高等热力学与统计物理期末试题

2020-2021 春学期

（请于6月16日周三中午12时之前提交）

- 通用符号：T =温度，P =压强，V =体积，N =粒子数，ρ =数密度，μ = 化学势 k = Boltzmann 常数，$\hbar$ = Plank 常数。
- 热力学极限：

$$N \to \infty, \qquad V \to \infty \qquad \rho = \frac{N}{V} \neq 0 \text{ 且有限。}$$

1. 某一磁性物质对外界所做的微功为

$$\delta W = -HdM$$

其中 H 和 M 为磁场强度和磁化强度。体积固定且设为 $V = 1$。
如果 H, M 和 温度 T 的关系为

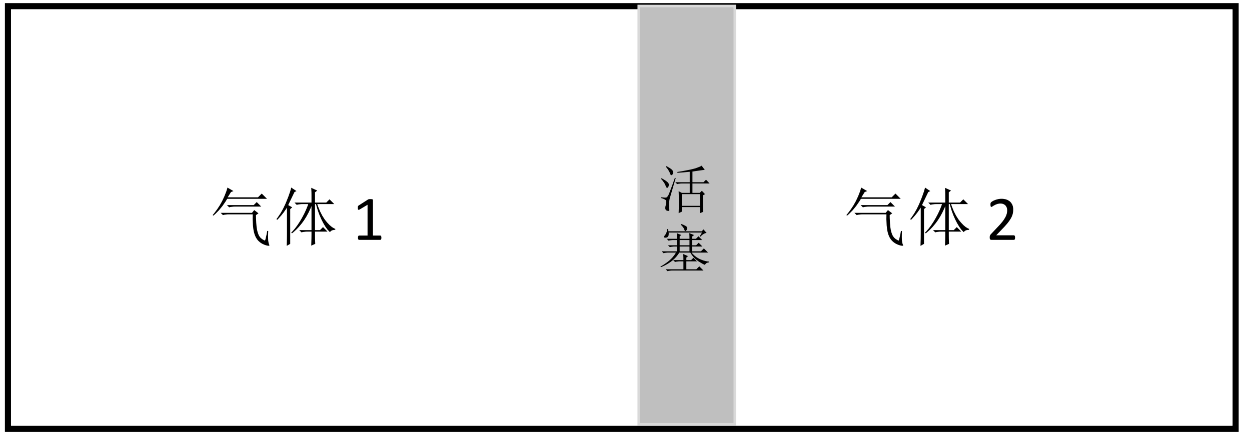
$$M = \frac{aH}{T - T_c}$$

a, T_c 为常数且 $T > T_c$。
1）证明该物质的内能由下式给出：（10分）

$$U(T, M) = U(T, 0) - \frac{M^2 T_c}{2a}$$

2）求该物质在 H 固定条件下的热容量，$C_H(T, M)$。（10分）

2. 一温度为 T 的圆柱形容器被一活塞隔成两部分。每部分放置一种非相对论Fermi 气体。活塞可以自由移动。两种 Fermi 气体的分子质量相同，但自旋不同，分别为 j_1 和 j_2。求 $T=0$ 和 $T\to\infty$ 条件下两种 Fermi 气体分子数密度的比值。（20分）



3. 考虑一低密度的经典单原子非理想气体，原子之间的相互作用势能为

$$u(r)=\begin{cases}\infty & r\le a\\ -g & a<r<b\\ 0 & r\ge b\end{cases}$$

1）求精确到 ρ^2 的状态方程，即把 P/kT 展开到 ρ^2 （10分）。

2）求该气体的化学势对理想气体化学势的领头阶修正（5分）。

3）求该气体的熵和内能对理想气体熵和内能的领头阶修正（5分）。

4. 用 Monte Carlo 方法数值求解零磁场下正方格点上的二维 Ising 模型。假设最近邻铁磁耦合，且任何近邻对的耦合能量相同。

1）写出 Hamiltonian 和计算程序的流程（5分）。

2）绘出磁化强度作为温度的函数的图像（10分）。

3）确定临界温度并与严格解比较（5分）。

提示：要求格点至少为 10×10，并取周期边界条件。

4. 弱耦合自旋为零玻色气体的相互作用算符为

$$\Omega = \frac{1}{2V} g \sum_{\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'} a^{\dagger}_{\vec{p}_1'} a^{\dagger}_{\vec{p}_2'} a_{\vec{p}_2} a_{\vec{p}_1} \qquad g > 0$$

其中 $a_{\vec{p}}$ 和 $a^{\dagger}_{\vec{p}}$为动量表象的湮灭产生算符，g 为耦合常数。令$|\{n_{\vec{p}}\}\rangle$ 为自由 玻色气体的能量本征态，其中 $n_{\vec{p}}$ 为动量 $\vec{p}$ 态的占据数。

1）证明相互作用能密度的平均值 （15分）

$$E[\{n_{\vec{p}}\}] \equiv \frac{1}{V}\langle\{n_{\vec{p}}\}|\Omega|\{n_{\vec{p}}\}\rangle = g\rho^2 - \frac{g}{2V^2}\sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}^2 - \frac{g\rho}{2V}$$

其中 ρ 玻色子的数密度。

2）在热力学极限下比较有 Bose-Einstein 凝聚的上述平均值 E 和没有 Bose-Einstein 凝聚的上述平均值 E'，证明 （5分）

$$E < E'$$