

Chapter 12

度量空间

定义 12.1 度量和度量空间: 对集合 M , 映射 $d(,): M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

正定: $d(u, v) \geq 0$, 且 $d(u, v) = 0 \iff u = v$.

(2) 对称: $d(u, v) = d(v, u)$.

(3) 三角不等式: $d(u, v) \leq d(u, v) + d(u, v)$.

则称 d 为 M 上的一个度量, 称 (M, d) 为度量空间.

对任一集合均可定义度量, 如 $d(u, v) = \begin{cases} 1, & u \neq v, \\ 0, & u = v, \end{cases}$ 且度量不唯一.

定义 12.2 子度量空间: 度量空间的非空子集.

12.1 开集和闭集

对度量空间 (M, d) , $x_0 \in M$, $r > 0$, 可定义:

定义 12.3 开球: $B(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) < r\}$.

定义 12.4 闭球: $\bar{B}(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) \leq r\}$.

定义 12.5 球面: $S(x_0, r) \equiv \{y \in M \mid d(y, x_0) = r\}$.

定义 12.6 开集: $S \subseteq M$, $\forall x_0 \in S$, $\exists r > 0$, s.t. $B(x_0, r) \subseteq S$, 则称 S 为开集.

定义 12.7 闭集: $T \subseteq M$, $T^c = M \setminus T$ 是开集, 则 T 为闭集.

定义 12.8 开邻域: 包含 x_0 的任何开集称 x_0 的开邻域.

例 12.1: 设 \mathbb{R} 上的度量 $d(r, t) = |r - t|$, 对点 x_0 ,

$$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r),$$

$$\bar{B}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r],$$

$$S(x_0, r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}.$$

开区间 (a, b) 为开集.

证: $\forall x \in (a, b)$, 取 $r = \frac{1}{2} \min\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\} > 0$,

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a, b). \quad \square$$

闭区间 $[a, b]$ 为闭集.

$(a, b]$ 既非开集也非闭集. \square

定理 12.1 (课本定理12.1): $\mathcal{O} = \{M \text{ 上的开集}\}$, 则

(1) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.

(2) 有限个开集的并仍为开集: $S, T \in \mathcal{O}$, 则 $S \cap T \in \mathcal{O}$.

(3) $S_i \in \mathcal{O}$, 则 $\cup_{i \in K} S_i \in \mathcal{O}$ (S_i 可以是无限个).

证: (1) 显然.

(2) $x_0 \in S \cap T \iff x_0 \in S, x_0 \in T$,

$\because S$ 为开集, $\therefore \exists r_1 > 0$, s.t. $B(x_0, r) \subseteq S$,

$\because T$ 为开集, $\therefore \exists r_2 > 0$, s.t. $B(x_0, r) \subseteq T$.

令 $r = \min\{r_1, r_2\}$, 则 $B(x_0, r) \subseteq S$ 且 $B(x_0, r) \subseteq T \implies B(x_0, r) \subseteq S \cap T \implies S \cap T$ 开, 即 $S \cap T \in \mathcal{O}$.

(3) $x_0 \in \cup_i S_i \iff \exists i$, s.t. $x_0 \in S_i$,

$\because S_i$ 为开集, $\therefore \exists r > 0$, s.t. $B(x_0, r) \subseteq S_i \subseteq \cup_i S_i \implies \cup_i S_i$ 开, 即 $\cup_i S_i \in \mathcal{O}$. \square

例 12.2 无穷多个开集的交未必开: $S_i = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

$$\cap_i S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \{0\} \text{ 闭}. \quad \square$$

单点集为闭集.

证: 单点集 $S = \{a\}$, 补集 $S^c = M \setminus \{a\}$.

$\forall x \in S^c$, 则 $x \neq a$, $d(x, a) > 0$, 取 $r = \frac{1}{2}d(x, a)$.

取 $r = \frac{1}{2}d(x, a)$, $a \notin B(x, r) \implies B(x, r) \subseteq S^c \implies S^c$ 开, 故 S 闭. \square

有限点集为闭集.

证: 有限点集 $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, 补集 $S^c = M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

$\forall x \in S^c$, 则 $x \neq a_1, \dots, a_n \implies \forall i, d(x, a_i) > 0$.

取 $r = \frac{1}{2} \min_i \{d(x, a_i)\}$, 则 $\forall a_i, a_i \notin B(x, r) \implies S^c$ 开, 故 S 闭. \square

定义 12.9 拓扑和拓扑空间: 集合 $X \neq \emptyset$, \mathcal{O} 是 X 的一些子集构成的簇^a, 若

$$\emptyset, X \in \mathcal{O},$$

$$(2) S, T \in \mathcal{O}, \text{ 则 } S \cap T \in \mathcal{O},$$

$$(3) \{S_i \in \mathcal{O} \mid i \in K\}, \text{ 则 } \bigcup_{i \in K} S_i \in \mathcal{O},$$

则称 \mathcal{O} 是 X 上的一个拓扑, 称 (X, \mathcal{O}) 为拓扑空间, 称 \mathcal{O} 中的集合为 X 上的开集.

^a可理解为“集合的集合”, 此处为避免逻辑循环, 故名之

故确定开集 \iff 确定拓扑.

12.2 度量空间的收敛性

定义 12.10 收敛和极限: 集合 M 中序列 (x_n) , $x \in M$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, 则称序列 (x_n) 收敛于 x , 记作 $x_n \rightarrow x$, 称 x 为序列 (x_n) 的极限.

例 12.3: (r_n) 为 \mathbb{R} 上的序列, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, 即 $x_n \rightarrow x$, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \epsilon \iff x_n \in B(x, \epsilon)$. □

收敛的性质:

- (1) $\forall r > 0, B(x, r)$ 中包含 (x_n) 中无穷个元素.
- (2) 有限点列非序列, 无需考虑极限.
- (3) 常序列收敛, $(x_n = x_0) \rightarrow x_0$.
- (4) 对给定序列, 若 \exists 极限, 则极限唯一.

定理 12.2 (课本定理12.2): 闭集关于收敛封闭. S 闭 $\iff S$ 中序列 $(x_n) \rightarrow x \in M$, 则 $x \in S$.

证: “ \implies ”: 取 S 中序列 (x_n) 且 $(x_n) \rightarrow x \in M$.

假设 $x \notin S$, 则 $x \in S^c = M \setminus S$.

$\because S$ 闭, $\therefore S^c$ 开 $\implies \exists r > 0$, s.t. $B(x, r) \subseteq S^c$, 即 $B(x, r) \cap S = \emptyset$, 故 S 中序列 $(x_n) \notin B(x, r)$.

又 $\because x_n \rightarrow x$, $\therefore \exists N_r > 0$, s.t. 当 $n > N_r$ 时, $x_n \in B(x, r)$, 矛盾, 故假设错误, $x \in S$.

“ \impliedby ”: 假设 S 非闭, 则 S^c 非开 $\implies \exists x_0 \in S^c$, s.t. $\forall r > 0, B(x_0, r) \not\subseteq S^c$.

特别地, 令 $r = 1$, 则 $\exists x_1 \in B(x_0, 1) \implies x_1 \notin S^c$, 即 $x_1 \in S$,

\dots ,

令 $r = \frac{1}{n}$, 则 $\exists x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$, $x_n \notin S^c$, 即 $x_n \in S$,

$\dots \implies x_n \rightarrow x$.

但 $\because (x_n) \in S$, \therefore 由题设, $x \in S$, 矛盾, 故假设错误, S 闭.

综上, 得证. □

12.3 集合的闭包

定义 12.11 闭包: $S \subseteq M$, 称包含 S 的最小闭集或包含 S 的所有闭集的交为 S 的闭包, 记作 $\text{cl}(S)$.

给定 S , 闭包必 \exists .

定义 12.12 极限点(/聚点): $\emptyset \neq S \subseteq M, x \in M$, 若 $\forall r > 0, B(x, r) \cap S$ 包含异于 x 的点, 则称 x 为 S 的极限点或聚点, S 对应的极限点的集合记作 $l(S)$.

例 12.4: $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, 则 $l((a, b)) = [a, b]$.

$c \notin [a, b], S = (a, b) \cup \{c\}$, 则 $l(S) = [a, b]$. □

定理 12.3 (课本定理12.3): (1) $x \in l(S) \iff \exists$ 序列 $(x_n) \in S$, s.t. $\forall n, x_n \neq x$ 且 $x_n \rightarrow x$.

(2) S 闭 $\iff l(S) \subseteq S$.

(3) $\text{cl}(S) = S \cup l(S)$.

证: (1) “ \implies ”: $\because x \in l(S), \therefore \exists x_n \neq x$, s.t. $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S$
 $\implies d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, 故 $\exists (x_n) \in S$, s.t. $\forall n, x_n \neq x, x_n \rightarrow x$.

“ \impliedby ”: 设 $(x_n) \rightarrow x$ 且 $x \neq x_n \in S$.

$\forall r > 0, \exists N$, s.t. 当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x, r)$, 即 $\exists x \neq x_n$, s.t. $x_n \in B(x, r) \cap S$.

综上, 得证.

(2) “ \implies ”: 设 $x \in l(S)$, 则由 (1) 得, $\exists (x_n) \in S$, s.t. $\forall n, x_n \neq x$ 且 $x_n \rightarrow x$.

又 $\because S$ 闭, $\therefore x \in S \implies l(S) \subseteq S$.

“ \impliedby ”: $\forall S$ 中序列 $(x_n) \rightarrow x, \exists n$, s.t. $x_n = x$, 则 $x = x_n \in S$,

或 $\forall n, x_n \neq x$, 由 (1) 得 $x \in l(S) \subseteq S$, 故 S 闭.

综上, 得证.

(3) 显然 $S \subseteq S \cup l(S) \equiv T$.

设 $x \in l(T)$, 则由 (1) 得, \exists 序列 $(x_n) \in T$, s.t. $x_n \neq x$ 且 $x_n \rightarrow x$.

假设 $x \notin S$ 且 $x \notin l(S)$, 则 $\because x \notin l(S), \therefore \exists r > 0, B(x, r) \cap S = \emptyset$.

但 $\because (x_n) \rightarrow x, \therefore \exists x_n \in B(x, r) \implies x_n \neq S$.

又 $\because x_n \in T \equiv S \cup l(S), \therefore x_n \in l(S)$.

取 x_n , s.t. $d(x_n, x) < r$, 则 $B(x_n, \frac{r-d(x_n, x)}{2}) \subseteq B(x, r)$,

且 $\because x_n \in l(S), \therefore \exists y \in S \cap B(x_n, \frac{r-d(x_n, x)}{2}) \subseteq S \cap B(x, r)$, 与 $B(x, r) \cap S = \emptyset$ 矛盾, 故假设错误, $x \in S$ 或 $x \in l(S)$, 即 $x \in T \equiv S \cup l(S) \implies T$ 闭.

又 $\because S \subseteq T, \therefore \text{cl}(S) \subseteq T$.

另一方面, 由闭包定义, $S \in \text{cl}(S)$.

假设 $l(S) \not\subseteq \text{cl}(S)$, 即 $\exists x \in l(S)$ 且 $x \notin \text{cl}(S)$, 则 $\forall r > 0, B(x, r) \cap S \neq \emptyset$,

且 \exists 闭集 S' , s.t. $x \notin S'$ 即 $x \in (S')^c$,

$\because S'$ 闭 $\implies (S')^c$ 开, $\therefore \exists r > 0$, s.t. $B(x, r) \subseteq (S')^c$, 与 $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$ 矛盾, 故假设错误, $l(S) \subseteq \text{cl}(S) \implies T \equiv S \cup l(S) \subseteq \text{cl}(S)$.

综上, 得证. □

12.4 稠密子集

定义 12.13 稠密子集: $S \subseteq M$, 若 $\text{cl}(S) = M$, 则称 S 为 M 的稠密子集.

若 S 为 M 的稠密子集, 则 $M = \text{cl}(S) = S \cup I(S)$, 这意味着 M 中任一点均可由 S 中的某一序列逼近.

例 12.5: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{无理数}$. \forall 无理数 r , \exists 有理数序列 $(r_n) \rightarrow r$, $\therefore \mathbb{Q}$ 为 \mathbb{R} 的稠密子集.

同理, 无理数也为 \mathbb{R} 的稠密子集.

实际上, \mathbb{Q} 在 $[0, 1]$ 上的测度 $= 0$, 即无理数远多于有理数. □

12.5 连续

定义 12.14 连续和不连续: 度量空间 (M, d) 和 (M', d') , 映射 $f: M \rightarrow M'$, $x_0 \in M$, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$, 即 $d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续, 若 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq B(f(x_0), \epsilon_0)$, 则称 f 在 x_0 处不连续.

定理 12.4 连续的判定(课本定理12.4): $f: M \rightarrow M'$ 连续 \iff 若 M 中序列 (x_n) 收敛于 x , 则 $(f(x_n)) \rightarrow f(x)$ (即 f 保持收敛性不变).

证: “ \implies ”: $\because f$ 连续, $\therefore \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$.

$\because (x_n) \rightarrow x, \therefore \forall \delta > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \delta$

$\implies d(f(x_n), f(x)) < \epsilon$, 故 $(f(x_n)) \rightarrow f(x)$.

“ \impliedby ”: 假设 f 在 $x \in M$ 处不连续, 则 $\exists \epsilon_0 > 0$, s.t. $\forall \delta > 0, f(B(x, \delta)) \not\subseteq B(f(x), \epsilon_0)$.

取 $\delta = 1, f(B(x, \delta)) \not\subseteq B(f(x), \epsilon_0)$,

...

取 $\delta = \frac{1}{2}, \exists x_n \in B(x, \frac{1}{2}), \text{ s.t. } f(x_n) \notin B(f(x), \epsilon_0)$,

..., 则序列 $(x_n) \rightarrow x$, 但 $d(f(x_n), f(x)) > \epsilon_0$

$\implies f(x)$ 不收敛至 $f(x)$, 与题设矛盾, 故假设错误, f 在 x_0 处连续.

综上, 得证. □

定理 12.5 (课本定理12.5): 若 $(x_n) \rightarrow x, (y_n) \rightarrow y$, 则 $(d(x_n, y_n)) \rightarrow d(x, y)$.

证: $\forall \epsilon, \because (x_n) \rightarrow x, \therefore \exists N_1 > 0$, s.t. 当 $n > N_1$ 时, $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$,

$\because (y_n) \rightarrow y, \therefore \exists N_2 > 0$, s.t. 当 $n > N_2$ 时, $d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{2}$,

$\implies \exists N = \max\{N_1, N_2\}$, s.t. 当 $n > N$ 时, $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| = |d(x_n, y_n) - d(x, y_n) + d(x, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x, y_n)| + |d(x, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \epsilon$, 故得证. □

推论: $(d(x_n, y)) \rightarrow d(x_0, y)$, 即 $d(\cdot, y): M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, y)$ 为 M 到 \mathbb{R} 的连续映射.

同理, $d(\cdot, \cdot): M \times M \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$ 亦为连续映射.

定义 12.15 柯西序列: (x_n) 为 M 中序列, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, $d(x_n, x_m) < \epsilon$, 则称 (x_n) 为柯西序列.

收敛 \implies 柯西, 反之不真.

证: 设 $(x_n) \rightarrow x$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$, $\exists N_2 > 0$, s.t. 当 $m > N_2$ 时, $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2} \implies \exists N = \max\{N_1, N_2\}$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$, 故 x_n 柯西. \square

例 12.6 不收敛的柯西序列(课本例12.12): $C[0, 1] \equiv \{[0, 1] \text{ 区间上的连续函数}\}$.

$f(x), g(x) \in C[0, 1]$, 度量 $d(f(x), g(x)) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$.

令 $f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases}$ 则 $(f_n(x)) \rightarrow \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ 不连续, 故 $(f_n(x))$ 柯西但在 $C[0, 1]$ 上不收敛 (极限在 $C[0, 1]$ 外). \square

12.6 完备

定义 12.16 完备: 称柯西序列均收敛的空间为完备的.

定义 12.17 完备子集: S 为度量空间 M 的子集, 若 S 完备, 若 S 完备, 则称 S 为 M 的完备子群.

定理 12.6 (课本定理12.6): 对度量空间 M ,
任一完备子集闭.

(2) 若 M 完备, $S \subseteq M$, 则 S 闭 $\iff S$ 完备.

证: (1) 取完备子集 $S \subset M$, 取 S 中任意序列 $(x_n) \rightarrow x \in M \implies (x_n)$ 柯西.

又 $\because S$ 为完备子集, $\therefore (x_n) \rightarrow y \in S$.

又 \because 极限唯一, $\therefore x = y \in S \implies S$ 闭.

(2) “ \Leftarrow ”: 已由 (1) 证.

“ \Rightarrow ”: \forall 柯西序列 $(x_n) \in S, \because S \subseteq M, \therefore (x_n)$ 为 M 中的柯西列.

又 $\because M$ 完备, $\therefore (x_n)$ 收敛, 设 $(x_n) \rightarrow x$.

又 $\because S$ 闭, $\therefore x \in S$, 故 S 完备.

综上, 得证. \square

例 12.7: 在欧氏度量 $d(u, v) = \sqrt{\sum_i |u_i - v_i|^2}$ 下, $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 完备. \square

例 12.8 (课本例12.11): $C[a, b]$ 上度量 $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\}$, $(C[a, b], d)$ 完备.

证: 在 $(C[a, b], d)$ 上, $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\} < \epsilon \iff |f(x) - g(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$.

设 (f_n) 柯西, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N$, s.t. 当 $m, n > N$ 时, $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$,

即给定 $\forall x \in [a, b], (f_n(x))$ 为 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} 上的柯西序列.

又 $\because \mathbb{R}$ 和 \mathbb{C} 完备, $\therefore (f_n(x))$ 收敛.

设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x))$, 则取 $m \rightarrow \infty$ 得当 $n > N$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b]$

$\implies (f_n) \rightarrow f$, 故 $C[a, b]$ 完备. \square

\square

12.7 等距

定义 12.18 等距: (M, d) 和 (M', d') 为度量空间, 若映射 $f: M \rightarrow M'$ 满足 $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, 则称 f 等距.

定理 12.7 等距的性质(课本定理12.7): $f: (M, d) \rightarrow (M', d')$ 等距, 则

- (1) f 单射.
- (2) f 连续.
- (3) 若 f 可逆, 则 f^{-1} 等距.

证: (1) (此处的 M 和 M' 仅为集合, 没有定义额外的运算, 故 0 (加法单位元) 不一定存在, 必须从定义证明单射.)
 设 $f(x) = f(y)$, 则 $d(f(x), f(y)) = 0$.

又 $\because f$ 等距, $\therefore d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \implies x = y$, 故得证.

(2) $\forall M$ 的收敛序列 $(x_n) \rightarrow x$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \epsilon$.

$\because f$ 等距, $\therefore d(f(x_n), f(x)) = d(x_n, x) < \epsilon \implies (f(x_n)) \rightarrow f(x)$.

$\because f$ 保持收敛, $\therefore f$ 连续.

(3) 若 f 可逆, 则 $f^{-1}(f(x)) = x \implies f^{-1}f = 1_M$.

$\because f$ 等距, $\therefore d(f(x), f(y)) = d(x, y) = d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) \implies f^{-1}$ 等距.

□

12.8 度量空间的完备化

定理 12.8 完备化定理(课本定理12.8): 对度量空间 (M, d) , \exists 完备度量空间 (M', d') 及等距 $\tau: M \rightarrow M'$, s.t. $\tau(M)$ 在 M' 中稠密.

具体如何完备化?

取 $V = \{M \text{ 中所有柯西序列}\}$, 定义等价关系 $(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$, 则等价类 $\frac{V}{\sim}$ 即 M' .