第二次作业

截止时间: 2022 年 9 月 26 日 (周一)

姓名：陈　稼　霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 (课本习题 1.29) 得分: ________. (a) Gottfried (1966) 在他的书的 247 页上说: 对所有能表示成其宗量的幂级数的函数 F 和 G, 从基本对易关系都可以 "容易地推导" 出

$$[x_i, G(\boldsymbol{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad [p_i, F(\boldsymbol{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

证明这个说法.

(b) 求 $[x^2, p^2]$ 的值, 把你的结果与经典的泊松括号 $[x^2, p^2]_{经典}$ 相比较.

解: (a) 通过泰勒展开将函数 F 和 G 分别表为其宗量的幂级数和

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}n+m+l\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m+l\\m\end{pmatrix}\frac{1}{(n+m+l)!}\frac{\partial^{n+m+l}F}{\partial x_i^n\partial x_j^m\partial x_k^l}x_i^l x_j^m x_k^n \equiv \sum_{nml} f_{nml}x_i^n x_j^m x_k^l, \tag{1}$$

$$G(\boldsymbol{p}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}n+m+l\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m+l\\m\end{pmatrix}\frac{1}{(n+m+l)!}\frac{\partial^{n+m+l}G}{\partial p_i^n\partial p_j^m\partial p_k^l}p_i^n p_j^m p_k^l \equiv \sum_{nml} g_{nml}p_i^n p_j^m p_k^l \tag{2}$$

利用基本对易关系

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{3}$$

有

$$\begin{aligned}
[x_i, p_i^n] =& p_i[x_i, p_i^{n-1}] + [x_i, p_i]p_i^{n-1} = p_i[x_i, p_i^{n-1}] + i\hbar p_i^{n-1}\\
=& p_i^2[x_i, p_i^{n-2}] + p_i[x_i, p_i]p_i^{n-2} + i\hbar p_i^{n-1} = p_i^2[x_i, p_i^{n-2}] + 2i\hbar p_i^{n-1}\\
&\cdots\\
=& ni\hbar p_i^{n-1},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
[p_i, x_i^n] =& x_i[p_i, x_i^{n-1}] + [p_i, x_i]x_i^{n-1} = x_i[p_i, x_i^{n-1}] - i\hbar x_i^{n-1}\\
=& x_i^2[p_i, x_i^{n-2}] + x_i[p_i, x_i]x_i^{n-2} - i\hbar x_i^{n-1} = x_i^2[p_i, x_i^{n-2}] - 2i\hbar x_i^{n-1}\\
&\cdots\\
=& -ni\hbar x_i^{n-1},
\end{aligned} \tag{5}$$

从而

$$[x_i, G(\boldsymbol{p})] = [x_i, \sum_{nml} g_{nml}p_i^n p_j^m p_k^l] = \sum_{nml} g_{nml}[x_i, p_i^n]p_j^m p_k^l = i\hbar\sum_{nml} g_{nml}np_i^{n-1}p_j^m p_k^l = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p}, \tag{6}$$

$$[p_i, F(\boldsymbol{x})] = [p_i, \sum_{nml} f_{nml}x_i^n x_j^m x_k^l] = \sum_{nml} g_{nml}[p_i, x_i^n]x_j^m x_k^l = -i\hbar\sum_{nml} f_{nml}nx_i^{n-1}x_j^m x_k^l = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{7}$$

(b)

$$[x^2, p^2] = x[x, p^2] + [x, p^2]x = x\{p[x, p] + [x, p], p\} + \{p[x, p] + [x, p]p\}x = 2i\hbar(xp + px) \tag{8}$$

经典的泊松括号:

$$[x^2, p^2]_{经典} = \frac{\partial x^2}{\partial x}\frac{\partial p^2}{\partial p} - \frac{\partial x^2}{\partial p}\frac{\partial p^2}{\partial x} = 4xp. \tag{9}$$

只需将经典的泊松括号厄米化, 即可得到与量子力学中一致的形式:

$$[x^2, p^2]_{经典} = 4xp \xrightarrow{厄米化} 2xp + 2px = \frac{1}{i\hbar}[x^2, p^2]. \tag{10}$$

□

第 2 题 (课本习题 1.31) 得分: ________. 在正文中我们讨论了 $\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')$ 在位置和动量本征右矢上以及在一个更一般的态右矢 $|\alpha\rangle$ 的效应. 我们还可以研究期待值 $\langle\boldsymbol{x}\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{p}\rangle$ 在无穷小平移下的行为. 利用 (1.6.25) 式和 (1.6.45) 式并令 $|\alpha\rangle\to\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')|\alpha\rangle$, 证明在无穷小平移下 $\langle\boldsymbol{x}\rangle\to\langle\boldsymbol{x}\rangle+\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$, $\langle\boldsymbol{p}\rangle\to\langle\boldsymbol{p}\rangle$.

证: 平移前,

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{x}\rangle=&\langle\alpha|\boldsymbol{x}|\alpha\rangle, &(11)\\ \langle\boldsymbol{p}\rangle=&\langle\alpha|\boldsymbol{p}|\alpha\rangle. &(12)\end{aligned}$$

平移后, 利用 (1.6.25) 式 $[\boldsymbol{x},\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')]=\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$, 有

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')|\alpha\rangle=&\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')[\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}']|\alpha\rangle\\ =&\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}|\alpha\rangle+\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'|\alpha\rangle\\ =&\langle\alpha|\boldsymbol{x}|\alpha\rangle+\langle\alpha|(1+i\boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'|\alpha\rangle\\ &\text{(略去高阶小量)}\\ =&\langle\boldsymbol{x}\rangle+\langle\alpha|\mathrm{d}\boldsymbol{x}'|\alpha\rangle\\ =&\langle\boldsymbol{x}\rangle+\mathrm{d}\boldsymbol{x}', \qquad (13)\end{aligned}$$

由于平移算符 $\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')$ 可表为动量算符 $\boldsymbol{p}$ 的幂级数之和, 利用 (1.6.45) 式 $[p_i,p_j]=0$, 有 $[\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}'),\boldsymbol{p}]=0$, 从而

$$\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{p}\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')|\rangle=\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{p}|\alpha\rangle=\langle\alpha|\boldsymbol{p}|\alpha\rangle=\langle\boldsymbol{p}\rangle. \qquad (14)$$

□

第 3 题 (课本习题 1.33) 得分: ________. (a) 证明下列各式:

i. $\langle p'|x|\alpha\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle$.

ii. $\langle\beta|x|\alpha\rangle=\int\mathrm{d}p'\phi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')$, 其中 $\phi_\alpha(p')=\langle p'|\alpha\rangle$ 和 $\phi_\beta(p')=\langle p'|\beta\rangle$ 都是动量空间波函数.

(b)

$$\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$$

的物理意义是什么, 其中 x 是位置算符, 而 Ξ 是某个量纲为动量的数? 证明你的答案的正确性.

证: (a) i.

$$\langle p'|x|\alpha\rangle=\int\mathrm{d}p''\,\langle p'|x|p''\rangle\langle p''|\alpha\rangle, \qquad (15)$$

其中

$$\begin{aligned}\langle p'|x|p''\rangle=&\int\mathrm{d}x'\,\langle p'|x|x'\rangle\langle x'|p'\rangle\\ =&\int\mathrm{d}x'\,x'\langle p'|x'\rangle\langle x'|p'\rangle\\ =&\frac{1}{2\pi\hbar}\int\mathrm{d}x'\,x'\exp\left[-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}\right]\\ =&\frac{1}{2\pi\hbar}\int\mathrm{d}x'\,i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\exp\left[-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}\right]\\ =&i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\frac{1}{2\pi\hbar}\int\mathrm{d}x'\,\exp\left[-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}\right]\end{aligned}$$

$$=i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p''), \tag{16}$$

故

$$\langle p'|x|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p''\, i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')\langle p''|\alpha\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle. \tag{17}$$

ii.

$$\langle\beta|x|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p'\,\langle\beta|p'\rangle\langle p'|x|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p'\,\langle\beta|p'\rangle i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p'\,\phi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p'). \tag{18}$$

(b) $\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$ 为动量平移算符. 证明如下:

将 $\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$ 作用于动量算符 p 的本征态 $|p'\rangle$ 后, 其动量变为 $p'+\Xi$:

$$\begin{aligned}
p\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)|p'\rangle=&p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^n|p'\rangle\\
&(\text{利用第 1 题中推得的对易关系: } [p,x^n]=-ni\hbar x^{n-1})\\
=&\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^n p+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^{n-1}\Xi\right]|p'\rangle\\
=&(p'+\Xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^n|p'\rangle\\
=&(p'+\Xi)\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)|p'\rangle,
\end{aligned} \tag{19}$$

故 $\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$ 为动量平移算符, 其带来的动量变化为 Ξ.

□

第 4 题 (课本习题 2.2) 得分: __________. 再看一下第 1 章习题 1.11 的哈密顿量. 假定打字员出了一个错, 把 H 写成

$$H=H_{11}|1\rangle\langle 1|+H_{22}|2\rangle\langle 2|+H_{12}|1\rangle\langle 2|.$$

现在什么原理被破坏了? 通过尝试利用这类不合法的哈密顿量求解最一般的问题 (为了简单, 你可以假定 $H_{11}=H_{22}=0$), 阐明你的观点.

解: 该非厄米的哈密顿量导致时间演化算符失去了幺正性, 从而破坏了量子态在时间演化中的归一性, 即在该哈密顿量下, 量子态与自身的内积并不能总保持为 1.

简单起见, 不妨假定 $H_{11}=H_{22}=0$, 即

$$H=H_{12}|1\rangle\langle 2|. \tag{20}$$

该不含时的哈密顿量对应的时间演化算符为

$$\begin{aligned}
U(t,t_0)=&\exp\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right]\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{-iH(t-t_0)}{\hbar}\right]^n\\
&(\text{利用 } H^2=H_{12}^2|1\rangle\langle 2|1\rangle\langle 2|=0)\\
=&1-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}
\end{aligned}$$

$$=1-\frac{iH_{12}(t-t_0)}{\hbar}|1\rangle\langle 2|. \tag{21}$$

假设 t_0 时刻的归一化量子态 $|\alpha,t_0\rangle=c_1|1\rangle+c_2|2\rangle$ 满足归一化条件 $\langle\alpha,t_0|\alpha,t_0\rangle=|c_1|^2+|c_2|^2=1$, 则其演化至 t 时刻为

$$|\alpha,t_0;t\rangle=U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle=\left[1-\frac{iH_{12}(t-t_0)}{\hbar}|1\rangle\langle 2|\right](c_1|1\rangle+c_2|2\rangle)=\left[c_1-\frac{iH_{12}(t-t_0)}{\hbar}c_2\right]|1\rangle+c_2|2\rangle. \tag{22}$$

此时量子态与自身的内积含时, 不再满足归一化条件:

$$\begin{aligned}\langle\alpha,t_0;t|\alpha,t_0;t\rangle=&\left\{\left[c_1+\frac{iH_{12}(t-t_0)}{\hbar}c_2\right]\langle 1|+c_2\langle 2|\right\}\left\{\left[c_1-\frac{iH_{12}(t-t_0)}{\hbar}c_2\right]|1\rangle+c_2|2\rangle\right\}\\=&|c_1|^2+\frac{|H_{12}|^2(t-t_0)^2}{\hbar^2}|c_2|^2+|c_2|^2\\=&1+\frac{|H_{12}|^2(t-t_0)^2}{\hbar^2}|c_2|^2\\\geq&1.\end{aligned} \tag{23}$$

□

第 5 题 (课本习题 2.3) 得分: __________. 一个电子受到一个时间无关的、强度为 B 的沿正 z 方向的均匀磁场的作用. 在 $t=0$ 时已知电子处在 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ 的本征态上, 本征值为 $\hbar/2$, 其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是一个单位矢量, 位于 xz 平面上, 与 z 轴夹 β 角.

(a) 求找到电子处在 $s_x=\hbar/2$ 态上作为时间函数的概率.

(b) 求作为时间函数的 S_x 的期待值.

(c) 为让你自己放心, 在 (i) $\beta\to 0$ 和 (ii) $\beta\to\pi/2$ 的极端情况下证明你的答案是有意义的.

解: (a) $t=0$ 时, 电子的状态为

$$|\alpha,t=0\rangle=\cos\frac{\beta}{2}|s_z,+\rangle+\sin\frac{\beta}{2}|s_z,-\rangle. \tag{24}$$

电子和磁场相互作用的哈密顿量

$$H=-\frac{eB}{mc}S_z \tag{25}$$

不含时, 故对应的时间演化算符为

$$U(t,0)=\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)=\exp\left(\frac{-ieBS_zt}{mc\hbar}\right). \tag{26}$$

t 时刻电子的状态为

$$\begin{aligned}|\alpha,t\rangle=&U(t,0)|\alpha,t\rangle\\=&\exp\left(\frac{-ieBS_zt}{mc\hbar}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}|s_z,+\rangle+\sin\frac{\beta}{2}|s_z,-\rangle\right)\\=&\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)\cos\frac{\beta}{2}|s_z,+\rangle+\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)\sin\frac{\beta}{2}|s_z,-\rangle.\end{aligned} \tag{27}$$

电子处在 $s_x=\hbar/2$ 态上概率为

$$P(s_x=\hbar/2)=|\langle s_x=\hbar/2|\alpha,t\rangle|^2$$

$$
\begin{aligned}
=&\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle s_z,+|+\langle s_z,-|)\left[\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)\cos\frac{\beta}{2}|s_z,+\rangle+\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)\sin\frac{\beta}{2}|s_z,-\rangle\right]\right|^2\\
=&\frac{1}{2}\left|\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)\cos\frac{\beta}{2}+\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)\sin\frac{\beta}{2}\right|^2\\
=&\frac{1}{2}\left[1+\sin\beta\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right)\right].
\end{aligned}\tag{28}
$$

(b) 算符 S_x 在基 $\{|s_z,\pm\rangle\}$ 上展开的形式为

$$
S_x=\frac{\hbar}{2}(|s_z,+\rangle\langle s_z,-|+|s_z,-\rangle\langle s_z,+|).\tag{29}
$$

S_x 的期待值

$$
\begin{aligned}
\langle S_x(t)\rangle=&\langle\alpha,t|S_x|\alpha,t\rangle\\
=&\left[\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)\cos\frac{\beta}{2}\langle s_z,+|+\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)\sin\frac{\beta}{2}\langle s_z,-|\right]\frac{\hbar}{2}(|s_z,+\rangle\langle s_z,-|+|s_z,-\rangle\langle s_z,+|)\times\\
&\left[\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)\cos\frac{\beta}{2}|s_z,+\rangle+\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)\sin\frac{\beta}{2}|s_z,-\rangle\right]\\
=&\frac{\hbar}{2}\sin\beta\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right).
\end{aligned}\tag{30}
$$

(c) (i) 当 $\beta=0$, 则 $t=0$ 时电子的状态为 $|\alpha,t=0\rangle=|s_z,+\rangle$, 该状态为哈密顿量的本征态, 故关于时间保持不变. t 时刻电子处在 $s_x=\hbar/2$ 的概率为

$$
P(s_x=\hbar/2)=|\langle s_x,+|s_z,+\rangle|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle s_z,+|+\langle s_z,-|)|s_z,+\rangle\right|^2=\frac{1}{2}.\tag{31}
$$

这与利用 (a) 中结论得到的

$$
P(s_x=\hbar/2)=\frac{1}{2}\left[1+\sin 0\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right)\right]=\frac{1}{2}\tag{32}
$$

一致. S_x 的期待值为

$$
\langle S_x\rangle=\langle s_z,+|S_x|s_z,+\rangle=\langle s_z,+|\frac{\hbar}{2}(|s_z,+\rangle\langle s_z,-|+|s_z,-\rangle\langle s_z,+|)|s_z,+\rangle=0.\tag{33}
$$

这与利用 (b) 中结论得到的

$$
\langle S_x\rangle=\frac{\hbar}{2}\sin 0\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right)=0\tag{34}
$$

一致.

(ii) 当 $\beta=\pi/2$, 则 $t=0$ 时电子的状态为

$$
|\alpha,t=0\rangle=|s_x,+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|s_z,+\rangle+|s_z,-\rangle).\tag{35}
$$

t 时刻电子的状态为

$$
\begin{aligned}
|\alpha,t\rangle=&U(t,0)|\alpha,t=0\rangle=\exp\left(\frac{-ieBS_zt}{mc\hbar}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|s_z,+\rangle+|s_z,-\rangle)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)|s_z,+\rangle+\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)|s_z,-\rangle\right]
\end{aligned}\tag{36}
$$

电子处在 $s_x=\hbar/2$ 态上的概率为

$$\begin{aligned}P(s_x=\hbar/2)=&|\langle s_x=\hbar/2|\alpha,t\rangle|^2\\=&\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle s_z,+|+\langle s_z,-|)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)|s_z,+\rangle+\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)|s_z,-\rangle\right]\right|^2\\=&\cos^2\left(\frac{eBt}{2mc}\right).\end{aligned}\tag{37}$$

这与利用 (a) 中结论得到的

$$P(s_x=\hbar/2)=\frac{1}{2}\left[1+\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right)\right]=\cos^2\left(\frac{eBt}{2mc}\right)\tag{38}$$

一致. S_x 的期待值为

$$\begin{aligned}\langle S_x\rangle=&\langle\alpha,t|S_x|\alpha,t\rangle\\=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)\langle s_z,+|+\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)\langle s_z,-|\right]\frac{\hbar}{2}(|s_z,+\rangle\langle s_z,-|+|s_z,-\rangle\langle s_z,+|)\times\\&\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\exp\left(\frac{-ieBt}{2mc}\right)|s_z,+\rangle+\exp\left(\frac{ieBt}{2mc}\right)|s_z,-\rangle\right]\\=&\frac{\hbar}{2}\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right).\end{aligned}\tag{39}$$

这与利用 (b) 中结论得到的

$$\langle S_x\rangle=\frac{\hbar}{2}\sin\frac{\hbar}{2}\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right)=\frac{\hbar}{2}\cos\left(\frac{eBt}{mc}\right)\tag{40}$$

一致.

综上, (a) 和 (b) 中得到的结论应当是可靠的.

□

第 6 题 (课本习题 2.6) 得分: ________. 考虑一个一维粒子, 其哈密顿量由下式给出

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(x).$$

通过计算 $[[H,x],x]$, 证明

$$\sum_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2(E_{a'}-E_{a''})=\frac{\hbar^2}{2m},$$

其中 $|a'\rangle$ 是一个能量本征态, 本征值为 $E_{a'}$.

证:

$$[H,x]=[\frac{p^2}{2m}+V(x),x]=[\frac{p^2}{2m},x]+[V(x),x]=\frac{1}{2m}[p^2,x]=\frac{1}{2m}(p[p,x]+[p,x]p)=-i\frac{\hbar}{m}p.\tag{41}$$

$$[[H,x],x]=[-i\frac{\hbar}{m}p,x]=-\frac{\hbar^2}{m}.\tag{42}$$

一方面,

$$\sum_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2(E_{a'}-E_{a''})=\sum_{a'}[\langle a''|x|a'\rangle E_{a'}\langle a'|x|a''\rangle-\langle a''|x|a'\rangle E_{a''}\langle a'|x|a''\rangle]$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{a'}[\langle a''|xH|a'\rangle\langle a'|x|a''\rangle-\langle a''|Hx|a'\rangle\langle a'|x|a''\rangle]\\
&=\sum_{a'}\langle a''|(xH-Hx)|a'\rangle\langle a'|x|a''\rangle\\
&=\langle a''|[x,H]x|a''\rangle,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
\sum_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2(E_{a'}-E_{a''})&=\sum_{a'}[\langle a''|x|a'\rangle E_{a'}\langle a'|x|a''\rangle-\langle a''|x|a'\rangle E_{a''}\langle a'|x|a''\rangle]\\
&=\sum_{a'}[\langle a''|x|a'\rangle\langle a'|Hx|a''\rangle-\langle a''|x|a'\rangle\langle a'|xH|a''\rangle]\\
&=\sum_{a'}\langle a''|x|a'\rangle\langle a'|(Hx-xH)|a''\rangle\\
&=\langle a''|x[H,x]|a''\rangle.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

以上两式相加得

$$
\begin{aligned}
2\sum_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2(E_{a'}-E_{a''})&=\langle a''|[x,H]x|a''\rangle+\langle a''|x[H,x]|a''\rangle\\
&=-\langle a''|([H,x]x-x[H,x])|a''\rangle\\
&=-\langle a''|[[H,x],x]|a''\rangle\\
&=\frac{\hbar^2}{m},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
\Longrightarrow\sum_{a'}|\langle a''|x|a'\rangle|^2(E_{a'}-E_{a''})=\frac{\hbar^2}{2m}. \tag{46}
$$

□

第 7 题 (课本习题 2.8) 得分: ________. 考虑一个一维自由粒子的波包. $t=0$ 时它满足最小不确定度关系

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\quad(t=0).$$

此外, 我们知道

$$\langle x\rangle=\langle p\rangle=0\quad(t=0).$$

利用海森堡绘景, 当 $\langle(\Delta x)^2\rangle_{t=0}$ 给定时, 求作为 t $(t\geq 0)$ 的函数的 $\langle(\Delta x)^2\rangle_t$. (提示: 利用你在第 1 章习题 1.18 中得到的不确定度波包的性质.)

解: 一维自由粒子的哈密顿量为

$$H=\frac{p^2}{2m}. \tag{47}$$

对应的时间演化算符为

$$U(t,0)=\exp\left(\frac{-ip^2t}{2m\hbar}\right). \tag{48}$$

从而

$$
\begin{aligned}
\langle(\Delta x)^2\rangle_t&=\langle x^2\rangle_t-\langle x\rangle_t^2\\
&=\langle\alpha,t=0|U^\dagger(t,0)x^2U(t,0)|\alpha,t=0\rangle-\langle\alpha,t=0|U^\dagger(t,0)xU(t,0)|\alpha,t=0\rangle^2.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

利用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式 $e^XYe^{-X}=Y+[X,Y]+\frac{1}{2!}[X,[X,Y]]+\frac{1}{3!}[x,[X,[X,Y]]]+\cdots$, 有

$$\begin{aligned}
U^\dagger(t,0)x^2U(t,0)=&\exp\left(\frac{ip^2t}{2m}\right)x^2\exp\left(\frac{-ip^2t}{2m}\right)\\
=&x^2+[\frac{ip^2t}{2m},x^2]+\frac{1}{2!}[\frac{ip^2t}{2m},[\frac{ip^2t}{2m},x^2]]+\frac{1}{3!}[\frac{ip^2t}{2m},[\frac{ip^2t}{2m},[\frac{ip^2t}{2m},x^2]]]+\cdots\\
=&x^2+\frac{t}{m}(px+xp)+\left(\frac{t}{m}\right)^2p^2, \qquad (50)\\
U^\dagger(t,0)xU(t,0)=&\exp\left(\frac{ip^2t}{2m}\right)x\exp\left(\frac{-ip^2t}{2m}\right)\\
=&x+[\frac{ip^2t}{2m},x]+\frac{1}{2!}[\frac{ip^2t}{2m},[\frac{ip^2t}{2m},x]]+\frac{1}{3!}[\frac{ip^2t}{2m},[\frac{ip^2t}{2m},[\frac{ip^2t}{2m},x]]]+\cdots\\
=&x+\frac{t}{m}p. \qquad (51)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta x)^2\rangle_t=&\langle\alpha,t=0|\left[x^2+\frac{t}{m}(px+xp)+\left(\frac{t}{m}\right)^2p^2\right]|\alpha,t=0\rangle-\langle\alpha,t=0|\left(x+\frac{t}{m}p\right)|\alpha,t=0\rangle\\
=&\langle x^2\rangle_{t=0}+\frac{t}{m}\langle px+xp\rangle_{t=0}+\left(\frac{t}{m}\right)^2\langle p^2\rangle_{t=0}-\left[\langle x\rangle_{t=0}+\frac{t}{m}\langle p\rangle_{t=0}\right]^2\\
=&\langle x^2\rangle_{t=0}+\frac{t}{m}\langle px+xp\rangle_{t=0}+\left(\frac{t}{m}\right)^2\langle p^2\rangle_{t=0}. \qquad (52)
\end{aligned}$$

由于该粒子在 $t=0$ 时满足最小不确定度关系, 有

$$\langle p^2\rangle_{t=0}=\langle(p-\langle p\rangle_{t=0})^2\rangle=\langle(\Delta p)^2\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\langle(\Delta x)^2\rangle_{t=0}}. \qquad (53)$$

及

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_{t=0}\langle(\Delta p)^2\rangle_{t=0}=\frac{1}{4}\left|\langle[\Delta x,\Delta p]\rangle_{t=0}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\langle\{\Delta x,\Delta p\}\rangle_{t=0}\right|^2=\frac{\hbar^2}{4}+\frac{1}{4}\left|\langle\{\Delta x,\Delta p\}\rangle_{t=0}\right|^2=\frac{\hbar^2}{4}, \qquad (54)$$

$$\Longrightarrow\langle\{\Delta x,\Delta p\}\rangle_{t=0}=\langle xp+px\rangle_{t=0}=0. \qquad (55)$$

故

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_t=\langle(\Delta x)^2\rangle_{t=0}+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2}\frac{1}{\langle(\Delta x)^2\rangle_{t=0}}. \qquad (56)$$

□