课件 9 第2题：

一稀薄气体处于外力场内，相应的势能为$V(\vec{r})$。 假设$V(\vec{r})$ 在分子相互作用力程范围内的变化很小，求出Boltzmann 方程的近似解并用平均数密度 n, 平均动量 $\vec{p}_0$和 $\vec{p}_0 = 0$ 时的平均动能表示所得的解。

解：先考虑 $\vec{p}_0 = 0$ 的情况。

由于势能 $V(\vec{r})$ 在碰撞过程中可视为常数， 下列形式的分布函数

$$f(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\rho(\vec{r})}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}}$$

使得 Boltzmann 方程的碰撞项为零，即

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll.}} = 0$$

下面考虑对流项

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{conv.}} = -\left(\frac{\vec{p}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}} + \vec{F}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{p}}\right) f(\vec{r},\vec{p}) = -\frac{1}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{m}\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{mkT}\vec{p}\cdot\vec{\nabla}V\rho\right) e^{-\frac{p^2}{2mkT}}$$

其中用到了 $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$。因此

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{conv.}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho(\vec{r}) = Ce^{-\frac{V(\vec{r})}{kT}}$$

$$f(\vec{r},\vec{p})=\frac{C}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{kT}\left[\frac{p^2}{2m}+V(\vec{r})\right]}$$

其中常数 C 由归一化条件

$$\int f(\vec{r},\vec{p};t)d^3\vec{r}d^3\vec{p}=N$$

定出。

如果平均动量非零，作伽利略变换

$$\vec{p}\to\vec{p}-\vec{p}_0 \qquad \vec{r}\to\vec{r}-\frac{1}{m}\vec{p}_0t \qquad V(\vec{r})\to V\left(\vec{r}-\frac{1}{m}\vec{p}_0t\right)$$

$$f(\vec{r},\vec{p})\to f(\vec{r},\vec{p};t)=\frac{\rho\left(\vec{r}-\frac{1}{m}\vec{p}_0t\right)}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2mkT}(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{r},\vec{p};t)+\left(\frac{\vec{p}}{m}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}+\vec{F}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{p}}\right)f(\vec{r},\vec{p};t)=0$$

$$f(\vec{r},\vec{p}_1',t)f(\vec{r},\vec{p}_2',t)-f(\vec{r},\vec{p},t)f(\vec{r},\vec{p}_2,t)=0$$

Boltzmann 方程仍然成立。

X. 1 李政道书 194 页第12题

解：把 Ising 模型的能量写为

$$U_I = \sum_l \left[\left(N_{\uparrow\uparrow}^l + N_{\downarrow\downarrow}^l\right)\varepsilon_l(\uparrow\uparrow) + N_{\uparrow\downarrow}^l \varepsilon_l(\uparrow\downarrow)\right] - \mu H(N_\uparrow - N_\downarrow)$$

其中 $N_{\uparrow\uparrow}^l\left(N_{\uparrow\downarrow}^l\right)$ 为自旋平行（反平行）的第 l 近邻对数。

下列关系对于第 l 近邻仍适用：

$$2N_{\uparrow\uparrow}^l + N_{\uparrow\downarrow}^l = n_l N_\uparrow$$
$$2N_{\downarrow\downarrow}^l + N_{\uparrow\downarrow}^l = n_l N_\downarrow$$

用 $N_\uparrow$ 和 $N_{\uparrow\uparrow}^l$ 表示的能量为

$$U_I = 2\sum_l N_{\uparrow\uparrow}^l[\varepsilon_l(\uparrow\uparrow) - \varepsilon_l(\uparrow\downarrow)] + N_\uparrow\left\{\sum_l n_l[\varepsilon_l(\uparrow\downarrow) - \varepsilon_l(\uparrow\uparrow)] - 2\mu H\right\}$$
$$+\mathcal{N}\mu H + \frac{1}{2}\mathcal{N}\sum_l n_l \varepsilon_l(\uparrow\uparrow)$$

由此可得 Ising 模型与具有第 l 近邻作用的格气的配分函数。

XI. 2 李政道书 194 页第13题：
解：书上（3.130）式的 y 不同于格气巨配分函数中的 y， 暂且记作 η 以便区分。而这里的 N等同于格气的 $\mathcal{N}$。根据表 3.2 的对应

$$\eta^2 = ye^{-\frac{4\varepsilon}{kT}} \equiv z \tag{1}$$

一维格气的巨配分函数为

$$\mathcal{Q} = e^{\frac{\mathcal{N}\varepsilon}{kT}}\eta^{\mathcal{N}}\left(\lambda_+^{\mathcal{N}} + \lambda_-^{\mathcal{N}}\right) \tag{2}$$

其中

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[x\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) \pm \sqrt{x^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2 + \frac{4}{x^2}}\right]$$

$$\eta\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[x(\eta^2 + 1) \pm \sqrt{x^2(\eta^2 - 1)^2 + \frac{4}{x^2}\eta^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x(z + 1) \pm \sqrt{x^2(z - 1)^2 + \frac{4}{x^2}z}\right]$$

设想把（2）式中的 $\mathcal{N}$ 次方用二项式定理展开，则带根号的项在（2）式中相消。因此（2）是一个 z 的 $\mathcal{N}$ 次多项式，也是 y 的 $\mathcal{N}$ 次多项式，故应有 $\mathcal{N}$ 个根。

$$\mathcal{Q} = 0 \Leftrightarrow \lambda_+ = \omega\lambda_-$$

其中 ω 为 -1 的 $\mathcal{N}$ 次方根，共有 $\mathcal{N}$ 个。于是

$$x(z+1)+\sqrt{x^2(z-1)^2+\frac{4}{x^2}z}=\omega\left[x(z+1)-\sqrt{x^2(z-1)^2+\frac{4}{x^2}z}\right]$$

$$x(z+1)=-\frac{1+\omega}{1-\omega}\sqrt{x^2(z-1)^2+\frac{4}{x^2}z} \qquad (3)$$

令 $\omega=e^{2i\theta}$, 则

$$-\frac{1+\omega}{1-\omega}=-i\cot\theta$$

（3）式两边平方并整理得二次方程

$$z^2+2bz+1=0 \qquad (4)$$

$$b=1-\frac{2\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$$

由此可证：

- 当 $x>1$ 即 $u<0,\ b<1,$ 方程（4）有一对共轭复根。由于两根乘积为1，故这两根必在单位圆上。
- 当 $x<1,$ 即 $u>0, b>1,$ 方程（4）两个根都在负实轴上。

$\mathcal{N}$ 个不同的 ω 似乎给出 $2\mathcal{N}$ 个根，但方程（4）在 $\theta\to-\theta$ 下对称，故实际上只有 $\mathcal{N}$ 个根。由（1）式可推得 根在 y –平面的位置。

$x>1$ 情况下的结论可推广到任意维度。

课件14第2题：

$$\psi_s(\vec{r}) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p},s}\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

$$\psi_s^\dagger(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p},s}^\dagger\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

$$K = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p},\vec{p}',s} \frac{p^2}{2m} a_{\vec{p}',s}^\dagger a_{\vec{p},s} \int d^3\vec{r}\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{p},s} \frac{p^2}{2m} a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s}$$

$$\Omega = \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_1',\vec{p}_2',s_1,s_2} a_{\vec{p}_1',s_1}^\dagger a_{\vec{p}_2',s_2}^\dagger a_{\vec{p}_2,s_2}\, a_{\vec{p}_1,s_1} \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2\, e^{\frac{i}{\hbar}[(\vec{p}_1-\vec{p}_1')\cdot\vec{r}_1+(\vec{p}_2-\vec{p}_2')\cdot\vec{r}_2]} u(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$$

令

$$\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2) \qquad \vec{r} = \vec{r}_1-\vec{r}_2$$

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{2}\vec{q}-\vec{p} \qquad \vec{p}_2 = \frac{1}{2}\vec{q}+\vec{p}$$

$$\vec{p}_1{}' = \frac{1}{2}\vec{q}-\vec{p}\,' \qquad \vec{p}_2{}' = \frac{1}{2}\vec{q}+\vec{p}'$$

$$\Omega = \frac{1}{2V^2} \sum_{\vec{q},\vec{p},\vec{p}',s,s'} a^{\dagger}_{\frac{\vec{q}}{2}-\vec{p}\prime,s\prime} a^{\dagger}_{\frac{\vec{q}}{2}+\vec{p}\prime,s} a_{\frac{\vec{q}}{2}+\vec{p},s} a_{\frac{\vec{q}}{2}-\vec{p},s\prime} \int d^3\vec{R} d^3\vec{r}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}\prime)\cdot\vec{r}} u(r)$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_{\vec{q},\vec{p},\vec{p}',s,s'} u_{\vec{p}-\vec{p}'} a^{\dagger}_{\frac{\vec{q}}{2}-\vec{p}\prime,s\prime} a^{\dagger}_{\frac{\vec{q}}{2}+\vec{p}\prime,s} a_{\frac{\vec{q}}{2}+\vec{p},s} a_{\frac{\vec{q}}{2}-\vec{p},s\prime}$$

其中

$$u_{\vec{p}-\vec{p}'} = \int d^3\vec{r}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}\prime)\cdot\vec{r}} u(r)$$

$$\mathcal{H} = K + \Omega$$