第一题：1.解：因为假设冰面绝对光滑，远动员只受重力和冰面对其的支持力，在水平方向不受力，在竖直方向不产生力矩，故在竖直方向上角动量守恒，有

$$2\mathrm{m}\mathrm{r}_1^2\omega_1 = 2mr_2^2\omega_2$$

解得

$$\omega_2 = \frac{\mathrm{r}_1^2\omega_1}{r_2^2}$$

运动员初始转动能为

$$\mathrm{E}_1 = \frac{1}{2}(2m)(\omega_1 r_1)^2 = m\omega_1^2\mathrm{r}_1^2$$

最终转动能为

$$\mathrm{E}_2 = \frac{1}{2}(2m)(\omega_2 r_2)^2 = m\frac{\omega_1^2\mathrm{r}_1^4}{r_2^2}$$

这个过程中转动能的变化量为

$$\Delta\mathrm{E} = \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 = m\omega_1^2(\frac{\mathrm{r}_1^4}{r_2^2} - \mathrm{r}_1^2)$$

2.解：运动员将两个小球匀速且缓慢地相对于自己向里拉，则当拉至与自己距离为 x 时，根据角动量守恒，角速度为

$$\omega(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{r}_1^2\omega_1}{x^2}$$

此时总拉力大小为

$$\mathrm{F(x)} = 2\mathrm{m}\omega(\mathrm{x})^2\mathrm{x} = \frac{2m\omega_1^2 r_1^4}{x^3}$$

这一过程做的总功大小为

$$\mathrm{W} = \int_{r_2}^{r_1} F(x)dx = \int_{r_2}^{r_1}\frac{2m\omega_1^2 r_1^4}{x^3}dx = 2m\omega_1^2 r_1^4\int_{r_2}^{r_1}\frac{1}{x^3}dx = 2m\omega_1^2 r_1^4\left[-\frac{1}{2r_1^2} - \left(-\frac{1}{2r_2^2}\right)\right]$$

$$= m\omega_1^2(\frac{\mathrm{r}_1^4}{r_2^2} - \mathrm{r}_1^2)$$

等于这个体系增加的转动能。

第二题：1.解：设陀螺原有角动量为L_0，在时间 dt 内，陀螺角动量的变化量为 dL，其角动量改变的角度为$d\varphi$，陀螺进动的角速度为Ω，重力产生的力矩提供了陀螺水平方向上的角动量变化量，即

$$\mathrm{dL} = \mathrm{mgR}\sin\theta\, dt = L_0 \cdot d\varphi = I\omega\sin\theta\cdot d\varphi$$

解得

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgR}{I\omega}$$

方向为从上往下看逆时针方向。

2.答：进动角速度的大小Ω与当地的重力加速度 g，陀螺质心到底部距离 R，以及陀螺自传角速度ω有关。
当地重力加速度 g 越大，陀螺质心到底部距离 R 越小，陀螺自转角速度ω越小，则陀螺进动角速度Ω越大（因为$\mathrm{I} \propto \mathrm{mR}^2$，故$\Omega \propto \frac{1}{R}$，进动角速度与陀螺质量无关，而与陀螺自转角速度

成负相关）。

3.答：陀螺质心从静止到绕轴转动的过程中，桌面对陀螺支点的摩擦力提供了陀螺质心的加速度。
因为若将陀螺置于光滑的桌面上且其支点不被固定，转动陀螺并释放之，则陀螺的支点会在桌面上漂移，而其质心实际上在水平方向上是不移动的，如图 1。而当陀螺支点与桌面的摩擦系数足够大或陀螺支点固定在桌面上不动（如本题），则桌面对陀螺支点有一个阻碍其漂移趋势的摩擦力，且这个摩擦力恒与陀螺自转角速度（即陀螺自转轴所指方向）垂直，这一摩擦力对陀螺产生了侧向的冲量，从而使陀螺的质心产生了侧向的动量。

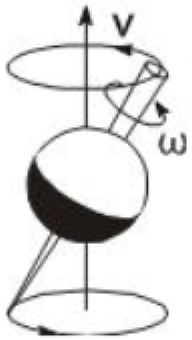

图 1 陀螺在光滑水平面上自转加进动的情形
陀螺质心的动能由两部分转化而来，一部分是陀螺自转的一部分动能，另一部分是陀螺的一部分重力势能。

第三题：1.解： 设塑料板横向长度为 l，质量为 m，以其质心为转轴的转动惯量为 I，用手击打塑料板的力恒为 F，考虑到手对塑料板做功相同，塑料被击打中的点在外力的作用下运动了相同位移Δx。
击打塑料板边缘：
设塑料板质心平动的速度为v_1，塑料板绕质心转动的速度为ω。
根据动能定理，有

$$F\Delta x=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

以击打点对应的实验室参考系中的点为转轴，塑料板所受的力矩为 0，故在塑料板开始运动的瞬间，相对于击打点对应的实验室参考系中的点，位于塑料板左边缘的那一点的角动量为 0，即在塑料板开始运动的瞬间，在实验室参考系中，位于塑料板左边缘的那一点在手击打塑料板的力的平行方向上的速度为 0，有

$$v_1-\omega\cdot\frac{1}{2}l=0$$

两式联立，解得

$$v_1=\sqrt{\frac{F\Delta x}{\frac{1}{2}m+\frac{2I}{l^2}}}$$

击打塑料板中心：
以塑料板质心为转轴，手击打塑料板的力的力矩为 0，故塑料板相对于质心转动角速度为 0，设塑料板质心平动的速度为v_2。
根据动能定理，有

$$F\Delta x = \frac{1}{2} m v_2^2$$

解得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}}$$

显然$v_1 < v_2$，故在塑料板落地的相同时间内，击中塑料板中心的情况下塑料坠地时离出发点的距离更远。

2.解：设塑料板横向长度为 l，质量为 m，以其质心为转轴的转动惯量为 I，用手击打塑料板的力为恒为 F，击打塑料板边缘的情况下作用时间为Δt_1，击打塑料板中心的情况下作用时间为Δt_2。

击打塑料板边缘：

设塑料板质心平动的速度为v_1，塑料板绕质心转动的速度为ω。

以击打点对应的实验室参考系中的点为转轴，塑料板所受的力矩为 0，故在塑料板开始运动的瞬间，相对于击打点对应的实验室参考系中的点，位于塑料板左边缘的那一点的角动量为 0，即在塑料板开始运动的瞬间，在实验室参考系中，位于塑料板左边缘的那一点在手击打塑料板的力的平行方向上的速度为 0，有

$$v_1 - \omega \cdot \frac{1}{2} l = 0$$

塑料板右边缘在力作用时的运动近似可看做匀速直线运动，其位移

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_1 + \omega \frac{l}{2}) \Delta t_1$$

由动量定理，有

$$F\Delta t_1 = m v_1$$

三式联立，解得

$$v_1 = \sqrt{\frac{F\Delta x}{m}}$$

击打塑料板中心：

以塑料板质心为转轴，手击打塑料板的力的力矩为 0，故塑料板相对于质心转动角速度为 0，设塑料板质心平动的速度为v_2。

塑料板的运动近似可看做匀速直线运动，其位移为

$$\Delta x = \frac{1}{2} v_2 \Delta t_2$$

以塑料板的质心为参考系，由角动量定理，有

$$F\Delta t_2 = m v_2$$

解得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}}$$

显然$v_1 < v_2$，故在塑料板落地的相同时间内，击中塑料板中心的情况下塑料坠地时离出发点的距离更远。