第八次作业

截止时间: 2022 年 11 月 14 日 (周一)

姓名 : 陈　稼　霖
学号 : SA21038052
成绩 : ________

第 1 题 (课本习题 4.2) 得分: ________. 设 $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}$ 代表平移算符 (位移矢量为 $\boldsymbol{d}$); 设 $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ 代表转动算符 ($\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 ϕ 分别为转轴和转角); 而设 π 代表宇称算符. 下列的各对算符中, 如果有的话, 哪几对是对易的? 为什么?

(a) $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}$ 和 $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}'}$ ($\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{d}'$ 沿不同方向),

(b) $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ 和 $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}}',\phi')$ ($\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}'$ 沿不同方向).

(c) $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}$ 和 π.

(d) $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ 和 π.

解: (a) $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}$ 和$\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}'}$ 对易. 证明如下:

由于 $[p_i,p_j]=0$, 故

$$\begin{aligned}[\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}},\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}'}]=&\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}'}-\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}'}\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}=\exp\left(-\frac{i\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i\boldsymbol{d}'\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)-\exp\left(-\frac{i\boldsymbol{d}'\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)\\=&\exp\left(-\frac{i(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}')\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)-\exp\left(-\frac{i(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}')\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)=0,\end{aligned}\tag{1}$$

即 $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}$ 和 $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}'}$ 对易.

(b) $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ 和$\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{d}}',\phi')$ 不对易. 证明如下:

不妨假设 $\hat{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{z}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{x}}$, 则由于 $[J_z,J_x]=i\hbar J_y$, 故

$$\begin{aligned}[\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi),\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}}',\phi')]=&\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}}',\phi')-\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}}',\phi')\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)\\=&\exp\left(\frac{-iJ_z\phi}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{-iJ_x\phi'}{\hbar}\right)-\exp\left(\frac{-iJ_x\phi'}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{-iJ_z\phi}{\hbar}\right)\\=&\left(1-\frac{iJ_z\phi}{\hbar}-\frac{J_z^2\phi^2}{\hbar^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{iJ_x\phi'}{\hbar}-\frac{J_x^2\phi'^2}{\hbar^2}+\cdots\right)\\&-\left(1-\frac{iJ_x\phi'}{\hbar}-\frac{J_x^2\phi'^2}{\hbar^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{iJ_z\phi}{\hbar}-\frac{J_z^2\phi^2}{\hbar^2}+\cdots\right)\\=&-\frac{(J_zJ_x-J_xJ_z)\phi\phi'}{\hbar^2}+\cdots\\=&-\frac{iJ_y\phi\phi'}{\hbar}+\cdots\\\neq&0,\end{aligned}\tag{2}$$

即 $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ 和 $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{d}}',\phi')$ 不对易.

(c) $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}$ 和π 不对易. 证明如下:

对位置算符 $\boldsymbol{x}$ 的任意本征矢 $|\boldsymbol{x}'\rangle$, 有

$$\begin{aligned}[\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}},\pi]|\boldsymbol{x}'\rangle=&(\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}\pi-\pi\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}})|\boldsymbol{x}'\rangle=\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}\pi|\boldsymbol{x}'\rangle-\pi\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}|\boldsymbol{x}'\rangle=\pm\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}|-\boldsymbol{x}'\rangle-\pi|\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{d}\rangle=\pm(|-\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{d}\rangle-|-\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{d}\rangle)\\\neq&0,\end{aligned}\tag{3}$$

故

$$[\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}},\pi]\neq0,\tag{4}$$

即 $\mathscr{T}_{\boldsymbol{d}}$ 和 π 不对易.

(d) $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ 和π 对易. 证明如下:

对位置算符 $\boldsymbol{x}$ 的任意本征矢 $|\boldsymbol{x}'\rangle$, 假设 $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)|\boldsymbol{x}'\rangle=|\boldsymbol{x}''\rangle$, 则有

$$\begin{aligned}[\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi),\pi]|\boldsymbol{x}'\rangle=&[\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)\pi-\pi\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)]|\boldsymbol{x}'\rangle=\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)\pi|\boldsymbol{x}'\rangle-\pi\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)|\boldsymbol{x}'\rangle=\pm\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)|-\boldsymbol{x}'\rangle-\pi|\boldsymbol{x}''\rangle\\=&\pm\left(|-\boldsymbol{x}''\rangle-|-\boldsymbol{x}''\rangle\right)=0,\end{aligned}\tag{5}$$

考虑到 $|\boldsymbol{x}'\rangle$ 的任意性和完备性, 故

$$[\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi),\pi]=0,\tag{6}$$

即 $\mathscr{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ 和 π 对易.

□

第 2 题 (课本习题 4.3) 得分: _________. 已知一个量子力学态 Ψ 是两个厄米算符 A 和 B 的一个共同本征态, 且 A 和 B 反对易:

$$AB+BA=0.$$

关于 $|\Psi\rangle$ 态上 A 和 B 的本征值能说些什么? 用宇称算符 (可以选择它来满足 $\pi=\pi^{-1}=\pi^\dagger$) 和动量算符为例来说明你的观点.

解: 假设本征态 Ψ 对应的算符 A 和 B 的本征值分别为 a 和 b, 将 $AB+BA=0$ 作用于该本征态 Ψ 上有

$$(AB+BA)|\Psi\rangle=(ab+ba)|\Psi\rangle=2ab|\Psi\rangle=0,\tag{7}$$

$$\Longrightarrow ab=0,\tag{8}$$

$$\Longrightarrow a=0\quad\text{or}\quad b=0.\tag{9}$$

宇称算符 π 和动量算符 $\boldsymbol{p}$ 反对易: $[\pi,\boldsymbol{p}]=0$. 动量算符 $\boldsymbol{p}$ 的本征态为

$$|\boldsymbol{p}'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\exp\left(\frac{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}'}{\hbar}\right)|\boldsymbol{x}'\rangle.\tag{10}$$

将宇称算符 π 作用于动量算符 $\boldsymbol{p}$ 的本征态上有

$$\pi|\boldsymbol{p}'\rangle=\pi\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\exp\left(\frac{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}'}{\hbar}\right)|\boldsymbol{x}'\rangle=\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\exp\left(\frac{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}'}{\hbar}\right)|-\boldsymbol{x}'\rangle,\tag{11}$$

故仅有 $|\boldsymbol{p}'=0\rangle$ 为宇称算符 π 和 $\boldsymbol{p}$ 的共同本征态. 宇称算符 π 的本征值必为 ±1, 而对该共同本征态 $|\boldsymbol{p}'=0\rangle$, 动量算符 $\boldsymbol{p}$ 的本征值为 0, 这与我们在前文得到的结论一致. □

第 3 题 (课本习题 4.7) 得分: _________. (a) 设 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 是一个无自旋粒子的波函数, 相应于一个三维平面波, 证明 $\psi^*(\boldsymbol{x}',-t)$ 是动量方向反转的平面波波函数.

(b) 设 $\chi(\hat{\boldsymbol{n}})$ 是 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ 的二分量本征旋量, 本征值为 $+1$, 利用 $\chi(\hat{\boldsymbol{n}})$ (借助于表征 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的极角和方位角 β 和 γ) 的显示形式, 证明 $-i\sigma_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})$ 是自旋方向反转的二分量本征旋量.

证: (a) 由于该波函数相当于一个三维平面波, 其具有如下形式:

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=e^{i(\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar},\tag{12}$$

对应动量为 $\boldsymbol{p}'$

而

$$\psi^*(\boldsymbol{x},-t)=e^{-i(\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}+Et)/\hbar}=e^{i(-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar},\tag{13}$$

对应动量为 $-\boldsymbol{p}'$.

(b) 该 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ 的二分量本征旋量的显示形式为

$$\chi(\hat{\boldsymbol{n}})=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\gamma/2}\\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\gamma/2}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

自旋方向反转的二分量本征旋量为

$$\begin{aligned}\chi'(\hat{\boldsymbol{n}})&=\left[\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)-i\sigma_3\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-i\boldsymbol{\sigma}_2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)&0\\0&\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)&-\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)&\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\gamma/2}\\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\gamma/2}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{15}$$

故

$$-i\sigma_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})=-i\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\gamma/2}\\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\gamma/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\gamma/2}\\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\gamma/2}\end{bmatrix}, \tag{16}$$

即 $-i\sigma_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})$ 是自旋方向反转的二分量本征旋量.

□