Chapter 7

线性算子的结构

先来回顾一下**线性算子**: V 为域 F 上的向量空间, $\dim V = n$, $\mathcal{L}(V) = M_{n\times n}(F)$, $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$.
取 $\forall \tau, \sigma \in \mathcal{L}(V)$, 有

(1) $(\tau + \sigma)(v) = \tau(v) + \sigma(v)$,

(2) $(\tau \circ \sigma)(v) = \tau(\sigma(v))$,

(3) $(r\tau)(v) = r \cdot \tau(v)$,

其中 $\mathcal{L}(V)$ 关于 (1) 中的加法和 (2) 中的复合成环, 关于 (1) 中的加法和 (3) 中的点乘成向量空间, 故 $\mathcal{L}$ 为代数.
设 $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$ 分别是 V 的两组定序基,

$$
\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "\tau'_A"] & F^n \\
V \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[u, "\phi'_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"] \\
F^n \arrow[r, "\tau_A"] & F^n
\end{tikzcd}
$$

定理 7.1 (课本定理7.1): 线性算子 τ 在定序基 $\mathcal{B}$ 下的表示为 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$.
当 τ 作用于 $v \in V$, 可表为矩阵与向量相乘, $[\tau(v)]_{\mathcal{B}} = [\tau]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$.

定理 7.2 (课本定理7.2): τ 在两组定序基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 下的表示之间的关系是 $[\tau]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\tau]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$, 其中 $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$.

定义 7.1 相似: 类似上面的 $[\tau]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\tau]_{\mathcal{B}'}$, 若两个矩阵 A, B 满足 $B = PAP^{-1}$, 则称 A 与 B **相似**, 由两两相似的矩阵组成的集合称为**相似类**.

取线性算子 $1, \tau, \tau^2, \cdots, \tau^{n^2} \in \mathcal{L}(V)$.
$\because$ 这些线性算子的数量 $n^2+1 > \dim \mathcal{L}(V) = n^2$, $\therefore$ 这些线性算子线性相关,
即 $\exists$ 不全为 0 的 $r_0, \cdots, r_{n^2} \in F$, s.t. $r_0 + r_1\tau + \cdots + r_{n^2}\tau^{n^2} = 0$
$\Longrightarrow \forall v \in V$, $\left(\sum_{i=0}^{n^2} r_i\tau^i\right)(v) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n^2} r_i\tau^i(v) = 0$.
令 $f(x) = \sum_{i=0}^{n^2} r_i x^i \in \mathcal{L}(V)$, 则 $f(\tau)(v) = 0$.

定理 7.3 (课本定理7.5): V 为域 F 上的向量空间, 则 V 为 $F[x]$ 上的模.

证: $\forall g(x) \in F[x]$, $g(x)$ 可表为 $g(x) = \sum_i a_i x^i$, 其中 $a_i \in F$, 则 $g(\tau) = \sum_i a_i\tau^i \in \mathcal{L}(V)$.
$\forall h(x) \in F[x]$, $h(x)$ 可表为 $h(x) = \sum b_j x^j$, 其中 $b_j \in F$, 则 $h(\tau) = \sum_j b_j\tau^j \in \mathcal{L}(V)$.
对给定的 τ, 有类似数乘的运算 $F[x] \times V \to V$, $(g(x), v) = g(x) \cdot v \mapsto g(\tau)(v)$, 满足

(1) $[g(x)+h(x)]v = \left(\sum_i a_i x^i + \sum_j b_j x^j\right) v = \left(\sum_i a_i\tau^i + \sum_j b_j\tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(v) + \left(\sum_j b_j\tau^j\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right) v + \left(\sum_j b_j x^j\right) v = g(x)v + h(x)v$,

(2) $[g(x)h(x)]v = \left[\sum_i a_i x^i \sum_j b_j x^j\right] v = \left[\sum_i a_i\tau^i \circ \sum_j b_j\tau^j\right](v) = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)\left(\left(\sum_j b_j\tau^j\right)(v)\right) = \left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\left(\sum_j b_j x^j\right) v\right)$ $g(x)[h(x)v]$,

(3) $g(x)(u+v) = \left(\sum_i a_i x^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(u+v) = \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(u) + \left(\sum_i a_i\tau^i\right)(v) = \left(\sum_i a_i x^i\right) u + \left(\sum_i a_i x^i\right) v = g(x)u + g(x)v$,

(4) $1v = 1(v) = v$,

故 V 为 $F[x]$ 上的模. $\square$

$F[x]$ 为 PID, $V \in F[x] - \mathrm{mod}$.
$\because \dim V = n$, $\therefore V$ 有限生成.
$\because f(x)v = f(\tau)(v) = 0$, $\therefore V$ 为挠模.
利用定理 **??**, 可将 V 分解为 $V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m} = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 其中 $\mathrm{ann}(v_{ij}) = \langle p^{e_{ij}}(x)\rangle$.

上面说明了分解 V 的可行性和 V 分解出的大致结构, 现在的问题是: 具体如何分解? 我们只需找到 V 的阶 μ, s.t. $\mathrm{ann}(V) = \langle\mu\rangle$, $\mu = up_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}$, 即可得到挠子模 V_{p_i}, s.t. $\mathrm{ann}(V_{p_i}) = \langle p_i^{e_1}\rangle$ 及循环子模 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, s.t. $\mathrm{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}\rangle$, $e_i \ge e_{i1} \ge \cdots \ge e_{it_i}$.

定义 7.2 极小多项式: $\mathrm{ann}(V) = \{g(x) \in F[x] \mid g(\tau)(V) = \{0\}\} = \langle m_\tau(x)\rangle$, 其中 $m_\tau(x)$ 称 τ 在 V 上的**极小多项式**, 首系数 $= 1$.

极小多项式就是 V 的阶, 对其进行分解: $m_\tau(x) = up_1^{e_1}(x)\cdots p_n^{e_n}(x)$, 其中 u 为单位, $p_i(x) \in F[x]$ 不可约且互不相等, $e_i \in \mathbb{Z}^+$
$\Longrightarrow V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m}$, 其中 $\mathrm{ann}(V_{p_i}) = \langle p_1^{e_1}(x)\rangle$,
$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1}\rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_{it_i}\rangle\rangle$, 其中 $\mathrm{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x)\rangle$, $e_i \ge e_{i1} \ge \cdots \ge e_{it_i}$,
从而实现分解 $V = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^{t_i} \langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$.

接下来我们利用上述对 V 的分解找一组合适的定序基, 以简化 V 上的线性算子 τ 的表示.

定义 7.3 不变子空间: 子空间 $S \subseteq V$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, 若 $\tau(S) \subseteq S$, 则称 S 为 V 的 τ **不变子空间**.

定理 7.4 (课本定理7.5): 子模 $S \subseteq V \Longleftrightarrow S$ 是 V 的不变子空间.

证: "$\Longrightarrow$": $\forall v \in S \subseteq V$, $\forall h(x) \in F[x]$, $h(x)=\sum_i a_i x^i$, $h(x)v=h(\tau)(v)=\sum_i a_i\tau^i(v)\in S$.
特别地, 取 $h(x)=x\in F[x]$, 则 $xv=\tau(v)\in S \Longrightarrow \tau(S)\subseteq S$, 即 S 为 V 的不变子空间.

"$\Longleftarrow$": $\because S$ 是 V 的不变子空间, $\therefore \forall v\in S$, $\tau(v)\in S \Longrightarrow \forall i=0,\cdots,\dim V$, $\tau^i(v)\in S$
$\Longrightarrow g(x)v+h(x)v=g(\tau)(v)+h(\tau)(v)=\left(\sum_i a_i\tau^i\right)(v)+\left(\sum_j b_j\tau^j\right)(v)=\sum_i(a_i+b_i)\tau^i(v)\in S$, 故 S 为 V 的子模. □

$\because \langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 为 V 的 $F[x]$ 子模, $\therefore \langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 为不变子空间, 即 $\tau(\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle)\subseteq\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 故之前分解操作实际上是将 V 分解成了一系列由单个向量生成的不变子空间.

让我们用简单的例子来展示一下, 若以不变子空间的基为整个向量空间的基 (的一部分), 线性算子的表示会如何.

例 7.1: 若 $\langle\langle b_1\rangle\rangle$ 是 τ 不变的, 则 $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}*\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $[\tau]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_n)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & 0 & \cdots & 0\\0 & & & \\\vdots & & & \\0 & & & \end{pmatrix}$.[1]

若 $\langle\langle b_1,b_2\rangle\rangle$ 是 τ 不变的, 即 $\tau(b_1)\in\langle\langle b_1,b_2\rangle\rangle$, $\tau(b_2)\in\langle\langle b_1,b_2\rangle\rangle$, 则 $\begin{pmatrix}[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & [\tau(b_1)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & *\\ * & *\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\end{pmatrix}$, $[\tau]_{\mathcal{B}}=$
$\begin{pmatrix}* & * & 0 & \cdots & 0\\ * & * & 0 & \cdots & 0\\0&0& & & \\\vdots&\vdots& & & \\0&0& & & \end{pmatrix}$.

若 $\langle\langle v_1,\cdots,v_k\rangle\rangle$ 是 τ 不变的, 则 $[\tau]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}*_{k\times k} & 0\\0 & \tau'\end{pmatrix}$. □

在之前我们已将 V 分解成了多个不变子空间, 故若用各 $\langle v_{ij}\rangle$ 的基组成 V 的基, 则可以将 τ 表示为一个仅在对角线上有非零矩阵块而其余部分均为零的矩阵. 但我们仍未满足: 对于给定的不变子空间 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, 能否适当地选取该不变子空间中的基, 从而简化该不变子空间对应的非零矩阵块?

取 $\langle\langle v\rangle\rangle$ 的极小多项式为 $p(x)$, 即 $\mathrm{ann}(v)=\langle p(x)\rangle$, 设 $p(x)=x^m+r_{m-1}x^{m-1}+\cdots+r_1x+r_0$, $r_i\in F$,
则 $p(x)v=p(\tau)(v)=(\tau^m+r_{m-1}\tau^{m-1}+\cdots+r_1\tau+r_0)(v)=\tau^m(v)+r_{m-1}\tau^{m-1}(v)+\cdots+r_1\tau(v)+r_0v=0$,
即 $\tau^m(v)$ 可由 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示: $\tau^m(v)=-\left[r_{m-1}\tau^{m-1}(v)+\cdots+r_1\tau(v)+r_0v\right]$
$\Longrightarrow \tau^{m+1}(v)=\tau(\tau^m(v))=\tau(-\left[r_{m-1}\tau^{m-1}(v)+\cdots+r_1\tau(v)+r_0v\right])$
$=-\left[r_{m-1}\tau^m(v)+r_{m-2}\tau^{m-1}(v)+\cdots+r_1\tau^2(v)+r_0\tau(v)\right]$
$=-\left\{r_{m-1}\left[-\left(r_{m-1}\tau^{m-1}(v)+\cdots+r_1\tau^2(v)+r_0\tau(v)\right)\right]+r_{m-2}\tau^{m-1}(v)+\cdots+r_1\tau^2(v)+r_0\tau(v)\right\}$.
易证, 任意高阶的 τ 作用于 v 均可由 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示, $\forall f(x)\in F[x]$ 作用于 v 均可由 $\{v,\tau(v),\cdots,\tau^{m-1}(v)\}$ 线性表示.
由此, 我们引出:

[1] 此处 $*$ 代表非零矩阵元.

定理 7.5: $\langle\langle v\rangle\rangle$ 为循环子模, 则 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 是 $\langle\langle v\rangle\rangle$ 的基.

证: 先证 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性无关: 设 $l_0 v + l_1\tau(v) + \cdots + l_{m-1}\tau^{m-1}(v) = 0$,
令 $h(x) = l_0 + l_1 x + \cdots + l_{m-1}x^{m-1}$, 则 $h(x)v = 0 \Longrightarrow h(x) \in \operatorname{ann}(v) = \langle p(x)\rangle \Longrightarrow p(x) \mid h(x)$
然而 $\because \deg p(x) = m \geq \deg h(x) = m-1$, $\therefore$ 只能有 $l_0 = l_1 = \cdots = l_{m-1} = 0$, 故 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 线性无关.

再证 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 生成 $\langle\langle v\rangle\rangle$: $\langle\langle v\rangle\rangle = \{h(x)v \mid h(x) \in F[x]\} = \{h(\tau)(v) \mid h(x) \in F[x]\}$.
$\forall h(x)v \in \langle\langle v\rangle\rangle$, 若 $\deg h(x) \leq m-1$, 则 $h(x)v$ 显然可由 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}\}$ 表示,
若 $\deg h(x) > m-1$, 则 $h(x) = q(x)p(x) + r(x)$, 其中 $q(x)$ 为商多项式, 余多项式 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg p(x) = m-1$
$\Longrightarrow h(x)v = (q(\tau)p(\tau) + r(\tau))(v) = q(\tau)p(\tau)(v) + r(\tau)(v)$, 其中 $\because p(x) \in \operatorname{ann}(v)$, $\therefore p(\tau)v = 0 \Longrightarrow h(x)v = r(\tau)v$ 可由 $\{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}\}$ 表示.

综上, 得证. □

定义 7.4 循环不变子空间: S 是向量空间 V 的 τ 不变子空间, 若 S 有一组基 $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$, 其中 $v \in V$, $m \geq 1$, 则称 S 是 V 的**循环不变子空间**.

$\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 就是循环不变子空间. 那么, 以 $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{m-1}(v_{ij})\}$ 为基, 线性算子 τ 在该循环不变子空间中的表示 (即 τ 的表示中该循环不变子空间对应的非零矩阵块) 如何?

定义 7.5 伴阵: 在定序基 $\mathcal{B} = \{v, \tau(v), \cdots, \tau^{m-1}(v)\}$ 下, 线性算子 τ 可表为 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\tau(b_m)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$,

其中 $[\tau(b_1)]_{\mathcal{B}} = [\tau(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $[\tau(b_2)]_{\mathcal{B}} = [\tau(\tau(v))]_{\mathcal{B}} = [\tau^2(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\cdots$, $[\tau(b_m)]_{\mathcal{B}} = [\tau^m(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-r_0\\-r_1\\\vdots\\-r_{m-1}\end{pmatrix}$,

从而 $[\tau]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -r_0\\1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -r_1\\0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -r_2\\\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -r_{m-2}\\0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -r_{m-1}\end{pmatrix} \equiv C[p(x)]$, 称为多项式 $p(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_1 x + r_0$ 的**伴阵**.

设 $d_{ij} = \deg p_i^{e_{ij}}(x)$, 则 $\mathcal{B}_{ij} = \{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{d_{ij}-1}(v_{ij})\}$ 为 $\langle v_{ij}\rangle$ 的基,

以 $\mathcal{B}_{ij}$ 为基, τ 在循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 中的表示就是 $p_i^{e_{ij}}(x)$ 的伴阵: $[\tau]_{\mathcal{B}_{ij}} = C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_1^{(ij)} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_2^{(ij)} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -l_3^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -l_{d_{ij}-2}^{(ij)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -l_{d_{ij}-1}^{(ij)} \end{pmatrix}$.

上面我们简化了 τ 在循环不变子空间 $\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$ 中的表示. 又 $\because V = \bigoplus_{ij}\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, $\therefore \mathcal{B} = \cup_{ij}\mathcal{B}_{ij}$ 为 V 的基. 利用 $\mathcal{B}$ 我们可简化 τ 在整个向量空间 V 中的表示:

定理 7.6 (课本定理7.10): $\dim V < \infty$, $\tau \in \mathcal{L}(V)$, V 的极小多项式为 $m_\tau(x) = p_1^{e_1}(x)\cdots p_n^{e_n}(x)$, 其中 $p_i(x)$ 不可约且互不相等,
$\Longrightarrow V = V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_m}$, 其中 $\operatorname{ann}(V_{p_i}) = \langle p_1^{e_1}(x)\rangle$,
$V_{p_i} = \langle\langle v_{i1}\rangle\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\langle v_{it_i}\rangle\rangle$, 其中 $\operatorname{ann}(v_{ij}) = \langle p_i^{e_{ij}}(x)\rangle$, $e_i \geq e_{i1} \geq \cdots \geq e_{it_i}$,
以 $\cup_{ij}\{v_{ij}, \tau(v_{ij}), \cdots, \tau^{d_{ij}-1}(v)\}$ 为基, 其中 $d_{ij} = \dim\langle\langle v_{ij}\rangle\rangle$, τ 的表示可简化为

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{ij} C[p_i^{e_{ij}}(x)] = \begin{pmatrix} C[p_1^{e_{11}}(x)] & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & C[p_1^{e_{1t_1}}(x)] & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & C[p_m^{e_{m1}}(x)] & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C[p_m^{e_{mt_m}}(x)] \end{pmatrix},$$

此即 τ 的**有理标准型**.

$n = \dim V = \sum_{ij} d_{ij} = \sum_{ij} \deg p_i^{e_{ij}}(x) = \deg\left[\prod_{ij} p_i^{e_{ij}}(x)\right]$.