习题 XI

截止时间：2021. 5. 11（周二）

姓名：陈 稼 霖
学号：45875852
成绩：________

第 1 题 得分: ________. 考虑临近作用的铁磁性 Ising 模型，写出自由能

$$F_I(M) = -\frac{kT}{\mathcal{N}}\ln Q_{N_\uparrow}$$

在零磁场下展开到 M^4 的形式. 讨论此展开式在 $T > T_c$ 和 $T < T_c$ 的图像并求出两种情况下 $F_I(M)$ 的最小值和相应的磁化强度 M. （此类展开只适用于临界温度附近，故展开式中各项的系数只需保留到 $|T - T_c|$ 的领头阶.）

解: Ising 模型的自由能为

$$F_I(M) = -kT\ln Q_{N_\uparrow} = -\mu H\mathcal{N}M + \frac{n\varepsilon\mathcal{N}M^2}{2} + \frac{kT\mathcal{N}(1+M)}{2}\ln\frac{1+M}{2} + \frac{kT\mathcal{N}(1-M)}{2}\ln\frac{1-M}{2}, \tag{1}$$

将其展开到 M^4 的形式得

$$\begin{aligned}F_I(M) =& -\mu H\mathcal{N}M + \frac{n\varepsilon\mathcal{N}M^2}{2} + \frac{kT\mathcal{N}}{2}(1+M)\left[-\ln 2 + M - \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3}M^3 - \frac{1}{4}M^4\right]\\ &+ \frac{kT\mathcal{N}}{2}(1-M)\left[-\ln 2 - M - \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{3}M^3 - \frac{1}{4}M^4\right]\\ =&\mathcal{N}kT\left[\frac{1}{12}M^4 + \left(\frac{n\varepsilon}{2kT} + \frac{1}{2}\right)M^2 - \frac{\mu H}{kT}M - \ln 2\right],\end{aligned} \tag{2}$$

零磁场下，上式可化为

$$F_I(M) = \mathcal{N}kT\left[\frac{1}{12}M^4 + \left(\frac{n\varepsilon}{2kT} + \frac{1}{2}\right)M^2 - \ln 2\right]. \tag{3}$$

Bragg-Williams 公式：

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{1}{\mathcal{N}}\ln Q_{N_\uparrow}\right) = 0, \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}M^3 = \left(\frac{T_c}{T} - 1\right)M, \tag{5}$$

其中 $T_c = -\frac{n\varepsilon}{k}$.

当 $T > T_c$，$\frac{T_c}{T} + 1 > 0$，由 Bragg-Williams 公式解得 $M = 0$（图 (1)），亦即 $F_I(M)$ 仅有一个最小值，这一最小自由能为

$$F_I(M=0) = -\mathcal{N}kT\ln 2. \tag{6}$$

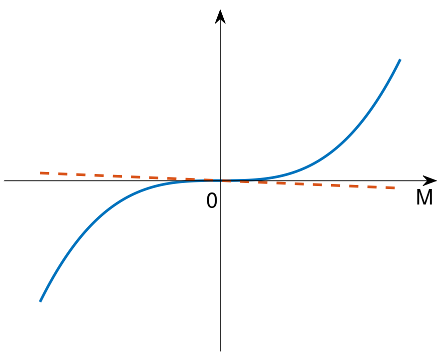

图 1: $T > T_c$ 下，Bragg-Williams 公式的情况，其中蓝线代表函数 $\frac{M^3}{3}$，橙线代表函数 $\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)M$

当 $T<T_c$，$\frac{T_c}{T}+1<0$，由 Bragg-Williams 公式解得三个根 $M=0$, $M=\pm\sqrt{3\left(\frac{T_c}{T}-1\right)}$（图 (??)），其中

$$\frac{\partial^2}{\partial M^2}F_I=\mathcal{N}kT\left(M^2+1-\frac{T_c}{T}\right)=\begin{cases}\mathcal{N}kT\left(1-\frac{T_c}{T}\right)<0, & M=0,\\ \frac{2}{3}\left(\frac{T_c}{T}-1\right)>0, & M=\pm\sqrt{3\left(\frac{T_c}{T}-1\right)}.\end{cases} \tag{7}$$

故 F_I 在 $M=0$ 处取极大值，在 $M=\pm\sqrt{3\left(\frac{T_c}{T}-1\right)}$ 处取极小值. 自由能取极小值处即对应 Ising 的真实状态，此时自由能为

$$F_I\left(M=\pm\sqrt{3\left(\frac{T_c}{T}-1\right)}\right)=\mathcal{N}kT\left[-\frac{17}{108}\left(\frac{T_c}{T}-1\right)^2-\ln 2\right]. \tag{8}$$

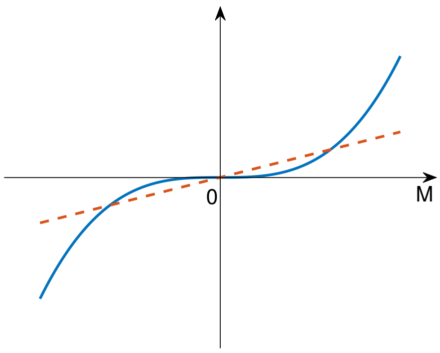

图 2: $T<T_c$ 下，Bragg-Williams 公式的情况，其中蓝线代表函数 $\frac{M^3}{3}$，橙线代表函数 $\left(\frac{T_c}{T}-1\right)M$

□