}} =$$

$$\begin{pmatrix} -r_0 \\ -r_1 \\ \vdots \\ -r_{m-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{从而 } [\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & -r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -r_{m-1} \end{pmatrix} \equiv C[p(x)], \text{ 称为多项式 } p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \dots + r_1x + r_0 \text{ 的}$$

伴阵.

设 $d_{ij} = \deg p_i^{e_{ij}}(x)$, 则 $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为 $\langle v_{ij} \rangle$ 的基,

以 \mathcal{B}_{ij} 为基, τ 在循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ 中的表示就是 $p_i^{e_{ij}}(x)$ 的伴阵: $[\tau]_{\mathcal{B}_{ij}} = C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_1^{(ij)} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_2^{(ij)} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -l_3^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_{d_{ij}-2}^{(ij)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -l_{d_{ij}-1}^{(ij)} \end{pmatrix}.$

上面我们简化了 τ 在循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ 中的表示. 又 $\because V = \bigoplus_{ij} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, $\therefore \mathcal{B} = \cup_{ij} \mathcal{B}_{ij}$ 为 V 的基. 利用 \mathcal{B} 我们可简化 τ 在整个向量空间 V 中的表示:

定理 7.6 (课本定理7.10): $\dim V < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, V 的极小多项式为 $m_\tau(x) = p_1^{e_1}(x) \cdots p_n^{e_n}(x)$, 其中 $p_i(x)$ 不可约且互不相等,

$\implies V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m}$, 其中 $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_i}(x) \rangle$,

$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1} \rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_{it_i} \rangle\rangle$, 其中 $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$, $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$,

以 $\cup_{ij} \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为基, 其中 $d_{ij} = \dim \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, τ 的表示可简化为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{ij} C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} C[p_1^{e_{11}}(x)] & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C[p_1^{e_{1t_1}}(x)] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C[p_m^{e_{m1}}(x)] \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & C[p_m^{e_{mt_m}}(x)] \end{pmatrix},$$

此即 τ 的有理标准型.

$$n = \dim V = \sum_{ij} d_{ij} = \sum_{ij} \deg p_i^{e_{ij}}(x) = \deg \left[\prod_{ij} p_i^{e_{ij}}(x) \right].$$