作业一

截止时间: 2022 年 9 月 12 日 (周一)

姓名 : 陈 稼 霖
学号 : SA21038052
成绩 : __________

第 1 题 (课本习题 1.6) 得分: _________. (a) 考虑两个右矢 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$. 假定 $\langle a'|\alpha\rangle, \langle a''|\alpha\rangle, \cdots$ 和 $\langle a|\beta\rangle, \langle a''|\beta\rangle, \cdots$, 均为已知, 其中 $|a'\rangle, |a''\rangle, \cdots$ 组成基右矢的完备基. 求在该基下算符 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 的矩阵表示.

(b) 现在考虑一个自旋 $\frac{1}{2}$ 系统, 设 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别为 $|s_z=\hbar/2\rangle$ 和 $|s_x=\hbar/2\rangle$ 态. 写出在通常 (s_z 对角) 的基下, 与 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 对应的方阵的显示式.

解: (a) 将这两个右矢 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别用这组完备基展开:

$$|\alpha\rangle=\sum_{m=a',a'',\cdots}|m\rangle\langle m|\alpha\rangle, \tag{1}$$

$$|\beta\rangle=\sum_{n=a',a'',\cdots}|n\rangle\langle n|\beta\rangle. \tag{2}$$

将上面这两个展开式代入算符 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 中可得其矩阵表示:

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle\langle\beta|=&\sum_{m=a',a'',\cdots}|m\rangle\langle m|\alpha\rangle\sum_{n=a',a'',\cdots}\langle n|\langle\beta|n\rangle=\sum_{m=a',a'',\cdots}\sum_{n=a',a'',\cdots}\langle m|\alpha\rangle\langle\beta|n\rangle|m\rangle\langle n|\\=&\begin{bmatrix}\langle a'|\alpha\rangle\langle\beta|a'\rangle & \langle a'|\alpha\rangle\langle\beta|a''\rangle & \cdots\\ \langle a''|\alpha\rangle\langle\beta|a'\rangle & \langle a''|\alpha\rangle\langle\beta|a''\rangle & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle a'|\alpha\rangle\langle a'|\beta\rangle^* & \langle a'|\alpha\rangle\langle a''|\beta\rangle^* & \cdots\\ \langle a''|\alpha\rangle\langle a'|\beta\rangle^* & \langle a''|\alpha\rangle\langle a''|\beta\rangle^* & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3}$$

(b) 将这两个右矢 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别用 s_z 对角基展开:

$$|\alpha\rangle=|s_z=\hbar/2\rangle, \tag{4}$$

$$|\beta\rangle=|s_x=\hbar/2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|s_z=\hbar/2\rangle+|s_z=-\hbar/2\rangle). \tag{5}$$

将上面这两个展开式代入算符 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 中可得其矩阵表示:

$$|\alpha\rangle\langle\beta|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{6}$$

□

第 2 题 (课本习题 1.7) 得分: _________. 假定 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 都是某厄米算符 A 的本征右矢. 在什么条件下, $|i\rangle+|j\rangle$ 也是 A 的一个本征右矢. 证明答案的正确性.

解: 当 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 简并, 即 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 对应的本征值相同时, $|i\rangle+|j\rangle$ 也是 A 的一个本征右矢.

证明: 假设 $|i\rangle, |j\rangle$ 和 $(|i\rangle+|j\rangle)$ 对应的本征值分别为 a_i, a_j 和 a, 即

$$A|i\rangle=a_i|i\rangle, \tag{7}$$

$$A|j\rangle=a_j|j\rangle, \tag{8}$$

$$A(|i\rangle+|j\rangle)=a(|i\rangle+|j\rangle), \tag{9}$$

则

$$A(|i\rangle+|j\rangle)=a_i|i\rangle+a_j|j\rangle=a(|i\rangle+|j\rangle), \tag{10}$$

$$\Longrightarrow (a_i-a)|i\rangle+(a_j-a)|j\rangle=0. \tag{11}$$

由于 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 均为 A 的本征右矢, 故 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 线性无关, 从而

$$a_i-a=a_j-a=0, \tag{12}$$

$$\Longrightarrow a_i=a_j=0, \tag{13}$$

即 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 简并.

□

第 3 题 (课本习题 1.8) 得分: ________. 考虑被厄米算符 A 的本征右矢 $\{|a'\rangle\}$ 所张的一个右矢空间. 不存在任何简并.

(a) 证明

$$\prod_{a'}(A-a')$$

是零算符.

(b) 解释

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$$

的意义.

(c) 令 A 等于自旋 $\frac{1}{2}$ 系统的 S_z, 用它解释 (a) 与 (b).

解: (a) 该右矢空间中任一矢量 $|\alpha\rangle$ 都可用这组本征右矢 $\{|a'\rangle\}$ 展开:

$$|\alpha\rangle=\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle. \tag{14}$$

将算符 $\prod_{a'}(A-a')$ 作用于该矢量上有

$$\begin{aligned}\prod_{a'}(A-a')|\alpha\rangle=&\prod_{a'}(A-a')\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=\sum_{a''}\prod_{a'}(A-a')|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=\sum_{a''}\left[\prod_{a'}(a''-a')\right]|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle\\=&\sum_{a''}0|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=0.\end{aligned} \tag{15}$$

考虑到 $|\alpha\rangle$ 的任意性, $\prod_{a'}(A-a')$ 为零算符.

(b) 算符 $\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$ 作用于 $|a'\rangle$, 则仍为 $|a'\rangle$, 算符作用于 $\{|a'\rangle\}$ 中非 $|a'\rangle$ 的任一右矢, 则得零,

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}|a'\rangle=\prod_{a''\neq a'}\frac{(a'-a'')}{(a'-a'')}|a'\rangle=|a'\rangle, \tag{16}$$

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}|a_n\rangle=\prod_{a''\neq a'}\frac{(a_n-a'')}{(a'-a'')}=0, \text{for } |a_n\rangle\in\{|a'\rangle\}, \tag{17}$$

换言之, 算符 $\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$ 为 $|a'\rangle$ 对应的投影算符.

(c) 若 $A=S_z$, 则其本征右矢的集合为 $\{|S_z=\frac{\hbar}{2}\rangle,|S_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\}$. 算符

$$\begin{aligned}\prod_{a'}(A-a')=&\left(A-\frac{\hbar}{2}\right)\left(A+\frac{\hbar}{2}\right)=\left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}-\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\\=&\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{18}$$

为零算符. 算符

$$\prod_{a''\neq\frac{\hbar}{2}}\frac{(A-a'')}{(\frac{\hbar}{2}-a'')}=\frac{1}{\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2}}\left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=|S_z=\frac{\hbar}{2}\rangle\langle S_z=\frac{\hbar}{2}| \tag{19}$$

为 $|S_z=\frac{\hbar}{2}\rangle$ 对应的投影算符,

$$\prod_{a''\neq-\frac{\hbar}{2}}\frac{(A-a'')}{(-\frac{\hbar}{2}-a'')}=\frac{1}{-\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2}}\left(-\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=|S_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle S_z=-\frac{\hbar}{2}| \tag{20}$$

为 $|S_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle$ 对应的投影算符.

□

第 4 题 (课本习题 1.4) 得分: ________. 利用左矢-右矢代数规则证明或计算下列各式:

(a) $\mathrm{Tr}(XY)=\mathrm{Tr}(YX)$, 其中 X 和 Y 都是算符.

(b) $(XY)^\dagger=Y^\dagger X^\dagger$, 其中 X 和 Y 都是算符.

(c) 在左矢-右矢形式下 $\exp[if(A)]=?$ 其中 A 是厄米算符, 其本征值是已知的.

(d) $\sum_{a'}\psi_{a'}^*(\boldsymbol{x}')\psi_{a'}(\boldsymbol{x}'')$, 其中 $\psi_{a'}(\boldsymbol{x}')=\langle\boldsymbol{x}'|a'\rangle$.

解: (a)

$$\mathrm{Tr}(XY)=\sum_{a'}\langle a'|XY|a'\rangle=\sum_{a',a''}\langle a'|X|a''\rangle\langle a''|Y|a'\rangle=\sum_{a',a''}\langle a''|Y|a'\rangle\langle a'|X|a''\rangle=\sum_{a''}\langle a''|YX|a''\rangle=\mathrm{Tr}(YX). \tag{21}$$

(b) 一方面,

$$[XY|\alpha\rangle]^\dagger=[(XY)|\alpha\rangle]^\dagger=\langle\alpha|(XY)^\dagger, \tag{22}$$

另一方面,

$$[XY|\alpha\rangle]^\dagger=[X(Y|\alpha\rangle)]^\dagger=(Y|\alpha\rangle)^\dagger X^\dagger=\langle\alpha|Y^\dagger X^\dagger, \tag{23}$$

考虑到 $\langle\alpha|$ 的任意性, 有

$$(XY)^\dagger=Y^\dagger X^\dagger. \tag{24}$$

(c) 假设 A 的本征值和对应的本征矢为 $\{a'\}$ 和 $\{|a'\rangle\}$. $f(A)$ 是关于算符 A 的函数, 将其关于 A 做泰勒展开并作用于本征态 $|a'\rangle$, 有

$$f(A)|a'\rangle=\sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(0)A^n}{n!}|a'\rangle=\sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(0)a'^n}{n!}|a'\rangle=f(a')|a'\rangle, \tag{25}$$

故

$$\begin{aligned}\exp[if(A)]&=\sum_{a'}\exp[if(A)]|a'\rangle\langle a'|=\sum_{a'}\sum_n\frac{i^n[f(A)]^n}{n!}|a'\rangle\langle a'|=\sum_{a'}\sum_n\frac{i^n[f(a')]^n}{n!}|a'\rangle\langle a'|\\&=\sum_{a'}\exp[if(a')]|a'\rangle\langle a'|.\end{aligned} \tag{26}$$

(d)

$$\sum_{a'}\psi_{a'}^*(\boldsymbol{x}')\psi_{a'}(\boldsymbol{x}'')=\sum_{a'}\langle a'|\boldsymbol{x}'\rangle\langle\boldsymbol{x}''|a'\rangle=\sum_{a'}\langle\boldsymbol{x}''|a'\rangle\langle a'|\boldsymbol{x}'\rangle=\langle\boldsymbol{x}''|\boldsymbol{x}'\rangle=\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''). \tag{27}$$

□

第 5 题 (课本习题 1.10) 得分: ________. 一个双胎系统其哈密顿算符由下式给出

$$H = a(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|),$$

其中 a 是一个数, 其量纲为能量. 求能量的本征值和相应的能量本征右矢 (作为 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的线性组合).

解: 在以 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 为基的表象下, 该哈密顿量的矩阵表示为

$$H = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

其特征方程为

$$\det(H - EI) = \begin{vmatrix} a-E & a \\ a & -a-E \end{vmatrix} = E^2 - 2a^2 = 0, \tag{29}$$

解得能量的本征值为

$$E_1 = \sqrt{2}a, \quad E_2 = -\sqrt{2}a. \tag{30}$$

将这两个能量的本征值分别代入

$$H|\psi\rangle = E_{1/2}|\psi\rangle, \tag{31}$$

解得相应的能量本征右矢分别为

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}+1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

□

第 6 题 (课本习题 1.13) 得分: ________. 一束自旋 $\frac{1}{2}$ 的原子通过如下一系列斯特恩-盖拉赫类的测量

(a) 第一次测量存留 $s_z = \hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_z = -\hbar/2$ 的原子.

(b) 第二次测量存留 $s_n = \hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_n = -\hbar/2$ 的原子, 其中 s_n 是算符 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ 的本征值, 而 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 在 xz 平面上与 z 轴夹角为 β.

(c) 第三次测量存留 $s_z = -\hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_z = \hbar/2$ 的原子. 当第一次测量存活下的 $s_z = \hbar/2$ 束流归一到 1 时, 找到 $s_z = -\hbar/2$ 束流的强度是什么? 如果我们想使最后找到 $s_z = -\hbar/2$ 束流的强度取最大值, 我们必须怎样设置第二次测量仪器取向?

解: 第一次测量存留 $s_z = \hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_z = -\hbar/2$ 的原子后, 原子的状态为 $|s_z;+\rangle$, 此时找到 $s_z = -\hbar/2$ 束流的强度为 0.

第二次测量存留 $s_n = \hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_n = -\hbar/2$ 的原子后, 得到原子的状态为

$$|s_n;+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|s_z;+\rangle + \sin\frac{\beta}{2}|s_z;-\rangle, \tag{33}$$

束流的强度为

$$I_2 = |\langle s_n;+|s_z;+\rangle|^2 = \cos^2\frac{\beta}{2}. \tag{34}$$

第三次测量存留 $s_z = -\hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_z = \hbar/2$ 的原子, 得到的束流的强度为

$$I_3 = I_2\,|\langle s_z;-|s_n;+\rangle|^2 = \cos^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2}\left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right). \tag{35}$$

若想使最后找到 $s_z = -\hbar/2$ 束流的强度取最大值, 我们必须设置第二次测量仪器取向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 在 xz 平面上与 z 轴夹角 $\beta = \frac{\pi}{2}$, 此时束流强度为 $\frac{1}{4}$. □

第 7 题 (课本习题 1.23) 得分: ________. 考虑一个三维右矢空间, 如果某一组正交的右矢集合, 比如 $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, 用作基右矢, 算符 A 和 B 由

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

表示, 其中 a 和 b 都是实数.

(a) 显然, A 展示了一个简并的谱, B 也展示了简并的谱吗?

(b) 证明 A 和 B 对易.

(c) 找到一组新的正交归一右矢集合, 它们是 A 和 B 的共同本征右矢, 具体确定在这三个本征右矢的每一个本征右矢上 A 和 B 的本征值. 你确定的本征值能完全地表征每个本征右矢吗?

解: (a) B 的特征方程为

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -ib \\ 0 & ib & -\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)[\lambda^2 - b^2] = 0, \tag{36}$$

解得本征值为

$$\lambda_1 = b, \quad \lambda_2 = b, \quad \lambda_3 = -b, \tag{37}$$

故 B 也展示了简并的谱.

(b)

$$\begin{aligned}[A, B] =& AB - BA = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iab \\ 0 & iab & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iab \\ 0 & iab & 0 \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

故 A 和 B 对易.

(c) A 的本征值为 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -a$,$\lambda_3 = -a$,其中第一个本征值对应的归一化本征右矢为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 后两个简并本征值对应的正交归一右矢为 $\begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta_1 \\ e^{i\varphi_1}\sin\theta_1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_1 \\ e^{-i\varphi_1}\cos\theta_1 \end{bmatrix}$, 其中 θ_1, φ_1 待定.

B 的本征值为 $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = b$, $\lambda_3 = -b$, 其中最后一个本征值对应的归一化本征右矢为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$, 前两个本征值对应的归一化本征右矢为 $\begin{bmatrix} \cos\theta_2 \\ e^{i\varphi_2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_2 \\ e^{i\varphi_2}\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta_2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -\sin\theta_2 \\ e^{-i\varphi_2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta_2 \\ e^{-i\varphi_2}\frac{i}{\sqrt{2}}\cos\theta_2 \end{bmatrix}$, 其中 θ_2, φ_2 待定.

要找到 A 和 B 共有的一组新的正交归一右矢集合, 则取 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, 从而有

A 的本征值	B 的本征值	正交归一本征右矢
a	b	$\|1\rangle$
$-a$	$-b$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|2\rangle-i\|3\rangle)$
$-a$	b	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\|2\rangle+i\|3\rangle)$

由上表知, 结合 A 和 B 的本征值可以完全地表征每个本征右矢.

□