

# Chapter 0

## 代数学基础

### 0.1 常用符号

- $\forall$ : 对所有 (for all).
- $\exists$ : 存在 (there exists).
- $\exists!$ : 存在且唯一 (there exists exactly one).
- s.t.: 使得 (such that).
- $\mathbb{N}$ : 自然数.
- $\mathbb{Z}$ : 整数.
- $\mathbb{Q}$ : 有理数.
- $\mathbb{R}$ : 实数.
- $\mathbb{C}$ : 复数.

### 0.2 集合

定义 0.1 集合(Set): 略.

元素与集合之间的关系: 对元素  $a$  和集合  $S$ ,

- $a \in S$  或
- $a \notin S$ .

集合中元素之间的关系:  $\forall a, b \in S$ ,

- $a = b$  或
- $a \neq b$ .

集合与集合之间的关系: 对集合  $A, B$  和全集  $I$ ,

- (1) 交集:  $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ 且 } a \in B\}$ .
- (2) 并集:  $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ 或 } a \in B\}$ .
- (3) 差:  $B - A = \{a \mid a \in B \text{ 且 } a \notin A\}$ .
- (4) 补集:  $A' = I - A = \{a \mid a \in I \text{ 且 } a \notin A\}$ .
- (5) 包含:  $A \subseteq B$ , 称  $A$  包含于  $B$ , 或称  $B$  包含  $A$ , 或称  $B$  是  $A$  的子集  
 $\iff A \cup B = A \iff A \cup B = B$ .

证:  $A \subseteq B \implies A \cap B = A$ :  $\because A \subseteq B, \therefore \forall a \in A, a \in B \implies A \subseteq A \cap B$ .

$\forall a \in A \cup B$ , 由交集定义,  $a \in A \implies A \cap B \subseteq A$ .

故  $A \cap B = A$ .

$A \subseteq B \iff A \cap B = A$ :  $\because A \cap B = A, \therefore \forall a \in A, a \in B \implies A \subseteq B$ .

$A \subseteq B \implies A \cup B = B$ :  $\because A \subseteq B, \forall a \in A, a \in B, \therefore \forall a \in A \cup B, a \in B \implies A \cup B \subseteq B$ .

$\because A \subseteq B, \forall a \in A$ , 由并集定义,  $a \in A \cup B \implies B \subseteq A \cup B$ .

故  $A \cup B = B$ .

$A \subseteq B \iff A \cup B = B$ :  $\forall a \in A$ , 由并集定义,  $a \in A \cup B$ , 又  $\because A \cup B = B, \therefore a \in B \implies A \subseteq B$ .

综上, 得证. □

常用公式:

- (1)  $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$ .

证:  $\forall a \in A(\cup_i B_i) \iff a \in A \text{ 且 } a \in \cup_i B_i$

$\iff a \in A \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \in B_k$

$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A \cap B_k \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$

$\iff a \in \cup_i (A \cap B_i)$ , 故  $A \cap (\cup_i B_i) \subseteq \cup_i (A \cap B_i)$ .

$\forall a \in \cup_i (A \cap B_i) \iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A \cap B_k$

$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A \text{ 且 } a \in B_k$

$\iff a \in A \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \in B_k$

$\iff a \in A \text{ 且 } a \in \cup_i B_i$

$\iff a \in A \cap (\cup_i B_i)$ , 故  $\cup_i (A \cap B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i)$ .

综上, 得证. □

- (2)  $A \cup (\cap_i B_i) = \cap_i (A \cup B_i)$ .

证:  $\forall a \in A \cup (\cap_i B_i) \iff a \in A \text{ 或 } a \in \cap_i B_i$

$\iff a \in A \text{ 或 } \forall i, \text{ s.t. } a \in B_i$

$\iff \forall i, a \in A \text{ 或 } a \in B_i$

$\iff \forall i, a \in A \cup B_i$

$\iff \cap_i (A \cup B_i)$ , 故  $A \cup (\cap_i B_i) \subseteq \cap_i (A \cup B_i)$ .

$\forall a \in \cap_i (A \cup B_i) \iff \forall i, a \in A \cup B_i$

$\iff \forall i, a \in A \text{ 或 } a \in B_i$

$\iff a \in A \text{ 或 } \forall i, a \in B_i$

$$\iff a \in A \text{ 或 } a \in \cup_i B_i$$

$$\iff a \in A \cap (\cup_i B_i), \text{ 故 } \cap_i (A \cup B_i) \subseteq A \cap (\cup_i B_i).$$

综上, 得证. □

$$(3) (\cup_i A_i)' = \cap_i A_i'.$$

$$\text{证: } \forall a \in (\cup_i A_i)' \iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cup_i A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \forall i, a \notin A_i$$

$$\iff \forall i, a \in I \text{ 且 } a \notin A_i$$

$$\iff \forall i, a \in A_i'$$

$$\iff a \in \cap_i A_i', \text{ 故 } (\cup_i A_i)' \subseteq \cap_i A_i'.$$

$$\forall a \in \cap_i A_i' \iff \forall i, a \in I \text{ 且 } a \notin A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \forall i, a \notin A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cup_i A_i'$$

$$\iff a \in (\cup_i A_i)', \text{ 故 } \cap_i A_i' \subseteq (\cup_i A_i)'.$$

综上, 得证. □

$$(4) (\cap_i A_i)' = \cup_i A_i'.$$

$$\text{证: } \forall a \in (\cap_i A_i)' \iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cap_i A_i$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \notin A_k$$

$$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in I \text{ 且 } a \notin A_k$$

$$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A_k'$$

$$\iff a \in \cup_i A_i', \text{ 故 } (\cap_i A_i)' \subseteq \cup_i A_i'.$$

$$\forall a \in \cup_i A_i' \iff \exists k, \text{ s.t. } a \in A_k'$$

$$\iff \exists k, \text{ s.t. } a \in I \text{ 且 } a \notin A_k$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } \exists k, \text{ s.t. } a \notin A_k$$

$$\iff a \in I \text{ 且 } a \notin \cap_i A_i$$

$$\iff a \in (\cap_i A_i)', \text{ 故 } \cup_i A_i' \subseteq (\cap_i A_i)'.$$

综上, 得证. □

## 0.3 映射

**定义 0.2 映射:**  $\forall a \in S_1, \exists! b \in S_2, \text{ s.t. } b = f(a)$ , 记作  $f : S_1 \rightarrow S_2, a \mapsto b$ , 其中称  $S_1$  为定义域,  $S_2$  为值域,  $b$  为  $a$  的像,  $a$  为  $b$  的原像.

**例 0.1 恒等映射:**  $1_S : S \rightarrow S, a \mapsto 1_S(a) = a$ . □

**定义 0.3 映射相等:** 映射  $f : S_1 \rightarrow S_2, g : S_1 \rightarrow S_3, \forall a \in S_1, f(a) = g(a)$ , 则称  $f$  与  $g$  相等, 记作  $f = g$ .

$$\forall a \in S_1, \{f(a)\} \subseteq S_2 \text{ 且 } |\{f(a)\}| = 1.$$

**定义 0.4 原像集:**  $f^{-1}(b) \equiv \{a \in S_1 \mid f(a) = b\}$ .

$f^{-1}(b) \subseteq S_1$ ,  $f^{-1}(b)$  可能  $= \emptyset$ .

**定义 0.5 像集:**  $\text{Im } f = f(S_1) \equiv \{b \in S_2 \mid b = f(a) \forall a \in S_1\}$ .

$\text{Im } f \subseteq S_2$ .

**基本性质:**

$$(1) A \subseteq S_1 \implies A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

**证:**  $\forall a \in A$ ,  $\because A \subseteq S_1$ ,  $\therefore a \in S_1$ .

又  $\because f(a) \in f(A)$ ,  $\therefore a \in f^{-1}(f(A))$ , 故  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ . □

若  $\exists a \in S_1 - A$ , s.t.  $f(a) \in f(A)$ , 则  $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$ .

$$(2) B \subseteq S_2 \implies B \supseteq f(f^{-1}(B)).$$

**证:**  $\because f^{-1}(B) = \{a \in S_1 \mid f(a) \in B\}$ ,  $\therefore \forall a \in f^{-1}(B)$ ,  $f(a) \in B \implies f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ . □

若  $\exists b \in B$ , s.t.  $\forall a \in S_1$ ,  $f(a) \neq b$  (即  $B$  中有元素在  $S_1$  中无原像), 则  $B \supsetneq f(f^{-1}(B))$ .

若  $\forall b \in B$ ,  $\exists a \in A$ , s.t.  $f(a) = b$ , 则  $B = f(f^{-1}(B))$ .

$$(3) f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i).$$

**证:**  $\forall a \in f^{-1}(\cup_i B_i)$ ,  $\exists k$ , s.t.  $f(a) \in B_k$

$\iff \exists k$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_k)$

$\iff a \in \cup_i f^{-1}(B_i)$ , 故  $f^{-1}(\cup_i B_i) \subseteq \cup_i f^{-1}(B_i)$ .

$\forall a \in \cup_i f^{-1}(B_i)$ ,  $\exists k$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_k)$

$\iff \exists k$ , s.t.  $f(a) \in B_k$

$\iff f(a) \in \cup_i B_i$

$\iff a \in f^{-1}(\cup_i B_i)$ , 故  $\cup_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cup_i B_i)$ .

综上, 得证. □

$$(4) f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i).$$

**证:**  $\forall a \in f^{-1}(\cap_i B_i)$ ,  $\exists k$ , s.t.  $f(a) \in B_k$

$\iff \exists k$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_k)$

$\iff a \in \cap_i f^{-1}(B_i)$ , 故  $f^{-1}(\cap_i B_i) \subseteq \cap_i f^{-1}(B_i)$ .

$\forall a \in \cap_i f^{-1}(B_i)$ ,  $\forall i$ , s.t.  $a \in f^{-1}(B_i)$

$\iff \forall i$ , s.t.  $f(a) \in B_i$

$\iff f(a) \in \cap_i B_i$

$\iff a \in f^{-1}(\cap_i B_i)$ , 故  $\cap_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\cap_i B_i)$ .

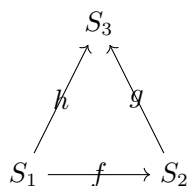
综上, 得证. □

**定义 0.6 映射的复合:** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $g: S_2 \rightarrow S_3$ , 则称映射  $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ ,  $a \mapsto g \circ f(a) \equiv g(f(a))$  为  $f$  和  $g$  的复合.

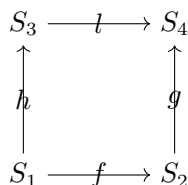
**定理 0.1 映射复合的结合律:**  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

故连续复合  $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$  无需括号.

**定义 0.7 交换图:**  $f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $h: S_1 \rightarrow S_3$ ,  $g: S_2 \rightarrow S_3$ , 若  $g \circ f = h$ , 则称该图交换.



$f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $g: S_2 \rightarrow S_4$ ,  $h: S_1 \rightarrow S_3$ ,  $l: S_3 \rightarrow S_4$ , 若  $g \circ f = l \circ h$ , 则称该图交换.



**定义 0.8 单射(Injective 或 One-to-one):** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $\forall a, b \in S_1$ , 若  $f(a) = f(b) \implies a = b$ , 则称  $f$  单射.

单射的性质:

(1)  $c \in S_2$ ,  $f$  单射, 若  $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ , 则  $|f^{-1}(c)| = 1$ .

(2)  $f$  单射  $\iff A = f^{-1}(f(A))$ .

**定义 0.9 满射(Surjective):** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ , 若  $\forall b \in S_2, \exists a \in S_1$ , s.t.  $f(a) = b$  (即  $\text{Im } f = S_2$ ), 则称  $f$  满射.

满射的性质:

(1)  $f$  满射  $\iff \forall B \subseteq S_2, f^{-1}(B) \neq \emptyset$ .

(2)  $f$  满射  $\iff \forall B \subseteq S_2, B = f(f^{-1}(B))$ .

**定义 0.10 双射:** 映射  $f$  单射且满射  $\iff f$  双射.

**例 0.2:** 恒等映射是双射的. □

常用结论:

(1)  $f, g$  单射  $\implies g \circ f$  单射.

证:  $\forall a, b \in S_1$ , 若  $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ ,  $\because g$  单射,  $\therefore f(a) = f(b)$ ,  
又  $\because f$  单射,  $\therefore a = b$ , 故  $g \circ f$  单射. □

(2)  $g \circ f$  单射  $\implies f$  单射.

证:  $\forall a, b \in S_1$ , 若  $f(a) = f(b)$ , 则  $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ ,  
又  $\because g \circ f$  单射,  $\therefore a = b$ , 故  $f$  单射. □

**例 0.3**  $g \circ f$  单射, 而  $g$  非单射的例子: 集合  $S_1 = \{0\}$ ,  $S_2 = \{0, 1\}$ ,  $S_3 = \{0\}$ ,  
映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $f(a) = 0 \forall a \in S_1$ , 单射,  
 $g: S_2 \rightarrow S_3$ ,  $g(b) = 0 \forall b \in S_2$ , 非单射,  $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ ,  $g(a) = 0$ , 单射. □

(3)  $f, g$  满射  $\implies g \circ f$  满射.

证:  $\forall c \in S_3$ ,  $\because g$  满射,  $\therefore \exists b \in S_2$ , s.t.  $g(b) = c$ ,  
又  $\because f$  满射,  $\therefore \exists a \in S_1$ , s.t.  $f(a) = b \implies g \circ f(a) = c$ , 故  $g \circ f$  满射. □

(4)  $g \circ f$  满射  $\implies g$  满射.

证:  $\because g \circ f$  满射,  $\therefore \forall c \in S_3$ ,  $\exists a \in S_1$ , s.t.  $g \circ f(a) = c$   
 $\implies \exists b = f(a) \in S_2$ , s.t.  $g(b) = c$ , 故  $g$  满射. □

**例 0.4**  $g \circ f$  满射, 而  $f$  非满射的例子: 集合  $S_1 = \{0\}$ ,  $S_2 = \{0, 1\}$ ,  $S_3 = \{0\}$ ,  
映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ ,  $f(a) = 0 \forall a \in S_1$ , 非满射,  
 $g: S_2 \rightarrow S_3$ ,  $g(b) = 0 \forall b \in S_2$ , 满射,  $g \circ f: S_1 \rightarrow S_3$ ,  $g(a) = 0$ , 满射. □

**定理 0.2:** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$  单射  $\iff \exists$  映射  $g: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $g \circ f = 1_{S_1}$ , 这样的  $g$  称为  $f$  的左逆.

证: “ $\implies$ ”: 构造  $g(b) = \begin{cases} a, & a \in f^{-1}(b), \\ \text{任意取一个 } a_0 \in S_1, & f^{-1}(b) = \emptyset, \end{cases}$ ,  
 $\forall a \in S_1$ , 记  $b = f(a)$ ,  $\because f$  单射且  $a \in f^{-1}(b) \neq \emptyset$ ,  $\therefore |f^{-1}(b)| = 1$ ,  
 $\implies g \circ f(a) = a \implies g \circ f = 1_{S_1}$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $\forall a, b \in S_1$ , 若  $f(a) = f(b)$ , 则  $a = 1_{S_1} = g \circ f(a) = g \circ f(b) = 1_{S_1}(b) = b$ , 故  $f$  单射. □

由于当  $f^{-1}(b) = \emptyset$  时,  $g(b)$  的取值具有任意性, 故若左逆存在, 则不唯一.

**定理 0.3:** 映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$  满射  $\iff \exists$  映射  $h: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $f \circ h = 1_{S_2}$ , 这样的  $h$  称为  $f$  的右逆.

证: “ $\implies$ ”:  $\because f$  满射,  $\therefore \forall b \in S_2$ ,  $\exists a \in S_1$ , s.t.  $f(a) = b$ , 故可构造  $h(b) = a \in f^{-1}(b)$ ,  
从而  $f \circ h(b) = b \implies f \circ h = 1_{S_2}$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $\forall b \in S_2$ ,  $\exists a = h(b) \in S_1$ , s.t.  $f \circ h(b) = 1_{S_2}(b) = b$ , 故  $f$  满射. □

由于  $|f^{-1}(b)| \geq 1$ ,  $h(b)$  的取值可能具有任意性, 故若右逆存在, 则不唯一.

**定理 0.4:** 若映射  $f$  同时存在左逆和右逆, 则其左逆 = 右逆, 此时称  $f$  可逆, 且此时  $f$  双射.

证: 因为  $f$  同时存在左逆和右逆, 由定理 0.2 和 0.3 得  $f$  双射.

设左逆  $g: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $g \circ f = 1_{S_1}$ , 右逆  $h: S_2 \rightarrow S_1$ , s.t.  $f \circ h = 1_{S_2}$ .

假设  $g \neq h$ , 则  $\exists b \in S_2$ , s.t.  $g(b) \neq h(b)$ ,

又  $\because f$  单射,  $\therefore b = 1_{S_2}(b) = f \circ g(b) \neq f \circ h(b)$ .

$\because f$  满射,  $\therefore \exists a \in S_1$ , s.t.  $b = f(a) \implies f(a) = b \neq f \circ g \circ f(a) = 1_{S_2}(f(a)) = f(a)$ , 这显然是荒谬的, 故假设错误,  $g = h$ .  $\square$

## 0.4 等价关系和等价类

**定义 0.11 卡氏积:** 集合  $S_1$  和  $S_2$  的卡氏积  $S_1 \times S_2 \equiv \{(a, b) \mid a \in S_1, b \in S_2\}$ .

集合  $S$  的卡氏积  $S \times S \equiv \{(a, b) \mid a, b \in S\}$ .

注意, 一般  $(a, b) \neq (b, a)$ .

**定义 0.12 关系:** 卡氏积的子集.  $\mathcal{R} \in S \times S$ , 称为  $S$  上的关系.

**例 0.5:** 自然数集  $\mathbb{N}$  的卡氏积  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ .

小于关系:  $\mathcal{R}_1 = \{(n, m) \mid n - m < 0\}$ .  $(1, 2) \in \mathcal{R}_1$ , 记作  $1\mathcal{R}_1 2$ .

等于关系:  $\mathcal{R}_2 = \{(n, m) \mid n - m = 0\}$ .  $(1, 1) \in \mathcal{R}_2$ , 记作  $1\mathcal{R}_2 1$ .  $\square$

**定义 0.13 图:** 对映射  $f: S_1 \rightarrow S_2$ , 有关系  $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in S_1\} \subseteq S_1 \times S_2$ , 称  $G_f$  为  $f$  的图.

(第一个坐标在此关系中仅出现一次, 不会重复.)

映射与图一一对应.

**定义 0.14 等价关系:** 关系  $\mathcal{R} \in S \times S$ , 若满足

反身性:  $\forall a \in S, (a, a) \in \mathcal{R}$  (即  $a \sim a \forall a \in S$ )

(2) 对称性: 若  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , 则  $(b, a) \in \mathcal{R}$  (即  $a \sim b \iff b \sim a$ )

(3) 传递性: 若  $(a, b) \in \mathcal{R}, (b, c) \in \mathcal{R}$ , 则  $(a, c) \in \mathcal{R}$  (即  $a \sim b, b \sim c \iff a \sim c$ )

则称  $\mathcal{R}$  为  $S$  上的等价关系. 若元素  $a, b$  具有等价关系, 记作  $a \sim b$ .

**定义 0.15 等价类:** 由具有等价关系的元素组成的集合.  $\forall a \in S, [a] \equiv \{b \in S \mid b \sim a\} \subseteq S$  称为  $a$  的等价类,  $a$  称为该等价类的代表元.

$\because a \in [a], \therefore [a]$  非空.

$c \in S$ , 则有且仅有以下两种情况:

(1)  $c \in [a] \iff c \sim a \iff a \sim c \iff a \in [c] \iff [a] = [c]$ .

(2)  $c \notin [a] \iff [a] \cap [c] = \emptyset$ .

证: 假设  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ , 则  $\exists c \in [a] \cap [b]$

$\iff c \in [a]$  且  $c \in [b]$ , 即  $c \sim a$  且  $c \sim b$

$\implies a \sim b \implies [a] = [b]$ , 得证.  $\square$

### 等价类的性质

- (1)  $a \in [b] \iff b \in [a] \iff [a] = [b]$ .
- (2)  $a \notin [b] \iff [a] \cap [b] = \emptyset$ .
- (3)  $\forall a, b \in S$ , 要么  $[a] = [b]$ , 要么  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .  
(以上三条证明见前文.)
- (4)  $S = \cup_{i \in K, a_i \in S} [a_i]$ , 其中  $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \forall i \neq j$ .

证:  $S = \cup_a \{a\}$ , 合并各等价类, 即得证. □

等价类这一概念可用于将大问题分解为小问题加以解决.

**定义 0.16 剖分:** 集合  $S \neq \emptyset$ , 若  $S = \cup_{i \in K, S_i \subseteq S} S_i$  且  $S_i \cap S_j = \emptyset \forall i \neq j$ , 则称  $\{S_i \subseteq S \mid i \in K\}$  为  $S$  的剖分.

可由集合的等价类得到它的一个剖分.

**定义 0.17 商类:** 所有等价类的集合.  $\frac{S}{\sim} \equiv \{[a] \mid a \in S\}$ .  $\pi: S \rightarrow \frac{S}{\sim}, a \mapsto [a]$  称为自然映射.

自然映射满射, 但未必单射.

**定义 0.18 运算:** 映射  $*$ :  $S \times S \rightarrow S$  称为  $S$  上的运算, 记作  $(S, *)$ .

$$\forall a, b \in S, a * b \in S.$$

## 0.5 群

**定义 0.19 群:** 若  $(G, *)$  满足

结合律:  $(a * b) * c = a * (b * c)$

(故  $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$  无需括号, 可写为  $\prod_{i=1}^n a_i$ .)

(2) 有单位元  $e$ : s.t.  $e * a = a * e = a$

(3) 有逆元:  $\forall a \in G, \exists b$ , s.t.  $a * b = b * a = e$ , 则称  $b$  为  $a$  的逆, 记作  $b = a^{-1}$

则称  $(G, *)$  为群.

**定理 0.5:** 单位元是唯一的.

证: 假设  $e_1, e_2$  均为单位元, 则  $e_1 * e_2 = e_1 * e_2$ , 得证. □

**定理 0.6:** 每个元素的逆元是唯一的.

证: 假设  $b_1$  和  $b_2$  均为  $a$  的逆元, 则  $b_1 a = b_2 a = e \implies b_1 = b_2$ , 得证. □

例 0.6:  $(\mathbb{Z}, \times)$  非群, 因 0 无逆元. □



特殊的群:

(1)

例 0.7 循环群:  $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . □

(2)

例 0.8 交换群(Abel 群):  $\forall a, b \in G, a * b = b * a$ . □

群的性质:

(1)  $c * c = c \iff c = e$ .

(2)  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

(3)  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .

(4) 左消去律:  $a * b = a * c \iff b = c$ ,

右消去律:  $b * a = c * a \iff b = c$ .

定义 0.20 群的阶:  $|G| \equiv$  群中元素的个数.

定义 0.21 有限群: 若  $|G| < \infty$ , 则称  $G$  为有限群.

定义 0.22 群元素的阶:  $g \in G, 0 \neq n \in \mathbb{N}$ , 若  $g^n = e$ , 则称最小的这样的  $n$  为  $g$  的阶, 记作  $|g|$ , 若  $n$  不存在, 则称  $g$  无穷阶.

若  $|G| < \infty$ , 则  $\forall g \in G, |g| < \infty$ .

证:  $g \in G, g^2 \in G, \dots, g^n \in G \implies \{g, g^2, \dots, g^n\} \subseteq G$

$\because |G| < \infty, \therefore |\{g, g^2, \dots, g^n\}| < \infty$

当  $n > |G|$ ,  $\{g, g^2, \dots, g^n\}$  中必有元素重复, 故  $\exists n_1 < n_2$ , s.t.  $g^{n_1} = g^{n_2} \implies e = g^{n_1} g^{-n_1} = g^{n_2} g^{-n_1} = g^{n_2 - n_1}$ .

最小的这样的  $n_2 - n_1$  即为  $|g|$ , 故  $|g| < \infty$ . □

定义 0.23 子群: 对群  $(G, *)$ ,  $H$  为  $G$  的非空子集, 若  $(H, *)$  亦为群, 则称  $(H, *)$  为  $(G, *)$  的子群, 记作  $(H, *) < (G, *)$ .

例 0.9:  $(\mathbb{Q}, +)$  为群,  $(\mathbb{Q}^* \equiv \mathbb{Q} - \{0\}, \times)$  亦为群, 虽然  $\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{Q}$ , 但由于两者运算不同, 故  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  并非  $(\mathbb{Q}, +)$  的子群. □

定理 0.7:  $(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b \in H$  且  $a^{-1} \in H \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} = H$ .

证:  $(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b \in H$  且  $a^{-1} \in H$ : 由子群和群的定义即得证.

$(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$ : 由子群和群的定义即得证.

$(H, *) < (G, *) \iff H \subseteq G, \forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$ : 取  $b = a$ , 得  $a * a^{-1} = e \in H \implies H$  有单位元.

取  $a = e$ , 得  $\forall b \in H, \exists e * b^{-1} = b^{-1} \in H \implies H$  有逆元.

$H$  中的运算  $*$  的结合律继承自  $G$  中的  $*$  的结合律.

综上,  $H$  为群. 又  $\because H \subseteq G, \therefore H < G$ . □

**定义 0.24 平凡子群:**  $(G, *)$  和  $(\{e\}, *)$  为  $(G, *)$  的平凡子群.

**定义 0.25 真子群(非平凡子群):** 除平凡子群以外的子群.

**定义 0.26 单群:** 无真子群的群.

**定理 0.8 任意多个子群的交为子群:**  $(G, *)$  为群,  $(H_i, *) < (G, *) \forall i$ , 则  $(\cap_{i \in K} H_i, *) < (G, *)$ .

证:  $\forall a, b \in \cap_{i \in K} H_i \implies \forall i \in K, a, b \in H_i$ ,

$\therefore (H_i, *) < (G, *)$ ,  $\therefore a * b^{-1} \in H_i \subseteq \cap_{i \in K} H_i \implies a * b^{-1} \in \cap_{i \in K} H_i$ . □

**定理 0.9:**  $(H, *) < (G, *)$ , 则  $H$  的单位元即为  $G$  的单位元.

证: 设  $G$  的单位元为  $e$ .

$\forall a \in H$ ,  $\therefore H < G$ ,  $\therefore a \in G$ ,  $e * a = a * e = a \implies e$  为  $(H, *)$  的单位元,

又  $\therefore (H, *)$  的单位元是唯一的, 故得证. □

**例 0.10:**  $(\mathbb{Z}, +)$  为群,  $(\mathbb{E} = \langle 2 \rangle \equiv \{2n\}, +)$ ,  $(\langle 3 \rangle \equiv \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}, +) < (\mathbb{Z}, +)$ . □

**定义 0.27 陪集(Coset):** 真子群  $H < G$ ,  $\forall g \in G$ , 左陪集  $gH \equiv \{g * h \mid \forall h \in H\}$ , 右陪集  $Hg \equiv \{h * g \mid \forall h \in H\}$ .

简便起见, 以下讨论针对左陪集, 右陪集同理.

**例 0.11:**  $\mathbb{E}$  在  $\mathbb{Z}$  中的陪集:  $\forall g, n\mathbb{E} = \{n + m \mid m \in \mathbb{E}\} = \begin{cases} \mathbb{E}, & n \text{ 为偶数}, \\ 1\mathbb{E} = \mathbb{O} \equiv \{\text{奇数}\}, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$  故  $\mathbb{E}$  在  $\mathbb{Z}$  中仅有两个陪集:  $\mathbb{E}$  和  $\mathbb{O}$ , 且  $\mathbb{Z} = \mathbb{E} \cup \mathbb{O}$ ,  $\mathbb{E} \cap \mathbb{O} = \emptyset$ . □

**陪集的性质:** 真子群  $H < G$ ,  $\forall g_1, g_2 \in G$ ,

(1)  $g_1 H \cap g_2 H = \emptyset$  或  $g_1 H = g_2 H$ .

证: 假设  $g_1 H \cap g_2 H \neq \emptyset$ , 则  $\exists c \in g_1 H \cap g_2 H$

$\iff c \in g_1 H$  且  $c \in g_2 H$

$\iff \exists h_1, h_2$ , s.t.  $c = g_1 * h_1 = g_2 * h_2$

$\implies g_2^{-1} g_1 = h_2 * h_1^{-1}$

又  $\therefore h_2 * h_1^{-1} \in H$ ,  $\therefore g_2^{-1} * g_1 \in H$

$\implies (g_2^{-1} * g_1) * H = H$

$\implies g_1 H = g_2 H$ . □

(2)  $|gH| = |H|$ .

证: 要证  $|gH| = |H|$ , 只需证  $H \rightarrow gH$  双射.

若  $ga = gb$ , 则  $a = b$ , 故  $g \rightarrow gH$  单射.

$\forall c \in gH$ ,  $\exists a = g^{-1}c \in H$  且  $ga = b$ , 故  $H \rightarrow gH$  满射.

综上,  $H \rightarrow gH$  双射, 故得证. □

(3)  $G = H \cup g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_\alpha H$ , 其中  $g_iH \cap g_jH = \emptyset \forall i, j, \alpha$  仅为一个指标.

证:  $G = \cup_{g \in G} gH$ , 去除这些并集中的重复集合, 即得证. □

(4)  $g_1H = g_2H \iff g_1^{-1} * g_2 \in H$ .

证: “ $\implies$ ”:  $g_1H = g_2H \implies \forall g_1 * h_1 \in g_1H, g_1 * h_1 \in g_2H$

$\implies \exists h_2 \in H, \text{ s.t. } g_1 * h_1 = g_2 * h_2$

$\iff g_1^{-1}g_2 = h_1 * h_2^{-1}$

又  $\because h_1 * h_2^{-1} \in H, \therefore g_1^{-1} * g_2 \in H$ .

“ $\impliedby$ ”:  $g_1^{-1} * g_2 \in H \implies g_1^{-1} * g_2H = H$

$\implies g_1H = g_2H$ . □

(5)

**定理 0.10 拉格朗日(Lagrange) 定理:**  $|G| < \infty$ , 真子集  $H < G, |H| \mid |G|$ .

$^a a \mid b$  表示  $b$  可被  $a$  整除.

故若  $|G|$  为质数, 其子群仅有  $\{e\}$  和  $G$  两个, 此时  $\forall g \in G, G = \{g, g^2, \dots, g^{|G|}\}$ , 即  $G$  为有限阶循环交换群. 最小的有限非交换群为 6 阶.

根据 (3), 由陪集可得剖分, 由剖分可得等价关系, 由此我们引入:

(6)  $g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} * g_2 \in H$ .

**例 0.12:** 群  $(\mathbb{Z}, -)$ , 可分为两个子群:  $(\mathbb{E}, -)$  和  $(\mathbb{O}, -)$ , 其中  $\mathbb{E} \cap \mathbb{O} = \emptyset$ , 故由这两个子群可得  $\mathbb{Z}$  的一个剖分, 这两个子群中的元素各存在等价关系:  $n \sim m \iff n - m \in \mathbb{E}$ . □

**定义 0.28 商群:**  $H$  为  $G$  的正规子群,  $\frac{G}{H} = \{[g] \equiv gH \mid g \in G\}$ .

**问题 0.1:**  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  是否或在何种条件下具有相同的代数结构? □

答:  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  具有相同的代数结构, 即  $\forall [g_1], [g_2] \in \frac{G}{H}, [g_1] * [g_2] = [g_1 * g_2] \in \frac{G}{H}$ ,

即存在映射  $\frac{G}{H} * \frac{G}{H} \rightarrow \frac{G}{H}, ([g_1], [g_2]) \mapsto [g_1, g_2]$ ,

即若  $g_1 \sim g'_1, g_2 \sim g'_2$ , 则  $g_1 * g_2 \sim g'_1 * g'_2$ ,

即若  $g_1H = g'_1H, g_2H = g'_2H$ , 则  $(g_1 * g_2)H = (g'_1 * g'_2)H$ .

$\because g_1H = g'_1H, \therefore \exists h_1, h'_1 \in H, \text{ s.t. } g_1h_1 = g'_1h'_1 \iff g_1 = g'_1 * h'_1 * h_1^{-1}$ ,

$\because g_2H = g'_2H, \therefore \exists h_2, h'_2 \in H, \text{ s.t. } g_2h_2 = g'_2h'_2 \iff g_2 = g'_2 * h'_2 * h_2^{-1}$ ,

从而  $g_1 * g_2 = g'_1 * h'_1 * h_1^{-1} * g'_2 * h'_2 * h_2^{-1}$ ,

若  $\exists h' \in H, \text{ s.t. } (h'_1 * h_1^{-1}) * g'_2 = g'_2 * h'$ , 则  $g_1 * g_2 = g'_1 * g'_2 * h' * h'_2 * h_2^{-1} \equiv g'_1 * g'_2 * h$ ,

$\implies (g_1 * g_2)H = (g'_1 * g'_2 * h)H = (g'_1 * g'_2)H$ .

故当  $gH = Hg$  时,  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  具有相同的代数结构. □

**定理 0.11 正规子群:** 若  $gH = Hg$ , 则  $\frac{G}{H}$  与  $G$  和  $H$  具有相同的代数结构, 此时称  $H$  为  $G$  的正规子群.

**定理 0.12:** 交换群的任意一个子群为正规子群.

**例 0.13:**  $(\mathbb{Z}, +)$  的子群均为循环群,  $\langle m \rangle \equiv \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle}$ ,  $\mathbb{Z}_m$  有  $m$  个等价类:  $\mathbb{Z}_m = \cap_{i=0}^{m-1} [i]$ . □

**定义 0.29 群同态:** 对群  $(G_1, *)$  和  $(G_2, \circ)$ , 若映射  $f: G_1 \rightarrow G_2$  满足  $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$  (即映射后保持代数结构), 则称  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态.

(类似于集合间的映射)

**定义 0.30 单同态:** 单射的群同态.

**定义 0.31 满同态:** 满射的群同态.

**定义 0.32 同构:** 双射的群同态.

**定理 0.13:**  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态,  $e_1$  和  $e_2$  分别是  $G_1$  和  $G_2$  的单位元, 则  $f(e_1) = e_2$ .

**证:**  $f(e_1) = f(e_1 * e_1) = f(e_1) \circ f(e_1) \implies f(e_1) = e_2$ . □

**定理 0.14:**  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态,  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ .

**证:**  $e_2 = f(e_1) = f(a * a^{-1}) = f(a) \circ f(a^{-1}) \implies f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ . □

**定义 0.33 群同态的核(Kernel):** 单位元的原像.  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态,  $e_1$  和  $e_2$  分别是  $G_1$  和  $G_2$  的单位元, 则称  $\ker f \equiv f^{-1}(e_2) = \{a \in G_1 \mid f(a) = e_2\}$  为  $f$  的核.

$\because e_1 \in \ker f, \therefore \ker f \neq \emptyset$ .

$\ker f \subseteq G_1$ .

**证:**  $\forall a, b \in \ker f, f(a * b^{-1}) = f(a) \circ f(b) = f(a) \circ [f(b)]^{-1} = e_2 * e_2^{-1} = e_2 \implies a * b^{-1} \in \ker f$ , 故  $\ker f \subseteq G_1$ . □

**定义 0.34 群同态的像:**  $f$  为  $G_1$  到  $G_2$  的群同态, 则称  $\text{Im } f \equiv f(G_1) = \{f(a) \mid a \in G_1\}$  为  $f$  的像.

$\text{Im } f \subseteq G_2$ .

**定理 0.15:**  $f$  单同态  $\iff \ker f = \{e_1\}$ .

**证:** “ $\implies$ ”:  $\forall a, b \in \ker f, f(a) = f(b) = e_2$ ,

又  $\because f$  单同态,  $\therefore a = b = e_1$ .

“ $\impliedby$ ”: 若  $f(a) = f(b)$ , 则  $f(a) \circ [f(b)]^{-1} = e_2$

$\implies f(a) \circ f(b^{-1}) = e_2$

$\implies f(a * b^{-1}) = e_2$

$\implies a * b^{-1} \in \ker f = \{e_1\}$

$\implies a = b = e_1$ , 故  $f$  单同态. □

## 0.6 环

**定义 0.35 环:** 若  $(R, +, \cdot)$  满足  
 $(R, +)$  为交换群 (单位元记作 0)

(2) 结合律:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(3) 左分配律:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ,  
 右分配律:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

则称  $(R, +, \cdot)$  为环.

**例 0.14:**  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  为环. □

常用结论:

(1)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .

证:  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a + a \cdot 0 \implies 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ . □

(2)  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$ .

证:  $(-a) \cdot b + a \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0 \implies (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ .

$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot [b + (-b)] = a \cdot 0 = 0 \implies a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ . □

(3)  $(\sum_i a_i) \cdot (\sum_j b_j) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j$ .

证: 由左右分配律即得证. □

特殊的环:

(1)

**定义 0.36 交换环:** 若  $\forall a, b \in R, a \cdot b = b \cdot a$ , 则称  $R$  为交换环.

(2)

**定义 0.37 有单位元的环:** 若  $\exists 1 \in R, \text{ s.t. } \forall a \in R, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ , 则称  $R$  为有单位元的环, 称 1 为  $R$  的单位元.

**例 0.15:**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  交换且有单位元. □

**例 0.16:**  $(M_{n \times n}, +, \times)$ <sup>1</sup> 非交换, 有单位元  $I_{n \times n}$ . □

**例 0.17:**  $(\mathbb{E}, +, \times)$  交换, 无单位元. □

**定义 0.38 零因子:**  $0 \neq a \in R$ , 若  $\exists 0 \neq b \in R, \text{ s.t. } a \cdot b = 0$  或  $b \cdot a = 0$ , 则称  $a$  为  $R$  的零因子.

<sup>1</sup>  $M_{n \times m} \equiv \{(a_{i,j})_{m \times n} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$ .

**定义 0.39 整环:** 有单位元, 交换, 无零因子的环.

**定义 0.40 子环:** 非空真子集  $\emptyset \neq R_1 \subseteq R$ , 若  $(R_1, +, \cdot)$  亦为环, 则称  $R_1$  为  $R$  的子环.

$\therefore (R_1, +)$  为交换群,  $\therefore (R_1, +) < (R, +)$ .

**定理 0.16 子环的判定:**  $R_1$  为  $R$  的子环  $\iff \forall a, b \in R_1, a - b \in R_1, a \cdot b \in R_1$ .

**定理 0.17:**  $R$  为有单位元的交换环, 则  $R$  为整环  $\iff \forall 0 \neq r \in R, a, b \in R$ , 若  $r \cdot a = r \cdot b$ , 则必有  $a = b$ .

证: “ $\implies$ ”:  $r \cdot a = r \cdot b \iff r \cdot (a - b) = r \cdot a - r \cdot b = r \cdot b - r \cdot b = 0$ ,

$\therefore r \neq 0$  且  $R$  为整环 (无零因子),  $\therefore a - b = 0 \implies a = b$ .

“ $\impliedby$ ”: 假设  $R$  有零因子,  $r_0 \cdot a_0 = 0$ , 则令  $r = r_0, \forall a, b \in R$ , 若  $r \cdot a = r \cdot b = 0$ , 则  $a - b = 0$  或  $a - b = a_0$  或  $a - b = a_0 + a_0, \dots$ , 矛盾, 故假设错误,  $R$  无零因子.

又  $\therefore R$  为有单位元的交换环,  $\therefore R$  为整环. □

**定义 0.41 理想:** 非空子集  $I \subseteq R$ , 若  $\forall a, b \in I, r \in R, a - b \in I, r \cdot a \in I, a \cdot r \in I$ , 则称  $I$  为  $R$  的理想.

**定义 0.42 平凡理想:**  $(\{0\}, +, \cdot)$  和  $(R, +, \cdot)$  为  $(R, +, \cdot)$  的平凡理想.

**定义 0.43 单环:** 只有平凡理想的环.

**定理 0.18:** 任意多个理想的交为理想.

证:  $\therefore 0 \in \bigcap_{i \in K} I_i, \bigcap_{i \in K} I_i = \emptyset$ .

$\therefore \forall a, b \in \bigcap_{i \in K} I_i, \therefore \forall a, b, \forall k \in K, a, b \in I_k$ ,

又  $\therefore \forall k \in K, (I_k, +) < (R, +), \therefore \forall k \in K, a - b \in I_k \implies a - b \in \bigcap_{i \in K} I_i$ .

$\forall k \in K, a_k \in I_k$ , 又  $\therefore I_k$  为理想,  $r \cdot a \in I_k, a \cdot r \in I_k \implies r \cdot a \in I_k, a \cdot r \in I_k$ .

综上,  $\bigcap_{i \in K} I_i$  为  $R$  的理想. □

**定理 0.19:** 若  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  是  $R$  中理想的升链, 则  $\bigcup_i I_i$  是  $R$  的理想.

**定义 0.44 生成理想:**  $R$  为交换环, 非空子集  $\emptyset \neq S \subseteq R$ , 由  $S$  生成的理想是  $R$  中包含  $S$  的最理想, 即  $R$  中包含  $S$  的所有理想的交, 记作  $\langle S \rangle$ .

证: 假设  $I_0$  是  $R$  中包含  $S$  的最理想,  $J = \{I_k \mid k \in K\}$  是  $R$  中包含  $S$  的所有理想的集合.

显然  $I_0 \in J$ , 故  $\bigcap_k I_k \subseteq I_0$ .

$\therefore \bigcap_{i \in K} I_i$  为理想, 又  $\therefore I_0$  为最小的理想,  $\therefore |I_0| \leq |\bigcap_k I_k|$ .

综上, 必有  $I_0 = \bigcap_k I_k$ . □

- 由某个元素  $a$  生成的理想:  $\langle a \rangle = \{r \cdot a \mid r \in R\}$ .
- 由多个元素  $\{a_1, \dots, a_n\}$  生成的理想:  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in R\}$ .
- 由集合  $S$  生成的理想:  $\langle S \rangle = \{\sum_{i=1}^m r_i a_i \mid r_i \in R, a_i \in S, m \in \mathbb{Z}^+\}$ .

可用理想得等价关系:  $I$  是  $R$  的理想, 则  $r_1 \sim r_2 \iff r_1 - r_2 \in I$ , 从而得到等价关系:  $[a] = a + I = \{a + r \mid r \in I\}$ .

**定义 0.45 商环:**  $\frac{R}{\sim} \equiv \{[a] \mid a \in R\}$ .

$([a], [b]) \mapsto [a + b]$  和  $([a], [b]) \mapsto [a \cdot b]$  都是运算.

**证:** 要证  $([a], [b]) \mapsto [a + b]$  和  $([a], [b]) \mapsto [a \cdot b]$  都是运算, 即证这些映射与代表元无关, 即证  $a \sim a', b \sim b', [a'] + [b'] = [a + b], [a'] \cdot [b'] = [a \cdot b]$ .

$\because a \sim a', b \sim b', \therefore a - a' \in I, b - b' \in I \implies a + b - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in I$   
 $\implies a + b \sim a' + b',$  故  $([a], [b]) \mapsto [a + b]$  与代表无关, 是运算.

$\because a \sim a', b \sim b', \therefore a - a' \in I, b - b' \in I,$

设  $a - a' \equiv h_1 \in I, b - b' \equiv h_2 \in I$ , 则  $a' \cdot b' = (a + h_1) \cdot (b + h_2) = a' \cdot b' + a' \cdot h_2 + h_1 \cdot b' + h_1 \cdot h_2$ ,  
 其中  $\because h_1, h_2 \in I \implies h_1 \cdot h_2 \in I$ , 而由理想的定义,  $a' \cdot h \in I, h_1 \cdot b' \in I$ ,  
 $\implies a' \cdot b' = a \cdot b - a' \cdot h_1 - h_2 \cdot b \in I$ , 故  $[a'] \cdot [b'] = [a' \cdot b'] = [a \cdot b]$ . □

**定义 0.46 环同态:**  $(R_1, +, *)$  和  $(R_2, +, \cdot)$  为环, 映射  $f: R_1 \rightarrow R_2$  满足

$$(1) f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$(2) f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

则称  $f$  为  $R_1$  到  $R_2$  的环同态.

由环同态的定义,  $f$  必为  $(R_1, +)$  到  $(R_2, +)$  的群同态, 故  $f(0) = 0, f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ .

**定义 0.47 核:**  $\ker f \equiv \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$ .

**定义 0.48 像:**  $\text{Im } f \equiv \{f(a) \mid a \in R_1\}$ .

$$\text{Im } f \subseteq R_2.$$

**定理 0.20:**  $\ker f$  为理想.

**证:**  $\forall a, b \in \ker f, r \in R_1, f(a - b) = f(a + (-b)) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b) = 0 - 0 = 0 \implies a - b \in \ker f$ .  
 $f(r \cdot a) = f(r) \cdot f(a) = f(r) \cdot 0 = 0 \implies r \cdot a \in \ker f$ ,

同理  $a \cdot r \in \ker f$ .

综上,  $\ker f$  为  $R_1$  的理想. □

**定义 0.49 单同态:** 单射的环同态.

$$\text{单同态} \iff \ker f = \{0\}.$$

**定义 0.50 满同态:** 满射的环同态.

$$\text{满同态} \iff \text{Im } f = R_2.$$

**定义 0.51 同构:** 双射的环同态.

**定义 0.52 典范同态:**  $I$  为  $R$  的理想,  $\pi: R \rightarrow \frac{R}{I}, a \mapsto [a]$  称为典范同态.

典范同态是满同态.

**例 0.18:**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  为环.

$$\langle 2 \rangle = \mathbb{O} \equiv \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\langle 3 \rangle \equiv \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\langle 2, 3 \rangle \equiv \{2n + 3m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}. \quad \langle 1 \rangle \equiv \mathbb{Z}.$$

$\mathbb{Z}$  的任何理想均由一个数生成. 更准确地说, 若  $I$  为  $\mathbb{Z}$  的理想, 则  $I = \langle n \rangle$ , 其中  $n$  为  $I$  中最小的正整数. □

(此处其实用到了这样一个定理: 任何一个由自然数组成的集合均存在最小正整数.)

**证:** 若  $p \in \mathbb{Z}, p \in \langle n \rangle$ , 我们不妨假设  $p > n$ , 设  $p = kn + r$ , 其中  $0 \leq r < n$ .

若  $r \neq 0$ , 则  $r = p - kn \in I$ , 但  $0 \leq r < n$  而  $n$  为  $\langle n \rangle$  中最小的正整数矛盾, 故  $r = 0, p = kn$ . □

**定义 0.53 剩余类环:**  $\mathbb{Z}_n \equiv \frac{\mathbb{Z}}{\langle n \rangle} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}.$

**例 0.19:**  $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}, [2] \cdot [3] = [6] = [0]$ , 故  $\mathbb{Z}_6$  有零因子. □

## 0.7 域

**定义 0.54 域:** 若  $(F, +, \cdot)$  满足

$(F, +)$  为交换群 (单位元记作 0)

(2)  $(F^*, \cdot)$  为交换群 (单位元记作 1), 其中  $F^* = F - \{0\}$

(3) 左分配律:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ,

右分配律:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

则称  $(F, +, \cdot)$  为域.

由于有 0 和 1 这两个元素,  $|F| \geq 2$ . 当  $|F| = 2$  时,  $F = \{0, 1\} \cong \mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{\langle 2 \rangle}.$

**例 0.20:**  $\mathbb{Z}_2$  是最小的有限域.  $\mathbb{Q}$  为最小的无限域. □



**定义 0.55 有理数:**  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \neq 0, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ , 即  $\forall q \in \mathbb{Q}, \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, q = \frac{m}{n}$ .

**定义 0.56 域的特征:**  $\text{char } F \equiv$  使得  $n \cdot 1 = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n \text{ 个 } 1 \text{ 相加}} = 0$  的最小正整数.

**例 0.21:**  $\text{char } \mathbb{Z}_2 = 2, \text{char } \mathbb{Q} = 0$ . □

$p = \text{char } F$  必为质数, 否则  $\exists m, n < p$ , s.t.  $0 = p \cdot 1 = (n \cdot m) \cdot 1 = (m \cdot 1) \cdot (n \cdot 1) \implies n \cdot 1 = 0$  或  $m \cdot 1 = 0$  与域的特征的定义矛盾.

当  $p$  为质数且  $\text{char } \mathbb{Z}_p = p$  时,  $\mathbb{Z}_p$  为域.

**定义 0.57 域同态:**  $(F_1, +, \cdot)$  和  $(F_2, +, \cdot)$  为域, 映射  $f: F_1 \rightarrow F_2$  满足

$$(1) f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$(2) f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

则称  $f$  为  $F_1$  到  $F_2$  的域同态.

**域同态的性质:**

$$(1) f(0) = 0.$$

$$(2) f(1) = 1 \text{ 或 } 0.$$

$$\text{证: } f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \implies f(1) - f(1) \cdot f(1) = 0 \implies f(1) = 0 \text{ 或 } 1. \quad \square$$

$$(3) \text{ 若 } f(1) = 0, \text{ 则 } \forall r \in F_1, f(r) = f(r \cdot 1) = f(r) \cdot f(1) = f(r) \cdot 0 = 0.$$

$$(4) \text{ 若 } f(1) = 1, \text{ 则 } \ker f = \{0\}, \text{ 此时 } f \text{ 单射.}$$

$$\text{证: } \forall r \in F^*, r^{-1} \in F^*, 1 = f(1) = f(r \cdot r^{-1}) = f(r) \cdot f(r^{-1}) \implies f(r) \neq 0, f(r^{-1}) \neq 0, \text{ 故 } \forall r \neq 0, f(r) \neq 0, \ker f = \{0\}. \quad \square$$