

要求

由四维矢量 (ω, k) 的洛伦兹变换推导多普勒效应.

1 洛伦兹变换的引入

从低速力学现象上归纳出来的旧时空观认为，惯性系 Σ 与相对于 Σ 以速率 v 沿 x 轴运动的惯性系 Σ' 中的位置坐标和时间遵循伽利略变换

$$x' = x - vt, \quad (1)$$

$$y' = y, \quad (2)$$

$$z' = z, \quad (3)$$

$$t' = t. \quad (4)$$

理论上和实验上的矛盾使人们重新思考洛伦兹变换：

- 理论上，由麦克斯韦方程组推导波动方程，最终解得平面波解，其中真空中光速为一常数。在这里，没有给定一个特定的参考系，就有了为常数的光速。
- 起初认为这一光速是相对于某个特定参考系（例如，以太）而言的，则相对于这一参考系转动的地球上应能观测到这一差异，然而该假设被迈克尔逊-莫雷实验真伪。

因此，爱因斯坦提出狭义相对论的两条基本假设

- (1) **相对性原理**：所有惯性参考系都是等价的。物理规律对于所有惯性参考系都可表为相同形式。即，无论通过力学现象，还是电磁现象，或其他现象，都无法察觉处所参考系的任何“绝对运动”；
- (2) **光速不变原理**：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c ，并与光源运动无关。

根据这两条基本假设，从一个简单的例子，我们就可以推出洛伦兹变换。考虑惯性系 Σ 及相对于 Σ 运动的另一惯性系 Σ' ，不失一般性，设 Σ' 相对于 Σ 运动的速度大小为 v 而方向沿 x 轴。用 $(\mathbf{x}, t) = (x, y, z, t)$ 表示在惯性系 Σ 中发生的某一事件的空时坐标，用 $(\mathbf{x}', t') = (x', y', z', t')$ 表示该事件在惯性系 Σ' 中对应的空时坐标。

假设有一物体相对于惯性系 Σ 做匀速运动，其运动方程应由 \mathbf{x} 与 t 的线性关系所描述，根据上述的狭义相对论的第一条基本假设——相对性原理，在惯性系 Σ' 上所观察到的该物体也应做匀速运动，从而其在惯性系 Σ' 中的运动方程应由 \mathbf{x}' 与 t' 中的线性关系描述，由此可知，从 (\mathbf{x}, t) 到 (\mathbf{x}', t') 的变换必须为线性的，即， x', y', z', t' 必须可表为 x, y, z, t 的线性组合。

假设在 $t = 0$ 时刻，两惯性系原点重合，且此时一个位于惯性系 Σ 原点的光源发光，对于光从光源发出这一事件（事件A），其在惯性系 Σ 和 Σ' 中的空时坐标均为 $(0, 0, 0, 0)$ ，对于某探测器接受到该光信号这一事件（事件B），设其在惯性系 Σ 和 Σ' 中的空时坐标分别为 (x, y, z, t) 和 (x', y', z', t') 。根据上述的狭义相对论的第二条基本假设——光速不变性，有

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (5)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (6)$$

设

$$F_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2, \quad (7)$$

$$F_2(x', y', z', t') = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (8)$$

因为 (x', y', z', t') 可表为 (x, y, z, t) 的线性组合, 故 F_2 可进一步表为 (x, y, z, t) 的函数, $F_2(x, y, z, t)$.

我们可以任意摆放探测器, 也就是说, 我们可以任意调整 (x, y, z, t) , 但是无论怎么调整, 只要事件A和事件B是以光来连接的, 就恒有, $F_1(x, y, z, t) = 0$, 且 $F_2(x, y, z, t) = 0$. 当然两个事件也可以有除光以外的其他的连接方式 (例如把事件A改成声波从声源发出, 把事件B改成探测器探测到声波, 例如把事件A改成飞船从基地出发, 把事件B改成飞船到达目的地), 此时则有 $F_1(x, y, z, t) < 0$, $F_2(x, y, z, t) < 0$. 综合起来, 有: $F_1(x, y, z, t) \leq 0$
 $F_2(x, y, z, t) \leq 0$ 且若 $F_1(x, y, z, t) = 0$ (即, 若两事件以光连接), 则必有 $F_2(x, y, z, t) = 0$.

由于 (x', y', z', t') 可表为 (x, y, z, t) 的线性组合, 而又有以上划线的这条结论, 所以 $F_1(x, y, z, t)$ 和 $F_2(x, y, z, t)$ 之间只相差一因子, 即

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = A(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2). \quad (9)$$

又因为 Σ 和 Σ' 这两个惯性系是等价的, 反过来亦有关系

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = A(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2). \quad (10)$$

从而有间隔不变性

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (11)$$

由于 Σ' 相对于 Σ 运动的速度沿 x 轴, 故 y, z 在变换中不变, 变换具有如下形式

$$x' = a_{11}x + a_{12}ct, \quad (12)$$

$$y' = y, \quad (13)$$

$$z' = z, \quad (14)$$

$$ct' = a_{21}x + a_{22}ct. \quad (15)$$

由于 x 和 x' 的正向相同, 故应取 $a_{11} > 0$; 由于 t 和 t' 的正向相同, 应取 $a_{22} > 0$, 将变换的形式 (式(12)至式(15)) 代入间隔不变性 (式(11)) 中得

$$(a_{11}x + a_{21}ct)^2 + y^2 + z^2 - (a_{21}x + a_{22}ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (16)$$

展开后比较系数得

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1, \quad (17)$$

$$a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0, \quad (18)$$

$$a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1. \quad (19)$$

由式(17)和(19)得

$$a_{11} = \sqrt{1 + a_{21}^2}, \quad (20)$$

$$a_{22} = \sqrt{1 + a_{12}^2}. \quad (21)$$

在代入式(18)中得

$$a_{12} = a_{21}. \quad (22)$$

这些系数与两个惯性系之间的相对运动速度有关, 因而可以用 v 表出. 在 Σ 上观察, Σ' 的原点 O' 以速率 v 沿 x 轴运动, 其坐标为

$$x = vt. \quad (23)$$

而 O' 在 Σ' 上的坐标恒为 $x' = 0$ ，将其代入式(12)中可得

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{v}{c}. \quad (24)$$

从而由式(20)(21)(22)解得

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (25)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (26)$$

至此，我们得到了洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (27)$$

$$y' = y, \quad (28)$$

$$z' = z, \quad (29)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (30)$$

2 四维矢量的引入

将上面的四个洛伦兹变换式写成线性代数形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中变换矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (32)$$

其中

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (33)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34)$$

可以验证， A 是一个正交矩阵：

$$AA^T = I, \quad (35)$$

也就是说乘上这样一个矩阵相当于使矢量在四维空间中转动。根据正交矩阵的性质，变换前后的两个矢量 (\mathbf{x}, ict) 和 (\mathbf{x}', ict') 模长不变。

3 用四维矢量推导多普勒效应

在惯性系 Σ 中, 电磁波的相位为

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (36)$$

在惯性系 Σ' 中, 电磁波的相位为

$$\phi' = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t'. \quad (37)$$

假设在 $t = 0$ 时刻两个惯性系中观察到相位均为0, $\phi = \phi' = 0$ (事件A), 事件A在两个惯性系中的空时坐标均为 $(0, 0, 0, 0)$, 在惯性系 Σ 中经过电磁波的 n 个周期后, 第 n 个波峰经过 Σ 原点, 相位为 $\phi = -2\pi n$ (事件B), 事件B在惯性系 Σ' 中的空时坐标为 $(\mathbf{x} = 0, t = 2\pi n/\omega)$, 通过洛伦兹变换可得事件B在惯性系 Σ' 中的空时坐标 $(\mathbf{x}', t') = A(\mathbf{x}, t)$, 而相位仍为 $\phi' = -2\pi n$, 这是因为某个波峰经过原点是一个物理事件, 而相位对应了经过原点的波峰的数目, 不应随参考系的变换而发生改变:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' \quad (38)$$

要满足上面这一点, 波矢和频率的洛伦兹变换就需满足

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ i\omega'/c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\omega/c \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\omega/c \end{pmatrix}. \quad (39)$$

从而有多普勒效应:

$$\omega' = \gamma(\omega - vk_1) = \gamma \left(\omega - v \frac{\omega}{c} \cos \theta \right) = \gamma \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right), \quad (40)$$

其中 θ 为 \mathbf{k} 与 x 轴方向的夹角.

4 讨论

沿着激光传输方向运动的粒子的多普勒效应为

$$\omega'_{\parallel} = \gamma \omega \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (41)$$

垂直于激光传输方向运动的粒子的多普勒效应为

$$\omega'_{\perp} = \gamma \omega = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (42)$$

对于本实验中的气体粒子, 其运动速率 v 远低于光速 c , 故

$$\omega'_{\perp} \approx \omega \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (43)$$

与入射激光原始频率 ω 的差距远远小于

$$\omega'_{\parallel} \approx \omega \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad (44)$$

与入射激光原始频率 ω 的差距, 故总体上只需考虑沿着激光传输方向的速度造成的多普勒效应:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \right). \quad (45)$$

参考文献

- [1] 郭硕鸿. 电动力学. 第3版. 高等教育出版社, 2008.