# Chapter 9

# 实数和复数内积空间

**定义 9.1** <u>**内积和内积空间:**</u> $F=\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), 映射 $\langle,\rangle : V\times V\to F$, $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$ 满足

(1) **正定性**: $\langle u,u\rangle\geq 0$, 且 $\langle u,u\rangle=0\Longleftrightarrow u=0$

(2) **对称 (或共轭对称)**: 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

(3) **关于第一坐标线性, 关于第二坐标线性 (或共轭线性)**: 对 $F=\mathbb{R}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=r\langle u,v_1\rangle+t\langle u,v_2\rangle$; 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle ru_1+tu_2,v\rangle=r\langle u_1,v\rangle+t\langle u_2,v\rangle$, $\langle u,rv_1+tv_2\rangle=\bar{r}\langle u,v_1\rangle+\bar{t}\langle u,v_2\rangle$

则称 $\langle,\rangle$ 是 $V$ 上的**内积**, 称 $V$ 为**内积向量空间**.

对给定的向量空间, 内积不唯一.

**例 9.1:** 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$,
内积又称点积, $\langle x,y\rangle=x\cdots y=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. □

**例 9.2:** 在 $\mathbb{C}^n$ 上, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,
$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\bar{\beta}_i$. □

**引理 9.1** <u>**(课本引理9.1):**</u> $V$ 为内积向量空间, $u,v\in V$, $\forall x\in V$, $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\Longleftrightarrow u=v$.

**证:** "$\Longrightarrow$": $\langle u,x\rangle=\langle v,x\rangle\Longleftrightarrow\langle u,x\rangle-\langle v,x\rangle=0\Longleftrightarrow\langle u-v,x\rangle=0$,
不妨取 $x=u-v$, 则 $\langle u-v,u-v\rangle=0\Longleftrightarrow u-v=0\Longleftrightarrow u=v$.

"$\Longleftarrow$": 显然.

综上, 得证. □

**定理 9.1** <u>**(课本第3 版定理9.2):**</u> $V$ 为内积向量空间, $\tau\in\mathcal{L}(V)$,

(1) $\forall v,w\in V$, $\langle\tau(v),w\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\forall v\in V$, $\langle\tau(v),v\rangle=0\Longrightarrow\tau=0$.

**证:** (1) 不妨取 $w=\tau(v)$, 则 $\langle\tau(v),w\rangle=\langle\tau(v),\tau(v)\rangle=0\Longrightarrow\forall v\tau(v)=0$, 故 $\tau=0$.

(2) $\forall v, w \in V$, $v + w \in V$, $v + iw \in V$,

$\langle \tau(v+w), v+w \rangle = 0 = \cancel{\langle \tau(v), v \rangle}0 + \langle \tau(v), w \rangle + \langle \tau(w), v \rangle + \cancel{\langle \tau(w), w \rangle}0$, $\langle \tau(v+iw), v+iw \rangle = \cancel{\langle \tau(v), v \rangle}0 + \langle \tau(v), iw \rangle + \langle \tau(iw), v \rangle + \cancel{\langle \tau(iw), iw \rangle}0$

$\Longrightarrow \langle \tau(v), w \rangle + \langle \tau(w), v \rangle = 0$, $-i\langle \tau(v), w \rangle + i\langle \tau(w), v \rangle = 0$

$\Longrightarrow \langle \tau(v), w \rangle = 0$,

利用 (1) 中的结论, $\tau(v) = 0$.

□

内积向量空间的子空间和商空间与普通的向量空间同.

$S$ 是内积向量空间 $V$ 的子空间, 则对应的商空间 $\frac{V}{S}$ 为 $F$ 上的向量空间.

但在何种条件下, $\frac{V}{S}$ 是 $F$ 上的内积向量空间 (内积定义同 $V$ 上的内积定义)?

## 9.1 范数和距离

**定义 9.2 (内积诱导出的)范数和赋范向量空间:** $\|v\| \equiv \sqrt{\langle u, u \rangle}$, 此时称 $V$ 为**赋范向量空间**

**定义 9.3 单位向量:** 若 $\|u\| = 1$, 则称 $u$ 为单位向量.

**例 9.3:** 在 $\mathbb{R}^n$ 上, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. □

**定理 9.2 范数的性质(课本定理9.2):** (1) $\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(2) $\forall r \in F$, $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$.

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式**: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, 且 $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \Longleftrightarrow u$ 与 $v$ 线性相关.

(4) **三角不等式**: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(5) $\forall x \in V$, $\|u - v\| \leq \|u - x\| + \|v - x\|$.

(6) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

(7) **平行四边形法则**: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

**证:** (7) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$, $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$,

以上两式相加得, $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\langle u, u \rangle + 2\langle v, v \rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

□

**定义 9.4 范数和赋范向量空间:** 映射 $\|\| : V \to F$, $v \mapsto \|v\|$, 满足

$\|v\| \geq 0$, 且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(2) $\|rv\| = |r| \|v\|$

(3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

则称 $\|\|$ 为 $V$ 上的一个范数, 称 $V$ 为赋范向量空间.

给定向量空间, 范数不唯一, 其中内积诱导的范数是一类特殊的范数, 故内积向量空间必为赋范向量空间. 内积诱导的范数可反向构建内积, 但利用一般的范数未必能构建内积 (因为或无法满足内积的线性性质).

**定理 9.3 极化恒等式(课本定理9.3):** 对内积诱导出的范数,

对 $F=\mathbb{R}$, $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$.

(2) 对 $F=\mathbb{C}$, $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) + \frac{i}{4}(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2)$.

**定义 9.5 度量/距离:** $d(u,v) \equiv \|u-v\|$, 此时称 $V$ 为度量向量空间.

**定理 9.4 度量的性质(课本定理9.4):** (1) $d(u,v) \geq 0$, 且 $d(u,v)=0 \Longleftrightarrow u=v$.

(2) **对称性**: $d(u,v)=d(v,u)$.

(3) **三角不等式**: $d(u,v) \leq d(u,x)+d(x,v)$.

内积向量空间必为赋范向量空间, 赋范向量空间必为度量向量空间.

## 9.2 等距算子

**定义 9.6 等距:** $V,W$ 是 $F$ 上的内积向量空间, $\tau \in \mathcal{L}(V,W)$, 若 $\tau$ 保持内积不变, 即 $\langle \tau(u),\tau(v)\rangle = \langle u,v\rangle$, 则称 $\tau$ 等距.

**定义 9.7 等距同构:** 若 $\tau$ 等距且双射, 则称 $\tau$ 等距同构.

**定理 9.5 (课本定理9.5):** $\tau$ 等距 $\Longleftrightarrow \|\tau(u)\| = \|u\|$.

**证:** "$\Longrightarrow$": 由定义即得.

"$\Longleftarrow$": 由极化恒等式 $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$, 有 $\langle \tau(u),\tau(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|\tau(u)+\tau(v)\|^2 + \|\tau(u)-\tau(v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|\tau(u+v)\|^2 + \|\tau(u-v)\|^2) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = \langle u,v\rangle$, 即 $\tau$ 等距.

综上, 得证. □

若 $\tau$ 等距, 则 $\tau(u)=0 \Longleftrightarrow u=0$, 此时 $\ker\tau = \{0\}$, $\tau$ 单射.

## 9.3 正交性

**定义 9.8 正交:** (1) $V$ 为内积向量空间, $u, v \in V$, 若 $\langle u, v\rangle = 0$, 则称 $u$ 与 $v$ **正交**, 记作 $u \perp v$.

(2) $X, Y$ 为 $V$ 的子集, 若 $\forall x \in X$, $y \in Y$, 有 $x \perp y$, 则称 $X$ 与 $Y$ 正交, 记作 $X \perp Y$.

(3) $X^{\perp} = \{v \in X \mid v \perp X\}$.

$\langle 0, v\rangle = \langle 0 + 0, v\rangle = \langle 0, v\rangle + \langle 0, v\rangle \Longrightarrow \langle 0, v\rangle = 0$.
$\because 0 \in X^{\perp}$, $\therefore X^{\perp}$ 必非空.

**定理 9.6 (课本定理9.7):** (1) $X^{\perp}$ 为 $V$ 的子空间.

(2) 子空间 $S \subseteq V$, $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

**证:** (1) $\forall u, v \in X^{\perp}$, $\forall x \in X$, $\langle u, x\rangle = 0$, $\langle v, x\rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle ru + tv, x\rangle = r\langle u, x\rangle + t\langle v, x\rangle = r0 + t0 = 0$
$\Longrightarrow ru + tv \in X^{\perp}$, 故 $X^{\perp}$ 是 $V$ 的子空间.

(2) 设 $x \in S \cap S^{\perp}$, 则 $x \in S$ 且 $x \in S^{\perp} \Longleftrightarrow x \perp S \Longrightarrow x \perp x$
$\Longrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$, 故得证.

□

**定义 9.9 正交直和:** $V = S \oplus T$ 且 $S \perp T$, 则称 $V$ 为 $S$ 与 $T$ 的正交直和, 记作 $V = S \odot T$.

$S$ 为 $V$ 的子空间, $S^c$ 为 $S$ 的补空间, 则 $V = S \oplus S^c$.
给定子空间, 其补空间不唯一, 但正交补空间唯一.

**例 9.4:** 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 子空间 $S$ 为过原点的一条直线, 任一过原点而不与 $S$ 平行的直线均为 $S$ 的补空间, 而仅过原点且与 $S$ 正交的直线为 $S$ 的正交补空间. □

**定理 9.7 (课本第3 版定理9.8):** $V = S \odot T \Longleftrightarrow V = S \oplus T$ 且 $T = S^{\perp}$.

给定子空间, 其正交补空间一定存在? 关于正交补空间的存在性问题, 我们稍后讨论.
给定 $S \subseteq V$ 和 $S^{\perp}$, 是否必有 $V = S \odot S^{\perp}$.

**定义 9.10 正交(归一)集:** $\mathcal{O} = \{u_1, \cdots, u_k \mid k \in K\}$, 若 $\mathcal{O}$ 中向量两两正交, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交集**, 特别地, $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, 则称 $\mathcal{O}$ 为**正交归一集**.

不含零的正交集均可归一化为正交归一集.

**定理 9.8 (课本定理9.8):** 不含零的正交集线性无关.

**证:** 设 $\{u_k \mid k \in K\}$ 是正交集且 $u_i \neq 0 \forall i \in K$.
设 $\sum_{i=1}^{m} r_i u_i = 0$,
$\forall k \in K$, $0 = \langle 0, u_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} r_i u_i, u_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} r_i \langle u_i, u_k\rangle = r_k\langle u_k, u_k\rangle$,
又 $\because u_k \neq 0$, $\therefore \langle u_k, u_k\rangle \neq 0 \Longrightarrow r_k = 0$ □

线性无关集未必正交, 但可通过 Gram-Schmidt 正交化过程将线性无关集正交化.

**定理 9.9 Gram-Schmidt 正交化过程(课本定理9.10):** $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n, \cdots\}$ 是向量空间 $V$ 中线性独立集且 $v_i \neq 0 \forall i$, 则可通过

$$o_1 = v_1$$

再对 $o_1, \cdots, o_n, \cdots$ 归一化, 得到正交归一集 $\mathcal{O} = \langle o_1, \cdots, o_n, \cdots \rangle$, s.t. $\langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle$.

**定义 9.11 Hamel 基:** 极大线性无关集.

**定义 9.12 Hilbert 基:** 极大正交归一基.

**定理 9.10 (课本第3 版定理9.13):** 当 $\dim V < \infty$ 时, Hilbert 基 $\Longrightarrow$ Hamel 基.

**例 9.5 Hilbert 基并非Hamel 基的例子(课本第3 版例9.5):** $V = l^2$ 空间 (所有平方收敛级数列构成的空间), $M = \{e_1 = (1, 0, \cdots), e_2 = (0, 1, 0, \cdots), \cdots\}$ 显然正交归一. 若 $v = (x_n) \in l^2$ 且 $v \perp M$, 则 $\forall i$, $x_i = \langle v, e_i \rangle = 0 \Longrightarrow v = 0$, 故 $M$ 为 $V$ 的 Hilbert 基,

然而, $M$ 张成的 $l^2$ 的子空间中的平方收敛级数列必仅有有限个非零项 $\Longrightarrow \mathrm{span} S \neq l^2$, 故 $M$ 非 Hamel 基. □

**定理 9.11 (课本定理9.11):** $\mathcal{O}$ 为正交归一集, $S = \langle \mathcal{O} \rangle$, $\forall v \in V$, 令 $v$ 的**傅里叶展开** $\hat{v} = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_k \rangle u_k$, 则 $\hat{v} \in S$ 且

(1) $\hat{v}$ 是 $S$ 中唯一满足 $v - \hat{v} \perp S$ 的向量.

(2) $\hat{v}$ 是 $S$ 中与 $v$ 最近的向量 (即 $\forall w \in S$, $d(v, \hat{v}) \leq d(d, w)$), 称 $\hat{v}$ 为 $v$ 在 $S$ 中的**最佳近似**.

(3) **Bessel 不等式**: $\|\hat{v}\| \leq \|v\|$.

**证:** (1) $\forall w \in S$, $w = \sum_{i=1}^k r_i u_i$,

先证正交: $\langle v - \hat{v}, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle \hat{v}, w \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^k r_i u_i \rangle - \langle \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^k r_j u_j \rangle$
$= \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{i=1}^k \bar{r}_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \sum_{j=1}^k \bar{r}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle - \sum_{i=1}^k \bar{r}_i \langle v, u_i \rangle = 0 \Longrightarrow v - \hat{v} \perp S$.

再证唯一: 若取 $u \in S$, s.t. $v - u \perp S$, 设 $u = \sum_{i=1}^k l_i u_i$,

$v - u \perp S \Longrightarrow \forall u_j \in S$, $j = 1, \cdots, k$, $\langle v - u, u_j \rangle = 0 \Longrightarrow \langle v, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0 \Longrightarrow \langle v, u_j \rangle = \langle u, u_j \rangle = l_j \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^k l_i u_i = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i = v$.

综上, 得证.

(2) $\forall w \in S$, $d^2(u, w) = \|v - w\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v} - w\|^2$,

$\because \hat{v} \in S$, $w \in S$, $\therefore \hat{v} - w \in S$,

又 $\because v - \hat{v} \perp S$, $\therefore v - \hat{v} \perp \hat{v} - w$

$\Longrightarrow d^2(u, w) = \|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v} - w\|^2$,

$\because \|\hat{v} - w\|^2 \geq 0$, $\therefore d^2(u, w) \geq \|v - \hat{v}\|^2 = d^2(v, \hat{v})$.

(3) $\|v\|^2 = \|v - \hat{v} + \hat{v}\|^2$,
$\because v - \hat{v} \perp S$, $\hat{v} \in S$, $\therefore v - \hat{v} \perp \hat{v}$,
由勾股定理, $\|v - \hat{v}\|^2 + \|\hat{v}\|^2 \geq \|\hat{v}\|^2 \Longrightarrow \|v\| \geq \|\hat{v}\|$.

□

**定理 9.12 投影定理(课本定理9.12):** $S$ 是 $V$ 的有限维子空间, 则 $V = S \odot S^{\perp}$, 且 $\forall v \in V$, $v = \hat{v} + (v - \hat{v})$, 其中 $\hat{v} \in S$ 为 $v$ 在 $S$ 中的最佳近似, $v - \hat{v} \in S^{\perp}$,
$\dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$.

**定理 9.13 (课本定理9.12):** $S$ 为有限维子空间, 则

(1) $S^{\perp\perp} = S$.

(2) 子集 $X \subseteq V$ 且 $\dim\langle X \rangle < \infty$, 则 $X^{\perp\perp} = \langle X \rangle$.

**证:** (1) $S^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp S\}$, $S^{\perp\perp} = \{u \in V \mid u \perp S^{\perp}\}$,
显然, $S \subseteq S^{\perp\perp}$.

$\forall w \in S^{\perp\perp} \subseteq V$, $\because S$ 有限维, $\therefore V = S \odot S^{\perp} \Longrightarrow w = w_S + w_{S^{\perp}} \Longrightarrow w_S = w - w_{S^{\perp}}$,
$0 = \langle w_S^{\perp}, w_S \rangle = \langle w_{S^{\perp}}, w - w_{S^{\perp}} \rangle = \langle w_{S^{\perp}}, w \rangle - \langle w_{S^{\perp}}, w_{S^{\perp}} \rangle$,
$\because w \in S^{\perp\perp}$, $\therefore \langle w_{S^{\perp}}, w \rangle = 0 \Longrightarrow \langle w_{S^{\perp}}, w_{S^{\perp}} \rangle = 0 \Longrightarrow w_{S^{\perp}} = 0 \Longrightarrow w = w_S \in S$, 故 $S^{\perp\perp} \subseteq S$.

综上, 得证.

(2) $\because \dim\langle X \rangle < 0$, $\therefore |X| < \infty$, 设 $X = \{u_1, \cdots, u_k\}$.
$\forall w_1 \in \langle X \rangle$, $w_1 = \sum_{i=1}^{k} r_i u_i$,
$\forall w_2 \in X^{\perp}$, $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} r_i u_i, w_2 \rangle = \sum_{i=1}^{k} r_i \langle u_i, w_2 \rangle = 0 \Longrightarrow \langle X \rangle \subseteq X^{\perp\perp}$.

$\forall w \in X^{\perp\perp}$, 令 $w$ 在 $\langle X \rangle$ 上的最佳近似 $\hat{w} = \sum_{i=1}^{k} l_i u_i \in \langle X \rangle$,
$\langle w - \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = \langle w, w - \hat{w} \rangle - \langle \hat{w}, w - \hat{w} \rangle$,
$\because w - \hat{w} \in \langle X \rangle^{\perp}$, $\hat{w} \in \langle X \rangle$, $\therefore \langle \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = 0$,
$\because w - \hat{w} \in X^{\perp}$, $w \in X^{\perp\perp}$, $\therefore \langle w, w - \hat{w} \rangle = 0$
$\Longrightarrow \langle w - \hat{w}, w - \hat{w} \rangle = 0 \Longrightarrow w - \hat{w} = 0 \Longrightarrow w = \hat{w} \in \langle X \rangle \Longrightarrow X^{\perp\perp} \in \langle X \rangle$.

综上, 得证.

□

**定理 9.14 (课本第3 版定理9.17):** $\mathcal{O} = \{u_1, \cdots, u_k\}$ 为正交归一集, $S = \langle \mathcal{O} \rangle$, 则下列叙述等价:

(1) $\mathcal{O}$ 为 $V$ 的正交归一基.

(2) $\mathcal{O}^{\perp} = \{0\}$.

(3) $\forall v \in V$, $v = \hat{v} = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$.

(4) **Bessel 不等式**: $\|v\| = \|\hat{v}\|$.

(5) **Parserval 不等式**: $\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{k}\langle v,u_i\rangle\overline{\langle w,u_i\rangle}$, 即在定序基 $\mathcal{O}$ 下, $V\to F^k$, $v\mapsto[v]_{\mathcal{O}}=\begin{pmatrix}\langle v,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle v,u_k\rangle\end{pmatrix}$,

$w\mapsto[w]_{\mathcal{O}}=\begin{pmatrix}\langle w,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle w,u_k\rangle\end{pmatrix}$, $\langle u,w\rangle=[v]_{\mathcal{O}}\cdot[w]_{\mathcal{O}}$.

**证:** "(1) $\Longrightarrow$ (2)": $V=\langle\mathcal{O}\rangle$, $\forall u\in\mathcal{O}^{\perp}\subseteq V$, $v=\sum_{i=1}^{k}l_iu_i$
$\because u\in\mathcal{O}^{\perp}$, $\therefore\forall i=1,\cdots,k$, $\langle u,u_i\rangle=0$,
$0=\langle u,u_j\rangle=\sum_{i=1}^{k}l_i\langle u_i,u_j\rangle=\sum_{i=1}^{k}l_i\delta_{ij}=l_j\Longrightarrow u=\sum_{i=1}^{k}l_iu_i=0$.

"(2) $\Longrightarrow$ (3)": $v=v-\hat{v}+\hat{v}$, $\because\mathcal{O}^{\perp}=\{0\}$, $S^{\perp}\subseteq\mathcal{O}^{\perp}$, $\therefore S^{\perp}=\{0\}\Longrightarrow V=S\odot S^{\perp}$. □

## 9.4 Riesz 表示定理

$F=\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), $V$ 为 $F$ 上的有限维内积向量空间, $\dim V=n$, 内积 $\langle,\rangle:V\times V\to F$, $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle$, 固定第二坐标 $v=x$, 定义线性泛函 $\langle,x\rangle\in V^*:V\to F$, $v\mapsto\langle v,x\rangle$.

**定理 9.15 Riesz 表示定理(课本定理9.15):** $\dim V=n$, $\forall f\in V^*$, $\exists!x\in V$, s.t. $f(v)=\langle v,x\rangle$.

即对偶空间中的任一函数均可用与一向量的内积代替, 或对偶空间中的任一函数均可用一向量表示.

**证:** $\dim\operatorname{Im}f\le 1$. 若 $\dim\operatorname{Im}f=0$, 则 $f=0\Longrightarrow x=0$;
若 $\dim\operatorname{Im}f\neq 0$, 则 $\dim\operatorname{Im}f=1$, $\exists 0\neq u\in V$, s.t. $f(u)\neq 0$.
$\because V=\ker f\oplus\operatorname{Im}f$ 且 $\ker f^c\approx\operatorname{Im}f$, $\therefore\dim\ker f^c=\dim\operatorname{Im}f=1$,
$\Longrightarrow\ker f^c=\langle u\rangle\Longrightarrow V=\langle u\rangle\odot\ker f$,
$\Longrightarrow\langle u\rangle^{\perp}=\{0\}\Longrightarrow f(\langle u\rangle^{\perp})=0$, 故 $V=\langle u\rangle\odot\langle u\rangle^{\perp}$.

$\because V=\langle u\rangle\odot\langle u\rangle^{\perp}$, $\therefore\forall v\in V$, $v=ru+w$, 其中 $w\in\ker f$, $f(v)=f(ru+w)=rf(u)+f(w)=rf(u)$,
取 $x=\frac{\overline{f(u)}}{\langle u,u\rangle}u$, 则 $\langle v,x\rangle=\langle v,\frac{\overline{f(u)}}{\langle u,u\rangle}u\rangle=\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}\langle v,u\rangle=\frac{f(u)}{\langle u,u\rangle}\langle ru+w,u\rangle=\frac{rf(u)}{\langle u,u\rangle}\langle u,u\rangle=rf(u)$. □

由对偶空间中函数与向量空间中向量的一一对应的关系, 可引出

**定义 9.13 Riesz 映射:** $\mathcal{R}:V^*\to V$, $f\mapsto x$, s.t. $f(v)=\langle v,x\rangle$.

(1) $\mathcal{R}$ 是映射.

(2) $\mathcal{R}$ 满射.

(3) $\mathcal{R}$ 单射.

(4) $\mathcal{R}$ 共轭线性.

**证:**

(1) 由定理 9.15 即得.

(2) 显然.

(3) $\ker\mathcal{R}=\{f\in V^*\mid\mathcal{R}(f)=0\}=\{f\in V^*\mid f(v)=\langle v,0\rangle=0\}=\{0\}$, 故得证.

(4) 令 $\mathcal{R}(f) = x_f$, $\mathcal{R}(g) = x_g$, $\mathcal{R}(rf + tg) = x_{rf+tg}$.
一方面, $(rf + tg)(v) = \langle v, x_{rf+tg} \rangle$;
另一方面, $(rf + tg)(v) = rf(v) + tg(v) = r\langle v, x_f \rangle + t\langle v, x_g \rangle = \langle v, \bar{r}x_f + \bar{t}x_g \rangle$
$\Longrightarrow x_{rf+tg} = \bar{r}x_f + \bar{t}x_g$, 即 $\mathcal{R}(rf + tg) = r\mathcal{R}(f) + t\mathcal{R}(g)$. $\square$

综上, $\mathcal{R}$ **共轭同构**.