高等量子力学
PHYS5001P
2022-2023 学年第一学期

第十二次作业

截止时间: 2022 年 12 月 12 日 (周一)

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 (课本习题 5.41) 得分: ________. 求基态氢原子具有特定动量 $\boldsymbol{p}'$ 的概率 $|\phi(\boldsymbol{p}')|^2\,\mathrm{d}^3p'$. (这是一个很好的三维傅里叶变换的练习. 为进行角积分, 选择 z 轴沿 $\boldsymbol{p}$ 方向.)

解: 在位置表象中, 氢原子电子基态波函数为

$$\psi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r/a_0}. \tag{1}$$

利用傅里叶变换将其变换至动量表象中得

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{p}')=&\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\mathrm{d}^3x\,e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}\psi(\boldsymbol{x})\\
=&\frac{1}{(2\pi\hbar a_0)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\mathrm{d}^3x\,e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}e^{-r/a_0}\\
=&\frac{1}{(2\pi\hbar a_0)^{3/2}}2\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-r/a_0}r^2\,\mathrm{d}r\int_0^\pi e^{-ipr\cos\theta/\hbar}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
=&\frac{1}{(2\pi\hbar a_0)^{3/2}}2\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-r/a_0}r^2\frac{e^{ipr/\hbar}-e^{-ipr/\hbar}}{ipr/\hbar}\,\mathrm{d}r\\
=&\frac{1}{(2\pi\hbar a_0)^{3/2}}2\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-r/a_0}r^2\,\mathrm{d}r\int_{-1}^1 e^{-ipr\cos\theta/\hbar}\,\mathrm{d}(\cos\theta)\\
=&\frac{1}{(2\pi\hbar a_0)^{3/2}}2\sqrt{\pi}\frac{1}{ip/\hbar}\int_0^\infty[e^{-(1/a_0-ip/\hbar)r}-e^{-(1/a_0+ip/\hbar)r}]r\,\mathrm{d}r\\
&(\text{利用 }\int_0^\infty e^{-x}x\,\mathrm{d}x=1)\\
=&\frac{1}{(2\pi\hbar a_0)^{3/2}}2\sqrt{\pi}\frac{1}{ip/\hbar}\left[\frac{1}{(1/a_0-ip/\hbar)^2}-\frac{1}{(1/a_0+ip/\hbar)^2}\right]\\
=&\frac{1}{(2\pi\hbar a_0)^{3/2}}2\sqrt{\pi}\frac{4\hbar^4a_0^3}{(\hbar^2+a_0^2p^2)^2}.
\end{aligned}\tag{2}$$

故基态氢原子具有特定动量的概率为

$$|\phi(\boldsymbol{p}')|^2\,\mathrm{d}^3p'=\frac{8\hbar^5a_0^3}{\pi^2(\hbar^2+a_0^2p^2)^4}\,\mathrm{d}^3p'. \tag{3}$$

□

第 2 题 (课本习题 5.42) 得分: ________. 求氢原子的 $\tau(2p\to1s)$ 的表达式. 证明它等于 $1.6\times10^{-9}\,\mathrm{s}$.

证: 氢原子自 2p 态衰变至 1s 态的衰变时间为

$$\tau(2p\to1s)=\frac{1}{w_{2p\to1s}}. \tag{4}$$

该过程中电子由 2p 态跃迁至 1s 态的同时放射出 1 个的光子, 该光子的能量等于 2p 态与 1s 态的能量差 ($\hbar\omega=E_{2p}-E_{1s}$), 这一自发辐射过程是 1 个光子将电子从 1s 态激发至 2p 态的受激吸收过程的逆过程, 两者的跃迁速率的表达式是类似的, 由课本式 (5.8.8),

$$w_{2p\to1s}=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{e^2}{m_e^2c^2}|A_0|^2\left|\langle1s|e^{i(\omega/c)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle\right|^2\rho(\hbar\omega=E_{2p}-E_{1s}). \tag{5}$$

下面就来分别求解上式中的各部分: $|A_0|^2$, $\left|\langle1s|e^{i(\omega/c)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle\right|^2$, $\rho(\hbar\omega=E_{2p}-E_{1s})$.

(a) $\underline{|A_0|^2}$: 当采用边界条件, 边长为 L 的正方体箱体内给定偏振方向 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 和频率 ω 的单色光场的矢势可表为

$$\boldsymbol{A}=2A_0\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}\hat{\boldsymbol{k}}=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z)$, $n_x,n_y,n_z\in\mathbb{Z}$. 该箱体内电场和磁场可分别表为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=2A_0k\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t),\tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=2A_0(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\times\boldsymbol{k})\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t).\tag{8}$$

该箱体内光场的能量密度 (注意高斯单位制) 为

$$u=\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}{8\pi}=\frac{k^2A_0^2}{\pi}\sin^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)=\frac{k^2A_0^2}{2\pi}[1-\cos 2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)].\tag{9}$$

当仅有 1 个光子时, 该箱体内光场的总能量为

$$\hbar\omega=\int_0^L\int_0^L\int_0^L u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{k^2A_0^2}{2\pi}L^3.\tag{10}$$

故

$$A_0^2=\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega L^3}.\tag{11}$$

(2) $\underline{\left|\langle 1s|e^{i(\omega/c)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle\right|^2}$: 由于跃迁放出的光子能量 $\hbar\omega=E_{2p}-E_{1s}=13.6\,\mathrm{eV}$, 对应的光子波长为 $\lambda=91.4\,\mathrm{nm}$, 远大于原子的尺度 (Å量级), 故可进行偶极近似, 即 $e^{i(\omega/c)\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}}=1+i\frac{\omega}{c}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}+\cdots\approx 1$, 从而

$$\langle 1s|e^{i(\omega/c)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle=\langle 1s|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle,\tag{12}$$

不妨取 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为 z 轴方向, 则

$$\begin{aligned}\langle 1s|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle=&\langle 1s|p_z|2p\rangle=\frac{m}{i\hbar}\langle 1s|[z,H_0]|2p\rangle=-im\omega\langle 1s|z|2p\rangle\\=&-im\omega\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\langle 1s|rY_1^0|2p\rangle,\end{aligned}\tag{13}$$

由于 $\langle 1s|rY_1^0|2p,m\rangle$ 仅在 $0=0+m$, 即 $m=0$ 时不等于 0, 故

$$\langle 1s|\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle=-im\omega\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1s|z|2p,m=0\rangle,\tag{14}$$

其中

$$\langle 1s|z|2p,m=0\rangle=\int\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}2e^{-r/a_0}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\times z\times\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-r/2a_0}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,\mathrm{d}^3x\tag{15}$$

$$\begin{aligned}=&\frac{1}{2^{5/2}\pi a_0^4}2\pi\int_0^\infty e^{-3r/2a_0}r^4\,\mathrm{d}r\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{2^{5/2}\pi a_0^4}2\pi\int_0^\infty e^{-3r/2a_0}r^4\,\mathrm{d}r\int_{-1}^1\cos^2\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta)\\=&\frac{1}{2^{5/2}\pi a_0^4}2\pi\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-3r/2a_0}r^4\,\mathrm{d}r\\&(\text{利用}\int_0^\infty e^{-x}x^4\,\mathrm{d}x=4!)\\=&\frac{1}{2^{5/2}\pi a_0^4}2\pi\frac{2}{3}\left(\frac{2a_0}{3}\right)^5 4!\\=&\frac{2^{15/2}a_0}{3^5}.\end{aligned}\tag{16}$$

故

$$\left|\langle 1s|e^{i(\omega/c)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x})}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{p}|2p\rangle\right|^2=\frac{m^2\omega^2}{3}\frac{2^{15}a_0^2}{3^{10}}.\tag{17}$$

(3) $\underline{\rho(\hbar\omega=E_{2p}-E_{1s})}$: 光子的态密度满足

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{E})\,\mathrm{d}\mathcal{E}=&2\frac{4\pi k^2\,\mathrm{d}k}{(2\pi/L)^3}\qquad\text{(前方系数 2 来源于每个给定波矢的光子均有 2 个正交的偏振方向)}\\&\text{(光子的能量 }\mathcal{E}=\hbar\omega=\hbar kc\text{)}\\=&\frac{L^3\omega^2\,\mathrm{d}\mathcal{E}}{\pi^2\hbar c^3},\end{aligned}\tag{18}$$

$$\Longrightarrow\rho(\hbar\omega)=\frac{L^3\omega^2}{\pi^2\hbar c^3}.\tag{19}$$

综合起来, 最后得到

$$w_{2p\to 1s}=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{e^2}{m_e^2c^2}\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega L^3}\frac{m^2\omega^2}{3}\frac{2^{15}a_0^2}{3^{10}}\frac{L^3\omega^2}{\pi^2\hbar c^3}=\frac{2^{17}e^2a_0^2\omega^3}{3^{11}\hbar c^3},\tag{20}$$

代入 $\hbar\omega=E_{2p}-E_{1s}=\frac{e^2}{2a_0}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}\times 13.6\,\mathrm{eV}$, 有

$$w_{2p\to 1s}=\frac{2^{17}e^2a_0^2}{3^{11}\hbar c^3}\left[\frac{1}{\hbar}\frac{e^2}{2a_0}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\right]^3=\frac{2^8e^8}{3^8\hbar^4c^3a_0}=619\,\mathrm{MHz},\tag{21}$$

从而衰变时间为

$$\tau=\frac{1}{w_{2p\to 1s}}=1.62\times 10^{-9}\,\mathrm{s}.\tag{22}$$

□

第 3 题 (课本习题 7.2) 得分: _________. (a) N 个自旋为 1/2 的全同粒子受到一个一维简谐振子势的作用. 忽略粒子之间所有的相互作用, 基态的能量是什么? 费米能量是什么?

(b) 如果忽略了粒子间的相互作用并假定 N 非常大, 基态能量和费米能量又是什么?

解: (a) 自旋为 1/2 的粒子为费米子, 它们遵循泡利不相容原理, 即任意两个该种粒子不可占据相同的态. 忽略粒子之间的相互作用, 该系统基态的情形是, 这 N 个粒子从一维简谐振子的基态能级开始向高能级依次填充, 且每个能级可以填充两个自旋相反的粒子. 假设一维简谐振子势为 $\frac{m\omega^2x^2}{2}$, 则由这 N 个粒子组成的系统的基态的能量为

$$E_0=\begin{cases}\sum_{n=0}^{(N-3)/2}2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega\left(\frac{N-1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\frac{N^2+1}{4}, & N\text{ 为奇数},\\ \sum_{n=0}^{N/2-1}2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\frac{N^2}{4}, & N\text{ 为偶数}.\end{cases}\tag{23}$$

费米能量即基态填充的最高能级的能量, 该系统的费米能量为

$$E_f=\begin{cases}\hbar\omega\frac{N}{2}, & N\text{ 为奇数},\\ \hbar\omega\frac{N-1}{2}, & N\text{ 为偶数}.\end{cases}\tag{24}$$

(b) 当 N 非常大时, 基态能量可近似为

$$E_0=\hbar\omega\frac{N^2}{4}.\tag{25}$$

费米能量可近似为

$$E_f=\hbar\omega\frac{N}{2}.\tag{26}$$

□

第 4 题 (课本习题 7.3) 得分: ________. 两个无轨道角动量的 (即两个粒子都在 s 态) 自旋为 1 的非全同粒子显然能够形成 $j=0$, $j=1$ 和 $j=2$ 的态. 然而, 假定这两个粒子是全同的, 得到什么限制?

证: 通过查阅 Clebsch-Gordan 系数表知, $j_1=j_2=1$ 的非全同粒子可形成的态有:

$$|j=2,m=2\rangle=|1,1\rangle, \tag{27}$$

$$|j=2,m=1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|0,1\rangle, \tag{28}$$

$$|j=2,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}|1,-1\rangle+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}|-1,1\rangle, \tag{29}$$

$$|j=2,m=-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|-1,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|0,-1\rangle, \tag{30}$$

$$|j=2,m=-2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|-1,-1\rangle, \tag{31}$$

$$|j=1,m=1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|0,1\rangle, \tag{32}$$

$$|j=1,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|-1,1\rangle, \tag{33}$$

$$|j=1,m=-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|-1,0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|0,-1\rangle, \tag{34}$$

$$|j=0,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}|1,-1\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}|-1,1\rangle. \tag{35}$$

下面考虑全同粒子的限制. 自旋为 1 的粒子为玻色子. 由于这两个粒子都处于 s 态, 故其空间波函数是交换对称的, 而又因为玻色子是交换对称的, 故其自旋态也必须是交换对称的, 即仅允许上面 $j=2$ 和 $j=0$ 的态. □

第 5 题 (课本习题 7.4) 得分: ________. 讨论如果氦原子的电子是无自旋的玻色子, 氦原子的能级会发生什么变化, 尽你所能做定量的讨论.

解: 玻色子是交换对称的, 故此时氦原子中两个玻色子的波函数的空间部分和自旋部分必须同时为交换对称或交换反对称. 又由于此时电子是无自旋的, 故波函数的自旋部分必为交换对称 ($|j=0,m=0\rangle=|m_1=0,m_2=0\rangle$), 从而波函数的空间部分和自旋部分均为交换对称.

对于基态 $(1s)^2$, 氦原子能级相比于费米子电子的情形无变化.

对于激发态 $(1s)(nl)$, 波函数的空间部分只能为 $\phi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{100}(\boldsymbol{x}_2)\psi_{nlm}(\boldsymbol{x}_2)+\psi_{100}(\boldsymbol{x}_2)\psi_{nlm}(\boldsymbol{x}_1)]$, 其能量与费米子电子的情形下的单态能级相同. 不再有费米子电子情形下的三重态能级, 自然也不再有费米子电子情形下的能级劈裂.

除此以外, 由于电子自旋磁矩变为零, 故某些激发态能级的超精细结构可能也会发生改变. □