3.18 已知一个在球对称势中的粒子处在 $\boldsymbol{L}^2$ 和 L_z 的本征态，本征值分别为 $l(l+1)\hbar^2$ 和 $m\hbar$。证明在 $|lm\rangle$ 态之间的期待值满足

$$\langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0,\ \langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2}{2}$$

半经典地解释这个结果。

解: 考虑使用升降算符 $L_\pm$ 表示 L_x 与 L_y:

$$L_x = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right),\ L_y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(L_+ - L_-) \tag{1}$$

在 $|lm\rangle$ 上计算一些期待值

$$\begin{aligned}
\langle lm|L_\pm|lm\rangle &= c_\pm \langle lm|l, m\pm 1\rangle = 0 && \text{(2a)}\\
\langle lm|L_\pm^2|lm\rangle &= c'_\pm \langle lm|l, m\pm 2\rangle = 0 && \text{(2b)}\\
\langle lm|L_+L_-|lm\rangle &= \langle lm|L_+\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\hbar|l, m-1\rangle \\
&= \langle lm|\left(l(l+1)-m(m-1)\right)\hbar^2|lm\rangle \\
&= \left(l(l+1)-m(m-1)\right)\hbar^2 && \text{(2c)}\\
\langle lm|L_-L_+|lm\rangle &= \left(l(l+1)-m(m+1)\right)\hbar^2 && \text{(2d)}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\langle L_x\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle L_+\rangle + \langle L_-\rangle\right) = 0 && \text{(3a)}\\
\langle L_y\rangle &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\langle L_+\rangle - \langle L_-\rangle) = 0 && \text{(3b)}\\
\langle L_x^2\rangle &= \frac{1}{4}\left(\langle L_+^2\rangle + \langle L_-^2\rangle + \langle L_+L_-\rangle + \langle L_-L_+\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m^2\right) && \text{(3c)}\\
\langle L_y^2\rangle &= -\frac{1}{4}\left(\langle L_+^2\rangle + \langle L_-^2\rangle - \langle L_+L_-\rangle - \langle L_-L_+\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m^2\right) && \text{(3d)}
\end{aligned}$$

(3)式可以经典地理解为：

- 绕 z 轴旋转的粒子平均来说沿 x 与 y 方向的角动量为 0，因此

$$\langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0 \tag{4}$$

- 绕 z 轴旋转的粒子具有对 z 轴的旋转对称性，因此 $\langle L_x^2\rangle$ 与 $\langle L_y^2\rangle$ 应当相等，并且与 $\langle L_z^2\rangle$ 相加得到总角动量 $\boldsymbol{L}^2$

$$\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle \boldsymbol{L}^2\rangle - \langle L_z^2\rangle\right) \tag{5}$$

3.20 考虑一个轨道角动量的本征态 $|l=2, m=0\rangle$. 假定这个态绕 y 轴转了 β 角。求在 $m = 0, \pm 1$ 和 ± 2 的态上找到这个新态的概率。(在附录 B 的 B.5 节中给出的 $l = 0, 1$ 和 2 的球谐函数可能是有用的。)

解: 绕 y 轴转动后 $|l=2,m=0\rangle$ 变为态 $\mathscr{D}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)\,|2,0\rangle$。所求概率为

$$P(m) = |\langle 2,m|\mathscr{D}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|2,0\rangle|^2 := |\mathscr{D}^{(2)}_{m0}(\beta)|^2 \tag{6}$$

依教材(3.6.52)式有

$$\mathscr{D}^{(l)}_{m0}(\alpha,\beta,\gamma=0) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}}Y_l^{m*}(\theta,\varphi)\bigg|_{\theta=\beta,\varphi=\alpha} \tag{3.6.52}$$

因此

$$\mathscr{D}^{(2)}_{m0}(\beta) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}Y_2^{m*}(\beta,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3\cos^2\beta-1) & m=0 \\ \mp\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\beta\cos\beta & m=\pm1 \\ \sqrt{\frac{3}{8}}\sin^2\beta & m=\pm2 \end{cases} \tag{7}$$

即

$$P(m) = \begin{cases} \frac{1}{4}(3\cos^2\beta-1)^2 & m=0 \\ \frac{3}{2}\sin^2\beta\cos^2\beta & m=\pm1 \\ \frac{3}{8}\sin^4\beta & m=\pm2 \end{cases} \tag{8}$$

3.24 通过把 $j_1=1$ 和 $j_2=1$ 相加，求出所形成的 $j=2,1,0$ 的所有 9 个 $|j,m\rangle$ 态，利用简化符号，以 $\pm,0$ 分别代表 $m_{1,2}=\pm1,0$，写出 $|j,m\rangle$ 的显式式，例如

$$|l,l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{+}0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0{+}\rangle$$

可以利用阶梯算符 $J_\pm$，或递推关系以及正交性。找一个克莱布什-戈丹系数表用来做比较，检验你的结果。

解: 教材(3.8.35)给出在 CG 系数 $\langle j_1j_2;m_1m_2|j_1j_2;jm\rangle$ 仅在

$$m = m_1+m_2 \tag{3.8.35}$$

时不为 0。也就是说 $|j,m\rangle$ 仅仅是满足(3.8.35)式的所有 $|m_1m_2\rangle$ 的线性组合

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1+m_2=m}|m_1m_2\rangle\langle m_1m_2|jm\rangle \tag{9}$$

首先考虑 $j=\pm m=2$ 的情形，此时 m_1,m_2 只能同时为 ±1，因此

$$|2,2\rangle = |{+}{+}\rangle\,,\ |2,-2\rangle = |{-}{-}\rangle \tag{10a}$$

分别使用升降算符 $J_\pm := J_{1\pm}+J_{2\pm}$ 作用于 $|2,\mp2\rangle$ 得到

$$J_+\,|2,-2\rangle = J_{1+}\,|{-}{-}\rangle + J_{2+}\,|{-}{-}\rangle$$

$$|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0{-}\rangle + |{-}0\rangle\right) \tag{10b}$$

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0{+}\rangle + |{+}0\rangle\right) \tag{10c}$$

再次使用升降算符可以得到

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|{+}{-}\rangle + 2\,|00\rangle + |{-}{+}\rangle\right) \tag{10d}$$

对于 $j=1$ 的情形，注意到 $|1,1\rangle$ 应由 $|+0\rangle$ 与 $|0+\rangle$ 线性表出

$$|1,1\rangle = c_1\,|+0\rangle + c_2\,|0+\rangle$$

j 不同的态 $|1,1\rangle$ 与 $|2,1\rangle$ 之间应相互正交，因此可以得到

$$\langle 2,1|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1+c_2) = 0$$

这表明

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+0\rangle - |0+\rangle\right) \tag{10e}$$

类似可以得到

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0-\rangle - |-0\rangle\right) \tag{10f}$$

在上式应用升算符 J_+ 得到

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) \tag{10g}$$

最后，由于 $\{|j,0\rangle\}_{j=0,1,2}$ 之间的正交性，可以解得

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+-\rangle - |00\rangle + |-+\rangle\right) \tag{10h}$$

CG 系数表给出[1]

$j_1=1,\ j_2=1$

$m=2$

m_1, m_2 \ j	2
1, 1	1

$m=1$

m_1, m_2 \ j	2	1
1, 0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
0, 1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$m=0$

m_1, m_2 \ j	2	1	0
1, −1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0, 0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
−1, 1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$

这与(10)式保持一致。

3.23 在角动量的施温格方案中，算符

$$K_+ \equiv a_+^\dagger a_-^\dagger,\ K_- \equiv a_+ a_-$$

的物理意义是什么？给出 $K_\pm$ 的非零矩阵元。

解： 由于

$$K_+\,|n_+,n_-\rangle = \sqrt{(n_+ + 1)(n_- + 1)}\,|n_+ + 1, n_- + 1\rangle$$
$$K_-\,|n_+,n_-\rangle = \sqrt{n_+ n_-}\,|n_+ - 1, n_- - 1\rangle$$

[1]参见Wikipedia

经过 $K_\pm$ 作用后

$$j \to j' = \frac{n_+ \pm 1 + n_- \pm 1}{2} = j \pm 1,\, m \to m' = \frac{n_+ \pm 1 - (n_- \pm 1)}{2} = m$$

故 $K_\pm$ 将 $|jm\rangle$ 态的 j 进行了一次升降

$$\begin{aligned} K_+ |jm\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}\, |j+1, m\rangle \\ K_- |jm\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m)}\, |j-1, m\rangle \end{aligned}$$

非零矩阵元给出

$$\begin{aligned} \langle j'm' |K_+| jm\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}\delta_{j',j+1}\delta_{m',m} \\ \langle j'm' |K_-| jm\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m)}\delta_{j',j-1}\delta_{m',m} \end{aligned}$$