作业一

截止时间: 2022 年 9 月 12 日 (周一)

姓名 : 陈 稼 霖
学号 : SA21038052
成绩 : __________

第 1 题 得分: ________. (a) 考虑两个右矢 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$. 假定 $\langle a'|\alpha\rangle, \langle a''|\alpha\rangle, \cdots$ 和 $\langle a|\beta\rangle, \langle a''|\beta\rangle, \cdots$, 均为已知, 其中 $|a'\rangle, |a''\rangle, \cdots$ 组成基右矢的完备基. 求在该基下算符 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 的矩阵表示.

(b) 现在考虑一个自旋 $\frac{1}{2}$ 系统, 设 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别为 $|s_z = \hbar/2\rangle$ 和 $|s_x = \hbar/2\rangle$ 态. 写出在通常 (s_z 对角) 的基下, 与 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 对应的方阵的显示式.

解: (a) 将这两个右矢 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别用这组完备基展开:

$$|\alpha\rangle = \sum_{m=a',a'',\cdots} |m\rangle\langle m|\alpha\rangle, \tag{1}$$

$$|\beta\rangle = \sum_{n=a',a'',\cdots} |n\rangle\langle n|\beta\rangle. \tag{2}$$

将上面这两个展开式代入算符 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 中可得其矩阵表示:

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle\langle\beta| &= \sum_{m=a',a'',\cdots} |m\rangle\langle m|\alpha\rangle \sum_{n=a',a'',\cdots} \langle n|\langle\beta|n\rangle = \sum_{m=a',a'',\cdots}\sum_{n=a',a'',\cdots} \langle m|\alpha\rangle\langle\beta|n\rangle|m\rangle\langle n| \\ &= \begin{bmatrix} \langle a'|\alpha\rangle\langle\beta|a'\rangle & \langle a'|\alpha\rangle\langle\beta|a''\rangle & \cdots \\ \langle a''|\alpha\rangle\langle\beta|a'\rangle & \langle a''|\alpha\rangle\langle\beta|a''\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a'|\alpha\rangle\langle a'|\beta\rangle^* & \langle a'|\alpha\rangle\langle a''|\beta\rangle^* & \cdots \\ \langle a''|\alpha\rangle\langle a'|\beta\rangle^* & \langle a''|\alpha\rangle\langle a''|\beta\rangle^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3}$$

(b) 将这两个右矢 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别用 s_z 对角基展开:

$$|\alpha\rangle = |s_z = \hbar/2\rangle, \tag{4}$$

$$|\beta\rangle = |s_x = \hbar/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_z = \hbar/2\rangle + |s_z = -\hbar/2\rangle). \tag{5}$$

将上面这两个展开式代入算符 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 中可得其矩阵表示:

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

□

第 2 题 得分: ________. 假定 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 都是某厄米算符 A 的本征右矢. 在什么条件下, $|i\rangle + |j\rangle$ 也是 A 的一个本征右矢. 证明答案的正确性.

解: 当 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 简并, 即 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 对应的本征值相同时, $|i\rangle + |j\rangle$ 也是 A 的一个本征右矢.

证明: 假设 $|i\rangle, |j\rangle$ 和 $(|i\rangle + |j\rangle)$ 对应的本征值分别为 a_i, a_j 和 a, 即

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle, \tag{7}$$

$$A|j\rangle = a_j|j\rangle, \tag{8}$$

$$A(|i\rangle + |j\rangle) = a(|i\rangle + |j\rangle), \tag{9}$$

则

$$A(|i\rangle + |j\rangle) = a_i|i\rangle + a_j|j\rangle = a(|i\rangle + |j\rangle), \tag{10}$$

$$\Longrightarrow (a_i - a)|i\rangle + (a_j - a)|j\rangle = 0. \tag{11}$$

由于 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 均为 A 的本征右矢, 故 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 线性无关, 从而

$$a_i - a = a_j - a = 0, \tag{12}$$

$$\Longrightarrow a_i = a_j = 0, \tag{13}$$

即 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 简并.

□

第 3 题 得分: ________. 考虑被厄米算符 A 的本征右矢 $\{|a'\rangle\}$ 所张的一个右矢空间. 不存在任何简并.

(a) 证明

$$\prod_{a'}(A-a')$$

是零算符.

(b) 解释

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$$

的意义.

(c) 令 A 等于自旋 $\frac{1}{2}$ 系统的 S_z, 用它解释 (a) 与 (b).

解: (a) 该右矢空间中任一矢量 $|\alpha\rangle$ 都可用这组本征右矢 $\{|a'\rangle\}$ 展开:

$$|\alpha\rangle=\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle. \tag{14}$$

将算符 $\prod_{a'}(A-a')$ 作用于该矢量上有

$$\begin{aligned}\prod_{a'}(A-a')|\alpha\rangle=&\prod_{a'}(A-a')\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=\sum_{a''}\prod_{a'}(A-a')|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=\sum_{a''}\left[\prod_{a'}(a''-a')\right]|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle\\=&\sum_{a''}0|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=0.\end{aligned}\tag{15}$$

考虑到 $|\alpha\rangle$ 的任意性, $\prod_{a'}(A-a')$ 为零算符.

(b) 算符 $\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$ 作用于 $|a'\rangle$, 则仍为 $|a'\rangle$, 算符作用于 $\{|a'\rangle\}$ 中非 $|a'\rangle$ 的任一右矢, 则得零,

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}|a'\rangle=\prod_{a''\neq a'}\frac{(a'-a'')}{(a'-a'')}|a'\rangle=|a'\rangle, \tag{16}$$

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}|a_n\rangle=\prod_{a''\neq a'}\frac{(a_n-a'')}{(a'-a'')}=0, \text{for } |a_n\rangle\in\{|a'\rangle\}, \tag{17}$$

换言之, 算符 $\prod_{a''\neq a'}\frac{(A-a'')}{(a'-a'')}$ 为 $|a'\rangle$ 对应的投影算符.

(c) 若 $A=S_z$, 则其本征右矢的集合为 $\{|S_z=\frac{\hbar}{2}\rangle,|S_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\}$. 算符

$$\begin{aligned}\prod_{a'}(A-a')=&\left(A-\frac{\hbar}{2}\right)\left(A+\frac{\hbar}{2}\right)=\left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}-\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\\=&\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{18}$$

为零算符. 算符

$$\prod_{a''\neq\frac{\hbar}{2}}\frac{(A-a'')}{(\frac{\hbar}{2}-a'')}=\frac{1}{\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2}}\left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=|S_z=\frac{\hbar}{2}\rangle\langle S_z=\frac{\hbar}{2}| \tag{19}$$

为 $|S_z=\frac{\hbar}{2}\rangle$ 对应的投影算符,

$$\prod_{a''\neq-\frac{\hbar}{2}}\frac{(A-a'')}{(-\frac{\hbar}{2}-a'')}=\frac{1}{-\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2}}\left(-\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=|S_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle S_z=-\frac{\hbar}{2}| \tag{20}$$

为 $|S_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle$ 对应的投影算符.

□