第一次课作业

1.5

(a)

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \langle a'|\alpha\rangle \\ \langle a''|\alpha\rangle \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\langle\beta| = (\langle\beta|a'\rangle, \langle\beta|a''\rangle, \dots) = (\langle a'|\beta\rangle^*, \langle a''|\beta\rangle^*, \dots)$$

$$\to |\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} \langle a'|\alpha\rangle \\ \langle a''|\alpha\rangle \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}(\langle a'|\beta\rangle^*, \langle a''|\beta\rangle^*, \dots) = \begin{pmatrix} \langle a'|\alpha\rangle\langle a'|\beta\rangle^* & \langle a'|\alpha\rangle\langle a''|\beta\rangle^* & \dots \\ \langle a''|\alpha\rangle\langle a'|\beta\rangle^* & \langle a''|\alpha\rangle\langle a''|\beta\rangle^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(b)

在通常的基下(

$$|a'\rangle = \left| S_z = \frac{\hbar}{2}\right\rangle, |a''\rangle = \left| S_z = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle$$

):

$$|\alpha\rangle = \left| S_z = \frac{\hbar}{2}\right\rangle$$

$$|\beta\rangle = \left| S_x = \frac{\hbar}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left| S_z = \frac{\hbar}{2}\right\rangle + \left| S_z = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle\right)$$

$$\to |\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6

由条件:

$$\begin{cases} A|i\rangle = i|i\rangle \\ A|j\rangle = j|j\rangle \end{cases}$$

若$|i\rangle + |j\rangle$也是本征右矢，则有:

$$A(|i\rangle + |j\rangle) = k(|i\rangle + |j\rangle)$$

又由:

$$A(|i\rangle + |j\rangle) = A|i\rangle + A|j\rangle = i|i\rangle + j|j\rangle$$

则:

$$k(|i\rangle + |j\rangle) = i|i\rangle + j|j\rangle$$
$$(k-i)|i\rangle = (j-k)|j\rangle$$

则得出：$i = j = k$

1.7

(a)

对于一个任意右矢$|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle$$

则:

$$\prod_{a'}(A-a')\,|\alpha\rangle=\prod_{a'}(A-a')\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=\sum_{a''}[\prod_{a'}(A-a')\,|a''\rangle]\langle a''|\alpha\rangle$$

$$=\sum_{a''}[(\prod_{a'\neq a''}(A-a'))(A-a'')|a''\rangle]\langle a''|\alpha\rangle$$

$$=\sum_{a''}\left[\left(\prod_{a'\neq a''}(A-a')\right)(A|a''\rangle-a''|a''\rangle)\right]\langle a''|\alpha\rangle$$

$$=\sum_{a''}\left[\left(\prod_{a'\neq a''}(A-a')\right)\left(a''^{|a'\rangle-a''|a'\rangle}\right)\right]\langle a''|\alpha\rangle=0$$

故：$\prod_{a'}(A-a')$为零算符

(b)

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{A-a''}{a'-a''}|\alpha\rangle=\prod_{a''\neq a'}\frac{A-a''}{a'-a''}\sum_{a'''}|a'''\rangle\langle a'''|\alpha\rangle=\sum_{a'''}\left(\prod_{a''\neq a'}\frac{A-a''}{a'-a''}\bigg|a'''\rangle\right)\langle a'''|\alpha\rangle$$

$$=\prod_{a''\neq a'}\frac{A-a''}{a'-a''}|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle=\prod_{a''\neq a'}\frac{A|a'\rangle-a''|a'\rangle}{a'-a''}\langle a'|\alpha\rangle=|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

这个算符作用在任意右矢$|\alpha\rangle$上，得到其在$|a'\rangle$上的分量（投影）：$|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$

(c)

令$A=S_z$，则：$a'=\frac{\hbar}{2},a''=-\frac{\hbar}{2}$

$$S_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\prod_{a'}(S_z-a')=\left(\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\frac{\hbar}{2}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\frac{\hbar}{2}\right)=\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

为零算符

$$\prod_{a''\neq a'}\frac{A-a''}{a'-a''}=\begin{cases}-\dfrac{S_z-\frac{\hbar}{2}}{\hbar}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\[2ex]\dfrac{S_z+\frac{\hbar}{2}}{\hbar}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$$

为投影算符

第二次课作业

1.4

(a)

$$tr(XY)=\sum_{a'}\langle a'|XY|a'\rangle=\sum_{a',a''}\langle a'|X|a''\rangle\langle a''|Y|a'\rangle=\sum_{a',a''}\langle a''|Y|a'\rangle\langle a'|X|a''\rangle$$

$$=\sum_{a''}\langle a''|YX|a''\rangle=tr(YX)$$

(b)

$$XY=\sum_{a',a''}|a'\rangle\langle a'|XY|a''\rangle\langle a''|=\sum_{a',a''}|a'\rangle\langle a''|(\langle a'|XY|a''\rangle)$$
$$=\sum_{a',a'',a'''}|a'\rangle\langle a''|(\langle a'|X|a'''\rangle\langle a'''|Y|a''\rangle)$$
$$(XY)^{\dagger}=(\sum_{a',a''}|a'\rangle\langle a''|(\langle a'|XY|a''\rangle))^{\dagger}=\sum_{a',a'',a'''}(|a'\rangle\langle a''|)^{\dagger}(\langle a'|X|a'''\rangle\langle a'''|Y|a''\rangle)^{*}$$
$$=\sum_{a',a'',a'''}|a''\rangle\langle a'|(\langle a'|X|a'''\rangle)^{*}(\langle a'''|Y|a''\rangle)^{*}$$
$$=\sum_{a',a'',a'''}|a''\rangle\langle a'|\left\langle a'''\middle|X^{\dagger}\middle|a'\right\rangle\langle a''|Y^{\dagger}\left|a'''\right\rangle$$
$$=\sum_{a',a'',a'''}|a''\rangle\langle a''|Y^{\dagger}|a'''\rangle\langle a'''|X^{\dagger}|a'\rangle\langle a'|=Y^{\dagger}X^{\dagger}$$

(c)

$$\exp\big(if(A)\big)\,|a\rangle=\left(1+if(A)-\frac{f^{2}(A)}{2}+\cdots\right)|a\rangle=\left(1+if(a)-\frac{f^{2}(a)}{2}+\cdots\right)|a\rangle$$
$$=\exp\big(if(a)\big)\,|a\rangle$$

其中，a是A的一个本征值

故：

$$\exp\big(if(A)\big)=\sum_{a}\exp\big(if(a)\big)\,|a\rangle\langle a|$$

(d)

$$\sum_{a'}\psi_{a'}^{*}(\vec{\boldsymbol{x}'})\psi_{a'}(\vec{\boldsymbol{x}''})=\sum_{a'}\left(\langle\vec{\boldsymbol{x}'}|a'\rangle\right)^{*}\left(\langle\vec{\boldsymbol{x}''}|a'\rangle\right)=\sum_{a'}(\langle a'|\vec{\boldsymbol{x}'}\rangle)(\langle\vec{\boldsymbol{x}''}|a'\rangle)=\sum_{a'}\langle\vec{\boldsymbol{x}''}|a'\rangle\langle a'|\vec{\boldsymbol{x}'}\rangle$$
$$=\langle\vec{\boldsymbol{x}''}|\vec{\boldsymbol{x}'}\rangle$$

1.10

令：$|1\rangle=\binom{1}{0}$，$|2\rangle=\binom{0}{1}$

$$H=a(|1\rangle\langle 1|-|2\rangle\langle 2|+|1\rangle\langle 2|+|2\rangle\langle 1|)=a\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

本征值满足：$\det(H-\lambda I)=0$

解得：

$$\lambda=\pm\sqrt{2}a$$

本征右矢：

$$|a\rangle=|1\rangle+(\pm\sqrt{2}-1)|2\rangle$$

1.13

第二次测量的测量算符：

$$M\left(s_n=\frac{\hbar}{2}\right)=|s_n=\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_n=\frac{\hbar}{2}|$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|s_z=\frac{\hbar}{2}\rangle+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\right)\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\langle s_z=\frac{\hbar}{2}|\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\langle s_z=-\frac{\hbar}{2}|\right)$$

$$=\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)|s_z=\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=\frac{\hbar}{2}|$$

$$+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(|s_z=\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=-\frac{\hbar}{2}|+|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=\frac{\hbar}{2}|\right)$$

$$+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=-\frac{\hbar}{2}|$$

第三次测量的测量算符:

$$M\left(s_z=-\frac{\hbar}{2}\right)=|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=-\frac{\hbar}{2}|$$

$$M\left(s_z=-\frac{\hbar}{2}\right)M\left(s_n=\frac{\hbar}{2}\right)|s_z=\frac{\hbar}{2}\rangle$$

$$=|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z$$

$$=-\frac{\hbar}{2}|\left(\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)|s_z=\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=\frac{\hbar}{2}|\right.$$

$$+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(|s_z=\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=-\frac{\hbar}{2}|+|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=\frac{\hbar}{2}|\right)$$

$$\left.+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle\langle s_z=-\frac{\hbar}{2}|\right)|s_z=\frac{\hbar}{2}\rangle=\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|s_z=-\frac{\hbar}{2}\rangle$$

故强度为:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

当$\beta=\frac{\pi}{2}$，强度最大，为$\frac{1}{4}$

1.23

(a)

令$\det(B-\lambda I)=0$，求得其特征值：$\lambda_1=\lambda_2=b,\lambda_3=-b$，所以 B 也展示了一个简并的谱

(b)

$$AB=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&-a&0\\0&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0&0\\0&0&-ib\\0&ib&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&0&0\\0&0&iab\\0&iab&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}b&0&0\\0&0&-ib\\0&ib&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&-a&0\\0&0&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&0&0\\0&0&iab\\0&iab&0\end{pmatrix}$$

满足:

$$[A,B]=0$$

故对易

(c)

显然:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

是 A 和 B 的一个本征右矢，对应的本征值分别为a和b

又，任意的右矢:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

均为 A 的本征右矢，对应的本征值为$-a$，

只需令:

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ m \\ n \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

得：$m = i, n = 1$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 A 和 B 的一个本征右矢，对应的本征值分别为$-a$和b

令:

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ m \\ n \end{pmatrix} = -b\begin{pmatrix} 0 \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

得：$m = 1, n = i$

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

是 A 和 B 的一个本征右矢，对应的本征值分别为$-a$和$-b$

显然，$|1\rangle$，$|2\rangle$，$|3\rangle$是两两正交的