第七次作业

截止时间: 2022 年 11 月 7 日 (周一)

姓名：陈　稼　霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 (课本习题 3.28) 得分: ________. 考虑两个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子组成的一个系统. 观察者 A 专门测量其中一个离子的自旋分量 (s_{1z}, s_{1x}, 等等), 同时观察者 B 测量另一个粒子的自旋分量. 假定已知系统处在自旋单态, 即 $S_{总} = 0$.

(a) 当观察者 B 不做任何测量时, 观察者 A 得到 $s_{1z} = \hbar/2$ 的概率是什么? 对于 $s_{1x} = \hbar/2$ 求解同样问题.

(b) 观察者 B 肯定地确认粒子 2 的自旋处于 $s_{2z} = \hbar/2$ 态. 如果观察者 A (i) 测量 s_{1z}; (ii) 测 s_{1x}, 则对观察者 A 的测量结果能给出的结论是什么? 解释你的答案.

解: (a) 这两个粒子组成的系统处于自旋单态, 可表为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{z}}+;\hat{\boldsymbol{z}}-\rangle + |\hat{\boldsymbol{z}}-;\hat{\boldsymbol{z}}+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}}-;\hat{\boldsymbol{x}}+\rangle + |\hat{\boldsymbol{x}}+;\hat{\boldsymbol{x}}-\rangle). \tag{1}$$

当观察者 B 不做任何测量时, 观察者 A 得到 $s_{1z} = \hbar/2$ 的概率为 $\frac{1}{2}$;
当观察者 B 不做任何测量时, 观察者 A 得到 $s_{1x} = \hbar/2$ 的概率为 $\frac{1}{2}$.

(b) 当观察者 B 肯定地确认粒子 2 的自旋处于 $s_{2z} = \hbar/2$ 后, 系统的状态塌缩至

$$|\psi'\rangle = |\hat{\boldsymbol{z}}-;\hat{\boldsymbol{z}}+\rangle = |\hat{\boldsymbol{z}}-\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{\boldsymbol{x}}+\rangle - |\hat{\boldsymbol{x}}-\rangle). \tag{2}$$

(i) 如果观察者测量 s_{1z}, 则有 100% 的概率得到 $s_{1z} = -\hbar/2$.

(ii) 如果观察者测量 s_{1x}, 则有 $\frac{1}{2}$ 的概率得到 $s_{1x} = \hbar/2$, 有 $\frac{1}{2}$ 的概率得到 $s_{1x} = -\hbar/2$.

□

第 2 题 (课本习题 3.30) 得分: ________. (a) 用两个不同的矢量 $\boldsymbol{U} = (U_x, U_y, U_z)$ 和 $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y, V_z)$ 构造一个秩为 1 的球张量. 明确地用 $U_{x,y,z}$ 和 $V_{x,y,z}$ 写出 $T^{(1)}_{\pm1,0}$.

(b) 用两个不同的矢量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 构造一个秩为 2 的球张量. 明确地用 $U_{x,y,z}$ 和 $V_{x,y,z}$ 写出 $\boldsymbol{T}^{(2)}_{\pm2,\pm1,0}$.

解: (a) 由

$$Y_{l=1}^{m=0}(\boldsymbol{U}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{U_z}{|U|}, \tag{3}$$

$$Y_{l=1}^{m=\pm1}(\boldsymbol{U}) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\theta} = \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{U_x \pm iU_y}{|U|}, \tag{4}$$

得单由 $\boldsymbol{U}$ 构造的秩为 1 的球张量

$$U_0^{(1)} = U_z, \tag{5}$$

$$U_{\pm1}^{(1)} = \mp\frac{U_x \pm iU_y}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

对 $\boldsymbol{V}$ 同理有

$$V_0^{(1)} = V_z, \tag{7}$$

$$V_{\pm1}^{(1)} = \mp\frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

利用定理

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle k_1k_2;q_1q_2|k_1k_2;kq\rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}, \tag{9}$$

有

$$T_q^{(1)}=\sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle 11;q_1q_2|11;1q\rangle U_{q_1}^{(1)}V_{q_2}^{(2)},\tag{10}$$

从而

$$\begin{aligned}
T_{+1}^{(1)}=&\langle 11;0,+1|11;1,+1\rangle U_0^{(1)}V_{+1}^{(1)}+\langle 11;+1,0|11;1,+1\rangle U_{+1}^{(1)}V_0^{(1)}\\
=&-\frac{1}{\sqrt{2}}U_z\frac{-V_x-iV_y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-U_x-iU_y}{\sqrt{2}}V_z\\
=&\frac{1}{2}(U_zV_x+iU_zV_y-U_xV_z-iU_yV_z),
\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}
T_0^{(1)}=&\langle 11;-1,+1|11;10\rangle U_{-1}^{(1)}V_{+1}^{(1)}+\langle 11;00|11;10\rangle U_0^{(1)}V_0^{(1)}+\langle 11;+1,-1|11;10\rangle U_{+1}^{(1)}V_{-1}^{(1)}\\
=&-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U_x-iU_y}{\sqrt{2}}\frac{-V_x-iV_y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-U_x-iU_y}{\sqrt{2}}\frac{V_x-iV_y}{\sqrt{2}}\\
=&\frac{i}{\sqrt{2}}(U_xV_y-U_yV_x),
\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}
T_{-1}^{(1)}=&\langle 11;-1,0|11;1,-1\rangle U_{-1}^{(1)}V_0^{(1)}+\langle 11;0,-1|11;1,-1\rangle U_0^{(1)}V_{-1}^{(1)}\\
=&-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U_x-iU_y}{\sqrt{2}}V_z+\frac{1}{\sqrt{2}}U_z\frac{V_x-iV_y}{\sqrt{2}}\\
=&\frac{1}{2}(-U_xV_z+iU_yV_z+U_zV_x-iU_zV_y).
\end{aligned}\tag{13}$$

(b) 利用定理

$$T_q^{(k)}=\sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle k_1k_2;q_1q_2|k_1k_2;kq\rangle X_{q_1}^{(k_1)}Z_{q_2}^{(k_2)},\tag{14}$$

有

$$T_q^{(2)}=\sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle 11;q_1q_2|11;2q\rangle U_{q_1}^{(1)}V_{q_2}^{(1)},\tag{15}$$

从而

$$T_{+2}^{(2)}=\langle 11;+1,+1|11;2,+2\rangle U_{+1}^{(1)}V_{+1}^{(1)}=\frac{-U_x-iU_y}{\sqrt{2}}\frac{-V_x-iU_y}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(U_xV_x+iU_xV_y+iU_yV_x+U_yV_y),\tag{16}$$

$$\begin{aligned}
T_{+1}^{(2)}=&\langle 11;0,+1|11;2,+1\rangle U_0^{(1)}V_{+1}^{(1)}+\langle 11;+1,0|11;2,+1\rangle U_{+1}^{(1)}V_0^{(1)}\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}U_z\frac{-V_x-iV_y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-U_x-iU_y}{\sqrt{2}}V_z\\
=&-\frac{1}{2}[U_z(V_x+iV_y)+(U_x+iU_y)V_z],
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}
T_0^{(2)}=&\langle 11;-1,+1|11;20\rangle U_{-1}^{(1)}V_{+1}^{(1)}+\langle 11;00|11;20\rangle U_0^{(1)}V_0^{(1)}+\langle 11;+1,-1|11;20\rangle U_{+1}^{(1)}V_{-1}^{(1)}\\
=&\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{U_x-iU_y}{\sqrt{2}}\frac{-V_x-iV_y}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{6}}U_zV_z+\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{-U_x-iU_y}{\sqrt{2}}\frac{V_x-iV_y}{\sqrt{2}}\\
=&\frac{1}{\sqrt{6}}(-U_xV_x-U_yV_y+2U_zV_z),
\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}
T_{-1}^{(2)}=&\langle 11;-1,0|11;2,-1\rangle U_{-1}^{(1)}V_0^{(1)}+\langle 11;0,-1|11;2,-1\rangle U_0^{(1)}V_{-1}^{(1)}\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U_x-iU_y}{\sqrt{2}}V_z+\frac{1}{\sqrt{2}}U_z\frac{V_x-iV_y}{\sqrt{2}}\\
=&\frac{1}{2}(U_xV_z-iU_yV_z+U_zV_x-iU_zV_y),
\end{aligned}\tag{19}$$

$$T_{-2}^{(2)}=\langle 11;-1,-1|11;2,-2\rangle U_{-1}^{(1)}V_{-1}^{(1)}=\frac{U_x-iU_y}{\sqrt{2}}\frac{V_x-iU_y}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(U_xV_x-iU_xV_y-iU_yV_x-U_yV_y).$$

□

第 3 题 (课本习题 3.32) 得分: ________. (a) 把 xy, xz 和 (x^2-y^2) 写成一个秩为 2 的球 (不可约) 张量的分量.

(b) 期待值

$$Q=e\langle\alpha,j,m=j|(3z^2-r^2)|\alpha,j,m=j\rangle$$

被称为 *四极矩*. 利用 Q 和适当的克莱布什-戈丹系数, 求

$$e\langle\alpha,j,m'|(x^2-y^2)|\alpha,j,m=j\rangle,$$

其中 $m'=j,j-1,j-2,\cdots$.

解: (a) 由

$$Y_2^0(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\frac{z^2}{r^2}-1\right),\tag{20}$$

$$Y_2^{\pm1}(\boldsymbol{r})=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{(x\pm iy)z}{r^2},\tag{21}$$

$$Y_2^{\pm2}(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2i\phi}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2},\tag{22}$$

得

$$xy=\frac{1}{4i}\left[\sqrt{\frac{32\pi}{15}}r^2Y_2^{+2}(\boldsymbol{r})-\sqrt{\frac{32\pi}{15}}r^2Y_2^{-2}(\boldsymbol{r})\right]=i\sqrt{\frac{2\pi}{15}}r^2[Y_2^{-2}(\boldsymbol{r})-Y_2^{+2}(\boldsymbol{r})],\tag{23}$$

$$xz=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{8\pi}{15}}r^2Y_2^{-1}(\boldsymbol{r})-\sqrt{\frac{8\pi}{15}}r^2Y_2^{+1}(\boldsymbol{r})\right]=\sqrt{\frac{2\pi}{15}}r^2[Y_2^{-1}(\boldsymbol{r})-Y_2^{+1}(\boldsymbol{r})],\tag{24}$$

$$(x^2-y^2)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{32\pi}{15}}r^2Y_2^{+2}(\boldsymbol{r})+\sqrt{\frac{32\pi}{15}}r^2Y_2^{-2}(\boldsymbol{r})\right]=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}r^2[Y_2^{+2}(\boldsymbol{r})+Y_2^{-2}(\boldsymbol{r})].\tag{25}$$

(b) 利用前一小题的结论,

$$e\langle\alpha,j,m'|(x^2-y^2)|\alpha,j,m=j\rangle=e\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\langle\alpha,j,m'|r^2[Y_2^{-2}(\boldsymbol{r})+Y_2^{+2}(\boldsymbol{r})]|\alpha,j,m=j\rangle.\tag{26}$$

利用 Wigner-Eckart 定理,

$$\begin{aligned}e\langle\alpha,j,m'|(x^2-y^2)|\alpha,j,m=j\rangle=&e\sqrt{\frac{8\pi}{15}}[\langle j2;j,-2|j2;jm'\rangle+\langle j2;j2|j2;jm'\rangle]\frac{\langle\alpha,j\|Y^{(2)}\|\alpha,j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\\=&e\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\langle j2;j,-2|j2;jm'\rangle\frac{\langle\alpha,j\|Y^{(2)}\|\alpha,j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\end{aligned}\tag{27}$$

另一方面,

$$Q=e\langle\alpha,j,m=j|(3z^2-r^2)|\alpha,j,m=j\rangle=e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\frac{\langle\alpha,j\|Y^{(2)}\|\alpha,j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle j2;j0|j2;jj\rangle.\tag{28}$$

故

$$e\langle\alpha,j,m'|(x^2-y^2)|\alpha,j,m=j\rangle=\frac{Q}{\sqrt{2}}\frac{\langle j2;j,-2|j2,jm'\rangle}{\langle j2;j0|j2;jj\rangle}.\tag{29}$$

□

第 4 题 (课本习题 3.10) 得分: ________. (a) 考虑全同制备的自旋 $\frac{1}{2}$ 系统的一个纯系综. 假定期待值 $\langle S_x\rangle$ 和 $\langle S_z\rangle$ 已知, 而 $\langle S_y\rangle$ 的符号也已知. 证明如何确定态矢量. 为什么不必知道 $\langle S_y\rangle$ 的大小?

(b) 考虑一个自旋 $\frac{1}{2}$ 系统的混合系综. 假定系综平均值 $[S_x]$, $[S_y]$, $[S_z]$ 都是已知的, 证明如何可以构造表征这个系综的 2×2 密度矩阵.

证: (a) 设该纯系综的状态为

$$|\alpha\rangle=\cos\frac{\beta}{2}|+\rangle+e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}|-\rangle. \tag{30}$$

期待值

$$\begin{aligned}\langle S_x\rangle=&\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle=\left(\cos\frac{\beta}{2}\langle+|+e^{-i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\langle-|\right)\frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-|+|-\rangle\langle+|)\left(\cos\frac{\beta}{2}|+\rangle+e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}|-\rangle\right)\\=&\frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}+e^{-i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\hbar}{2}\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\langle S_z\rangle=&\langle\alpha|S_z|\alpha\rangle=\left(\cos\frac{\beta}{2}\langle+|+e^{-i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\langle-|\right)\frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)\left(\cos\frac{\beta}{2}|+\rangle+e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}|-\rangle\right)\\=&\frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\hbar}{2}\cos\beta,\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\langle S_y\rangle=&\langle\alpha|S_y|\alpha\rangle=\langle\alpha|S_z|\alpha\rangle=\left(\cos\frac{\beta}{2}\langle+|+e^{-i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\langle-|\right)\frac{\hbar}{2}(-i|+\rangle\langle-|+i|-\rangle\langle+|)\left(\cos\frac{\beta}{2}|+\rangle+e^{i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}|-\rangle\right)\\=&\frac{\hbar}{2}\left(-ie^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}+ie^{-i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\hbar}{2}\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned} \tag{33}$$

因此由已知的 $\langle S_x\rangle$ 和 $\langle S_z\rangle$ 就可得

$$\langle S_y\rangle=\pm\sqrt{\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2-\langle S_x\rangle^2-\langle S_z\rangle^2}. \tag{34}$$

当 $\langle S_y\rangle$ 符号已知, $\langle S_y\rangle$ 就可被完全确定下来. 此时, α 和 β 也被确定下来:

$$\alpha=\arctan\frac{\langle S_y\rangle}{\langle S_x\rangle}, \tag{35}$$

$$\beta=\arccos\frac{\langle S_z\rangle}{\hbar/2}, \tag{36}$$

即可确定态矢量 $|\alpha\rangle$.

(b) 设该混合系综的密度矩阵为

$$\rho=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, \tag{37}$$

其满足

$$\rho=\rho^\dagger\Longrightarrow b=c^*,\ \text{and } a,d\in\mathbb{R}, \tag{38}$$

$$\mathrm{Tr}(\rho)=a+d=1. \tag{39}$$

系综平均值

$$[S_x]=\mathrm{Tr}(\rho S_x)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)=\frac{\hbar}{2}(b+c), \tag{40}$$

$$[S_y]=\mathrm{Tr}(\rho S_y)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\right)=i\frac{\hbar}{2}(b-c), \tag{41}$$

$$[S_z]=\mathrm{Tr}(\rho S_z)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)=\frac{\hbar}{2}(a-d). \tag{42}$$

当 $[S_x]$, $[S_y]$, $[S_z]$ 已知, 则

$$a=\frac{1}{2}\left(1+\frac{[S_z]}{\hbar/2}\right), \tag{43}$$

$$b=\frac{1}{\hbar}([S_x]-i[S_y]), \tag{44}$$

$$c=\frac{1}{\hbar}([S_x]+i[S_y]), \tag{45}$$

$$d=\frac{1}{2}\left(1-\frac{[S_z]}{\hbar/2}\right), \tag{46}$$

由此可以构造出表征该混合系综的 2×2 密度矩阵.

□

第 5 题 (课本习题 3.11) 得分: ________. (a) 证明密度算符 (在薛定谔绘景中) 的时间演化由下式给定

$$\rho(t)=\mathcal{U}(t,t_0)\rho(t_0)\mathcal{U}^\dagger(t,t_0).$$

(b) 假定在 $t=0$ 时有一个纯系统. 证明只要时间演化由薛定谔方程控制, 则它不可能演化成一个混合系统.

证: (a) 设 t_0 时刻密度算符为

$$\rho(t_0)=\sum_i w_i|\alpha^{(i)},t_0\rangle\langle\alpha^{(i)},t_0|. \tag{47}$$

在薛定谔绘景中, 任意纯态 $|\alpha^{(i)}\rangle$ 按照

$$|\alpha,t_0;t\rangle=\mathcal{U}(t,t_0)|\alpha^{(i)},t_0\rangle \tag{48}$$

的形式演化, 其中 $\mathcal{U}(t,t_0)$ 为时刻 t_0 时刻至 t 时刻的演化算符. 故 t 时刻密度算符演化为

$$\begin{aligned}\rho(t)=&\sum_i w_i\mathcal{U}(t,t_0)|\alpha^{(i)},t_0\rangle\langle\alpha^{(i)},t_0|\mathcal{U}^\dagger(t,t_0)\\ =&\mathcal{U}(t,t_0)\left[\sum_i w_i|\alpha^{(i)},t_0\rangle\langle\alpha^{(i)},t_0|\right]\mathcal{U}^\dagger(t,t_0)\\ =&\mathcal{U}(t,t_0)\rho(t_0)\mathcal{U}^\dagger(t,t_0).\end{aligned} \tag{49}$$

(b) $t=0$ 时刻该纯态系统的密度算符 $\rho(t=0)$ 满足

$$\mathrm{Tr}[\rho^2(t=0)]=1. \tag{50}$$

任意 t 时刻该系统的密度算符仍然满足

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho^2(t)]=&\mathrm{Tr}[U(t,0)\rho(t=0)U^\dagger(t,0)U(t,0)\rho(t=0)U^\dagger(t,0)]\\ =&\mathrm{Tr}[U(t,0)\rho^2(t=0)U^\dagger(t,0)]\\ =&\mathrm{Tr}[U^\dagger(t,0)U(t,0)\rho^2(t=0)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Tr}[\rho^2(t=0)] \\
&=1,
\end{aligned}
\tag{51}
$$

即该系统仍然为一纯态系统. 因此只要时间演化由薛定谔方程控制, 则它不可能演化成一个混合系统.

□