第十一次作业

截止时间: 2022 年 12 月 5 日 (周一)

姓名 : 陈 稼 霖
学号 : SA21038052
成绩 : ________

第 1 题 (课本习题 5.29) 得分: ________. 考虑两个自旋 1/2 的粒子组成的复合系统, 在 $t<0$ 是, 哈密顿量不依赖于自旋, 并能通过恰当地调整能标使其为零. 在 $t>0$ 时, 哈密顿量由

$$H=\left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right)\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$$

给出. 假定在 $t\leq 0$ 时, 系统处于 $|+-\rangle$ 态. 作为时间的函数, 找出它处于如下几个态: $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, 和 $|--\rangle$ 中的每个态的概率.

(a) 通过精确地求解这个问题.

(b) 通过在下面的条件下求解这个问题: 假设一级时间相关微扰论是有效的, 而 H 作为微扰在 $t=0$ 时加入. 在什么条件下, (b) 给出正确的结果?

解: (a) 该复合系统的哈密顿量可表为

$$H=\left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right)\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=\left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right)\frac{\boldsymbol{S}^2-\boldsymbol{S}_1^2-\boldsymbol{S}_2^2}{2}. \tag{1}$$

其能量本征态和对应的本征值分别为

$$|11\rangle=|++\rangle, \qquad E_{11}=\Delta, \tag{2}$$
$$|10\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle+|-+\rangle), \qquad E_{10}=\Delta, \tag{3}$$
$$|1,-1\rangle=|--\rangle, \qquad E_{1,-1}=\Delta, \tag{4}$$
$$|00\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle), \qquad E_{00}=-3\Delta. \tag{5}$$

$t=0$ 时系统初态可表为

$$|\alpha,0\rangle=|+-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|00\rangle). \tag{6}$$

$t>0$ 时系统状态为

$$\begin{aligned}|\alpha,0;t\rangle=&e^{-iHt/\hbar}|\alpha,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\Delta t/\hbar}|10\rangle+e^{i3\Delta t/\hbar}|00\rangle)\\=&\frac{1}{2}\left[e^{-i\Delta t/\hbar}(|+-\rangle+|-+\rangle)+e^{i3\Delta t/\hbar}(|+-\rangle-|-+\rangle)\right].\end{aligned} \tag{7}$$

此时系统处于 $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, 和 $|--\rangle$ 中的每个态的概率分别为

$$P(|++\rangle)=|\langle++|\alpha,0;t\rangle|^2=0, \tag{8}$$
$$P(|+-\rangle)=|\langle+-|\alpha,0;t\rangle|^2=\left|\frac{1}{2}(e^{-i\Delta t/\hbar}+e^{i3\Delta t/\hbar})\right|^2=\frac{1+\cos(4\Delta t/\hbar)}{2}, \tag{9}$$
$$P(|-+\rangle)=|\langle-+|\alpha,0;t\rangle|^2=\left|\frac{1}{2}(e^{-i\Delta t/\hbar}-e^{i3\Delta t/\hbar})\right|^2=\frac{1-\cos(4\Delta t/\hbar)}{2}, \tag{10}$$
$$P(|--\rangle)=|\langle--|\alpha,0;t\rangle|^2=0. \tag{11}$$

(b) 由一级时间相关微扰得到 $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, 和 $|--\rangle$ 的系数修正为

$$c_{++}^{(1)}(t)=\frac{-i}{\hbar}\int_0^t\langle++|H|+-\rangle\,\mathrm{d}t'=\frac{-i}{\hbar}\int_0^t\langle 11|H\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|00\rangle)=0, \tag{12}$$
$$c_{+-}^{(1)}(t)=\frac{-i}{\hbar}\int_0^t\langle+-|H|+-\rangle\,\mathrm{d}t'=\frac{-i}{\hbar}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 10|+\langle 00|)H\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|00\rangle)\,\mathrm{d}t'=\frac{i\Delta t}{\hbar}, \tag{13}$$

$$c_{-+}^{(1)}(t) =\frac{-i}{\hbar}\int_0^t\langle-+|H|+-\rangle\,\mathrm{d}t' = \frac{-i}{\hbar}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle10|-\langle00|)H\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|00\rangle)\,\mathrm{d}t' = \frac{-i2\Delta t}{\hbar}, \tag{14}$$

$$c_{--}^{(1)}(t) =\frac{-i}{\hbar}\int_0^t\langle--|H|+-\rangle\,\mathrm{d}t' = \frac{-i}{\hbar}\int_0^t\langle1,-1|H\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|00\rangle) = 0. \tag{15}$$

故此时系统处于 $|{+}{+}\rangle$, $|{+}{-}\rangle$, $|{-}{+}\rangle$, 和 $|{-}{-}\rangle$ 中的每个态的概率分别为

$$P(|{+}{+}\rangle) = \left|c_{++}^{(0)}(t)+c_{++}^{(1)}(t)\right|^2 = 0, \tag{16}$$

$$P(|{+}{-}\rangle) = \left|c_{+-}^{(0)}(t)+c_{+-}^{(1)}(t)\right|^2 = \left|1+\frac{i\Delta t}{\hbar}\right|^2 = 1+\frac{\Delta^2t^2}{\hbar^2}, \tag{17}$$

$$P(|{-}{+}\rangle) = \left|c_{-+}^{(0)}(t)+c_{-+}^{(1)}(t)\right|^2 = \left|\frac{-i2\Delta t}{\hbar}\right|^2 = \frac{4\Delta^2t^2}{\hbar^2}, \tag{18}$$

$$P(|{-}{-}\rangle) = \left|c_{--}^{(0)}(t)+c_{--}^{(1)}(t)\right|^2 = 0. \tag{19}$$

将 (a) 中的精确解关于 t 展开:

$$P(|{+}{+}\rangle) =0, \tag{20}$$

$$P(|{+}{-}\rangle) =\frac{1+\cos(4\Delta t/\hbar)}{2} = 1-\frac{4\Delta^2t^2}{\hbar^2}+\cdots, \tag{21}$$

$$P(|{-}{+}\rangle) =\frac{1-\cos(4\Delta t/\hbar)}{2} = \frac{4\Delta^2t^2}{\hbar^2}+\cdots, \tag{22}$$

$$P(|{-}{-}\rangle) == 0. \tag{23}$$

对比 (a) (b) 结果可知, 所得 $P(|{+}{+}\rangle)$ 和 $P(|{-}{-}\rangle)$ 一致, 当 $\frac{\Delta t}{\hbar}\ll 1$, 即 $t\ll\frac{\hbar}{\Delta}$ 时, 所得 $P(|{-}{+}\rangle)$ 相近, 而在任何近似情况下, 所得 $P(|{+}{-}\rangle)$ 均不相近.

□

第 2 题 (课本习题 5.30) 得分: ________. 考虑一个 $E_1<E_2$ 的双能级系统. 存在一个时间相关的势, 它以如下方式联系着这两个能级:

$$V_{11}=V_{22}=0,\quad V_{12}=\gamma e^{i\omega t},\quad V_{21}=\gamma e^{-i\omega t}\quad (\gamma\ \text{为实数})$$

已知在 $t=0$ 时, 只有较低的能级被占据, 即 $c_1(0)=1$, $c_2(0)=0$.

(a) 通过精确求解耦合微分方程

$$i\hbar\dot{c}_k=\sum_{n=1}^{2}V_{kn}(t)e^{i\omega_{kn}t}c_n,\quad (k=1,2)$$

求 $t>0$ 时的 $|c_1(t)|^2$ 和 $|c_2(t)|^2$.

(b) 使用时间相关的微扰论到最低的非零级求解同样的问题. 比较小 γ 值时的两种近似的解. 分别处理下列两种情况: (i) ω 与 ω_{21} 的差别非常大; (ii) ω 接近 ω_{21}.

(a) 的答案 (拉比公式)

$$|c_2(t)|^2 =\frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2+(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\left\{\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2}+\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}\right]^{1/2}t\right\},$$

$$|c_1(t)|^2 =1-|c_2(t)|^2.$$

解: (a) 描述该双能级系统演化的耦合微分方程为

$$i\hbar\dot{c}_1 =\gamma e^{i(\omega-\omega_{21})t}c_2, \tag{24}$$

$$i\hbar\dot{c}_2 = \gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})t}c_1, \tag{25}$$

其中 $\omega_{21}=\frac{E_2-E_1}{\hbar}$. 对式 (25) 进一步微分

$$i\hbar\ddot{c}_2 = -i(\omega-\omega_{21})\gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})t}c_1+\gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})t}\dot{c}_1 = -i(\omega-\omega_{21})i\hbar c_2+\gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})t}\dot{c}_1, \tag{26}$$

并代入式 (24) 中消去 $\dot{c}_1$ 得

$$\hbar^2\ddot{c}_2+i\hbar^2(\omega-\omega_{21})\dot{c}_2+\gamma^2c_2=0, \tag{27}$$

考虑到初始条件 $c_1(0)=\frac{i\hbar}{\gamma}\dot{c}_2(0)=1$, $c_2(0)=0$, 解得

$$\begin{aligned}c_2(t)=&-\frac{\frac{\gamma}{\hbar}}{2\sqrt{\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}+\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}}\times\\&\left(\exp\left\{i\left[-\frac{\omega-\omega_{21}}{2}+\sqrt{\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}+\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}\right]t\right\}-\exp\left\{i\left[-\frac{\omega-\omega_{21}}{2}-\sqrt{\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}+\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}\right]t\right\}\right).\end{aligned} \tag{28}$$

故

$$\begin{aligned}|c_2(t)|^2=&\frac{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}{\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}+\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}\frac{1-\cos\left\{2\sqrt{\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}+\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}t\right\}}{2}\\=&\frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2+(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\left\{\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2}+\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}\right]^{1/2}t\right\},\end{aligned} \tag{29}$$

$$|c_1(t)|^2=1-|c_2(t)|^2. \tag{30}$$

(b) 由含时微扰论, c_2 的零级近似为

$$c_2^{(0)}(t)=0. \tag{31}$$

c_2 的一级修正为

$$c_2^{(1)}(t)=\frac{-i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{21}t}\langle 2|V(t')|1\rangle\,\mathrm{d}t'=\frac{-i}{\hbar}\int_0^t\gamma e^{i(\omega_{21}-\omega)t'}\,\mathrm{d}t'=\frac{\gamma}{\hbar(\omega-\omega_{21})}[e^{-i(\omega-\omega_{21})t}-1]. \tag{32}$$

故 c_2 的最低的非零级近似为

$$c_2(t)=c_2^{(0)}(t)+c_2^{(1)}(t)=\frac{\gamma}{\hbar(\omega-\omega_{21})}[e^{-i(\omega-\omega_{21})t}-1]. \tag{33}$$

从而

$$|c_2(t)|^2=\frac{\gamma^2}{\hbar^2(\omega-\omega_{21})^2}\{2-2\cos[(\omega-\omega_{21})t]\}=\frac{\gamma^2/\hbar^2}{(\omega-\omega_{21})^2}\sin^2\left[\frac{(\omega-\omega_{21})t}{2}\right]. \tag{34}$$

与精确结果相比:

(i) 当 ω 与 ω_{21} 差别非常大, $|\omega-\omega_{21}|\gg\gamma/\hbar$ 时, 精确结果

$$|c_2(t)|^2=\frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2+(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\left\{\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2}+\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}\right]^{1/2}t\right\}\approx\frac{\gamma^2/\hbar^2}{(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\left\{\frac{\omega-\omega_{21}}{2}t\right\}. \tag{35}$$

故由含时微扰论得到的近似结果与精确结果相近.

(ii) 当 ω 接近 ω_{21}, $|\omega-\omega_{21}|\ll\gamma/\hbar$ 时, 精确结果

$$|c_2(t)|^2=\frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2+(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\left\{\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2}+\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}\right]^{1/2}t\right\}\approx\sin^2\left\{\frac{\gamma}{\hbar}t\right\}. \tag{36}$$

此时由含时微扰论得到的近似结果并不能很好地吻合精确结果.

□

第 3 题 (课本习题 5.35) 得分: ________. 考虑由一个电子与一个单电荷 ($Z=1$) 氚核 (^{3}H) 组成的原子. 开始系统处于基态 ($n=1$, $l=0$). 假如系统经受 β 衰变, 原子核的电荷突然增加了一个单位 (实际上发射出一个电子和一个反中微子). 这意味着氚原子核 (称为氚核) 转变成一个质量为 3 (^{3}He) 的氦 ($Z=2$) 的原子核.

(a) 求系统处于产生的氦离子基态的概率. 氢的波函数由

$$\psi_{n=1,l=0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-Zr/a_0}$$

给出.

(b) 氚 β 衰变中可用的能量约为 18 keV, 且 ^{3}He 原子的尺度约为 1 Å. 检查跃迁的时间标度 T 满足瞬变近似合理性的判据.

解: (a) 就包含电荷和原子核的整个原子系统而言, 初态和末态由不同的粒子组成, 其希尔伯特空间是不相同的, 衰变前的系统处于氦离子的基态的概率为 0. 就原有的那个电子而言, 其初态波函数为氢原子 ($Z=1$) 基态的电子波函数

$$\psi_{\mathrm{H},n=1,l=0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r/a_0}. \tag{37}$$

氦离子 ($Z=2$) 基态的电子波函数为

$$\psi_{\mathrm{He},n=1,l=0}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2}e^{-2r/a_0}. \tag{38}$$

衰变前该电子处于产生的氦离子的基态的概率为

$$\begin{aligned}\left|\int\psi^*_{\mathrm{He},n=1,l=0}(\boldsymbol{x})\psi_{\mathrm{H},n=1,l=0}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\right|^2&=\left|4\pi\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2}e^{-2r/a_0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r/a_0}r^2\,\mathrm{d}r\right|^2\\&=\left|\frac{2^{7/2}}{a_0^3}\int_0^\infty e^{-3r/a_0}r^2\,\mathrm{d}r\right|^2\\&\quad(\text{利用}\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,\mathrm{d}x=(n-1)!)\\&=\left|\frac{2^{9/2}}{27}\right|^2\\&=\frac{2^9}{3^6}\approx0.702.\end{aligned} \tag{39}$$

(b) 初末态能量差对应的跃迁频率为 $\omega_{ab}=\frac{E_{ab}}{\hbar}=\frac{18\,\mathrm{keV}}{6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}=2.73\times10^{19}\,\mathrm{Hz}$. 由于电子的质量远小于氦原子核的质量, 故衰变获得的能量几乎全部转变为发射出的自由电子的动能, 该自由电子的出射速度 $v=\sqrt{\frac{2E}{m_e}}=\sqrt{\frac{2\times18\,\mathrm{keV}}{9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}}=7.95\times10^7\,\mathrm{m/s}$, 衰变过程发生的时间尺度 $T\sim\frac{1\text{Å}}{v}=\frac{10^{-10}\,\mathrm{m}}{7.95\times10^7\,\mathrm{m/s}}=1.26\times10^{-18}\,\mathrm{s}$. 该衰变过程不满足瞬变近似判据: $T\sim1.26\times10^{-18}\,\mathrm{s}>\frac{2\pi}{\omega_{ab}}=2.3\times10^{-19}\,\mathrm{s}$.

□

第 4 题 (课本习题 5.38) 得分: ________. 一个氢原子的基态 ($n=1$, $l=0$) 受到一个如下的时间相关势

$$V(\boldsymbol{x},t)=V_0\cos(kz-\omega t)$$

的作用. 使用时间相关微扰论, 求动量 $\boldsymbol{p}$ 的电子被发射出来的跃迁速率的表达式. 特别要证明如何计算放射出电子的角分布 (借助相对于 z 轴定义的 θ 和 ϕ 角). 简要地讨论这个问题与 (更实际一些) 光电效应的相似性和不同处. (注意: 初始波函数可参见习题 5.35. 如果有归一化问题, 最终的波函数可以取为

$$\psi_f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{1}{L^{3/2}}\right)e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}$$

L 非常大, 但应能够证明可观测的效应是不依赖于 L 的.)

解: 该时间相关势可表为

$$V(\boldsymbol{x},t)=V_0\cos(kz-\omega t)=\frac{V_0}{2}\{\exp[i(kz-\omega t)]+\exp[i(-kz+\omega t)]\}. \tag{40}$$

由时间微扰论, 电子以动量$\boldsymbol{p}$ 发射的跃迁速率 (由能量守恒, 已略去非谐振项) 为

$$\begin{aligned}
w_{|n=1,l=0\rangle\to|\boldsymbol{p}\rangle}=&\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\boldsymbol{p}|\frac{V_0}{2}\exp[i(kz-\omega t)]|n=1,l=0\rangle\right|^2\delta(E-E_0-\hbar\omega)\\
=&\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{V_0}{2}\right)^2|\langle\boldsymbol{p}|\exp(ikz)|n=1,l=0\rangle|^2\delta(E-E_0-\hbar\omega),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{p}|e^{ikz}|n=1,l=0\rangle=&\int_{-\infty}^{\infty}\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}'\rangle\langle\boldsymbol{x}'|e^{ikz}|n=1,l=0\rangle\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}'\rangle e^{ikz'}\langle\boldsymbol{x}'|n=1,l=0\rangle\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{L^{3/2}}\right)e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}'/\hbar}e^{ikz'}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r'/a_0}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\\
=&\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\boldsymbol{p}/\hbar-k\hat{z})\cdot\boldsymbol{x}'}e^{-r'/a_0}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\\
=&\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'}e^{-r'/a_0}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'
\end{aligned}\tag{41}$$

其中 $\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}-k\hat{z}$, 并且不妨将 $\boldsymbol{p}$ 的方向作为 $\boldsymbol{z}'$ 方向, 从而有

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{p}|e^{ikz}|n=1,l=0\rangle=&\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}2\pi\int_0^{\infty}e^{-r'/a_0}r'^2\,\mathrm{d}r'\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iqr'\cos\theta'}\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'\\
=&\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}2\pi\int_0^{\infty}e^{-r'/a_0}r'^2\,\mathrm{d}r'\int_{-1}^{1}e^{-iqr'\cos\theta'}\,\mathrm{d}(\cos\theta')\\
=&\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}2\pi\int_0^{\infty}e^{-r'/a_0}r'^2\frac{e^{iqr'}-e^{-iqr'}}{iqr'}\,\mathrm{d}r'\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}\frac{2\pi}{iq}\int_0^{\infty}[e^{-(1/a_0-iq)r'}-e^{-(1/a_0+iq)r'}]r'\,\mathrm{d}r'\\
&(\text{利用}\int_0^{\infty}e^{-x}x\,\mathrm{d}x=1)\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}\frac{2\pi}{iq}\left[\frac{1}{(1/a_0-iq)^2}-\frac{1}{(1/a_0+iq)^2}\right]
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{La_0}\right)^{3/2}\frac{8\pi a_0^3}{(1+a_0^2q^2)^2}. \tag{42}$$

故电子以动量$\boldsymbol{p}$ 发射的跃迁速率

$$w_{|n=1,l=0\rangle\to|\boldsymbol{p}\rangle}=\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{V_0}{2}\right)^2\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{La_0}\right)^3\left[\frac{8\pi a_0^3}{(1+a_0^2q^2)^2}\right]^2\delta(E-E_0-\hbar\omega), \tag{43}$$

其中电子的发射角度包含在 q 中.

上述情况可视为光电效应的一个特例. 对电光效应, 光场的时间相关势 (偶极近似下) 具有和题设类似的形式, 但是光场激发的电子并非处于氢原子的基态, 而是金属原子的各个电子能态, 故其动量 $\boldsymbol{p}$ 的电子被发射出来的跃迁速率的表达式为

$$w=\sum_{n,l}w_{|n,l\rangle\to|\boldsymbol{p}\rangle}=\sum_{n,l}\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\boldsymbol{p}|\frac{V_0}{2}\exp[i(kz-\omega t)]|n,l\rangle\right|^2\delta(E-E_0-\hbar\omega). \tag{44}$$

□

第 5 题 (课本习题 5.39) 得分: _________. 约束在一维运动的一个质量为 m 的粒子, 被一个无限深势阱

$$\begin{aligned} V&=\infty && \text{对}x<0,x>L\\ V&=0 && \text{对}0\le x\le L. \end{aligned}$$

禁闭在 $0<x<L$ 的范围中. 求在高能情况下, 作为 E 的函数的态密度表达式 (即单位能量间隔中的态的数目). (检查你的量纲!)

解: 对于无限深方势阱, 能量本征态波矢满足

$$k\cdot 2L=n\cdot 2\pi, \tag{45}$$

$$k=\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{46}$$

即相邻波矢之间间隔为 $\frac{\pi}{L}$. 能量本征值为

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}. \tag{47}$$

态密度满足

$$\rho(E)\,\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}k}{\pi/L}=\frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}{2\pi/L}=\frac{L}{\pi\hbar}\left(\frac{m}{2E}\right)^{1/2}\mathrm{d}E. \tag{48}$$

故态密度的表达式为

$$\rho(E)=\frac{L}{\pi\hbar}\left(\frac{m}{2E}\right)^{1/2}. \tag{49}$$

□