

Chapter 8

特征值和特征向量

在上一章中, 我们介绍了多项式对应的伴阵, 那么, 如何由伴阵恢复多项式呢?

假设多项式 $p(x) = x^2 + ax + b$, 则其伴阵为 $C[p(x)] = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$,

$$\det(xI - C[p(x)]) = \begin{vmatrix} x & b \\ -1 & x+a \end{vmatrix} = x^2 + ax + b \text{ 即恢复多项式.}$$

同理, 对循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, 设其极小多项式为 $p_i^{e_{ij}}(x)$, 伴阵为 $C[p_i^{e_{ij}}(x)]$, 有 $\det(xI - C[p_i^{e_{ij}}(x)]) = p_i^{e_{ij}}(x)$, 由定理 ??, 线性算子 τ 的表示即为这些伴阵的直和, 故有

定义 8.1 特征多项式: $\det(xI - [\tau]_{\mathcal{B}}) = \prod_{ij} p_i^{e_{ij}}(x) \equiv C_{\tau}(x)$, 称为 τ 的特征多项式.

定理 8.1 (课本第3 版引理7.17, 定理7.18): 特征多项式在相似操作下不变, 或线性算子的特征多项式唯一, 与线性算子的表示无关.

证: 设线性算子 τ 在定序基 \mathcal{B} 和 \mathcal{B}' 下的表示分别为 $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } C_{[\tau]_{\mathcal{B}'}}(x) &= \det(xI - [\tau]_{\mathcal{B}'}) = \det(xI - M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(xI - [\tau]_{\mathcal{B}})M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}) = \det(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(xI - [\tau]_{\mathcal{B}})) \\ &= \det(xI - [\tau]_{\mathcal{B}}) = C_{[\tau]_{\mathcal{B}}}(x). \end{aligned} \quad \square$$

$\because C_{\tau}(x) = \prod_{ij} p_i^{e_{ij}} = \prod_i p_i^{\sum_{j=1}^{t_i} e_{ij}}$, $m_{\tau}(x) = up_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$, 且 $e_i = e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$ (不可约因子相同, 但幂次不等), $\therefore \deg C_{\tau}(x) = \sum_{ij} \deg p_i^{e_{ij}}(x) = \sum_{ij} d_{ij} = n \geq \deg m_{\tau}(x) \implies m_{\tau}(x) \mid C_{\tau}(x)$.

在 $F[x]$ 中, 任一一次多项式 $x - r$ 都是不可约的.

在 $\mathbb{R}[x]$ 中, 有实根 \iff 可约.

\because 实系数多项式的复根的共轭亦为该多项式的根, \therefore 实系数多项式的复根总是成对出现¹, 故 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式阶数 ≤ 2 .

证: 当多项式阶数 > 2 , 若阶数为奇数, 则多项式的根两两配对后必留下一个根, 该根必不为复数而为实数 \implies 可约; 若阶数为偶数, 以 4 阶为例, 假设多项式不可约, 设复根分别为 $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, 则多项式可写为 $(x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) = (x - (z_1 + \bar{z}_1)x + z_1\bar{z}_1)(x - (z_2 + \bar{z}_2)x + z_2\bar{z}_2)$.

¹

证: $0 \neq f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 若 $z \in \mathbb{C}$, s.t. $f(z) = 0$, 即 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$
 $\implies \overline{f(z)} = \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 = f(\bar{z}) = 0$, 故得证. \square

8. 特征值和特征向量

$(z_1 + \bar{z}_1), z_1 \bar{z}_1, (z_2 + \bar{z}_2), z_2 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}, \therefore (x - (z_1 + \bar{z}_1)x + z_1 \bar{z}_1), (x - (z_2 + \bar{z}_2)x + z_2 \bar{z}_2) \in \mathbb{R}[x] \implies$ 多项式可约, 故假设错误, 阶数 > 2 的偶数阶实系数多项式必可约. \square

例 8.1: $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ 无实根不可约. \square

$\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式可以是任意次.

可用 **Eisenstein 方法** 判别 $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式的可约性: $\forall f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 其中 $a_i \in \mathbb{Z}$, 若 \exists 素数 p , s.t. $p \nmid a_n, p \mid a_i, i=0, \dots, i=n-1, p^2 \nmid a_0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

定义 8.2 特征值和特征向量: $\tau \in \mathcal{L}(V), \lambda \in F$, 若 $\exists 0 \neq v \in V$, s.t. $\tau(v) = \lambda v$, 则称 λ 为 τ 的特征值, v 为 τ 的特征向量.

定义 8.3: $\mathcal{E}_\lambda \equiv \{\text{特征值 } \lambda \text{ 对应的特征向量}\} = \{v \in V \mid \tau(v) = \lambda v\}$.

\mathcal{E}_λ 是 V 的子空间.

证: $\forall u, v \in \mathcal{E}_\lambda, \forall r, t \in F, \tau(ru + tv) = r\tau(u) + t\tau(v) = r(\lambda v) + t(\lambda v) = \lambda(ru) + \lambda(tv) = \lambda(ru + tv) \implies ru + tv \in \mathcal{E}_\lambda$, 故得证. \square

定义 8.4 特征谱: $\text{spec}(\tau) \equiv \{\tau \text{ 的特征值}\}$.

$$(1) \tau(v) = \lambda v \iff \tau(v) - \lambda v = 0$$

$$\iff (\tau - \lambda)(v) = 0$$

$$\iff v \in \ker(\tau - \lambda)$$

$$(\because v \neq 0)$$

$$\iff \ker(\tau - \lambda) \neq \emptyset$$

$$\iff (\tau - \lambda) \text{ 非单}$$

$$\iff (\tau - \lambda) \text{ 是退化的.}$$

(也有教材将 $\tau - \lambda$ 退化作为特征值的定义.)

$$(2) v \neq 0 \text{ 是 } \lambda \text{ 对应的特征向量, } \tau(v) = \lambda v \iff (\tau - \lambda)(v) = 0.$$

若 $f(x) = x - \lambda$, 则 $f(\tau)(v) = 0$, 即 $f(x)$ 零化 $v \implies f(x) \in \text{ann}(v)$.

又 $\because x - \lambda$ 不可约, $\therefore \text{ann}(v) = \langle x - \lambda \rangle$.

$\because \text{ann}(V) = \langle m_\tau(x) \rangle, \therefore \forall u \in V, m_\tau(x)u = 0 \implies m_\tau(x)v = 0 \implies m_\tau(x) \in \text{ann}(v) = \langle x - \lambda \rangle \implies (x - \lambda) \mid m_\tau(x)$.

设 $m_\tau(x) = (x - \lambda)q(x)$, 其中 $q(x) \in F[x]$, 故特征值为极小多项式的根.

定理 8.2 (课本定理8.3): (1) $\text{spec}(\tau)$ 是 $m_\tau(x)$ 或 $C_\tau(x)$ 的根的集合.

(2) 矩阵的特征值在相似操作下不变, 即相似矩阵具有相同的特征值.

(3) \mathcal{E}_λ 是 $(\lambda I - A)x = 0$ 的解空间.

定理 8.3 (课本定理8.4): $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是 τ 的特征值且互不相等, 则

- (1) 取 $0 \neq v_i \in \mathcal{E}_{\lambda_i}$, 则 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 线性无关;
- (2) 若 $i \neq j$, $\mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} = \{0\}$.

证: (1) 若 $\sum_{i=1}^k r_i v_i = 0$, 则 $0 = \tau(0) = \tau\left(\sum_{i=1}^k r_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k r_i \tau(v_i) = \sum_{i=1}^k r_i \lambda_i v_i$, 即 $r_1 \lambda_1 v_1 + \dots + r_k \lambda_k v_k = 0$, 又有 $\lambda_k \left(\sum_{i=1}^k r_i v_i\right) = 0$, 即 $r_1 \lambda_k v_1 + r_2 \lambda_k v_2 + \dots + r_k \lambda_k v_k = 0$. 以上两式相减消去 v_k 项得, $r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$. 将 τ 作用于上式得, $\tau[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}] = r_1(\lambda_1 - \lambda_k)\lambda_1 v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)\lambda_2 v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\lambda_{k-1} v_{k-1} = \tau(0) = 0$. 消去 v_{k-1} 项得, $\lambda_{k-1}[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}] - \tau[r(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + r_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1}] = r_1(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_{k-1} - \lambda_1)v_1 + r_2(\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_{k-1} - \lambda_2)v_2 + \dots + r_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-2})(\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2})v_{k-2} = 0$. 重复以上操作 $k-1$ 次得, $r_1(\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1)v_1 = 0$. $\because \lambda_1, \dots, \lambda_k$ 互不相等且 $v_1 \neq 0$, $\therefore r_1 = 0$. 同理可得 $r_1 = \dots = r_k = 0$, 故 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 线性无关.

- (2) 取 $u \in \mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} \implies u \in \mathcal{E}_{\lambda_i} \implies \tau(u) = \lambda_i u$,
且 $u \in \mathcal{E}_{\lambda_j} \implies \tau(u) = \lambda_j u$.
以上两式相减得, $0 = \tau(u) - \tau(u) = \lambda_i u - \lambda_j u = (\lambda_i - \lambda_j)u$.
又 $\because \lambda_i \neq \lambda_j$, $\therefore u = 0 \implies \mathcal{E}_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}_{\lambda_j} = \{0\}$.

□

若 $\tau \in \mathcal{L}(V)$, $p(x) \in F[x]$, 则 $p(\tau) \in \mathcal{L}(V)$, 那么 $p(\tau)$ 与 τ 的特征值有何关系?

定理 8.4 特征谱映射定理(课本第3版定理8.3): F 为代数闭域^a, $p(x) \in F[x]$, 则 $\text{spec}(p(\tau)) = p(\text{spec}(\tau)) \equiv \{p(\lambda) \mid \lambda \in \text{spec}(\tau)\}$.

^a即 $F[x]$ 中不可约多项式阶数 = 1.

证: 先证 $p(\text{spec}(\tau)) \subseteq \text{spec}(p(\tau))$: $\forall v \in \text{spec}(\tau)$, $\tau(v) = \lambda v \implies \tau^k(v) = \lambda^k v$.
设 $p(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1x + a_0$, 则 $p(\tau) = \tau^d + a_{d-1}\tau^{d-1} + \dots + a_1\tau + a_0$.
 $p(\tau)(v) = \tau^d(v) + a_{d-1}\tau^{d-1}(v) + \dots + a_1\tau(v) + a_0 = \lambda^d v + a_{d-1}\lambda^{d-1}v + \dots + a_1\lambda v + a_0 = (\lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)v = p(\lambda)v$
 $\implies p(\lambda)$ 是 $p(\tau)$ 的特征值, 即 $p(\lambda) \in \text{spec}(p(\tau))$, 故 $p(\text{spec}(\tau)) \subseteq \text{spec}(p(\tau))$.
再证 $\text{spec}(p(\tau)) \subseteq p(\text{spec}(\tau))$: $\forall \lambda \in \text{spec}(p(\tau))$, $0 \neq v \in \mathcal{E}_\lambda$, 即 $p(\tau)(v) = \lambda v \implies (p(\tau) - \lambda)(v) = 0$.
令 $f(x) = p(x) - \lambda$, 则 $f(\tau)(v) = 0$.
 $\because \lambda \in F$, $\therefore f(x) \in F[x]$.
 $\because F[x]$ 是代数封闭的, $\therefore f(x)$ 可写为 $f(x) = (x - r_1) \dots (x - r_m)$, 其中 $r_i \in F$, 或有重复
 $\implies (\tau - r_1) \dots (\tau - r_m)(v) = 0$, 其中 $r_i \in \text{spec}(\tau)$,
其中必 $\exists r_i$, s.t. $(\tau - r_i) \dots (\tau - r_m)(v) = 0 \implies p(r_i) - \lambda = 0 \implies p(r_i) = \lambda$
 $\implies \lambda \in p(\text{spec}(\tau))$, 故 $\text{spec}(p(\tau)) \subseteq p(\text{spec}(\tau))$.
综上, 得证.

□

定义 8.5 约当标准型: F 为代数闭域, V 为 F 上的向量空间, $\dim V < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 的最小多项式 $m_\tau(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdots (x - \lambda_m)^{e_m}$,

此时 $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, 其中 $\text{ann}(V_i) = \langle (x - \lambda_i)^{e_i} \rangle$,

$V_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle v_{ij} \rangle$, 其中 $\text{ann}(v_{ij}) = \langle (x - \lambda_i)^{e_{ij}} \rangle$, $e_i = e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$, $\dim \langle v_{ij} \rangle = \deg(x - \lambda_i)^{e_{ij}} = e_{ij}$,

则定序基 $\mathcal{B}'_{ij} = \{v_{ij}, (\tau - \lambda_i)(v_{ij}), \cdots, (\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为 $\langle v_{ij} \rangle$ 下, 线性算子 τ 在 $\langle v_{ij} \rangle$ 中可表为 $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}'_{ij}} & \cdots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}'_{ij}} \end{pmatrix}$,

其中 $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [\tau(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i + \lambda_i)(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i)(v_{ij}) + \lambda_i(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\tau(b_2)]_{\mathcal{B}'_{ij}} =$

$[\tau(\tau - \lambda_i(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i + \lambda_i)((\tau - \lambda_i)(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i)^2(v_{ij}) + \lambda_i(\tau - \lambda_i)(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots,$

$[\tau((\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i + \lambda_i)((\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}))]_{\mathcal{B}'_{ij}} = [(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij}) + \lambda_i(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} =$

$[\lambda_i(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \end{pmatrix},$

从而 $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \equiv g(\lambda_i, e_{ij})$, 称为约当块,

定序基 $\mathcal{B} = \bigcup_{ij} \mathcal{B}'_{ij}$ 下, 线性算子 τ 可表为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} g(\lambda_1, e_{11}) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & g(\lambda_1, e_{1t_1}) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & g(\lambda_m, e_{m1}) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & g(\lambda_m, e_{mt_m}) \end{pmatrix},$$

称为约当标准型.

a

${}^a\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \dots, \tau^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 亦为 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ 的一组基, $[\tau]_{\mathcal{B}=\cup_{ij}\mathcal{B}_{ij}}$ 为有理标准型.

$\mathcal{B}'_{ij} = \{v_{ij}, (\tau - \lambda_i)(v_{ij}), \dots, (\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$ 的一组基.

证: 先证 \mathcal{B}'_{ij} 线性无关: 设 $l_0 v + l_1(\tau - \lambda_i)(v) + \dots + l_{m-1}(\tau - \lambda_i)^{m-1}(v) = 0$.

令 $h(x) = l_0 + l_1 x + \dots + l_{m-1} x^{m-1}$, 则 $h(x)v = 0 \implies h(x) \in \text{ann}(v_{ij}) = \langle(x - \lambda_i)^{e_{ij}} \rangle \implies (x - \lambda_i)^{e_{ij}} \mid h(x)$.

然而 $\because \deg(x - \lambda_i)^{e_{ij}} = e_{ij} \geq \deg h(x) = e_{ij} - 1$, $\therefore l_0 = l_1 = \dots = l_{e_{ij}-1} = 0$, 故 \mathcal{B}'_{ij} 线性无关.

再证 \mathcal{B}'_{ij} 生成 $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$: $\langle\langle v_{ij} \rangle\rangle = \{h(x)v \mid h(x) \in F[x]\} = \{h(\tau)(v) \mid h(x) \in F[x]\}$.

$\forall h(\tau)(v) \in \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, 若 $\deg h(x) \leq e_{ij} - 1$, 则 $h(\tau)v = (l_0 + l_1 \tau + \dots + l_{e_{ij}-1} \tau^{e_{ij}-1})(v) = (l_0 + l_1((\tau - \lambda_i) + \lambda_i) + \dots + l_{e_{ij}-1}((\tau - \lambda_i) + \lambda_i)^{e_{ij}-1})(v)$, 可由 \mathcal{B}'_{ij} 表示,

若 $\deg h(x) > e_{ij} - 1$, $h(x) = h((x - \lambda_i) + \lambda_i) = h'(x - \lambda_i) = q(x - \lambda_i)(x - \lambda_i)^{e_{ij}-1} + r(x - \lambda_i)$, 其中 $q(x - \lambda_i)$ 为商多项式, 余多项式 $r(x - \lambda_i) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg(x - \lambda_i)^{e_{ij}-1} = e_{ij} - 1$

$\implies h(\tau)(v_{ij}) = h'(\tau - \lambda_i)(v_{ij}) = (q(\tau - \lambda_i)(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1} + r(\tau - \lambda_i))(v_{ij}) = q(\tau - \lambda_i)(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) + r(\tau - \lambda_i)(v_{ij})$, 其中 $\because (x - \lambda_i)^{e_{ij}-1} \in \text{ann}(v_{ij})$, $\therefore (\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) = 0 \implies h(\tau)v_{ij} = r(\tau)(v_{ij})$, 可由 \mathcal{B}'_{ij} 表示.

综上, 得证. □

有理标准型的存在无需附加条件, 而约当标准型的存在是需要附加条件的: 仅当极小多项式能分解成一次多项式的乘积, 即 $m_\tau(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \dots (x - \lambda_m)^{e_m}$ 时, 约当标准型才存在.

上面我们看到, $\tau((\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij})) = \lambda(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}}(v_{ij})$, 即 $(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \in \mathcal{E}_{\lambda_i}$, 那么, 是否还有其他向量 $\in \mathcal{E}_{\lambda_i}$?

$\{(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \mid j = 1, \dots, t_i\} \subseteq \mathcal{E}_{\lambda_i}$, $\because V_{p_i} = \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij} \rangle\rangle$, $\therefore \{(\tau - \lambda_i)^{e_{ij}-1}(v_{ij}) \mid j = 1, \dots, t_i\}$ 线性无关.

定义 8.6 代数重数: 在 $\mathcal{C}_\tau(x)$ 中 λ_i 作为根的重数, 即 $\dim V_{p_i} = \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij}$.

定义 8.7 几何重数: $\dim \mathcal{E}_{\lambda_i} = t_i$.

定理 8.5 (课本定理8.5): 代数重数 $\dim V_{p_i} = \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij} \geq$ 几何重数 $\dim \mathcal{E}_{\lambda_i} = t_i$

证: $e_i \geq e_{i1} \geq \dots \geq e_{it_i} \geq 0$, 故得证. □

几何重数 = 代数重数的特殊情况下, $[\tau]$ 的约当标准型何如?

若几何重数 = 代数重数, 即 $\dim V_{p_i} = \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}$, 则 $e_{ij} = 1 \forall j \implies m_\tau(\lambda) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$.

此时 $[\tau]_{\mathcal{B}'_{ij}} = \begin{pmatrix} \lambda_i \end{pmatrix}$, $[\tau]_{\mathcal{B}'} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

定理 8.6 (课本定理8.10, 8.11, 8.18): 下列叙述等价:

τ 可对角化, 即 \exists 一组基 \mathcal{B} , s.t. $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 为对角阵.

(2) 几何重数 = 代数重数.

(3) $m_\tau(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$, λ_i 互不相等.

(4) $V_{p_i} = \mathcal{E}_{\lambda_i}$, $V = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_m}$.

(5) 特征向量构成 V 的基.

(6) $\tau = \lambda_1 \rho_1 + \cdots + \lambda_k \rho_k$, 其中 $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 为单位分解, $\text{spec}(\tau) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$, $\text{Im } \rho_i = \mathcal{E}_{\lambda_i}$,
 $\ker \rho_i = \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{E}_{\lambda_j}$.

8.1 投影算子

定义 8.8 投影(算子): 向量空间 $V = S \oplus T$, 映射 $\rho_{ST} : V \rightarrow V$, $u_S + u_T \mapsto u_S$, 其中 $u_S \in S$, $u_T \in T$, 则 ρ_{ST} 称为在 S 上沿 T 的投影(算子).

$$\ker \rho_{ST} = T, \text{Im } \rho_{ST} = S, V = \ker \rho_{ST} \oplus \text{Im } \rho_{ST}.$$

定理 8.7 (课本第3 版定理2.21): (1) $V = S \oplus T$, 则 $\rho_{ST} + \rho_{TS} = 1_V$ (V 上的恒等变换) 且 $\rho_{ST} \circ \rho_{TS} = \rho_{TS} \circ \rho_{ST} = 0_V$ (V 上的零变换).

(2) $\sigma \in \mathcal{L}(V)$, 若 $V = \ker \sigma \oplus \text{Im } \sigma$ 且 $\sigma|_{\text{Im } \sigma} = 1|_{\text{Im } \sigma}$, 其中 $|_{\text{Im } \sigma}$ 代表算子定义域为 $\text{Im } \sigma$, 则 σ 是在 $\text{Im } \sigma$ 上沿 $\ker \sigma$ 的投影.

证: (1) $\forall v \in V, \because V = S \oplus T, \therefore v = v_S + v_T$, 其中 $v_S \in S, v_T \in T$

$$\Rightarrow (\rho_{ST} + \rho_{TS})(v) = (\rho_{ST} + \rho_{TS})(v_S + v_T) = \rho_{ST}(v_S) + \rho_{ST}(v_T) + \rho_{TS}(v_S) + \rho_{TS}(v_T) = v_S + 0 + 0 + v_T = v \Rightarrow \rho_{ST} + \rho_{TS} = 1;$$

$$\Rightarrow \rho_{ST} \circ \rho_{TS}(v) = \rho_{ST}(\rho_{TS}(v_S + v_T)) = \rho_{ST}(\rho_{TS}(v_S) + \rho_{TS}(v_T)) = \rho_{ST}(0 + v_T) = 0 \Rightarrow \rho_{ST} \circ \rho_{TS} = 0.$$

同理, $\rho_{TS} \circ \rho_{ST} = 0$.

(2) $\forall v \in V, \because V = \ker \sigma \oplus \text{Im } \sigma, \therefore v = v_{\ker} + v_{\text{Im}}$, 其中 $v_{\ker} \in \ker \sigma, v_{\text{Im}} \in \text{Im } \sigma$

$$\Rightarrow \sigma(v) = \sigma(v_{\ker} + v_{\text{Im}}) = \sigma(v_{\ker}) + \sigma(v_{\text{Im}}) = \sigma(v_{\ker}) + 1(v_{\text{Im}}) = 0 + v_{\text{Im}} = v_{\text{Im}}, \text{ 故 } \sigma \text{ 为 } \text{Im } \sigma \text{ 上沿 } \ker \sigma \text{ 的投影.}$$

□

定理 8.8 (课本定理第3 版2.22): $\rho \in \mathcal{L}(V)$ 为投影 $\iff \rho^2 = \rho$.

证: “ \implies ”: $\forall v \in V, v = u_S + u_T$, 其中 $u_S \in S, u_T \in T$.

$$\rho(v) = u_S, \rho(\rho(v)) = \rho(u_S) = u_S \implies \rho^2 = \rho.$$

“ \impliedby ”: 首先将 V 分解成 $V = \ker \rho \oplus \text{Im } \rho$:

$$\text{一方面, } \forall v \in \ker \rho \cap \text{Im } \rho \implies v \in \ker \rho \iff \rho(v) = 0,$$

$$\text{且 } v \in \text{Im } \rho \iff \exists u \in V, \text{ s.t. } v = \rho(u)$$

$$\iff 0 = \rho(v) = \rho(\rho(u)) = \rho^2(u) = \rho(u) = v \implies \ker \rho \cap \text{Im } \rho = \{0\}.$$

另一方面, $\forall v \in V, \rho(v) \in \text{Im } \rho$.

$$\because \rho(v - \rho(v)) = \rho(v) - \rho(\rho(v)) = \rho(v) - \rho^2(v) = 0, \therefore v = (v - \rho(v)) + \rho(v), \text{ 其中 } v - \rho(v) \in \ker \rho, \rho(v) \in \text{Im } \rho \implies V = \ker \rho + \text{Im } \rho.$$

故 $V = \ker \rho \oplus \text{Im } \rho$.

又 $\because \forall \rho(u) \in \text{Im } \rho, \rho(\rho(u)) = \rho^2(u) = \rho(u) \implies \rho|_{\text{Im } \rho} = 1|_{\text{Im } \rho}, \therefore$ 由定理 8.7, ρ 为在 $\text{Im } \rho$ 上沿 $\ker \rho$ 的投影.

综上, 得证.

□

定义 8.9 正交: $\rho, \sigma \in \mathcal{L}(V)$ 为投影, 若 $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho = 0$, 则称 ρ 与 σ 正交, 记作 $\rho \perp \sigma$.

$$\rho \perp \sigma \iff \forall v \in V, \rho \circ \sigma(v) = \rho(\sigma(v)) = 0 \text{ 且 } \sigma \circ \rho(v) = \sigma(\rho(v)) = 0 \iff \text{Im } \sigma \subseteq \ker \rho \text{ 且 } \text{Im } \rho \subseteq \ker \sigma.$$

定义 8.10 单位分解: $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$, 其中 ρ_i 为投影且互相 \perp , 则称该式为单位分解.

定理 8.9 (课本第3版定理2.25): (1) $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 为单位分解, 则 $\text{Im } \rho_1 \oplus \cdots \oplus \text{Im } \rho_k = V$.

(2) 若 $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$, 令 ρ_i 是在 S_i 上沿 $\sum_{j \neq i} S_j$ 的投影, 则 $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 为单位分解.

证: (1) 先证 V 由 $\{\text{Im } \rho_1, \cdots, \text{Im } \rho_k\}$ 生成: $\forall v \in V, v = 1(v) = (\rho_1 + \cdots + \rho_k)(v) = \rho_1(v) + \cdots + \rho_k(v)$, 其中 $\rho_i(v) \in \text{Im } \rho_i$.

再证 $\text{Im } \rho_i \cap (\cup_{j \neq i} \text{Im } \rho_j) = \{0\}$: $\forall v \in \text{Im } \rho_i \cap (\cup_{j \neq i} \text{Im } \rho_j) \iff v \in \text{Im } \rho_i \iff \rho_i(v) = v$,

且 $\exists j \neq i$, s.t. $v \in \text{Im } \rho_j \iff \exists u \in V$, s.t. $\rho_j(u) = v$

$\implies v = \rho_i(v) = \rho_i(\rho_j(u)) = \rho_i \circ \rho_j(u) = 0 \implies \text{Im } \rho_i \cap (\sum_{j \neq i} \text{Im } \rho_j) = \{0\}$.

综上, 得证.

(2) $\forall v \in V, \because V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k, \therefore v = v_1 + \cdots + v_k$, 其中 $v_i = \rho_i(v) \in S_i$

$\implies v = \rho_1(v) + \cdots + \rho_k(v) = (\rho_1 + \cdots + \rho_k)(v) \implies \rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$.

$\forall v \in V, \rho_j(v) \in \text{Im } \rho_j = S_j \subseteq \sum_{j \neq i} S_i \implies \rho_i \circ \rho_j(v) = \rho_i(\rho_j(v)) = 0$, 其中 $i \neq j \implies \rho_i \circ \rho_j = 0$.

同理, $\rho_j \circ \rho_i = 0$, 故 ρ_i 与 ρ_j 正交, 故 $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 为单位分解.

□

若 $V = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_k}$, 令 ρ_i 为在 \mathcal{E}_{λ_i} 上沿 $\sum_{j \neq i} \mathcal{E}_{\lambda_j}$ 的投影, 则 $\rho_1 + \cdots + \rho_k = 1$ 是单位分解,
 $\rho_i|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}} = 1|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}} \implies \forall v \in \mathcal{E}_{\lambda_i}, \tau(v) = \lambda_i v = \lambda \rho_i(v)$, 即在 \mathcal{E}_{λ_i} 上, $\tau|_{\mathcal{E}_{\lambda_i}} = \lambda \rho_i$, 从而引出定理 8.6 (6).