第六次作业

截止时间: 2022 年 10 月 31 日 (周一)

姓名：陈　稼　霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 (课本习题 3.18) 得分: ________. 已知一个在球对称势中的粒子处在 $\boldsymbol{L}^2$ 和 L_z 的本征态, 本征值分别为 $l(l+1)\hbar^2$ 和 $m\hbar$. 证明在 $|lm\rangle$ 态之间的期待值满足

$$\langle L_x\rangle=\langle L_y\rangle=0,\qquad \langle L_x^2\rangle=\langle L_y^2\rangle=\frac{[l(l+1)\hbar^2-m^2\hbar^2]}{2},$$

半经典地解释这个结果.

证: 对 $|lm\rangle$ 态,

$$\begin{aligned}
\langle L_x\rangle=&\langle lm|L_x|lm\rangle=\langle lm|\frac{L_++L_-}{2}|lm\rangle=\frac{1}{2}(\langle lm|L_+|lm\rangle+\langle lm|L_-|lm\rangle)\\
=&\frac{1}{2}[\langle lm|\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar|l,m+1\rangle+\langle lm|\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar|l,m-1\rangle]\\
=&0, \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle L_y\rangle=&\langle lm|L_y|lm\rangle=\langle lm|\frac{L_+-L_-}{2i}|lm\rangle=\frac{1}{2i}(\langle lm|L_+|lm\rangle-\langle lm|L_-|lm\rangle)\\
=&\frac{1}{2i}[\langle lm|\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar|l,m+1\rangle+\langle lm|\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar|l,m-1\rangle]\\
=&0, \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle L_x^2\rangle=&\langle lm|L_x^2|lm\rangle=\langle lm|\left(\frac{L_++L_-}{2}\right)^2|lm\rangle=\frac{1}{4}(\langle lm|L_+^2|lm\rangle+\langle lm|L_+L_-|lm\rangle+\langle lm|L_-L_+|lm\rangle+\langle lm|L_-^2|lm\rangle)\\
=&\frac{1}{4}[\langle lm|\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar\sqrt{(l-m-1)(l+m+2)}\hbar|l,m+2\rangle\\
&+\langle lm|\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\hbar|lm\rangle\\
&+\langle lm|\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\hbar|lm\rangle\\
&+\langle lm|\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar\sqrt{(l+m-1)(l-m+2)}\hbar|l,m-2\rangle]\\
=&\frac{[l(l+l)\hbar^2-m^2\hbar^2]}{2}, \qquad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle L_y^2\rangle=&\langle lm|L_y^2|lm\rangle=\langle lm|\left(\frac{L_+-L_-}{2i}\right)|lm\rangle=-\frac{1}{4}(\langle lm|L_+^2|lm\rangle-\langle lm|L_+L_-|lm\rangle-\langle lm|L_-L_+|lm\rangle+\langle lm|L_-^2|lm\rangle)\\
=&-\frac{1}{4}[\langle lm|\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar\sqrt{(l-m-1)(l+m+2)}\hbar|l,m+2\rangle\\
&-\langle lm|\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\hbar|lm\rangle\\
&-\langle lm|\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\hbar\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\hbar|lm\rangle\\
&+\langle lm|\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar\sqrt{(l+m-1)(l-m+2)}\hbar|l,m-2\rangle]\\
=&\frac{[l(l+l)\hbar^2-m^2\hbar^2]}{2}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

对上述结果的半经典解释: $|lm\rangle$ 为 $\boldsymbol{L}^2$ 和 L_z 的共同本征态, $\boldsymbol{L}^2|ml\rangle=l(l+1)\hbar^2|lm\rangle$, $L_z|ml\rangle=m\hbar|ml\rangle$, 该本征态关于 z 轴对称, 故角动量的 L_x 和 L_y 分量的均值为零, 此外考虑到经典力学中 $\boldsymbol{L}^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$, 故 $\langle L_x^2\rangle=\langle L_y^2\rangle=\frac{1}{2}(\langle\boldsymbol{L}^2\rangle-\langle L_z\rangle^2)=\frac{[l(l+1)\hbar^2-m^2\hbar^2]}{2}$. □

第 2 题 (课本习题 3.20) 得分: ________. 考虑一个轨道角动量的本征态 $|l=2,m=0\rangle$. 假定这个态绕 y 轴转了 β 角. 求在 $m=0,\pm1$ 和 ±2 的态上找到这个新态的概率. (在附录 B 的 B.5 节中给出的 $l=0,1$ 和 2 的球谐函数可能是有用的.)

解: 态 $|l=2,m=0\rangle$ 绕 y 轴转动 β 角后变为 $\mathcal{D}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|l=2,m=0\rangle$, 在 $m=0,\pm1,\pm2$ 的态上找到这个新态的概率分别为

$$P(m=0)=\left|\langle l=2,m=0|\mathcal{D}^{(l=2)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|l=2,m=0\rangle\right|^2=\left|\mathcal{D}^{(l=2)}_{00}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Y_2^{0*}(\beta,0)\right|^2\\
&=\frac{1}{4}(3\cos^2\beta-1)^2, \qquad (5)\\
P(m=1)&=\left|\langle l=2,m=1|\mathcal{D}^{(l=2)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|l=2,m=0\rangle\right|^2=\left|\mathcal{D}_{10}^{(l=2)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)\right|^2\\
&=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Y_2^{1*}(\beta,0)\right|^2\\
&=\frac{3}{2}\sin^2\beta\cos^2\beta, \qquad (6)\\
P(m=-1)&=\left|\langle l=2,m=-1|\mathcal{D}^{(l=2)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|l=2,m=0\rangle\right|^2=\left|\mathcal{D}_{-10}^{(l=2)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)\right|^2\\
&=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Y_2^{-1*}(\beta,0)\right|^2\\
&=\frac{3}{2}\sin^2\beta\cos^2\beta, \qquad (7)\\
P(m=2)&=\left|\langle l=2,m=2|\mathcal{D}^{(l=2)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|l=2,m=0\rangle\right|^2=\left|\mathcal{D}_{20}^{l=2}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)\right|^2\\
&=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Y_2^{2*}(\beta,0)\right|^2\\
&=\frac{3}{8}\sin^4\theta, \qquad (8)\\
P(m=-2)&=\left|\langle l=2,m=-2|\mathcal{D}^{(l=2)}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|l=2,m=0\rangle\right|^2=\left|\mathcal{D}_{-20}^{l=2}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)\right|^2\\
&=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Y_2^{-2*}(\beta,0)\right|^2\\
&=\frac{3}{8}\sin^4\theta. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

□

第 3 题 (课本习题 3.24) 得分: ________. 通过把 $j_1=1$ 和 $j_2=1$ 相加, 求出所形成的 $j=2,1,0$ 的所有 9 个 $|j,m\rangle$ 态, 利用简化符号, 以 $\pm,0$ 分别代表 $m_{1,2}=\pm1,0$. 写出 $|j,m\rangle$ 的显示式, 例如

$$|1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|0+\rangle$$

可以利用阶梯算符 $J_\pm$, 或递推关系以及正交性. 找一个克莱布什-戈丹系数表用来做比较, 检验你的结果.

解: $j_1=1$ 和 $j_2=1$ 相加所形成的所有 9 个 $|j,m\rangle$ 态分别为

$$
\begin{gathered}
|j=2,m=2\rangle,\quad |j=2,m=1\rangle,\quad |j=2,m=0\rangle,\quad |j=2,m=-1\rangle,\quad |j=2,m=-2\rangle,\\
|j=1,m=1\rangle,\quad |j=1,m=0\rangle,\quad |j=1,m=-1\rangle,\\
|j=0,m=0\rangle.
\end{gathered}
$$

对于$j=2$ 的态: 由于 $m=m_1+m_2$, 易得

$$|j=2,m=2\rangle=|++\rangle, \qquad (10)$$

$$|j=2,m=-2\rangle=|--\rangle. \qquad (11)$$

利用 $J_+=J_{1+}+J_{2+}$ 和 $J_-=J_{1-}+J_{2-}$ 及 $J_\pm|jm\rangle=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j,m\pm1\rangle$, $J_{1(2)\pm}|j_{1(2)}m_{1(2)}\rangle=\sqrt{(j_{1(2)}\mp m_{1(2)})(j_{1(2)}\pm m_{1(2)}+1)}|j_{1(2)},m_{1(2)}\pm1\rangle$, 有

$$J_-|j=2,m=2\rangle=2\hbar|j=2,m=1\rangle=(J_{1-}+J_{2-})|++\rangle=\sqrt{2}\hbar|0+\rangle+\sqrt{2}\hbar|+0\rangle, \tag{12}$$

$$\Longrightarrow|j=2,m=1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|+0\rangle, \tag{13}$$

$$J_-|j=2,m=1\rangle=\sqrt{6}\hbar|j=2,m=0\rangle=(J_{1-}+J_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle+|+0\rangle)=|-+\rangle+2|00\rangle+|+-\rangle, \tag{14}$$

$$\Longrightarrow|j=2,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}|-+\rangle+\frac{2}{\sqrt{6}}|00\rangle+\frac{1}{\sqrt{6}}|+-\rangle, \tag{15}$$

$$J_+|j=2,m=-2\rangle=2\hbar|j=2,m=-1\rangle=(J_{1+}+J_{2+})|--\rangle=\sqrt{2}\hbar|0-\rangle+\sqrt{2}\hbar|-0\rangle, \tag{16}$$

$$\Longrightarrow|j=2,m=-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0-\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-0\rangle. \tag{17}$$

<u>对于$j=1$ 的态:</u> 由于 $m=m_1+m_2$, 故 $|j=1,m=1\rangle$ 具有 $a|+0\rangle+b|0+\rangle$ 的形式, 考虑到归一化条件 $|a|^2+|b|^2$ 以及 $|j,m\rangle$ 态之间的正交性, $|j=1,m=1\rangle$ 需与 $|j=2,m=1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|+0\rangle$ 正交, 故必有

$$|j=1,m=1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|0+\rangle. \tag{18}$$

由此出发, 利用与上面类似的方法有

$$J_-|j=1,m=1\rangle=\sqrt{2}|j=1,m=0\rangle=(J_{1-}+J_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}(|+0\rangle-|0+\rangle)=-\hbar|-+\rangle+\hbar|+-\rangle, \tag{19}$$

$$\Longrightarrow|j=1,m=0\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}|-+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|+-\rangle, \tag{20}$$

$$J_-|j=1,m=0\rangle=\sqrt{2}\hbar|j=1,m=-1\rangle=(J_{1-}+J_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}(-|-+\rangle+|+-\rangle)=|0-\rangle-|-0\rangle, \tag{21}$$

$$\Longrightarrow|j=1,m=-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0-\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|-0\rangle. \tag{22}$$

<u>对于$|j=0,m=0\rangle$ 态:</u> 由于 $m=m_1+m_2$, 故 $|j=0,m=0\rangle$ 具有 $|j=0,m=0\rangle=c|+-\rangle+d|00\rangle+e|-+\rangle$ 的形式, 考虑到归一化条件 $|c|^2+|d|^2+|e|^2=1$ 以及 $|j,m\rangle$ 态之间的正交性,

$$\langle j=1,m=0|j=0,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}c-\frac{1}{\sqrt{2}}e=0, \tag{23}$$

$$\langle j=2,m=0|j=0,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}c+\frac{2}{\sqrt{6}}d+\frac{1}{\sqrt{6}}e=0, \tag{24}$$

$$\Longrightarrow c=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad d=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad e=\frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{25}$$

故

$$|j=0,m=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}|+-\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}|-+\rangle. \tag{26}$$

上述分解结果与 Clebsch-Gordan 系数表 (图 1) 一致, 例如, $|j=2,m=1\rangle$ 的展开系数就对应了 $m=1$ 表中 $j=2$ 列的 $\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$m=2$

m_1, m_2 \\ j	**2**
1, 1	1

$m=1$

m_1, m_2 \\ j	**2**	**1**
1, 0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
0, 1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$m=0$

m_1, m_2 \\ j	**2**	**1**	**0**
1, −1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0, 0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
−1, 1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$

图 1: $j_1=1$ 和 $j_2=1$ 叠加的 Clebsch-Gordan 系数表.

□

第 4 题 (课本习题 3.23) 得分: ________. 在角动量的施温格方案中, 算符

$$K_+\equiv a_+^\dagger a_-^\dagger \quad 和 \quad K_-\equiv a_+a_-$$

的物理意义是什么? 给出 $K_\pm$ 的非零矩阵元.

解: 将 K_+ 作用于 $|n_+n_-\rangle$ 上有

$$K_+|n_+n_-\rangle=a_+^\dagger a_-^\dagger|n_+n_-\rangle=\sqrt{(n_++1)(n_-+1)}|n_++1,n_-+1\rangle, \tag{27}$$

即 K_+ 代表同时产生 (加入) 一个自旋朝上的粒子和一个自旋朝下的粒子, 在 K_+ 作用下系统的 $j=\frac{n_++n_-}{2}$ 变为 $j+1=\frac{(n_++1)+(n_-+1)}{2}$, 但角动量的 z 分量 $m=\frac{n_+-n_-}{2}=\frac{(n_++1)-(n_-+1)}{2}$ 不变. K_+ 的矩阵元

$$\begin{aligned}\langle j'm'|K_+|jm\rangle=&\langle n_+'=j'+m',n_-'=j'-m'|K_+|n_+=j+m,n_-=j-m\rangle\\=&\langle n_+'=j'+m',n_-'=j'-m'|\sqrt{(n_++1)(n_-+1)}|n_+=j+m+1,n_-=j-m+1\rangle\\=&\langle j'm'|\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}|j+1,m\rangle\\=&\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}\delta_{j',j+1}\delta_{m'm}.\end{aligned} \tag{28}$$

类似地, 将 K_- 作用于 $|n_+n_-\rangle$ 上有

$$K_-|n_+n_-\rangle=a_+a_-|n_+n_-\rangle=\sqrt{n_+n_-}|n_+-1,n_--1\rangle, \tag{29}$$

即 K_- 代表同时湮灭 (拿走) 一个自旋朝上的粒子和一个自旋朝下的粒子, 在 K_- 作用下系统的 $j=\frac{n_++n_-}{2}$ 变为 $j-1=\frac{(n_+-1)+(n_--1)}{2}$, 但角动量的 z 分量 $m=\frac{n_+-n_-}{2}=\frac{(n_+-1)-(n_--1)}{2}$ 不变. K_- 的矩阵元

$$\langle j'm'|K_-|jm\rangle=\langle n_+'=j'+m',n_-'=j'-m'|K_-|n_+=j+m,n_-=j-m\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&=\langle n'_+ = j'+m', n'_- = j'-m'|\sqrt{n_+n_-}|n_+ = j+m-1, n_- = j-m-1\rangle\\
&=\langle j'm'|\sqrt{(j+m)(j-m)}|j-1,m\rangle\\
&=\sqrt{(j+m)(j-m)}\delta_{j',j-1}\delta_{m'm}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

□