问题一：解：设处于价带能级上的电子个数为 N，根据热力学规律，在稳定状态下，掺杂的磷中多余的电子满足玻尔兹曼分布，即在温度 T=300K 下，处于导带能级$E=1.12\mathrm{eV}=1.79\times10^{-19}J$上的电子个数为$Ne^{-\frac{E}{k_BT}}$，处于导带下$\Delta E=0.046\mathrm{eV}=7.4\times10^{-21}\mathrm{J}$能级处的电子个数为$\mathrm{N}e^{-\frac{E-\Delta E}{k_BT}}$，则在磷的掺杂浓度$\rho=1\times10^{17}cm^{-3}$，体积$\mathrm{V}=1cm^3$的硅半导体中，磷提供的游离电子数为

$$\rho\mathrm{V}=\mathrm{N}e^{-\frac{E}{k_BT}}+Ne^{-\frac{E-\Delta E}{k_BT}}$$

其中玻尔兹曼常数$k_B=1.38\times10^{-23}J/K$。

解得

$$\mathrm{N}\approx9.09\times10^{34}$$

则

$$Ne^{-\frac{E}{k_BT}}\approx1.45\times10^{16}$$

故$1\mathrm{cm}^3$硅半导体中有1.45×10^{16}个磷提供的电子跃迁到了半导体的导带能级上。

问题二：1.答：这个冰箱能降温。

解：因为冰箱制冷时，其原理相当于一个热机对外界做功的逆过程，即制冷剂从低温处（冰箱内部，T_2）吸收热量Q_2，并对外界（电路）做负功 W（消耗电能），将热量$\mathrm{Q}_1=Q_2+W$转移到高温处（冰箱外部，T_1）。

根据热力学第二定律，所有热机中可逆热机效率最高，为

$$\eta_{max}=\frac{T_1-T_2}{T_1}$$

考虑冰箱制冷所能降到的热力学极限温度，设冰箱为可逆热机，则

$$\eta=\frac{\mathrm{W}}{Q_2+W}=\frac{T_1-T_2}{T_1}$$

随着时间的推移，冰箱内部温度T_2不断下降，即$\frac{T_1-T_2}{T_1}$不断增大，即$\eta=\frac{\mathrm{W}}{Q_2+W}$不断增大，又因为冰箱功率 W 不变，故冰箱制冷剂从冰箱内部吸收热量的功率Q_2不断减小，当制冷剂从冰箱中吸收热量的功率与灯泡（产生热量）的功率）（100 瓦）相等时，冰箱内部温度达到恒定而不再下降，此时

$$\frac{100\text{ 瓦}}{100\text{ 瓦}+100\text{ 瓦}}=\frac{T_1-T_2}{T_1}$$

故

$$\mathrm{T}_2=\frac{1}{2}T_1$$

即冰箱内热力学温度达到冰箱外部热力学温度（室温）的二分之一，若室温为 300K，则冰箱能降到的热力学极限温度为 150K。

2.答：假设空调与电阻丝的功率相同，空调制热的原理相当于一个热机对外界做功的逆过程，即制冷剂从低温处（外挂机处）吸收热量Q_2，并且对外界（电路）做负功（消耗电能）在高温处（室内机）放出热量$\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q}_2+W$，即空调制热为$\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q}_2+W$，而电阻丝加热器制热

的原理为单纯地将电能转化为热能，相同时间内，电阻丝制热等于其消耗的电能 W，显然在相同的时间内，空调的制热量大于等功率的加热电阻丝的制热量，即空调加热的效率比同功率的电阻丝加热器要高。

3.答：制热空调外挂机吹出来的风比环境温度低。因为制热时，空调中的制冷剂在室内机处被压缩液化放出热量，在外挂机处气化吸收热量，使外挂机处吹出来的风温度降低。

4.答：同样的一台空调在夏天制冷的时候，它的外挂机吹出来的风比环境温度高。因为制冷时，空调中的制冷剂在室内机处气化吸收热量，在外挂机处被压缩液化释放热量，使外挂机吹出来的风温度升高。

问题三：1.证明：根据牛顿第二定律，在电场 E 的驱动下质量为 m，电量为 e 的电子的加速度为

$$a=\frac{Ee}{m}$$

在$0\sim\mathrm{t}$时间间隔内不发生碰撞而在$\mathrm{t}\sim\mathrm{t}+\mathrm{dt}$时刻内发生碰撞的概率为$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}dt}{\tau}$，这一类电子中速度达到 v 的个数所占的比例为$\frac{\mathrm{dv}}{at}=\frac{dv}{Eet/m}$。

则在所有电子中速度达到 v 的个数占的比例为

$$f(\mathrm{v})\mathrm{dv}=\int_{\frac{v}{Ee/m}}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}dt}{\tau}\frac{dv}{Eet/m}$$

在某一个时刻，所有电子的平均漂移速度为

$$<\mathrm{v}>=\int_0^{+\infty}vf(v)dv=\int_0^{+\infty}vf(v)dv$$

2.证明：设 t=0 时刻有N_0个电子，到 t 时刻为止没有经历过碰撞的电子数为 N(t)。

因为平均碰撞时间为τ，表示 dt 时间内发生碰撞的概率为dt/τ，故在 dt 时间内发生碰撞的电子数为

$$\mathrm{dN(t)}=-\mathrm{N(t)dt}/\tau$$

又可表示为

$$\frac{\mathrm{dN(t)}}{N(t)}=-dt/\tau$$

两边同时积分得

$$\mathrm{lnN(t)}=-\frac{t}{\tau}+\mathrm{Constant}$$

整理得

$$\mathrm{N(t)}=ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始电子数$\mathrm{N(0)}=\mathrm{N}_0$可得

$$a=\mathrm{N}_0$$

故到 t 时刻为止都没经历过碰撞的电子数 N(t)与时间 t 的关系为

$$\mathrm{N(t)}=\mathrm{N}_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

在N_0个电子中，在$0 \sim t$时间间隔内不发生碰撞而在$t \sim t + dt$时刻内发生碰撞的电子数即为到 t 时刻都没经历过碰撞的电子数与到 t+dt 时刻都没经历过碰撞的电子数之差

$$\mathrm{dN(t) = N(t) - N(t + dt) = N(t)dt/\tau = N_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \mathrm{dt/\tau}$$

故单个电子在$0 \sim t$时间间隔内不发生碰撞而在$t \sim t + dt$时刻内发生碰撞的概率为

$$\frac{\mathrm{dN(t)}}{N_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \mathrm{dt/\tau}$$

问题四：1.解：颗粒物的动力学方程$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v$可化为

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\gamma}{m} dt$$

两边同时积分得

$$\ln v = -\frac{\gamma}{m} t + \mathrm{Constant}$$

整理得，颗粒物速度随时间的变化关系为

$$v(t) = ae^{-\frac{mt}{\gamma}}$$

其中 a 为待定的系数。
将初速度$\mathrm{v(0) = v_0}$代入可得

$$a = v_0$$

故一个颗粒物速度随时间的变化关系为

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{mt}{\gamma}}$$

2.解：第一个式子左端的量纲为

$$[< x^2 >] = m^2$$

右端的量纲为

$$[\mathrm{2kTt/\gamma}] = \mathrm{J/K \cdot K \cdot s} \cdot [\gamma^{-1}] = \mathrm{kg \cdot m^2} \cdot s^{-1} \cdot [\gamma^{-1}]$$

由

$$[< x^2 >] = [\mathrm{2kTt/\gamma}]$$

得$1/\gamma$的量纲为

$$[\gamma^{-1}] = \mathrm{s \cdot kg^{-1}}$$

而μ的量纲为

$$[\mu] = [\tau/\mathrm{m}] = \mathrm{s \cdot kg^{-1}}$$

故$1/\gamma$与μ是同一个量纲。

3.证明：由于在 dt 时间内，颗粒发生碰撞的概率为$\frac{dt}{\tau}$，故经过 dt 时间，颗粒有$\frac{dt}{\tau}$的概率动量变为 0，有$(1 - \frac{dt}{\tau})$的概率动量保持不变，为 p(t)，因此统计平均意义上，经过 dt 时间，颗粒的动量为

$$\mathrm{p(t + dt) = p(t)}\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) + 0 \cdot \frac{dt}{\tau} = \mathrm{p(t)}\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)$$

题目中颗粒物的动力学方程$\mathrm{m}\frac{dv}{dt}=-\gamma v$可化为

$$\mathrm{m}\frac{d\frac{p}{m}}{dt}=-\gamma\frac{p}{m}$$

$$\mathrm{m}\frac{p(t+dt)-p(t)}{mdt}=-\gamma\frac{p(t)}{m}$$

代入$\mathrm{p(t+dt)=p(t)}\left(1-\frac{dt}{\tau}\right)$即可得

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{\tau}{\mathrm{m}}$$

又已知μ的表达形式为$\mu=\frac{\tau}{m}$，故$1/\gamma$与μ是同一个表达形式。