

循环摆运动初期简单分析

陈稼霖

2019.6.27

绞盘方程

$$T_1 = e^{\mu\theta} T_2 \quad (1)$$

对竖直悬挂重物 M 列出动力学方程

$$M\ddot{l}_1 = Mg - T_1 \quad (2)$$

对拉起后荡下的重物 m 沿绳方向列出动力学方程

$$m(\ddot{l}_2 - \dot{\theta}^2 l_2) = -T_2 - mg \cos \theta - m\ddot{\theta} l_2 \quad (3)$$

对拉起后荡下的重物 m 垂直绳方向列出动力学方程

$$m(l_2 \ddot{\theta} + 2\dot{l}_2 \dot{\theta}) = mg \sin \theta - m\dot{\theta}^2 R \quad (4)$$

由绳长不变得关系

$$l_1 + l_2 + R\theta = \text{const} \implies \dot{l}_1 + \dot{\theta}R + \dot{l}_2 = 0 \quad (5)$$

联立式(1)与式(2) (从而消去 T_1) 可得

$$M\ddot{l}_1 = -e^{\mu\theta} T_2 + Mg \quad (6)$$

再联立式(3)与式(6) (从而消去 T_2) 可得

$$e^{\mu\theta} m\dot{\theta}^2 l_2 - e^{\mu\theta} m\ddot{l}_2 + M\ddot{l}_1 = e^{\mu\theta} mg \cos \theta + e^{\mu\theta} m\ddot{\theta} l_2 + Mg \quad (7)$$

对式(5)进一步求导得到

$$\ddot{l}_1 + R\ddot{\theta} + \ddot{l}_2 = 0 \quad (8)$$

我们发现

$$\text{三个方程} \begin{cases} \text{式(4)} m(l_2 \ddot{\theta} + 2\dot{l}_2 \dot{\theta}) = mg \sin \theta - m\dot{\theta}^2 R \\ \text{式(7)} e^{\mu\theta} m\dot{\theta}^2 l_2 - e^{\mu\theta} m\ddot{l}_2 + M\ddot{l}_1 = e^{\mu\theta} mg \cos \theta + e^{\mu\theta} m\ddot{\theta} l_2 + Mg \\ \text{式(8)} \ddot{l}_1 + R\ddot{\theta} + \ddot{l}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{三个未知量} \begin{cases} \theta \\ l_1 \\ l_2 \end{cases}$$

可解!

化成MATLAB®可求解的形式

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dots \\ \ddot{l}_1 = \dots \\ \ddot{l}_2 = \dots \end{cases}$$

代入MATLAB®中求解即可。