Chapter 2

线性变换

2.1 线性变换

定义 2.1 <u>**线性变换**</u>**:** 向量空间之间的线性映射. F 为域, V, W 为 F 上的向量空间, 映射 $\tau : V \to W$, 若 $\tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$, $r, t \in F$, $u, v \in V$, 则称 τ 为 V 到 W 的**线性变换**.
记 $\mathcal{L}(V, W) \equiv \{V$ 到 W 的**线性变换**$\}$, $\mathcal{L}(V) \equiv \mathcal{L}(V, V) = \{V$ 到 V 的线性变换$\} = \{V$ 上的**线性算子**$\}$.

取 $r = 1$, $t = 1$, 则 $\tau(u + v) = \tau(u) + \tau(v)$, 故 τ 是 V 到 W 的群同态, 从而 $\tau(0) = 0$, $\tau(-v) = -\tau(v)$.

定义 2.2 <u>**单线性变换**</u>**:** 单射的线性变换.

定义 2.3 <u>**满线性变换**</u>**:** 满射的线性变换.

定义 2.4 <u>**同构**</u>**:** 双射的线性变换. 若两个向量空间 V, W 之间存在同构, 则称 V 与 W 同构, 记作 $V \approx W$.

取 $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$, $v \overset{\sigma}{\mapsto} \sigma(v)$, 则 $v \overset{\tau+\sigma}{\mapsto} \tau(v) + \sigma(v)$ 也是线性变换, 且 $\tau + \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$.

证: 由映射的像的唯一性, 若 $v = u$, 则 $\tau(v) = \tau(u)$, $\sigma(v) = \sigma(u) \Longrightarrow (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \tau(u) + \sigma(u) = (\tau + \sigma)(u)$, 故 $\tau + \sigma$ 是映射.

$(\tau + \sigma)(ru + tv) = \tau(ru + tv) + \sigma(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) + r\sigma(u) + t\sigma(v) = r[\tau(u) + \sigma(u)] + t[\tau(v) + \sigma(v)] = r(\tau + \sigma)(u) + t(\tau + \sigma)(v)$, 故 $\tau + \sigma$ 为 V 到 W 的线性变换. $\square$

由此定义了线性变换之间的加法.
$(\mathcal{L}(V, W), +)$ 为交换群.

证: $(\mathcal{L}(V, W), +)$ 满足

(1) **结合律**: $\forall v \in V$, $[(\tau + \sigma) + \delta](v) = (\tau + \sigma)(v) + \delta(v) = \tau(v) + \sigma(v) + \delta(v) = \tau(v) + (\sigma(v) + \delta(v)) = \tau(v) + (\sigma + \delta)(v) = [\tau + (\sigma + \delta)](v) \Longrightarrow (\tau + \sigma) + \delta = \tau + (\sigma + \delta)$,

(2) **有单位元** 0: 零映射 $0(v) = 0$, $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W)$, $(0 + \tau)(v) = 0(v) + \tau(v) = 0 + \tau(v) = \tau(v) + 0 = \tau(v) + 0(v) = (\tau + 0)(v)$,

(3) **有逆元**: $\forall \tau \in \mathcal{L}(V,W)$, $\exists -\tau \in \mathcal{L})(V,W)$, s.t. $(-\tau)(v) = -\tau(v) \Longrightarrow [\tau + (-\tau)](v) = \tau(v) - \tau(v) = 0 = 0(v)$,

(4) **交换律**: $\forall v \in V$, $(\tau+\sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \sigma(v) + \tau(v) = (\sigma+\tau)(v)$,

故 $\mathcal{L}(V,W)$ 为交换群. □

$\forall r \in F$, $\forall v \in \mathcal{L}(V,W)$, $v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$, 则 $v \overset{r\tau}{\mapsto} r\tau(v)$ 是线性变换, 且 $r\tau \in \mathcal{L}(V,W)$.

证: 由映射的像的唯一性, $\because v \overset{\tau}{\mapsto} \tau(v)$ 是唯一的, $\therefore v \overset{r\tau}{\mapsto} r\tau(v)$ 是唯一的, 故 $r\tau$ 是映射.
$(r\tau)(sv+tu) = r[s\tau(v) + t\tau(u)] = s(r\tau)(v) + t(r\tau)(v) \Longrightarrow r\tau \in \mathcal{L}(V,W)$. □

$\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V,W),+)$ 为交换群, 且其满足

(1) $\forall v \in V$, $[(r+t)\tau](v) = (r+t)\tau(v) = r\tau(v) + t\tau(v) = (r\tau + t\tau)(v) \Longrightarrow (r+t)\tau = r\tau + t\tau$,

(2) $\forall v \in V$, $[(rt)\tau](v) = (rt)\tau(v) = r[t\tau(v)] = [r(t\tau)](v) \Longrightarrow (rt)\tau = r(t\tau)$,

(3) $\forall v \in V$, $[r(\tau+\sigma)](v) = r(\tau+\sigma)(v) = r[\tau(v)+\sigma(v)] = r\tau(v) + r\sigma(v) = (r\tau + r\sigma)(v) \Longrightarrow r(\tau+\sigma) = r\tau + r\sigma$,

(4) $\exists$ 恒等映射 $1: \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(V,W)$, $\tau \overset{1}{\mapsto} \tau$, s.t. $\forall v \in V$, $(1\tau)(v) = 1[\tau(v)] = \tau(v) \Longrightarrow 1\tau = \tau$,

故得证. □

定理 2.1 (课本定理2.1): (1) $\mathcal{L}(V,W)$ 是 F 上的向量空间.

(2) $\tau \in \mathcal{L}(V,W)$, $\sigma \in \mathcal{L}(W,U)$, 则 $\sigma \circ \tau \in \mathcal{L}(V,U)$.

(3) τ 是 V 到 W 的同构, 则 $\tau^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$.

(4) $\mathcal{L}(V)$ 既是向量空间, 也是环, 且两者的加法运算是相同的, 故 $\mathcal{L}(V)$ 是**代数**.

$\mathcal{L}(V)$ 是环.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V),+)$ 为交换群, 且满足

(1) **结合律**: $\because$ 映射的复合有结合律, $\therefore \mathcal{L}(V)$ 中元素的复合有结合律,

(2) **左右分配律**: $\forall v \in V$, $[(\sigma+\tau)\delta](v) = (\sigma+\tau)[\delta(v)] = \sigma[\delta(v)] + \tau[\delta(v)] = (\sigma\delta)(v) + (\tau\delta)(v) \Longrightarrow (\sigma+\tau)\delta = \sigma\delta + \tau\delta$,
$[\sigma(\tau+\delta)](v) = \sigma[(\tau+\delta)(v)] = \sigma[\tau(v)+\delta(v)] = \sigma[\tau(v)] + \sigma[\delta(v)] = \sigma\tau(v) + \sigma\delta(v) \Longrightarrow \sigma(\tau+\delta) = \sigma\tau + \sigma\delta$,

故得证. □

定义 2.5 核空间: $\ker\tau \equiv \{v \mid \tau(v) = 0\} \subseteq V$.

定义 2.6 像空间: $\operatorname{Im}\tau \equiv \{\tau(v) \mid v \in V\}$.

定理 2.2 (课本定理2.3): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 则

(1) τ 满线性变换 $\iff \operatorname{Im} \tau = W$.

(2) τ 单线性变换 $\iff \ker \tau = \{0\}$.

定理 2.3 (课本定理2.2): $\mathcal{B}$ 是 V 的基, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 则 τ 可由 τ 在 $\mathcal{B}$ 上的像唯一确定.

证: 已知 $\tau(b_i) \forall b_i \in \mathcal{B}$.
$\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i$, $r_i \in F$, $b_i \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}^+ \Longrightarrow \tau(v) = \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(b_i)$. □

同构的向量空间有很多性质可以相互传递, 下面我们就来讨论这件事.

定理 2.4 (课本定理2.4): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ 同构, S 是 V 真子集, 则

(1) $V = \langle S \rangle \iff W = \langle \tau(S) \rangle$.

(2) S 线性无关 $\iff \tau(S)$ 线性无关.

(3) S 是 V 的基 $\iff \tau(S)$ 是 V 的基.

证: (1) "$\Longrightarrow$": $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore \forall v \in V$, $v = \sum_i r_i s_i$.
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall w \in W$, $\exists v = \tau^{-1}(w) \in V$, s.t. $w = \tau(v) \Longrightarrow \tau(v) = \tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i)$.

"$\Longleftarrow$": $\because W = \langle \tau(S) \rangle$, $\therefore \forall w \in W$, $w = \sum_i r_i \tau(s_i)$.
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall v \in W$, $\exists w = \tau(v) \in W$, s.t. $v = \tau^{-1}(w) = \tau^{-1}\left(\sum_i r_i \tau(s_i)\right) = \sum_i r_i \tau^{-1}(\tau(s_i)) = \sum_i r_i \tau(s_i)$.

综上, (1) 得证.

(2) "$\Longrightarrow$": 假设 $\sum_i r_i \tau(s_i) = 0$, 则 $\tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = 0$.
又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \ker \tau = \{0\} \Longrightarrow \sum_i r_i s_i = 0$.
又 $\because S$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \Longrightarrow \tau(S)$ 线性无关.

"$\Longleftarrow$": 假设 $\sum_i r_i s_i = 0$, 则 $\tau\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i \tau(s_i) = 0$.
又 $\because \tau(S)$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \Longrightarrow S$ 线性无关.

综上, (2) 得证.

(3) $\Longleftarrow$(1), (2).

□

定理 2.5 (课本定理2.6): $V \approx W \iff \dim V = \dim W$.

定理 2.6 (课本定理2.7): 若 $\dim V = n$, 则 $V \approx F^n$.

定理 2.7 (课本定理2.8): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 则

(1) $(\ker \tau)^c \approx \operatorname{Im} \tau$.

(2) $\dim V = \dim \ker \tau + \dim \operatorname{Im} \tau \equiv \operatorname{null} \tau + \operatorname{rk} \tau$, 其中称 $\operatorname{null} \tau \equiv \dim \ker \tau$ 为 τ 的**零度**, $\operatorname{rk} \tau \equiv \dim \operatorname{Im} \tau$ 为 τ 的**秩**.

证: (1) 设映射 $\tau^c : \ker(\tau)^c \to \operatorname{Im} \tau$, $u \mapsto \tau(u)$.

先证 τ^c 是单射: $\ker(\tau^c) = \ker(\tau) \cap \ker(\tau)^c$ (即 $\ker(\tau^c)$ 中的元素同时满足 $\ker(\tau)$ 的条件, 且在定义域 $\ker(\tau)^c$ 中).

$\because V = \ker(\tau) \oplus \ker(\tau)^c$, $\therefore \ker(\tau) \cap \ker(\tau)^c = \{0\} \Longrightarrow \ker(\tau^c) = \{0\}$, 故 τ^c 单射.

再证 τ^c 是满射: 一方面, $\operatorname{Im}(\tau^c) \subseteq \operatorname{Im}(\tau)$;

另一方面, $\forall v \in V$, $v = u + w$, 其中 $u \in \ker(\tau)$, $w \in \ker(\tau)^c \Longrightarrow \tau(v) = \tau(u+w) = \tau(u) + \tau(w) = 0 + \tau(w) = \tau(w) \in \operatorname{Im}(\tau^c) \Longrightarrow \operatorname{Im}(\tau) \subseteq \operatorname{Im}(\tau^c)$.

故 $\operatorname{Im}(\tau^c) = \operatorname{Im}(\tau)$, 即 τ^c 满射.

综上, (1) 得证.

(2) $\dim V = \dim \ker(\tau) + \dim \ker(\tau)^c = \dim \ker(\tau) + \dim \operatorname{Im}(\tau)$.

□

x 为 n 维向量, $\operatorname{null} A = \dim\{x \mid Ax = 0\} = n - \operatorname{rk} A$.

2.2 线性变换的表示

“表示”其实就是用已知的东西展现未知的东西, 在这里, 我们用已知的矩阵乘法展现未知的线性变换, 这就是线性变换的表示.

F 为域, $F^n = \{(r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1, \cdots, r_n) + (l_1, \cdots, l_n) = (r_1 + l_1, \cdots, r_n + l_n)$ 及 $r(r_1, \cdots, r_n) = (rr_1, \cdots, rr_n)$, $\dim F^n = n$, F^n 的标准基为 $\{e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)\}$; $F^m = \{(r_1, \cdots, r_m) \mid r_i \in F\}$, $\dim F = m$, 标准基为 $\{f_1 = (1, 0, \cdots, 0), f_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, f_m = (0, 0, \cdots, 1)\}$. 如何确定/展现 F^n 到 F^m 的线性变换?

根据定理 2.3, 我们只需确定一组基在线性变换下的表现, 就可以确定这一线性变换. 因此, $\forall \tau \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$, 若 $\tau(e_i) = (a_{1i}, \cdots, a_{mi}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j$.
$\forall (r_1, \cdots, r_n) \in F^n$,

$$\begin{aligned}
\tau((r_1, \cdots, r_n)) =& \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(e_i) = \sum_{i=1}^n r_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{ji}\right) f_j = \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{1i}, \cdots, \sum_{i=1}^n r_i a_{mi}\right) \\
=& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = M_\tau \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

其中 $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$.
故 $\forall \vec{r} \in F^n$, $\tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r}$.

综上:

$$\boxed{\mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m\times n}(F), \quad \tau \mapsto M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_2) \end{pmatrix}}.$$

$f : \mathcal{L}(F^n, F^m) \to M_{m\times n}(F)$, $\tau \mapsto M_\tau$ 是线性变换.

证: 由上述的 M_τ 构造过程知, 给定 τ, $f(\tau) = M_\tau$ 是唯一的, 故 f 是映射.

$$\begin{aligned} f(r\tau + t\sigma) =& M_{r\tau+t\sigma} = \begin{pmatrix} (r\tau + t\sigma)(e_1) & \cdots & (r\tau + t\sigma)(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\tau(e_1) + t\sigma(e_1) & \cdots & r\tau(e_n) + t\sigma(e_n) \end{pmatrix} \\ =& r \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sigma(e_1) & \cdots & \sigma(e_n) \end{pmatrix} = rM_\tau + tM_\sigma = rf(\tau) + tf(\sigma). \end{aligned}$$

故 f 是线性的.

综上, f 为线性变换. □

f 单射.

证: $\ker f \equiv \{\tau \mid f(\tau) = 0\} = \{\tau \mid M_\tau = 0\} \Longrightarrow \forall \tau \in \ker f$, $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = 0_{m\times n}$
$\Longrightarrow \forall v \in V$, $\tau(v) = M_\tau v = 0 \Longrightarrow \tau = 0$.
故 $\ker f = \{0\}$ (这里的"0"代表的是零变换) $\Longleftrightarrow f$ 单射. □

f 满射.

证: $\forall A \in M_{m\times n}(F)$, 可由 $\begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = M_\tau = A$ 构造 τ, 从而 f 满射. □

综上, f 同构.

取 V 的基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, 则 $\forall v \in V$, $v = \sum_i r_i b_i$.

当 $\mathcal{B}$ 定序, $\phi_\mathcal{B} : V \to F^n$, $v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \equiv [v]_\mathcal{B}$ 是一个映射.

证: 由于 $\mathcal{B}$ 是 V 的基, 展开式 $v = \sum_i r_i b_i$ 唯一确定.

又 $\because \mathcal{B}$ 定序, $\therefore$ 映射 $v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ 唯一确定, 故 $\phi_\mathcal{B}$ 为映射.

$\forall u, v \in V$, $u = \sum_{i=1}^n w_i b_i$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i$,

$$\begin{aligned} \phi_\mathcal{B}(r\vec{u} + t\vec{v}) =& \phi_\mathcal{B}\left(r \left(\sum_{i=1}^n w_i b_i \right) + t \left(\sum_{i=1}^n r_i b_i \right) \right) = \phi_\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n (rw_i + tr_i) b_i \right) = \begin{pmatrix} rw_1 + tr_1 \\ \vdots \\ rw_n + tr_n \end{pmatrix} \\ =& r \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = r\phi_\mathcal{B}(\vec{u}) + t\phi_\mathcal{B}(\vec{v}), \end{aligned}$$

故 ϕ_B 为 V 到 F^n 的线性变换. □

$\phi_\mathcal{B}$ 单射.

证: $\ker\phi_{\mathcal{B}} = \{v \mid \phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

$\phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} 0b_i = 0$.

故 $\ker\phi_{\mathcal{B}} = \{0\} \Longleftrightarrow \phi_{\mathcal{B}}$ 单射. □

$\phi_{\mathcal{B}}$ 满射.

证: $\forall \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in F^n$, $\exists v = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i \in V$, s.t. $\phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, 故 $\phi_{\mathcal{B}}$ 满射. □

综上, $\phi_{\mathcal{B}}$ 同构.

$\dim V = n$, 取 V 的一组定序基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, 另一组定序基 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_n\}$, 向量 v 在 $\mathcal{B}$ 下的坐标表示为 $[v]_{\mathcal{B}}$, 在 $\mathcal{C}$ 下的坐标表示为 $[v]_{\mathcal{C}}$, τ 将 $[v]_{\mathcal{B}}$ 转换为 $[\tau]_{\mathcal{C}}$, 映射关系如以下的交换图所示. 如何表示映射 τ?

$$
\begin{tikzcd}
 & & v \arrow[dddll, mapsto] \arrow[dddrr, mapsto] & & \\
 & & V \arrow[dl, "\phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{C}}"] & & \\
 & F^n \arrow[rr, "\tau = \phi_{\mathcal{C}} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & & F^n & \\
{[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrrr, mapsto] & & & & {[v]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}
$$

$[v]_{\mathcal{C}} = \tau([v]_{\mathcal{B}}) = M_\tau[v]_{\mathcal{B}}$, 其中 $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$.

$\tau : F^n \to F^n, \quad e_i \mapsto \tau(e_i) = \phi_{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)) = \phi_{\mathcal{C}}(b_i)$

$\Longrightarrow M_\tau = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathcal{BC}}$.

定理 2.8 (课本定理2.12):

$$\boxed{[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{B}}}$$

其中 $[v]_{\mathcal{B}}$ 和 $[v]_{\mathcal{C}}$ 分别是向量 v 在基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 表象下的坐标表示, $M_{\mathcal{BC}}$ 是在两种坐标表示之间线性变换对应的矩阵.

$\dim V = n$, $\dim W = n$, 故 $V \approx W \approx F^n$, 取 V 的一组定序基 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, W 的一组定序基 $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_n\}$, τ 为 V 到 W 的线性变换, 映射关系如下所示. 如何表示 τ?

$$
\begin{tikzcd}
b_i \arrow[rrrrr, mapsto] \arrow[ddddd, mapsto] & & & & & \tau(b_i) \arrow[ddddd, mapsto] \\
& v \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \tau(v) \arrow[ddd, mapsto] & \\
& & V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] & & \\
& & F^n \arrow[r, "\tau_A = \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & F^n & & \\
& {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrr, mapsto] & & & \tau([v]_{\mathcal{B}}) = [v]_{\mathcal{C}} & \\
e_i \arrow[rrrrr, mapsto] & & & & & \tau_A(e_i) = [\tau(b_i)]_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\tau_A} &= \begin{pmatrix} \tau_A(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) & \cdots & \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau(b_1) & \cdots & \phi_{\mathcal{C}} \circ \tau(b_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.
\end{aligned}
$$

定理 2.9 (课本定理2.14):

$$\boxed{[\tau(v)]_{\mathcal{C}} = [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}}}$$

其中 $[\tau(v)]_{\mathcal{C}}$ 是 $\tau(v)$ 在基 $\mathcal{C}$ 表象下的坐标表示, $[v]_{\mathcal{B}}$ 是 v 在基 $\mathcal{B}$ 表象下的坐标表示, $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ 是从基 $\mathcal{B}$ 表象到基 $\mathcal{C}$ 表象的线性变换的矩阵表示.

定理 2.10 (课本定理2.15): $\mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m\times n}(F)$, $\tau \mapsto \tau_A \mapsto [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

若我们改变 V 和 W 的基, 那么映射所联系的向量的坐标会如何?

$$
\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "\tau'_A"] & F^n \\
V \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] \\
F^n \arrow[r, "\tau_A"] & F^n
\end{tikzcd}
$$

$\tau'_A = \phi'_{\mathcal{C}}\phi_{\mathcal{C}}^{-1}\tau_A\phi_{\mathcal{B}}\phi'^{-1}_{\mathcal{B}}$.

定理 2.11 (课本定理2.16):

$$\boxed{[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}}$$

其中 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$ 分别是线性变换 τ 在基 $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ 和 $(\mathcal{B}',\mathcal{C}')$ 下的表示, 矩阵 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 和 $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ 分别对应了从基 $\mathcal{B}$ 到基 $\mathcal{B}'$ 和从基 $\mathcal{C}$ 到基 $\mathcal{C}'$ 的变换矩阵.

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆.

证: 设 $\phi_{\mathcal{B}} : V \to F^n$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $\phi_{\mathcal{B}'} : V \to F^n$, $v = \sum_{i=1}^n r_i' b_i' \mapsto [v]_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} r_1' \\ \vdots \\ r_n' \end{pmatrix}$, 即

$$\begin{tikzcd}
 & & v \arrow[dddll, mapsto] \arrow[dddrr, mapsto] & & \\
 & & V \arrow[dl, "\phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{B}'}"] & & \\
 & F^n \arrow[rr, "\tau"] & & F^n & \\
 {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[rrrr, mapsto] & & & & {[v]_{\mathcal{B}'}}
\end{tikzcd}$$

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_\tau = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$, s.t. $[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}$.
同理可构造 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [b_1']_{\mathcal{B}} & \cdots & [b_n']_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$, s.t. $[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'}$.
$\forall [v]_{\mathcal{B}} \in F^n$, $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}} \Longrightarrow M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = n \times n$ 维的单位矩阵, 即 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 是 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 的逆, 故 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆. □

定理 2.12 (课本定理2.18): $B = PAQ$, 其中 P 和 Q 可逆, 则 B 与 A **等价**.

定理 2.13 (课本定理2.19): $B = PAP^{-1}$, 其中 P 可逆, 则 B 与 A **相似**.

(因为 B 和 A 是同一线性算子在两组不同的基下的表示.)