Chapter 1

向量空间

定义 1.1 向量空间: 交换群 $(V, +)$ 和域 F, 数乘映射 $\alpha : F \times V \to V$, 若满足

$\alpha(r, u+v) = \alpha(r, u) + \alpha(r, v)$ (可简写为 $r(u+v) = ru + rv$)

(2) $\alpha(r+t, u) = \alpha(r, u) + \alpha(t, u)$ (可简写为 $(r+t)u = ru + tu$)

(3) $\alpha(r \cdot t, u) = \alpha(r, \alpha(t, u))$ (可简写为 $(r \cdot t) \cdot u = r(tu)$)

(4) **有单位元**: $\exists 1 \in F$, s.t. $\alpha(1, u) = u$ (可简写为 $1u = u$)

则称 V 是 F 上的向量空间.

例 1.1 直角坐标系: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 为域, $(\mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, +)$ 为交换群, 满足

(1) $r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2)$

(2) $(r+t)(x, y) = ((r+t)x, (r+t)y) = (rx + tx, ry + ty) = (rx, ry) + (tx, ty) = r(x, y) + t(x, y)$

(3) $(r \cdot t)(x, y) = (rtx, rty) = r(tx, ty) = r(t(x, y))$

(4) $1(x, y) = (x, y)$

故 $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. □

$0v = 0$. (注意两个 0 的区别, 等号左边的 0 为域 F 中的零元, 等号右边的 0 为 V 中的零向量.)

证: $0v = (0+0)v = 0v + 0v \Longrightarrow 0v = 0$. □

$r \in F$, $0 \in V$, 则 $r0 = 0$.

证: $r0 = r(0+0) = r0 + r0 \Longrightarrow r0 = 0$. □

$-1v = -v$.

证: $-1v = -(1v) = -v$. □

例 1.2: $\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.
$\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间.
$\because$ 对 $c \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}^2$, $cv \notin \mathbb{R}^2$, $\therefore \mathbb{R}^2$ 不是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. □

例 1.3: $F^n \equiv \{(r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1, \cdots, r_n) + (l_1, \cdots, l_n) = (r_1 + l_1, \cdots, r_n + l_n)$, $r(r_1, \cdots, r_n) = (rr_1, \cdots, rr_n)$. F^n 为 F 上的向量空间. □

证: $\because$ $r((r_1, \cdots, r_n) + (l_1, \cdots, l_n)) = r(r_1 + l_1, \cdots, r_n + l_n) = (rr_1 + rl_1, \cdots, rr_n + rl_n) = (rr_1, \cdots, rr_n) + (rl_1, \cdots, rl_n) = r(r_1, \cdots, r_n) + r(l_1, \cdots, l_n)$,
且 $(r+t)(r_1, \cdots, r_n) = ((r+t)r_1, \cdots, (r+t)r_n) = (rr_1 + tr_1, \cdots, rr_n + tr_n) = (rr_1, \cdots, rr_n) + (tr_1, \cdots, tr_n) = r(r_1, \cdots, r_n) + t(r_1, \cdots, r_n)$,
且 $(r \cdot t)(r_1, \cdots, r_n) = (rtr_1, \cdots, rtr_n) = r(tr_1, \cdots, tr_n) = r(t(r_1, \cdots, r_n))$,
且 $1(r_1, \cdots, r_n) = (r_1, \cdots, r_n)$,
$\therefore F^n$ 为 F 上的向量空间. □

定义 1.2 子空间: $\emptyset \neq S \subseteq V$, 若 S 为 V 的子群, 且在相同的数乘下构成 F 上的向量空间, 则称 S 是 V 的子空间.

定理 1.1 子空间的判定(课本定理1.1): S 为 V 的子空间 $\iff \forall a, b \in S$, $r, t \in F$, $ra + tb \in S$ (即线性运算封闭).

证: "$\Longrightarrow$": $ra \in S$, $-tb \in S$, 又 $\because S$ 为 V 的子群, $ra - (-tb) \in S$.
"$\Longrightarrow$": 令 $r = 1$, $t = -1$, 有 $a - b \in S \Longrightarrow S < V$.
令 $t = 0$, 有 $ra \in S$, 故 S 为 V 的子空间.
综上, 得证. □

子空间的交是子空间.

证: 设 $S_1, \cdots, S_n$ 为 V 的子空间, 则 $S_1, \cdots, S_n$ 为 V 的子群 $\Longrightarrow \cap_{i=1}^n S_i$ 为 V 的子群.
$\forall u, v \in \cap_{i=1}^n S_i$, $\forall k$, $u, v \in S_k \Longrightarrow u, v$ 满足与 F 中向量相同的数乘映射.
综上, 得证. □

S, T 是 V 的子空间, $S + V \equiv \{u + v \mid u \in S, v \in T\}$ 为 V 的子空间.

证: $\forall w_1, w_2 \in S + T$, $r, t \in F$,
$w_1 \in S + T \Longrightarrow w_1 = u_1 + v_1$, $u_1 \in S$, $v_1 \in T$,
$w_2 \in S + T \Longrightarrow w_2 = u_2 + v_2$, $u_2 \in S$, $v_2 \in T$.
$rw_1 + tw_2 = r(u_1 + v_1) + t(u_2 + v_2) = (ru_1 + tu_2) + (rv1 + tv_2)$, 其中 $ru_1 + tu_2 \in S$, $rv_1 + tv_2 \in T \Longrightarrow rw_1 + tw_2 \in S + T$,
故 $S + T$ 为 V 的子空间. □

定义 1.3 生成子空间: $\emptyset \neq S \subseteq V$, $\langle S \rangle \equiv$ 包含 S 的最小子空间 $= \{\sum_{i=1}^n r_i u_i \mid r_i \in F, u_i \in S, n \in \mathbb{N}\}$, 其中称 S 为生成集.

例 1.4: 向量空间 $\mathbb{R}^2$,
$S_x = \langle \{(1,0)\} \rangle = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = x$ 轴,
$S_y = \langle \{(0,1)\} \rangle = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = y$ 轴,
$\langle \{(1,0), (0,1)\} \rangle = \langle \{(1,1), (1,-1)\} \rangle = \mathbb{R}^2$, 故对同一生成子空间, 生成集不唯一. □

定义 1.4 线性无关: 非零元 $u_1, \cdots, u_m$, 若 $r_1u_1 + \cdots + \cdots + r_mu_m = 0 \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_m = 0$, 则称 $u_1, \cdots, u_m$ 线性无关. 若 S 中任意有限个元素线性无关, 则称 S 线性无关.

例 1.5: $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 线性无关. □

证: $r_1(1,0) + r_2(0,1) = (r_1, r_2) = 0 = (0,0) \Longrightarrow r_1 = 0$, $r_2 = 0$. □

例 1.6: $\mathbb{R}^2$ 上线性无关, 即两非零元夹角非零. □

单个非零元 v 线性无关.

证: $rv = 0$ 且 $v \neq 0 \Longrightarrow r = 0$, 故 v 线性无关. □

定义 1.5 线性相关: $u_1, \cdots, u_m$, 若 $\exists$ 不全为零的 $r_1, \cdots, r_m$, s.t. $r_1u_1 + \cdots + r_mu_m = 0$, 则称 $u_1, \cdots, u_m$ 线性相关.

若 u, v 线性相关, 则两者共线.

证: $\exists r, t$ 不全为零, s.t. $ru + tv = 0$, 无妨设 $0 \neq r \in F$, 则 $ru = -tv \Longrightarrow r^{-1}ru = -r^{-1}tv \Longrightarrow u = -\frac{u}{r}v$ □

定义 1.6 线性表示: v 可由 $u_1, \cdots, u_n$ 线性表示 $\Longleftrightarrow \exists r_1, \cdots, r_n \in F$, s.t. $v = \sum_{i=1}^{n} r_iu_i$.

定理 1.2 (课本定理1.6): S 线性无关 $\Longleftrightarrow \langle S \rangle$ 中的每个向量可由 S 中元素唯一地线性表示
$\Longleftrightarrow S$ 中任一向量不能由 S 中其余向量线性表示.

证: 设 $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$.

第一个 "$\Longrightarrow$": $v \in \langle S \rangle$, 则 v 可由 S 中的元素线性表示, 即 $\exists r_1, \cdots, r_m$, s.t. $v = r_1u_1 + \cdots + r_mu_m$.
要证这种线性表示是唯一的, 假设 v 的另一种线性表示为 $v = r_1'u_1 + \cdots + r_m'u_m$.
$v - v = (r_1 - r_1')u_1 + \cdots + (r_m - r_m')u_m = 0$, 又 $\because S$ 线性无关, 即 $u_1, \cdots, u_m$ 线性无关, $\therefore r_1' = r_1$, $r_m' = r_m$, 故两种线性表示相同.

第一个 "$\Longleftarrow$": $0 \in \langle S \rangle$, 由于 $0u_1 + \cdots + 0u_m =$ 是且是 0 唯一的线性表示, 故 S 线性无关.

第二个 "$\Longrightarrow$": 不妨假设 u_1 可由 $u_2, \cdots, u_m$ 线性表示, 即 $u_1 = t_2u_2 + \cdots + t_mu_m$.
若 $r_1u_1 + \cdots + r_mu_m = 0$, 则 $r_1 = \cdots = r_m = 0$ 或 $r_1 \neq 0$, $r_2 = -r_1t_2, \cdots, r_m = -r_mt_m$, 从而 S 线性相关, 故假设错误, u_1 不可由 $u_2, \cdots, u_m$ 线性表示.

第二个 "$\Longleftarrow$": 假设 S 线性相关, 则 $\exists$ 非零 $r_1, \cdots, r_m$, s.t. $r_1u_1 + \cdots + r_mu_m = 0$, 不妨设 r_1 非零, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1}u_2 - \cdots - \frac{r_m}{r_1}u_m$, 即 u_1 可由 S 中其余向量线性表示, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关. □

定理 1.3 (课本定理1.7): $\emptyset \neq S \subseteq V$, 下列等价:

(1) S 线性无关, 且 $V = \langle S \rangle$

(2) $\forall v \in V$, 可用 S 中元素唯一地线性表示

(3) S 是 V 的极小生成集 (即 S 去除任意元素都无法生成 V, 或 S 的任意真子集都无法生成 V)

(4) S 是 V 的极大线性无关集 (即 S 增加任意元素都线性相关, $\forall u \in V$ 且 $u \notin S$, $S \cup \{u\}$ 线性相关)

证: 由定理 1.2 证得 (1)(2) 等价.

设 $S = \{u_1, \cdots, u_m\}$.

(1)$\Longrightarrow$(3): 假设 $\exists S' \subsetneq S$, s.t. $V = \langle S' \rangle$, 则 $\forall v \in S - S' \subseteq V$, $v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S'$, $m \in \mathbb{N}$, 即 v 可由 S 中的部分向量线性表示, 与 S 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是 V 的极小生成集.

(3)$\Longrightarrow$(1): S 为 V 的生成集, 即 $V = \langle S \rangle$.

假设 S 线性相关, 即 $\exists r_1, \cdots, r_m$ 不全为零, s.t. $\sum_{i=1}^m r_i u_i = 0$, 不妨设 $r_1 \neq 0$, 则 $u_1 = -\frac{r_2}{r_1} u_2 + \cdots + \frac{r_m}{r_1} u_m$, 则 $S - \{u_1\}$ 仍可以生成 V, 矛盾, 故假设错误, S 线性无关.

(1)$\Longrightarrow$(4): 假设 S 不是极大线性无关集, 则 $\exists v \in V - S$, s.t. $S \cup \{v\}$ 线性无关.

又 $\because V = \langle S \rangle$, $\therefore v = \sum_{i=1}^m r_i u_i$, 其中 $r_i \in F$, $u_i \in S$, $m \in \mathbb{N}$, 即线性无关集 $S \cup \{v\}$ 中的向量 v 可由其中的部分向量线性表示, 与 $S \supseteq$ 线性无关矛盾, 故假设错误, S 是极大线性无关集.

(4)$\Longrightarrow$(1): $\because S$ 是 V 的极大线性无关集, $\therefore S$ 线性无关.

假设 $V \neq \langle S \rangle$, $\exists v \in V - S$, s.t. v 无法由 S 中的元素线性表示 $\Longrightarrow S \cup \{v\}$ 为线性无关集, 与 S 为最大线性无关集矛盾, 故假设错误, $V = \langle S \rangle$.

综上, 得证. □

定义 1.7 基: 任何生成向量空间 V 的线性无关集. 基的阶数称为 V 的维数, 记作 $\dim V$.

定理 1.4 (课本定理1.12): 向量空间的任何基都有相同的阶, 即 $\dim V$ 不依赖于基的选取.

例 1.7: $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 为 F^n 的一组基. □

证: $r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) = 0 \Longrightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$, 故 $e_1, \cdots, e_n$ 线性无关.

又 $\langle \{e_1, \cdots, e_n\} \rangle = \{r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n = (r_1, \cdots, r_n) \mid r_i \in F,\ 对\ i = 1, \cdots, n\} = F$, 故得证. □

找基的方法:

(1) 若 $0 \neq u_1 \in V$, 则 $\{u_1\}$ 线性无关.

(2) 若 $u_2 \in V - \langle u_1 \rangle$ 且 u_2 与 u_1 线性无关, 则 $\{u_1, u_2\}$ 线性无关.

(3) 重复以上操作, 直至无法找到新的线性无关元素, 即得到极大线性无关集, 此即向量空间的基.

定理 1.5 (课本定理1.9): 线性无关集 $I \subseteq V$, $S \subseteq V$ 是 V 的生成集, 且 $I \subseteq S$, 则 $\exists V$ 的基 $\mathcal{B}$, s.t. $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.

定义 1.8 直和: (1) **外直和**: 若 $V_1, \cdots, V_n$ 是 F 上的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \equiv \{(v_1, \cdots, v_n) \mid v_i \in V_i\}$, 满足

- $(v_1, \cdots, v_n) + (u_1, \cdots, u_n) = (v_1 + u_1, \cdots, v_n + u_n)$
- $r(v_1, \cdots, v_n) = (rv_1, \cdots, rv_n)$

则$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 F 的向量空间, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ 为 $V_1, \cdots, V_n$ 的外直和.

(2) **内直和**: V 是 F 上的向量空间, $V_1, \cdots, V_n$ 是 V 的子空间, 若 $V = \sum_{i=1}^n V_i$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) =$

$\{0\}$, 则称 V 为 $V_1, \cdots, V_m$ 的内直和, 记作 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, 称 V_i 为直和项.

内/外直和的关系: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, $V_1' = \{(v_1, 0, \cdots, 0) \mid v_i \in V_i\}$, $\cdots$, $V_m' = \{(0, 0, \cdots, v_m) \mid v_m \in V_m\}$ 是 V 的子空间, 则 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ 且 $V_i' \cap (\cup_{j \neq i} V_j) = \{0\} \Longrightarrow V_i = \bigoplus_{i=1}^m V_i'$, 故内/外直和是等价的, 以下我们不明确区分内/外直和, 均用内直和.

例 1.8: $\mathbb{R}^2 = S_x \oplus S_y$. □

定理 1.6 (课本定理1.5): $\{v_i \mid i \in J\}$ 是 V 的子空间集合, $V = \sum_{i \in J} V_i$, 则下列等价:

(1) $V = \bigoplus_{i \in J} V_i$

(2) $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$

(3) $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式

(4) V 中任一向量 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \cdots + v_n$, 分解式中的有限个非零元 $v_i \in V_i$ 组成的集合成为支集

证: (1)$\Longleftrightarrow$(2): 由直积的定义即得证.

(2)$\Longrightarrow$(3): 假设 $0 = s_{i1} + \cdots + s_{in}$ 且 s_{ij} 不全为零, 不妨设 $s_{i1} \neq 0$, 则 $V_{i1} \ni s_{i1} = -s_{i2} - \cdots - s_{ij} \in \sum_{j=2}^n V_{ij}$ $\Longrightarrow s_{i_1} \in V_{i_1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{i_j})$, $s_{i_1} \neq 0$ 与 $V_{i_1} \cap (\cup_{j=2}^n V_{i_j}) = \{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $0 = 0 + \cdots + 0$ 是 0 的唯一分解式.

(3)$\Longrightarrow$(4): $\forall v \in V$, $v = u_1 + \cdots + u_n$, 其中 $u_i \in V_i$.
假设 $v = w_1 + \cdots + w_m$, 其中 $w_i \in V_i$.
$0 = v - v = u_1 + \cdots + u_n - w_1 - \cdots - w_n$, 将属于相同子空间的元素合并到一起, 得 $0 = (u_{t_1} - w_{t_1}) + \cdots + (u_{t_k} - w_{t_k}) + u_{t_{k+1}} + \cdots + u_{t_n} - w_{t_{k+1}} - w_{t_m}$, 由 (2) 知 $k = n = m$ 且 $v_{t_i} = u_{t_i}$, 故 v 具有唯一分解式 $v = v_1 + \cdots + v_n$.

(4)$\Longrightarrow$(2): 假设 $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \neq \{0\}$, 则 $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) \supsetneq \{0\}$, 即 $\exists 0 \neq u \in V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j)$,
不妨设 $u \in V_1$ 且 $u \in V_2$, 则 $v = v_1 + \cdots + v_n = (v_1 + u) + (v_2 - u) + \cdots + v_n$, 其中 $v_i \in V_i$ 且 $v_1 + u \in V_1$,$v_2 - u \in V_2$, v 的分解式不唯一, 矛盾, 故假设错误, $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$.

综上, 得证. □

定理 1.7 (课本定理1.8): $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 是向量空间 V 的基 $\Longleftrightarrow V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$.

证: "$\Longrightarrow$": $\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore V = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i v_i \mid r_i \in F\} = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_n \rangle$.
$\because \mathcal{B}$ 为 V 的基, $\therefore v_1, \cdots, v_n$ 线性无关 $\Longrightarrow \forall 0 \neq u \in \langle v_i \rangle$, $u = r_i v_i$ 且无法由 $\{v_j \mid j \neq i\}$ 线性表示 $\Longrightarrow u \notin V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j)$,
$0 = 0 v_i \in \langle v_i \rangle$ 且 $0 = \sum_{j \neq i} 0 v_j \Longrightarrow 0 \in V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j)$
$\Longrightarrow V_i \cap (\cup_{j \neq i} V_j) = \{0\}$.
故 $V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$.

"$\Longleftarrow$": 一方面, $V = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_n \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$;
另一方面, (线性无关的证明存疑), $\Longrightarrow v_1, \cdots, v_n$ 线性无关.
故 $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 V 的基. □

定理 1.8 (课本定理1.4): S 为 V 的子空间, 则 $\exists V$ 的子空间 S^c, s.t. $V = S \oplus S^c$, 称 S^c 为 S 的补空间.

证: $\mathcal{B}_1$ 为 S 的基, 则 $\mathcal{B}_1$ 为 V 中的线性无关集,
$\mathcal{B}_1$ 总可以扩张为 (即添加一些元素) 成 V 的基, 即 $\exists\mathcal{B}_2$, s.t. $\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2=\emptyset$, $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 线性无关且 $V=\langle\mathcal{B}_1\rangle+\langle\mathcal{B}_2\rangle\Longrightarrow V=\langle\mathcal{B}_1\rangle\oplus\langle\mathcal{B}_2\rangle$, 故 $S^c=\langle\mathcal{B}\rangle$. □

例 1.9: $\mathbb{R}^2=S_x\oplus S_y=S_l\oplus S_{l'}$, 其中 S_l 和 $S_{l'}$ 分别为过原点直线 l 和 l' 对应的子空间, l 与 l' 不共线. □

补空间总存在, 但不唯一.

定理 1.9 (<u>课本定理1.13</u>): (1) $\mathcal{B}$ 是 V 的基, 若 $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2=\emptyset$, 则 $V=\langle\mathcal{B}_1\rangle\oplus\langle\mathcal{B}_2\rangle$.

(2) $V=S\oplus T$, 若 $\mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, 则 $\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2=\emptyset$, $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

证: (1) $\because\mathcal{B}$ 是 V 的基, $\therefore\forall u\in V$, $u=\sum_{i=1}^k r_iv_i$, 其中 $r_i\in F$, $v_i\in\mathcal{B}$, $k\in\mathbb{N}$.
$\langle\mathcal{B}_1\rangle=\{\sum_{i=1}^n r_iv_i\mid r_i\in F,v_i\in\mathcal{B}_1,n\in\mathbb{N}\}$, $\langle\mathcal{B}_2\rangle=\{\sum_{i=1}^n r_iv_i\mid r_i\in F,v_i\in\mathcal{B}_2,n\in\mathbb{N}\}$.
$u=\sum_{i=1}^t r_iv_i+\sum i=t+1^k r_iv_i$, 其中 $v_1,\cdots,v_k\in\mathcal{B}_1$, $v_{k+1},\cdots,v_k\in\mathcal{B}_2\Longrightarrow V=\langle\mathcal{B}_1\rangle+\langle\mathcal{B}_2\rangle$.
$\forall u\in\langle\mathcal{B}_1\rangle\cap\langle\mathcal{B}_2\rangle$,$u\in\langle\mathcal{B}_1\rangle\Longrightarrow u=\sum_{i=1}^n r_iv_i$, 其中 $r_i\in F$, $v_i\in\mathcal{B}_1$,
且 $u\in\langle\mathcal{B}_2\rangle\Longrightarrow u=\sum_{i=1}^n l_iw_i$, 其中 $l_i\in F$, $w_i\in\mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow 0=u-u=\sum r_iv_i-\sum l_iw_i$,
又 $\because\mathcal{B}$ 为基, $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 且 $\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2=\emptyset$, $\therefore r_i,w_i$ 线性无关 $\Longrightarrow r_i=l_i=0$, $\forall i$
$\Longrightarrow u=0$.

综上, $V=\langle\mathcal{B}_1\rangle\oplus\langle\mathcal{B}_2\rangle$.

(2) $V=S\oplus T\Longleftrightarrow V=S+T$ 且 $S\cap T=\{0\}$.
假设 $v\in\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2$, 则 $v\neq 0$, $\langle v\rangle=S\cap T$, 与 $S\cap T=\{0\}$ 矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2=\emptyset$.
$\because V=S+T$, $\therefore\forall u\in V$, $u=u_1+u_2$, 其中 $u_1\in S$, $u_2\in T$,
$\because\mathcal{B}_1$ 是 S 的基, $\mathcal{B}_2$ 是 T 的基, $\therefore u_1=\sum_{i=1}^k r_iv_i$, $u_2=\sum_{i=k+1}^n$, 其中 $r_i\in F$, 对 $i=1,\cdots,k$, $v_i\in\mathcal{B}_1$, 对 $i=k+1,\cdots,n$, $v_i\in\mathcal{B}_2$
$\Longrightarrow u=\sum_{i=1}^m r_iv_i$, 其中 $r_i\in F$, $v_i\in\mathcal{B}_1\cap\mathcal{B}_2$, 即 $V=\langle\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\rangle$.
假设 $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 线性相关, 则 $\exists r_i\in F$ 不全为零, $\sum_{i=1}^n r_iv_i=\sum_{i=1}^k r_iv_i+\sum_{i=k+1}^n r_iv_i=0$, 其中 $r_i\in F$, 对 $i=1,\cdots,k$, $v_i\in\mathcal{B}_1$, 对 $i=k+1,\cdots,n$, $v_i\in\mathcal{B}_2$,
$\because\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 为基, $\therefore\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow\sum_{i=1}^k r_iv_i\neq 0$, $\sum_{i=k+1}^n r_iv_i\neq 0$, 与 $0=0+\cdots+0$ 是 0 的唯一分解式矛盾, 故假设错误, $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 线性无关 $\Longrightarrow\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 是 V 的基.

□

定理 1.10 (<u>课本定理1.14</u>): S,T 是 V 的子空间, $\dim S+\dim T=\dim(S\cap T)+\dim(S+T)$. 特别地, 若 T 是 S 的补空间, 则 $\dim S+\dim T=\dim(S\oplus T)$.

证: 设 $S\cap T$ 的基为 $\mathcal{A}$,
$\because S\cap T$ 为 S 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{A}$ 扩张成 S 的基 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$,
$\because S\cap T$ 为 T 的子空间, $\therefore$ 可将 $\mathcal{A}$ 扩张成 T 的基 $\mathcal{A}\cup\mathcal{C}$.

接下来需要用到这样一个事实: $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ 是 $S+T$ 的基. 所以先来证明它:

证: $\forall w\in S+T$, $w=u+v$, 其中 $u\in S$, $v\in T\Longrightarrow u\in\langle\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\rangle$, $v\in\langle\mathcal{A}+\mathcal{C}\rangle$, 故 $\langle\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\rangle=S+T$.

不妨设 $\sum_{i=1}^n r_iv_i=0$, 其中 $v_i\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$.
设 $v_1,\cdots,v_k\in\mathcal{A}$, 则 $\sum_{i=1}^k r_iv_i+\sum_{i=k+1}^n r_iv_i=0$,

令 $x=\sum_{i=1}^{k} r_i v_i$, 则 $x=\sum_{i=1}^{k} r_i v_i \in \langle\mathcal{A}\rangle$ 且 $x=-\sum_{i=k+1}^{n} r_i v_i \in \langle\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\rangle \Longrightarrow x \in \langle\mathcal{A}\rangle \cap \langle\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\rangle=(S-T)\cap T=\emptyset$.
$\because x\in\langle\mathcal{B}\rangle$, $\therefore x\in\mathcal{S}$, 又 $\because x\in\langle\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\rangle$, $\therefore x\in T \Longrightarrow x\in S\cap T=\langle\mathcal{B}\rangle$. $\Longrightarrow x\in\langle\mathcal{A}\rangle\cap\langle\mathcal{B}\rangle \Longrightarrow x=0$.
又 $\because \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ 线性独立, 故 $\forall i$, $r_i=0 \Longrightarrow \mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ 线性无关.

综上, $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ 是 $S+T$ 的基. □

故

$$\dim S+\dim T=|\mathcal{A}\cup\mathcal{B}|+|\mathcal{B}\cup\mathcal{C}|=|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|+|\mathcal{B}|+|\mathcal{C}|=|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|+|\mathcal{C}|+\dim(S\cap T)=\dim(S+T)+\dim(S\cap T).$$

□