1.4 解：(a) $tr(XY)=\sum_{a'}\langle a'|XY|a'\rangle=\sum_{a',a''}\langle a'|X|a''\rangle\langle a''|Y|a'\rangle$

$=\sum_{a',a''}\langle a''|Y|a'\rangle\langle a'|X|a''\rangle=\sum_{a''}\langle a''|YX|a''\rangle=tr(YX)$.

(b) $XY|\alpha\rangle=X(Y|\alpha\rangle)\xleftrightarrow{DC}(\langle\alpha|Y^{+})X^{+}=\langle\alpha|Y^{+}X^{+}=\langle\alpha|(XY)^{+}$

所以 $(XY)^{+}=Y^{+}X^{+}$.

(c) 设A的本征方程为 $A|a'\rangle=a'|a'\rangle$，先考虑 $f(A)$ 作用于 $|a'\rangle$ 的结果

$f(A)|a'\rangle=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}A^{n}\right)|a'\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(a')^{n}|a'\rangle=f(a')|a'\rangle$

进而有 $f^{n}(A)|a'\rangle=f^{n}(a')|a'\rangle$

$e^{if(A)}|a'\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}}{n!}f^{n}(A)|a'\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}}{n!}f^{n}(a')|a'\rangle=e^{if(a')}|a'\rangle$

$|a'\rangle$ 也是 $e^{if(A)}$ 的本征态，本征值为 $e^{if(a')}$

所以 $e^{if(A)}=\sum_{a'}e^{if(a')}|a'\rangle\langle a'|$.

(d) $\sum_{a'}\psi_{a'}^{*}(\vec{x}')\psi_{a'}(\vec{x}'')=\sum_{a'}\langle\vec{x}'|a'\rangle^{*}\langle\vec{x}''|a'\rangle=\sum_{a'}\langle a'|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}''|a'\rangle$

$=\sum_{a'}\langle\vec{x}''|a'\rangle\langle a'|\vec{x}'\rangle=\langle\vec{x}''|\vec{x}'\rangle$.

1.5 解：(a) 矩阵元为 $\langle a''|\alpha\rangle\langle\beta|a'\rangle=\langle a''|\alpha\rangle\langle a'|\beta\rangle^{*}$

$$|\alpha\rangle\langle\beta|\doteq\begin{pmatrix}\langle a^{(1)}|\alpha\rangle\langle a^{(1)}|\beta\rangle^{*} & \langle a^{(1)}|\alpha\rangle\langle a^{(2)}|\beta\rangle^{*} & \cdots\\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle\langle a^{(1)}|\beta\rangle^{*} & \langle a^{(2)}|\alpha\rangle\langle a^{(2)}|\beta\rangle^{*} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

(b) $|\alpha\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad|\beta\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle+|-\rangle)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$|\alpha\rangle\langle\beta|=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

1.6 解： $A|i\rangle=i|i\rangle$ ，$A|j\rangle=j|j\rangle$

$A(|i\rangle+|j\rangle)=i|i\rangle+j|j\rangle$

当 $i=j$，即 $|i\rangle,|j\rangle$ 的本征值相同时，$|i\rangle+|j\rangle$ 也是A的本征矢.

1.7 解：(a) $\prod_{a'}(A-a')|a''\rangle=(a''-a')(a''-a'')(a''-a''')\cdots=0$

因此对空间中的任意矢量 $|\alpha\rangle=\sum_{a''}c_{a''}|a''\rangle$，$\prod_{a'}(A-a')|\alpha\rangle=0$

$\prod_{a'}(A-a')$ 是零算符.

(b) $\prod_{a''\neq a'}\frac{A-a''}{a'-a''}|a'''\rangle=\prod_{a''\neq a'}\frac{a'''-a''}{a'-a''}|a'''\rangle=\delta_{a'''a'}|a'\rangle$

任意 $|\alpha\rangle=\sum_{a'''}c_{a'''}|a'''\rangle$

$\prod_{a''\neq a'}\frac{A-a''}{a'-a''}|\alpha\rangle=c_{a'}|a'\rangle$

因此该算符是向 $|a'\rangle$ 的投影算符.

(c) $S_z|\pm\rangle=\pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$

(a)中算符为 $A\triangleq(S_z-\frac{\hbar}{2})(S_z+\frac{\hbar}{2})$

对任意矢量 $|\alpha\rangle=a|+\rangle+b|-\rangle$，有

$A|\alpha\rangle=(S_z-\frac{\hbar}{2})(S_z+\frac{\hbar}{2})(a|+\rangle+b|-\rangle)=a(\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2})(\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2})|+\rangle+b(-\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2})(-\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2})|-\rangle=0$

所以 $A=0$.

当 $|a'\rangle=|+\rangle$ 时，(b)中算符为 $B\triangleq\frac{S_z+\frac{\hbar}{2}}{\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2}}=\frac{1}{\hbar}S_z+\frac{1}{2}$

$B|\alpha\rangle=(\frac{1}{\hbar}S_z+\frac{1}{2})(a|+\rangle+b|-\rangle)=\frac{a}{2}|+\rangle+\frac{a}{2}|+\rangle-\frac{b}{2}|-\rangle+\frac{b}{2}|-\rangle=a|+\rangle$

B为 $|+\rangle$ 方向的投影算符.

1.10 解：以 $|1\rangle$、$|2\rangle$ 为基，$H=a\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

久期方程 $\det(H-\lambda I)=\begin{vmatrix}a-\lambda&a\\a&-a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2a^2=0$

得 $\lambda_1=\sqrt{2}a$，$\lambda_2=-\sqrt{2}a$

$\lambda_1=\sqrt{2}a$ 时， $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 得本征矢为 $|a_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$

$=\frac{|1\rangle+(\sqrt{2}-1)|2\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$

$\lambda_2=-\sqrt{2}a$ 时，本征矢为 $|a_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$

$=\frac{|1\rangle-(\sqrt{2}+1)|2\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$.

1.13 解：第一次测量存留的态为 $|\psi_1\rangle=|+\rangle=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{n}=\sin\beta\,\hat{x}+\cos\beta\,\hat{z}$

$\vec{S}\cdot\hat{n}=S_x\sin\beta+S_z\cos\beta=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

本征态为 $|S_n,+\rangle=\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$， $|S_n,-\rangle=\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$

第二次测量找到 $S_n=\frac{\hbar}{2}$ 的概率为 $|\langle S_n,+|\psi_1\rangle|^2=\cos^2\frac{\beta}{2}$

$|\psi_2\rangle=|S_n,+\rangle$

第三次测量找到 $S_z=-\frac{\hbar}{2}$ 的概率为 $|\langle-|\psi_2\rangle|^2=\sin^2\frac{\beta}{2}$

因此 $S_z=-\frac{\hbar}{2}$ 的束流强度为 $I=\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{4}\sin^2\beta$.

取 $\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，$I_{max}=\frac{1}{4}$.

1.23 解：(a) B的久期方程 $\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} b-\lambda & & \\ & -\lambda & -ib \\ & ib & -\lambda \end{vmatrix}=(b-\lambda)(\lambda^2-b^2)=0$

$\lambda_1=\lambda_2=b$, $\lambda_3=-b$

B也是简并的.

(b) $[A,B]=AB-BA=\begin{pmatrix} a & & \\ & -a & \\ & & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & \\ & -a & \\ & & -a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iab \\ 0 & -iab & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iab \\ 0 & -iab & 0 \end{pmatrix}=0$

所以 A, B 对易.

(c) $\lambda=b$时 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -ib \\ 0 & ib & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$

分别取$\begin{cases} x=1, \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 得本征矢 $|b_1\rangle=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|b_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\lambda=-b$时, $\begin{pmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 0 & b & -ib \\ 0 & ib & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$

取 $z=1$ 得本征矢 $|b_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

$|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$, $|b_3\rangle$上 A的本征值为 a, $-a$, $-a$, B的本征值为 b, b, $-b$.

(a,b), $(-a,b)$, $(-a,-b)$ 可以完全表征每个本征矢.