

Chapter 2

线性变换

2.1 线性变换

定义 2.1 线性变换: 向量空间之间的映射. F 为域, V, W 为 F 上的向量空间, 映射 $\tau: V \rightarrow W$, 若 $\tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v)$, $r, t \in F$, $u, v \in V$, 则称 τ 为 V 到 W 的线性变换.

(类似于同态)

取 $r = 1, t = 1$, 则 $\tau(u + v) = \tau(u) + \tau(v)$, 故 τ 是 V 到 W 的群同态, 从而 $\tau(0) = 0$, $\tau(-v) = -\tau(v)$.

$\mathcal{L}(V, W) \equiv \{V \text{ 到 } W \text{ 的线性变换}\}$, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V) = \{V \text{ 到 } V \text{ 的线性变换}\} = \{V \text{ 上的线性算子}\}$.

定义 2.2 单线性变换: 单射的线性变换.

定义 2.3 满线性变换: 满射的线性变换.

定义 2.4 同构: 双射的线性变换. 若两个向量空间 V, W 之间存在同构, 也称这两个向量空间同构, 记作 $V \approx W$.

取 $\tau, \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $v \xrightarrow{\tau} \tau(v)$, $v \xrightarrow{\sigma} \sigma(v) \implies v \xrightarrow{\tau+\sigma} \tau(v) + \sigma(v)$ 也是线性变换, 且 $\tau + \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$.

证: 由映射的像的唯一性, $\because v \xrightarrow{\tau} \tau(v)$ 是唯一的, $v \xrightarrow{\sigma} \sigma(v)$ 是唯一的, $\therefore v \xrightarrow{\tau+\sigma} \tau(v) + \sigma(v)$ 是唯一的, 故 $\tau + \sigma$ 是映射.

$(\tau + \sigma)(ru + tv) = \tau(ru + tv) + \sigma(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) + r\sigma(u) + t\sigma(v) = r[\tau(u) + \sigma(u)] + t[\tau(v) + \sigma(v)] = r[(\tau + \sigma)(u)] + t[(\tau + \sigma)(v)]$, 故 $\tau + \sigma$ 为 V 到 W 的线性变换. \square

由此定义了线性变换之间的加法.

$(\mathcal{L}(V, W), +)$ 为交换群.

证: $(\mathcal{L}(V, W), +)$ 满足

(1) **结合律:** $\forall v \in V$, $[(\tau + \sigma) + \delta](v) = (\tau + \sigma)(v) + \delta(v) = \tau(v) + \sigma(v) + \delta(v) = \tau(v) + (\sigma(v) + \delta(v)) = \tau(v) + (\sigma + \delta)(v) = [\tau + (\sigma + \delta)](v) \implies [(\tau + \sigma) + \delta] = [\tau + (\sigma + \delta)]$.

(2) **有单位元 0:** 零映射 $0(v) = 0$, $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W)$, $(0 + \tau)(v) = 0(v) + \tau(v) = 0 + \tau(v) = \tau(v) + 0 = \tau(v) + 0(v) = (\tau + 0)(v)$.

(3) 有逆元: $\forall \tau \in \mathcal{L}(V, W), \exists -\tau$, s.t. $(-\tau)(v) = -\tau(v) \implies [\tau + (-\tau)](v) = \tau(v) - \tau(v) = 0 = 0(v)$.

(4) 交换律: $\forall v \in V, (\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v) = \sigma(v) + \tau(v) = [\sigma + \tau](v)$.

故 $\mathcal{L}(V, W)$ 为交换群. □

$\forall r \in F, v \in \mathcal{L}(V, W), v \xrightarrow{\tau} \tau(v) \implies v \xrightarrow{r\tau} r\tau(v)$ 是线性变换, 且 $r\tau \in \mathcal{L}(V, W)$.

证: 由映射的像的唯一性, $\because v \xrightarrow{\tau} \tau(v)$ 是唯一的, $\therefore v \xrightarrow{r\tau} r\tau(v)$ 是唯一的, 故 $r\tau$ 是映射.

$(r\tau)(v) = r\tau(v) = r[\tau(v)]$, 故 $r\tau$ 为 V 到 W 的线性变换. □

$\mathcal{L}(V, W)$ 是 F 上的向量空间.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V, W), +)$ 为交换群, 且其满足

(1) $\forall v \in V, [(r+t)\tau](v) = (r+t)\tau(v) = r\tau(v) + t\tau(v) = (r\tau + t\tau)(v) \implies (r+t)\tau = r\tau + t\tau$

(2) $\forall v \in V, [(rt)\tau](v) = (rt)\tau(v) = r[t\tau(v)] = [r(t\tau)](v) \implies (rt)\tau = r(t\tau)$

(3) $\forall v \in V, [r(\tau + \sigma)](v) = r(\tau + \sigma)(v) = r[\tau(v) + \sigma(v)] = r\tau(v) + r\sigma(v) = (r\tau + r\sigma)(v) \implies r(\tau + \sigma) = r\tau + r\sigma$

(4) 恒等映射 $1: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(V, W), \tau \xrightarrow{1} \tau, \forall v \in V, (1\tau)(v) = 1[\tau(v)] = \tau(v) \implies 1\tau = \tau$

故得证. □

定理 2.1 (课本定理2.1): (1) $\mathcal{L}(V, W)$ 是 F 上的向量空间.

(2) $t \in \mathcal{L}(V, W), \sigma \in \mathcal{L}(W, U)$, 则 $\sigma \circ \tau \in \mathcal{L}(V, U)$.

(3) τ 是 V 到 W 的同构, 则 $\tau^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

(4) $\mathcal{L}(V)$ 既是向量空间, 也是环, 且两者的加法运算是一样的, 故 $\mathcal{L}(V)$ 是代数.

$\mathcal{L}(V)$ 是环.

证: 前面已证, $(\mathcal{L}(V), +)$ 为交换群, 且满足

(1) 结合律: \because 映射的复合有结合律, $\therefore \mathcal{L}(V)$ 中元素的复合有结合律

(2) 左右分配律: $\forall v \in V, [(\sigma + \tau)\delta](v) = (\sigma + \tau)[\delta(v)] = \sigma[\delta(v)] + \tau[\delta(v)] = (\sigma\delta)(v) + (\tau\delta)(v) \implies (\sigma + \tau)\delta = \sigma\delta + \tau\delta$
 $[\sigma(\tau + \delta)](v) = \sigma[(\tau + \delta)(v)] = \sigma[\tau(v) + \delta(v)] = \sigma[\tau(v)] + \sigma[\delta(v)] = \sigma\tau(v) + \sigma\delta(v) \implies \sigma(\tau + \delta) = \sigma\tau + \sigma\delta$

故得证. □

定义 2.5 核空间: $\text{Ker } \tau \equiv \{v \mid \tau(v) = 0\} \subseteq V$.

定义 2.6 像空间: $\text{Im } \tau \equiv \{\tau(v) \mid v \in V\}$.

定理 2.2 (课本定理2.3): (1) τ 满线性变换 $\iff \text{Im } \tau = W$.

(2) τ 单线性变换 $\iff \text{Ker } \tau = \{0\}$.

定理 2.3 (课本定理2.2): \mathcal{B} 是 V 的基, $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 则 τ 可由 τ 在 \mathcal{B} 上的像唯一确定.

证: 若已知 $\tau(b_i) \forall b_i \in \mathcal{B}$, 则 $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i, r_i \in F, b_i \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{Z}^+$
 $\implies \tau(v) = \tau(\sum_{i=1}^n r_i b_i) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(b_i)$. □

同构的向量空间有很多性质可以相互传递, 下面我们就来讨论这件事.

定理 2.4 (课本定理2.4): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$ 同构, S 是 V 真子集, 则

(1) $V = \langle S \rangle \iff W = \langle \tau(S) \rangle$.

(2) S 线性无关 $\iff \tau(S)$ 线性无关.

(3) S 是 V 的基 $\iff \tau(S)$ 是 W 的基.

证: (1) “ \implies ”: $\because V = \langle S \rangle, \therefore \forall v \in V, v = \sum_i r_i s_i$,
 又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall w \in W, \exists v \in V, \text{s.t. } w = \tau(v) \implies \tau(v) = \tau(\sum_i r_i s_i) = \sum_i r_i \tau(s_i)$.
 “ \impliedby ”: $\because W = \langle \tau(S) \rangle, \therefore \forall w \in W, w = \sum_i r_i \tau(s_i)$,
 又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \forall v \in W, \exists w \in W, \text{s.t. } v = \tau^{-1}(w) = \tau^{-1}(\sum_i r_i \tau(s_i)) = \sum_i r_i \tau^{-1}(\tau(s_i)) = \sum_i r_i s_i$.
 综上, (1) 得证.

(2) “ \implies ”: 假设 $\sum_i r_i \tau(s_i) = 0$, 则 $\tau(\sum_i r_i s_i) = 0$,
 又 $\because \tau$ 同构, $\therefore \text{Ker } \tau = \{0\} \implies \sum_i r_i s_i = 0$,
 又 $\because S$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \implies \tau(S)$ 线性无关.
 “ \impliedby ”: 假设 $\sum_i r_i s_i = 0$, 则 $\tau(\sum_i r_i s_i) = \sum_i r_i \tau(s_i) = 0$,
 又 $\because \tau(S)$ 线性无关, $\therefore r_i = 0 \forall i \implies S$ 线性无关.

综上, (2) 得证.

(3) (1), (2) \implies (3). □

定理 2.5 (课本定理2.6): $V \approx W \iff \dim V = \dim W$.

定理 2.6 (课本定理2.7): 若 $\dim V = n$, 则 $V \approx F^n$.

定理 2.7 (课本定理2.8): $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$,

(1) $(\text{Ker } \tau)^c \approx \text{Im } \tau$.

(2) $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \tau + \dim \operatorname{Im} \tau \equiv \operatorname{null} \tau + \operatorname{rk} \tau$, 其中称 $\operatorname{null} \tau \equiv \dim \operatorname{Ker} \tau$ 为 τ 的零度, $\operatorname{rk} \tau \equiv \dim \operatorname{Im} \tau$ 为 τ 的秩.

证: (1) 设映射 $\tau^c: \operatorname{Ker}(\tau)^c \rightarrow \operatorname{Im} \tau$, $u \mapsto \tau(u)$.

先证 τ^c 是单射: $\operatorname{Ker}(\tau^c) = \operatorname{Ker}(\tau) \cap \operatorname{Ker}(\tau)^c$ (即 $\operatorname{Ker}(\tau^c)$ 中的元素同时满足 $\operatorname{Ker}(\tau)$ 的条件, 且在定义域 $\operatorname{Ker}(\tau)^c$ 中),

又 $\because V = \operatorname{Ker}(\tau) \oplus \operatorname{Ker}(\tau)^c$, $\therefore \operatorname{Ker}(\tau) \cap \operatorname{Ker}(\tau)^c = \{0\} \implies \operatorname{Ker}(\tau^c) = \{0\}$, 故 τ^c 单射.

再证 τ^c 是满射: 一方面, $\operatorname{Im}(\tau^c) \subseteq \operatorname{Im}(\tau)$;

另一方面, $\forall \tau(v)$, $v = u + w$, 其中 $u \in \operatorname{Ker}(\tau)$, $w \in \operatorname{Ker}(\tau)^c \implies \tau(v) = \tau(u + w) = \tau(u) + \tau(w) = 0 + \tau(w) = \tau(w) \in \operatorname{Im}(\tau^c) \implies \operatorname{Im}(\tau) \subseteq \operatorname{Im}(\tau^c)$.

故 $\operatorname{Im}(\tau^c) = \operatorname{Im}(\tau)$, 即 τ^c 满射.

综上, (1) 得证.

(2) $\dim V = \dim \operatorname{Ker}(\tau) + \dim \operatorname{Ker}(\tau)^c = \dim \operatorname{Ker}(\tau) + \dim \operatorname{Im}(\tau)$.

□

x 为 n 维向量, $\dim\{x \mid Ax = 0\} = n - \operatorname{rk} A$, 故 $\dim\{x \mid Ax = 0\} = \operatorname{null} A$.

2.2 表示

“表示”其实就是用已知的东西展现未知的东西, 在这里, 我们用已知的矩阵乘法展现未知的线性变换, 这就是线性变换的表示.

F 为域, $F^n = \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in F\}$, 满足 $(r_1, \dots, r_n) + (l_1, \dots, l_n) = (r_1 + l_1, \dots, r_n + l_n)$ 及 $r(r_1, \dots, r_n) = (rr_1, \dots, rr_n)$, $\dim F^n = n$, F^n 的标准基为 $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$; $F^m = \{(r_1, \dots, r_m) \mid r_i \in F\}$, $\dim F = m$, 标准基为 $\{f_1 = (1, 0, \dots, 0), f_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, f_m = (0, 0, \dots, 1)\}$. 如何确定/展现 F^n 到 F^m 的线性变换?

根据定理 2.4, 我们只需确定一组基在线性变换下的表现, 就可以确定这一线性变换.

证: $\{b_1, \dots, b_n\}$ 为 V 的基, 线性变换 $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$, 若已知 $\tau(b_i) \forall i$, 则 $\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \implies \tau(v) = \tau(\sum_{i=1}^n r_i b_i) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(b_i)$ 可以确定, 由此 τ 可以确定. □

因此, $\forall \tau \in \mathcal{L}(F^n, F^m)$, 若 $\tau(e_i) = (a_{1i}, \dots, a_{mi}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j$.

$\forall (r_1, \dots, r_n) \in F^n$,

$$\begin{aligned} \tau((r_1, \dots, r_n)) &= \tau\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \tau(e_i) = \sum_{i=1}^n r_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{ji}\right) f_j = \left(\sum_{i=1}^n r_i a_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^n r_i a_{mi}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = M_\tau \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$.

故 $\forall \vec{r} \in F^n$, $\tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r}$.

综上:

$$\mathcal{L}(F^n, F^m) \approx M_{m \times n}(F), \quad \tau \mapsto M_\tau = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}.$$

$f: \mathcal{L}(F^n, F^m) \rightarrow M_{m \times n}(F)$, $\tau \mapsto M_\tau$ 是线性变换.

证: 由上述的 M_τ 构造过程知, $f(\tau) = M_\tau$ 是唯一的, 故 f 是映射.

$$\begin{aligned} f(r\tau + t\sigma) &= M_{r\tau + t\sigma} = \begin{pmatrix} (r\tau + t\sigma)(e_1) & \cdots & (r\tau + t\sigma)(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\tau(e_1) + t\sigma(e_1) & \cdots & r\tau(e_n) + t\sigma(e_n) \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sigma(e_1) & \cdots & \sigma(e_n) \end{pmatrix} = rM_\tau + tM_\sigma = rf(\tau) + tf(\sigma). \end{aligned}$$

故 f 是线性的.

综上, $f: \mathcal{L}(F^n) \rightarrow M_{m \times n}(F)$, $\tau \mapsto M_\tau$ 是线性变换. □

f 单射.

证: $\text{Ker } f \equiv \{\tau \mid f(\tau) = 0\} = \{\tau \mid M_\tau = 0\}$.

$\forall \tau \in \text{Ker } f, \forall \vec{r} \in F^n, \tau(\vec{r}) = M_\tau \vec{r} = \vec{0} \implies M_\tau = 0_{m \times n} \implies \tau = 0$.

故 $\text{Ker } f = \{0\}$ (这里的“0”代表的是零变换) $\iff f$ 单射. □

f 满射.

证: $\forall A \in M_{m \times n}(F)$, 可由 $\begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix} = M_\tau = A$ 构造 τ , 从而 f 满射. □

综上, f 同构.

取 V 的基 $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, $\forall v \in V, v = \sum_i r_i b_i$.

当 \mathcal{B} 定序, $\phi_{\mathcal{B}}: V \rightarrow F^n, v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \equiv [v]_{\mathcal{B}}$ 是一个映射.

证: 由于 \mathcal{B} 是 V 的基, 展开式 $v = \sum_i r_i b_i$ 唯一确定, 又 $\because \mathcal{B}$ 定序, 从而映射 $v \mapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ 唯一确定, 故 $\phi_{\mathcal{B}}$ 为映射.

$$\forall u, v \in V, u = \sum_{i=1}^n w_i b_i, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i,$$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{B}}(r\vec{u} + t\vec{v}) &= \phi_{\mathcal{B}} \left(r \left(\sum_{i=1}^n w_i b_i \right) + t \left(\sum_{i=1}^n r_i b_i \right) \right) = \phi_{\mathcal{B}} \left(\sum_{i=1}^n (rw_i + tr_i) b_i \right) = \begin{pmatrix} rw_1 + tr_1 \\ \vdots \\ rw_n + tr_n \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = r\phi_{\mathcal{B}}(u) + t\phi_{\mathcal{B}}(v), \end{aligned}$$

故 $\phi_{\mathcal{B}}$ 为 V 到 F^n 的线性变换. □

$\phi_{\mathcal{B}}$ 单射.

证: $\text{Ker } \phi_{\mathcal{B}} = \{v \mid \phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies v = \sum_{i=1}^n 0b_i = 0.$$

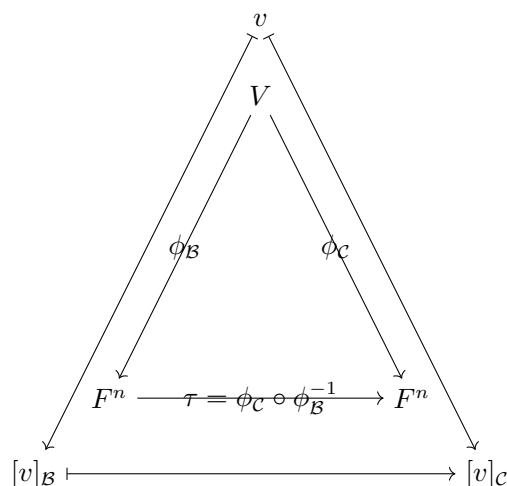
故 $\text{Ker } \phi_{\mathcal{B}} = \{0\} \iff \phi_{\mathcal{B}}$ 单射. □

$\phi_{\mathcal{B}}$ 满射.

证: $\forall \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in F^n, \exists v \in V, \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n r_i b_i \in V, \text{ 故 } \phi_{\mathcal{B}} \text{ 满射.}$ □

综上, $\phi_{\mathcal{B}}$ 同构.

取 V 的一组定序基 $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, 另一组定序基 $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$, v 在 \mathcal{B} 下的表象为 $[v]_{\mathcal{B}}$, 在 \mathcal{C} 下的表象为 $[v]_{\mathcal{C}}$, 映射关系见如下的交换图. 如何联系 v 在不同基下的表象, $[v]_{\mathcal{B}}$ 和 $[v]_{\mathcal{C}}$, 从而得到 τ ?

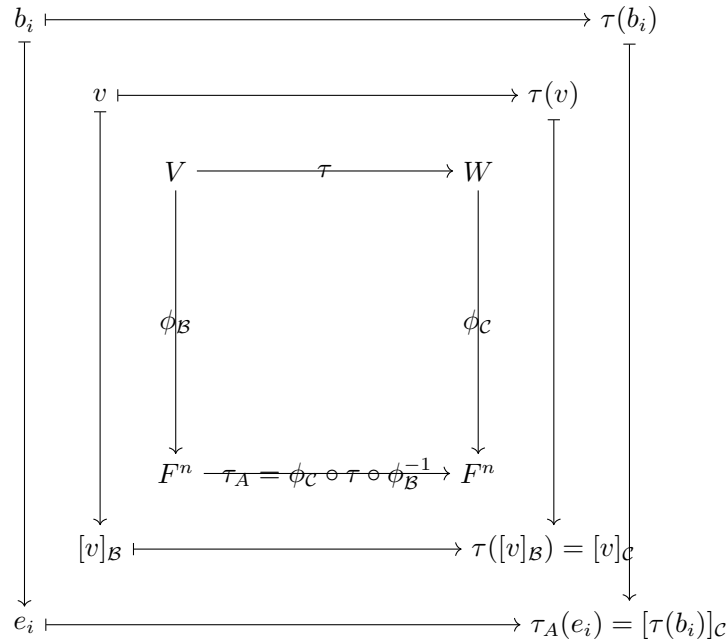


$[v]_{\mathcal{C}} = \tau([v]_{\mathcal{B}}) = M_{\tau}[v]_{\mathcal{B}}$, 其中 $M_{\tau} = \begin{pmatrix} \tau(e_1) & \cdots & \tau(e_n) \end{pmatrix}$.
 $\tau: F^n \rightarrow F^n, \quad e_i \mapsto \tau(e_i) = \phi_{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)) = \phi_{\mathcal{C}}(b_i),$
 $M_{\tau} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \equiv M_{\mathcal{BC}}.$

定理 2.8 (课本定理2.12):

$$[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{B}}$$

其中 $[v]_{\mathcal{B}}$ 和 $[v]_{\mathcal{C}}$ 分别是向量 v 在基 \mathcal{B} 和 \mathcal{C} 表象下的坐标表示, $M_{\mathcal{BC}}$ 是在两种坐标表示之间线性变换对应的矩阵.



$$\begin{aligned} M_{\tau_A} &= \begin{pmatrix} \tau_A(e_1) & \cdots & \tau_A(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_C \circ \tau \circ \phi_B^{-1}(e_1) & \cdots & \phi_C \circ \tau \circ \phi_B^{-1}(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_C \circ \tau(b_1) & \cdots & \phi_C \circ \tau(b_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_C & \cdots & [\tau(b_n)]_C \end{pmatrix} \equiv [\tau]_{BC}. \end{aligned}$$

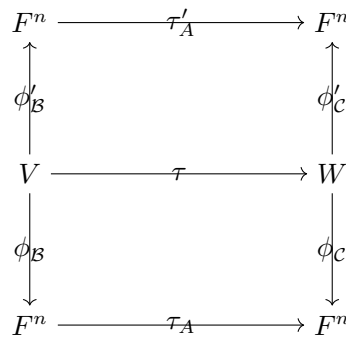
定理 2.9 (课本定理2.14):

$$[\tau(v)]_C = [\tau(v)]_{BC} [v]_B$$

其中 $[\tau(v)]_C$ 是 $\tau(v)$ 在基 C 的表象下的坐标表示, $[\tau(v)]_{BC}$ 是从基 B 的表象到基 C 的表象的线性变换的矩阵表示, $[v]_B$ 是 v 在基 B 的表象下的坐标表示.

定理 2.10 (课本定理2.15): $\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{L}(F^n, F^n) \approx M_{m \times n}(F)$, $\tau \mapsto \tau_A \mapsto [\tau]_{BC}$.

若我们改变 V 和 W 的基, 那么映射所联系的向量的坐标会如何?



$$\tau'_A = \phi'_C \phi_C^{-1} \tau_A \phi_B \phi_B'^{-1}.$$

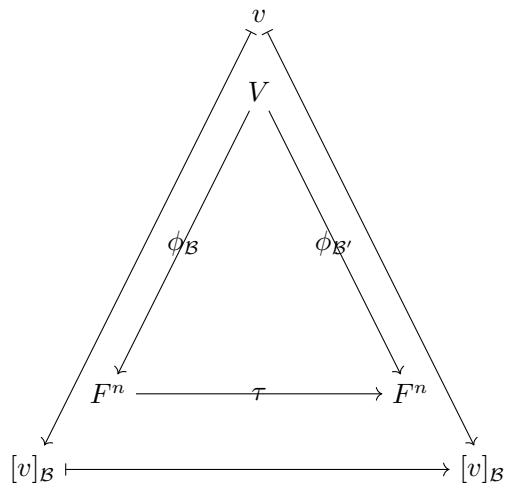
定理 2.11 (课本定理2.16):

$$[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

其中 $[\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}$ 分别是线性变换 τ 在基 $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ 和 $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ 下的表示, 矩阵 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 和 $M_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$ 分别对应了从基 \mathcal{B} 到基 \mathcal{B}' 和从基 \mathcal{C} 到基 \mathcal{C}' 的变换矩阵.

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆.

证: 设 $\phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow F^n, v = \sum_{i=1}^n r_i b_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $\phi_{\mathcal{B}'} : V \rightarrow F^n, v = \sum_{i=1}^n r'_i b'_i \mapsto [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_n \end{pmatrix}$, 即



$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_{\tau} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}, \text{ s.t. } [v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}.$$

$$\text{同理可以构造 } M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [b'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [b'_n]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}, \text{ s.t. } [v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'}.$$

$\forall [v]_{\mathcal{B}} \in F^n, M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}} \implies M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = n \times n$ 维的单位矩阵, 即 $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ 是 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 的逆, 故 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 可逆. \square

定理 2.12 (课本定理2.18): $B = PAQ$, 其中 P 和 Q 可逆, 则 B 与 A 等价.

(因为 B 和 A 是同一线性变换在两组不同的基下的表示.)

定理 2.13 (课本定理2.19): $B = PAP^{-1}$, 其中 P 可逆, 则 B 与 A 相似.

(因为 B 和 A 是同一线性算子在两组不同的基下的表示.)