第二次作业

截止时间: 2022 年 9 月 26 日 (周一)

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 (课本习题 1.29) 得分: ________. (a) Gottfried (1966) 在他的书的 247 页上说: 对所有能表示成其宗量的幂级数的函数 F 和 G, 从基本对易关系都可以 "容易地推导" 出

$$[x_i, G(\boldsymbol{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad [p_i, F(\boldsymbol{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

证明这个说法.

(b) 求 $[x^2, p^2]$ 的值, 把你的结果与经典的泊松括号 $[x^2, p^2]_{经典}$ 相比较.

解: (a) 通过泰勒展开将函数 F 和 G 分别表为其宗量的幂级数和

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}n+m+l\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m+l\\m\end{pmatrix}\frac{1}{(n+m+l)!}\frac{\partial^{n+m+l}F}{\partial x_i^n\partial x_j^m\partial x_k^l}x_i^l x_j^m x_k^n \equiv \sum_{nml} f_{nml}x_i^n x_j^m x_k^l, \tag{1}$$

$$G(\boldsymbol{p}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}n+m+l\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m+l\\m\end{pmatrix}\frac{1}{(n+m+l)!}\frac{\partial^{n+m+l}G}{\partial p_i^n\partial p_j^m\partial p_k^l}p_i^n p_j^m p_k^l \equiv \sum_{nml} g_{nml}p_i^n p_j^m p_k^l \tag{2}$$

利用基本对易关系

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{3}$$

有

$$\begin{aligned}[x_i, p_i^n] =& p_i[x_i, p_i^{n-1}] + [x_i, p_i]p_i^{n-1} = p_i[x_i, p_i^{n-1}] + i\hbar p_i^{n-1}\\ =& p_i^2[x_i, p_i^{n-2}] + p_i[x_i, p_i]p_i^{n-2} + i\hbar p_i^{n-1} = p_i^2[x_i, p_i^{n-2}] + 2i\hbar p_i^{n-1}\\ &\cdots\\ =& ni\hbar p_i^{n-1},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}[p_i, x_i^n] =& x_i[p_i, x_i^{n-1}] + [p_i, x_i]x_i^{n-1} = x_i[p_i, x_i^{n-1}] - i\hbar x_i^{n-1}\\ =& x_i^2[p_i, x_i^{n-2}] + x_i[p_i, x_i]x_i^{n-2} - i\hbar x_i^{n-1} = x_i^2[p_i, x_i^{n-2}] - 2i\hbar x_i^{n-1}\\ &\cdots\\ =& -ni\hbar x_i^{n-1},\end{aligned} \tag{5}$$

从而

$$[x_i, G(\boldsymbol{p})] = [x_i, \sum_{nml} g_{nml}p_i^n p_j^m p_k^l] = \sum_{nml} g_{nml}[x_i, p_i^n]p_j^m p_k^l = i\hbar\sum_{nml} g_{nml}np_i^{n-1}p_j^m p_k^l = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p}, \tag{6}$$

$$[p_i, F(\boldsymbol{x})] = [p_i, \sum_{nml} f_{nml}x_i^n x_j^m x_k^l] = \sum_{nml} g_{nml}[p_i, x_i^n]x_j^m x_k^l = -i\hbar\sum_{nml} f_{nml}nx_i^{n-1}x_j^m x_k^l = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{7}$$

(b)

$$[x^2, p^2] = x[x, p^2] + [x, p^2]x = x\{p[x, p] + [x, p], p\} + \{p[x, p] + [x, p]p\}x = 2i\hbar(xp + px) \tag{8}$$

经典的泊松括号:

$$[x^2, p^2]_{经典} = \frac{\partial x^2}{\partial x}\frac{\partial p^2}{\partial p} - \frac{\partial x^2}{\partial p}\frac{\partial p^2}{\partial x} = 4xp. \tag{9}$$

只需将经典的泊松括号厄米化, 即可得到与量子力学中一致的形式:

$$[x^2, p^2]_{经典} = 4xp \xrightarrow{厄米化} 2xp + 2px = \frac{1}{i\hbar}[x^2, p^2]. \tag{10}$$

□

第 2 题 (课本习题 1.31) 得分: ________. 在正文中我们讨论了 $\mathscr{T}(\mathrm{d}x')$ 在位置和动量本征右矢上以及在一个更一般的态右矢 $|\alpha\rangle$ 的效应. 我们还可以研究期待值 $\langle\boldsymbol{x}\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{p}\rangle$ 在无穷小平移下的行为. 利用 (1.6.25) 式和 (1.6.45) 式并令 $|\alpha\rangle\to\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')|\alpha\rangle$, 证明在无穷小平移下 $\langle\boldsymbol{x}\rangle\to\langle\boldsymbol{x}\rangle+\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$, $\langle\boldsymbol{p}\rangle\to\langle\boldsymbol{p}\rangle$.

证: 平移前,

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{x}\rangle=&\langle\alpha|\boldsymbol{x}|\alpha\rangle, &(11)\\ \langle\boldsymbol{p}\rangle=&\langle\alpha|\boldsymbol{p}|\alpha\rangle. &(12)\end{aligned}$$

平移后, 利用 (1.6.25) 式 $[\boldsymbol{x},\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')]=\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$, 有

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')|\alpha\rangle=&\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')[\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}']|\alpha\rangle\\ =&\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}|\alpha\rangle+\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'|\alpha\rangle\\ =&\langle\alpha|\boldsymbol{x}|\alpha\rangle+\langle\alpha|(1+i\boldsymbol{K}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'|\alpha\rangle\\ &\text{(略去高阶小量)}\\ =&\langle\boldsymbol{x}\rangle+\langle\alpha|\mathrm{d}\boldsymbol{x}'|\alpha\rangle\\ =&\langle\boldsymbol{x}\rangle+\mathrm{d}\boldsymbol{x}', &(13)\end{aligned}$$

由于平移算符 $\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')$ 可表为动量算符 $\boldsymbol{p}$ 的幂级数之和, 利用 (1.6.45) 式 $[p_i,p_j]=0$, 有 $[\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}'),\boldsymbol{p}]=0$, 从而

$$\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{p}\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')|\rangle=\langle\alpha|\mathscr{T}^\dagger(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\mathscr{T}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}')\boldsymbol{p}|\alpha\rangle=\langle\alpha|\boldsymbol{p}|\alpha\rangle=\langle\boldsymbol{p}\rangle. \tag{14}$$

□

第 3 题 得分: ________. (a) 证明下列各式:

i. $\langle p'|x|\alpha\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle$.

ii. $\langle\beta|x|\alpha\rangle=\int\mathrm{d}p'\phi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')$, 其中 $\phi_\alpha(p')=\langle p'|\alpha\rangle$ 和 $\phi_\beta(p')=\langle p'|\beta\rangle$ 都是动量空间波函数.

(b)

$$\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$$

的物理意义是什么, 其中 x 是位置算符, 而 Ξ 是某个量纲为动量的数? 证明你的答案的正确性.

证: (a) i.

$$\langle p'|x|\alpha\rangle=\int\mathrm{d}p''\,\langle p'|x|p''\rangle\langle p''|\alpha\rangle, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}\langle p'|x|p''\rangle=&\int\mathrm{d}x'\,\langle p'|x|x'\rangle\langle x'|p'\rangle\\ =&\int\mathrm{d}x'\,x'\langle p'|x'\rangle\langle x'|p'\rangle\\ =&\frac{1}{2\pi\hbar}\int\mathrm{d}x'\,x'\exp\left[-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}\right]\\ =&\frac{1}{2\pi\hbar}\int\mathrm{d}x'\,i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\exp\left[-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}\right]\\ =&i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\frac{1}{2\pi\hbar}\int\mathrm{d}x'\,\exp\left[-i\frac{(p'-p'')x'}{\hbar}\right]\end{aligned}$$

$$=i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p''), \tag{16}$$

故

$$\langle p'|x|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p''\, i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')\langle p''|\alpha\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle. \tag{17}$$

ii.

$$\langle\beta|x|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p'\,\langle\beta|p'\rangle\langle p'|x|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p'\,\langle\beta|p'\rangle i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle=\int \mathrm{d}p'\,\phi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p'). \tag{18}$$

(b) $\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$ 为动量平移算符. 证明如下:

将 $\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$ 作用于动量算符 p 的本征态 $|p'\rangle$ 后, 其动量变为 $p'+\Xi$:

$$\begin{aligned}
p\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)|p'\rangle=&p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^n|p'\rangle\\
&\text{(利用第 1 题中推得的对易关系: } [p,x^n]=-ni\hbar x^{n-1})\\
=&\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^n p+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^{n-1}\Xi\right]|p'\rangle\\
=&(p'+\Xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)^n|p'\rangle\\
=&(p'+\Xi)\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)|p'\rangle,
\end{aligned} \tag{19}$$

故 $\exp\left(\frac{ix\Xi}{\hbar}\right)$ 为动量平移算符, 其带来的动量变化为 Ξ.

□