

# Chapter 7

## 线性算子的结构

先来回顾一下线性算子:  $V$  为域  $F$  上的向量空间,  $\dim V = n$ ,  $\mathcal{L}(V) = M_{n \times n}(F)$ ,  $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ .  
取  $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{L}(V)$ , 有

$$(1) (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v),$$

$$(2) (\tau \circ \sigma)(v) = \tau(\sigma(v)),$$

$$(3) (r\tau)(v) = r \cdot \tau(v),$$

其中  $\mathcal{L}(V)$  关于 (1) 中的加法和 (2) 中的复合成环, 关于 (1) 中的加法和 (3) 中的点乘成向量空间, 故  $\mathcal{L}$  为代数.  
设  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$  分别是  $V$  的两组定序基,

$$\begin{array}{ccc} F^n & \xrightarrow{\tau'_A} & F^n \\ \uparrow \phi'_B & & \uparrow \phi'_B \\ V & \xrightarrow{\tau} & V \\ \downarrow \phi_B & & \downarrow \phi_B \\ F^n & \xrightarrow{\tau_A} & F^n \end{array}$$

**定理 7.1 (课本定理7.1):** 线性算子  $\tau$  在定序基  $\mathcal{B}$  下的表示为  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$ .  
当  $\tau$  作用于  $v \in V$ , 可表为矩阵与向量相乘,  $[\tau(v)]_{\mathcal{B}} = [\tau]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$ .

**定理 7.2 (课本定理7.2):**  $\tau$  在两组定序基  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{B}'$  下的表示之间的关系是  $[\tau]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$ , 其中  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$ .

**定义 7.1 相似:** 类似上面的  $[\tau]_{\mathcal{B}}$  和  $[\tau]_{\mathcal{B}'}$ , 若两个矩阵  $A, B$  满足  $B = PAP^{-1}$ , 则称  $A$  与  $B$  相似, 由两两相似的矩阵组成的集合称为相似类.

## 7. 线性算子的结构

取线性算子  $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n^2} \in \mathcal{L}(V)$ .

$\therefore$  这些线性算子的数量  $n^2 + 1 > \dim \mathcal{L}(V) = n^2$ ,  $\therefore$  这些线性算子线性相关,

即  $\exists$  不全为 0 的  $r_0, \dots, r_{n^2} \in F$ , s.t.  $r_0 + r_1\tau + \dots + r_{n^2}\tau^{n^2} = 0$

$\implies \forall v \in V, \left(\sum_{i=0}^{n^2} r_i \tau^i\right)(v) = 0 \implies \sum_{i=0}^{n^2} r_i \tau^i(v) = 0$ .

令  $f(x) = \sum_{i=0}^{n^2} r_i x^i \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $f(\tau)(v) = 0$ .

**定理 7.3 (课本定理7.5):**  $V$  为域  $F$  上的向量空间, 则  $V$  为  $F[x]$  上的模.

**证:**  $\forall g(x) \in F[x]$ ,  $g(x)$  可表为  $g(x) = \sum_i a_i x^i$ , 其中  $a_i \in F$ , 则  $g(\tau) = \sum_i a_i \tau^i \in \mathcal{L}(V)$ .

$\forall h(x) \in F[x]$ ,  $h(x)$  可表为  $h(x) = \sum_j b_j x^j$ , 其中  $b_j \in F$ , 则  $h(\tau) = \sum_j b_j \tau^j \in \mathcal{L}(V)$ .

对给定的  $\tau$ , 有类似数乘的运算  $F[x] \times V \rightarrow V$ ,  $(g(x), v) = g(x) \cdot v \mapsto g(\tau)(v)$ , 满足

- (1)  $[g(x)+h(x)]v = \left(\sum_i a_i x^i + \sum_j b_j x^j\right)v = \left(\sum_i a_i \tau^i + \sum_j b_j \tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(v) + \left(\sum_j b_j \tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)v + \left(\sum_j b_j x^j\right)v = g(x)v + h(x)v$ ,
- (2)  $[g(x)h(x)]v = \left[\sum_i a_i x^i \sum_j b_j x^j\right]v = \left[\sum_i a_i \tau^i \circ \sum_j b_j \tau^j\right](v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)\left(\left(\sum_j b_j \tau^j\right)(v)\right) = \left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\left(\sum_j b_j x^j\right)v\right) = g(x)[h(x)v]$ ,
- (3)  $g(x)(u+v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(u) + \left(\sum_i a_i \tau^i\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)u + \left(\sum_i a_i x^i\right)v = g(x)u + g(x)v$ ,
- (4)  $1v = 1(v) = v$ ,

故  $V$  为  $F[x]$  上的模. □

$F[x]$  为 PID,  $V \in F[x] - \text{mod}$ .

$\therefore \dim V = n$ ,  $\therefore V$  有限生成.

$\therefore f(x)v = f(\tau)(v) = 0$ ,  $\therefore V$  为挠模.

利用定理 ??, 可将  $V$  分解为  $V = V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_m} = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$ .

上面说明了分解  $V$  的可行性和  $V$  分解出的大致结构, 现在的问题是: 具体如何分解? 我们只需找到  $V$  的阶  $\mu$ , s.t.  $\text{ann}(V) = \langle \mu \rangle$ ,  $\mu = up_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$ , 即可得到挠子模  $V_{p_i}$ , s.t.  $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_1} \rangle$  及循环子模  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ , s.t.  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}} \rangle$ ,  $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i}$ .

**定义 7.2 极小多项式:**  $\text{ann}(V) = \{g(x) \in F[x] \mid g(\tau)(V) = \{0\}\} = \langle m_\tau(x) \rangle$ , 其中  $m_\tau(x)$  称  $\tau$  在  $V$  上的极小多项式, 首系数 = 1.

极小多项式就是  $V$  的阶, 对其进行分解:  $m_\tau(x) = up_1^{e_1}(x) \dots p_n^{e_n}(x)$ , 其中  $u$  为单位,  $p_i(x) \in F[x]$  不可约且互不相等,  $e_i \in \mathbb{Z}^+$

$\implies V = V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_m}$ , 其中  $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_1}(x) \rangle$ ,

$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1} \rangle\rangle \oplus \dots \oplus \langle\langle v_{it_i} \rangle\rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$ ,  $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i}$ ,

从而实现分解  $V = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ .

接下来我们利用上述对  $V$  的分解找一组合适的定序基, 以简化  $V$  上的线性算子  $\tau$  的表示.

**定义 7.3 不变子空间:** 子空间  $S \subseteq V$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ , 若  $\tau(S) \subseteq S$ , 则称  $S$  为  $V$  的  $\tau$  不变子空间.

**定理 7.4 (课本定理7.5):** 子模  $S \subseteq V \iff S$  是  $V$  的不变子空间.

**证:** “ $\implies$ ”:  $\forall v \in S \subseteq V, \forall h(x) \in F[x], h(x) = \sum_i a_i x^i, h(x)v = h(\tau)(v) = \sum_i a_i \tau^i(v) \in S$ .

特别地, 取  $h(x) = x \in F[x]$ , 则  $xv = \tau(v) \in S \implies \tau(S) \subseteq S$ , 即  $S$  为  $V$  的不变子空间.

“ $\impliedby$ ”:  $\because S$  是  $V$  的不变子空间,  $\therefore \forall v \in S, \tau(v) \in S \implies \forall i = 0, \dots, \dim V, \tau^i(v) \in S$

$\implies g(x)v + h(x)v = g(\tau)(v) + h(\tau)(v) = (\sum_i a_i \tau^i)(v) + (\sum_j b_j \tau^j)(v) = \sum_i (a_i + b_i) \tau^i(v) \in S$ , 故  $S$  为  $V$  的子模.  $\square$

$\because \langle v_{ij} \rangle$  为  $V$  的  $F[x]$  子模,  $\therefore \langle v_{ij} \rangle$  为不变子空间, 即  $\tau(\langle v_{ij} \rangle) \subseteq \langle v_{ij} \rangle$ , 故之前分解操作实际上是将  $V$  分解成了一系列由单个向量生成的不变子空间.

让我们用简单的例子来展示一下, 若以不变子空间的基为整个向量空间的基 (的一部分), 线性算子的表示会如何.

**例 7.1:** 若  $\langle b_1 \rangle$  是  $\tau$  不变的, 则  $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, [\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$ <sup>1</sup>

若  $\langle b_1, b_2 \rangle$  是  $\tau$  不变的, 即  $\tau(b_1) \in \langle b_1, b_2 \rangle, \tau(b_2) \in \langle b_1, b_2 \rangle$ , 则  $\begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(b_2)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, [\tau]_{\mathcal{B}} =$

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

若  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  是  $\tau$  不变的, 则  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} *_{k \times k} & 0 \\ 0 & \tau' \end{pmatrix}.$   $\square$

在之前我们已将  $V$  分解成了多个不变子空间, 故若用各  $\langle v_{ij} \rangle$  的基组成  $V$  的基, 则可以将  $\tau$  表示为一个仅在对角线上有非零矩阵块而其余部分均为零的矩阵. 但我们仍未满足: 对于给定的不变子空间  $\langle v_{ij} \rangle$ , 能否适当地选取该不变子空间中的基, 从而简化该不变子空间对应的非零矩阵块?

取  $\langle v \rangle$  的极小多项式为  $p(x)$ , 即  $\text{ann}(v) = \langle p(x) \rangle$ , 设  $p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_1x + r_0, r_i \in F$ , 则  $p(x)v = p(\tau)(v) = (\tau^m + r_{m-1}\tau^{m-1} + \cdots + r_1\tau + r_0)(v) = \tau^m(v) + r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v = 0$ ,

即  $\tau^m(v)$  可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性表示:  $\tau^m(v) = -[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v]$

$\implies \tau^{m+1}(v) = \tau(\tau^m(v)) = \tau(-[r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau(v) + r_0v])$

$= -[r_{m-1}\tau^m(v) + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)]$

$= -\{r_{m-1}[-(r_{m-1}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v))] + r_{m-2}\tau^{m-1}(v) + \cdots + r_1\tau^2(v) + r_0\tau(v)\}.$

易证, 任意高阶的  $\tau$  作用于  $v$  均可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性表示,  $\forall f(x) \in F[x]$  作用于  $v$  均可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性表示.

由此, 我们引出:

<sup>1</sup> 此处 \* 代表非零矩阵元.

**定理 7.5:**  $\langle\langle v \rangle\rangle$  为循环子模, 则  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  是  $\langle\langle v \rangle\rangle$  的基.

**证:** 先证  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性无关: 设  $l_0 v + l_1 \tau(v) + \dots + l_{m-1} \tau^{m-1}(v) = 0$ ,

令  $h(x) = l_0 + l_1 x + \dots + l_{m-1} x^{m-1}$ , 则  $h(x)v = 0 \implies h(x) \in \text{ann}(v) = \langle p(x) \rangle \implies p(x) \mid h(x)$

然而  $\because \deg p(x) = m \geq \deg h(x) = m-1$ ,  $\therefore$  只能有  $l_0 = l_1 = \dots = l_{m-1} = 0$ , 故  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  线性无关.

再证  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  生成  $\langle\langle v \rangle\rangle$ :  $\langle\langle v \rangle\rangle = \{h(x)v \mid h(x) \in F[x]\} = \{h(\tau)(v) \mid h(x) \in F[x]\}$ .

$\forall h(x)v \in \langle\langle v \rangle\rangle$ , 若  $\deg h(x) \leq m-1$ , 则  $h(x)v$  显然可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  表示,

若  $\deg h(x) > m-1$ , 则  $h(x) = q(x)p(x) + r(x)$ , 其中  $q(x)$  为商多项式, 余多项式  $r(x) = 0$  或  $\deg r(x) < \deg p(x) = m-1$

$\implies h(x)v = (q(\tau)p(\tau) + r(\tau))(v) = q(\tau)p(\tau)(v) + r(\tau)(v)$ , 其中  $\because p(x) \in \text{ann}(v)$ ,  $\therefore p(\tau)v = 0 \implies h(x)v = r(\tau)v$  可由  $\{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  表示.

综上, 得证. □

**定义 7.4 循环不变子空间:**  $S$  是向量空间  $V$  的  $\tau$  不变子空间, 若  $S$  有一组基  $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$ , 其中  $v \in V$ ,  $m \geq 1$ , 则称  $S$  是  $V$  的循环不变子空间.

$\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  就是循环不变子空间. 那么, 以  $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{m-1}(v_{ij})\}$  为基, 线性算子  $\tau$  在该循环不变子空间中的表示 (即  $\tau$  的表示中该循环不变子空间对应的非零矩阵块) 如何?

**定义 7.5 伴阵:** 在定序基  $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \dots, \tau^{m-1}(v)\}$  下, 线性算子  $\tau$  可表为  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$ ,

其中  $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = [\tau(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $[\tau(b_2)]_{\mathcal{B}} = [\tau(\tau(v))]_{\mathcal{B}} = [\tau^2(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $[\tau(b_m)]_{\mathcal{B}} = [\tau^m(v)]_{\mathcal{B}} =$

$\begin{pmatrix} -r_0 \\ -r_1 \\ \vdots \\ -r_{m-1} \end{pmatrix}$ ,

从而  $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & -r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -r_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -r_{m-1} \end{pmatrix} \equiv C[p(x)]$ , 称为多项式  $p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \dots + r_1x + r_0$  的伴阵.

设  $d_{ij} = \deg p_i^{e_{ij}}(x)$ , 则  $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$  为  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  的基,

以  $\mathcal{B}_{ij}$  为基,  $\tau$  在循环不变子空间  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  中的表示就是  $p_i^{e_{ij}}(x)$  的伴阵:  $[\tau]_{\mathcal{B}_{ij}} = C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_1^{(ij)} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_2^{(ij)} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -l_3^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_{d_{ij}-2}^{(ij)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -l_{d_{ij}-1}^{(ij)} \end{pmatrix}.$

上面我们简化了  $\tau$  在循环不变子空间  $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$  中的表示. 又  $\because V = \bigoplus_{ij} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ ,  $\therefore \mathcal{B} = \cup_{ij} \mathcal{B}_{ij}$  为  $V$  的基. 利用  $\mathcal{B}$  我们可简化  $\tau$  在整个向量空间  $V$  中的表示:

**定理 7.6 (课本定理7.10):**  $\dim V < \infty$ ,  $\tau \in \mathcal{L}(V)$ ,  $V$  的极小多项式为  $m_\tau(x) = p_1^{e_1}(x) \cdots p_n^{e_n}(x)$ , 其中  $p_i(x)$  不可约且互不相等,

$\implies V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m}$ , 其中  $\text{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_i}(x) \rangle$ ,

$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1} \rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_{it_i} \rangle\rangle$ , 其中  $\text{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x) \rangle$ ,  $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$ ,

以  $\cup_{ij} \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$  为基, 其中  $d_{ij} = \dim \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ ,  $\tau$  的表示可简化为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{ij} C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} C[p_1^{e_{11}}(x)] & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C[p_1^{e_{1t_1}}(x)] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C[p_m^{e_{m1}}(x)] \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & C[p_m^{e_{mt_m}}(x)] \end{pmatrix},$$

此即  $\tau$  的有理标准型.

$$n = \dim V = \sum_{ij} d_{ij} = \sum_{ij} \deg p_i^{e_{ij}}(x) = \deg \left[ \prod_{ij} p_i^{e_{ij}}(x) \right].$$