Chapter 12

度量空间

定义 12.1 **度量和度量空间:** 对集合 M, 映射 $d(,): M \times M \to \mathbb{R}$, 若满足

正定: $d(u,v) \geq 0$, 且 $d(u,v) = 0 \iff u = v$,

(2) **对称**: $d(u,v) = d(v,u)$,

(3) **三角不等式**: $d(u,v) \leq d(u,v) + d(u,v)$,

则称 d 为 M 上的一个**度量**, 称 (M,d) 为**度量空间**.

对任一集合均可定义度量, 如 $d(u,v) = \begin{cases} 1, & u \neq v, \\ 0, & u = v, \end{cases}$ 且度量不唯一.

定义 12.2 **子度量空间:** 度量空间的非空子集.

12.1 开集和闭集

对度量空间 (M,d), $x_0 \in M$, $r > 0$, 可定义:

定义 12.3 **开球:** $B(x_0,r) \equiv \{y \in M \mid d(y,x_0) < r\}$.

定义 12.4 **闭球:** $\bar{B}(x_0,r) \equiv \{y \in M \mid d(y,x_0) \leq r\}$.

定义 12.5 **球面:** $S(x_0,r) \equiv \{y \in M \mid d(y,x_0) = r\}$.

定义 12.6 **开集:** $S \subseteq M$, $\forall x_0 \in S$, $\exists r > 0$, s.t. $B(x_0,r) \subseteq S$, 则称 S 为**开集**.

定义 12.7 闭集: $T \subseteq M$, $T^c = M \backslash T$ 是开集, 则 T 为**闭集**.

定义 12.8 开邻域: 包含 x_0 的任何开集称 x_0 的**开邻域**.

开球为开集, 闭球为闭集.

证: $\forall$ 开球 $B(x_0, r_0) = \{y \in M \mid d(y, x_0) < r_0\}$, $\forall x \in B(x_0, r_0)$, $\exists r = \frac{1}{2}(r_0 - d(x, x_0)) > 0$, s.t. $B(x, r) \subseteq B(x_0, r_0) \Longrightarrow$ 开球 $B(x_0, r_0)$.

$\forall$ 闭球 $\bar{B}(x_0, r_0) = \{y \in M \mid d(y, x_0) \leq r_0\}$, $\forall x \in (\bar{B}(x_0, r_0))^c = \{y \in M \mid d(y, x_0) > r_0\}$, $\exists r = \frac{1}{2}(d(x, x_0) - r) > 0$, s.t. $B(x, r) \subseteq (\bar{B}(x_0, r_0))^c \Longrightarrow (\bar{B}(x_0, r_0))^c$ 为开集, 即 $\bar{B}(x_0, r_0)$ 为闭集. □

例 12.1: 设 $\mathbb{R}$ 上的度量 $d(r, t) = |r - t|$. 对点 x_0,
$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$,
$\bar{B}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$,
$S(x_0, r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}$.
开区间 (a, b) 为开集.

证: $\forall x \in (a, b)$, 取 $r = \frac{1}{2} \min\{|x - a|, |x - b|\} > 0$, $B(x, r) = (x - r, x + r) \subseteq (a, b)$, 故得证. □

闭区间 $[a, b]$ 为闭集.
$(a, b]$ 既非开集也非闭集. □

定理 12.1 (课本定理12.1): $\mathcal{O} = \{M$ 上的开集$\}$, 则

(1) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.

(2) 有限个开集的交仍为开集: $S, T \in \mathcal{O}$, 则 $S \cap T \in \mathcal{O}$.

(3) $S_i \in \mathcal{O}$, 则 $\cup_{i \in K} S_i \in \mathcal{O}$ (S_i 可以是无限个).

证: (1) 显然.

(2) $x_0 \in S \cap T \Longleftrightarrow x_0 \in S$, $x_0 \in T$.
$\because S$ 为开集, $\therefore \exists r_1 > 0$, s.t. $B(x_0, r_1) \subseteq S$;
$\because T$ 为开集, $\therefore \exists r_2 > 0$, s.t. $B(x_0, r_2) \subseteq T$.
令 $r = \min\{r_1, r_2\}$, 则 $B(x_0, r) \subseteq S$ 且 $B(x_0, r) \subseteq T \Longrightarrow B(x_0, r) \subseteq S \cap T \Longrightarrow S \cap T$ 开, 即 $S \cap T \in \mathcal{O}$.

(3) $x_0 \in \cup_i S_i \Longleftrightarrow \exists i$, s.t. $x_0 \in S_i$.
$\because S_i$ 为开集, $\therefore \exists r > 0$, s.t. $B(x_0, r) \subseteq S_i \subseteq \cup_i S_i \Longrightarrow \cup_i S_i$ 开, 即 $\cup_i S_i \in \mathcal{O}$.

□

例 12.2 无穷多个开集的交未必开: $S_i = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.
$\cap_i S_i = \lim_{n \to \infty} S_n = \{0\}$ 闭. □

单点集为闭集.

证: 单点集 $S = \{a\}$, 补集 $S^c = M \backslash \{a\}$.
$\forall x \in S^c$, 则 $x \neq a$, $d(x, a) > 0$.
取 $r = \frac{1}{2} d(x, a)$, 则 $a \neq B(x, r) \Longrightarrow B(x, r) \subseteq S^c \Longrightarrow S^c$ 开, 故 S 闭. □

有限点集为闭集.

证: 有限点集 $S=\{a_1,\cdots,a_n\}$, 补集 $S^c=M\backslash\{a_1,\cdots,a_n\}$.
$\forall x\in S^c$, 则 $x\neq a_1,\cdots,a_n\Longrightarrow\forall i$, $d(x,a_i)>0$.
取 $r=\frac{1}{2}\min_i\{d(x,a_i)\}$, 则 $\forall a_i$, $a_i\neq B(x,r)\Longrightarrow S^c$ 开, 故 S 闭. □

定义 12.9 拓扑和拓扑空间: 集合 $X\neq\emptyset$, $\mathcal{O}$ 是 X 的一些子集构成的簇[a], 若
$\emptyset, X\in\mathcal{O}$,

(1)(2) $S,T\in\mathcal{O}$, 则 $S\cap T\in\mathcal{O}$,

(3) $\{S_i\in\mathcal{O}\mid i\in K\}$, 则 $\cup_{i\in K}S_i\in\mathcal{O}$,

则称 $\mathcal{O}$ 为 X 上的一个**拓扑**, 称 $(X,\mathcal{O})$ 为**拓扑空间**, 称 $\mathcal{O}$ 中的集合为 X 上的**开集**.

[a]可理解为"集合的集合", 此处为避免逻辑循环, 故名之

故确定开集 $\Longleftrightarrow$ 确定拓扑.

12.2 度量空间的收敛性

定义 12.10 收敛和极限: 集合 M 中序列 (x_n), $x\in M$, 若 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$, 则称序列 (x_n) **收敛**于 x, 记作 $x_n\to x$, 称 x 为序列 (x_n) 的**极限**.

例 12.3: (r_n) 为 $\mathbb{R}$ 上的序列, $\lim_{n\to\infty}r_n=0$, 即 $r_n\to r$, 即 $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $d(r_n,r)<\epsilon\Longleftrightarrow r_n\in B(r,\epsilon)$. □

收敛的性质:

(1) $\forall r>0$, $B(x,r)$ 中包含 (x_n) 中无穷个元素.

(2) 有限点列非序列, 无需考虑极限.

(3) 常序列收敛, $(x_n=x_0)\to x_0$.

(4) 对给定序列, 若 $\exists$ 极限, 则极限唯一.

定理 12.2 (课本定理12.2): 闭集关于收敛封闭. S 闭 $\Longleftrightarrow S$ 中序列 $(x_n)\to x\in M$, 则 $x\in S$.

证: "$\Longrightarrow$": 取 S 中序列 (x_n) 且 $(x_n)\to x\in M$.
假设 $x\notin S$, 则 $x\in S^c=M\backslash S$.
$\because S$ 闭, $\therefore S^c$ 开 $\Longrightarrow\exists r>0$, s.t. $B(x,r)\subseteq S^c$, 即 $B(x,r)\cap S=\emptyset$, 故 S 中序列 $(x_n)\notin B(x,r)$.
又 $\because x_n\to x$, $\therefore\exists N_r>0$, s.t. 当 $n>N_r$ 时, $x_n\in B(x,r)$, 矛盾, 故假设错误, $x\in S$.

"$\Longleftarrow$": 假设 S 非闭, 则 S^c 非开 $\Longrightarrow\exists x_0\in S^c$, s.t. $\forall r>0$, $B(x_0,r)\nsubseteq S^c$.
特别地, 令 $r=1$, 则 $\exists x_1\in B(x_0,r)$, s.t. $x_1\notin S^c$, 即 $x_1\in S$,
$\cdots$, 令 $r=\frac{1}{n}$, 则 $\exists x_n\in B(x_0,r)$, s.t. $x_n\notin S^c$, 即 $x_n\in S$,
$\cdots\Longrightarrow x_n\to x_0$.
又 $\because(x_n)\in S$, $\therefore$ 由题设, $x_0\in S$, 矛盾, 故假设错误, S 闭.

综上, 得证. □

12.3 集合的闭包

定义 12.11 闭包: $S \subseteq M$, 称包含 S 的最小闭集或包含 S 的所有闭集的交为 S 的**闭包**, 记作 $\mathrm{cl}(S)$.

给定 S, 必 $\exists$ 其闭包.

定义 12.12 极限点(/聚点): $\emptyset \neq S \subseteq M$, $x \in M$, 若 $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap S$ 包含异于 x 的点, 则称 x 为 S 的**极限点**或**聚点**, S 对应的极限点的集合记作 $\mathrm{l}(S)$.

例 12.4: $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, 则 $\mathrm{l}((a,b)) = [a,b]$.
$c \notin [a,b]$, $S = (a,b) \cup \{c\}$, 则 $\mathrm{l}(S) = [a,b]$. □

定理 12.3 (课本定理12.3): (1) $x \in \mathrm{l}(S) \iff \exists$ 序列 $(x_n) \in S$, s.t. $x_n \neq x \forall n$ 且 $x_n \to x$.

(2) S 闭 $\iff \mathrm{l}(S) \subseteq S$.

(3) $\mathrm{cl}(S) = S \cup \mathrm{l}(S)$.

证: (1) "$\Longrightarrow$": $\because x \in \mathrm{l}(S)$, $\therefore \exists x_n \neq x$, s.t. $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap S$
$\Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, 故 $\exists (x_n) \in S$, s.t. $\forall n$, $x_n \neq x$, $x_n \to x$.

"$\Longleftarrow$": 设 $(x_n) \to x$ 且 $x \neq x_n \in S$.
$\forall r > 0$, $\exists N$, s.t. 当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x,r)$, 即 $\exists x_n \neq x$, s.t. $x_n \in B(x,r) \cap S$, 故 $x \in \mathrm{l}(S)$.

综上, 得证.

(2) "$\Longrightarrow$": 设 $x \in \mathrm{l}(S)$, 则由 (1) 得, $\exists (x_n) \in S$, s.t. $x_n \neq x \forall n$ 且 $x_n \to x$.
又 $\because S$ 闭, $\therefore x \in S \Longrightarrow \mathrm{l}(S) \subseteq S$.

"$\Longleftarrow$": $\forall S$ 中序列 $(x_n) \to x$, 若 $\exists n$, s.t. $x_n = x$, 则 $x = x_n \in S$,
或 $x_n \neq x \forall n$, 则由 (1) 得 $x \in \mathrm{l}(S) \subseteq S$, 故 S 闭.

综上, 得证.

(3) 显然 $S \subseteq S \cup \mathrm{l}(S) \equiv T$.
设 $x \in \mathrm{l}(T)$, 则由 (1) 得, $\exists$ 序列 $(x_n) \in T$, s.t. $x_n \neq x \forall n$ 且 $x_n \to x$.
假设 $x \notin S$ 且 $x \notin \mathrm{l}(S)$, 则 $\because x \notin \mathrm{l}(S)$, $\therefore \exists r > 0$, $B(x,r) \cap S = \emptyset$.
但 $\because (x_n) \to x$, $\therefore \exists x_n \in B(x,r) \Longrightarrow x_n \notin S$.
又 $\because x_n \in T \equiv S \cup \mathrm{l}(S)$, $\therefore x_n \in \mathrm{l}(S)$.
取 x_n, s.t. $d(x_n, x) < r$, 则 $B\left(x_n, \frac{r - d(x_n, x)}{2}\right) \subseteq B(x,r)$,
且 $\because x_n \in \mathrm{l}(S)$, $\therefore \exists y \in S \cap B\left(x_n, \frac{r - d(x_n - x)}{2}\right) \subseteq S \cap B(x,r)$, 与 $B(x,r) \cap S = \emptyset$ 矛盾, 故假设错误, $x \in S$ 或 $x \in \mathrm{l}(S)$, 即 $x \in T \equiv S \cup \mathrm{l}(S) \Longrightarrow T$ 闭.
又 $\because S \subseteq T$, $\therefore$ 由闭包定义, $\mathrm{cl}(S) \subseteq T$.

另一方面, 由闭包定义, $S \in \mathrm{cl}(S)$.
假设 $\mathrm{l}(S) \nsubseteq \mathrm{cl}(S)$, 即 $\exists x \in \mathrm{l}(S)$ 且 $x \notin \mathrm{cl}(S)$, 则 $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$, 且 $\exists$ 闭集 S', s.t. $x \notin S'$ 即 $x \in (S')^c$.
$\because S'$ 闭 $\Longrightarrow (S')^c$ 开, $\therefore \exists r > 0$, s.t. $B(x,r) \subseteq (S')^c$, 与 $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$ 矛盾, 故假设错误, $\mathrm{l}(S) \subseteq \mathrm{cl}(S) \Longrightarrow T \equiv S \cup \mathrm{l}(S) \subseteq \mathrm{cl}(S)$.

综上, 得证.

□

12.4 稠密子集

定义 12.13 稠密子集: $S \subseteq M$, 若 $\mathrm{cl}(S) = M$, 则称 S 为 M 的**稠密子集**.

若 S 为 M 的稠密子集, 则 $M = \mathrm{cl}(S) = S \cup \mathrm{l}(S)$, 这意味着 M 中任一点均可由 S 中的某一序列逼近.

例 12.5: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$无理数. $\forall$ 无理数 r, $\exists$ 有理数序列 $(r_n) \to r$, $\therefore \mathbb{Q}$ 为 R 的稠密子集.
同理, 无理数也为 $\mathbb{R}$ 的稠密子集.
实际上, $\mathbb{Q}$ 在 $[0,1]$ 上的测度 $= 0$, 即无理数远多于有理数. □

12.5 连续

定义 12.14 连续和不连续: 度量空间 (M,d) 和 (M',d'), 映射 $f: M \to M'$, $x_0 \in M$, 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\epsilon)$, 即 $d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处**连续**,
若 $\exists \epsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $f(B(x_0,\delta)) \nsubseteq B(f(x_0),\epsilon)$, 则称 f 在 x_0 处**不连续**.

定理 12.4 连续的判定(课本定理12.4): $f: M \to M'$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 若 M 中序列 (x_n) 收敛于 x, 则 $(f(x_n)) \to f(x)$ (即 f 保持收敛性不变).

证: "$\Longrightarrow$": $\because f$ 连续, $\therefore \forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\epsilon)$.
$\because (x_n) \to x$, $\therefore \forall \delta > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n,x) < \delta$
$\Longrightarrow d(f(x_n),f(x)) < \epsilon$, 故 $(f(x_n)) \to f(x)$.

"$\Longleftarrow$": 假设 f 在 $x \in M$ 处不连续, 则 $\exists \epsilon > 0$, s.t. $\forall \delta > 0$, $f(B(x,\delta)) \nsubseteq B(f(x),\epsilon)$, 即 $\exists x' \in B(x,\delta)$, s.t. $f(x') \notin B(f(x),\epsilon)$.
特别地, 取 $\delta = 1$, $\exists x_1 \in B(x,1)$, s.t. $f(x_1) \notin B(f(x),\epsilon)$,
$\cdots$, 取 $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in B(x,\frac{1}{n})$, s.t. $f(x_n) \notin B(f(x),\epsilon)$,
$\cdots$, 从而得到序列 $(x_n) \to x$, 但 $d(f(x_n),f(x)) > \epsilon$
$\Longrightarrow f(x)$ 不收敛至 $f(x)$, 与题设矛盾, 故假设错误, f 在 x_0 处连续.

综上, 得证. □

定理 12.5 (课本定理12.5): 若 $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$, 则 $(d(x_n,y_n)) \to d(x,y)$.

证: $\forall \epsilon > 0$, $\because (x_n) \to x$, $\therefore \exists N_1 > 0$, s.t. 当 $n > N_1$ 时, $d(x_n,x) < \frac{\epsilon}{2}$,
$\because (y_n) \to y$, $\therefore \exists N_2 > 0$, s.t. 当 $n > N_2$ 时, $d(y_n,y) < \frac{\epsilon}{2}$
$\Longrightarrow \exists N = \max\{N_1,N_2\}$, s.t. 当 $n > N$ 时, $|d(x_n,y_n) - d(x,y)| = |d(x_n,y_n) - d(x,y_n) + d(x,y_n) - d(x,y)| \leq |d(x_n,y_n) - d(x,y_n)| + |d(x,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y) < \epsilon$, 故得证. □

推论: $(d(x_n,y)) \to d(x_0,y)$, 即 $d(,y): M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,y)$ 为 M 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射.
同理, $d(,): M \times M \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto d(x,y)$ 亦为连续映射.

定义 12.15 柯西序列: (x_n) 为 M 中序列, 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n,m > N$ 时, $d(x_n,x_m) < \epsilon$, 则称 (x_n) 为**柯西序列**.

定理 12.6: 收敛 $\Longrightarrow$ 柯西, 反之不真.

证: 设 $(x_n) \to x$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$, s.t. 当 $n > N_1$ 时, $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$,
$\exists N_2 > 0$, s.t. 当 $m > N_2$ 时, $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$
$\Longrightarrow \exists N = \max\{N_1, N_2\}$, s.t. 当 $n, m > N$ 时, $d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$, 故 (x_n) 柯西. □

例 12.6 不收敛的柯西序列(课本例12.12): $C[0,1] \equiv \{[0,1]$ 区间上的连续函数$\}$.
$f(x), g(x) \in C[0,1]$, 度量 $d(f(x), g(x)) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$.
令 $f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \le 1, \end{cases}$ 则 $(f_n(x)) \to \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ 不连续, 故 $(f_n(x))$ 柯西但在 $C[0,1]$ 上不收敛 (极限在 $C[0,1]$ 外). □

12.6 完备

定义 12.16 完备: 称柯西序列均收敛的空间为**完备**的.

定义 12.17 完备子空间: S 为度量空间 M 的子集, 若 S 完备, 则称 S 为 M 的**完备子空间**.

定理 12.7 (课本定理12.6): 对度量空间 M,
任一完备子集闭.
(2) 若 M 完备, $S \subseteq M$, 则 S 闭 $\Longleftrightarrow$ S 完备.

证: (1) 取完备子集 $S \subseteq M$, 取 S 中任意序列 $(x_n) \to x \in M \Longrightarrow (x_n)$ 柯西.
又 $\because S$ 为完备子集, $\therefore (x_n)$ 收敛, 设 $(x_n) \to y \in S$.
又 $\because$ 极限唯一, $\therefore x = y \in S \Longrightarrow S$ 闭.

(2) "$\Longleftarrow$": 已由 (1) 证.
"$\Longrightarrow$": $\forall$ 柯西列 $(x_n) \in S$, $\because S \subseteq M$, $\therefore (x_n)$ 为 M 中的柯西列.
又 $\because M$ 完备, $\therefore (x_n)$ 收敛, 设 $(x_n) \to x$.
又 $\because S$ 闭, $\therefore x \in S$, 故 S 完备.
综上, 得证.

□

例 12.7: 在欧氏度量 $d(u, v) = \sqrt{\sum_i |u_i - v_i|^2}$ 下, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ 完备. □

例 12.8 (课本例12.11): $C[a,b]$ 上度量 $d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]}\{|f(x) - g(x)|\}$, $(C[a,b], d)$ 完备.

证: 在 $(C[a,b], d)$ 上, $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\} < \epsilon \Longleftrightarrow |f(x) - g(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.
设 (f_n) 柯西, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, s.t. 当 $m, n > N$ 时, $d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon \Longleftrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$,
即给定 $\forall x \in [a,b]$, $(f_n(x))$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的柯西列.
又 $\because \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 完备, $\therefore (f_n(x))$ 收敛.
设 $f(x) = \lim_{n \to \infty}(x)$, 则取 $m \to \infty$ 得当 $n > N$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$
$\Longrightarrow (f_n) \to f$, 故 $C[a,b]$ 完备. □

□

12.7 等距

定义 12.18 <u>等距</u>: (M,d) 和 (M',d') 为度量空间, 若映射 $f: M \to M'$ 满足 $d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$, 则称 f 等距.

定理 12.8 <u>等距的性质(课本定理12.7)</u>: $f:(M,d) \to (M',d')$ 等距, 则

(1) f 单射.

(2) f 连续.

(3) 若 f 可逆, 则 f^{-1} 等距.

证: (1) (此处的 M 和 M' 仅为集合, 没有定义额外的运算, 故 0 (加法单位元) 不一定存在, 必须从定义证明单射.)
设 $f(x) = f(y)$, 则 $d(f(x),f(y)) = 0$.
又 $\because f$ 等距, $\therefore d(x,y) = d(f(x),f(y)) = 0 \Longrightarrow x = y$, 故得证.

(2) $\forall M$ 的收敛序列 $(x_n) \to x$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, s.t. 当 $n > N$ 时, $d(x_n,x) < \epsilon$.
$\because f$ 等距, $\therefore d(f(x_n),f(x)) = d(x_n,x) < \epsilon \Longrightarrow (f(x_n)) \to f(x)$.
$\because f$ 保持收敛, $\therefore f$ 连续.

(3) 若 f 可逆, 则 $f^{-1}(f(x)) = x$.
$\because f$ 等距, $\therefore d(f(x),f(y)) = d(x,y) = d(f^{-1}(f(x)),f^{-1}(f(y))) \Longrightarrow f^{-1}$ 等距.

□

12.8 度量空间的完备化

定理 12.9 <u>完备化定理(课本定理12.8)</u>: 对度量空间 (M,d), $\exists$ 完备度量空间 (M',d') 及等距 $\tau: M \to M'$, s.t. $\tau(M)$ 在 M 中稠密.

具体如何完备化?
取 $V = \{M$ 中所有柯西序列$\}$, 定义等价关系 $(x_n) \sim (y_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$, 则等价类 $\frac{V}{\sim}$ 即 M'.