5.29

a) 对三重态 $|1,0\rangle = [|+-\rangle + |-+\rangle]/\sqrt{2}$

$$有\ \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2)$$
$$= \frac{\hbar^2}{4}$$

对单态、$|0,0\rangle = [|+-\rangle - |-+\rangle]/\sqrt{2}$

$$有\ \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

则 $H|1,0\rangle = +\Delta|1,0\rangle$,

$H|0,0\rangle = -3\Delta|0,0\rangle$.

对 $t\le 0$, 系统处在态 $|+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,0\rangle + |0,0\rangle]$

利用时间演化算符性质,

$$|\alpha,0\rangle = |+-\rangle = [|1,0\rangle + |0,0\rangle]/\sqrt{2},$$

在时间 t, 态矢量为

$$|\alpha,t\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\alpha,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\Delta t/\hbar}|1,0\rangle + e^{3i\Delta t/\hbar}|0,0\rangle]$$

则 $$|\langle +-|\alpha,t\rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{-i\Delta t/\hbar} + e^{3i\Delta t/\hbar}|^2$$
$$= \frac{1+\cos(4\Delta t/\hbar)}{2}$$

$$|\langle -+|\alpha,t\rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{-i\Delta t/\hbar} - e^{3i\Delta t/\hbar}|^2$$
$$= \frac{1-\cos(4\Delta t/\hbar)}{2}$$

$$|\langle ++|\alpha,t\rangle|^2 = |\langle --|\alpha,t\rangle|^2 = 0$$

b) 利用微扰论，对于态 $|n\rangle = \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$，

用矩阵元 $\langle n|H|+-\rangle = [|1,0\rangle + |0,0\rangle]/\sqrt{2}$，

因为有 $|++\rangle = |1,1\rangle$，

$|--\rangle = |1,-1\rangle$，

所以 $\langle ++|H|+-\rangle = \langle --|H|+-\rangle = 0$，

这些态之间没有过渡，同精确解的结果一致。

只剩下

$$C_{-+}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i(0)t'}\langle -+|H|+-\rangle dt'$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\frac{t}{2}[\langle 1,0| - \langle 0,0|][\Delta|1,0\rangle - 3\Delta|0,0\rangle]$$

$$= -\frac{2i\Delta t}{\hbar}$$

跃迁概率为 $|C_{-+}^{(1)}(t)|^2 = 4\Delta^2 t^2/\hbar^2$，

将精确解延伸到小段时间得到

$$|\langle -+|\alpha, t\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{(4\Delta t/\hbar)^2}{2} = 4\Delta^2 t^2/\hbar,$$

这同一级微扰理论的结果相同。

从概率和为1的意义上，这与 $|\langle +-|\alpha, t\rangle|^2$ 的概率也相同，

但将微扰展开的一级公式应用到态 $|n\rangle = |+-\rangle = |i\rangle$ 得到的结果并不一致，

5.30

a) $i\hbar\dot{C}_1 = V_{12}(t)\, e^{i(E_1-E_2)t/\hbar} C_2 = \gamma e^{i(\omega-\omega_0)t} C_2 \quad, C_1(0)=1$

$i\hbar\dot{C}_2 = V_{21}(t)\, e^{i(E_2-E_1)t/\hbar} C_1 = \gamma e^{-i(\omega-\omega_0)t} C_1 \quad, C_2(0)=0$

这里 $\omega_0 = (E_2-E_1)/\hbar = \omega_{21}$,

$|C_1(t)|^2+|C_2(t)|^2=1$

利用 $C_1(t) = a_1(t)\, e^{i(\omega-\omega_0)t/2}$, $C_2(t) = a_2(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t/2}$

$(|a_1(t)|^2+|a_2(t)|^2=1)$

来修正方程,得到

$$i\hbar\dot{a}_1 - \hbar[(\omega-\omega_0)/2]a_1 = \gamma a_2 \quad, a_1(0)=1$$

$$i\hbar\dot{a}_2 + \hbar[(\omega-\omega_0)/2]a_2 = \gamma a_1 \quad, a_2(0)=0$$

将 a_1 和 a_2 写作 $a_1 = a_1^0 e^{i\Omega t}$, $a_2 = a_2^0 e^{i\Omega t}$, a_1^0, a_2^0 是常数,

$$\hbar[\Omega+(\omega-\omega_0)/2]a_1^0+\gamma a_2^0=0$$

$$\gamma a_1^0+\hbar[\Omega-(\omega-\omega_0)/2]a_2^0=0$$

非零解只可能在 $\Omega=\pm[\gamma^2/\hbar^2+(\omega-\omega_0)^2/4]^{\frac{1}{2}}$ 时实现,

取 $\Omega>0$,我们将解写作

$$a_1(t) = \alpha e^{i\Omega t} + \beta e^{-i\Omega t}$$

$$a_2(t) = \gamma_\alpha \alpha e^{i\Omega t} + \gamma_\beta \beta e^{-i\Omega t}$$

其中 $\gamma_\alpha = \dfrac{\Omega+(\omega-\omega_0)/2}{\gamma/\hbar} = -\dfrac{\gamma/\hbar}{\Omega-(\omega-\omega_0)/2}$

$$\gamma_\beta = -\frac{\Omega-(\omega-\omega_0)/2}{\gamma/\hbar} = \frac{\gamma/\hbar}{\Omega+(\omega-\omega_0)/2}$$

此时 $a_1(0)=\alpha+\beta=1$，$a_2(0)=\gamma_\alpha\alpha+\gamma_\beta\beta=0$,

则 $\alpha-\gamma_\alpha\alpha/\gamma_\beta=\alpha(1-\gamma_\alpha/\gamma_\beta)=1$

则 $a_2(t)=2i\gamma_\alpha\alpha\sin\Omega t$,

其中 $2i\gamma_\alpha\alpha = 2i\dfrac{\gamma_\alpha}{1-\gamma_\alpha/\gamma_\beta} = 2i\dfrac{\gamma_\alpha\gamma_\beta}{\gamma_\beta-\gamma_\alpha} = \dfrac{-2i}{2\Omega(\gamma/\hbar)}$

$$= \frac{\gamma}{i\hbar\Omega}$$

我们就得到了 $i\hbar\dot{c}_2(0)=i\hbar a_2^0\Omega=\gamma c_1(0)=\gamma$

$$c_2(t)=\frac{\gamma}{i\hbar\Omega}e^{-i(\omega-\omega_0)t/2}\sin\Omega t$$

则 $|c_2(t)|^2=\dfrac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2\Omega t$,

$$|c_1(t)|^2=1-|c_2(t)|^2$$

因为 $\alpha=\gamma_\beta/(\gamma_\beta-\gamma_\alpha)$ ，$\beta=-\gamma_\alpha/(\gamma_\beta-\gamma_\alpha)$，可以直接得到

$$c_1(t)=(\alpha e^{i\Omega t}+\beta e^{-i\Omega t})e^{i(\omega-\omega_0)t/2}$$

$$=\frac{\gamma}{2\hbar\Omega}(\gamma_\beta e^{i\Omega t}+\gamma_\alpha e^{-i\Omega t})e^{i(\omega-\omega_0)t/2}$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{4\hbar^2\Omega^2}\left[\gamma_\beta^2+\gamma_\alpha^2+\gamma_\alpha\gamma_\beta\left(e^{2i\Omega t}+e^{-2i\Omega t}\right)\right]$$

$$= \frac{\gamma^2}{4\hbar^2\Omega^2}\left[\gamma_\beta^2+\gamma_\alpha^2-2\cos 2\Omega t\right]$$

$$= \frac{\gamma^2}{4\hbar^2\Omega^2}\left[\frac{\Omega+(\omega-\omega_0)/2}{\Omega-(\omega-\omega_0)/2}+\frac{\Omega-(\omega-\omega_0)/2}{\Omega+(\omega-\omega_0)/2}-2\cos^2\Omega t+2\sin^2\Omega t\right]$$

$$= \frac{\gamma^2}{2\hbar^2\Omega^2}\frac{\hbar^2}{\gamma^2}\left[\Omega^2+\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4}+\frac{\gamma^2}{\hbar^2}(1-2\sin^2\Omega t)\right]$$

$$= \frac{1}{2\Omega^2}\left[2\Omega^2-2\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\sin^2\Omega t\right]$$

$$= 1-\frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2\Omega t$$

$$|C_2(t)|^2 = 1-|C_1(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2\Omega t$$

b) 对于微扰论,有

$$C_2^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_0 t'}\gamma e^{-i\omega t'}dt'$$

$$= \gamma\frac{e^{-i(\omega-\omega_0)}-1}{\hbar(\omega-\omega_0)}$$

$$|C_2^{(1)}|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2(\omega-\omega_0)^2}\left[2-2\cos(\omega-\omega_0)t\right]$$

$$= \frac{\gamma^2}{\hbar^2\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4}}\sin^2\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)$$

这个结果只有在$\gamma \ll |(\omega-\omega_0)|/2$,即$\Omega\approx|\omega-\omega_0|/2$时成立.

对于$\omega\approx\omega_0$,接近共振,作用会很大,微扰论也不再适用。

5.35

a) $\langle x|i\rangle = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\langle x|f\rangle = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2r}{a_0}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

则概率振幅为 $\langle i|f\rangle = \int d^3x \langle i|x\rangle\langle x|f\rangle$

$= 4\pi(2^{\frac{3}{2}}/\pi a_0^3)\int r^2 dr\, exp(-3r/a_0)$

其中 $\int r^2 dr\, exp(-3r/a_0) = \frac{2}{27} a_0^3$,

则 $\langle i|f\rangle = 8\sqrt{2} \times \frac{2}{27}$

$|\langle i|f\rangle|^2 = 0.702$ 就是系统处于 $^3He^+$ 基态的概率。

b) 衰变的电子在时间 $T = 1Å/v$ 内离开邻域

其中 $m_e v^2/2 \simeq 10\, keV$,

则 $v/c \approx \left(\frac{20}{511}\right)^{\frac{1}{2}}$, $T \simeq 10^{-18}$ 秒

但 $\frac{2\pi}{\omega_{ab}} \sim \frac{h}{40} eV \sim 10^{-15}$ 秒

因为有 $T \ll \frac{2\pi}{\omega_{ab}}$,

所以满足瞬变近似合理性。

5.38

1) 将时间相关势写作

$$V(x,t)=[\exp(kz-\omega t)+\exp(-kz+\omega t)]/2,$$

因为$E_i<E_f$，所以保留第一项，因此重点考虑$\hbar\omega$的吸收作用，吸收率为

$$w_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{V_0}{2}\right)^2|\langle p|e^{ikz}|0\rangle|^2\delta(E_p-E_0-\hbar\omega)$$

这里E_0是基态$|0\rangle$能量，E_p是态$|p\rangle$能量，被考虑作一个动能为$\vec{p}$的平面波。运用$1=\int d^3x|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|$，矩阵元写作

$$\langle\vec{p}|e^{ikz}|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0L}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3x' e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'/\hbar}e^{ikz'}e^{-r'/a_0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0L}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3x' e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}'}e^{-r'/a_0}$$

这里$\vec{q}=k\hat{z}-\frac{\vec{p}}{\hbar}$，让$\vec{q}$定义$z'$方向，有

$$\int d^3x' e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}'}e^{-r'/a_0}=2\pi\int_0^\infty r'^2dr'e^{-r'/a_0}\int_{-1}^{1}d(\cos\theta')e^{-iqr'\cos\theta'}$$

$$=\frac{4\pi a_0^3}{(1+a_0^2q^2)^2}$$

2) E和$E+dE$之间的抛射电子能量的状态数移动成一个立体角$d\Omega$，在一个边长为L的大盒子中，能量为

$$E=\frac{p^2}{2m_e}=\frac{\hbar^2k_f^2}{2m_e}=\frac{(2\pi\hbar)^2n^2}{2m_eL^2},\quad n^2=n_x^2+n_y^2+n_z^2,$$

n_x,n_y,n_z都是整数.

$$\vec{p}^2=\hbar^2 k_f^2,\quad k_f=\frac{2\pi}{L}\cdot n$$

n的值唯一确定了能量E的值.

每个点(n_x,n_y,n_z)都存在一个态，电子动量矢$\vec{p}$指向(n_x,n_y,n_z)方向，所以立体角在n空间里，所以放射出角$d\Omega$在E和$E+dE$的数量可通过计算厚度为dn的该角的薄球壳的状态数得到

$$\rho(E)=n^2 dn\, d\Omega$$

$$=n^2\frac{dn}{dE}dE\,d\Omega$$

$$=n^2\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^2\frac{m_e}{n}dE\,d\Omega$$

$$=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{m_e}{\hbar^2}k_f\,dE\,d\Omega$$

接下来得到电子的角分布

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4\pi^2\hbar}{m_e^2 w}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)|\langle n|e^{i(\omega/c)(\vec{n}\cdot\vec{x})}\hat{\varepsilon}\cdot\vec{p}\,|i\rangle|^2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{m_e}{\hbar^2}k_f$$

3） 在插入相同态密度后对Γ积分,衰减率变为

$$\frac{dw}{d\Omega}=\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{V_0}{2}\right)^2\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a_0 L}\right)^3\left[\frac{4\pi a_0^3}{(1+a_0^2q^2)^2}\right]^2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{m_e}{\hbar^2}k_f$$

$$=\frac{m_e V_0^2 a_0^3}{\pi\hbar^3}\frac{k_f}{(1+a_0^2q^2)^4}$$

这里的角分布包含在对q的依赖中，除因子$(\hat{\varepsilon}\cdot\hbar k_f)^2=k_f^2\sin^2\theta\cos^2\phi$

外，同角分布

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=32e^2k_f\frac{(\vec{\varepsilon}\cdot\hbar\vec{k}_f)^2}{me\omega}\frac{z^3}{a_0^5}\frac{1}{[(z^2/a_0^2)+q^2]^4}$$

相似。

这是一种特殊扰动，一种沿 z 方向但没有偏振的波。事实上，真正的电磁波的偏振导致了额外的角度依赖。

5.39

从 B.2.4 得到刚性壁势中能量写作

$$E=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2mL^2},\quad n=1,2,3\ldots$$

高能下假设 $n\gg1$，

n 和 $n+dn$ 间有 dn 种态，$dE=\frac{\hbar^2 n\,dn\,\pi^2}{mL^2}$，

得到 $$\frac{dn}{dE}=\frac{mL^2}{\hbar^2\pi^2n}=\frac{mL^2}{\hbar^2\pi^2}\frac{\hbar\pi}{L}\left(\frac{1}{2mE}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{L}{\hbar\pi}\left(\frac{m}{2E}\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\frac{L}{\hbar}$ 的维数是 $\frac{1}{\text{动量}}$，$\frac{m}{E}$ 的维数是 $\frac{1}{\text{速度}^2}$，

所以 $\frac{dn}{dE}$ 的维数是 $\frac{1}{\text{动量}\times\text{速度}}=\frac{1}{\text{能量}}$。