5.29 考虑由两个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子组成的复合系统。在 $t<0$ 时，哈密顿量不依赖于自旋，并能通过恰当地调整能标使其为零。在 $t>0$ 时，哈密顿量由

$$H=\left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right)\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$$

给出。假定在 $t<0$ 时，系统处于 $|+-\rangle$ 态。作为时间的函数，找出它处于如下几个态：$|++\rangle$，$|+-\rangle$，$|-+\rangle$ 和 $|--\rangle$ 中的每一个态的概率。

(a) 通过精确地求解这个问题。

(b) 通过在下面的条件下求解这个问题：假设一级时间相关微扰论是有效的，而 H 作为微扰在 $t=0$ 时加入。在什么条件下 (b) 给出正确的结果？

解: (a) $|+-\rangle$ 不是算符 $\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$ 的本征态，因此在 $H\propto\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$ 的时间演化中 $|+-\rangle$ 会演化至其他的几个态。由于

$$\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S}^2-\boldsymbol{S}_1^2-\boldsymbol{S}_2^2\right)\tag{1}$$

因此在耦合表象下考虑这个问题。在耦合表象下有

$$|+-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle+|10\rangle\right)\tag{2a}$$

$$\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=-\frac{3\hbar^2}{4}|00\rangle\langle 00|+\frac{\hbar^2}{4}\left(|11\rangle\langle 11|+|10\rangle\langle 10|+|1,-1\rangle\langle 1,-1|\right)\tag{2b}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(t,t_0)&=\exp\left(\frac{\mathrm{i}H(t-t_0)}{\hbar}\right)\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\Delta t/\hbar}|00\rangle\langle 00|+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t/\hbar}\left(|11\rangle\langle 11|+|10\rangle\langle 10|+|1,-1\rangle\langle 1,-1|\right)\end{aligned}\tag{2c}$$

因此态矢 $|+-\rangle$ 随时间的演化为

$$\begin{aligned}|\psi,t\rangle=\mathscr{U}(t,0)|+-\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\Delta t/\hbar}|00\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t/\hbar}|10\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\Delta t/\hbar}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t/\hbar}\right)|+-\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\Delta t/\hbar}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t/\hbar}\right)|-+\rangle\end{aligned}\tag{3}$$

故处于各态的概率将为

$$\begin{aligned}P_{++}&=P_{--}=0\\P_{+-}&=|\langle +-|\psi,t\rangle|^2=2\cos^2\frac{2\Delta t}{\hbar}\\P_{-+}&=|\langle -+|\psi,t\rangle|^2=2\sin^2\frac{2\Delta t}{\hbar}\end{aligned}$$

(b) 将

$$H=\frac{4\Delta}{\hbar^2}\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2\tag{4}$$

作为微扰时，无微扰哈密顿量

$$H_0=0\tag{5}$$

故

$$V_I=H=\frac{4\Delta}{\hbar^2}\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2\tag{6}$$

由一级含时微扰可知

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^\tau \mathrm{d}\tau\ \langle n|H|+-\rangle \tag{7}$$

由式(2b)可知在非耦合表象下

$$\begin{aligned} H = {} & \Delta\left(|{+}{+}\rangle\langle{+}{+}| + |{-}{-}\rangle\langle{-}{-}|\right) \\ & - \Delta\left(|{+}{-}\rangle\langle{+}{-}| + |{-}{+}\rangle\langle{-}{+}|\right) + 2\Delta\left(|{+}{-}\rangle\langle{-}{+}| + |{-}{+}\rangle\langle{+}{-}|\right) \end{aligned} \tag{8}$$

也就是说

$$c_{++}^{(1)}(t) = c_{--}^{(1)}(t) = 0 \tag{9a}$$

$$c_{-+}^{(1)}(t) = -\frac{2\mathrm{i}\Delta t}{\hbar} \tag{9b}$$

因此在每个态上的概率为

$$P_{++} = P_{--} = 0 \tag{10a}$$

$$P_{-+} = \left|c_{-+}^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{4\Delta^2 t^2}{\hbar^2} \tag{10b}$$

$$P_{+-} = 1 - P_{++} - P_{--} - P_{-+} = 1 - \frac{4\Delta^2 t^2}{\hbar^2} \tag{10c}$$

式(10)只有在 H 可以视为微扰时才成立，也就是说只有在时间尺度

$$t \ll \frac{\hbar}{\Delta}$$

下才成立。

5.30 考虑一个 $E_1 < E_2$ 的双能级系统，存在一个时间相关的势，它以如下方式联系着这两个能级：

$$V_{11} = V_{22} = 0,\quad V_{12} = \gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\quad V_{21} = \gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\quad (\gamma\text{为实数})$$

已知在 $t = 0$ 时，只有较低的能级被占据，即 $c_1(0) = 1$，$c_2(0) = 0$。

(a) 通过精确求解耦合微分方程

$$i\hbar\dot{c}_k = \sum_{n=1}^{2} V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} c_n,\quad (k = 1, 2)$$

求 $t > 0$ 时的 $|c_1(t)|^2$ 和 $|c_2(t)|^2$。

(b) 使用时间相关的微扰论到最低的非零级求解同样的问题。比较小 γ 值时的两种近似的解。分别处理下列两种情况：(i) ω 与 ω_{21} 的差别非常大；(ii) ω 接近 ω_{21}

解: (a) 耦合方程给出

$$\mathrm{i}\hbar\dot{c}_1 = \gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{21}t} c_2 \tag{11a}$$

$$\mathrm{i}\hbar\dot{c}_2 = \gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{21}t} c_1 \tag{11b}$$

其中 $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$。在(11b)式两边求导得到

$$\ddot{c}_2 = -\frac{\gamma^2}{\hbar^2} c_2 - \mathrm{i}(\omega - \omega_{21})\dot{c}_2 \tag{12}$$

式(12)是一个二阶常系数齐次线性方程，可以写出通解

$$c_2 = A\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega-\omega_{21}+\sqrt{(\omega-\omega_{21}^2)+4\gamma^2/\hbar^2}}{2}\right)+B\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega-\omega_{21}-\sqrt{(\omega-\omega_{21}^2)+4\gamma^2/\hbar^2}}{2}\right) \tag{13}$$

通解(13)应当满足边界条件

$$c_2(0)=0 \tag{14a}$$

$$\dot{c}_2(0)=-\frac{\mathrm{i}\gamma}{\hbar}c_1(0)=-\frac{\mathrm{i}\gamma}{\hbar} \tag{14b}$$

解出 A 与 B 的关系可以得到

$$c_2(t)=\frac{\mathrm{i}\gamma}{\hbar}\frac{2}{\sqrt{(\omega-\omega_{21}^2)+4\gamma^2/\hbar^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_{21})t}\sin\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}+\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}}t \tag{15}$$

因此

$$|c_2(t)|^2=\frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2+(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}+\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}}t \tag{16a}$$

$$|c_1(t)|^2=1-|c_2(t)|^2 \tag{16b}$$

(b) 在一级含时微扰下

$$\begin{aligned} c_2^{(1)}(t) &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}\tau\,\langle 2|V_I|1\rangle \\ &= \frac{\gamma}{\hbar}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_{21})t}-1}{\omega-\omega_{21}}\left|c_2^{(1)}(t)\right|^2 \qquad = \frac{\gamma^2}{\hbar^2}\frac{2-2\cos(\omega-\omega_{21})t}{(\omega-\omega_{21})^2} && (17\text{a}) \\ &= \frac{\gamma^2/\hbar^2}{(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\frac{\omega-\omega_{21}}{2}t && (17\text{b}) \end{aligned}$$

在

(i) ω 与 ω_{21} 的区别非常大时，由精确解(16)给出

$$\begin{aligned} |c_2(t)|^2 &= \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2+(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}+\frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}}t \\ &\approx \frac{\gamma^2/\hbar^2}{(\omega-\omega_{21})^2/4}\sin^2\frac{\omega-\omega_{21}}{2}t && (16') \end{aligned}$$

近似式(16′)与微扰论得到的结果(17b)保持一致。

(ii) ω 接近 ω_{21} 时，由(17b)式可以知道

$$|c_2(t)|^2\approx\frac{\gamma^2}{\hbar^2}t^2 \tag{18}$$

可见系统跃迁到能级 E_2 的概率随时间平方增加。

5.35 考虑由一个电子与一个单电荷 ($Z=1$) 氚核 (^{3}H) 组成的原子。开始系统处于基态 ($n=1$，$l=0$)。假如系统经受 β 衰变，原子核的电荷突然增加了一个单位（实际上发射出一个电子和一个反中微子），这意味着氚原子核（称为氚核）转变成一个质量为 3(^{3}He) 的氦 ($Z=2$) 原子核。

(a) 求系统处于产生的氦离子基态的概率。氢的波函数由

$$\psi_{n=1,l=0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

给出

(b) 氚 β 衰变中可用的能量约为 18 keV. 且^{3}He 原子的尺度约为 1Å。检查跃迁的时间标度 T 满足瞬变近似合理性的判据。

解: (a) 原子核电荷突然增加，系统仍处于氢原子基态。系统态矢与氦原子基态的内积因而为

$$\begin{aligned}\langle 0_{\mathrm{H}}|0_{\mathrm{He}}\rangle &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2^{\frac{3}{2}}}{a_0^3}\mathrm{e}^{-\frac{3r}{a_0}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{a_0^3}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}r\, r^2\mathrm{e}^{-3r/a_0} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{27}\end{aligned} \tag{19}$$

因此系统处于氦离子基态的概率为

$$P = |\langle 0_{\mathrm{H}}|0_{\mathrm{He}}\rangle|^2 \approx 0.702 \tag{20}$$

(b) 氦离子的基态能量为

$$E_{\mathrm{He}} = \frac{4}{E_{\mathrm{H}}} = -54.4\,\mathrm{eV} \tag{21}$$

因此这一跃迁具有能量差

$$\Delta E = 40.8\,\mathrm{eV} \tag{22}$$

这一跃迁的时间标度为

$$T = \frac{\hbar}{\Delta E} \sim 10^{-15}\,\mathrm{s} \tag{23}$$

同时，β 衰变中释放的电子大约具有速度 $0.2c$，电子溢出 He 原子大约需要

$$\Delta t = \frac{10^{-10}}{0.2\times 3\times 10^8}\,\mathrm{s} \sim 10^{-18}\,\mathrm{s} \tag{24}$$

可以看到系统态矢发生变化的时间 $\Delta t \ll T$，因此瞬变近似可以合理使用。

5.38 一个氢原子的基态 ($n=1, l=0$) 受到一个如下的一个时间相关势

$$V(\boldsymbol{x},t) = V_0\cos(kz-\omega t)$$

的作用。使用时间相关微扰论，求动量 $\boldsymbol{p}$ 的电子被发射出来的跃迁速率的表达式。特别要证明如何计算放射出电子的角分布 (借助相对于 z 轴定义的 θ 和 φ 角)。简要地讨论这个问题与（更实际一些）光电效应的相似性和不同处。（注意：初始波函数可参见习题 5.35。如果有归一化问题，最终的波函数可以取为

$$\psi_f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{L^{3/2}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}$$

L 非常大，但应能够证明可观测的效应是不依赖于 L 的。）

解: 题设微扰可以写为

$$V(\boldsymbol{x},t)=\frac{V_0}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+\omega t)}\right) \tag{25}$$

可以看出(25)是一个谐波微扰。电子由初态 $|i\rangle$ 跃迁到由 $\boldsymbol{p}$ 标记的末态 $|\boldsymbol{p}\rangle$ 的跃迁振幅由

$$c_{\boldsymbol{p}}(t)=\langle\boldsymbol{p}|U_I(t)|i\rangle \tag{26}$$

决定，将 V 视为微扰，可以写出一级近似

$$c_{\boldsymbol{p}}^{(1)}(t)=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\boldsymbol{p}|\int_0^t\mathrm{d}\tau V_I(\tau)|i\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t\mathrm{d}\tau\,(\mathscr{V}_{\boldsymbol{p},i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}+\mathscr{V}_{\boldsymbol{p},i}^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{p}i}\tau} \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\boldsymbol{p},i}&=\langle\boldsymbol{p}|\frac{V_0}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}|i\rangle\\ \omega_{\boldsymbol{p},i}&=\frac{E_{\boldsymbol{p}}-E_i}{\hbar}\end{aligned}$$

最终可以得到跃迁速率

$$w_{i\to\boldsymbol{p}}=\frac{2\pi}{\hbar}\overline{|\mathscr{V}_{\boldsymbol{p},i}|^2}\delta(E_{\boldsymbol{p}}-E_i\pm\hbar\omega) \tag{28}$$

接下来计算矩阵元 $\mathscr{V}_{\boldsymbol{p},i}$

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\boldsymbol{p},i}&\propto\int\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\mathrm{e}^{-r/a_0}\\ &=\int\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{-r/a_0}\end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\boldsymbol{q}=-k\hat{\boldsymbol{z}}+\boldsymbol{p}/\hbar$。式(29)具有 Fourier 变换 $\mathscr{F}\{\mathrm{e}^{-r/a_0}\}$ 的形式，因此可以得到

$$\mathscr{V}_{\boldsymbol{p},i}\propto\frac{1}{(1+a_0^2q^2)^2}=\frac{1}{\left(1+a_0^2\left(\frac{p^2}{\hbar^2}+k^2-2\frac{pk}{\hbar}\cos\theta\right)\right)^2} \tag{30}$$

故角分布

$$f(\Omega)\propto\frac{1}{\left(\hbar^2+a_0^2p^2+\hbar^2k^2-2p\hbar k\cos\theta\right)^4} \tag{31}$$

5.39 约束在一维运动的一个质量为 m 的粒子，被一个无限深势阱

$$\begin{cases}V=\infty & \text{对}\quad x<0,x>L\\ V=0 & \text{对}\quad 0\leqslant x\leqslant L\end{cases}$$

禁闭在 $0<x<L$ 的范围中。求在高能情况下，作为 E 的函数的态密度表达式（即单位能量间隔中的态的数目）。（检查你的量纲！）

解: 一维无限深势阱的本征解为

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L},\ E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{32}$$

处在能量间隔 $E\sim E+\mathrm{d}E$ 范围内的能级 n 满足

$$E<E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}<E+\mathrm{d}E \tag{33}$$

即

$$\frac{a\sqrt{2mE}}{\pi\hbar} < n < \frac{a\sqrt{2mE}}{\pi\hbar}\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}E}{E}} \approx \frac{a\sqrt{2mE}}{\pi\hbar}\left(1+\frac{\mathrm{d}E}{2E}\right) \tag{33'}$$

因此处于能量间隔 $E \sim E + \mathrm{d}E$ 内的能级共有

$$g(E)\,\mathrm{d}E = \frac{a\sqrt{2mE}}{\pi\hbar}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{2E} \tag{34}$$

个，即态密度

$$g(E) = \frac{a\sqrt{m}}{2\pi\hbar}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}} \tag{35}$$

(35)式右侧涉及到各量的量纲为

$$\begin{aligned} [a] &= L \quad [m] = M \\ [\hbar] &= L^2MT^{-1} \\ [E] &= L^2MT^{-2} \end{aligned}$$

因此，结合起来可以得到态密度 (35) 的量纲为

$$[g(E)] = L^{-2}M^{-1}T^2 = [E]^{-1} \tag{36}$$

恰好是 E 的量纲的倒数，符合对态密度的定义。