Chapter 6

主理想整环上的模

定义 6.1 <u>**主理想整环(PID)**</u>**:** 每个理想均由一个元素生成的整环.

例 6.1: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}[x]$ 为 PID. □

PID 必诺特.
$\mathbb{R}$ 为整环, $a, b, r, s \in R$,

(1)

定义 6.2 <u>**整除**</u>**:** 若 $\exists x \in R$, s.t. $s = xr$, 则称 r **整除** s, 记作 $r \mid s$.

(2)

定义 6.3 <u>**单位**</u>**:** R 中的可逆元.

例 6.2: $\mathbb{Z}$ 中, 1 和 -1 为单位.
若 F 为域, 则 $F^* \equiv F - \{0\}$ 中的元素均为单位. □

(3)

定义 6.4 <u>**素元**</u>**:** $0 \neq q \in R$, 若 $p \mid ab \Longrightarrow p \mid a$ 或 $p \mid b$, 则称 p 为**素元**.

(4)

定义 6.5 <u>**不可约元**</u>**:** $0 \neq r \in R$, 若 $r = ab \Longrightarrow a$ 或 b 为单位, 则称 r 为**不可约元**.

(5)

定义 6.6 <u>**互素**</u>**:** a 与 b 无非单位公因子, 则称 r 与 b **互素**.

注意:

- 单位必素, 必不可约.

证: 设 $0 \neq r \in R$ 为单位, 则必 $\exists a$ 的逆 a^{-1}.
若 $r \mid ab$, 则 $\because (ar^{-1})r = a$, $(br^{-1})r = b$, $\therefore r$ 为素元.
若 $r = ab$, 则 $\because (r^{-1}a)b = r^{-1}(ab) = r^{-1}r = 1$, 即 b 可逆, 逆元为 $r^{-1}a$, $\therefore r$ 为不可约元. $\square$

- 整环中, 素元不可约, 反之未必.

证: 设 $p \neq 0$ 为素元且 $p = ab$.
显然 $p \mid ab$, 又 $\because p$ 为素元, $\therefore p \mid a$ 或 $p \mid b$.
无妨 $p \mid a$, 则 $\exists x \in R$, s.t. $a = px$
$\Longrightarrow p = ab = pxb \Longrightarrow p(1 - xb) = 0$.
$\because p \neq 0$ 且 R 为整环 (即 R 无零因子), $\therefore 1 - xb = 0 \Longrightarrow xb = 1 \Longrightarrow b$ 为单位, 故 p 为不可约元. $\square$

例 6.3: (不可约元非素的例子) $R = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 为整环.
$9 = 3^2 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$, 其中 3 不可约 (证略), $3 \mid (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$, 但 $3 \nmid (2 + \sqrt{-5})$, $3 \nmid (2 - \sqrt{-5}) \Longrightarrow 3$ 非素. $\square$

- 非整环中, 素元未必不可约.

例 6.4: $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ 非整环, $[2]$ 为素元, 但 $[2] = [2][4]$, $[2]$ 和 $[4]$ 均非单位 $\Longrightarrow [2]$ 可约. $\square$

定理 6.1 (课本定理0.29): R 为 PID, $a, b \in R$, 则 a 与 b 互素 $\Longleftrightarrow \exists r, t \in R$, s.t. $ra + tb = 1$.

证: "$\Longrightarrow$": 令 R 的理想 $I = \langle a, b \rangle$.
$\because R$ 是主理想, $\therefore I$ 可由一个元素生成, 设 $I = \langle c \rangle$, 其中 $c \in R$.
又 $\because a \in I$, $b \in I$, $\therefore c \mid a$, $c \mid b \Longrightarrow c$ 为 a 和 b 的公因子,
$\because a, b$ 互素, $\therefore c$ 为单位, 即 $\exists c^{-1} \in R$, s.t. $1 = c^{-1}c \in I$.
$\because 1 \in I$, $\therefore 1 = ra + tb$.
"$\Longleftarrow$": 取 c 为 a 和 b 的公因子, $a = cx$, $b = cy$.
$\because 1 = ra + tb = rcx + tcy = c(rx + ty)$, $\therefore c \mid 1 \Longrightarrow c$ 可逆, 即 c 为单位. $\square$

有算法可以在给定 a, b 下找到 s, t, 此处不赘述.

定理 6.2 (课本定理0.29): R 是 PID, $\forall 0 \neq r \in R$, $r = up_1 \cdots p_n$ 且该分解式唯一, 其中 u 为单位, p_i 是 R 中的不可约元, $n \in \mathbb{Z}^+$.

证: $\forall 0 \neq r \in R$, 首先分解出 r 中的可逆因子, $r = ur'$, 其中 u 为单元, $r' = u^{-1}r$ 非单元.
若 r' 不可约, 则得证;
若 r' 可约, 则 $r' = r_1 r_2$, 其中 r_1, r_2 均非单位.
若 r_1, r_2 均不可约, 则得证;
否则无妨 r_2 可约, 则 $r_2 = r_3 r_4$.
重复如上分解操作, 可得 $r' = r_1 r_2 = r_1(r_3 r_4) = (r_1 r_3)(r_5 r_6) = (r_1 r_3 r_5)(r_7 r_8) = \cdots$,
同时得到升链 $\langle r' \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle \subseteq \langle r_4 \rangle \subseteq \cdots$.
又 $\because R$ 为 PID, $\therefore R$ 诺特 $\Longrightarrow$ 上述升链有限长, 即上述分解式中不可约元个数有限, 故最终得 $r = u^{-1}p_1 \cdots p_n$.

下证上述分解唯一: 假设 r' 有两个不可约元分解式 $r' = p_1 \cdots p_n$ 和 $r' = q_1 \cdots q_m$.
首先消去相同的不可约元, 留下 $p_i \neq q_j \forall i, j$, 等式两边不可能均为非单位的不同不可约元的乘积, 故必消得 $1 = 1$. $\square$

定义 6.7 挠元(Torsion): $M \in R-\text{mod}$, $v \in M$, 若 $\exists 0 \neq r \in R$, s.t. $rv = 0$, 则称 v 为 M 的**挠元**.

定义 6.8 挠模: 所有元素均为挠元的模.

定义 6.9 无挠: 若一模无非零挠元, 则称该模**无挠**.

与线性无关类似, 若 $0 \neq v \in M$, $r \in R$, $rv = 0$, 且 M 无挠, 则 $r = 0$.

定义 6.10 挠子模: $M_{\text{tor}} = \{v \in M \mid v \text{ 为挠元}\}$.

$\because 0$ 为 M 的挠元, $0 \in M_{\text{tor}}$, $\therefore M_{\text{tor}} \neq \emptyset$.

若 R 交换, 则 M_{tor} 为 M 的子模.

证: $\forall u, v \in M_{\text{tor}}$, $\exists 0 \neq r_1, r_2 \in R$, s.t. $r_1 u = 0$, $r_2 v = 0$.
$\forall s, t \in R$, $(r_1 r_2)(su + tv) = r_2 s(r_1 u) + r_1 t(r_2 v) = r_2 s \cdot 0 + r_1 t \cdot 0 = 0 + 0 = 0$ 且 $r_1 r_2 \neq 0 \Longrightarrow (su + tv) \in M_{\text{tor}}$, 故得证. $\square$

$\frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 无挠.

证: 假设 $[0] \neq [v] \in \frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 为挠元, 则 $\exists 0 \neq r \in R$, $r[v] = [rv] = [0] = M_{\text{tor}} \Longrightarrow rv \in M_{\text{tor}} \Longrightarrow v \in M_{\text{tor}} \Longrightarrow [v] = M_{\text{tor}} = [0]$, 与假设矛盾, 故假设错误, 得证. $\square$

定义 6.11 零化子: $v \in M \in R-\text{mod}$, v 的**零化子** $\text{ann}(v) \equiv \{r \in R \mid rv = 0\} \subseteq R$.
N 是 M 的子模, 则 $\text{ann}(N) = \{r \in R \mid rN \equiv \{rv \mid v \in N\} = \{0\}\} \subseteq R$.

$\text{ann}(v)$ 是 R 的理想.

证: $\forall s, t \in \text{ann}(v)$, $sv = tv = 0 \Longrightarrow sv - tv = (s-t)v = 0 \Longrightarrow s - t \in \text{ann}(v)$.
$\forall r \in R$, $(rs)v = r(sv) = r \cdot 0 = 0 \Longrightarrow rs \in \text{ann}(v)$.
综上, 得证. $\square$

同理, $\text{ann}(N)$ 也是 R 的理想

定义 6.12 阶: 若 R 为 PID, 则 $\text{ann}(v), \text{ann}(N)$ 均为主理想, 其生成元分别称为 v 和 N 的**阶**.

定理 6.3 (课本定理6.5): R 为 PID, $M \in R-\text{mod}$ 自由, 则 M 的子模均自由.

证: (不严谨的证明, 仅针对) M 有限生成 (的特殊情况) 且自由.
设 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle = \{\sum_{i=0}^{n} r_i v_i \mid r_i \in R\}$, 其中 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关.
$\forall v \in M$, $v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ 展开唯一, 定序后, $M \longleftrightarrow R^n$, $v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ 模同构.
设 S 是 R^n 的子模, 取 R 的理想 $I_k = \{r_k \in R \mid \exists a_1, \cdots, a_{k-1} \in R, \text{ s.t. } (a_1, \cdots, a_{k-1}, r_k, 0, \cdots, 0) \in S\}$.

$\because R$ 为 PID, $\therefore I_k$ 由一个元素生成, 设 $I_k = \langle r_k \rangle$, 其中 $r_k \neq 0$, $k = 1, \cdots, n$.
取 $u_k = (a_1^k, \cdots, a_{k-1}^k, r_k, 0, \cdots, 0) \in S$, $S = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$ (下证) 且显然 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 线性无关.
取 $(b_1, \cdots, b_n) \in S$, 若 $b_n \neq 0$, 则 $b_n \in I_n = \langle r_n \rangle \Longrightarrow \exists x_n \in R$, s.t. $b_n = x_n r_n \Longrightarrow (b_1, \cdots, b_n) - x_n b_n = (\cdots, 0)$,
重复如上操作, 最终可将 $(b_1, \cdots, b_n)$ 用 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 表示.
故得证. □

定理 6.4 (课本定理6.6): R 为 PID, $M \in R - \text{mod}$ 有限生成, 则 M 自由 $\Longleftrightarrow M$ 无挠.

证: "$\Longrightarrow$": 设 $M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle$ 且 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关.
$\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$.
若 $rv = 0$, 则 $r\left(\sum_{i=1}^n r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n (rr_i) v_i = 0$.
$\because \{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关, $\therefore rr_1 = \cdots = rr_n = 0$.
$\because R$ 为整环 (无零因子), $\therefore$ 若 $r \neq 0$, 则 $r_1 = \cdots = r_n = 0 \Longrightarrow v = 0$, 故 M 无挠.

"$\Longleftarrow$": 设 $M = \langle\langle u_1, \cdots, u_m \rangle\rangle$.
无妨设 $u_1, \cdots, u_k$ 是其中最大的线性无关组, 即 $\forall i = k+1, \cdots, m$, $\{u_1, \cdots, u_k, u_i\}$ 线性相关
$\Longrightarrow \exists$ 不全为零的 $a_{i1}, \cdots, a_{ik}, a_i$, s.t. $a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik}u_k + a_i u_i = 0$.
显然 $a_i \neq 0$ (否则 $a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik}u_k = 0 \Longrightarrow a_{i1} = \cdots = a_{ik} = 0$, 矛盾) $\Longrightarrow a_i u_i = -(a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik}u_k)$.
令 $a = a_{k+1} \cdots a_m$.
$\because R$ 为整环 (无零因子), $\therefore a \neq 0$,
$aM = \langle\langle au_1, \cdots, au_k, au_{k+1}, \cdots, au_m \rangle\rangle \subseteq \langle\langle u_1, \cdots, u_k \rangle\rangle$,
$\because \{u_1, \cdots, u_k\}$ 线性无关, $\therefore \langle\langle u_1, \cdots, u_k \rangle\rangle$ 是自由模.
$\because R$ 为 PID, 自由具有遗传性, $\therefore aM$ 自由.
构造映射 $\tau : M \to aM$, $v \mapsto av$.

(1) τ 线性.

(2) $\because M$ 无挠且 $a \neq 0$, $\therefore \ker\tau = \{v \in M \mid av = 0\} = \{0\}$, 即 τ 单射.

(3) τ 满射.

故 τ 同构 $\Longrightarrow M$ 也自由.

综上, 得证. □

$\because M$ 自由, $\therefore M = \langle\langle v_1, \cdots, v_n \rangle\rangle$ 且 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 线性无关 $\Longrightarrow \langle\langle v_i \rangle\rangle \cap \langle\langle v_j \rangle\rangle = \{0\} \forall i \neq j$
$\Longrightarrow M = \langle\langle v_1 \rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_n \rangle\rangle$.

定理 6.5 (课本定理6.8): R 是 PID, $M \in R - \text{mod}$ 有限生成, 则 $M = M_{\text{free}} \oplus M_{\text{tor}}$, 其中 $M_{\text{free}} \approx \frac{M}{M_{\text{tor}}}$.

证: M_{tor} 为挠子模且 $\frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 无挠.
$\because \Pi : M \to \frac{M}{M_{\text{tor}}}$, $u \to [u]$ 满同态且 M 有限生成, 由引理 6.1 得 $\frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 有限生成.
又 $\because \frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 无挠, $\therefore \frac{M}{M_{\text{tor}}}$ 自由.
取 $\frac{M}{M_{\text{tor}}} = \langle\langle [u_1], \cdots, [u_t] \rangle\rangle$, 其中 $\{[u_1], \cdots, [u_t]\}$ 线性无关. 下证 $\{u_1, \cdots, u_t\}$ 线性无关:

证: 若 $\sum_{i=1}^t r_i u_i = 0$, 则 $\Pi\left(\sum_{i=1}^t r_i u_i\right) = \sum_{i=1}^t r_i \Pi(u_i) = \sum_{i=1}^t r_i [u_i] = [0]$.
又 $\because \{[u_1], \cdots, [u_t]\}$ 线性无关, $\therefore r_1 = \cdots = r_t = 0 \Longrightarrow \{u_1, \cdots, u_t\}$ 线性无关. □

故 $\langle\langle u_1,\cdots,u_t\rangle\rangle$ 为自由模, 记作 M_{free}.

确定了 M_{free} 和 M_{tor} 后, 下面来证 $M=M_{\text{free}}\oplus M_{\text{tor}}$:

$\forall v\in M$, $\Pi(v)=[v]\in\frac{M}{M_{\text{tor}}}=\langle\langle[u_1],\cdots,[u_t]\rangle\rangle\Longrightarrow\Pi(v)=[v]=\sum_{i=1}^{t}l_i[u_i]$.

令 $u=\sum_{i=1}^{t}l_iu_i\in M_{\text{free}}$, 则 $\Pi(u)=\Pi\left(\sum_{i=1}^{t}l_iu_i\right)=\sum_{i=1}^{t}l_i\Pi(u_i)=\sum_{i=1}^{t}l_i[u_i]=\Pi(v)$.

$\Pi(v-u)=\Pi(v)-\Pi(u)=[0]\Longrightarrow v-u\in\ker\Pi=M_{\text{tor}}$.

于是 $v=u+(v-u)$, 其中 $u\in M_{\text{free}}$, $v-u\in M_{\text{tor}}\Longrightarrow M=M_{\text{free}}+M_{\text{tor}}$.

取 $w\in M_{\text{free}}\cap M_{\text{tor}}$, 则 $w\in M_{\text{free}}\Longleftrightarrow w=\sum_{i=1}^{t}\alpha_iu_i$,

且 $w\in M_{\text{tor}}\Longleftrightarrow\Pi(w)=0$

$\Longrightarrow 0=\Pi(w)=\Pi\left(\sum_{i=1}^{t}\alpha_iu_i\right)=\sum_{i=1}^{t}\alpha_t\Pi(u_i)\Longrightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_t=0\Longrightarrow w=0\Longrightarrow M_{\text{free}}\cap M_{\text{tor}}=\{0\}$.

综上, 得证. □

引理 6.1: $\tau:M\to N$ 满同态, 若 M 有限生成, 则 N 有限生成.

证: $\because\tau:M\to N$ 满同态, $\therefore\forall w\in N$, $\exists u\in M$, s.t. $w=\tau(u)$,

又 $\because M$ 有限生成, 设 $M=\langle\langle v_1,\cdots,v_k\rangle\rangle$, $\therefore u=\sum_{i=1}^{k}r_iu_i\Longrightarrow\tau(u)=\tau\left(\sum_{i=1}^{k}r_iu_i\right)=\sum_{i=1}^{k}r_i\tau(u_i)$,

故 $N=\langle\langle\tau(u_1),\cdots,\tau(u_k)\rangle\rangle$, 即 N 有限生成. □

至此, $M_{\text{free}}=\langle\langle u_1,\cdots,u_t\rangle\rangle=\langle\langle u_1\rangle\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\langle u_t\rangle\rangle$ 已拆解到位. 那么能否以及如何继续拆解 M_{tor} 呢?

定理 6.6 (课本定理6.10): R 为 PID, $M\in R-\text{mod}$ 为挠模且 $\text{ann}(M)=\langle\langle\mu\rangle\rangle$, 其中 $\mu=up_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$, u 为单位, p_i 均不可约且互不相等, $e_i\in\mathbb{Z}^+$,
则 $M=M_{p_1}\oplus\cdots\oplus M_{p_m}$, 其中 $M_{p_i}=\{v\in M\mid p_i^{e_i}v=0\}$ 是阶为 $p_i^{e_i}$ (即 $\text{ann}(M_{p_i})=\langle p_i^{e_i}\rangle$) 的准素子模.

证: 不失一般性, 设 $\mu=pq$, 其中 p 与 q 互素, 要证 $M=M_p\oplus M_q$, 其中 $M_p=\{v\mid pv=0\}$, $M_q=\{v\mid qv=0\}$.

$\because p$ 与 q 互素, $\therefore\exists r,t\in R$, s.t. $rp+tq=1$.

$\forall v\in M$, $v=1v=(rp+tq)v=(rp)v+(tq)v$,

$q(rp)v=(qrp)v=(rpq)v=r(pq)v=r\mu v$.

又 $\because\langle\langle\mu\rangle\rangle$ 为零化子, $\therefore q(rpv)=r\mu v=0\Longrightarrow rpv\in M_q$,

同理, $tqv\in M_p$, 故 $M=M_p+M_q$.

若 $v\in M_p\cap M_q$, 则 $v\in M_p\Longleftrightarrow pv=0$,

且 $v\in M_q\Longleftrightarrow qv=0$

$\Longrightarrow v=1v=(rp+tq)v=rpv+tqv=r0+t0=0+0=0\Longrightarrow M_p=M_q=\{0\}$.

$\because M_p=\{v\mid pv=0\}$, $\therefore\text{ann}(M_p)=\langle p\rangle$, 易推广得 $M_{p_i}=\langle p_i^{e_i}\rangle$.

综上, 得证. □

然后准素子模能否及如何进一步分解呢?

定理 6.7 (课本定理6.11): R 为 PID, $M\in R-\text{mod}$ 有限生成且为挠模, $\text{ann}(M)=\langle p^e\rangle$, 其中 p 不可约, $e\in\mathbb{Z}^+$,
则 $M=\langle\langle v_1\rangle\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\langle v_n\rangle\rangle$, 其中 $\text{ann}(v_i)=\langle p^{e_i}\rangle$, 且 $e=e_1\geq\cdots\geq e_n$.

证: (存在性证明) 不失一般性, 只需证 M 由两个元素生成时, 定理成立, 即可由数学归纳法推广到一般情况.

设 $M=\langle\langle u_1,u_2\rangle\rangle$ 且 $u_1,u_2\neq 0$, $\text{ann}(M)=\{r\in R\mid rM=\{0\}\}=\langle p^e\rangle$.

$\because u_1\in M$, $\therefore p^eu_1=0\Longrightarrow p^e\in\text{ann}(u_1)$,

同理, $p^e\in\text{ann}(u_2)$.

若 $\operatorname{ann}(u_1)=\langle b_1\rangle$, 则 $\because p$ 不可约, $\therefore b_1 \mid p^e \Longrightarrow b_1=p^{l_1}$, $l_1\le e$,
同理, 若 $\operatorname{ann}(u_2)=\langle b_2\rangle$, 则 $b_2=p^{l_2}$, $l_2\le e$.
假设 $l_1<e$, $l_2<e$, 令 $l=\max\{l_1,l_2\}$, 则 $p^e\nmid p^l$ 且 $p^l\in\operatorname{ann}(M)$, 与 $\operatorname{ann}(M)=\langle p^e\rangle$ 矛盾, 故假设错误, l_1,l_2 中至少有一个 $=e$.
无妨设 $l_1=e$ 即 $\operatorname{ann}(u_1)=\langle p^e\rangle$.
$M=\langle\langle u_1,u_2\rangle\rangle \Longrightarrow M=\langle\langle u_1\rangle\rangle+\langle\langle u_2\rangle\rangle$,
若 $\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle u_2\rangle\rangle=\{0\}$, 则 $M=\langle\langle u_1\rangle\rangle\oplus\langle\langle u_2\rangle\rangle$, 得证.
若 $\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle u_2\rangle\rangle\ne\{0\}$, 则 $\exists 0\ne r\in R$, s.t. $ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$.
取 R 的理想 $J=\{r\in R\mid ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle\}$.
$\because R$ 为 PID, $\therefore J$ 由一个元素生成, 设 $J=\langle\langle t\rangle\rangle$.
$\because p^e u_2=0$, $\therefore p^e\in J\Longrightarrow t\mid p^e$.
又 $\because p$ 不可约, $\therefore t=p^{e_2}$, 其中 $e_2\le e$.
又 $\because J=\{r\in R\mid ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle\}=\langle\langle t\rangle\rangle$, $\therefore p^{e_2}u_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$, 即 $\exists\alpha\in R$, s.t. $p^{e_2}u_2-\alpha u_1=0$
$\Longrightarrow p^{e-e_2}(p^{e_2}u_2-\alpha u_1)=0\Longrightarrow p^e u_2-p^{e-e_2}\alpha u_1=0$.
又 $\because p^e u_2=0$, $\therefore p^{e-e_2}\alpha u_1=0\Longrightarrow p^{e-e_2}\alpha\in\operatorname{ann}(u_1)$.
又 $\because \operatorname{ann}(u_1)=\langle p^e\rangle$, $\therefore p^e\mid p^{e-e_2}\alpha\Longrightarrow p^{e_2}\mid\alpha\Longrightarrow\exists\beta\in R$, s.t. $\alpha=\beta p^{e_2}$,
回代到 $p^{e_2}u_2-\alpha u_1=0$ 得 $p^{e_2}u_2-p^{e_2}\beta u_1=0\Longrightarrow p^{e_2}(u_2-\beta u_1)=0$.
令 $w=u_2-\beta u_1$, 则 $M=\langle\langle u_1,w\rangle\rangle$, 且 $\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle w\rangle\rangle=\{0\}$ (下证),

证: 设 $v\in\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle w\rangle\rangle$, 则 $v\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$,
且 $v\in\langle\langle w\rangle\rangle\Longrightarrow\exists r\in R$, $v=rw$
$\Longrightarrow v=rw=ru_2-r\beta u_1\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$.
$\because r\beta u_1\in\langle\langle u_1\rangle\rangle$, $\therefore ru_2\in\langle\langle u_1\rangle\rangle\Longrightarrow r\in J\Longrightarrow\exists r_1$, s.t. $r=tr_1=p^{e_2}r_1$,
回代得 $v=rw=p^{e_2}r_1u_2-p^{e_2}r_1\beta u_1=r_1p^{e_2}u_2-r_1(\beta p^{e_2})u_1=r_1(p^{e_2}u_2-\alpha u_1)=r_1\cdot 0=0\Longrightarrow\langle\langle u_1\rangle\rangle\cap\langle\langle w\rangle\rangle=\{0\}$. □

故 $M=\langle\langle u_1\rangle\rangle\oplus\langle\langle w\rangle\rangle$, 其中 u_1 的阶为 p^{e_1}, w 的阶为 p^{e_2}, $e_2\le e_1=e$. □

总结定理 6.5, 6.6 和 6.7, 可得:

定理 6.8 (课本定理6.12): R 为 PID, $M\in R-\mathrm{mod}$ 有限生成,
则 $M=M_{\text{free}}\oplus M_{\text{tor}}$, 其中 $M_{\text{free}}\approx\frac{M}{M_{\text{tor}}}$.
若 $\operatorname{ann}(M_{\text{tor}})=\langle\mu\rangle$, 其中 $\mu=up_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n}$, u 为单位, p_i 不可约且互不相等, $e_i\in\mathbb{Z}^+$,
则 $M_{\text{tor}}=M_{p_1}\oplus\cdots\oplus M_{p_n}$, 其中 $M_{p_i}=\{v\in M_{\text{tor}}\mid p_i(v)=0\}$ 即 $\operatorname{ann}(M_{p_i})=\langle p_i^{e_i}\rangle$,
$M_{p_i}=\langle\langle v_{i1}\rangle\rangle\oplus\cdots\langle\langle v_{it_i}\rangle\rangle$, 其中 $\operatorname{ann}(v_{ij})=\langle p_i^{e_{ij}}\rangle$, $e_i=e_{i1}\ge\cdots\ge e_{it_i}$.

$$\text{故 } M=\overbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\langle\langle u_i\rangle\rangle\right)}^{M_{\text{free}}}\oplus\overbrace{\left[\bigoplus_{i=1}^{n}\overbrace{\left(\bigoplus_{j=1}^{t_i}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle\right)}^{M_{p_i}}\right]}^{M_{\text{tor}}}.$$

由定理 6.7, $M_{\text{tor}} = \bigoplus_{ij}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 其中 $\operatorname{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}\rangle$, $e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$. 这里,

$$\begin{Bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1t_1} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2t_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nt_n} \end{Bmatrix}$$

生成了 M_{tor}, 其阶为

定义 6.13 初等因子: M 的初等因子:

$$\begin{Bmatrix} p_1^{e_{11}} & p_1^{e_{12}} & \cdots & p_1^{e_{1t_1}} \\ p_2^{e_{21}} & p_2^{e_{22}} & \cdots & p_2^{e_{2t_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n^{e_{n1}} & p_n^{e_{n2}} & \cdots & p_n^{e_{nt_n}} \end{Bmatrix}.$$

此外, 还定义了

定义 6.14 不变因子: M 的不变因子:

$$\begin{aligned} q_1 &= \prod_i p_i^{e_{1i}}, \\ q_2 &= \prod_i p_i^{e_{2i}}, \\ &\vdots, \\ q_t &= \prod_i p_i^{e_{ti}}. \end{aligned}$$