

Chapter 5

模 II: 自由与诺特模

定义 5.1 诺特(Notherian) 模: $M \in R\text{-mod}$, S_1, \dots, S_n, \dots 是 M 的子模且 $S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots$, 若 $\exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \dots$, 则称 M 满足升链条件 (A.C.C.), 称满足 ACC 的模为诺特模.

定理 5.1 (课本定理5.7): (1) $M \in R\text{-mod}$ 为诺特模 $\iff M$ 的子模是有限生成的.
(2) R 是诺特环 $\iff R$ 的理想都是有限生成的.

证: (1) “ \implies ”: 设 S 是 M 的子模. 若 $S = \{0\}$, 则 $S = \langle\langle 0 \rangle\rangle$ 显然有限生成,
若 $S \neq \{0\}$, 则 $\exists 0 \neq v_1 \in S$, 令 $S_1 = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \subseteq S$,
若 $S_1 = S$, 则 S 有限生成,
若 $S_1 \neq S$, 则 $\exists v_2 \in S - S_1$, 令 $S_2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$,
若 $S_2 = S$, 则 S 有限生成,
若 $S_2 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_3 \in S - S_2$, 令 $S_3 = \langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S$,
若 $S_3 = S$, 则 S 有限生成,
若 $S_3 \neq S$, 则 $\exists 0 \neq v_4 \in S - S_3$, 令 $S_4 = \langle\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle\rangle \subseteq S$, 则 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S_4 \subseteq S$,
...

以此类推, 得 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots$,
 $\therefore S$ 满足 ACC, $\therefore \exists K \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $S_K = S_{K+1} = \dots = S = \langle\langle v_1, \dots, v_n \rangle\rangle$, 故 S 有限生成.

“ \impliedby ”: 取 M 的任一子模升链 $S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n \subseteq \dots$, 则 $S = \bigcap_{i \in J} S_i$ 是 M 的子模,
 $\therefore M$ 的子模是有限生成的, $\therefore S$ 必然是有限生成, 故设 $S = \langle\langle v_m, \dots, v_m \rangle\rangle$,
 $\forall K = 1, \dots, m, u_k \in S = \bigcup_{i \in J} S_i \implies \exists i_k \in J$, s.t. $u_k \in S_{i_k}$,
令 $K = \max\{i_1, \dots, i_m\}$, 则由升链的性质, $u_1, \dots, u_m \in S_K$
 $\implies S_K = S$, 故升链必终止于 S_K .

综上, 得证. □

例 5.1: $\therefore \mathbb{Z}$ 的任意理想均有单个元素生成, 具体地说, I 是 \mathbb{Z} 的理想, 则 $I = \langle n \rangle$, 其中 n 为 I 中的最小整数, $\therefore \mathbb{Z}$ 是诺特环. □

例 5.2: $F[x] = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in F, n \in \mathbb{Z}\}$, I 是 $F[x]$ 的理想, 则 $I = \langle f(x) \rangle$, 其中 $\deg f(x)$ 是 I 中最小的¹, 故

¹多项式间的除法: 若 $\deg g(x) \geq \deg f(x)$, 则 $\exists q(x), r(x) \in F[x]$, s.t. $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ 且 $(r(x) = 0 \text{ 或 } 0 < \deg r(x) < \deg f(x))$

$(F[x], +, \cdot)$ 是诺特环. □

定义 5.2 主理想: 由一个元素生成的诺特环.

定理 5.2 (课本定理5.7): R 为有单位元的交换环, 则 R 是诺特环 $\iff R$ 上的有限生成模都是诺特模.

上述定理意味着有限生成的性质对诺特环是遗传的.

证: “ \Leftarrow ”: $R \in R\text{-mod}$ 且 $R = \langle \langle 1 \rangle \rangle$, 故 R 为诺特环.

“ \Rightarrow ”: 取 R 上的有限生成模 $M = \langle \langle v_1, \dots, v_n \rangle \rangle \in R\text{-mod}$, $M = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R\}$.

定义映射 $\tau: R^n \rightarrow M$, $(r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i u_i$.

$$(1) \because \tau(r(r_1, \dots, r_n) + t(l_1, \dots, l_n)) = \tau(rr_1 + tl_1, \dots, rr_n + tl_n) = \sum_{i=1}^n (rr_i + tl_i)u_i = r \sum_{i=1}^n r_i u_i + t \sum_{i=1}^n l_i u_i = r\tau(r_1, \dots, r_n) + t\tau(l_1, \dots, l_n), \therefore \tau \text{ 是 } R^n \text{ 到 } M \text{ 上的模同态.}$$

$$(2) \because \forall (r_1, \dots, r_n), \exists \sum_{i=1}^n r_i u_i, \therefore \tau \text{ 满射.}$$

$\implies \tau$ 满同态.

设 S 是 M 的任一子模, 则 $\tau^{-1}(S)$ 是 R^n 的子模, 且 $\because \tau$ 满同态, $\therefore \tau(\tau^{-1}(S)) = S$.

【思路】根据定理 5.2, 要证 M 诺特, 即证 M 的子模 S 有限生成, 于是先证 R^n 的子模有限生成, 从而 R^n 诺特, 进而利用引理 5.1 得 S 有限生成.

数学归纳法: 当 $n = 1$ 时, R 诺特 $\implies R^n$ 诺特.

假设当 $n = k$ 时, R^k 诺特, 则当 $n = k + 1$ 时, 要证 R^{k+1} 诺特, 即证 R^{k+1} 的子模有限生成.

取 I 为 R^{n+1} 子模, 取 $I_1 = \{(0, \dots, 0, a_{k+1}) \mid \exists a_1, \dots, a_k \in R, \text{ s.t. } (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \in I\}$, $I_2 = \{(a_1, \dots, a_k, 0) \mid \exists a_k \in R, \text{ s.t. } (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \in I\}$.

$\forall (0, \dots, 0, a_{k+1}), (0, \dots, 0, b_{k+1}) \in I_1$, $\exists a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in R$, s.t. $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}), (b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \in I$, $\because I$ 是子模, $\therefore \forall r, t \in R$, $r(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) + t(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) = (ra_1 + tb_1, \dots, ra_k + tb_k) \in I \implies r(0, \dots, 0, a_{k+1}) + t(0, \dots, 0, b_{k+1}) = (0, \dots, 0, ra_{k+1} + tb_{k+1}) \in I_2$, 故 I_1 为 R^{k+1} 的子模.

$\forall (a_1, \dots, a_k, 0), (b_1, \dots, b_k, 0) \in I_2$, $\exists a_{k+1}, b_{k+1}$, s.t. $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}), (b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \in I$ $\therefore I$ 是子模, $\therefore \forall r, t \in R$, $r(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) + t(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) = (ra_1 + tb_1, \dots, ra_k + tb_k) \in I \implies r(a_1, \dots, a_k, 0) + t(b_1, \dots, b_k, 0) = (ra_1 + tb_1, \dots, ra_k + tb_k, 0) \in I_2$, 故 I_2 为 R^{k+1} 的子模.

令 $J_1 = \{a_{k+1} \mid (0, \dots, 0, a_{k+1}) \in I_1\}$, $J_2 = \{(a_1, \dots, a_k) \mid (a_1, \dots, a_k) \in I_2\}$, 易证 J_1 是 R 的子模, J_2 是 R^k 的子模.

$\because R, R^k$ 诺特, $\therefore J_1, J_2$ 有限生成, 设 $J_1 = \langle \langle g_1, \dots, g_m \rangle \rangle$, $J_2 = \langle \langle f_1, \dots, f_n \rangle \rangle$, 其中 $g_1 \in R, f_i \in R^k$.

于是 $\forall i = 1, \dots, m$, $(0, \dots, 0, g_i) \in I_1$, 由 I_1 的定义, $\exists g_{i_1}, \dots, g_{i_k} \in R$, s.t. $\bar{g}_i \equiv (g_{i_1}, \dots, g_{i_n}, g_i) \in I$,

又有 $\bar{f}_i = (f_i, 0)$,

$\forall r = (r_1, \dots, r_k, r_{k+1}) \in I$, 则 $(0, \dots, 0, r_{k+1}) \in I_1$, 即 $r_{k+1} \in J_1 = \langle \langle g_1, \dots, g_m \rangle \rangle$,

于是 $r_{k+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i$, $(h, 0) \equiv r - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{g}_i = (*, \dots, *, 0) \in I$, 从而 $(h, 0) \in I_2$, $h \in J_2$, 设 $h = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i$ $\implies r = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{g}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{f}_i$, 故 I 由 $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ 生成 $\implies R^{k+1}$ 诺特 $\implies R^n$ 诺特 $\forall n \implies S = \tau(\tau^{-1}(S))$ 有限生成. □

引理 5.1: $\tau: M \rightarrow N$ 满同态, 则 M 有限生成 $\implies N$ 有限生成, 即有限生成模的满同态像有限生成.

证: $\because M$ 有限生成, \therefore 设 $M = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in R \}$,

$\because \tau$ 满同态, $\therefore N = \text{Im } \tau = \{ \tau(u) \mid u \in M \} = \{ \tau(u) \mid u = \sum_{i=1}^n r_i v_i, r_i \in R \} = \{ \tau(\sum_{i=1}^n r_i v_i) \mid r_i \in R \} = \{ \sum_{i=1}^n r_i \tau(v_i) \mid r_i \in R \} = \langle \tau(v_1), \dots, \tau(v_n) \rangle$, 故 N 有限生成. \square

定理 5.3 Hilbert 基本定理(课本定理5.9): R 是诺特环 $\implies R[x] \equiv \{ \sum_{i=0}^n r_i x^i \mid r_i \in R, n \in \mathbb{Z}^+ \}$ 诺特.