习题 XIII

截止时间：2021. 6. 2（周二）

姓名：陈 稼 霖
学号：45875852
成绩：________

第 1 题 得分: ________. 考虑硬球势

i) 证明两体散射的 s 波的相移为

$$\delta_0(k) = -ka$$

其中 a 为硬球直径.

ii) 证明对于自旋为零的 Bose 气体

$$b_2 = \frac{1}{\lambda^3}\left[2^{-5/2} - \frac{2a}{\lambda} + O\left(\frac{a^5}{\lambda^5}\right)\right]$$

提示：对于硬球散射，轨道角动量为 l 的相移的低能行为是

$$\delta_l(k) \sim (ka)^{2l+1}.$$

解: i) 两体散射体系的哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r), \tag{1}$$

其中直径为 a 的硬球势为

$$U(r) = \begin{cases} +\infty, & r \le a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \tag{2}$$

设

$$V(r) = \frac{2m}{\hbar^2}U(r), \tag{3}$$

则薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(r)\psi = E\psi, \tag{4}$$

化为

$$\nabla^2\psi + [k^2 - V(r)]\psi = 0. \tag{5}$$

取沿粒子入射方向且通过散射中心的轴线为 z 轴，对 s 波，薛定谔方程的通解写为

$$\psi(r,\theta) = \sum_l R_l(r)P_l(\cos\theta) \tag{6}$$

其径向波函数满足

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l}{\mathrm{d}r}\right) + \left[k^2 - V(r) - \frac{l(l+1)}{r}^2\right]R_l(r) = 0 \tag{7}$$

令 $R_l(r) = \frac{U_l(r)}{r}$，代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}^2U_l}{\mathrm{d}r^2} + \left[k^2 - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]U_l(r) = 0 \tag{8}$$

对 s 波，$l=0$，在 $r > a$ 处上述方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2U_l}{\mathrm{d}r^2} + k^2U_l(r) = 0, \quad r > a \tag{9}$$

其解为

$$U_l(r)=A_0\sin\left(kr+\delta_0\right),\quad r>a. \tag{10}$$

而在 $r\leq a$ 处，由于势能无穷大，故 $\psi=0$，即 $R_0(r)=0$，从而 $U_0(r)=0$. 由于 $R_0(r)$ 在 $r=a$ 处连续，因此 $U_0(r)$ 在 $r=a$ 处连续，即

$$A\sin\left(ka+\delta_0\right)=0, \tag{11}$$

$$\Longrightarrow\delta_0=-ka. \tag{12}$$

ii) 对于自旋为零的 Bose 气体，根据 Beth-Uhlenbeck 公式

$$b_2^S=b_2^{S(0)}+\frac{2^{3/2}}{\lambda^3}\left[\sum_{\text{even }l}e^{-\beta\varepsilon_B}+\frac{1}{\pi}\sum_{\text{even }l}(2l+1)\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}k}\right], \tag{13}$$

其中

$$b_2^{S(0)}=\frac{1}{2^{5/2}\lambda^3}, \tag{14}$$

由于气体原子的势能是硬球势，所以不存在束缚态，中括号中第一个求和式

$$\sum_{\text{even }l}e^{-\beta\varepsilon_B}=0, \tag{15}$$

中括号中第二个求和式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\sum_{\text{even }l}(2l+1)\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\beta\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}k}=&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\beta\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_0}{\mathrm{d}k}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}(2l+1)\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\beta\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}k}\\
\approx&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}(-ka)}{\mathrm{d}k}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}(2l+1)\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}(ka)^{2l+1}}{\mathrm{d}k}\\
=&-\frac{a}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}a^{2l+1}(2l+1)^2\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}k^{2l}\\
=&-\frac{a}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\pi}{\beta\hbar^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}a^{2l+1}(2l+1)^2\int_0^\infty\mathrm{d}k\,e^{-\beta\hbar^2k^2}k^{2l}\\
=&\frac{a}{\sqrt{2}\lambda}+O\left(\frac{a^5}{\lambda^5}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

因此，

$$b_2=\frac{1}{\lambda^3}\left[2^{-5/2}-\frac{2a}{\lambda}+O\left(\frac{a^5}{\lambda^5}\right)\right]. \tag{17}$$

□