问题一：1.证明：设小球相对于其平衡位置的位移为x，当小球的摆角θ比较小时，则有近似

$$x \approx L\theta$$

即

$$\theta \approx \frac{x}{L}$$

以小球平衡位置为零势能点，则小球的重力势能为

$$E_p = mgL(1-\cos\theta) = 2mgL\sin^2\frac{\theta}{2}$$

当小球的摆角θ比较小时，则有近似

$$E_p \approx \frac{1}{2}\mathrm{mgL}\theta^2 \approx \frac{1}{2}\mathrm{mgL}(\frac{x}{L})^2 = \frac{mgx^2}{2L}$$

当小球的摆角θ比较小时，小球的重力势能正比于其偏离平衡位置的位移x的平方，因此小球的势能在小摆角时是一个简谐振子的势能形式。

2.证明：由牛二律有

$$\mathrm{F} = \mathrm{ma} = \mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2}$$

当小球的摆角θ比较小时，小球所受重力和绳子的拉力的合力方向近似水平指向平衡位置，大小近似为

$$\mathrm{F} \approx -\mathrm{mg}\tan\theta \approx -mg\theta \approx -\frac{mgx}{L}$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x \approx 0$$

由此得小球的运动方程为

$$\mathrm{x} \approx \mathrm{A}\cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \varphi)$$

其中 A 为小球的振幅，φ为初相位，取决于初始状态。
因此小球的运动方程满足简谐振子的方程。

3.解：由小球的运动方程得单摆的周期为

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

4.解：一开始摆角为θ_0，故一开始的位移为

$$\mathrm{x} = \mathrm{A}\cos\varphi = \mathrm{L}\theta_0$$

由此得单摆的振幅和初相位分别为

$$\mathrm{A} = \mathrm{L}\theta$$

$$\varphi = 0$$

故在接下来的时间里小球的位移随时间的变化关系为

$$\mathrm{x} = \mathrm{L}\theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t)$$

θ随时间的变化关系为

$$\theta = \frac{x}{L} = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t)$$

其中若θ为正值代表小球位置和初始状态在平衡位置同侧，负值则代表异侧。

问题二：1.解：有阻尼的受迫振子的位移与时间的关系为

$$\mathrm{x} = \frac{F_0 \cos(\Delta + \omega t)}{m\sqrt{(\frac{k}{m} - \omega^2)^2 + (\frac{\mu}{m}\omega)^2}} = \frac{(F_0/m)\cos(\Delta + \omega t)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

故振子的速度与时间的关系为

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega F_0(-\sin(\Delta + \omega t))}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

弹簧振子的机械能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}[m\frac{\omega^2 F_0^2/m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}\sin^2(\Delta + \omega t) + k\frac{F_0^2/m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}\cos^2(\Delta + \omega t)]$$

$$= \frac{F_0^2/m}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]}[\omega^2 \sin^2(\Delta + \omega t) + \omega_0^2 \cos^2(\Delta + \omega t)]$$

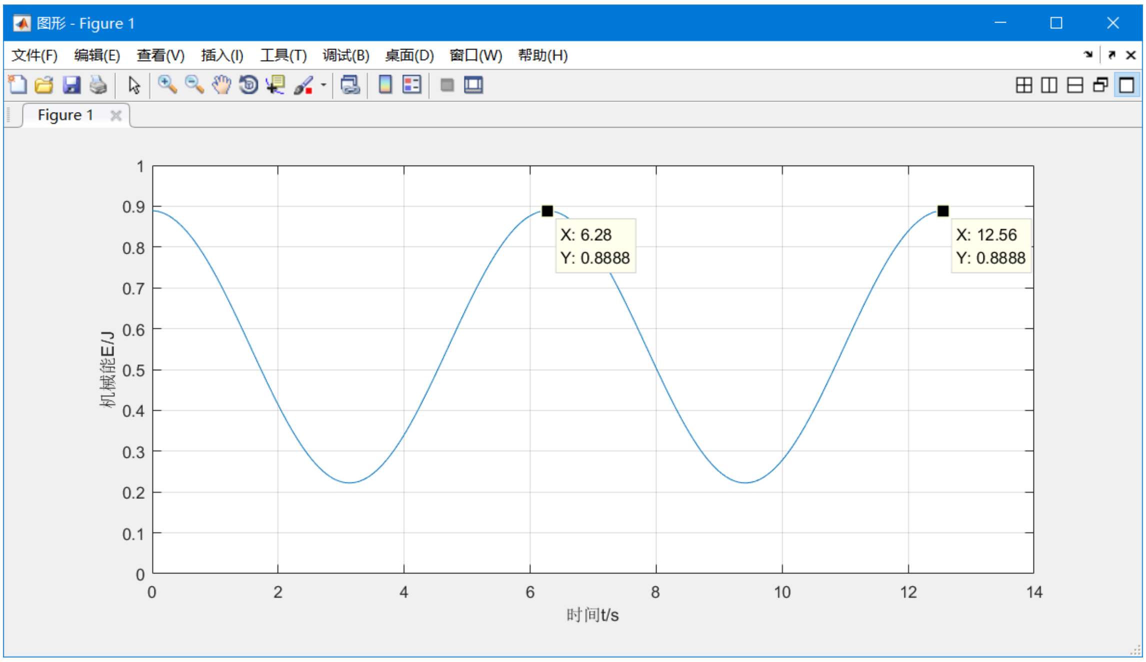
当外力的频率ω等于振子的本征频率$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$时，该机械能为

$$\mathrm{E}_k = \frac{\omega_0^2 F_0^2/m}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]}$$

不随时间变化。

2.答：因为外力做的正功与摩擦力使小球耗散的能量在每时每刻都相等，故小球的机械能保持不变。

3.解：振子机械能随时间变化的曲线：



4.解：由图像得，当时间$t=2\pi k,(k=0,1,2\ldots\ldots)$时，机械能达到最大，此时驱动力做功的功率为

$$\mathrm{P}=\mathrm{F}\frac{dx}{dt}=\mathrm{F}_0\cos(\omega t)\frac{\omega F_0(-\sin(\Delta+\omega t))}{m\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\mu}{m}\omega\right)^2}}$$

$$=\frac{\omega F_0^2}{m\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\mu}{m}\omega\right)^2}}(-\sin(\Delta+\omega t)\cos(\omega t))=4.44\times10^{-3}\mathrm{W}$$

摩擦力做功的功率为

$$\mathrm{P}'=f\frac{dx}{dt}=-\mu\left(\frac{\omega F(-\sin(\Delta+\omega t))}{m\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\mu}{m}\omega\right)^2}}\right)^2=-1.98\times10^{-7}W$$

5.解：一个周期内的弹簧振子的机械能的平均值为

$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T E_k(t)dt=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{F_0^2/m}{2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}[\omega^2\sin^2(\Delta+\omega t)+\omega_0^2\cos^2(\Delta+\omega t)]dt$$

$$=\frac{\omega F_0^2/m}{4\pi[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}[\omega^2\sin^2(\Delta+\omega t)+\omega_0^2\cos^2(\Delta+\omega t)]dt$$

$$=\frac{\omega F_0^2/m}{4\pi[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}[\omega^2\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2(\Delta+\omega t)\,dt+\omega_0^2\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos^2(\Delta+\omega t)\,dt]$$

$$=\frac{\omega F_0^2/m}{8\pi[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]}[\omega^2+\omega_0^2]$$

若代入第三问条件，则

$$\overline{E_k}\approx0.0442J$$

问题三：1.答：是。

2.解：已知常温下声音在空气中的传播速度 c 为 343m/s,设农夫山泉 550ml 的矿泉水瓶的瓶身体积 V 近似为其净含量 550ml 即 $0.000550\mathrm{m}^3$，经测量得，瓶口长度 L 约为 2.4cm 即 0.024m，瓶口横截面直径 d 约为 2.6cm 即 0.026m，则瓶口有效长度为

$$\mathrm{L}_{eff}=L+(1+0.6)\frac{d}{2}\approx0.045m$$

瓶口横截面积为

$$\mathrm{S}=\pi(\frac{d}{2})^2\approx0.00053\mathrm{m}^2$$

由亥姆赫兹共振的频率公式得其共振频率为

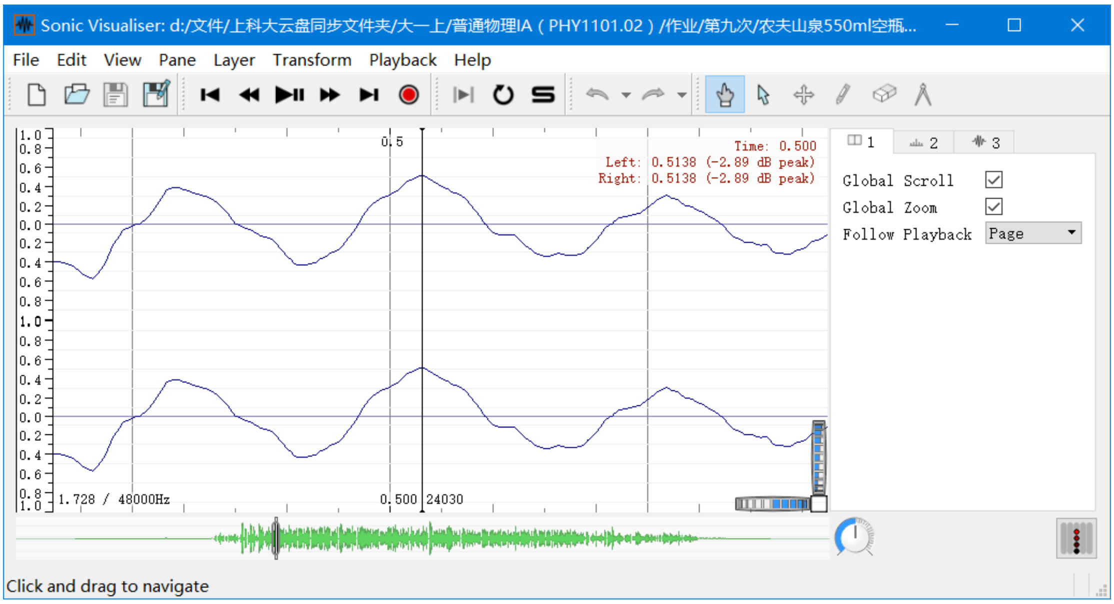
$$f=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{VL_{eff}}}\approx253\mathrm{Hz}$$

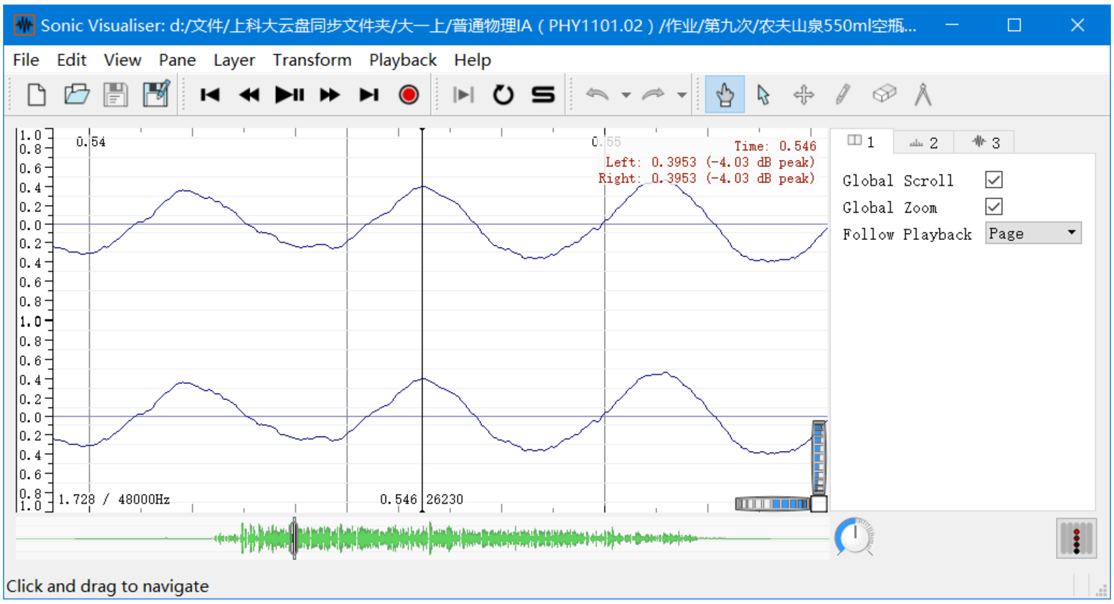
3.解 :若近似认为瓶中的水不可压缩、不可震动、在实验过程中不与瓶中气体发生热量交换，则根据公式共振频率将会变为原来的$\sqrt{2}$倍，有

$$f' = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{2S}{VL_{eff}}} \approx 357\text{Hz}$$

4.答：测得农夫山泉 550ml 空瓶亥姆赫兹共振十个周期的时间为 0.546s-0.500s=0.046s，则其共振频率为

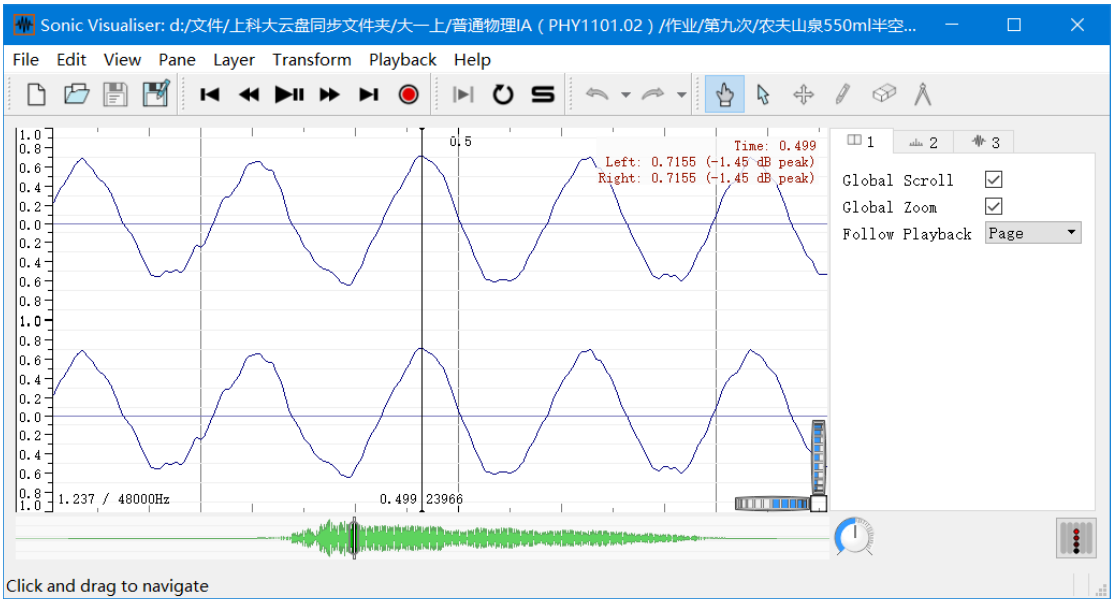
$$\text{f} = \frac{10}{0.046} Hz \approx 217\text{Hz}$$

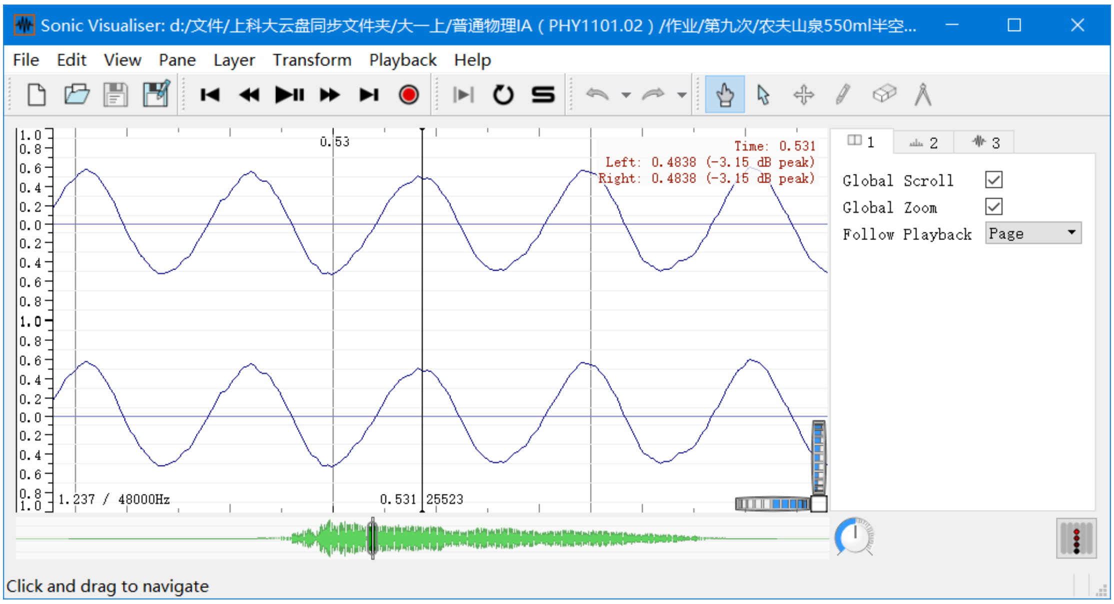




测得半空瓶共振十个周期的时间为 0.531s-0.449s=0.032s，则其共振频率为

$$\text{f} = \frac{10}{0.032} Hz \approx 313\text{Hz}$$





理论与实验符合得较好，但实验值均略低于理论值。