Chapter 1

向量空间

定义 1.1 **向量空间:** 交换群 $(V,+)$ 和域 F, 数乘映射 $\alpha : F \times V \to V$, 若满足

(1) $\alpha(r, u+v) = \alpha(r,u) + \alpha(r,v)$ (可简写为 $r(u+v) = ru + rv$)

(2) $\alpha(r+t, u) = \alpha(r,u) + \alpha(t,u)$ (可简写为 $(r+t)u = ru + tu$)

(3) $\alpha(r \cdot t, u) = \alpha(r, \alpha(t,u))$ (可简写为 $(r \cdot t) \cdot u = r(tu)$)

(4) **有单位元**: $\exists 1 \in F$, s.t. $\alpha(1,u) = u$ (可简写为 $1u = u$)

则称 V 是 F 上的向量空间.

例 1.1 **直角坐标系:** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 为域, $(\mathbb{R}^2 \equiv \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, +)$ 为交换群, 满足

(1) $r((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = r(x_1+x_2, y_1+y_2) = (rx_1+rx_2, ry_1+ry_2) = (rx_1, ry_1)+(rx_2, ry_2) = r(x_1,y_1)+r(x_2,y_2)$

(2) $(r+t)(x,y) = ((r+t)x, (r+t)y) = (rx+tx, ry+ty) = (rx, ry) + (tx, ty) = r(x,y) + t(x,y)$

(3) $(r \cdot t)(x,y) = (rtx, rty) = r(tx, ty) = r(t(x,y))$

(4) $1(x,y) = (x,y)$

故 $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. $\square$

$0v = 0$. (注意两个 0 的区别, 等号左边的 0 为域 F 中的零元, 等号右边的 0 为 V 中的零向量.)

证: $0v = (0+0)v = 0v + 0v \Longrightarrow 0v = 0$. $\square$

$r \in F$, $0 \in V$, 则 $r0 = 0$.

证: $r0 = r(0+0) = r0 + r0 \Longrightarrow r0 = 0$. $\square$

$-1v = -v$.

证: $-1v = -(1v) = -v$. $\square$

例 1.2: $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.
$\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间.
$\because$ 对 $c \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^2$, $cv \notin \mathbb{R}^2$, $\therefore \mathbb{R}^2$ 不是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. $\square$

例 1.3: $F^n \equiv \{(r_1,\cdots,r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1,\cdots,r_n)+(l_1,\cdots,l_n) = (r_1+l_1,\cdots,r_n+l_n)$, $r(r_1,\cdots,r_n) = (rr_1,\cdots,rr_n)$. F^n 为 F 上的向量空间. □

证: $\because$ $r((r_1,\cdots,r_n)+(l_1,\cdots,l_n)) = r(r_1+l_1,\cdots,r_n+l_n) = (rr_1+rl_1,\cdots,rr_n+rl_n) = (rr_1,\cdots,rr_n)+(rl_1,\cdots,rl_n) = r(r_1,\cdots,r_n)+r(l_1,\cdots,l_n)$,
且 $(r+t)(r_1,\cdots,r_n) = ((r+t)r_1,\cdots,(r+t)r_n) = (rr_1+tr_1,\cdots,rr_n+tr_n) = (rr_1,\cdots,rr_n)+(tr_1,\cdots,tr_n) = r(r_1,\cdots,r_n)+t(r_1,\cdots,r_n)$,
且 $(r\cdot t)(r_1,\cdots,r_n) = (rtr_1,\cdots,rtr_n) = r(tr_1,\cdots,tr_n) = r(t(r_1,\cdots,r_n))$,
且 $1(r_1,\cdots,r_n) = (r_1,\cdots,r_n)$,
$\therefore F^n$ 为 F 上的向量空间. □

定义 1.2 子空间: $\emptyset \neq S \subseteq V$, 若 S 为 V 的子群, 且在相同的数乘下构成 F 上的向量空间, 则称 S 是 V 的子空间.

定理 1.1 子空间的判定(课本定理1.1): S 为 V 的子空间 $\Longleftrightarrow \forall a,b \in S$, $r,t \in F$, $ra+tb \in S$ (即线性运算封闭).

证: "$\Longrightarrow$": $ra \in S$, $-tb \in S$, 又 $\because S$ 为 V 的子群, $ra-(-tb) \in S$.

"$\Longrightarrow$": 令 $r=1$, $t=-1$, 有 $a-b \in S \Longrightarrow S < V$.

令 $t=0$, 有 $ra \in S$, 故 S 为 V 的子空间.

综上, 得证. □

子空间的交是子空间.

证: 设 $S_1,\cdots,S_n$ 为 V 的子空间, 则 $S_1,\cdots,S_n$ 为 V 的子群 $\Longrightarrow \cap_{i=1}^n S_i$ 为 V 的子群.

$\forall u,v \in \cap_{i=1}^n S_i$, $\forall k$, $u,v \in S_k \Longrightarrow u,v$ 满足与 F 中向量相同的数乘映射.

综上, 得证. □

S,T 是 V 的子空间, $S+V \equiv \{u+v \mid u \in S, v \in T\}$ 为 V 的子空间.

证: $\forall w_1,w_2 \in S+T$, $r,t \in F$,
$w_1 \in S+T \Longrightarrow w_1 = u_1+v_1$, $u_1 \in S$, $v_1 \in T$,
$w_2 \in S+T \Longrightarrow w_2 = u_2+v_2$, $u_2 \in S$, $v_2 \in T$.
$rw_1+tw_2 = r(u_1+v_1)+t(u_2+v_2) = (ru_1+tu_2)+(rv1+tv_2)$, 其中 $ru_1+tu_2 \in S$, $rv_1+tv_2 \in T \Longrightarrow rw_1+tw_2 \in S+T$,
故 $S+T$ 为 V 的子空间. □

定义 1.3 生成子空间: $\emptyset \neq S \subseteq V$, $\langle S\rangle \equiv$ 包含 S 的最小子空间 $= \{\sum_{i=1}^n r_iu_i \mid r_i \in F, u_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$, 其中称 S 为生成集.

例 1.4: 向量空间 $\mathbb{R}^2$,
$S_x = \langle\{(1,0)\}\rangle = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = x$ 轴,
$S_y = \langle\{(0,1)\}\rangle = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = y$ 轴,
$\langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle = \langle\{(1,1),(1,-1)\}\rangle = \mathbb{R}^2$, 故对同一生成子空间, 生成集不唯一. □

定义 1.4 线性无关: 非零元 $u_1,\cdots,u_m$, 若 $r_1u_1+\cdots+\cdots+r_mu_m=0 \Longrightarrow r_1=\cdots=r_m=0$, 则称 $u_1,\cdots,u_m$ 线性无关. 若 S 中任意有限个元素线性无关, 则称 S 线性无关.

例 1.5: $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 线性无关. □

证: $r_1(1,0)+r_2(0,1)=(r_1,r_2)=0=(0,0) \Longrightarrow r_1=0,\ r_2=0$. □

例 1.6: $\mathbb{R}^2$ 上线性无关, 即两非零元夹角非零. □

单个非零元 v 线性无关.

证: $rv=0$ 且 $v\neq 0 \Longrightarrow r=0$, 故 v 线性无关. □

定义 1.5 线性相关: $u_1,\cdots,u_m$, 若 $\exists$ 不全为零的 $r_1,\cdots,r_m$, s.t. $r_1u_1+\cdots+r_mu_m=0$, 则称 $u_1,\cdots,u_m$ 线性相关.

若 u,v 线性相关, 则两者共线.

证: $\exists r,t$ 不全为零, s.t. $ru+tv=0$, 无妨设 $0\neq r\in F$, 则 $ru=-tv \Longrightarrow r^{-1}ru=-r^{-1}tv \Longrightarrow u=-\frac{u}{r}v$ □

定义 1.6 线性表示: v 可由 $u_1,\cdots,u_n$ 线性表示 $\Longleftrightarrow \exists r_1,\cdots,r_n\in F$, s.t. $v=\sum_{i=1}^n r_iu_i$.

定理 1.2 (课本定理1.6): S 线性无关 $\Longleftrightarrow \langle S\rangle$ 中的每个向量可由 S 中元素唯一地线性表示
$\Longleftrightarrow S$ 中任一向量不能由 S 中其余向量线性表示.

证: 设 $S=\{u_1,\cdots,u_m\}$.

第一个 "$\Longrightarrow$": $v\in\langle S\rangle$, 则 v 可由 S 中的元素线性表示, 即 $\exists r_1,\cdots,r_m$, s.t. $v=r_1u_1+\cdots+r_mu_m$.
要证这种线性表示是唯一的, 假设 v 的另一种线性表示为 $v=r_1'u_1+\cdots+r_m'u_m$.
$v-v=(r_1-r_1')u_1+\cdots+(r_m-r_m')u_m=0$, 又 $\because S$ 线性无关, 即 $u_1,\cdots,u_m$ 线性无关, $\therefore r_1'=r_1,\ r_m'=r_m$, 故两种线性表示相同.

第一个 "$\Longleftarrow$": $0\in\langle S\rangle$, 由于 $0u_1+\cdots+0u_m=$ 是且是 0 唯一的线性表示, 故 S 线性无关.

第二个 "$\Longrightarrow$": 不妨假设 u_1 可由 $u_2,\cdots,u_m$ 线性表示, 即 $u_1=t_2u_2+\cdots+t_mu_m$.
若 $r_1u_1+\cdots+r_mu_m=0$, 则 $r_1=\cdots=r_m=0$ 或 $r_1\neq 0,\ r_2=-r_1t_2,\cdots,r_m=-r_mt_m$, 从而 S 线性相关, 故假设错误, u_1 不可由 $u_2,\cdots,u_m$ 线性表示.

第二个 "$\Longleftarrow$": 假设 S 线性相关, 则 $\exists$ 非零 $r_1,\cdots,r_m$, s.t. $r_1u_1+\cdots+r_mu_m=0$, 不妨设 r_1 非零, 则 $u_1=-\frac{r_2}{r_1}u_2-\cdots-\frac{r_m}{r_1}u_m$, 即 u_1 可由 S 中其余向量线性表示, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关. □

定理 1.3 (课本定理1.7): $\emptyset\neq S\subseteq V$, 下列等价:

(1) S 线性无关, 且 $V=\langle S\rangle$

(2) $\forall v\in V$, 可用 S 中元素唯一地线性表示

(3) S 是 V 的极小生成集 (即 S 去除任意元素都无法生成 V, 或 S 的任意真子集都无法生成 V)

(4) S 是 V 的极大线性无关集 (即 S 增加任意元素都线性相关, $\forall u \in V$ 且 $u \notin S$, $S \cup \{u\}$ 线性相关)

证: 由定理 1.2 证得 (1)(2) 等价.

设 $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$.

(1)$\Longrightarrow$(3): 假设 $\exists S' \subsetneq S$, s.t. $V = \langle S' \rangle$, 则 $\forall v \in S - S' \subseteq V$, $v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S'$, $m \in \mathbb{N}$, 即 v 可由 S 中的部分向量线性表示, 与 S 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是 V 的极小生成集.

(3)$\Longrightarrow$(1): S 为 V 的生成集, 即 $V = \langle S \rangle$.

假设 S 线性相关, 即 $\exists r_1, \cdots, r_m$ 不全为零, s.t. $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$, 不妨设 $r_1 \neq 0$, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 + \cdots + \frac{r_m}{r_1} u_m$, 则 $S - \{u_1\}$ 仍可以生成 V, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关.

(1)$\Longrightarrow$(4): 假设 S 不是极大线性无关集, 则 $\exists v \in V - S$, s.t. $S \cup \{v\}$ 线性无关.

又 $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S$, $m \in \mathbb{N}$, 即线性无关集 $S \cup \{v\}$ 中的向量 v 可由其中的部分向量线性表示, 与 $S \supseteq$ 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是极大线性无关集.

(4)$\Longrightarrow$(1): $\because S$ 是 V 的极大线性无关集, $\therefore S$ 线性无关.

假设 $V \neq \langle S \rangle$, $\exists v \in V - S$, s.t. v 无法由 S 中的元素线性表示 $\Longrightarrow S \cup \{v\}$ 为线性无关集, 与 S 为最大线性无关集矛盾, 故假设错误, $V = \langle S \rangle$.

综上, 得证. □

定义 1.7 基: 任何生成向量空间 V 的线性无关集. 基的阶数称为 V 的维数, 记作 $\dim V$.

定理 1.4 (课本定理1.12): 向量空间的任何基都有相同的阶, 即 $\dim V$ 不依赖于基的选取.

例 1.7: $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 为 F^n 的一组基. □

证: $r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) = 0 \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$, 故 $e_1, \cdots, e_n$ 线性无关.

又 $\langle \{e_1, \cdots, e_n\} \rangle = \{r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F,\ 对\ i = 1, \cdots, n\} = F$, 故得证. □

找基的方法:

(1) 若 $0 \neq u_1 \in V$, 则 $\{u_1\}$ 线性无关.

(2) 若 $u_2 \in V - \langle u_1 \rangle$ 且 u_2 与 u_1 线性无关, 则 $\{u_1, u_2\}$ 线性无关.

(3) 重复以上操作, 直至无法找到新的线性无关元素, 即得到极大线性无关集, 此即向量空间的基.

定理 1.5 (课本定理1.9): 线性无关集 $I \subseteq V$, $S \subseteq V$ 是 V 的生成集, 且 $I \subseteq S$, 则 $\exists V$ 的基 $\mathcal{B}$, s.t. $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.

定义 1.8 直和: (1) **外直和**: 若 $V_1, \cdots, V_n$ 是 F 上的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \equiv \{(v_1, \cdots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$, 满足

- $(v_1, \cdots, v_n) + (u_1, \cdots, u_n) = (v_1 + u_1, \cdots, v_n + u_n)$
- $r(v_1, \cdots, v_n) = (rv_1, \cdots, rv_n)$

则$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 F 的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 $V_1, \cdots, V_n$ 的外直和.

(2) **内直和**: V 是 F 上的向量空间, $V_1, \cdots, V_n$ 是 V 的子空间, 若 $V = \sum_{i=1}^n V_i$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) =$

$\{0\}$, 则称 V 为 $V_1,\cdots,V_m$ 的内直和, 记作 $V=\bigoplus_{i=1}^n V_i$, 称 V_i 为直和项.

内/外直和的关系: $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$, $V_1'=\{(v_1,0,\cdots,0)\mid v_i\in V_i\}$, $\cdots$, $V_m'=\{(0,0,\cdots,v_m)\mid v_m\in V_m\}$ 是 V 的子空间, 则 $V=\bigoplus_{i=1}^n V_i$ 且 $V_i'\cap(\cup_{j\neq i}V_j)=\{0\}\Longrightarrow V_i=\bigoplus_{i=1}^m V_i'$, 故内/外直和是等价的, 以下我们不明确区分内/外直和, 均用内直和.

例 1.8: $\mathbb{R}^2=S_x\oplus S_y$. □

定理 1.6 (课本定理1.5): $\{v_i\mid i\in J\}$ 是 V 的子空间集合, $V=\sum_{i\in J}V_i$, 则下列等价:

(1) $V=\bigoplus_{i\in J}V_i$

(2) $V_i\cap(\sum_{j\neq i}V_j)\neq\{0\}$

(3) $0=0+\cdots+0$ 是 0 的唯一分解式

(4) V 中任一向量 v 具有唯一分解式 $v=v_1+\cdots+v_n$, 分解式中的有限个非零元 $v_i\in V_i$ 组成的集合成为支集

证: (1)$\Longleftrightarrow$(2): 由直积的定义即得证.

(2)$\Longrightarrow$(3): 假设 $0=s_{i1}+\cdots+s_{in}$ 且 s_{ij} 不全为零, 不妨设 $s_{i1}\neq 0$, 则 $V_{i1}\ni s_{i1}=-s_{i2}-\cdots-s_{ij}\in\sum_{j=2}^n V_{ij}$ $\Longrightarrow s_{i_1}\in V_{i_1}\cap(\cup_{j=2}^n V_{i_j})$, $s_{i_1}\neq 0$ 与 $V_{i_1}\cap(\cup_{j=2}^n V_{i_j})=\{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $0=0+\cdots+0$ 是 0 的唯一分解式.

(3)$\Longrightarrow$(4): $\forall v\in V$, $v=u_1+\cdots+u_n$, 其中 $u_i\in V_i$.
假设 $v=w_1+\cdots+w_m$, 其中 $w_i\in V_i$.
$0=v-v=u_1+\cdots+u_n-w_1-\cdots-w_n$, 将属于相同子空间的元素合并到一起, 得 $0=(u_{t_1}-w_{t_1})+\cdots+(u_{t_k}-w_{t_k})+u_{t_{k+1}}+\cdots+u_{t_n}-w_{t_{k+1}}-w_{t_m}$, 由 (2) 知 $k=n=m$ 且 $v_{t_i}=u_{t_i}$, 故 v 具有唯一分解式 $v=v_1+\cdots+v_n$.

(4)$\Longrightarrow$(2): 假设 $V_i\cap(\sum_{j\neq i}V_j)\neq\{0\}$, 则 $V_i\cap(\sum_{j\neq i}V_j)\supsetneq\{0\}$, 即 $\exists 0\neq u\in V_i\cap(\cup_{j\neq i}V_j)$,
不妨设 $u\in V_1$ 且 $u\in V_2$, 则 $v=v_1+\cdots+v_n=(v_1+u)+(v_2-u)+\cdots+v_n$, 其中 $v_i\in V_i$ 且 $v_1+u\in V_1$,$v_2-u\in V_2$, v 的分解式不唯一, 矛盾, 故假设错误, $V_i\cap(\sum_{j\neq i}V_j)=\{0\}$.

综上, 得证. □

定理 1.7 (课本定理1.8): $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是向量空间 V 的基 $\Longleftrightarrow V=\langle v_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle v_n\rangle$.

证: "$\Longrightarrow$": $\because\mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore V=\langle\mathcal{B}\rangle=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle=\{\sum_{i=1}^n r_iv_i\mid r_i\in F\}=\langle v_1\rangle+\cdots+\langle v_n\rangle$.
$\because\mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore v_1,\cdots,v_n$ 线性无关 $\Longrightarrow\forall 0\neq u\in\langle v_i\rangle$, $u=r_iv_i$ 且无法由 $\{v_j\mid j\neq i\}$ 线性表示 $\Longrightarrow u\notin V_i\cap(\cup_{j\neq i}V_j)$,
$0=0v_i\in\langle v_i\rangle$ 且 $0=\sum_{j\neq i}0v_j\Longrightarrow 0\in V_i\cap(\cup_{j\neq i}V_j)$
$\Longrightarrow V_i\cap(\cup_{j\neq i}V_j)=\{0\}$.
故 $V=\langle v_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle v_n\rangle$.

"$\Longleftarrow$": 一方面, $V=\langle v_1\rangle+\cdots+\langle v_n\rangle=\langle\mathcal{B}\rangle$;
另一方面, (线性无关的证明存疑), $\Longrightarrow v_1,\cdots,v_n$ 线性无关.
故 $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的基. □

定理 1.8 (课本定理1.4): S 为 V 的子空间, 则 $\exists V$ 的子空间 S^c, s.t. $V=S\oplus S^c$, 称 S^c 为 S 的补空间.

证: $\mathcal{B}_1$ 为 S 的基, 则 $\mathcal{B}_1$ 为 V 中的线性无关集,
$\mathcal{B}_1$ 总可以扩张为 (即添加一些元素) 成 V 的基, 即 $\exists \mathcal{B}_2$, s.t. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关且 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Longrightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$, 故 $S^c = \langle \mathcal{B} \rangle$. □

例 1.9: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y = S_l \oplus S_{l'}$, 其中 S_l 和 $S_{l'}$ 分别为过原点直线 l 和 l' 对应的子空间, l 与 l' 不共线. □

补空间总存在, 但不唯一.

定理 1.9 (<u>课本定理1.13</u>): (1) $\mathcal{B}$ 是 V 的基, 若 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, 则 $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T$, 若 $\mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, 则 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

证: (1) $\because \mathcal{B}$ 是 V 的基, $\therefore \forall u \in V$, $u = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$.
$\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_1, n \in \mathbb{N}\}$, $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F, v_i \in \mathcal{B}_2, n \in \mathbb{N}\}$.
$u = \sum_{i=1}^t r_i v_i + \sum i = t + 1^k r_i v_i$, 其中 $v_1, \cdots, v_k \in \mathcal{B}_1$, $v_{k+1}, \cdots, v_k \in \mathcal{B}_2 \Longrightarrow V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.
$\forall u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{B}_2 \rangle$,$u \in \langle \mathcal{B}_1 \rangle \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^n r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1$,
且 $u \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^n l_i w_i$, 其中 $l_i \in F$, $w_i \in \mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow 0 = u - u = \sum r_i v_i - \sum l_i w_i$,
又 $\because \mathcal{B}$ 为基, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, $\therefore r_i, w_i$ 线性无关 $\Longrightarrow r_i = l_i = 0, \forall i$
$\Longrightarrow u = 0$.
综上, $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

(2) $V = S \oplus T \Longleftrightarrow V = S + T$ 且 $S \cap T = \{0\}$.
假设 $v \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, 则 $v \neq 0$, $\langle v \rangle = S \cap T$, 与 $S \cap T = \{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.
$\because V = S + T$, $\therefore \forall u \in V$, $u = u_1 + u_2$, 其中 $u_1 \in S$, $u_2 \in T$,
$\because \mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, $\therefore u_1 = \sum_{i=1}^k r_i v_i$, $u_2 = \sum_{i=k+1}^n$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \cdots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \cdots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow u = \sum_{i=1}^m r_i v_i$, 其中 $r_i \in F$, $v_i \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, 即 $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle$.
假设 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性相关, 则 $\exists r_i \in F$ 不全为零, $\sum_{i=1}^n r_i v_i = \sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$, 其中 $r_i \in F$, 对 $i = 1, \cdots, k$, $v_i \in \mathcal{B}_1$, 对 $i = k+1, \cdots, n$, $v_i \in \mathcal{B}_2$,
$\because \mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 为基, $\therefore \mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow \sum_{i=1}^k r_i v_i \neq 0$, $\sum_{i=k+1}^n r_i v_i \neq 0$, 与 $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

□

定理 1.10 (<u>课本定理1.14</u>): S, T 是 V 的子空间, $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$. 特别地, 若 T 是 S 的补空间, 则 $\dim S + \dim T = \dim(S \oplus T)$.

证: 设 $S \cap T$ 的基为 $\mathcal{A}$,
$\because S \cap T$ 为 S 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{A}$ 扩张成 S 的基 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$,
$\because S \cap T$ 为 T 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{A}$ 扩张成 T 的基 $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$.
接下来需要用到这样一个事实: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S + T$ 的基. 所以先来证明它:

证: $\forall w \in S + T$, $w = u + v$, 其中 $u \in S$, $v \in T \Longrightarrow u \in \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle$, $v \in \langle \mathcal{A} + \mathcal{C} \rangle$, 故 $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S + T$.
不妨设 $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$, 其中 $v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.
设 $v_1, \cdots, v_k \in \mathcal{A}$, 则 $\sum_{i=1}^k r_i v_i + \sum_{i=k+1}^n r_i v_i = 0$,

令 $x=\sum_{i=1}^{k} r_i v_i$, 则 $x=\sum_{i=1}^{k} r_i v_i \in \langle \mathcal{A} \rangle$ 且 $x=-\sum_{i=k+1}^{n} r_i v_i \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \Longrightarrow x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = (S-T) \cap T = \emptyset$.
$\because x \in \langle \mathcal{B} \rangle$, $\therefore x \in \mathcal{S}$, 又 $\because x \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$, $\therefore x \in T \Longrightarrow x \in S \cap T = \langle \mathcal{B} \rangle$. $\Longrightarrow x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle \Longrightarrow x=0$.
又 $\because \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性独立, 故 $\forall i$, $r_i=0 \Longrightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 线性无关.

综上, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 是 $S+T$ 的基. $\square$

故

$$\dim S+\dim T=|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|+|\mathcal{B} \cup \mathcal{C}|=|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|+|\mathcal{B}|+|\mathcal{C}|=|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|+|\mathcal{C}|+\dim(S \cap T)=\dim(S+T)+\dim(S \cap T).$$

$\square$

Chapter 2

线性变换

2.1 线性变换

定义 2.1 线性变换: 向量空间之间的映射. F 为域, V, W 为 F 上的向量空间, 映射 $\tau: V \to W$, 若 $\tau(ru+tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$, $r, t \in F$, $u, v \in V$, 则称 τ 为 V 到 W 的线性变换.

(类似于同态)

取 $r = 1$, $t = 1$, 则 $\tau(u+v) = \tau(u) + \tau(v)$, 故 τ 是 V 到 W 的群同态, 从而 $\tau(0) = 0$, $\tau(-v) = -\tau(v)$.

$\mathcal{L}(V, W) \equiv \{V$ 到 W 的线性变换$\}$, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V) = \{V$ 到 V 的线性变换$\} = \{V$ 上的线性算子$\}$.

定义 2.2 单线性变换: 单射的线性变换.

定义 2.3 满线性变换: 满射的线性变换.

定义 2.4 同构: 双射的线性变换.

取 $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$, $v \overset{\sigma}{\mapsto} \sigma(v) \Longrightarrow v \overset{\tau+\sigma}{\mapsto} \tau(v) + \sigma(v)$ 也是线性变换, 且 $\tau + \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$.

证: 由映射的像的唯一性, $\because v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$ 是唯一的, $v \overset{\sigma}{\mapsto} \sigma(v)$ 是唯一的, $\therefore v \overset{\tau+\sigma}{\mapsto} \tau(v) + \sigma(v)$ 是唯一的, 故 $\tau + \sigma$ 是映射.

$(\tau+\sigma)(ru+tv) = \tau(ru+tv) + \sigma(ru+tv) = r\tau(u) + t\tau(v) + r\sigma(u) + t\sigma(v) = r[\tau(u) + \sigma(u)] + t[\tau(v) + \sigma(v)] = r[(\tau+\sigma)(u)] + t[(\tau+\sigma)(v)]$, 故 $\tau + \sigma$ 为 V 到 W 的线性变换. □

由此定义了线性变换之间的加法.

$(\mathcal{L}(V, W), +)$ 为交换群.

证: $(\mathcal{L}(V, W), +)$ 满足

(1) **结合律**: $\forall v \in V$, $[(\tau+\sigma)+\delta](v) = (\tau+\sigma)(v) + \delta(v) = \tau(v) + \sigma(v) + \delta(v) = \tau(v) + (\sigma(v) + \delta(v)) = \tau(v) + (\sigma+\delta)(v) = [\tau + (\sigma+\delta)](v) \Longrightarrow [(\tau+\sigma)+\delta] = [\tau + (\sigma+\delta)]$.

(2) **有单位元** 0: 零映射 $0(v) = 0$, $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W)$, $(0+\tau)(v) = 0(v) + \tau(v) = 0 + \tau(v) = \tau(v) + 0 = \tau(v) + 0(v) = (\tau+0)(v)$.

(3) **有逆元**: $\forall \tau \in \mathcal{L}(V,W)$, $\exists -\tau$, s.t. $(-\tau)(v) = -\tau(v) \Longrightarrow [\tau + (-\tau)](v) = \tau(v) - \tau(v) = 0 = 0(v)$.

(4) **交换律**: $\forall v \in V$, $(\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \sigma(v) + \tau(v) = [\sigma + \tau](v)$.

故 $\mathcal{L}(V,W)$ 为交换群. □

$\forall r \in F$, $v \in \mathcal{L}(V,W)$, $v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v) \Longrightarrow v \overset{r\tau}{\mapsto} r\tau(v)$ 是线性变换, 且 $r\tau \in \mathcal{L}(V,W)$.

证: 由映射的像的唯一性, $\because v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$ 是唯一的, $\therefore v \overset{r\tau}{\mapsto} r\tau(v)$ 是唯一的, 故 $r\tau$ 是映射.
$(r\tau)(v) = r\tau(v) = r[\tau(v)]$, 故 $r\tau$ 为 V 到 W 的线性变换. □

$\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V,W),+)$ 为交换群, 且其满足

(1) $\forall v \in V$, $[(r+t)\tau](v) = (r+t)\tau(v) = r\tau(v) + t\tau(v) = (r\tau + t\tau)(v) \Longrightarrow (r+t)\tau = r\tau + t\tau$

(2) $\forall v \in V$, $[(rt)\tau](v) = (rt)\tau(v) = r[t\tau(v)] = [r(t\tau)](v) \Longrightarrow (rt)\tau = r(t\tau)$

(3) $\forall v \in V$, $[r(\tau+\sigma)](v) = r(\tau+\sigma)(v) = r[\tau(v) + \sigma(v)] = r\tau(v) + r\sigma(v) = (r\tau + r\sigma)(v) \Longrightarrow r(\tau+\sigma) = r\tau + r\sigma$

(4) 恒等映射 $1 : \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(V,W)$, $\tau \overset{1}{\mapsto}$, $\forall v \in V$, $(1\tau)(v) = 1[\tau(v)] = \tau(v) \Longrightarrow 1\tau = \tau$

故得证. □

定理 2.1 (课本定理2.1): (1) $\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间.

(2) $t \in \mathcal{L}(V,W)$, $\sigma \in \mathcal{L}(W,U)$, 则 $\sigma \circ \tau \in \mathcal{L}(V,U)$.

(3) τ 是 V 到 W 的同构, 则 $\tau^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$.

(4) $\mathcal{L}(V)$ 既是向量空间, 也是环, 且两者的加法运算是一样的, 故 $\mathcal{L}(V)$ 是**代数**.

$\mathcal{L}(V)$ 是环.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V),+)$ 为交换群, 且满足

(1) **结合律**: $\because$ 映射的复合有结合律, $\therefore \mathcal{L}(V)$ 中元素的复合有结合律

(2) **左右分配律**: $\forall v \in V$, $[(\sigma+\tau)\delta](v) = (\sigma+\tau)[\delta(v)] = \sigma[\delta(v)] + \tau[\delta(v)] = (\sigma\delta)(v) + (\tau\delta)(v) \Longrightarrow (\sigma+\tau)\delta = \sigma\delta + \tau\delta$
$[\sigma(\tau+\delta)](v) = \sigma[(\tau+\delta)(v)] = \sigma[\tau(v) + \delta(v)] = \sigma[\tau(v)] + \sigma[\delta(v)] = \sigma\tau(v) + \sigma\delta(v) \Longrightarrow \sigma(\tau+\delta) = \sigma\tau + \sigma\delta$

故得证. □

定义 2.5 核空间: $\operatorname{Ker}\tau \equiv \{v \mid \tau(v) = 0\} \subseteq V$.

定义 2.6 像空间: $\operatorname{Im}\tau \equiv \{\tau(v) \mid v \in V\}$.

定理 2.2 (课本定理2.3): (1) τ 满线性变换 $\iff \operatorname{Im}\tau = W$.

(2) τ 单线性变换 $\iff \operatorname{Ker}\tau = \{0\}$.

定理 2.3 (课本定理2.2): $\mathcal{B}$ 是 V 的基, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 则 τ 可由 τ 在 $\mathcal{B}$ 上的像唯一确定.

证: 若已知 $\tau(b_i)\forall b_i \in \mathcal{B}$, 则 $\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$, $r_i \in F$, $b_i \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}^+$
$\implies \tau(v) = \tau\left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i \tau(b_i)$. □

同构的向量空间有很多性质可以相互传递, 下面我们就来讨论这件事.

定理 2.4 (课本定理2.4): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ 同构, S 是 V 真子集, 则

(1) $V = \langle S \rangle \iff W = \langle \tau(S) \rangle$.

(2) S 线性无关 $\iff \tau(S)$ 线性无关.

(3) S 是 V 的基 $\iff \tau(S)$ 是 V 的基.

证: (1) "$\Longrightarrow$": $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore \forall v \in V$, $v = \sum_i r_i s_i$,
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall w \in W$, $\exists v \in V$, s.t. $w = \tau(v) \Longrightarrow \tau(v) = \tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i)$.

"$\Longleftarrow$": $\because W = \langle \tau(S) \rangle$, $\therefore \forall w \in W$, $w = \sum_i r_i \tau(s_i)$,
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall v \in W$, $\exists w \in W$, s.t. $v = \tau^{-1}(w) = \tau^{-1}\left(\sum_i r_i \tau(s_i)\right) = \sum_i r_i \tau^{-1}(\tau(s_i)) = \sum_i r_i \tau(s_i)$.

综上, (1) 得证.

(2) "$\Longrightarrow$": 假设 $\sum_i r_i \tau(s_i) = 0$, 则 $\tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = 0$,
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \operatorname{Ker}\tau = \{0\} \Longrightarrow \sum_i r_i s_i = 0$,
又 $\because S$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \Longrightarrow \tau(S)$ 线性无关.

"$\Longleftarrow$": 假设 $\sum_i r_i s_i = 0$, 则 $\tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i) = 0$,
又 $\because \tau(S)$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \Longrightarrow S$ 线性无关.

综上, (2) 得证.

(3) (1), (2) $\Longrightarrow$ (3).

□

定理 2.5 (课本定理2.6): $V \approx W \iff \dim V = \dim W$.

定理 2.6 (课本定理2.7): 若 $\dim V = n$, 则 $V \approx F^n$.

定理 2.7 (课本定理2.8): $\tau \in (L)(V, W)$,

(1) $(\operatorname{Ker}\tau)^c \approx \operatorname{Im}\tau$.

(2) $\dim V = \dim \text{Ker}\,\tau + \dim \text{Im}\,\tau \equiv \text{null}\,\tau + \text{rk}\,\tau$, 其中称 $\text{null}\,\tau \equiv \dim \text{Ker}\,\tau$ 为 τ 的零度, $\text{rk}\,\tau \equiv \dim \text{Im}\,\tau$ 为 τ 的秩.

证: (1) 设映射 $\tau^c: \text{Ker}\,(\tau)^c \to \text{Im}\,\tau$, $u \mapsto \tau(u)$.

先证 τ^c 是单射: $\text{Ker}\,(\tau^c) = \text{Ker}\,(\tau) \cap \text{Ker}\,(\tau)^c$ (即 $\text{Ker}\,(\tau^c)$ 中的元素同时满足 $\text{Ker}\,(\tau)$ 的条件, 且在定义域 $\text{Ker}\,(\tau)^c$ 中),

又 $\because V = \text{Ker}\,(\tau) \oplus \text{Ker}\,(\tau)^c$, $\therefore \text{Ker}\,(\tau) \cap \text{Ker}\,(\tau)^c = \{0\} \Longrightarrow \text{Ker}\,(\tau^c) = \{0\}$, 故 τ^c 单射.

再证 τ^c 是满射: 一方面, $\text{Im}\,(\tau^c) \subseteq \text{Im}\,(\tau)$;

另一方面, $\forall \tau(v)$, $v = u + w$, 其中 $u \in \text{Ker}\,(\tau)$, $w \in \text{Ker}\,(\tau)^c \Longrightarrow \tau(v) = \tau(u+w) = \tau(u) + \tau(w) = 0 + \tau(w) = \tau(w) \in \text{Im}\,(\tau^c) \Longrightarrow \text{Im}\,(\tau) \subseteq \text{Im}\,(\tau^c)$.

故 $\text{Im}\,(\tau^c) = \text{Im}\,(\tau)$, 即 τ^c 满射.

综上, (1) 得证.

(2) $\dim V = \dim \text{Ker}\,(\tau) + \dim \text{Ker}\,(\tau)^c = \dim \text{Ker}\,(\tau) + \dim \text{Im}\,(\tau)$.

□

x 为 n 维向量, $\dim\{x \mid Ax = 0\} = n - \text{rk}\,A$, 故 $\dim\{x \mid Ax = 0\} = \text{null}\,A$.

2.2 表示

“表示”其实就是用已知的东西展现未知的东西, 在这里, 我们用已知的矩阵乘法展现未知的线性变换, 这就是线性变换的表示.

F 为域, $F^n = \{(r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1, \cdots, r_n) + (l_1, \cdots, l_n) = (r_1 + l_1, \cdots, r_n + l_n)$ 及 $r(r_1, \cdots, r_n) = (rr_1, \cdots, rr_n)$, $\dim F^n = n$, F^n 的标准基为 $\{e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)\}$; $F^m = \{(r_1, \cdots, r_m) \mid r_i \in F\}$, $\dim F = m$, 标准基为 $\{f_1 = (1, 0, \cdots, 0), f_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, f_m = (0, 0, \cdots, 1)\}$. 如何确定/展现 F^n 到 F^m 的线性变换?

根据定理 2.4, 我们只需确定一组基在线性变换下的表现, 就可以确定这一线性变换.

证: $\{b_1, \cdots, b_n\}$ 为 V 的基, 线性变换 $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 若已知 $\tau(b_i) \forall i$, 则 $\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \Longrightarrow \tau(v) = \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(b_i)$ 可以确定, 由此 τ 可以确定. □

因此, $\forall \tau \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$, 若 $\tau(e_i) = (a_{1i}, \cdots, a_{mi}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j$.
$\forall (r_1, \cdots, r_n) \in F^n$,

$$\begin{aligned}
\tau((r_1, \cdots, r_n)) =& \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(e_i) = \sum_{i=1}^n r_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{ji}\right) f_j = \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{1i}, \cdots, \sum_{i=1}^n r_i a_{mi}\right) \\
=& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = M_\tau \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

其中 $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$.
故 $\forall \vec{r} \in F^n$, $\tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r}$.

综上:

$$\boxed{\mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m \times n}(F), \quad \tau \mapsto M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_2) \end{pmatrix}}.$$

$f: \mathcal{L}(F^n, F^m) \to M_{m\times n}(F)$, $\tau \mapsto M_\tau$ 是线性变换.

证: 由上述的 M_τ 构造过程知, $f(\tau) = M_\tau$ 是唯一的, 故 f 是映射.

$$\begin{aligned} f(r\tau + t\sigma) =& M_{r\tau+t\sigma} = \begin{pmatrix}(r\tau+t\sigma)(e_1) & \cdots & (r\tau+t\sigma)(e_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\tau(e_1) + t\sigma(e_n) & \cdots & r\tau + t\sigma(e_n)\end{pmatrix} \\ =& r\begin{pmatrix}\tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n)\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\sigma(e_1) & \cdots & \sigma(e_n)\end{pmatrix} = rM_\tau + tM_\sigma = rf(\tau) + tf(\sigma). \end{aligned}$$

故 f 是线性的.

综上, $f: \mathcal{L}(F^n) \to M_{m\times n}(F)$, $\tau \mapsto M_\tau$ 是线性变换. □

f 单射.

证: $\operatorname{Ker} f \equiv \{\tau \mid f(\tau) = 0\} = \{\tau \mid M_\tau = 0\}$.
$\forall \tau \in \operatorname{Ker} f, \forall \vec{r} \in F^n$, $\tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r} = \vec{0} \implies M_\tau = 0_{m\times n} \implies \tau = 0$.
故 $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (这里的“0”代表的是零变换) $\iff f$ 单射. □

f 满射.

证: $\forall A \in M_{m\times n}(F)$, 可由 $\begin{pmatrix}\tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n)\end{pmatrix} = M_\tau = A$ 构造 τ, 从而 f 满射. □

综上, f 同构.

取 V 的基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, $\forall v \in V$, $v = \sum_i r_i b_i$.

当 $\mathcal{B}$ 定序, $\phi_\mathcal{B}: V \to F^n$, $v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n\end{pmatrix} \equiv [v]_\mathcal{B}$ 是一个映射.

证: 由于 $\mathcal{B}$ 是 V 的基, 展开式 $v = \sum_i r_i b_i$ 唯一确定, 又 $\because \mathcal{B}$ 定序, 从而映射 $v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n\end{pmatrix}$ 唯一确定, 故 $\phi_\mathcal{B}$ 为映射.

$\forall u, v \in V$, $u = \sum_{i=1}^n w_i b_i$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i$,

$$\begin{aligned} \phi_\mathcal{B}(r\vec{u} + t\vec{v}) =& \phi_\mathcal{B}\left(r\left(\sum_{i=1}^n w_i b_i\right) + t\left(\sum_{i=1}^n r_i b_i\right)\right) = \phi_\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n (rw_i + tr_i) b_i\right) = \begin{pmatrix} rw_1 + tr_1 \\ \vdots \\ rw_n + tr_n\end{pmatrix} \\ =& r\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n\end{pmatrix} = r\phi_\mathcal{B}(u) + t\phi_\mathcal{B}(v), \end{aligned}$$

故 ϕ_B 为 V 到 F^n 的线性变换. □

$\phi_\mathcal{B}$ 单射.

证: $\operatorname{Ker} \phi_\mathcal{B} = \{v \mid \phi_\mathcal{B}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\}$.

$\phi_\mathcal{B}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \implies v = \sum_{i=1}^n 0 b_i = 0$.

故 $\operatorname{Ker} \phi_\mathcal{B} = \{0\} \iff \phi_\mathcal{B}$ 单射. □

$\phi_{\mathcal{B}}$ 满射.

证: $\forall \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in F^n$, $\exists v \in V$, s.t. $\sum_{i=1}^{n} r_i b_i \in V$, 故 $\phi_{\mathcal{B}}$ 满射. □

综上, $\phi_{\mathcal{B}}$ 同构.

取 V 的一组定序基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, 另一组定序基 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_n\}$, v 在 $\mathcal{B}$ 下的表象为 $[v]_{\mathcal{B}}$, 在 $\mathcal{C}$ 下的表象为 $[v]_{\mathcal{C}}$, 映射关系见如下的交换图. 如何联系 v 在不同基下的表象, $[v]_{\mathcal{B}}$ 和 $[v]_{\mathcal{C}}$, 从而得到 τ?

$$\begin{tikzcd}
& & v \arrow[dddll, mapsto] \arrow[dddrr, mapsto] & & \\
& & V \arrow[dl, "\phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{C}}"] & & \\
& F^n \arrow[rr, "\tau = \phi_{\mathcal{C}} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & & F^n & \\
{[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrrr, mapsto] & & & & {[v]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}$$

$[v]_{\mathcal{C}} = \tau([v]_{\mathcal{B}}) = M_\tau [v]_{\mathcal{B}}$, 其中 $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$.
$\tau : F^n \to F^n, \quad e_i \mapsto \tau(e_i) = \phi_{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)) = \phi_{\mathcal{C}}(b_i)$,
$M_\tau = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathcal{BC}}$.

定理 2.8 (课本定理2.12):

$$\boxed{[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}} [v]_{\mathcal{B}}}$$

其中 $[v]_{\mathcal{B}}$ 和 $[v]_{\mathcal{C}}$ 分别是向量 v 在基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 表象下的坐标表示, $M_{\mathcal{BC}}$ 是在两种坐标表示之间线性变换对应的矩阵.

$$\begin{tikzcd}
b_i \arrow[rrrrr, mapsto] \arrow[ddddd, mapsto] & & & & & \tau(b_i) \arrow[ddddd, mapsto] \\
& v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tau(v) \arrow[ddd, mapsto] & \\
& & V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] & & \\
& & F^n \arrow[r, "\tau_A = \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & F^n & & \\
& {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrr, mapsto] & & & \tau([v]_{\mathcal{B}}) = [v]_{\mathcal{C}} & \\
e_i \arrow[rrrrr, mapsto] & & & & & \tau_A(e_i) = [\tau(b_i)]_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
M_{\tau_A} &= \begin{pmatrix} \tau_A(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) & \cdots & \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau(b_1) & \cdots & \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau(b_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

定理 2.9 (课本定理2.14):

$$\boxed{[\tau(v)]_{\mathcal{C}} = [\tau(v)]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}}}$$

其中 $[\tau(v)]_{\mathcal{C}}$ 是 $\tau(v)$ 在基 $\mathcal{C}$ 的表象下的坐标表示, $[\tau(v)]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ 是从基 $\mathcal{B}$ 的表象到基 $\mathcal{C}$ 的表象的线性变换的矩阵表示, $[v]_{\mathcal{B}}$ 是 v 在基 $\mathcal{B}$ 的表象下的坐标表示.

定理 2.10 (课本定理2.15): $\mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m\times n}(F)$, $\tau \mapsto \tau_A \mapsto [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

若我们改变 V 和 W 的基, 那么映射所联系的向量的坐标会如何?

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "\tau'_A"] & F^n \\
V \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] \\
F^n \arrow[r, "\tau_A"] & F^n
\end{tikzcd}$$

$\tau'_A = \phi'_{\mathcal{C}}\phi_{\mathcal{C}}^{-1}\tau_A\phi_{\mathcal{B}}\phi'^{-1}_{\mathcal{B}}$.

定理 2.11 (课本定理2.16):

$$\boxed{[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$$

其中 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$ 分别是线性变换 τ 在基 $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ 和 $(\mathcal{B}',\mathcal{C}')$ 下的表示, 矩阵 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 和 $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ 分别对应了从基 $\mathcal{B}$ 到基 $\mathcal{B}'$ 和从基 $\mathcal{C}$ 到基 $\mathcal{C}'$ 的变换矩阵.

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆.

证: 设 $\phi_{\mathcal{B}} : V \to F^n$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $\phi_{\mathcal{B}'} : V \to F^n$, $v = \sum_{i=1}^n r_i' b_i' \mapsto [v]_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} r_1' \\ \vdots \\ r_n' \end{pmatrix}$, 即

$$\begin{tikzcd}
 & & v \arrow[dddll, mapsto] \arrow[dddrr, mapsto] & & \\
 & & V \arrow[dl, "\phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{B}'}"] & & \\
 & F^n \arrow[rr, "\tau"] & & F^n & \\
{[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrrr, mapsto] & & & & {[v]_{\mathcal{B}'}}
\end{tikzcd}$$

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_\tau = \Big([b_1]_{\mathcal{B}'} \quad \cdots \quad [b_n]_{\mathcal{B}'}\Big)$, s.t. $[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}$.
同理可以构造 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \Big([b_1']_{\mathcal{B}} \quad \cdots \quad [b_n']_{\mathcal{B}}\Big)$, s.t. $[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'}$.
$\forall [v]_{\mathcal{B}} \in F^n$, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}} \Longrightarrow M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = n \times n$ 维的单位矩阵, 即 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 是 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 的逆, 故 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆. $\square$

定理 2.12 (课本定理2.18): $B = PAQ$, 其中 P 和 Q 可逆, 则 B 与 A **等价**.

(因为 B 和 A 是同一线性变换在两组不同的基下的表示.)

定理 2.13 (课本定理2.19): $B = PAP^{-1}$, 其中 P 可逆, 则 B 与 A **相似**.

(因为 B 和 A 是同一线性算子在两组不同的基下的表示.)