第五次作业

截止时间: 2022 年 10 月 24 日 (周一)

姓名：陈 稼 霖
学号：SA21038052
成绩：__________

第 1 题 (课本习题 3.1) 得分: ________. 求 $\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值和本征矢. 假定一个电子处在自旋态 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 上. 如果测得 s_y, 结果为 $\hbar/2$ 的概率是什么?

解: 通过

$$|\sigma - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

解得 $\boldsymbol{\sigma}$ 的本征值为

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1. \tag{2}$$

将这两个本征值代入本征方程

$$\boldsymbol{\sigma}_y \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

解得对应的归一化本征态分别为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \tag{4}$$

测得该电子的 s_y 为 $\hbar/2$ 的概率为

$$P(s_y = \frac{\hbar}{2}) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \alpha - i\beta \right|^2. \tag{5}$$

□

第 2 题 (课本习题 3.2) 得分: ________. 对于一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子, 在存在一个磁场 $\boldsymbol{B} = B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_y \hat{\boldsymbol{y}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}}$ 情况下, 通过利用泡利矩阵显示结构, 求哈密顿量

$$H = -\frac{2\mu}{\hbar} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}$$

的本征值.

解: 该粒子的哈密顿量可用泡利矩阵表为

$$H = -\frac{2\mu}{\hbar} \frac{\hbar}{2} (\sigma_x \hat{\boldsymbol{x}} + \sigma_y \hat{\boldsymbol{y}} + \sigma_z \hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_y \hat{\boldsymbol{y}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}}) = -\mu (B_x \sigma_x + B_y \sigma_y + B_z \sigma_z) = -\mu \begin{bmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{bmatrix}. \tag{6}$$

通过

$$|H - EI| = \begin{vmatrix} -\mu B_z - E & -\mu(B_x - iB_y) \\ -\mu(\mu B_x + iB_y) & \mu B_z - E \end{vmatrix} = (-\mu B_z - E)(\mu B_z - E) - \mu^2 (B_x - iB_y)(B_x + iB_y) = 0, \tag{7}$$

解得哈密顿量的本征值为

$$E_1 = \mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}, \quad E_1 = -\mu \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}. \tag{8}$$

□

第 3 题 (课本习题 3.5) 得分: ________. 考虑一个自旋为 1 的粒子. 求

$$S_z(S_z+\hbar)(S_z-\hbar) \quad 和 \quad S_x(S_x+\hbar)(S_x-\hbar)$$

的矩阵元.

证: 以 $\{|s_z=+\hbar\rangle, |s_z=0\rangle, |s_z=-\hbar\rangle\}$ 为基, S_z 的矩阵表示为

$$S_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

将其代入题干中的式子可得

$$S_z(S_z+\hbar)(S_x-\hbar) = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hbar \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hbar \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

考虑到 x 轴和 z 轴是等价的, 故有

$$S_x(S_x+\hbar)(S_x-\hbar) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

□

第 4 题 (课本习题 3.9) 得分: ________. 考虑一个由下式表示的欧拉转动序列

$$\mathcal{D}^{(1/2)} = \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_3\gamma}{2}\right).$$

由于转动的群性质, 这一序列操作等价于绕某个轴转一个 θ 角的单一转动. 求 θ.

解: 该欧拉转动序列

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)} &= \exp\left(\frac{-i\sigma_3\alpha}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_2\beta}{2}\right)\exp\left(\frac{-i\sigma_3\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

对比自旋 $\frac{1}{2}$ 系统中绕轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 旋转 θ 角的算符

$$U = \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - in_z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & (-in_x - n_y)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ (-in_x + n_y)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + in_z\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{13}$$

可知, 矩阵对角元之和即为旋转角 θ 的 $\frac{1}{2}$ 的余弦的 2 倍,

$$e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) + e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) = 2\cos(\frac{\alpha+\gamma}{2})\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{14}$$

解得等价转动的角度为

$$\theta = 2\arccos\left[\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]. \tag{15}$$

□

第 5 题 (课本习题 3.14) 得分: ________. 已知 3×3 矩阵 $G_i(i=1,2,3)$, 其矩阵元由下式给出:

$$(G_i)_{jk}=-i\hbar\varepsilon_{ijk},$$

其中 j 和 k 是行和列指标, 证明它满足角动量对易关系. 把 G_i 与比较常用的角动量算符 J_i, 在 J_3 取为对角的情况下的 3×3 表示联系起来, 实现该联系的变换矩阵的物理 (或几何) 意义是什么? 把得到的结果与无穷小转动下的

$$\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}+\hat{\boldsymbol{n}}\delta\phi\times\boldsymbol{V}$$

联系起来. (注: 这个问题可能有助于理解光子的自旋.)

证: 根据矩阵 G_i 的定义及矩阵乘法的规则,

$$\begin{aligned}
[G_i,G_j]_{ln}=&(G_iG_j)_{ln}-(G_iG_j)_{ln}=\sum_m(G_{ilm}G_{jmn}-G_{jlm}G_{imn})\\
=&(-i\hbar)^2\sum_m(\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jmn}-\varepsilon_{jlm}\varepsilon_{imn})\\
=&(-i\hbar)^2\sum_m(-\delta_{ij}\delta_{ln}\varepsilon_{ilm}+\delta_{in}\delta_{lj}\varepsilon_{ilm}+\delta_{ji}\delta_{ln}\varepsilon_{jlm}-\delta_{jn}\delta_{li}\varepsilon_{jlm})\\
=&(-i\hbar)^2[-\delta_{ij}\delta_{ln}(1-\delta_{il})+\delta_{in}\delta_{lj}(1-\delta_{il})+\delta_{ji}\delta_{ln}(1-\delta_{jl})-\delta_{jn}\delta_{li}(1-\delta_{jl})]\\
=&(-i\hbar)^2(-\delta_{ij}\delta_{ln}+\delta_{in}\delta_{lj}+\delta_{ji}\delta_{ln}-\delta_{jn}\delta_{li})\\
=&(-i\hbar)^2(\delta_{in}\delta_{lj}-\delta_{jn}\delta_{li})\\
=&(-i\hbar)^2[\delta_{in}\delta_{lj}(1-\delta_{ij})-\delta_{jn}\delta_{li}(1-\delta_{ij})]\\
=&(-i\hbar)^2\sum_k[\delta_{in}\delta_{lj}\varepsilon_{ijk}-\delta_{jn}\delta_{li}\varepsilon_{ijk}]\\
=&(-i\hbar)^2\sum_k(\delta_{in}\delta_{lj}-\delta_{jn}\delta_{li})\varepsilon_{ijk}\\
=&(-i\hbar)^2\sum_k[\delta_{in}\delta_{lj}(1-\delta)-\delta_{jn}\delta_{li}]\varepsilon_{ijk}\\
=&(-i\hbar)^2\sum_k(-\varepsilon_{kln})\varepsilon_{ijk}\\
=&i\hbar\sum_k\varepsilon_{ijk}(G_k)_{ln},
\end{aligned}\tag{16}$$

故 G_i 满足角动量对易关系.

变换矩阵 U_i 将 G_i 与 J_i 联系在一起,

$$U_i^\dagger G_iU_i=J_i,\tag{17}$$

注意到 J_3 为对角矩阵, 故上述过程实际上为 G_i 的对角化操作, 变换矩阵 U 由 G_3 的本征向量构成. 通过

$$|G_3-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & -i\hbar & 0\\ i\hbar & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^2-\hbar^2)\lambda=0\tag{18}$$

解得 G_3 的本征值为

$$\lambda_1^{(3)}=\hbar,\quad\lambda_2^{(3)}=0,\quad\lambda_3^{(3)}=-\hbar.\tag{19}$$

将这三个本征值代入本征方程

$$G_3|\lambda_i^{(3)}\rangle=\lambda_i^{(3)}|\lambda_i^{(3)}\rangle,\tag{20}$$

解得对应的归一化本征矢分别为

$$|\lambda_1^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}, \quad |\lambda_2^{(3)}\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad |\lambda_3^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\\0\end{bmatrix}, \tag{21}$$

故变换矩阵为

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ i & 0 & -i\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}. \tag{22}$$

通过

$$|G_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -i\hbar\\ 0 & i\hbar & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+\hbar)(\lambda-\hbar) = 0 \tag{23}$$

解得 G_1 的本征值为

$$\lambda_1^{(1)} = \hbar, \quad \lambda_2^{(1)} = 0, \quad \lambda_3^{(1)} = -\hbar. \tag{24}$$

将这三个本征值代入本征方程

$$G_1|\lambda_i^{(1)}\rangle = \lambda_i^{(1)}|\lambda_i^{(1)}\rangle, \tag{25}$$

解得对应的归一化本征矢分别为

$$|\lambda_1^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\i\end{bmatrix}, \quad |\lambda_2^{(1)}\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad |\lambda_3^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}. \tag{26}$$

故

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & -i\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\end{bmatrix} G_1 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & i\\ i & 0 & 1\end{bmatrix} = \hbar\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}. \tag{27}$$

通过

$$|J_1 - \xi I| = \begin{vmatrix}-\xi & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\xi & \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\xi\end{vmatrix} = -\xi(\xi+\hbar)(\xi-\hbar) = 0 \tag{28}$$

解得 J_1 的本征值为

$$\xi_1^{(1)} = \hbar, \quad \xi_2^{(1)} = 0, \quad \xi_3^{(1)} = -\hbar. \tag{29}$$

将这三个本征值代入本征方程

$$J_1|\xi_i^{(1)}\rangle = \xi_i^{(1)}|\xi_i^{(1)}\rangle, \tag{30}$$

解得对应的归一化本征矢分别为

$$|\xi_1^{(1)}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}, \quad |\xi_2^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}, \quad |\xi_3^{(1)}\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}. \tag{31}$$

故

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{bmatrix} J_1 \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{bmatrix} = \hbar\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}. \tag{32}$$

因此,

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & i\\ i & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 1+i & \sqrt{2}-\sqrt{2}i & 1+i\\ 1+i & -\sqrt{2}+\sqrt{2}i & 1+i\end{bmatrix}. \tag{33}$$

通过

$$|G_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix}-\lambda & 0 & i\hbar\\ 0 & -\lambda & 0\\ -i\hbar & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+\hbar)(\lambda-\hbar) = 0 \tag{34}$$

解得 G_2 的本征值为

$$\lambda_1^{(2)} = \hbar, \quad \lambda_2^{(2)} = 0, \quad \lambda_3^{(2)} = -\hbar. \tag{35}$$

将这三个本征值代入本征方程

$$G_2|\lambda_i^{(2)}\rangle = \lambda_i^{(2)}|\lambda_i^{(2)}\rangle, \tag{36}$$

解得对应的归一化本征矢分别为

$$|\lambda_1^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \quad |\lambda_2^{(2)}\rangle = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \quad |\lambda_3^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ i\end{bmatrix}. \tag{37}$$

故

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & -i\end{bmatrix} G_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & i\end{bmatrix} = \hbar\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}. \tag{38}$$

通过

$$|J_2 - \xi I| = \begin{vmatrix}-\xi & -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0\\ i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\xi & -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\\ 0 & i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} & -\xi\end{vmatrix} = -\xi(\xi+\hbar)(\xi-\hbar) = 0 \tag{39}$$

解得 J_2 的本征值为

$$\xi_1^{(2)} = \hbar, \quad \xi_2^{(2)} = 0, \quad \xi_3^{(2)} = -\hbar. \tag{40}$$

将这撒呢个本征值代入本征方程

$$J_2|\xi_i^{(2)}\rangle=\xi_i^{(2)}|\xi_i^{(2)}\rangle, \tag{41}$$

解得对应的归一化本征矢分别为

$$|\xi_1^{(1)}\rangle=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix},\quad|\xi_2^{(2)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad|\xi_3^{(2)}\rangle=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -i\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}. \tag{42}$$

故

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-i\sqrt{2}&-1\\ \sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\ 1&i\sqrt{2}&-1\end{bmatrix}J_2\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&\sqrt{2}&1\\ i\sqrt{2}&0&-i\sqrt{2}\\ -1&\sqrt{2}&-1\end{bmatrix}=\hbar\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&-1\end{bmatrix}. \tag{43}$$

因此

$$U_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i&0&1\\ 0&\sqrt{2}&0\\ 1&0&i\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-i\sqrt{2}&-1\\ \sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\ 1&i\sqrt{2}&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1+i&\sqrt{2}+i\sqrt{2}&-1-i\\ 2&0&2\\ 1+i&-\sqrt{2}-i\sqrt{2}&-1-i\end{bmatrix}. \tag{44}$$

联系 G_i 和角动量算符 J_i (J_3 取对角) 的变换矩阵的物理意义: 变换矩阵对应了基的旋转操作 — 在变换前的基表示下, 角动量算符的矩阵表示为 G_i; 当进行变换矩阵对应的基旋转操作后, 得到的角动量算符的新的矩阵表示为 J_i, 其中 J_3 为对角形式. 由于仅仅是基矢的旋转, 因此虽然角动量算符在矩阵表示上有所变化, 但其基本性质 (如对易关系) 依然成立.

该有限角度的旋转可以拆解为无穷多个无穷小转动:

$$U^\dagger\boldsymbol{G}U=\lim_N(1+\hat{\boldsymbol{n}}\frac{\phi}{N})^N\times\boldsymbol{G}. \tag{45}$$

□

第 6 题 (课本习题 3.15) 得分: ________. (a) 令 $\boldsymbol{J}$ 是角动量. (它可以是轨道角动量 $\boldsymbol{L}$, 自旋 $\boldsymbol{S}$, 或 $\boldsymbol{J}_{总}$.) 利用 J_x, J_y, J_z ($J_\pm\equiv J_x\pm iJ_y$) 满足通常角动量对易关系的事实, 证明

$$\boldsymbol{J}^2=J_z^2+J_+J_--\hbar J_z.$$

(b) 利用 (a) (或其他方式) 推导出在

$$J_-\psi_{jm}=c_-\psi_{j,m-1}$$

中的系数 c_- 的 "著名" 的表达式.

证: (a)

$$式子左边=\boldsymbol{J}^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2, \tag{46}$$

$$式子右边=J_z^2+J_+J_--\hbar J_z=J_z^2+(J_x+iJ_y)(J_x-iJ_y)-i[J_x,J_y]=J_x^2+J_y^2+J_z^2. \tag{47}$$

故原式成立:

$$\boldsymbol{J}^2=J_z^2+J_+J_--\hbar J_z. \tag{48}$$

(b) 由 (a) 中的结论有

$$J_+J_- = \boldsymbol{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z, \tag{49}$$

从而

$$\begin{aligned}
|c_-|^2 =& \langle j, m-1|c_-^* c_-|j, m-1\rangle = \langle j, m-1|J_-^\dagger J_-|j, m-1\rangle = \langle j, m-1|J_+J_-|j, m-1\rangle \\
=& \langle j, m-1|\boldsymbol{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j, m-1\rangle \\
=& j(j+1)\hbar^2 - (m-1)^2\hbar^2 - (m-1)\hbar^2 \\
=& (j+m)(j-m+1)\hbar^2,
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\Longrightarrow c_- = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar. \tag{51}$$

□