第十四次作业

截止时间: 2023 年 1 月 2 日 (周一)

姓名 : 陈 稼 霖
学号 : SA21038052
成绩 : __________

第 1 题 (课本习题 6.1) 得分: ________. 李普曼-施温格形式也能用于仅当 $0 < |x| < a$ 时 $V(x) \neq 0$ 的一个有限力程势的一维透射-反射问题.

(a) 假定有一个来自左边的入射波: $\langle x|\phi\rangle = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$. 如果想要只在 $x > a$ 的区域有一个透射波, 在 $x < -a$ 的区域有一个反射波和原始的波, 必须如何处理奇异的 $1/(E - H_0)$ 算符? $E \to E + i\varepsilon$ 的做法是否仍然正确? 求一个恰当的格林函数表达式, 并且写出 $\langle x|\psi^{(+)}\rangle$ 的一个积分方程.

(b) 考虑一个吸引的 δ 函数的特例

$$V = -\left(\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\right)\delta(x) \quad (\gamma > 0).$$

求解这个积分方程以得到透射和反射振幅. 检查该结果是否与 Gottfried 1966, 52 页的相符合.

(c) 有着 $\gamma > 0$ 的一维 δ 函数势, 对 γ 取任意值, 都允许一个 (且仅一个) 束缚态. 当 k 被看做是一个复变量时, 证明你算出的透射和反射振幅在预期的位置具有束缚态的极点.

解: (a) 如果想要只在 $x > a$ 的区域有一个透射波, 在 $x < -a$ 的区域有一个反射波和原始的波, 则应当在 $x > a$ 的区域 $1/(E - H_0) \to 1/(E - H_0 + i\varepsilon)$, 即 $E \to E + i\varepsilon$ 的做法仍然正确, 这将导致 $\langle x|\psi^{(+)}\rangle$ 无论在 $x > a$ 还是 $x < a$ 的区域都有一个原始波 + 散射波的形式, 在接下来的计算中会看到, 这最终会表现为在 $x > a$ 的区域有一个透射波, 在 $x < -a$ 的区域有一个反射波和原始的波.

此时,

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V|\psi^{(+)}\rangle. \tag{1}$$

格林函数:

$$\begin{aligned}
G_{(+)}(x, x') =& \frac{\hbar^2}{2m}\langle x|\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}|x'\rangle \\
=& \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k'}\sum_{k''}\langle x|k'\rangle\langle k'|\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}|k''\rangle\langle k''|x'\rangle \\
=& \frac{1}{L}\sum_{k'}\frac{e^{ik'(x-x')}}{k^2 - k'^2 + i\varepsilon} \\
=& \frac{1}{L}\int\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi/L}\,\frac{e^{ik'(x-x')}}{k^2 - k'^2 + i\varepsilon} \\
& (\text{重定义 } \varepsilon > 0) \\
=& \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}k'\,\frac{e^{ik'(x-x')}}{-(k' - k - i\varepsilon)(k' + k + i\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

对 $x > x'$, 取上半复平面的积分半圆,

$$G_{(+)} = \frac{1}{2\pi}2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ik'(x-x')}}{-(k' - k - i\varepsilon)(k' + k + i\varepsilon)}, k + i\varepsilon\right] = \frac{1}{2\pi}2\pi i\frac{e^{ik(x-x')}}{-2k} = -\frac{ie^{ik(x-x')}}{2k}. \tag{3}$$

对 $x < x'$, 去下半复平面的积分半圆,

$$G_{(+)} = \frac{1}{2\pi}2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ik'(x-x')}}{-(k' - k - i\varepsilon)(k' + k + i\varepsilon)}, -k - i\varepsilon\right] = -\frac{1}{2\pi}2\pi i\frac{e^{-ik(x-x')}}{2k} = -\frac{ie^{-ik(x-x')}}{2k}. \tag{4}$$

综上, 格林函数表达式:

$$G_{(+)}(x, x') = \begin{cases} -\frac{ie^{ik(x-x')}}{2k}, & x > x', \\ -\frac{ie^{-ik(x-x')}}{2k}, & x < x'. \end{cases} \tag{5}$$

散射波函数:

$$\begin{aligned}\langle x|\psi^{(+)}\rangle =&\langle x|\phi\rangle+\frac{2m}{\hbar^2}\int\mathrm{d}x'\,\langle x|\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}|x'\rangle\langle x'|V|\psi^{(+)}\rangle\\ =&\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{2m}{\hbar^2}\int\mathrm{d}x'\,G_{(+)}(x,x')V(x')\langle x'|\psi^{(+)}\rangle\\ =&\begin{cases}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{i}{2k}\int\mathrm{d}x'\,e^{ik(x-x')}V(x')\langle x'|\psi^{(+)}\rangle, & x>a,\\ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{i}{2k}\int\mathrm{d}x'\,e^{-ik(x-x')}V(x')\langle x'|\psi^{(+)}\rangle, & x<-a\end{cases}\end{aligned}\tag{6}$$

(b) 对 $x>a$,

$$\langle x|\psi^{(+)}\rangle=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{i}{2k}\int\mathrm{d}x'\,e^{ik(x-x')}\left(-\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\right)\delta(x')\langle x'|\psi^{(+)}\rangle=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{i\gamma}{2k}e^{ikx}\psi^{(+)}(0),\tag{7}$$

上式中取 $x=0$ 得

$$\psi^{(+)}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{i\gamma}{2k}\psi^{(+)}(0),\tag{8}$$

$$\Longrightarrow\psi^{(+)}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2k}{2k-i\gamma},\tag{9}$$

从而

$$\langle x|\psi^{(+)}\rangle=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\left[1+\frac{i\gamma}{2k-i\gamma}\right]=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\frac{2k}{2k-i\gamma},\quad\text{for }x>a.\tag{10}$$

故透射系数为

$$T=\frac{2k}{2k-i\gamma}.\tag{11}$$

对 $x<-a$,

$$\langle x|\psi^{(+)}\rangle=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{i}{2k}\int\mathrm{d}x'\,e^{-ik(x-x')}\left(-\frac{\gamma\hbar^2}{2m}\right)\delta(x')\langle x'|\psi^{(+)}\rangle=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{i\gamma}{2k-i\gamma}e^{-ikx}.\tag{12}$$

故反射系数为

$$R=\frac{i\gamma}{2k-i\gamma}.\tag{13}$$

(c) 由课本习题 (2.24) 的结论, 该一维 δ 函数势的束缚态的波函数为

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\gamma}{2}}e^{-ikx}, & x<0,\\ \sqrt{\frac{\gamma}{2}}e^{ikx}, & x>0,\end{cases}\tag{14}$$

其中 $k=i\frac{\gamma}{2}$. 而上述透射-反射问题的透射和反射振幅均在 $k=i\frac{\gamma}{2}$ 处达到极值, 这与束缚态的 k 一致.

□

第 2 题 (课本习题 6.4) 得分: ________. 考虑一个势

$$V=0\quad\text{对 }r>R\qquad V=V_0=\text{常数}\quad\text{对 }r<R.$$

其中的 V_0 可能是正的或负的. 采用分波法, 证明对 $|V_0|\ll E=\hbar^2k^2/2m$ 和 $kR\ll 1$, 微分截面是各向同性的, 并且总截面由

$$\sigma_{\text{总}}=\left(\frac{16\pi}{9}\right)\frac{m^2V_0^2R^6}{\hbar^4}$$

给出. 假定能量稍稍增加. 证明角分布能被写成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=A+B\cos\theta.$$

求 B/A 的一个近似表达式.

解: 在 $r > R$ 处, $A_l(r)$ 的具有这样的形式:

$$A_l(r) = e^{i\delta_1}[\cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)], \tag{15}$$

其中 n_l 为 l 阶球 Neumann 函数. 其在 $r = R$ 处的对数导数为

$$\beta_l = kR\left[\frac{j_l'(kR)\cos\delta_l - n_l'(kR)\sin\delta_l}{j_l(kR)\cos\delta_l - n_l(kR)\sin\delta_l}\right]. \tag{16}$$

相移 δ_l 满足

$$\tan\delta_l = \frac{kRj_l'(kR) - \beta_l j_l(kR)}{kRn_l'(kR) - \beta_l n_l(kR)}. \tag{17}$$

利用适用于球 Bessel 和球 Neumann 函数的递推式 $f_l'(x) = \frac{l}{x}f_l(x) - f_{l+1}(x)$, 处理掉上式中的微分项得

$$\tan\delta_l = \frac{kR\left[\frac{l}{kR}j_l(kR) - j_{l+1}(kR)\right] - \beta_l j_l(kR)}{kR\left[\frac{l}{lR}n_l(kR) - n_{l+1}(kR)\right] - \beta_l n_l(kR)} = \frac{[lj_l(kR) - kRj_{l+1}(kR)] - \beta_l j_l(kR)}{[ln_l(kR) - kRn_{l+1}(kR)] - \beta_l n_l(kR)}. \tag{18}$$

在 $r < R$ 处, 求解

$$\frac{\mathrm{d}^2u_l}{\mathrm{d}r^2} + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V_0 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)u_l = 0, \tag{19}$$

考虑到边界条件 $u_l|_{r=0} = 0$ 得

$$u_l = rA_l(r) = \kappa r j_l(\kappa r), \quad \text{for } 0 \le r < R, \tag{20}$$

$$\Longrightarrow A_l(r) = \kappa j_l(\kappa r), \quad \text{for } 0 \le r < R, \tag{21}$$

其中 j_l 为 l 阶球 Bessel 函数, κ 满足 $\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = \frac{\hbar k^2}{2m} - V_0$. 在 $r = R$ 处的对数微商为

$$\beta_l = \left(\frac{r}{A}\frac{\mathrm{d}A_l}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R} = \frac{\kappa Rj_l'(\kappa R)}{j_l(\kappa R)}. \tag{22}$$

利用适用于球 Bessel 和球 Neumann 函数的递推式 $f_l'(x) = \frac{l}{x}f_l(x) - f_{l+1}(x)$, 处理掉上式中的微分项得

$$\beta_l = \frac{lj_l(\kappa R) - \kappa Rj_{l+1}(\kappa R)}{j_l(\kappa R)} = l - \frac{\kappa Rj_l(\kappa R)}{j_l(\kappa R)}. \tag{23}$$

将上式代入式 (18) 中得

$$\begin{aligned}\tan\delta_l =& \frac{[lj_l(kR) - kRj_{l+1}(kR)] - \left[l - \frac{\kappa Rj_l(\kappa R)}{j_l(\kappa R)}\right]j_l(kR)}{[ln_l(kR) - kRn_{l+1}(kR)] - \left[l - \frac{\kappa Rj_l(\kappa R)}{j_l(\kappa R)}\right]n_l(kR)}\\ =& \frac{-kRj_{l+1}(kR) + \kappa R\frac{j_{l+1}(\kappa R)}{j_l(\kappa R)}j_l(kR)}{-kRn_{l+1}(kR) + \kappa R\frac{j_{l+1}(\kappa R)}{j_l(\kappa R)}n_l(kR)}.\end{aligned} \tag{24}$$

对 $|V_0| \ll E = \hbar^2k^2/2m$, $\kappa \approx k$, 又对 $kR \ll 1$, 故 $j_l(kR) \to \frac{(kR)^l}{(2l+1)!!}$, $n_l(kR) \to -\frac{(2l-1)!!}{(kR)^{l+1}}$, 从而

$$\begin{aligned}\tan\delta_l \approx& \frac{-\frac{(kR)^{l+2}}{(2l+3)!!} + \frac{(\kappa R)^2(kR)^l}{(2l+3)!!}}{\frac{(2l+1)!!}{(kR)^{l+1}} - \frac{(2l+1)!!(2l-1)!!}{(2l+3)!!}\frac{(\kappa R)^2}{(kR)^{l+1}}}\\ =&(kR)^{2l+1}\frac{(\kappa R)^2 - (kR)^2}{(2l+3)!!(2l+1)!! - (2l+1)!!(2l-1)!!}\\ \approx&(kR)^{2l+1}\frac{(\kappa R)^2 - (kR)^2}{(2l+3)!!(2l+1)!!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{(kR)^{2l+3}}{(2l+3)!!(2l+1)!!}\left[\left(\frac{\kappa}{k}\right)^2-1\right]\\
=&\frac{(kR)^{2l+3}}{(2l+3)!!(2l+1)!!}\left[\frac{E-V_0}{E}-1\right]\\
=&-\frac{(kR)^{2l+3}}{(2l+3)!!(2l+1)!!}\frac{V_0}{E},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\sin\delta_0\approx\tan\delta_0\approx-\frac{(kR)^3}{3}\frac{V_0}{E}=-\frac{2mV_0kR^3}{3\hbar^2}.
\tag{26}
$$

故总截面为

$$
\sigma_{总}=4\pi\frac{\sin^2\delta_0}{k^2}=\frac{16\pi}{9}\frac{m^2V_0^2R^6}{\hbar^4}.
\tag{27}
$$

假定能量稍稍增加,

$$
\sin\delta_1\approx\tan\delta_1\approx-\frac{(kR)^5}{45}\frac{V_0}{E}.
\tag{28}
$$

角分布为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=|f(\theta)|^2=&\left|\frac{1}{k}\sum_{l=0}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_lP_l(\cos\theta)\right|^2\\
\approx&\frac{1}{k^2}\left|e^{i\delta_0}\sin\delta_0+3e^{i\delta_1}\sin\delta_l\cos\theta\right|^2\\
\approx&\frac{1}{k^2}\left[\sin^2\delta_0+6\cos(\delta_1-\delta_0)\sin\delta_0\sin\delta_1\cos\theta\right]\\
\approx&\frac{1}{k^2}\left[\sin^2\delta_0+6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos\theta\right],
\end{aligned}
\tag{29}
$$

故

$$
\frac{B}{A}=\frac{6\sin\delta_1}{\sin\delta_0}=\frac{2}{5}(kR)^2.
\tag{30}
$$

□