

第 1 题 (课本习题 3.1) 得分: _____. 求 $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值和本征矢. 假定一个电子处在自旋态 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 上. 如果测得 s_y , 结果为 $\hbar/2$ 的概率是什么?

解: 通过

$$|\sigma - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

解得 σ 的本征值为

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1. \quad (2)$$

将这两个本征值代入本征方程

$$\sigma_y \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

解得对应的归一化本征态分别为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \quad (4)$$

测得该电子的 s_y 为 $\hbar/2$ 的概率为

$$P(s_y = \frac{\hbar}{2}) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2} |\alpha - i\beta|^2. \quad (5)$$

□

第 2 题 (课本习题 3.2) 得分: _____. 对于一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子, 在存在一个磁场 $\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$ 情况下, 通过利用泡利矩阵显示结构, 求哈密顿量

$$H = -\frac{2\mu}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

的本征值.

解: 该粒子的哈密顿量可用泡利矩阵表为

$$H = -\frac{2\mu}{\hbar} (\sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y} + \sigma_z \hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}) = -\mu (B_x \sigma_x + B_y \sigma_y + B_z \sigma_z) = -\mu \begin{bmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{bmatrix}. \quad (6)$$

通过

$$|H - EI| = \begin{vmatrix} -\mu B_z - E & -\mu(B_x - iB_y) \\ -\mu(\mu B_x + iB_y) & \mu B_z - E \end{vmatrix} = (-\mu B_z - E)(\mu B_z - E) - \mu^2 (B_x - iB_y)(B_x + iB_y) = 0, \quad (7)$$

解得哈密顿量的本征值为

$$E_1 = \mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}, \quad E_2 = -\mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}. \quad (8)$$

□

第 3 题 (课本习题 3.5) 得分: _____. 考虑一个自旋为 1 的粒子. 求

$$S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar) \quad \text{和} \quad S_x(S_x + \hbar)(S_x - \hbar)$$

的矩阵元.

证: 以 $\{|s_z = +\hbar\rangle, |s_z = 0\rangle, |s_z = -\hbar\rangle\}$ 为基, S_z 的矩阵表示为

$$S_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

将其代入题干中的式子可得

$$S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar) = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hbar \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

考虑到 x 轴和 z 轴是等价的, 故有

$$S_x(S_x + \hbar)(S_x - \hbar) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

□

第 4 题 (课本习题 3.9) 得分: _____. 考虑一个由下式表示的欧拉转动序列

$$\mathcal{D}^{(1/2)} = \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\sigma_3\gamma}{2}\right).$$

由于转动的群性质, 这一序列操作等价于绕某个轴转一个 θ 角的单一转动. 求 θ .

解: 该欧拉转动序列

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)} &= \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right) \exp\left(\frac{-i\sigma_3\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

对比自旋 $\frac{1}{2}$ 系统中绕轴 \hat{n} 旋转 θ 角的算符

$$U = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}\theta}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - in_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & (-in_x - n_y) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ (-in_x + n_y) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + in_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (13)$$

可知, 矩阵对角元之和即为旋转角 θ 的 $\frac{1}{2}$ 的余弦的 2 倍,

$$e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) + e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (14)$$

解得等价转动的角度为

$$\theta = 2 \arccos \left[\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]. \quad (15)$$

□

第 5 题 (课本习题 3.14) 得分: _____. 已知 3×3 矩阵 $G_i (i = 1, 2, 3)$, 其矩阵元由下式给出:

$$(G_i)_{jk} = -i\hbar \varepsilon_{ijk},$$

其中 j 和 k 是行和列指标, 证明它满足角动量对易关系. 把 G_i 与比较常用的角动量算符 J_i , 在 J_3 取为对角的情况下的 3×3 表示联系起来, 实现该联系的变换矩阵的物理 (或几何) 意义是什么? 把得到的结果与无穷小转动下的

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}} \delta \phi \times \mathbf{V}$$

联系起来. (注: 这个问题可能有助于理解光子的自旋.)

证: 根据矩阵 G_i 的定义及矩阵乘法的规则,

$$\begin{aligned} [G_i, G_j]_{ln} &= (G_i G_j)_{ln} - (G_j G_i)_{ln} = \sum_m (G_{ilm} G_{jmn} - G_{jlm} G_{imn}) \\ &= (-i\hbar)^2 \sum_m (\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jmn} - \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{imn}) \\ &= (-i\hbar)^2 \sum_m (-\delta_{ij} \delta_{ln} \varepsilon_{ilm} + \delta_{in} \delta_{lj} \varepsilon_{ilm} + \delta_{ji} \delta_{ln} \varepsilon_{jlm} - \delta_{jn} \delta_{li} \varepsilon_{jlm}) \\ &= (-i\hbar)^2 [-\delta_{ij} \delta_{ln} (1 - \delta_{il}) + \delta_{in} \delta_{lj} (1 - \delta_{il}) + \delta_{ji} \delta_{ln} (1 - \delta_{jl}) - \delta_{jn} \delta_{li} (1 - \delta_{jl})] \\ &= (-i\hbar)^2 (-\delta_{ij} \delta_{ln} + \delta_{in} \delta_{lj} + \delta_{ji} \delta_{ln} - \delta_{jn} \delta_{li}) \\ &= (-i\hbar)^2 (\delta_{in} \delta_{lj} - \delta_{jn} \delta_{li}) \\ &= (-i\hbar)^2 [\delta_{in} \delta_{lj} (1 - \delta_{ij}) - \delta_{jn} \delta_{li} (1 - \delta_{ij})] \\ &= (-i\hbar)^2 \sum_k [\delta_{in} \delta_{lj} \varepsilon_{ijk} - \delta_{jn} \delta_{li} \varepsilon_{ijk}] \\ &= (-i\hbar)^2 \sum_k (\delta_{in} \delta_{lj} - \delta_{jn} \delta_{li}) \varepsilon_{ijk} \\ &= (-i\hbar)^2 \sum_k [\delta_{in} \delta_{lj} (1 - \delta_{ij}) - \delta_{jn} \delta_{li} (1 - \delta_{ij})] \varepsilon_{ijk} \\ &= (-i\hbar)^2 \sum_k (-\varepsilon_{kln}) \varepsilon_{ijk} \\ &= i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} (G_k)_{ln}, \end{aligned} \quad (16)$$

故 G_i 满足角动量对易关系.

变换矩阵 U 将 G_i 与 J_i 联系在一起,

$$U^\dagger G_i U = J_i, \quad (17)$$

注意到 J_3 为对角矩阵, 故上述过程实际上为 G_i 的对角化操作, 变换矩阵 U 由 G_3 的本征向量构成. 通过

$$|G_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -i\hbar & 0 \\ i\hbar & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2 - \hbar^2)\lambda = 0 \quad (18)$$

解得 G_3 的本征值为

$$\lambda_1 = \hbar, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\hbar. \quad (19)$$

将这三个本征值代入本征方程

$$G_3 |\lambda_i\rangle = \lambda_i |\lambda_i\rangle, \quad (20)$$

解得对应的归一化本征矢分别为

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

故变换矩阵为

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

联系 G_i 和角动量算符 J_i (J_3 取对角) 的变换矩阵的物理意义: 变换矩阵对应了基的旋转操作 — 在变换前的基表示下, 角动量算符的矩阵表示为 G_i ; 当进行变换矩阵对应的基旋转操作后, 得到的角动量算符的新的矩阵表示为 J_i , 其中 J_3 为对角形式. 由于仅仅是基矢的旋转, 因此虽然角动量算符在矩阵表示上有所变化, 但其基本性质 (如对易关系) 依然成立.

该有限角度的旋转可以拆解为无穷多个无穷小转动:

$$U^\dagger \mathbf{G} U = \lim_N (1 + \hat{\mathbf{n}} \frac{\phi}{N})^N \times \mathbf{G}. \quad (23)$$

□

第 6 题 (课本习题 3.15) 得分: _____. (a) 令 \mathbf{J} 是角动量. (它可以是轨道角动量 \mathbf{L} , 自旋 \mathbf{S} , 或 $\mathbf{J}_{\text{总}}$.) 利用 J_x, J_y, J_z ($J_\pm \equiv J_x \pm iJ_y$) 满足通常角动量对易关系的事实, 证明

$$\mathbf{J}^2 = J_z^2 + J_+ J_- - \hbar J_z.$$

(b) 利用 (a) (或其他方式) 推导出在

$$J_- \psi_{jm} = c_- \psi_{j,m-1}$$

中的系数 c_- 的“著名”的表达式.

证: (a)

$$\text{式子左边} = \mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad (24)$$

$$\text{式子右边} = J_z^2 + J_+ J_- - \hbar J_z = J_z^2 + (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) - i[J_x, J_y] = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \quad (25)$$

故原式成立:

$$\mathbf{J}^2 = J_z^2 + J_+ J_- - \hbar J_z. \quad (26)$$

(b) 由 (a) 中的结论有

$$J_+ J_- = \mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z, \quad (27)$$

从而

$$\begin{aligned} |c_-|^2 &= \langle j, m-1 | c_-^* c_- | j, m-1 \rangle = \langle j, m-1 | J_-^\dagger J_- | j, m-1 \rangle = \langle j, m-1 | J_+ J_- | j, m-1 \rangle \\ &= \langle j, m-1 | \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z | j, m-1 \rangle \\ &= j(j+1)\hbar^2 - (m-1)^2\hbar^2 - (m-1)\hbar^2 \\ &= (j+m)(j-m+1)\hbar^2, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\implies c_- = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar. \quad (29)$$

□