习题 III（3月23日交）

1. 证明大整数 N 阶乘的 Stirling 公式
$$\ln N! = N(\ln N - 1) + O(\ln N)$$
其中$O(\ln N)$ 表示误差与 $\ln N$ 同阶。(一个简单的证明方法是考虑用矩形法近似积分$\int_1^N dx \ln x$.)

2. 考虑由 M 个相同的 S 系统, M' 个相同的 S' 系统等等组成的一个正则系综。系综中的系统处在不同的位置但相互热接触。令系统 $S, S', \ldots$ 的 Hamiltonian 为 $H, H', \ldots$, 其本征态和本征能量由下列方程给出
$$H\psi_j = E_j\psi_j$$
$$H'\psi_j' = E_j'\psi_j'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
证明：找到某一特定系统 S处于 ψ_j 状态的几率是

$$P_j = \frac{1}{Q} e^{-\beta E_j}$$

找到某一特定系统 S'处于 ψ_j' 状态的几率是

$$P_j' = \frac{1}{Q'} e^{-\beta E_j'}$$

……

其中 $Q = \sum_j e^{-\beta E_j}, Q' = \sum_j e^{-\beta E_j'}, \ldots.$

3. 证明巨正则系综的最可几分布内粒子数的涨落为

$$\frac{\Delta N}{< N >} = \sqrt{\frac{kT\rho\kappa_T}{< N >}}$$

其中$\rho =< N >/V$ 为密度，$\Delta N^2 \equiv (N- < N >)^2$ 的平均值（均方偏差），κ_T 为等温压缩系数. 由此可见 $\kappa_T > 0.$