第三次作业

截止时间: 2022 年 10 月 3 日 (周一)

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 (课本习题 2.9) 得分: _________. 设 $|a'\rangle$ 和 $|a''\rangle$ 是厄米算符 A 的本征态, 本征值分别为 a' 和 a'' ($a' \neq a''$), 哈密顿量算符由下式给出

$$H = |a'\rangle\delta\langle a''| + |a''\rangle\delta\langle a'|,$$

其中 δ 只是个实数.

(a) 显然, $|a'\rangle$ 和 $|a''\rangle$ 不是这个哈密顿量的本征态, 写出该哈密顿量的本征态, 他们的能量本征值是什么?

(b) 如果已知 $t=0$ 时刻系统处在 $|a'\rangle$ 态上, 在薛定谔绘景中写出 $t>0$ 时的态矢量.

(c) 如果已知 $t=0$ 时系统处在 $|a'\rangle$ 态上, 在 $t>0$ 时找到该系统在 $|a''\rangle$ 态的概率是多少?

(d) 你能想出与这个问题对应的一种物理情况吗?

解: (a) 以 $\{|a'\rangle, |a''\rangle\}$ 为基, 该哈密顿量的矩阵表示为

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

利用

$$|H - EI| = \begin{vmatrix} -E & \delta \\ \delta & -E \end{vmatrix} = E^2 - \delta^2 = 0, \tag{2}$$

解得能量本征值为

$$E_1 = \delta, \quad E_2 = -\delta. \tag{3}$$

将这两个能量本征值代入

$$H|E_{1/2}\rangle = E_{1/2}|E_{1/2}\rangle \tag{4}$$

解得其对应的本征态分别为

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a'\rangle + |a''\rangle), \quad |E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a'\rangle - |a''\rangle). \tag{5}$$

(b) 该哈密顿量对应的时间演化算符为

$$U(t,0) = \exp(-iHt/\hbar) = \exp(-i\delta t/\hbar)|E_1\rangle\langle E_1| + \exp(i\delta t/\hbar)|E_2\rangle\langle E_2|. \tag{6}$$

在薛定谔绘景中, $t>0$ 时的态矢量为

$$\begin{aligned} |a', 0; t\rangle =& U(t,0)|a'\rangle \\ =& [\exp(-i\delta t/\hbar)|E_1\rangle\langle E_1| + \exp(i\delta t/\hbar)|E_2\rangle\langle E_2|]\frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}}[\exp(-i\delta t/\hbar)|E_1\rangle + \exp(i\delta t/\hbar)|E_2\rangle] \\ =& \cos(\delta t/\hbar)|a'\rangle - i\sin(\delta t/\hbar)|a''\rangle. \end{aligned} \tag{7}$$

(c) 在 $t>0$ 时找到该系统在 $|a''\rangle$ 态的概率为

$$P(a'') = |\langle a''|a', 0; t\rangle|^2 = \sin^2(\delta t/\hbar). \tag{8}$$

(d) 以磁场中的电子自旋为例. 假设磁场沿 z 轴方向, $\boldsymbol{B}=B\hat{\boldsymbol{z}}$. $|a'\rangle=|s_x,+\rangle$ 和 $|a''\rangle=|s_x,-\rangle$ 为厄米算符 S_x 的本征态. 哈密顿量算符可表为

$$
\begin{aligned}
H=&-\left(\frac{eB}{mc}\right)S_z\\
=&-\frac{e\hbar B}{2mc}|s_z,+\rangle\langle s_z,+|+\frac{e\hbar B}{2mc}|s_z,-\rangle\langle s_z,-|\\
=&-\frac{e\hbar B}{2mc}\frac{1}{\sqrt{2}}(|s_x,+\rangle+|s_x,-\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle s_x,+|+\langle s_x,-|)+\frac{e\hbar B}{2mc}\frac{1}{\sqrt{2}}(|s_x,+\rangle-|s_x,-\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle s_x,+|-\langle s_x,-|)\\
=&\delta|s_x,+\rangle\langle s_x,-|+\delta|s_x,-\rangle\langle s_x,+|,
\end{aligned}
$$

其中 $\delta=-\frac{e\hbar B}{2mc}$. 由 (b) 和 (c) 中得到的结论, 如果 $t=0$ 时刻电子处在 $|s_x,+\rangle$ 态上, 则其在 $t>0$ 时的状态为

$$|s_x,+,0;t\rangle=\cos(\delta t/\hbar)|s_x,+\rangle-i\sin(\delta t/\hbar)|s_x,-\rangle. \tag{9}$$

此时找到电子在 $|s_x,-\rangle$ 态的概率为

$$P(s_x=-\hbar/2)=\sin^2(\delta t/\hbar). \tag{10}$$

□

第 2 题 (课本习题 2.10) 得分: ________. 含有一个粒子的一个盒子用一个薄的隔板分成左右两个隔间. 如果已知该粒子确定无疑地处在右 (左) 边, 则状态用 $|R\rangle$ ($|L\rangle$) 表示, 在那里我们忽略了在盒子的每一半中的空间变量, 然后, 最一般的态矢量可以写成

$$|\alpha\rangle=|R\rangle\langle R|\alpha\rangle+|L\rangle\langle L|\alpha\rangle,$$

其中 $\langle R|\alpha\rangle$ 和 $\langle L|\alpha\rangle$ 可以看作 “波函数”, 该粒子可以隧穿过隔板; 这种隧道效应由哈密顿量

$$H=\Delta(|L\rangle\langle R|+|R\rangle\langle L|)$$

表征, 其中的 Δ 是个有能量量纲的实数.

(a) 求归一化的能量本征右矢, 相应的能量本征值是什么?

(b) 在薛定谔绘景中基右矢 $|R\rangle$ 和 $|L\rangle$ 是固定不变的, 而态矢量随时间运动. 假定系统就由上面在 $t=0$ 时给定的 $|\alpha\rangle$ 表示. 通过用适当的时间演化算符作用于 $|\alpha\rangle$, 求 $t>0$ 时的态矢量 $|\alpha,t_0;t\rangle$.

(c) 假定 $t=0$ 时粒子确定无疑地处在右边, 观测到粒子在左边的、作为时间函数的概率是多少?

(d) 写出波函数 $\langle R|\alpha,t_0;t\rangle$ 和 $\langle L|\alpha,t_0;t\rangle$ 的耦合薛定谔方程, 证明该耦合薛定谔方程的解正是你在 (b) 中所预期的.

(e) 假定打印机出了个错, 把 H 写成了

$$H=\Delta|L\rangle\langle R|.$$

通过明显地求解具有该哈密顿量的最普遍的时间演化问题, 证明概率守恒被破坏了.

解: (a) 以 $\{|R\rangle,|L\rangle\}$ 为基, 该哈密顿量的矩阵表示为

$$H=\begin{bmatrix}0&\Delta\\\Delta&0\end{bmatrix}. \tag{11}$$

利用

$$|H-EI|=\begin{vmatrix}-E & \Delta\\ \Delta & -E\end{vmatrix}=E^2-\Delta^2=0, \tag{12}$$

解得能量本征值为

$$E_1=\Delta,\quad E_2=-\Delta. \tag{13}$$

将这两个能量本征值代入

$$H|E_{1/2}\rangle=E_{1/2}|E_{1/2}\rangle \tag{14}$$

解得其对应的归一的能量本征右矢分别为

$$|E_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle+|L\rangle),\quad |E_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle-|L\rangle). \tag{15}$$

(b) 该哈密顿量对应的时间演化算符为

$$\begin{aligned}U(t,t_0)=&\exp[-iH(t-t_0)/\hbar]\\ =&\exp[-i\Delta(t-t_0)/\hbar]|E_1\rangle\langle E_1|+\exp[i\Delta(t-t_0)/\hbar]|E_2\rangle\langle E_2|\\ =&\exp[-i\Delta(t-t_0)/\hbar]\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle+|L\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle R|+\langle L|)+\exp[i\Delta(t-t_0)/\hbar]\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle-|L\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle R|-\langle L|)\\ =&\cos[\Delta(t-t_0)/\hbar](|R\rangle\langle R|+|L\rangle\langle L|)-i\sin[\Delta(t-t_0)/\hbar](|R\rangle\langle L|+|L\rangle\langle R|).\end{aligned} \tag{16}$$

$t>0$ 时的态矢量为

$$\begin{aligned}|\alpha,t_0=0;t\rangle=&U(t,t_0=0)|\alpha,t_0=0;t\rangle\\ =&[\cos(\Delta t/\hbar)(|R\rangle\langle R|+|L\rangle\langle L|)-i\sin(\Delta t/\hbar)(|R\rangle\langle L|+|L\rangle\langle R|)](|R\rangle\langle R|\alpha\rangle+|L\rangle\langle L|\alpha|)\\ =&[\langle R|\alpha\rangle\cos(\Delta t/\hbar)-i\langle L|\alpha\rangle\sin(\Delta t/\hbar)]|R\rangle+[\langle L|\alpha\rangle\cos(\Delta t/\hbar)-i\langle R|\alpha\rangle\sin(\Delta t/\hbar)]|L\rangle.\end{aligned} \tag{17}$$

(c) 由 (b) 中得到的结论, 若 $|\alpha,t_0=0\rangle=|R\rangle$, 则 $t>0$ 时的态矢量为

$$|\alpha,t_0=0;t\rangle=\cos(\Delta t/\hbar)|R\rangle-i\sin(\Delta t/\hbar)|L\rangle. \tag{18}$$

观测到粒子在左边的概率为

$$P(L)=|\langle L|\alpha\rangle|^2=\sin^2(\Delta t/\hbar). \tag{19}$$

(d) 波函数 $\langle R|\alpha,t_0;t\rangle$ 和 $\langle L|\alpha,t_0;t\rangle$ 的耦合薛定谔方程分别为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle R|\alpha,t_0;t\rangle=\langle R|H|\alpha,t_0;t\rangle, \tag{20}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle L|\alpha,t_0;t\rangle=\langle L|H|\alpha,t_0;t\rangle, \tag{21}$$

代入哈密顿量的具体形式 $H=\Delta(|L\rangle\langle R|+|R\rangle\langle L|)$, 有

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle R|\alpha,t_0l;t\rangle=\Delta\langle L|\alpha,t_0;t\rangle, \tag{22}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle L|\alpha,t_0;t\rangle=\Delta\langle R|\alpha,t_0;t\rangle. \tag{23}$$

将 (b) 中得到的 $|\alpha, t_0; t\rangle$ 代入可得

$$\begin{aligned}
\text{方程左边} =& i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle R|\alpha, t_0; t\rangle \\
=& i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\langle R|\alpha\rangle\cos(\Delta t/\hbar) - i\langle L|\alpha\rangle\sin(\Delta t/\hbar)] \\
=& \Delta[-i\langle R|\alpha\rangle\sin(\Delta t/\hbar) + \langle L|\alpha\rangle\cos(\Delta t/\hbar)] \\
=& \Delta\langle L|\alpha, t_0; t\rangle = \text{方程右边}, \qquad (24)\\
\text{方程左边} =& i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle R|\alpha, t_0; t\rangle \\
=& i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\langle L|\alpha\rangle\cos(\Delta t/\hbar) - i\langle R|\alpha\rangle\sin(\Delta t/\hbar)] \\
=& \Delta[-i\langle L|\alpha\rangle\sin(\Delta t/\hbar) + \langle R|\alpha\rangle\cos(\Delta t/\hbar)] \\
=& \Delta\langle R|\alpha, t_0; t\rangle = \text{方程右边}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

故该耦合薛定谔方程的解正是在 (b) 中所预期的.

(e) 该错误哈密顿量对应的时间演化算符为

$$\begin{aligned}
U(t, t_0) =& \exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right] \\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right]^n \\
&(\text{利用 } H^2 = \Delta|L\rangle\langle R|L\rangle\langle R|) \\
=& 1 - \frac{i\Delta(t-t_0)}{\hbar}|L\rangle\langle R|. \qquad (26)
\end{aligned}$$

假设 $t = 0$ 时,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |\langle R|\alpha\rangle|^2 + |\langle L|\alpha\rangle|^2 = 1, \qquad (27)$$

即在盒子中 (无论哪个隔间) 找到粒子的概率为 1. $t > 0$ 时系统的态矢量为

$$\begin{aligned}
|\alpha, t_0 = 0; t\rangle =& U(t, 0)|\alpha\rangle \\
=& \left(1 - \frac{i\Delta t}{\hbar}|L\rangle\langle R|\right)(|R\rangle\langle R|\alpha\rangle + |L\rangle\langle L|\alpha\rangle) \\
=& |R\rangle\langle R|\alpha\rangle + |L\rangle\left(\langle L|\alpha\rangle - \frac{i\Delta t}{\hbar}\langle R|\alpha\rangle\right). \qquad (28)
\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}
\langle\alpha, t_0; t|\alpha, t_0; t\rangle =& \left[\langle\alpha|R\rangle\langle R| + \left(\langle\alpha|L\rangle + \frac{i\Delta t}{\hbar}\langle\alpha|R\rangle\right)\langle L|\right]\left[|R\rangle\langle R|\alpha\rangle + |L\rangle\left(\langle L|\alpha\rangle - \frac{i\Delta t}{\hbar}\langle R|\alpha\rangle\right)\right] \\
=& |\langle R|\alpha\rangle|^2 + |\langle L|\alpha\rangle|^2 + \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^2|\langle R|\alpha\rangle|^2 \\
=& 1 + \left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)^2|\langle R|\alpha\rangle|^2 \\
\geq& 1. \qquad (29)
\end{aligned}$$

这说明概率守恒被破坏了.

□