3.18

对于处于 $|lm\rangle$ 态的粒子

有 $L^2|lm\rangle = l(l+1)\hbar^2|lm\rangle$ ①

$L_z|lm\rangle = m\hbar|lm\rangle$

采用升降算符 $L_\pm = L_x \pm iL_y$

有 $[L^2, L_\pm] = 0$

$[L_z, L_\pm] = \pm L_\pm\hbar$

则 $L^2L_\pm|lm\rangle = L_\pm L^2|lm\rangle = l(l+1)\hbar^2 L_\pm|lm\rangle$

$L_zL_\pm|lm\rangle = (L_\pm L_z \pm L_\pm\hbar)|lm\rangle = (m\pm1)\hbar L_\pm|lm\rangle$.

故 $L_\pm|lm\rangle = C_\pm(l,m)|lm\rangle$ ②

由升降算符定义，

$$\begin{cases} L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \\ L_y = -\frac{i}{2}(L_+ - L_-) \end{cases} ③$$

则 $\langle L_x\rangle = \langle lm|L_x|lm\rangle = \langle lm|\frac{1}{2}(L_+ + L_-)|lm\rangle$

$= \langle lm|\frac{1}{2}(|l,m+1\rangle + |l,m-1\rangle)$

$= 0$

$\langle L_y\rangle = \langle lm|L_y|lm\rangle$

$= \langle lm|\frac{(-i)}{2}(L_+ - L_-)|lm\rangle$

$= \langle lm|\frac{(-i)}{2}(C_+|l,m+1\rangle - C_-|l,m-1\rangle)$

$= 0$

其中，利用了 $\langle l'm'|lm\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$.

由于 $L_+ = L_-^+$，故由②，

$|C_+|^2 = \langle lm|L_+^+L_+|lm\rangle = \langle lm|L_-L_+|lm\rangle$ ④

$|C_-|^2 = \langle lm|L_-^+L_-|lm\rangle = \langle lm|L_+L_-|lm\rangle$

由于 $L_+L_- = L_x^2 + L_y^2 - i(L_xL_y - L_yL_x) = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$.

$L_-L_+ = L_x^2 + L_y^2 + i(L_xL_y - L_yL_x) = L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$

得

$$\begin{cases} C_+(l,m) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \\ C_-(l,m) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \end{cases} ⑤$$

则 $\langle L_x^2\rangle = \langle lm|L_xL_x|lm\rangle = \frac{1}{4}\langle lm|(C_+(l,m)C_-(l,m+1)|l,m+2\rangle + C_-(l,m)C_-(l,m-1)|l,m-2\rangle$

$+ C_+(l,m)C_-(l,m+1)|l,m\rangle + C_-(l,m)C_+(l,m-1)|l,m\rangle)$

$= \frac{1}{4}[C_+(l,m)C_-(l,m+1) + C_-(l,m)C_+(l,m-1)]$

$= \frac{1}{4}[l(l+1) - m(m+1) + l(l+1) - m(m-1)]\hbar^2$

$= \frac{1}{2}[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2]$

同理有 $\langle L_y^2\rangle = \langle lm|L_yL_y|lm\rangle$

$$= -\frac{1}{4}\langle lm|\big(C_+(l,m+1)C_+(l,m)|l,m+2\rangle + C_-(l,m)C_-(l,m-1)|l,m-2\rangle - C_+(l,m)C_-(l,m+1)|l,m\rangle - C_-(l,m)C_+(l,m-1)|l,m\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{2}\left[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2\right]$$

从经典角度，中心势 $V(r)$ 具有球对称性，

在 L^2 与 L_z 本征值分别为 $l(l+1)\hbar^2$ 与 $m\hbar$ 本征态上，态应绕 z 轴旋转对称

故对于 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ 来说，平均态 $\langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0$.

而经典下，

$$\langle L^2\rangle = \langle L_x^2\rangle + \langle L_y^2\rangle + \langle L_z^2\rangle$$

得 $\langle L_x^2\rangle + \langle L_y^2\rangle = l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2$.

又由于 L_x 与 L_y 的对称，应有 $\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle$

故 $\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{1}{2}\left[l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2\right]$.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

3.20.

旋转前，态为 $|l=2, m=0\rangle$

施加一转动，绕 y 轴转β角，

$D^{(l)}(\alpha,\beta,\gamma)=D^{(l)}(0,\beta,0)$

由于 $[L^2, L_y]=0$，故旋转后 l 不变，则对于旋转后态 $D^{(l)}(0,\beta,0)|l=2,m=0\rangle$

$\langle l=2, m=m'|D^{(l)}(0,\beta,0)|l=2,m=0\rangle = D^{(2)}_{m'0}(0,\beta,0)$ ①

为在 $m=m'$ 态上找到粒子的概率幅.

又由书中(3.6.5)式，

$D^{(l)}_{m0}(\alpha,\beta,\gamma=0)=\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}}\,Y^{*}_{lm}(\theta,\phi)\Big|_{\theta=\beta,\phi=\alpha}$ ②

联系附录 B.5 中给出的(B.5.7)式

$$\begin{cases} Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1) \\ Y_{2,\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(\sin\theta\cos\theta)e^{\pm i\phi} \\ Y_{2,\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}(\sin^2\theta)e^{\pm 2i\phi} \end{cases}$$ ③

将③代入②，则旋转后在 $m=m'$ 态上找到新态的概率为

$m'=0$ $P(m'=0)=|D^{(2)}_{00}(0,\beta,0)|^2=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\beta-1)\right|^2=\frac{1}{4}(3\cos^2\beta-1)^2$

$m'=\pm1$ $P(m'=\pm1)=|D^{(2)}_{\pm1 0}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|^2=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\beta\cos\beta\right|^2=\frac{3}{2}\sin^2\beta\cos^2\beta=\frac{3}{8}\sin^2(2\beta)$

$m'=\pm2$ $P(m'=\pm2)=|D^{(2)}_{\pm2 0}(\alpha=0,\beta,\gamma=0)|^2=\left|\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\beta\right|^2=\frac{3}{8}\sin^4\beta$

经验证，五个概率相加为一，符合预期.

3.24.

首先，对于 $J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$ 本征态 $|j_1j_2m_1m_2\rangle$ 有

$$J_1^2|j_1j_2m_1m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar|j_1j_2m_1m_2\rangle$$
$$J_2^2|j_1j_2m_1m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar|j_1j_2m_1m_2\rangle$$
$$J_{1z}|j_1j_2m_1m_2\rangle = m_1\hbar|j_1j_2m_1m_2\rangle$$
$$J_{2z}|j_1j_2m_1m_2\rangle = m_2\hbar|j_1j_2m_1m_2\rangle$$

而对于 J^2, J_z, J_{1z}, J_{2z} 本征态 $|j_1j_2jm\rangle$ 有

$$J^2|j_1j_2jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|j_1j_2jm\rangle \qquad J_{1z}|j_1j_2jm\rangle = m_1\hbar|j_1j_2jm\rangle$$
$$J_z|j_1j_2jm\rangle = m\hbar|j_1j_2jm\rangle \qquad J_{2z}|j_1j_2jm\rangle = m_2\hbar|j_1j_2jm\rangle$$

由于题目中给定了 $j_1=1$，$j_2=1$，省略 j_1j_2，只用 $|m_1m_2\rangle$ 与 $|jm\rangle$ 表示两套本征态.

有 $J_z = J_{1z}+J_{2z}$ $J^2=(J_1+J_2)^2$，$j=2,1,0$

用 $\pm$，0 表示 m_1 或 $m_2=\pm1, 0$，用 2,1,0，与 $\pm2, \pm1, 0$ 表示 j 或 m.

对于 $\langle m_1m_2|jm\rangle$，要求 $m=m_1+m_2$，否则其为0.

故 $j=2$ 时，对 $|2,2\rangle$ 与 $|2,-2\rangle$ 来说，只有 $|++\rangle$ 与 $|--\rangle$ 与其内积不为0

因此 $|2,2\rangle = |++\rangle$ ①

$|2,-2\rangle = |--\rangle$

利用升降算符，$J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j,m\pm1\rangle$

而 $J_\pm = J_{1\pm}+J_{2\pm}$，则对 $|2,2\rangle$，有

$$J_-|2,2\rangle = \sqrt{(2+2)(2-2+1)}\,|2,1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|0+\rangle + \sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|+0\rangle$$

即 $|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle + |+0\rangle)$ ②

对 $|2,-2\rangle$，有

$$J_+|2,-2\rangle = \sqrt{(2+2)(2-2+1)}\,|2,-1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|0-\rangle + \sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|-0\rangle$$

即 $|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle + |-0\rangle)$ ③

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

对 $|2,1\rangle$，继续施加下降算符，有

$$J_-|2,1\rangle=\sqrt{(2+1)(2-1+1)}\,|2,0\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\Big(\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|-+\rangle+\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|00\rangle+\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|00\rangle+\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|+-\rangle\Big)$$

即 $|2,0\rangle=\frac{1}{\sqrt6}\left(|-+\rangle+2|00\rangle+|+-\rangle\right)$ ④

至此，$J=2$ 的情况讨论完毕。对于 $J=1$，

对于 $|1,1\rangle$，$m=1$，因此与其对应的 $m_1+m_2=1$

由于 $m_1=0,1,-1$，$m_2=0,1,-1$，因此只有 $m_1=0,m_2=1$ 或 $m_1=1,m_2=0$ 的情况。

设 $|1,1\rangle=a|0+\rangle+b|+0\rangle$，$|a|^2+|b|^2=1$

由②，$\langle 2,1|1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(a+b)=0$. $a=-b$.

故取 $|1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\left(-|0+\rangle+|+0\rangle\right)$ ⑤

由⑤，

$$J_-|1,1\rangle=\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\Big(-\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|-+\rangle+\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|00\rangle-\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|00\rangle+\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|+-\rangle\Big)$$

即 $|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\left(-|-+\rangle+|+-\rangle\right)$ ⑥

$$J_-|1,0\rangle=\sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|1,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\Big(\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|0-\rangle-\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|-0\rangle\Big)$$

即 $|1,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\left(-|-0\rangle+|0-\rangle\right)$ ⑦.

至此，$J=1$ 的情况讨论完毕。

对于 $J=0$，m 只能取 0，因此 $m_1+m_2=0$ 的项才会有不为 0 的交叠。

故设 $|00\rangle=\alpha|+-\rangle+\beta|-+\rangle+\gamma|00\rangle$. $|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2=1$.

由④，⑥.

$\langle 2,0|00\rangle=\frac{1}{\sqrt6}(\alpha+\beta+2\gamma)=0$

$\langle 1,0|00\rangle=\frac{1}{\sqrt2}(-\beta+\alpha)=0$.

故取 $|00\rangle=\frac{1}{\sqrt3}\left(|+-\rangle-|00\rangle+|-+\rangle\right)$ ⑧

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

综合①~⑧式，有

$|2,2\rangle = |++\rangle$

$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle + |+0\rangle)$

$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|+-\rangle + 2|00\rangle + |-+\rangle)$

$|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle + |-0\rangle)$

$|2,-2\rangle = |--\rangle$

$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+0\rangle - |0+\rangle)$

$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$

$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle - |-0\rangle)$

$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+-\rangle - |00\rangle + |-+\rangle)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

3.23.

对 K_+，K_-，有公式(3.9.5)给出，

$$K_+|n_+,n_-\rangle = a_+^\dagger a_-^\dagger|n_+,n_-\rangle = \sqrt{(n_++1)(n_-+1)}\,|n_++1,n_-+1\rangle$$
$$K_-|n_+,n_-\rangle = a_+a_-|n_+,n_-\rangle = \sqrt{n_+n_-}\,|n_+-1,n_--1\rangle \quad ①$$

将 spin-1/2 粒子的自旋向上($m=\frac{1}{2}$)与一单位的加号振子联系起来，同理将 $m=-1/2$ 与减号振子联系，做代换

$$n_+\to j+m \qquad n_-\to j-m.$$

即 $j=\frac{(n_++n_-)}{2}$，$m=\frac{(n_+-n_-)}{2}$

则 $n_+\to n_++1$，$n_-\to n_-+1$ 变换下，$j\to j+1$，$m\to m$.

$n_+\to n_+-1$，$n_-\to n_--1$ 变换下，$j\to j-1$，$m\to m$.

可将①式写为

$$K_+|j,m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}\,|j+1,m\rangle \quad ②$$
$$K_-|j,m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m)}\,|j-1,m\rangle$$

由②式可见，K_+ 与 K_- 的物理意义为 j 的升降算符.

而在 K_+，K_- 作用下，$j=\frac{n_++n_-}{2}$ 变化，意味着 spin-1/2 粒子数 n_++n_- 发生变化

$K_\pm$ 矩阵元可由②写出，

$$\langle j',m'|K_+|j,m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}\,\delta_{j',j+1}\delta_{mm'}$$

$$\langle j',m'|K_-|j,m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m)}\,\delta_{j',j-1}\delta_{mm'}$$