习题 VIII

截止时间：2021. 4. 27（周二）

姓名：陈 稼 霖
学号：45875852
成绩：________

第 1 题 得分: ________. Liouville 定理的另一种证法：令 ω_t 为某一组系统在时间 t 占据的相空间体积. 用正则运动方程证明：

$$\frac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t}=0$$

提示：考虑 $\omega_{t+\mathrm{d}t}-\omega_t$.

证: 设系统的广义坐标为 $\{q_a\}$，广义动量为 $\{p_a\}$. 某组系统在时间 t 占据的的相空间体积为

$$\omega_t=\int\prod_a \mathrm{d}q_a\mathrm{d}p_a. \tag{1}$$

从时间 t 到时间 $t+\mathrm{d}t$，发生如下演化：

$$q_a'=q_a+\dot{q}_a\mathrm{d}t \tag{2}$$
$$p_a'=p_a+\dot{p}_a\mathrm{d}t. \tag{3}$$

该组系统在时间 $t+\mathrm{d}t$ 占据的相空间的体积为

$$\omega_{t+\mathrm{d}t}=\int\prod_a \mathrm{d}q_a'\mathrm{d}p_a'=\int\prod_a J\,\mathrm{d}q_a\mathrm{d}p_a, \tag{4}$$

其中雅可比行列式

$$J=\left|\frac{\partial(q_1',\cdots;p_1',\cdots)}{\partial(q_1,\cdots;p_1,\cdots)}\right|=\prod_a\left(1+\frac{\partial\dot{q}_a}{\partial q_a}\right)\left(1+\frac{\partial\dot{p}_a}{\partial p_a}\right)+O(t^2)=1+\sum_a\left(\frac{\partial\dot{q}_a}{\partial q_a}+\frac{\partial\dot{p}_a}{\partial p_a}\right)t+O(t^2). \tag{5}$$

将哈密顿方程代入上式得

$$J=1+O(t^2). \tag{6}$$

从而

$$\omega_{t+\mathrm{d}t}=[1+O(t^2)]\omega_t, \tag{7}$$
$$\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\frac{\omega_{t+\mathrm{d}t}-\omega_t}{\mathrm{d}t}=0. \tag{8}$$

□

第 2 题 得分: ________. 体积为 V 的容器盛有分子数密度为 ρ 的气体. 假设各分子独立地随机运动.

(1) 证明在容器内一小体积 $v\ll V$ 内出现 n 个分子的几率 P_n 近似地由 Poisson 分布给出，即

$$P_n=\frac{1}{n!}(\rho v)^n e^{-\rho v}.$$

(2) 如果 $\rho=2.5\times 10^{19}\ \mathrm{cm}^{-3}$，试估计当 $v=1\ \mathrm{nm}^3$ 和 $v=1\ \mathrm{cm}^3$ 时 v 内无分子的几率.

解: (1) 某个分子在容器内一小体积 $v\ll V$ 内出现的几率为

$$\frac{v}{V}, \tag{9}$$

而不在这一小体积中出现的几率为

$$1-\frac{v}{V}. \tag{10}$$

在容器内一小体积 $v \ll V$ 内出现 n 个分子的几率为

$$P_n = \binom{\rho V}{n} \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{\rho V - n}. \tag{11}$$

当 $\rho V \to \infty$ 时，

$$P_n \approx \frac{\binom{\rho V}{n}}{(\rho V)^n} (\rho v)^n \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{\rho v \frac{V}{v}}. \tag{12}$$

且在 $\rho V \to \infty$ 极限下，

$$\frac{\binom{\rho V}{n}}{(\rho V)^n} \to \frac{1}{n!}, \tag{13}$$

且

$$\left(1 - \frac{v}{V}\right)^{\frac{V}{v}} \to e^{-1}, \tag{14}$$

故

$$P_n \approx \frac{1}{n!} (\rho v)^n e^{-\rho v}. \tag{15}$$

(2) 若 $\rho = 2.5 \times 10^{25}\ \mathrm{cm}^{-3}$，当 $v = 1\ \mathrm{nm}^3$ 时，

$$P_0 = e^{-\rho v} = e^{-2.5 \times 10^{16}} \approx 0. \tag{16}$$

当 $v = 1\ \mathrm{cm}^3$ 时，

$$P_0 = e^{-\rho v} = e^{-2.5 \times 10^{19}} \approx 0. \tag{17}$$

□