Research physics experiment: Homework #2

Due on 9 25, 2020 at 11:59pm

Professor Jiamin Xue

白润南
2018511014

多普勒效应

时空坐标的洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x' = & \gamma(x-ut) \\ y' = & y \\ z' = & z \\ t' = & \gamma(t-\frac{u}{c^2}x) \end{cases}$$

其中:$\beta=\frac{u}{c}$,$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$
写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{bmatrix}$$

对于平面波

$$\psi(\vec{r},t) = A\cdot e^{\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

波速 $v=\frac{\omega}{k}$
相位是洛伦兹变换下不变标量

$$\begin{aligned} \phi =& \omega t-\vec{k}\cdot\vec{r} \\ =& (\vec{r},ict)\cdot(\vec{k},i\frac{\omega}{c}) \end{aligned}$$

$\because$ 因为时空四矢量是满足洛伦兹变换的，而且相位是洛伦兹不变标量
$\therefore$ 四波矢 $\vec{k},i\frac{\omega}{c}$, 也是满足洛伦兹变换的

$$\begin{bmatrix} k_1' \\ k_2' \\ k_3' \\ k_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

使用 $k_1=k_x$ ... $k_4=i\frac{\omega}{c}$ 来化简
设发射系为 Σ 系，观测系为 Σ' 系。两参考系的相对速度为 u
在发射系中，波矢方向与 X 轴夹 θ, 波速为 v

$$\begin{cases} k_1 = & \frac{\omega}{v}\cos\theta \\ k_2 = & \frac{\omega}{v}\sin\theta \\ k_3 = & 0 \\ k_4 = & i\frac{\omega}{c} \end{cases} \tag{2}$$

联立 (1)(2) 得到:

$$\begin{cases} k_x' = \frac{\frac{\cos\theta}{v} - \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\omega \\ k_y' = \frac{\omega}{v}\sin\theta \\ k_z' = 0 \\ i\frac{\omega'}{c} = \frac{i\gamma}{c}(1-\frac{u}{v}\cos\theta)\omega \end{cases} \tag{3}$$

化简 (3) 中的 4 式: 得到:

$$\omega' = \frac{1-\frac{u}{v}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\omega$$

考虑光源与观测者均移动的多普勒公式

u_d 表示探测器相对实验室系的速度,θ_d 表示 $\vec{u_d}$ 相对实验室系的角度

$$\gamma_d = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{u_d}^2}{c^2}}}$$
$$\beta_d = \frac{u_d}{c}$$

u_s 表示波源相对实验室系的速度,θ_s 表示 $\vec{u_s}$ 相对实验室系的角度

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{u_s}^2}{c^2}}}$$
$$\beta_s = \frac{u_s}{c}$$

则可以写为:

$$\omega_d = \frac{\gamma_d}{\gamma_s}\cdot\frac{1-\beta_d\cos\theta_d}{1-\beta_s\cos\theta_s}\omega_s$$