1.证明：设杆子上的每一点都绕空间中 O 以角速度ω转动，杆上某点 B，观测者站在杆上的 A 点处。则有

$$\boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{AB} = \frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB} - \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\omega}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

故

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$$

不管观察者站在杆子的哪个点上，看到杆子转动的角速度都是一样的。

2.证明：设空间中某一参考点，刚体总质量为 m，相对于质心的转动惯量为I_C，刚体上的质心相对于这一参考点的位置为r_{cm}，速度为v_{cm}，刚体上某一质点质量为m_i，相对于这一参考点的位置为r_i，速度为v_i，相对于质心速度为，故一个刚体的动能为

$$\mathrm{T} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{cm} + \boldsymbol{r}_{cm})\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \frac{d}{(dt)^2}[(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{cm})^2 + 2(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{cm}) \cdot \boldsymbol{r}_{cm} + \boldsymbol{r}_{cm}^2]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \frac{d(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{cm})^2}{(dt)^2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i \frac{d2(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{cm}) \cdot \boldsymbol{r}_{cm}}{(dt)^2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_{cm}^2}{(dt)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{cm})^2 \omega^2 + 0 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_{cm}^2$$
$$= \frac{1}{2} I_C \omega 2 + \frac{1}{2} v_{cm}^2 \sum_i m_i$$

其中，第一部分是绕质心的转动动能，第二部分是质心的平动动能。