Lab-1-Note-2-由四维矢量的洛伦兹变换推导多普勒效应

姓名：陈 稼 霖
学号：45875852

2020. 9. 23（周三）

要求

由四维矢量(ω, k)的洛伦兹变换推导多普勒效应.

1 洛伦兹变换的引入

从低速力学现象上归纳出来的旧时空观认为，惯性系Σ与相对于Σ以速率v沿x轴运动的惯性系Σ'中的位置坐标和时间遵循伽利略变换

$$x' = x - vt, \tag{1}$$
$$y' = y, \tag{2}$$
$$z' = z, \tag{3}$$
$$t' = t. \tag{4}$$

理论上和实验上的矛盾使人们重新思考洛伦兹变换：

- 理论上，由麦克斯韦方程组推导波动方程，最终解得平面波解，其中真空中光速为一常数. 在这里，没有给定一个特定的参考系，就有了为常数的光速.
- 起初认为这一光速是相对于某个特定参考系（例如，以太）而言的，则相对于这一参考系转动的地球上应能观测到这一差异，然而该假设被迈克尔逊-莫雷实验真伪.

因此，爱因斯坦提出狭义相对论的两条基本假设

(1) **相对性原理**：所有惯性参考系都是等价的. 物理规律对于所有惯性参考系都可表为相同形式. 即，无论通过力学现象，还是电磁现象，或其他现象，都无法察觉处所处参考系的任何“绝对运动”；

(2) **光速不变原理**：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为c，并与光源运动无关.

根据这两条基本假设，从一个简单的例子，我们就可以推出洛伦兹变换. 考虑惯性系Σ及相对于Σ运动的另一惯性系Σ'，不失一般性，设Σ'相对于Σ运动的速度大小为v而方向沿x轴. 用$(\boldsymbol{x}, t) = (x, y, z, t)$表示在惯性系$\Sigma$中发生的某一事件的空时坐标，用$(\boldsymbol{x}', t) = (x', y', z', t')$表示该事件在惯性系$\Sigma'$中对应的空时坐标.

假设有一物体相对于惯性系Σ做匀速运动，其运动方程应由$\boldsymbol{x}$与t的线性关系所描述，根据上述的狭义相对论的第一条基本假设——相对性原理，在惯性系Σ'上所观察到的该物体也应做匀速运动，从而其在惯性系Σ'中的运动方程应由$\boldsymbol{x}'$与t'中的线性关系描述，由此可知，从$(\boldsymbol{x}, t)$到$(\boldsymbol{x}', t')$的变换必须为线性的，即，x', y', z', t'必须可表为x, y, z, t的线性组合.

假设在$t = 0$时刻，两惯性系原点重合，且此时一个位于惯性系Σ原点的光源发光，对于光从光源发出这一事件（事件A），其在惯性系Σ和Σ'中的空时坐标均为$(0, 0, 0, 0)$，对于某探测器接受到该光信号这一事件（事件B），设其在惯性系Σ和Σ'中的空时坐标分别为(x, y, z, t)和(x', y', z', t'). 根据上述的狭义相对论的第二条基本假设——光速不变性，有

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \tag{5}$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \tag{6}$$

设

$$F_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \tag{7}$$
$$F_2(x', y', z', t') = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \tag{8}$$

因为(x',y',z',t')可表为(x,y,z,t)的线性组合，故F_2可进一步表为(x,y,z,t)的函数，$F_2(x,y,z,t)$.

我们可以任意摆放探测器，也就是说，我们可以任意调整(x,y,z,t)，但是无论怎么调整，只要事件A和事件B是以光来连接的，就恒有，$F_1(x,y,z,t)=0$，且$F_2(x,y,z,t)=0$. 当然两个事件也可以有除光以外的其他的连接方式（例如把事件A改成声波从声源发出，把事件B改成探测器探测到声波，例如把事件A改成飞船从基地出发，把事件B改成飞船到达目的地），此时则有$F_1(x,y,z,t)<0$，$F_2(x,y,z,t)<0$. 综合起来，有：$\underline{F_1(x,y,z,t)\leq 0}$，$\underline{F_2(x,y,z,t)\leq 0}$，且若$F_1(x,y,z,t)=0$（即，若两事件以光连接），则必有$F_2(x,y,z,t)=0$.

由于(x',y',z',t')可表为(x,y,z,t)的线性组合，而又有以上划线的这条结论，所以$F_1(x,y,z,t)$和$F_2(x,y,z,t)$之间只相差一因子，即

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=A(x^2+y^2+z^2-c^2t^2). \tag{9}$$

又因为Σ和Σ'这两个惯性系是等价的，反过来亦有关系

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=A(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2). \tag{10}$$

从而有间隔不变性

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2. \tag{11}$$

由于Σ'相对于Σ运动的速度沿x轴，故y,z在变换中不变，变换具有如下形式

$$\begin{aligned}
x'=&a_{11}x+a_{12}ct, && (12)\\
y'=&y, && (13)\\
z'=&z, && (14)\\
ct'=&a_{21}x+a_{22}ct. && (15)
\end{aligned}$$

由于x和x'的正向相同，故应取$a_{11}>0$；由于t和t'的正向相同，应取$a_{22}>0$，将变换的形式（式(12)至式(15)）代入间隔不变性（式(11)）中得

$$(a_{11}x+a_{21}ct)^2+y^2+z^2-(a_{21}x+a_{22}ct)^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2. \tag{16}$$

展开后比较系数得

$$\begin{aligned}
a_{11}^2-a_{21}^2=&1, && (17)\\
a_{11}a_{12}-a_{21}a_{22}=&0, && (18)\\
a_{12}^2-a_{22}^2=&-1. && (19)
\end{aligned}$$

由式(17)和(19)得

$$\begin{aligned}
a_{11}=&\sqrt{1+a_{21}^2}, && (20)\\
a_{22}=&\sqrt{1+a_{12}^2}. && (21)
\end{aligned}$$

在代入式(18)中得

$$a_{12}=a_{21}. \tag{22}$$

这些系数与两个惯性系之间的相对运动速度有关，因而可以用v表出. 在Σ上观察，Σ'的原点O'以速率v沿x轴运动，其坐标为

$$x=vt. \tag{23}$$

而O'在Σ'上的坐标恒为$x'=0$，将其代入式(12)中可得

$$\frac{a_{12}}{a_{11}}=-\frac{v}{c}. \tag{24}$$

从而由式(20)(21)(22)解得

$$a_{11}=a_{22}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{25}$$

$$_{12}=a_{21}=\frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{26}$$

至此，我们得到了洛伦兹变换

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{27}$$

$$y'=y, \tag{28}$$

$$z'=z, \tag{29}$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{30}$$

2 四维矢量的引入

将上面的四个洛伦兹变换式写成线性代数形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中变换矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{32}$$

其中

$$\beta=\frac{v}{c}, \tag{33}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{34}$$

可以验证，A是一个正交矩阵：

$$AA^T=I, \tag{35}$$

也就是说乘上这样一个矩阵相当于使矢量在四维空间中转动. 根据正交矩阵的性质，变换前后的两个矢量$(\boldsymbol{x},ict)$和$(\boldsymbol{x},ict')$模长不变.

3 用四维矢量推导多普勒效应

在惯性系Σ中，电磁波的相位为

$$\phi = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t. \tag{36}$$

在惯性系Σ'中，电磁波的相位为

$$\phi' = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}' - \omega' t'. \tag{37}$$

假设在$t = 0$时刻两个惯性系中观察到相位均为0，$\phi = \phi' = 0$（事件A），事件A在两个惯性系中的空时坐标均为$(0,0,0,0)$，在惯性系Σ中经过电磁波的n个周期后，第n个波峰经过Σ原点，相位为$\phi = -2\pi n$（事件B），事件B在惯性系Σ'中的空时坐标为$(\boldsymbol{x}=0, t=2\pi n/\omega)$，通过洛伦兹变换可得事件$B$在惯性系$\Sigma'$中的空时坐标$(\boldsymbol{x}', t') = A(\boldsymbol{x}, t)$，而相位仍为$\phi' = -2\pi n$，这是因为某个波峰经过原点是一个物理事件，而相位对应了经过原点的波峰的数目，不应随参考系的变换而发生改变：

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}' - \omega' t' \tag{38}$$

要满足上面这一点，波矢和频率的洛伦兹变换就需满足

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ i\omega'/c \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\omega/c \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\omega/c \end{pmatrix}. \tag{39}$$

从而有多普勒效应：

$$\omega' = \gamma(\omega - v k_1) = \gamma\left(\omega - v\frac{\omega}{c}\cos\theta\right) = \gamma\omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right), \tag{40}$$

其中θ为$\boldsymbol{k}$与x轴方向的夹角.

4 讨论

沿着激光传输方向运动的粒子的多普勒效应为

$$\omega'_{\parallel} = \gamma\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{41}$$

垂直于激光传输方向运动的粒子的多普勒效应为

$$\omega'_{\perp} = \gamma\omega = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{42}$$

对于本实验中的气体粒子，其运动速率v远低于光速c，故

$$\omega'_{\perp} \approx \omega\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{43}$$

与入射激光原始频率ω的差距远远小于

$$\omega'_{\parallel} \approx \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) \tag{44}$$

与入射激光原始频率ω的差距，故总体上只需考虑沿着激光传输方向的速度造成的多普勒效应：

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{45}$$

参考文献

[1] 郭硕鸿. *电动力学.第3版*. 高等教育出版社, 2008.