1.A.证明函数$s=t^n$的导数为$\frac{ds}{dt}=nt^{n-1}$：

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^n-t^n}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[t^n+nt^{n-1}\Delta t+\frac{n(n-1)}{2}t^{n-2}\Delta t^2+\cdots+\Delta t^n\right]-t^n}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{nt^{n-1}\Delta t+\frac{n(n-1)}{2}t^{n-2}\Delta t^2+\cdots+\Delta t^n}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(nt^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}t^{n-2}\Delta t+\cdots+\Delta t^{n-1}\right)$$
$$=\mathrm{n}t^{n-1}$$

Q.E.D.

证明函数$s=\mathrm{c}u$的导数为$\frac{ds}{dt}=c\,\frac{du}{dt}$：

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{cu(t+\Delta t)-cu(t)}{\Delta t}$$
$$=\mathrm{c}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}$$
$$=\mathrm{c}\frac{du}{dt}$$

Q.E.D.

证明函数$s=\mathrm{u}+\mathrm{v}+\mathrm{w}+\cdots$的导数为$\frac{ds}{dt}=\frac{du}{dt}+\frac{dv}{dt}+\frac{dw}{dt}+\cdots$：

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[u(t+\Delta t)+v(t+\Delta t)+w(t+\Delta t)+\cdots]-[u(t)+v(t)+w(t)+\cdots]}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[u(t+\Delta t)-u(t)]}{\Delta t}+\frac{[v(t+\Delta t)-v(t)]}{\Delta t}+\frac{[w(t+\Delta t)-w(t)]}{\Delta t}\cdots\right\}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}+\cdots$$
$$=\frac{du}{dt}+\frac{dv}{dt}+\frac{dw}{dt}+\cdots$$

Q.E.D.

证明函数$s=\mathrm{c}$的导数为$\frac{ds}{dt}=0$：

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c-c}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}0$$

$$= 0$$

Q.E.D.

证明函数$s = u^a v^b w^c \cdots$导数为$\frac{ds}{dt} = s\left(\frac{a}{u}\frac{du}{dt} + \frac{b}{v}\frac{dv}{dt} + \frac{c}{w}\frac{dw}{dt} + \cdots\right)$：

①让我们先来证明函数$y = pq$关于 x 的导数为$\frac{dy}{dx} = q\frac{dp}{dx} + p\frac{dq}{dx}$：

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x+\Delta x)q(x+\Delta x) - p(x)q(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x+\Delta x)q(x+\Delta x) - p(x)q(x+\Delta x) + [p(x)q(x+\Delta x) - p(x)q(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{q(x+\Delta x)[p(x+\Delta x) - p(x)] + p(x)[q(x+\Delta x) - q(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[q(x+\Delta x)\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} + p(x)\frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} q(x)\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} p(x)\frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x}$$

$$= \mathrm{q}\frac{dp}{dx} + p\frac{dq}{dx}$$

②再来证明函数$y = p^r$关于 x 的导数为$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p^r(x+\Delta x) - p^r(x)}{\Delta x}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{p(x) + [p(x+\Delta x) - p(x)]\}^r - p^r(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{rp^{r-1}(x)[p(x+\Delta x) - p(x)] + \frac{r(r-1)}{2}p^{r-2}(x)[p(x+\Delta x) - p(x)]^2 + \cdots + [p(x+\Delta x) - p(x)]^r}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{rp^{r-1}(x)[p(x+\Delta x) - p(x)]}{\Delta x}$$

$$= \mathrm{r}p^{r-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x}$$

$$= \mathrm{r}p^{r-1}\frac{dp}{dx}$$

③最后我们来证明原题：

首先由①得

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s}{u^a}\frac{du^a}{dt} + u^a\frac{d\frac{s}{u^a}}{dt}$$

$$= \frac{s}{u^a}\frac{du^a}{dt} + \frac{s}{v^b}\frac{dv^b}{dt} + v^b\frac{d\frac{s}{v^b}}{dt}$$

…以此类推，终得

$$= \frac{s}{u^a}\frac{du^a}{dt} + \frac{s}{v^b}\frac{dv^b}{dt} + \frac{s}{w^c}\frac{dw^c}{dt} + \cdots$$

接着由②得

$$\frac{du^a}{dt} = au^{a-1}\frac{du}{dt}$$

$$\frac{dv^b}{dt} = bu^{b-1}\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dw^c}{dt} = cu^{c-1}\frac{dw}{dt}$$
$$\cdots$$

则

$$\frac{ds}{dt} = \frac{sa}{u}\frac{du}{dt} + \frac{sb}{v}\frac{dv}{dt} + \frac{sc}{w}\frac{dw}{dt} + \cdots$$
$$= \mathrm{s}\left(\frac{a}{u}\frac{du}{dt} + \frac{b}{v}\frac{dv}{dt} + \frac{c}{w}\frac{dw}{dt} + \cdots\right)$$

Q.E.D.

B.证明若有$s(t) = U(V(t))$，则$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U(V)}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}$：

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{U\big(V(t+\Delta t)\big) - U(V(t))}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{U\big(V(t+\Delta t)\big) - U(V(t))}{V(t+\Delta t) - V(t)}\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta V\to \infty}\frac{U\big(V(t+\Delta t)\big) - U(V(t))}{V(t+\Delta t) - V(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{\mathrm{d}U(V)}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}$$

Q.E.D.

C.解：设下方圆管高度$\hbar_1$，半径r_1，圆台高度为$\hbar_3$，上方圆管高度$\hbar_2$，半径r_2，其中由图得，$r_1 < r_2$.

首先让我们来推导圆台的体积公式：

我们先将高为 H，下底半径为r_1,上底半径为r_2的圆台横切为 n 个高度相等的扁平圆台，当$\mathrm{n}\to\infty$时，我们可将每个扁平小圆台视为高度为$\frac{H}{n}$的圆柱体，其中由下向上数第 i 个圆柱的体积为

$$V_i = \pi(r_1 + \frac{\mathrm{i}(r_2 - r_1)}{n})^2\frac{H}{n}$$

求和可得圆台体积：

$$\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\pi(r_1 + \frac{\mathrm{i}(r_2 - r_1)}{n})^2\frac{H}{n}$$

$$= \pi\sum_{i=1}^{n}\left(r_1^2 + 2\frac{ir_1(r_2 - r_1)}{n} + \frac{i^2(r_2 - r_1)^2}{n^2}\right)\frac{H}{n}$$

$$= \pi[\sum_{i=1}^{n}\frac{r_1^2}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{2ir_1(r_2 - r_1)}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2(r_2 - r_1)^2}{n^3}]\mathrm{H}$$

$$= \pi\left(r_1^2 + \frac{(n+1)r_1(r_2-r_1)}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)(r_2-r_1)^2}{6n^2}\right)H$$

$$= \frac{\pi}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)\mathrm{H}$$

根据圆柱及求得的圆台体积公式，我们可以得出不同 h 下的体积公式：

当$\mathrm{h} \le h_1$时，$\mathrm{V} = \pi r_1^2 h$

当$h_1 < \mathrm{h} < h_1 + h_3$时，$\mathrm{V} = \pi r_1^2 h_1 + \frac{\pi}{3}[r_1^2 + \left(r_1 + \frac{(r_2-r_1)(h-h_1)}{h_3}\right)_2^2 + r_1(r_1 + \frac{(r_2-r_1)(h-h_1)}{h_3})]h_3$

当$\mathrm{h}_1 + h_3 \le h \le h_1 + h_2 + h_3$时，$\mathrm{V} = \pi r_1^2 h_1 + \frac{\pi}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)h_3 + \pi r_2^2(h - h_1 - h_3)$

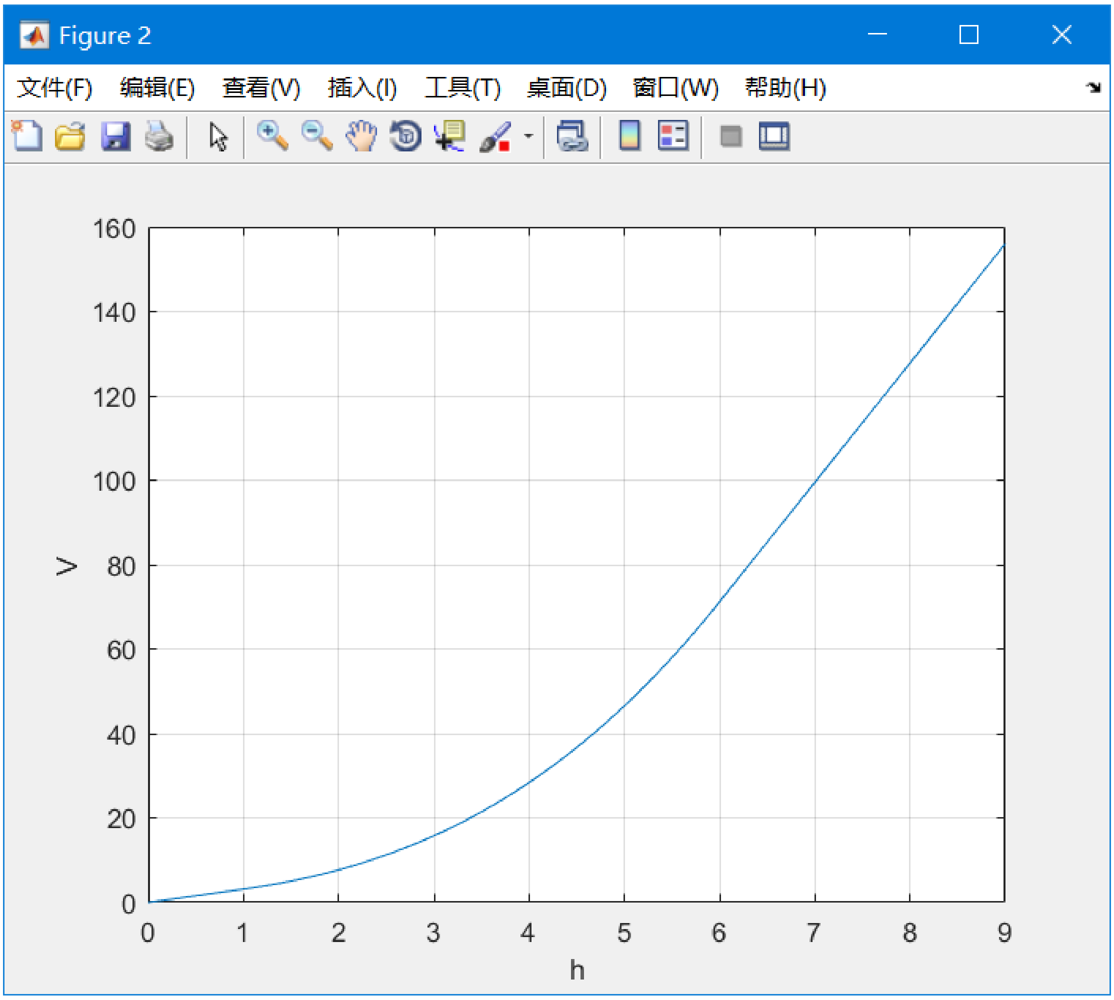
```
function V = rank(r1,r2,h1,h2,h3)

h = 0:0.01:(h1 + h2 +h3)

V = pi .* r1.^2 .* h .*(h >= 0 & h <= h1) + (pi .* r1.^2 .* h1 + pi .* (h -
h1) .* (r1.^2 + (r1 + ((h - h1) .* (r2 - r1) / h3)).^2 + r1 * (r1 + (h - h1) .* (r2
- r1) / h3))/3) .* (h > h1 & h < (h1 + h3)) + (pi .* r1.^2 .* h1 + pi .* (r1.^2
+ r2.^2 + r1 .* r2) .* h3 / 3 + pi .* (h - h1 - h3) .* r2.^2) .* (h >= (h1 + h3)
& h <= (h1 + h2 + h3))

plot(h,V)

xlabel('h')

ylabel('V')

grib on
```

将以上脚本在 MATLAB 中赋值

V1(1,3,1,3,5)

运行得下图：

（函数图像趋势为先从 0 开始线性单调递增（$h \le h_1$），然后当 h 大到某个值开始加速递增（$h_1 < h < h_1 + h_3$），最后当 h 继续增大重新开始线性单调递增，但递增趋势大于第一次（$h_1 + h_3 \le h \le h_1 + h_2 + h_3$），由于取的数据的原因，图上的趋势不是很明显）



2.（以下解题过程中数据皆采用国际单位制（SI））

位移递推公式：

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \frac{v_t + v_{t+\Delta t}}{2}\Delta t$$

速度递推公式：

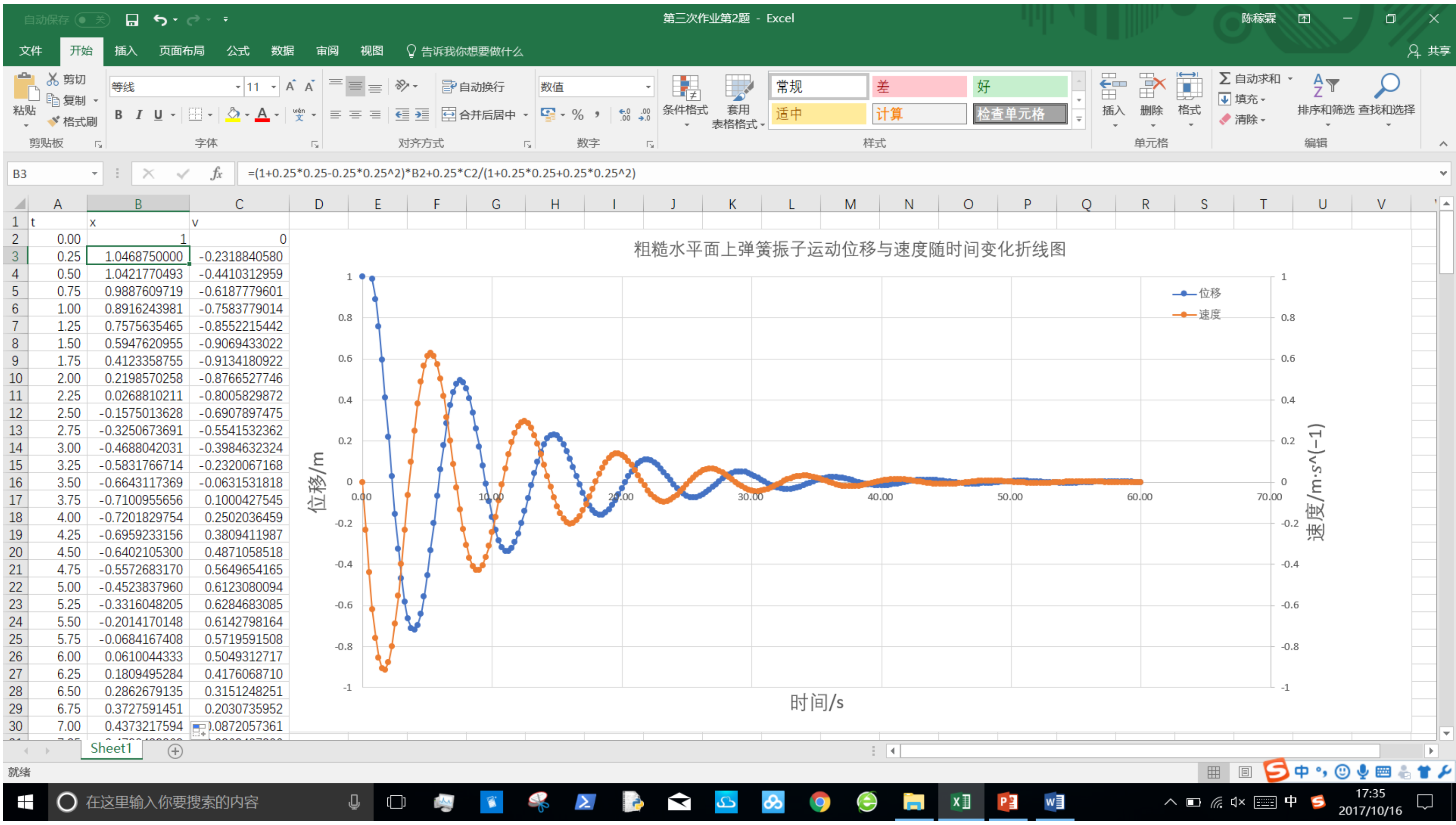
$$v_{t+\Delta t} = v_t + \frac{(-K\frac{x_t + x_{t+\Delta t}}{2} - \mu\frac{v_t + v_{t+\Delta t}}{2})}{M}\Delta t$$

以上两式联立并代入数据$\mu = 0.5\mathrm{Ns/m}$，$K = 1\mathrm{N/m}, M = 1\mathrm{kg}$，得

$$x_{t+\Delta t} = \frac{(1 + 0.25\Delta t - 0.25\Delta t^2)x_t + \Delta t v_t}{1 + 0.25\Delta t + 0.25\Delta t^2}$$

$$v_{t+\Delta t} = \frac{(1 - 0.25\Delta t - 0.25\Delta t^2)v_t - \Delta t x_t}{1 + 0.25\Delta t + 0.25\Delta t^2}$$

（为显示原始数据及做题过程采用高清大图，若字太小请放大）



分析：若水平桌面绝对光滑，则弹簧振子所受弹簧弹力将与振子位移成正比，弹簧振子将做简谐振动，然而如图所示，由于受到水平桌面的摩擦力，弹簧振子运动过程中位移与速度随时间函数图像的振幅随时间的推移而逐渐减小，并趋向于 0，因此，我们可以说该弹簧振子在做一种阻尼振动。