问题一：A：答：将探针视作一个简谐振子，则其机械能的表达式为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

其中 p 为简谐振子的动量，m 为简谐振子的质量，ω_0为简谐振子的本征频率，x 为简谐振子偏离平衡位置的位移，则$\frac{p^2}{2m}$即为简谐振子的动能，$\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$即为简谐振子的弹性势能。

根据热力学原理，简谐振子的弹性势能的平均值与温度的关系为

$$<\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2>=\frac{1}{2}k_BT$$

其中k_B为玻尔兹曼常数，T 为温度。

又$\omega_0^2=k/m$，故由此可得简谐振子（探针）的弹性系数为

$$k=\frac{k_BT}{<x^2>}$$

其中k_B为常数，T 和$<x^2>$均易测量，由此得到探针的弹性系数。

B：解：设室温为 293K（20℃），根据 A 中的公式得探针的弹性系数为

$$k=\frac{k_BT}{<x^2>}=\frac{1.38\times10^{-23}J/K\times293K}{24\times10^{-20}m^2}\approx0.0169N/m$$

问题二：解释：分别以v_x，v_y和v_z为坐标轴，构建空间直角坐标系。

由玻尔兹曼分布规律可得，平衡态气体中分子速率分布的密度为

$$f(v_x,v_y,v_z)=N(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_x^2}{kT}}dx)(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_y^2}{kT}}dy)(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}}dz)$$
$$=N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}e^{-\frac{\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{kT}}dxdydz$$

因为$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

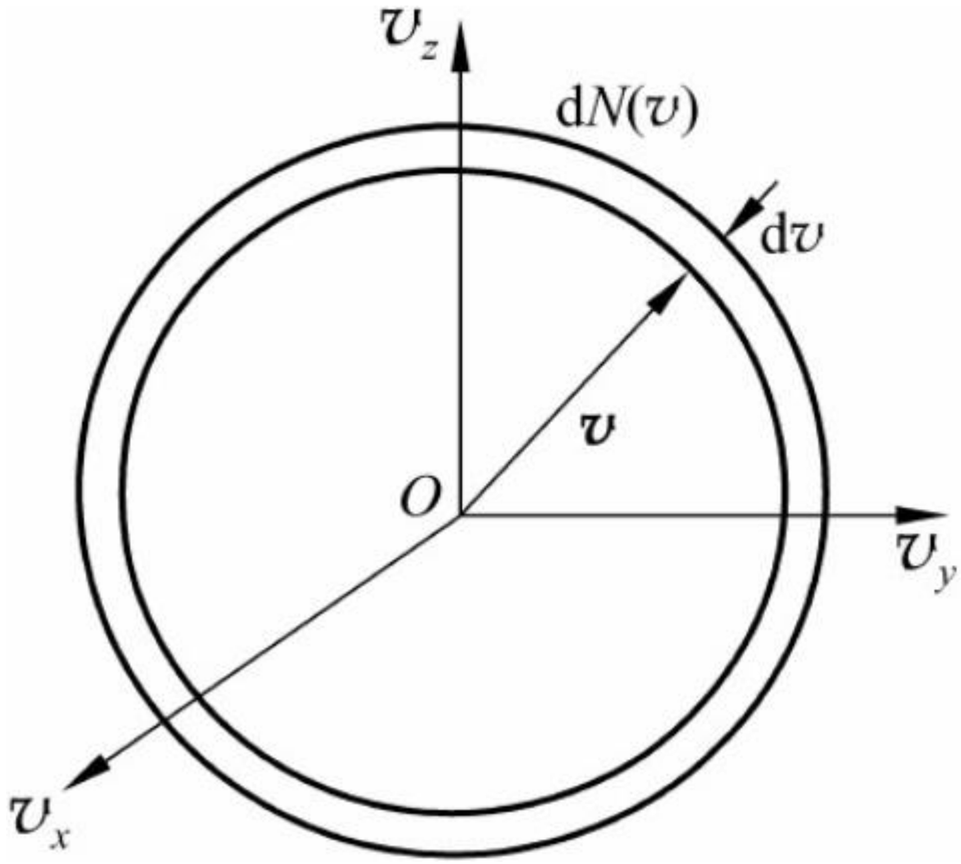
$$=N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT}}dxdydz$$

这一比值代表在速度空间中点(v_x,v_y,v_z)附近单位体积内的分子数，或者说点(v_x,v_y,v_z)处的分子密度。

故速度为$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$的分子总数为点$(v_x,v_y,v_z)$处的分子密度与以坐标原点$(0,0,0)$为球心，以$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$为半径，以 dx 为厚度的球壳的体积，于是有

$$n(v)=N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT}}4\pi v^2\cdot dv$$
$$=4\pi N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}v^2e^{-\frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT}}dv$$

此即麦克斯韦分布，因此麦克斯韦并不违背玻尔兹曼分布。



问题三：解：dt 时间内，以速度v_z撞击液面的液体分子数为

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}_z dtAn(液)\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}}\mathrm{dv}_z$$

而其中只有满足动能大于等于汽化热 W 的液体分子，才能脱离液面，变为气体即

$$\frac{1}{2}mv_z^2 \geq \mathrm{W}$$

即

$$\mathrm{v}_z \geq \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

故能够脱离液面，变为气体的液体分子数为

$$\mathrm{N}_e = \int_{\sqrt{\frac{2W}{m}}}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{v}_z dtAn(液)\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}}\mathrm{dv}_z$$

$$= \frac{1}{2}\ dtAn(液)\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_{\sqrt{\frac{2W}{m}}}^{+\infty}\mathrm{v}_z e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}}\mathrm{dv}_z$$

$$= \frac{1}{2}\ dtAn(液)\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_{\sqrt{\frac{2W}{m}}}^{+\infty}\mathrm{d}(-\frac{2kT}{m}e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}})$$

$$=\frac{1}{2}\ dtAn(液)\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}\int_{\sqrt{\frac{2W}{m}}}^{+\infty}\mathrm{d}(-e^{-\frac{\frac{1}{2}mv_z^2}{kT}})$$

$$=\frac{1}{2}\ dtAn(液)\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}(0-(-e^{-\frac{\frac{1}{2}m(\sqrt{\frac{2W}{m}})^2}{kT}}))$$

$$=\frac{1}{2}\ dtAn(液)\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}e^{-\frac{W}{kT}}$$

又有

$$<\mathrm{v}_z^2>=\frac{KT}{m}$$

故

$$\mathrm{N}_e=\frac{1}{2}\ dtAn(液)\sqrt{\frac{2}{\pi}<v_z^2>}\ e^{-\frac{W}{kT}}\approx\frac{1}{2}\sqrt{<v_z^2>}\,dtA\times n(液)e^{-W/kT}$$

与前面提到的表达式形式一致。

原题中以分子的方均根速度代表分子的速度近似代表分子的平均速度, 而以上用的是分子的算数平均速度作为分子的平均速度计算，故只能近似等于。若同样用分子的方均根速度作为平均速度计算，则得到

$$\mathrm{N}_e=\frac{1}{2}\ dtAn(液)\sqrt{\frac{kT}{m}}e^{-\frac{W}{kT}}=\frac{1}{2}\sqrt{<v_z^2>}\,dtA\times n(液)e^{-W/kT}$$

与前面提到的表达式一致而无需近似。