

要求

- 分析蔡氏电路中蔡氏二极管的 $I - V$ 特性；
- 模拟以蔡氏电路中两电容两端电压为坐标的李萨如图。

蔡氏电路（Chua's circuit）是蔡少棠于1983年提出的一种非线性电路。如图1所示，蔡氏电路是由一个电感 L 、两个电容 C_1 、 C_2 和一个蔡氏二极管 N_R 并联再串联一线性电阻 R 而成的LRC电路，其中蔡氏二极管为一有源非线性电阻，它的存在使得整个电路为一非线性系统，并使得两个电容两端电压的振荡呈现出混沌效应，对初始条件和外界扰动极为敏感。下面我们首先分析蔡氏二极管的 $I - V$ 特性，然后根据这一特性模拟在不同初始条件下电路的演化，并从两个电容器两端电压振荡的李萨如图中管窥混沌现象。

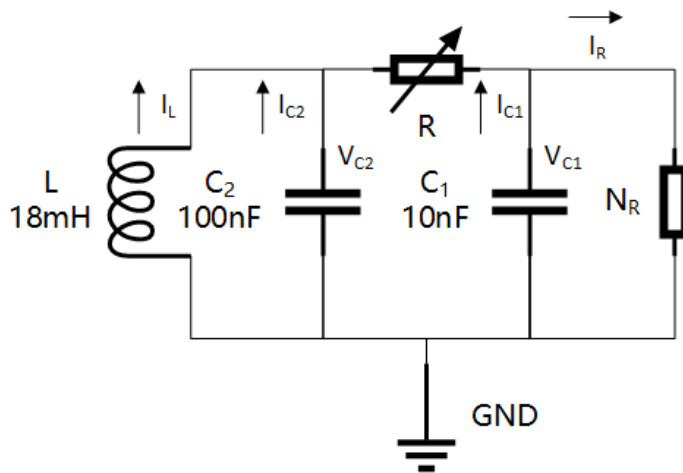


图 1: 蔡氏电路

1 蔡氏二极管的 $I - V$ 特性

蔡氏二极管（Chua's diode）可以用一些简单的电子元件搭建，而且实现方式多种多样。本实验所用的蔡氏二极管由两个负阻抗转换器串联而成。因此，我们先分析负阻抗转换器的 $I - V$ 特性，然后由此得出蔡氏二极管的 $I - V$ 特性。

1.1 负阻抗转换器

如图2所示，负阻抗变换器（Negative impedance converter）是一个运算放大器上同时加了正反馈和负反馈得到。

运算放大器（Operational amplifier，简称运放）具有5个端口，分别是反向端（即图3中-号端）、非反向端（即图3中+号端）、输出端（即图3中三角形右边顶点端）、正电源端（即图3中 V_{pp} 对应端口）和负电源端（即图3中 V_{nn} 对应端口），其基本特性是可以在输出端产生正比于非反向端电压 V_+ 和反向端（即图3中-号端）电压 V_- 之差的电压

$$V_o = A \cdot (V_+ - V_-), \quad (1)$$

其中系数 A 称开环差动增益，它的值极大，通常可达 10^6 。当连接了运放的输出端和反向端，由于开环差动增益极大，当反向端电压稍低（高）于非反向端，则输出端电压急剧升高（降低），从而带动反向端电压升高（降低），形成负反馈，因此此时反向端和非反向端电压几乎相等，可近似视为短路（运放的虚短性质）。而由于运放输入阻抗很大，因此反向端和非反向端几乎无电流流入或流出运放，可以近似视为断路（运放的虚断性质）。

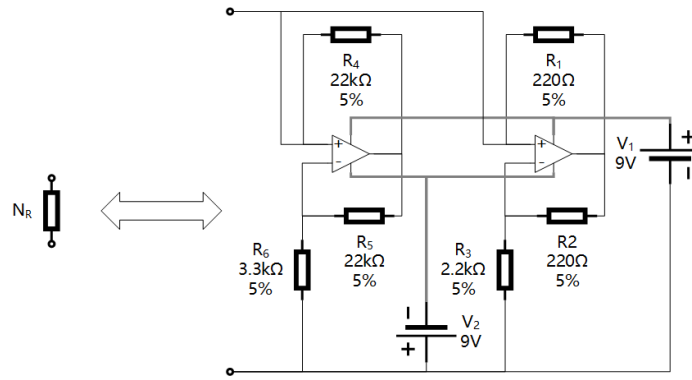


图 2: 蔡氏二极管

在图3所示的负阻抗变换器中，由于运放的虚断，电流 I 几乎全部由负阻抗变换器+端经过 R_f ，而几乎没有经过运放，因此对 R_f 用欧姆定律有

$$I = \frac{V - V_o}{R_f}. \quad (2)$$

而根据 R_a 和 R_b 的分压，非反向端电压和输出端电压有如下关系：

$$V_n = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_o. \quad (3)$$

又由于运放的虚短，

$$V = V_p = V_n. \quad (4)$$

上面三式联立可得，在运放的输出电压未达到饱和的条件下，负阻抗变换器 $I - V$ 关系可表为

$$I = -\frac{R_a}{R_b R_f} V. \quad (5)$$

当运放的输出电压达到饱和，以正饱和为例，此时

$$V_o = V_{pp} \quad (6)$$

$$V = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{pp}, \quad (7)$$

$$I = -\frac{R_a}{R_f(R_a + R_b)} V_{pp}. \quad (8)$$

若继续增大负阻抗变换器两端的输入电压，则 $V = V_p > V_n$ ，但运放输出电压不再增大，依然为 $V_o = V_{pp}$ ，式(2)依然成立，故负阻抗变换器此时的 $I - V$ 关系可表为

$$I = \frac{V - V_{pp}}{R_f}. \quad (9)$$

同理可得当输入反向电流，使电压达到饱和后，负阻抗变换器的 $V - I$ 关系变为

$$I = \frac{V - V_{nn}}{R_f}. \quad (10)$$

综上，负阻抗变换器的 $V - I$ 关系是非线性的：

$$I = \begin{cases} \frac{V - V_{nn}}{R_f}, & V < \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{nn}, \\ -\frac{R_a}{R_b R_f} V, & \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{nn} \leq V \leq \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{pp}, \\ \frac{V - V_{pp}}{R_f}, & V > \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{pp}. \end{cases} \quad (11)$$

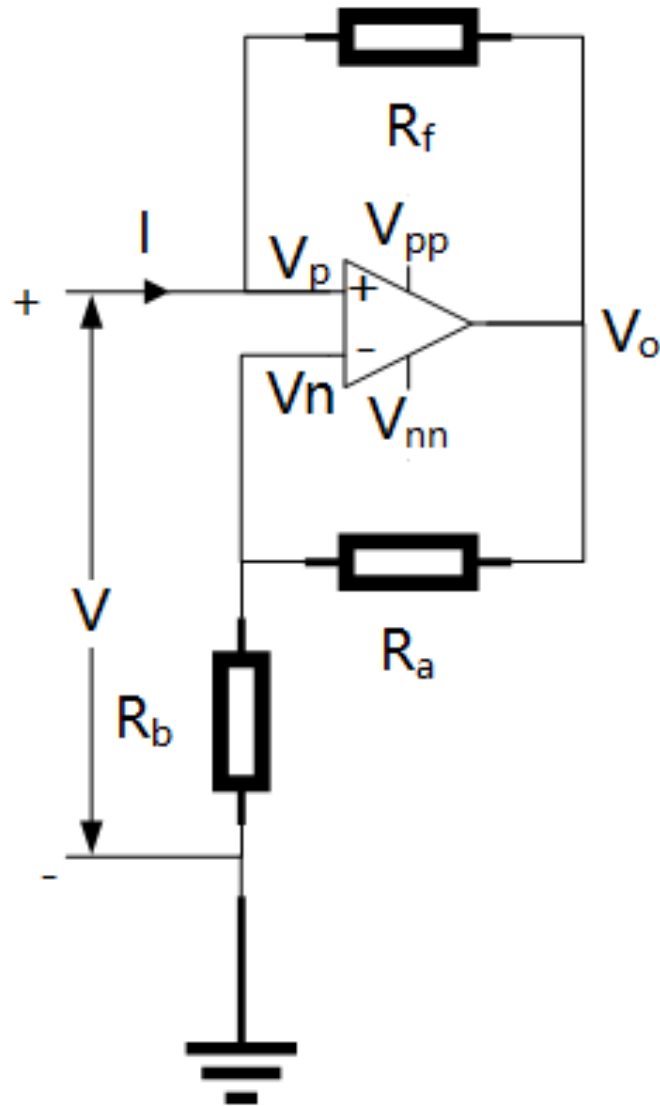


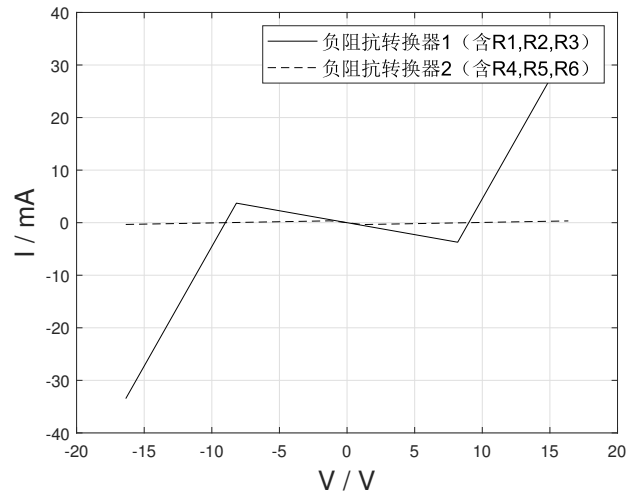
图 3: 负阻抗变换器

本实验中蔡氏二极管中的两个负阻抗变换器的 $V-I$ 特性可分别表为

$$I = f_1(V) = H\left(-\frac{R_3}{R_2 + R_3}V_1 - V\right) \times \left(\frac{V + V_2}{R_1}\right) + H\left(\frac{R_3}{R_2 + R_3}V_2 - V\right) \times H\left(V + \frac{R_3}{R_2 + R_3}V_1\right) \times \left(-\frac{R_2}{R_3 R_1}V\right) \\ + H\left(V - \frac{R_3}{R_2 + R_3}V_2\right) \times \left(\frac{V - V_1}{R_1}\right), \quad (\text{负阻抗变换器1 (含 } R_1, R_2, R_3)) \quad (12)$$

$$I = f_2(V) = H\left(-\frac{R_6}{R_5 + R_6}V_1 - V\right) \times \left(\frac{V + V_5}{R_4}\right) + H\left(\frac{R_6}{R_5 + R_6}V_2 - V\right) \times H\left(V + \frac{R_6}{R_5 + R_6}V_1\right) \times \left(-\frac{R_5}{R_6 R_4}V\right) \\ + H\left(V - \frac{R_6}{R_5 + R_6}V_2\right) \times \left(\frac{V - V_1}{R_4}\right), \quad (\text{负阻抗变换器2 (含 } R_4, R_5, R_6)) \quad (13)$$

其中用了单位阶跃函数 $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 来刻画 $V-I$ 特性的分段性质，以方便在代码中的表示. 两个负阻抗变换器的 $V-I$ 特性曲线分别如图4所示.

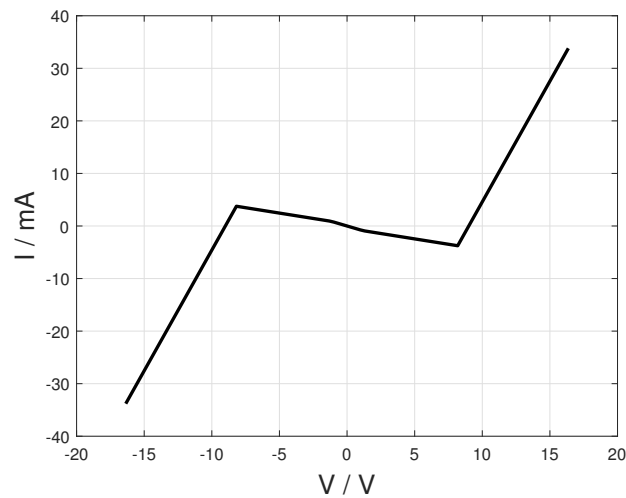
图 4: 负阻抗变换器 $I - V$ 特性曲线

1.2 蔡氏二极管的 $I - V$ 特性

蔡氏二极管中两个负阻抗变换器并联, 因此其总电压相等, 总电流相加. 故蔡氏二极管的 $I - V$ 特性为

$$I = f(V) = f_1(V) + f_2(V), \quad (14)$$

如图5所示.

图 5: 蔡氏二极管 $I - V$ 特性曲线

2 蔡氏电路模拟

蔡氏电路中, 电感 L 两端的电压 V_{C2} 正比于通过电感的电流 I_L 的变化速率

$$V_{C2} = -L \frac{dI_L}{dt}. \quad (15)$$

通过电容 C_2 的电流 I_{C2} 正比于电容 C_2 两端的电压 V_{C2} 的变化速率

$$I_{C2} = -C_2 \frac{dV_{C2}}{dt}. \quad (16)$$

通过电容 C_1 的电流 I_{C1} 正比于电容 C_1 两端的电压 V_{C1} 的变化速率

$$I_{C1} = -C_1 \frac{dV_{C1}}{dt}. \quad (17)$$

由基尔霍夫第二定律，从接地点开始经电容 C_2 、过可变电阻 R 和电容 C_1 回到接地点，电势变化为0:

$$V_{C2} - (I_L + I_{C2})R - V_{C1} = 0. \quad (18)$$

故可将经过电容 C_2 的电流 I_{C2} 表为

$$I_{C2} = \frac{V_{C2} - V_{C1}}{R} - I_L. \quad (19)$$

又由蔡氏二极管的 $V - I$ 曲线有

$$I_N = f(V_{C1}) \quad (20)$$

其中，根据基尔霍夫第一定律，经过蔡氏二极管的电流 I_N 可表为

$$I_N = I_L + I_{C1} + I_{C2}. \quad (21)$$

联立上面两式并代入(19)可将经过电容 C_1 的电流 I_{C1} 表为

$$I_{C1} = f(V_{C1}) - \frac{V_{C2} - V_{C1}}{R}. \quad (22)$$

将 I_{C1} 和 I_{C2} 的表达式(22)(19)分别回代入式(17)(16)并与式(15)联立得到微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dI_L}{dt} = -\frac{1}{L} V_{C2}, \\ \frac{dV_{C1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} \left[f(V_{C1}) - \frac{V_{C2} - V_{C1}}{R} \right], \\ \frac{dV_{C2}}{dt} = -\frac{1}{C_2} \left(\frac{V_{C2} - V_{C1}}{R} - I_L \right). \end{cases} \quad (23)$$

在不同的条件（改变可变电阻阻值 R ，改变初始条件 $V_{C2}(t = 0)$ 等）下求解以上微分方程组，得到蔡氏电路的 V_{C1} 和 V_{C2} 的演化轨迹如组图6和7所示.

由图中，我们发现初始条件的微小改变就可以引起电路演化路径完全不同，这是混沌现象的典型体现.

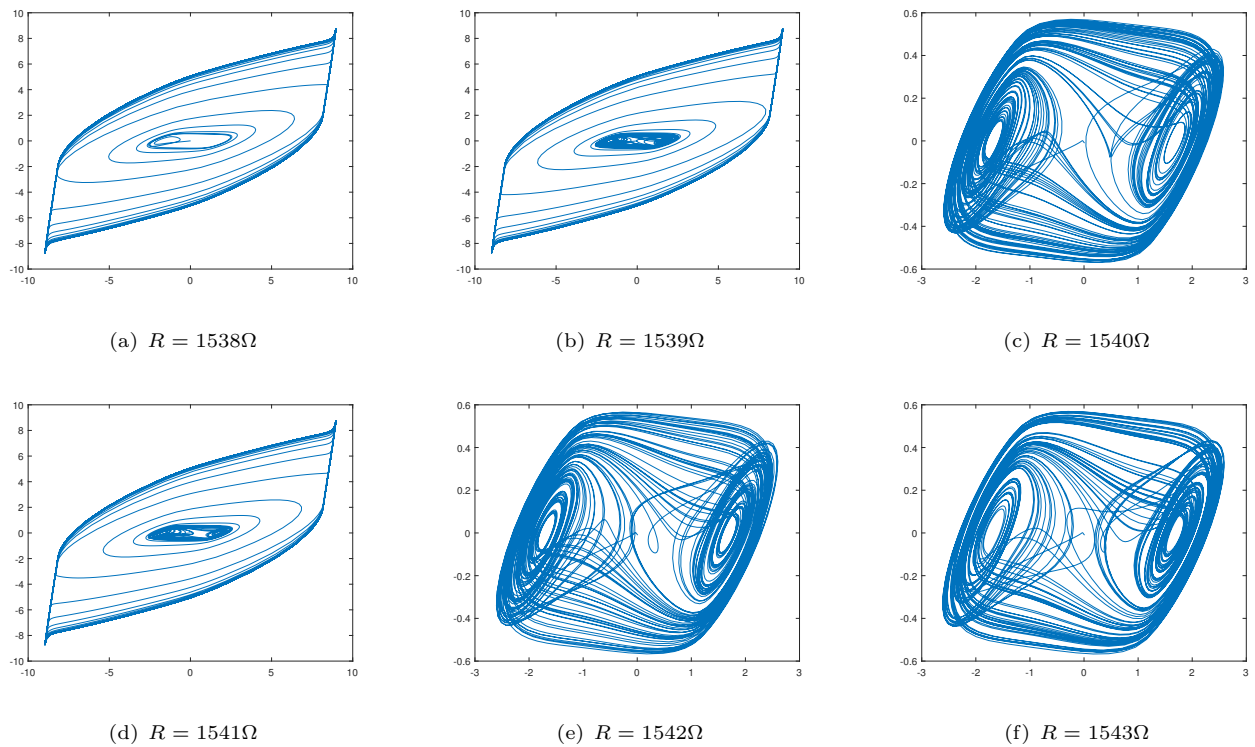


图 6: 设定初始条件 $I_L(t=0) = 0$, $V_{C1}(t=0) = 0.01$, $V_{C2}(t=0) = -0.01$, 微调可变电阻阻值得到的, 以 V_{C1} 为横轴, 以 V_{C2} 为纵轴的李萨如图

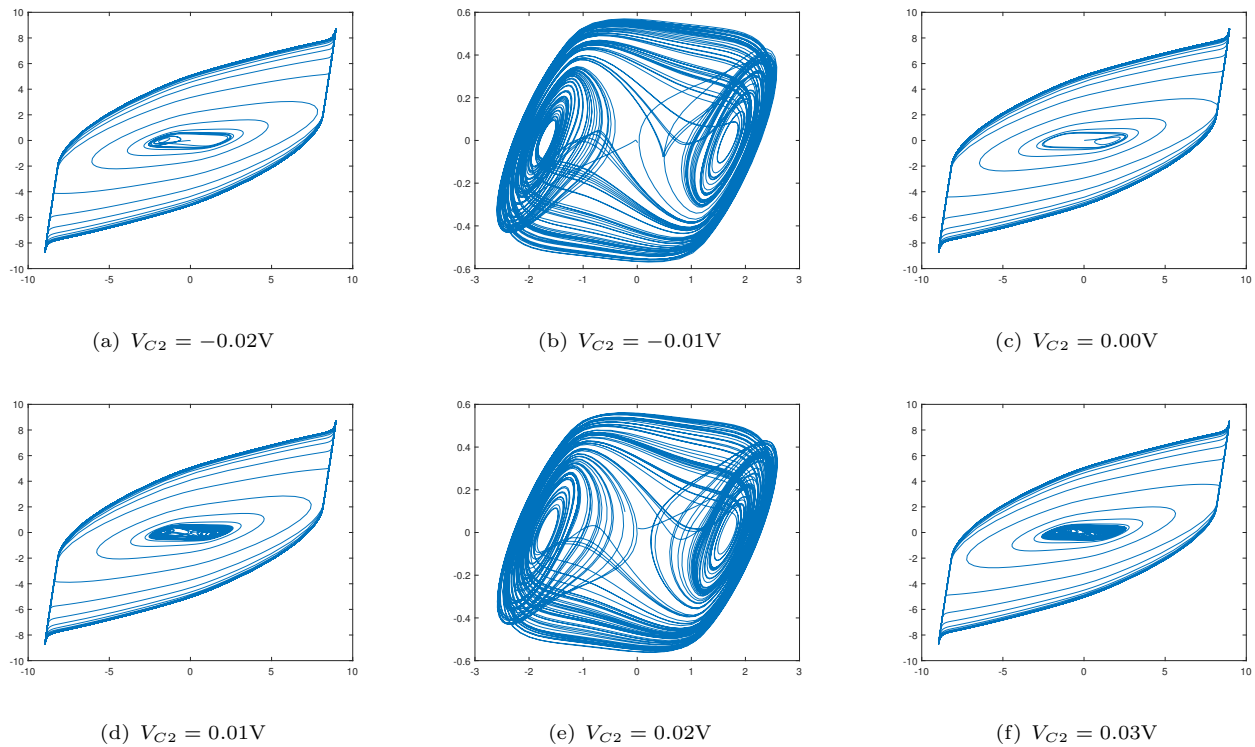


图 7: 设定可变电阻阻值 $R = 1540\Omega$, 初始条件 $I_L(t=0) = 0$, $V_{C1}(t=0) = 0.01$, 微调初始条件 $V_{C2}(t=0)$ 得到的, 以 V_{C1} 为横轴, 以 V_{C2} 为纵轴的李萨如图