要求

- 分析蔡氏电路中蔡氏二极管的I V特性;
- 模拟以蔡氏电路中两电容两端电压为坐标的李萨如图.

蔡氏电路(Chua's circuit)是蔡少棠于1983年提出的一种非线性电路. 如图1所示,蔡氏电路是由一个电感L、两个电容 C_1 、 C_2 和一个蔡氏二极管 N_R 并联再串联一线性电阻R而成的LRC电路,其中蔡氏二极管为一有源非线性电阻,它的存在使得整个电路为一非线性系统,并使得两个电容两端电压的振荡呈现出混沌效应,对初始条件和外界扰动极为敏感. 下面我们首先分析蔡氏二极管的I-V特性,然后根据这一特性模拟在不同初始条件下电路的演化,并从两个电容器两端电压振荡的李萨如图中管窥混沌现象.

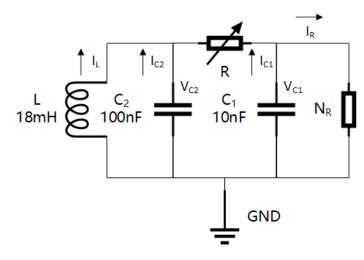


图 1: 蔡氏电路

1 蔡氏二极管的I - V特性

蔡氏二极管(Chua's diode)可以用一些简单的电子元件搭建,而且实现方式多种多样。本实验所用的蔡氏二极管由两个负阻抗转换器串联而成。因此,我们先分析负阻抗转换器的I-V特性,然后由此得出蔡氏二极管的I-V特性。

1.1 负阻抗转换器

如图2所示,负阻抗变换器(Negative impedance converter)是一个运算放大器上同时加了正反馈和负反馈得到.

运算放大器(Operational amplifier,简称运放)具有5个端口,分别是反向端(即图3中-号端)、非反向端(即图3中+号端)、输出端(即图3中三角形右边顶点端)、正电源端(即图3中 $V_{\rm pp}$ 对应端口)和负电源端(即图3中 $V_{\rm nn}$ 对应端口),其基本特性是可以在输出端产生正比于非反向端电压 V_{+} 和反向端(即图3中-号端)电压 V_{-} 之差的电压

$$V_0 = A \cdot (V_+ - V_-), \tag{1}$$

其中系数A称开环差动增益,它的值极大,通常可达10⁶. 当连接了运放的输出端和反向端,由于开环差动增益极大,当反向端电压稍低(高)于非反向端,则输出端电压急剧升高(降低),从而带动反向端电压升高(降低),形成负反馈,因此此时反向端和非反向端电压几乎相等,可近似视为短路(运放的虚短性质). 而由于运放输入阻抗很大,因此反向端和非反向端几乎无电流流入或流出运放,可以近似视为断路(运放的虚断性质).

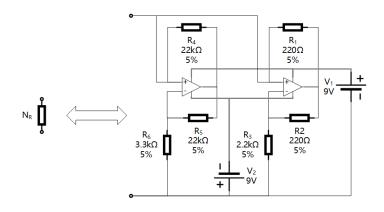


图 2: 蔡氏二极管

在图3所示的负阻抗变换器中,由于运放的虚断,电流I几乎全部由负阻抗变换器+端经过 R_f ,而几乎没有经 过运放,因此对 R_f 用欧姆定律有

$$I = \frac{V - V_o}{R_f}. (2)$$

而根据 R_a 和 R_b 的分压,非反向端电压和输出端电压有如下关系:

$$V_n = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_o. (3)$$

又由于运放的虚短,

$$V = V_p = V_n. (4)$$

上面三式联立可得,在运放的输出电压未达到饱和的条件下,负阻抗变换器I-V关系可表为

$$I = -\frac{R_a}{R_b R_f} V. (5)$$

当运放的输出电压达到饱和, 以正饱和为例, 此时

$$V_o = V_{\rm pp} \tag{6}$$

$$V = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{\rm pp},\tag{7}$$

$$V = \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{\text{pp}},$$

$$I = -\frac{R_a}{R_f (R_a + R_b)} V_{\text{pp}}.$$
(8)

若继续增大负阻抗变换器两端的输入电压,则 $V=V_p>V_n$,但运放输出电压不再增大,依然为 $V_o=V_{\rm pp}$,式(2)依 然成立,故负阻抗变换器此时的I-V关系可表为

$$I = \frac{V - V_{\rm pp}}{R_f}. (9)$$

同理可得当输入反向电流,使电压达到饱和后,负阻抗变换器的V-I关系变为

$$I = \frac{V - V_{\rm nn}}{R_f}.\tag{10}$$

综上,负阻抗变换器的V-I关系是非线性的:

$$I = \begin{cases} \frac{V - V_{\text{nn}}}{R_f}, & V < \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{\text{nn}}, \\ -\frac{R_a}{R_b R_f} V, & \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{\text{nn}} \le V \le \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{\text{pp}}, \\ \frac{V - V_{\text{pp}}}{R_f}, & V > \frac{R_b}{R_a + R_b} V_{\text{pp}}. \end{cases}$$
(11)

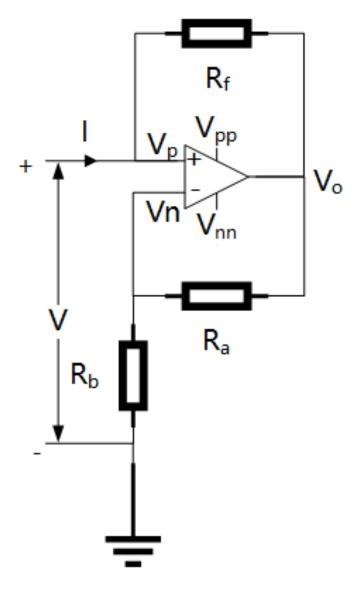


图 3: 负阻抗变换器

本实验中蔡氏二极管中的两个负阻抗变换器的V-I特性可分别表为

$$I = f_{1}(V) = H\left(-\frac{R_{3}}{R_{2} + R_{3}}V_{1} - V\right) \times \left(\frac{V + V_{2}}{R_{1}}\right) + H\left(\frac{R_{3}}{R_{2} + R_{3}}V_{2} - V\right) \times H\left(V + \frac{R_{3}}{R_{2} + R_{3}}V_{1}\right) \times \left(\frac{R_{2}}{R_{3}R_{1}}V\right) + H(V - \frac{R_{3}}{R_{2} + R_{3}}V_{2}) \times \left(\frac{V - V_{1}}{R_{1}}\right), \quad (5 阻抗变换器1 (含R_{1}, R_{2}, R_{3}))$$

$$I = f_{2}(V) = H\left(-\frac{R_{6}}{R_{5} + R_{6}}V_{1} - V\right) \times \left(\frac{V + V_{5}}{R_{4}}\right) + H\left(\frac{R_{6}}{R_{5} + R_{6}}V_{2} - V\right) \times H\left(V + \frac{R_{6}}{R_{5} + R_{6}}V_{1}\right) \times \left(\frac{R_{5}}{R_{6}R_{4}}V\right) + H(V - \frac{R_{6}}{R_{5} + R_{6}}V_{2}) \times \left(\frac{V - V_{1}}{R_{4}}\right), \quad (5 阻抗变换器2 (含R_{4}, R_{5}, R_{6}))$$

$$(13)$$

其中用了单位阶跃函数 $H(x)=\left\{ egin{array}{ll} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{array}
ight.$ 来刻画V-I特性的分段性质,以方便在代码中的表示。两个负阻抗变换器的V-I特性曲线分别如图4所示。

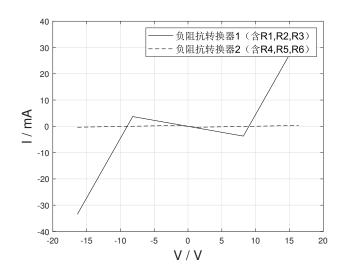


图 4: 负阻抗变换器 I-V特性曲线

1.2 蔡氏二极管的I - V特性

蔡氏二极管中两个负阻抗变换器并联,因此其总电压相等,总电流相加. 故蔡氏二极管的I - V特性为

$$I = f(V) = f_1(V) + f_2(V), (14)$$

如图5所示.

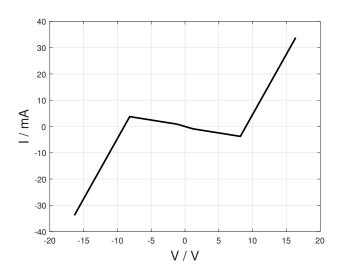


图 5: 蔡氏二极管 I-V特性曲线

2 蔡氏电路模拟

蔡氏电路中,电感L两端的电压 V_{C2} 正比于通过电感的电流 I_L 的变化速率

$$V_{C2} = -L \frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t}.\tag{15}$$

通过电容 C_2 的电流 I_{C_2} 正比于电容 C_2 两端的电压 V_{C_2} 的变化速率

$$I_{C2} = -C_2 \frac{\mathrm{d}V_{C2}}{\mathrm{d}t}. (16)$$

通过电容 C_1 的电流 I_{C_1} 正比于电容 C_1 两端的电压 V_{C_1} 的变化速率

$$I_{C1} = -C_1 \frac{\mathrm{d}V_{C1}}{\mathrm{d}t}. (17)$$

由基尔霍夫第二定律,从接地点开始经电容 C_2 、过可变电阻R和电容 C_1 回到接地点,电势变化为0:

$$V_{C2} - (I_L + I_{C2})R - V_{C1} = 0. (18)$$

故可将经过电容 C_2 的电流 I_{C2} 表为

$$I_{C2} = \frac{V_{C2} - V_{C1}}{R} - I_L. (19)$$

又由蔡氏二极管的V-I曲线有

$$I_N = f(V_{C1}) \tag{20}$$

其中,根据基尔霍夫第一定律,经过蔡氏二极管的电流 I_N 可表为

$$I_N = I_L + I_{C1} + I_{C2}. (21)$$

联立上面两式并代入(19)可将经过电容 C_1 的电流 I_{C_1} 表为

$$I_{C1} = f(V_{C1}) - \frac{V_{C2} - V_{C1}}{R}. (22)$$

将 I_{C1} 和 I_{C2} 的表达式(22)(19)分别回代入式(17)(16)并与式(15)联立得到微分方程组

$$\begin{cases}
\frac{dI_L}{dt} = -\frac{1}{L}V_{C2}, \\
\frac{dV_{C1}}{dt} = -\frac{1}{C_1}\left[f(V_{C1}) - \frac{V_{C2} - V_{C1}}{R}\right], \\
\frac{dV_{C2}}{dt} = -\frac{1}{C_2}\left(\frac{V_{C2} - V_{C1}}{R} - I_L\right).
\end{cases} (23)$$

在不同的条件(改变可变电阻阻值R,改变初始条件 $V_{C2}(t=0)$ 等)下求解以上微分方程组,得到蔡氏电路的 V_{C1} 和 V_{C2} 的演化轨迹如组图6和7所示.

由图中,我们发现初始条件的微小改变就可以引起电路演化路径完全不同,这是混沌现象的典型体现.

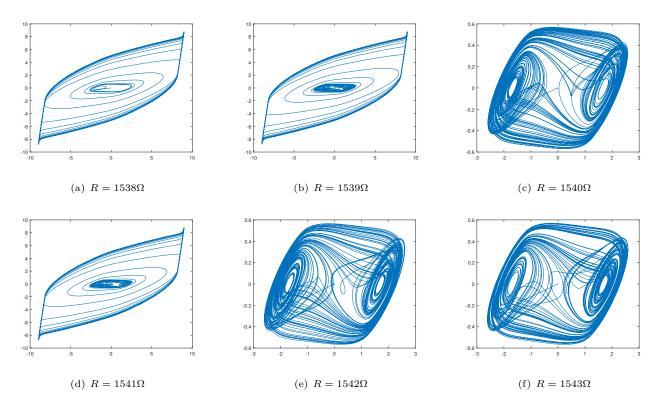


图 6: 设定初始条件 $I_L(t=0)=0$, $V_{C1}(t=0)=0.01$, $V_{C2}(t=0)=-0.01$,微调可变电阻阻值得到的,以 V_{C1} 为横轴,以 V_{C2} 为纵轴的李萨如图

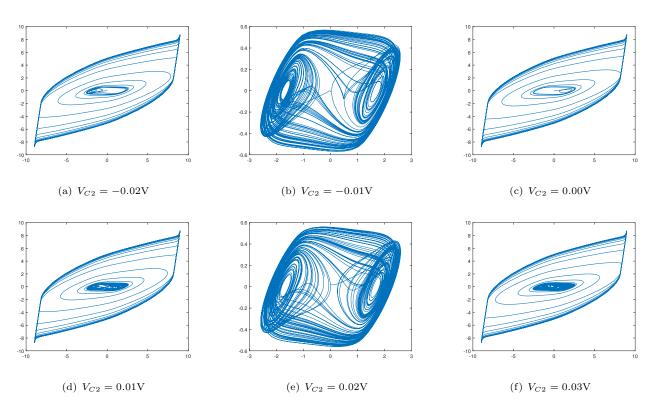


图 7: 设定可变电阻阻值 $R=1540\Omega$,初始条件 $I_L(t=0)=0$, $V_{C1}(t=0)=0.01$,微调初始条件 $V_{C2}(t=0)$ 得到的,以 V_{C1} 为横轴,以 V_{C2} 为纵轴的李萨如图