3.1 求 $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值和本征矢。假定一个电子处在自旋态 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 上，如果测量 s_y，结果为 $\hbar/2$ 的概率是什么？

解: σ_x 的本征方程为

$$\det(\lambda I - \sigma_y) = \lambda^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

解得本征值 $\lambda_\pm = \pm 1$，对应的本征矢为

$$\begin{cases} \chi_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} & \lambda = +1 \\ \chi_- = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} & \lambda = -1 \end{cases} \tag{2}$$

当电子处在自旋态 $\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 上时测得 $s_y = \hbar/2$ 的概率为

$$P = |\chi_+^\dagger \chi|^2 = \frac{1}{2} |\alpha - \mathrm{i}\beta|^2 \tag{3}$$

3.2 对于一个自旋 $\dfrac{1}{2}$ 的粒子，在存在一个磁场 $\boldsymbol{B} = B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_y \hat{\boldsymbol{y}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}}$ 的情况下，通过泡利矩阵显式结构，求哈密顿量

$$H = -\frac{2\mu}{\hbar} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}$$

的本征值。

解: 由于 $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$，有

$$H = -\mu(\sigma_1 B_x + \sigma_2 B_y + \sigma_3 B_z) = -\mu \begin{pmatrix} B_z & B_x - \mathrm{i}B_y \\ B_x + \mathrm{i}B_y & -B_z \end{pmatrix} \tag{4}$$

本征方程给出

$$(E + \mu B)(E - \mu B) - \mu^2 (B_x^2 + B_y^2) = 0 \tag{5}$$

解得 $E = \pm \mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$

3.5 考虑一个自旋为 1 的粒子。求

$$S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar) \quad \text{和} \quad S_x(S_x + \hbar)(S_x - \hbar)$$

的矩阵元。

解: 在自旋为 1 的自旋空间内，记 $|s_z\rangle$ 为 S_z 的本征值为 $s_z = 0, \pm\hbar$ 的本征态，则矩阵元

$$\begin{aligned} \langle s_z' | S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar) | s_z \rangle &= s_z' \langle s_z' | S_z^2 - \hbar^2 | s_z \rangle \\ &= s_z' (s_z'^2 - \hbar^2) \delta_{s_z', s_z} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

对于 S_x，在 S_z 表象下

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

因此

$$S_x(S_x - \hbar)(S_x + \hbar) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

故待求矩阵元均为 0，表明这两个算符为零算符。这与习题 1.7(a) 的结果保持一致。

3.9 考虑一个由下式表示的欧拉转动序列

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_3\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于转动的群性质，预期这一序列操作等价于绕某个轴转一个 θ 角的单一转动，求 θ。

解: 设 $\mathscr{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathscr{D}_{\hat{\boldsymbol{n}}}(\theta)$，其中 $\hat{\boldsymbol{n}} = (n_x, n_y, n_z)$ 为 $\boldsymbol{n}$ 方向上的单位向量。则

$$\mathscr{D}_{\hat{\boldsymbol{n}}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{i}n_z\sin\frac{\theta}{2} & -(n_y + \mathrm{i}n_x)\sin\frac{\theta}{2} \\ (n_y - \mathrm{i}n_x)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}n_z\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

将 $\mathscr{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 与 $\mathscr{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 取迹可以得到

$$2\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

即

$$\theta = 2\arccos\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)$$

3.14 已知 3×3 矩阵 $G_i(i=1,2,3)$，其矩阵元由下式给出：

$$(G_i)_{jk} = -\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}$$

其中 j 和 k 是行和列指标，证明它满足角动量对易关系，把 G_i 与比较常用的角动量算符 J_i，在 J_3 取为对角情况下的 3×3 表示联系起来，实现该联系的变换矩阵的物理（或几何）意义是什么？把得到的结果与无穷小转动下的

$$\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} + \hat{\boldsymbol{n}}\delta\varphi \times \boldsymbol{V}$$

联系起来。(注：这个问题可能有助于理解光子的自旋。)

解: 直接计算对易关系

$$\begin{aligned}([G_i,G_j])_{mn} &= (G_i)_{mk}(G_j)_{kn}-(G_j)_{mk}(G_i)_{kn}\\ &= -\hbar^2\left(\varepsilon_{imk}\varepsilon_{jkn}-\varepsilon_{jmk}\varepsilon_{ikn}\right)\\ &= \hbar^2\left(\varepsilon_{kim}\varepsilon_{kjn}-\varepsilon_{kjm}\varepsilon_{kin}\right)\\ &= \hbar^2\left((\delta_{ij}\delta_{mn}-\delta_{in}\delta_{jm})-(\delta_{ij}\delta_{mn}-\delta_{im}\delta_{jn})\right)\\ &= \hbar^2\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\\ &= \hbar^2\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn}\\ &= \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}(G_k)_{mn}\end{aligned}$$

也就是说

$$[G_i,G_j]=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}G_k$$

无穷小转动

$$\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}+\hat{\boldsymbol{n}}\delta\varphi\times\boldsymbol{V}$$

可以用分量表示为

$$V_i\to V_i+\delta\varphi\varepsilon_{ijk}n_jV_k=V_i+\mathrm{i}\delta\varphi(G_i)_{jk}n_jV_k$$

即

$$\boldsymbol{V}\to(I+\mathrm{i}\delta\varphi\hat{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{G})\boldsymbol{V}$$

这说明 G_i 是三维转动的一组生成元。

3.15 (a) 令 $\boldsymbol{J}$ 是角动量 (它可以是轨道角动量 $\boldsymbol{L}$，自旋 $\boldsymbol{S}$，或 $\boldsymbol{J}_{总}$) 利用 $J_x,J_y,J_z(J_\pm\equiv J_x\pm\mathrm{i}J_y)$ 满足通常角动量对易关系的事实，证明

$$\boldsymbol{J}^2=J_z^2+J_+J_--\hbar J_z$$

(b) 利用 (a)(或其他方式) 推导出在

$$J_-\psi_{jm}=c_-\psi_{j,m-1}$$

中的系数 c_- 的“著名”的表示式。

解: (a) 由于

$$\begin{aligned}J_+J_- &= (J_x+\mathrm{i}J_y)(J_x-\mathrm{i}J_y)\\ &= J_x^2+J_y^2-\mathrm{i}[J_x,J_y]\\ &= J_x^2+J_y^2+\hbar J_z\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}^2 &= J_x^2+J_y^2+J_z^2\\ &= J_z^2+J_+J_--\hbar J_z\end{aligned}$$

(b) 由于

$$J_-\left|jm\right\rangle=c_-\left|j,m-1\right\rangle$$

有

$$\langle jm| J_+ = \langle j, m-1| c_-^*$$

则

$$\begin{aligned}
|c_-|^2 \langle j, m-1|j, m-1\rangle &= \langle jm|J_+ J_-|jm\rangle \\
&= \langle jm|\boldsymbol{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z|jm\rangle \\
&= (j(j+1)\hbar^2 - m(m-1)\hbar^2) \langle jm|jm\rangle
\end{aligned}$$

因此

$$c_- = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$$