问题一：A：证明：由库仑定律得，当这对正电荷之间距离为 x 时，其库仑力为

$$\mathbf{F}(\mathrm{x})=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon x^3}\boldsymbol{x}$$

随着距离的增大而减小。

设当这对正电荷相距无穷远时的势能为 0，这对正电荷之间的势能即为将其中一正电荷固定不动，另一正电荷从无穷远处沿直线移至两者相距 x 处库仑力所做的功的相反数，在该过程中，对任意一段无穷小而趋向于 0 的位移$\mathbf{dx}$中，我们可以假定正电荷之间的库仑力不变，做功为

$$\begin{aligned}\mathrm{dW}&=\mathbf{F}(\mathrm{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\&=\mathrm{F}(\mathrm{x})\mathrm{dx}\cos\pi\\&=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon x^2}\mathrm{dx}\end{aligned}$$

将完成这些无穷小位移所做的功积分即可得到所做的总功

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\mathrm{x})&=\int_x^\infty \mathrm{dW}\\&=\int_x^\infty\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon x^2}\mathrm{dx}\right)\\&=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon}\int_x^\infty\left(\frac{1}{x^2}dx\right)\\&=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon}\int_x^\infty \mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\\&=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{x}\right)\\&=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon x}\end{aligned}$$

所以这对正电荷的势能为

$$\mathrm{U}(\mathrm{x})=-\mathrm{W}(\mathrm{x})=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon x}$$

为什么正号对应于斥力，负号对应于引力？

因为观察这两种保守力的公式， A 对 B 的力等于力的大小与由 A 指向 B 的单位向量的乘积，因此正号对应于斥力，负号对应于引力。且只有正号对应于斥力，负号对应于引力时，力所对应的势能符合客观实际情况，以无穷远处为零势能点，若两者之间为斥力，则当两者靠近时，斥力做负功，势能增大，从而势能为正，若两者之间为引力，则当两点靠近时，引力做正功，势能减小，从而势能为负。

B：解：

$$\begin{aligned}\mathrm{F}&=-\frac{dU(x)}{dx}\\&=-\frac{d\left(-\alpha\frac{e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)}}{x}\right)}{dx}\\&=\alpha\frac{d\frac{e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)}}{x}}{dx}\end{aligned}$$

$$= \alpha \frac{x \frac{de^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)}}{dx} - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)} \frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= \alpha \frac{x \frac{e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)}}{-\lambda} - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)}}{x^2}$$

$$= -\frac{\alpha e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)} \left(\frac{x}{\lambda} + 1\right)}{x^2}$$

C：答：汤川势用于计算粒子间的势能，其公式为

$$V_{Yukawa} = -g^2 \frac{e^{-kmr}}{r}$$

其中 g，k 均为正的常数，m 为传递两粒子间相互作用力的粒子的质量，r 为两粒子之间的距离。

传递原子核内部相互作用力（强相互作用力）的粒子为π介子，其静止质量大于 0，当两粒子（核子）间距离 r 增大时，式中分子呈指数减小，V_{Yukawa}由小于零迅速增大趋向于零而不再有明显变化，即粒子间相互作用力不再明显做功，也就是说粒子间的相互作用力也随距离增大很快趋近于零。

而传递库仑力的粒子为光子，其静止质量为 0，因此无论 r 如何变化，V_{Yukawa}式中分子 e 的指数恒为 0，$e^{-kmr} \equiv 1$，因此库仑力在任何空间尺度上均与粒子间距离的二次方成反比，随粒子间距离 r 的增大相对缓慢地趋近于 0。

因此，原子核内部相互作用力比库仑力随距离减小的快，在较小距离尺度上原子核内部相互作用力强于库仑力，在较大距离尺度上库仑力强于原子核内部相互作用力。

问题二：A：证明：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z)$$
$$= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \times (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})$$
$$= (a_y b_z \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + a_z b_y \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) + (a_z b_x \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + a_x b_z \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) + (a_x b_y \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + a_y b_x \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i})$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y) \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + (a_z b_x - a_x b_z) \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + (a_x b_y - a_y b_x) \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

B：证明：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

$$= \sqrt{(a_x b_y - a_y b_x)^2}\boldsymbol{k}$$

$$= \sqrt{a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x b_y a_y b_x}\boldsymbol{k}$$

$$= \sqrt{\frac{4(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)(a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x b_y a_y b_x)}{4(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}}\ \boldsymbol{k}$$

$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}\sqrt{\frac{4a_x^2 b_y^2 + 4a_y^2 b_x^2 - 8a_x b_y a_y b_x}{4(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}}\boldsymbol{k}$$

$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}\sqrt{\frac{4\left(a_x^2+a_y^2\right)\left(b_x^2+b_y^2\right)-4a_x^2b_x^2-4a_y^2b_y^2-8a_xb_ya_yb_x}{4\left(a_x^2+a_y^2\right)\left(b_x^2+b_y^2\right)}}\boldsymbol{k}$$

$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}\sqrt{1-\frac{4a_x^2b_x^2+4a_y^2b_y^2+8a_xb_ya_yb_x}{4\left(a_x^2+a_y^2\right)\left(b_x^2+b_y^2\right)}}\boldsymbol{k}$$

$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}\sqrt{1-\frac{4\left(a_xb_x+a_yb_y\right)^2}{4\left(a_x^2+a_y^2\right)\left(b_x^2+b_y^2\right)}}\ \boldsymbol{k}$$

$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}\sqrt{1-\left(\frac{2a_xb_x+2a_yb_y}{2\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}}\right)^2}\ \boldsymbol{k}$$

$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}\sqrt{1-\left(\frac{\left[a_x^2+b_x^2-(a_x-b_x)^2\right]+\left[a_y^2+b_y^2-\left(a_y-b_y\right)^2\right]}{2\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}}\right)^2}\ \boldsymbol{k}$$

$$=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}\sqrt{1-\left(\frac{\left(a_x^2+a_y^2\right)+\left(b_x^2+b_y^2\right)-\left[(a_x-b_x)^2+\left(a_y-b_y\right)^2\right]}{2\sqrt{a_x^2+a_y^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2}}\right)^2}\ \boldsymbol{k}$$

$$=\mathrm{ab}\sin\theta\ \ \boldsymbol{k}$$

C：证明：设$\boldsymbol{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$， $\boldsymbol{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$，$\boldsymbol{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$,则

$$左边=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

$$=\left(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\right)\times\left[\left(b_yc_z-b_zc_y\right)\boldsymbol{i}+(b_zc_x-b_xc_z)\boldsymbol{j}+\left(b_xc_y-b_yc_x\right)\boldsymbol{k}\right]$$
$$=\left[a_y\left(b_xc_y-b_yc_x\right)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)\right]\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+\left[a_z\left(b_yc_z-b_zc_y\right)-a_x\left(b_xc_y-b_yc_x\right)\right]\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$$
$$+\left[a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y\left(b_yc_z-b_zc_y\right)\right]\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$$
$$=\left[a_y\left(b_xc_y-b_yc_x\right)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)\right]\boldsymbol{i}+\left[a_z\left(b_yc_z-b_zc_y\right)-a_x\left(b_xc_y-b_yc_x\right)\right]\boldsymbol{j}$$
$$+\left[a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y\left(b_yc_z-b_zc_y\right)\right]\boldsymbol{k}$$

$$右边=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$=\left(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z\right)\left(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\right)-\left(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right)\left(c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}\right)$$
$$=\left[a_y\left(b_xc_y-b_yc_x\right)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)\right]\boldsymbol{i}+\left[a_z\left(b_yc_z-b_zc_y\right)-a_x\left(b_xc_y-b_yc_x\right)\right]\boldsymbol{j}$$
$$+\left[a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y\left(b_yc_z-b_zc_y\right)\right]\boldsymbol{k}$$
$$\therefore\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

D：证明：取时间dt内的粒子运动分析，设这一小段时间内粒子的位移为$d\boldsymbol{s}$，绕过等效圆心的角度为dθ，末速度为$\boldsymbol{v}'$，加速度为$\boldsymbol{a}$，加速度的切向分量为$a_{\parallel}$，法向分量为$a_{\perp}$，

$$v=\frac{ds}{dt}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$a_{\parallel}=\frac{v'-v\cos d\theta}{dt}$$

$$\approx \frac{v' - v}{dt}$$

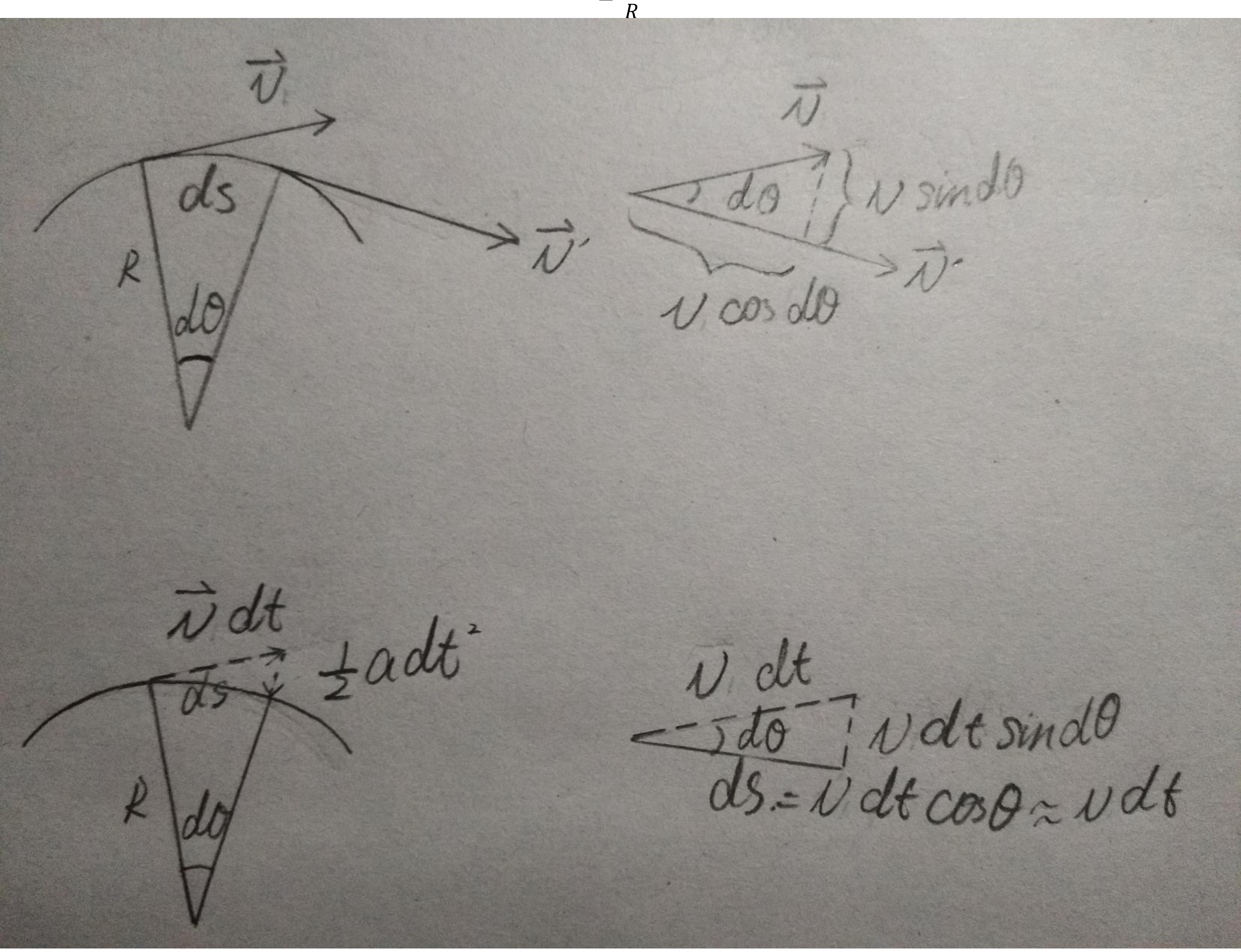
$$a_{\perp} = \frac{v \sin d\theta}{dt}$$

$$\approx \frac{v d\theta}{dt}$$

$$= \frac{v \frac{ds}{R}}{dt}$$

$$= \frac{v \frac{vdt}{R}}{dt}$$

$$= \frac{v^2}{R}$$



$\frac{d\boldsymbol{r}_{\parallel}}{dt}$在数学上为指向圆心的单位向量，因为$\boldsymbol{r}_{\parallel}$为沿着粒子所在处曲线切线方向的单位向量，$d\boldsymbol{r}_{\parallel}$**在**物理意义上代表粒子速度的方向，在数学上为以$\frac{\boldsymbol{v}}{v}$、$\frac{\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}''}$为两腰的等腰三角形的底边，这个等腰三角形的顶角为dθ，，底边与ds处的半径同向，所以$\frac{d\boldsymbol{r}_{\parallel}}{dt}$在物理意义上代表粒子速度的改变方向（法向），$\frac{d\boldsymbol{r}_{\parallel}}{dt}$在数学上为指向圆心的单位向量。

问题三：A：解：在参考系 B 中物体 m 受到的力有重力和惯性力。其中
重力为：

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$$

惯性力为：

$$\boldsymbol{F}_{惯} = -m\boldsymbol{a}$$

这两者的合力为：

$$\boldsymbol{F} = m(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{a})$$

B：由牛顿第二定律，对于 x 轴方向：

$$\mathrm{X} = -\frac{1}{2}at^2$$

对于 y 轴方向：

$$\mathrm{Y} = h - \frac{1}{2}gt^2$$

以上两式联立，消去 t 得

$$\mathrm{Y} = \frac{g}{a}X + h, (\mathrm{X} \leq 0)$$

C：不违背，因为参考系 B 相对于地面以加速度 a 向右运动，为非惯性参考系，而牛顿第三定律只适用于惯性参考系。在非惯性参考系中，为了使牛顿第二定律成立，引入了惯性力，惯性力是一种假想的力，而非客观存在。