一、概率论和布朗运动

掷硬币实验:N次抛掷均匀硬币得到硬币正面朝上(N(正)次)的概率$P(正)=\frac{N(正)}{N}=\frac{1}{2}$. N次抛掷均匀硬币得到硬币正面朝上次数为k次的概率$P(n,k)=\frac{C_n^k}{2^n}=\frac{n!}{(n-k)!k!}/2^n$.二项式(伯努利)概率:玩游戏赢的概率为$p$,输的概率则为$(1-p)$,玩$n$次游戏赢$k$次的概率$P(n,k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1-p)^{n-k}$.

一维无规行走:每次移动步长绝对值均为 1,方向向前和向后的概率各为$\frac{1}{2}$,设移动N次后偏离起点的位移为D_N,移动N次后偏离起点的位移的平方的期望值$<D_N^2>=N$.证明:移动 1 次后偏离起点的位移的平方的期望值$<D_1^2>=1$,假设移动N次后偏离起点的位移的平方的期望值$<D_N^2>=N$,则移动$(\mathrm{N}+1)$次后偏离起点的位移的平方的期望值$<D_{N+1}^2>=<(D_N+1)^2>\cdot\frac{1}{2}+<(D_N-1)^2>\cdot\frac{1}{2}=<D_N^2>+1=\mathrm{N}+1$.

抛掷硬币实验与一维无规行走联系:N(正)与其预期值$\frac{N}{2}$的偏差$\Delta=N(正)-\frac{\mathrm{N}}{2}=\frac{D_N}{2}$,方差$<\Delta^2>=<(k-\frac{n}{2})^2>=<(\frac{D_N}{2})^2>=\frac{<D_N^2>}{4}=\frac{N}{4}$,故$N$(正)标准差$\sqrt{<\Delta^2>}=\frac{\sqrt{N}}{2}$,$P$(正)与其期望值$\frac{1}{2}$的偏差$P(正)-\frac{1}{2}=\frac{N(正)}{N}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\Delta}{N}=\pm\frac{1}{2\sqrt{N}}$,故$N$次抛掷均匀硬币得到硬币正面朝上(N(正)次)的概率$P(正)=\frac{N(正)}{N}\pm\frac{1}{2\sqrt{N}}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{N}}$.由此可见抛掷硬币次数越多,偏(误)差越小,即$P$(正)越接近其期望值$\frac{1}{2}$.

一维无规行走:每次移动步长λ随机,但其平方的期望值为$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 p(\lambda)d\lambda=\Lambda^2$,移动$N$次后偏离起点的位移的期望值$<D_N^2>=N\Lambda^2$.证明:移动 1 次后偏离起点的位移的平方的期望值$<D_1^2>=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 p(\lambda)d\lambda=\Lambda^2$,设移动第$N$次后偏离起点的距离的平方的期望值$\overline{D_N^2}=N\Lambda^2$,则移动$N+1$次后的概率为$<D_{N+1}^2>=<\int_{-\infty}^{+\infty}(D_N+\lambda)^2 p(\lambda)d\lambda>=<D_N^2\int_{-\infty}^{+\infty}p(\lambda)d\lambda+2D_N\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda p(\lambda)d\lambda+\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 p(\lambda)d\lambda>$,由归一化条件$\int_{-\infty}^{+\infty}p(\lambda)d\lambda=1$及移动方向向前和向后的概率相同即$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda p(\lambda)d\lambda=0$得,$<D_{N+1}^2>=<D_N^2+\Lambda^2>=<D_N^2>+\Lambda^2=(N+1)\Lambda^2$.

正态(高斯)分布概率密度:$p(x)=\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$,其中标准偏差$\sigma=\sqrt{N}\Lambda$,体现中心极限定理.

二、狭义相对论(SR)

洛伦兹变换(LT)(仅适用于惯性系之间的转换):
$$\begin{cases}x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\\ y'=y\\ z'=z\\ t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\\ v_x'=\frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2}\\ v_y'=\frac{v_y\sqrt{1-(u/c)^2}}{1-uv_x/c^2}\\ v_z'=\frac{v_z\sqrt{1-(u/c)^2}}{1-\frac{uv_x}{c^2}}\\ p_x'=\frac{p_x-uE/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\\ p_y'=p_y\\ p_z'=p_z\\ E'=\frac{E-up_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\end{cases}$$
其中$x,y,z,v_x,v_y,v_z,p_x,p_y,p_z$分别为物体在惯性参考系$S$中的平行于$x,y,z$轴方向的位移、速和动量度及时间,$x,y,z,v_x',v_y',v_z',p_x',p_y',p_z'$分别为物体在相对惯性参考系$S$平行其$x$轴方向以速度$u$运动的惯性参考系$S'$中的平行$x',y',z'$轴方向的位移、速度和动量及时间.

质量、动量和能量及总能和动、静能关系:
$$\begin{cases}质量:m_u=\frac{m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\\ 动量:p=m_u v=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\\ 总能:E=m_u c^2=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\\ E^2=p^2c^2+m_0^2c^4\\ [总能\ 动能\ 静能(含势能)]\\ pc=\frac{Ev}{c}\end{cases}$$
利用相对性原理证明相对论的质量表达形式:根据相对性定理得知动量守恒在两个惯性系中都成立,根据某方向上动量守恒推导出质量随速度的变化.由能量守恒推导相对论的能量表达形式:$Fds=\frac{dp}{dt}ds=udp=ud\frac{m_0u}{\sqrt{1-(u/c)^2}}=d\frac{m_0u^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}-\frac{m_0u}{\sqrt{1-(u/c)^2}}du=\frac{m_0u}{(1-(u/c)^2)\sqrt{1-(u/c)^2}}du=d\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}=dE\Longrightarrow E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$,当$u\ll c$时,$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\overset{taylor\ expression}{\approx}m_0c^2$(静止的质能)$+\frac{1}{2}m_0u^2$(传统的动能).

三、刚体和转动

质心对应的向量(向量起点可任意选取)$R_{cm}=\frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i r_i}{M}$.刚体的运动 = 质心的平动 + 绕质心的转动.刚体的总动能$E_k=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v_i}^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\frac{d\vec{r_i}}{dt})^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\frac{d}{dt}[(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})+\overrightarrow{R_{cm}}])^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i[\frac{d}{dt}(r_i-R_{cm})+\frac{d}{dt}R_{cm}]^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i[\left(\frac{d(r_i-R_{cm})}{dt}\right)^2+2\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}\frac{d\overrightarrow{R_{cm}}}{dt}+(\frac{d\overrightarrow{R_{cm}}}{dt})^2]=\frac{1}{2}\left[\sum_i m_i\left(\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}\right)^2+2\left(\sum_i m_i\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}\right)\frac{dR_{cm}}{dt}+\sum_i m_i\left(\frac{dR_{cm}}{dt}\right)^2\right]\underline{\sum_i m_i\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}=\frac{d(\sum_i m_i\vec{r_i}-R_{cm}\sum_i m_i)}{dt}=\frac{d0}{dt}}=0\ \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{dR_{cm}}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}(\sum_i m_i)\left(\frac{dR_{cm}}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$(绕质心的转动动能)$+\frac{1}{2}(\sum_i m_i)v_{cm}^2$(质心的平动动能).刚体的总动量$\sum_i m_i\vec{v_i}=\sum_i m_i\frac{d\vec{r_i}}{dt}=\sum_i m_i\frac{d[(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})+\overrightarrow{R_{cm}}]}{dt}=\sum_i m_i\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}+\sum_i m_i\frac{d\overrightarrow{R_{cm}}}{dt}=\sum_i m_i\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}$(绕质心的转动)$+\frac{d\overrightarrow{R_{cm}}}{dt}\sum_i m_i$(质心的平动)$=\sum_i m_i\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}$(绕质心的转动)$+M\frac{d\overrightarrow{R_{cm}}}{dt}$(质心的平动),其中由于$\sum_i m_i\frac{d(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i m_i(\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}})=\frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i\vec{r_i}-\overrightarrow{R_{cm}}\sum_i m_i\right]=0$,绕质心的转动对总动量的贡献为0,故刚体的总动量$\sum_i m_i\vec{v_i}=M\frac{d\overrightarrow{R_{cm}}}{dt}$(质心的平动).

转动惯量:$I=\sum_i m_i r_i^2=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$.平行轴定理:I(刚体对任意转动参考点的转动惯量)$=\mathrm{I}_{cm}$(刚体绕质心的转动惯量)$+MR_{cm}^2$.证明:$I_z=\sum_i m_i r_i^2=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum_i m_i x_i^2+\sum_i m_i y_i^2=$.垂直(正交)轴定理:(适用于空间直角坐标系中的二维薄片,其中x,y轴平行并包含于薄片)I_z(绕z轴的转动惯量)$=I_x$(绕x轴的转动惯量)$+I_y$(绕y轴的转动惯量).证明:$I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$,$I_x=\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)$,$I_y=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$,其中由于是二维薄片$z_i=0$,故$I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum_i m_i x_i^2+\sum_i m_i y_i^2=I_x+I_y$.常用均匀几何体(质量为$m$)的转动惯量:长$l$的细杆绕过其中心的垂直杆的轴:$I=\frac{1}{12}ml^2$,绕过其端点的垂直杆的轴:$I=\frac{1}{3}ml^2$,半径为$r$的薄圆盘绕过圆心垂直盘面的轴/底面半径为$r$的圆柱绕过底面圆心垂直底面的轴:$I=\frac{1}{2}mr^2$,半径为$r$的薄圆盘绕过边缘某点垂直盘面的轴:$I=\frac{3}{2}mr^2$,绕直径:$I=\frac{1}{4}mr^2$,外径为$r_1$内径为$r_2$的薄圆环绕过圆心垂直于环面的轴/外径为$r_2$内径为$r_2$的圆筒绕过底面圆心垂直于底面的轴:$I=\frac{1}{2}m(r_1^2-r_2^2)$, 半径为$r$的细圆环绕过圆心垂直于环面的轴/底面半径为$r$的薄壁圆筒绕过地面圆心垂直底面的轴:$I=mr^2$底面半径为$r$高为$h$的圆柱绕过中心平行底面的轴:$I=\frac{1}{12}m(3r^2+h^2)$,半径为$r$的球绕直径:$I=\frac{2}{5}mr^2$,外径为$r_1$内径为$r_2$的空心球壳绕直径:$I=\frac{2}{5}m(r_1^2-r_2^2)$,半径为$r$的薄壁球壳:$I=\frac{2}{3}mr^2$,长轴为$a$短轴为$b$的薄椭圆盘绕过中心垂直于盘面的轴:$I=\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$,绕长轴: $I=\frac{1}{4}b^2$,绕短轴:$I=\frac{1}{4}a^2$,长为a宽为b的矩形绕过中心垂直于矩形平面的轴/长为a宽为b高为c的长方体绕过中心垂直于底面的轴:$I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$, 绕过顶点垂直于矩形平面的轴/绕侧棱:$I=\frac{3}{2}mab$, 长为a宽为b的矩形绕过中心平行于长的轴:$I=\frac{1}{12}mb^2$,绕过中心平行于宽的轴:$I=\frac{1}{12}ma^2$,边长为a的立方体绕体对角线:$I=\frac{16}{3}ma^2$.

平动:$\begin{cases}\text{牛顿第二定律}:\vec{F}=(\sum_i m_i\vec{a_i}=)\sum_i m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt}\\ \text{动量}:\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v_i}\\ \text{动能}:E_k=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2\end{cases}$,转动:$\begin{cases}\text{转动定律[角动量定理]}:(\sum_i\vec{r_i}\times\vec{F_i}=)T=(I\beta=)I\frac{d\omega}{dt}(=\sum_i m_i\frac{d\vec{r_i}\times\vec{v_i}}{dt})[=\frac{d\vec{L}}{dt}]\\ \text{角动量}:\vec{L}=(\sum_i\vec{r_i}\times\vec{p_i}=\sum_i\vec{r_i}\times m_i\vec{v_i}=\sum_i m_i r_i^2\vec{\omega}=\vec{\omega}\sum_i m_i r_i^2=)I\vec{\omega}\\ \text{动能}:E_k=\frac{1}{2}I\omega^2\end{cases}$

四、简谐振动(SH)

二阶线性常微分方程:$-kx=m\frac{d^2x}{dt}$,先设一般性解$x(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t/A\cos(\omega_0 t+\varphi)$,其中本征频率$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$,相位$\varphi$,速度$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-A\omega_0\sin\omega_0 t+B\omega_0\cos\omega_0 t/-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$,一般性解的两种表达形式均存在两个未知量,通过两个初始值(初位移$x(0)$和初速度$v(0)$)以求得$\begin{cases}x(0)=A\\v(0)=B\end{cases}/\begin{cases}x(0)=A\cos\varphi\\v(0)=-A\sin\varphi\end{cases}$.

五、统计力学原理

玻尔兹曼分布:(适用于热平衡状态)某自由度上能量为$\rho(\varepsilon)d\varepsilon=\rho_0 e^{-\varepsilon/k_BT}d\varepsilon$.以大气中气体分子密度分布为例:假设大气温度处处相等,取海拔$\hbar$处一小段高为Δh,截面积为A的气柱,其质量为$nmA\Delta h$,其中m为气体分子的质量,n为气体分子的体积密度,该气柱处于平衡状态,故其重力被上下底面的气压所平衡$[P(h+\Delta h)-P(h)]A=-nmA\Delta hg\Rightarrow dP=-nm\Delta hg$,根据理想气体状态方程$P=nk_BT\Rightarrow dP=k_BTdn\Rightarrow k_BTdn=-nmgdh\Rightarrow\frac{dn}{dh}=-\frac{mg}{k_BT}n\Rightarrow n\propto e^{-\frac{mgh}{k_BT}}\Rightarrow n=n_0e^{-\frac{mgh}{k_BT}}$,其中$n_0$为海拔为0处气体分子的体积密度.以大气中气体分子速度分布为例:只有速度达到特定阈值u的粒子方能从海拔$\hbar_0$处达到海拔$\hbar_1$处,这一阈值满足$\frac{1}{2}mu^2=mg\left(\hbar_1-\hbar_0\right)$,$n_{v\geq u}(h_1)$(海拔$\hbar_1$处以大于$u$速度向上通过截面的气体分子数)$=n_{v\geq 0}(h_0)$(海拔$\hbar_0$以大于0速度向上通过截面的气体分子数),根据大气中气体分子密度分布$\frac{n(h_1)}{n(h_0)}=e^{-\frac{mg(h_1-h_0)}{k_BT}}=\frac{n_{v\geq 0}(h_1)}{n_{v\geq 0}(h_0)}=\frac{e^{-\frac{mg(h_1-h_0)}{k_BT}}}{n_{v\geq 0}(h_0)}=e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}\Rightarrow n_{v\geq u}(h_0)\propto e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}$,定义$n\left(u-\frac{du}{2}\leq v\leq u+\frac{du}{2}\right)=nf(u)du$,则单位时间内通过$\hbar_0$的粒子数为$nAdt\int_{-\infty}^{+\infty}uf(u)du$,则$\frac{nAdt\int_{-\infty}^{+\infty}uf(u)du}{dt}=n_{v\geq u}(h_0)\propto e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}uf(u)du\propto e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}\xRightarrow{\text{两边同时取微分}}-uf(u)\propto-\frac{m}{k_BT}ue^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}\Rightarrow f(u)\propto e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}$,再来确定系数,设$f(u)=\alpha e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}$,$\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}du=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}\frac{du\sqrt{m/2k_BT}}{\sqrt{m/2k_BT}}\xlongequal{\text{令}\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}=x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha e^{-x^2}\frac{dux}{\sqrt{m/2k_BT}}=\frac{\alpha}{\sqrt{m/2k_BT}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{\sqrt{m/2k_BT}}=1\Rightarrow\alpha=\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}$,故$n(u)=N\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}du$.

能量均分定理:(适用于热平衡状态)各自由度总能量相同$<\varepsilon>=\frac{\int_0^{+\infty}\varepsilon\rho_0e^{-\varepsilon/k_BT}d\varepsilon}{\int_0^{+\infty}\rho_0e^{-\varepsilon/k_BT}d\varepsilon}=\frac{1}{2}k_BT$.证明:$<\frac{1}{2}mv_x^2>=\frac{\sum v_x\frac{1}{2}mv_x^2n(v_x)}{N}=\frac{\sum v_x\frac{1}{2}mv_x^2N\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}}{N}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}mv_x^2\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-\frac{\frac{1}{2}mu^2}{k_BT}}dv_x\xlongequal{\text{分部积分}}k_BT$.

理想气体状态方程:$PV=Nk_BT=nRT$,其中P——气体压强,V——体积,N——粒子数,$k_B=1.38\times10^{-23}J\cdot K^{-1}$——玻尔兹曼常数,$T$——温度,$n$——物质的量,$R=N_Ak_B=8.31J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$——普适气体常数.理想气体内能:$E=N\frac{i}{2}k_BT=N\frac{t+s+2r}{2}k_BT$,其中$i$——自由度数,$t$——平动自由度数,$s$——转动自由度数,$2r$——振动自由度数(包括振动的动能和势能),实际气体在常温下往往只有平动和转动自由度.绝热条件下,$PV^\gamma=const$.证明:对于单原子分子$PV=Nk_BT=N\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{1}{2}mv^2>=\frac{2}{3}U$,$-PdV=dU=\frac{3}{2}dPV=\frac{3}{2}(VdP+PdV)\Rightarrow\frac{5dV}{3V}+\frac{dP}{P}=0\xRightarrow{\text{两边积分}}\frac{5}{3}\ln V+\ln P=\ln const\Rightarrow PV^{\frac{5}{3}}=const$,同理对于双原子分子$\gamma=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$,对于自由度为$i$的气体分子$\gamma=1+\frac{2}{i}$.

六、飘逸(drift)和扩散(difussion)

漂移速度:$v_{drift}=\frac{F}{m}\tau\xlongequal{\text{def 迁移率}\mu=\frac{\tau}{m}=\frac{v_{drift}}{F}}F\mu$,其中$F$为漂移的驱动力,$m$为粒子的质量,$\tau$为平均碰撞时间.证明:稳定漂移状态下,设$t$时刻粒子平均漂移速度为$v(t)$,则$(t+\Delta t)$时刻粒子平均漂移速度为$v(t+\Delta t)$,在时间间隔$\Delta t$内,粒子与背景粒子发生碰撞漂移速度降为0的概率为$(1-\frac{\Delta t}{\tau})$,故$v(t+\Delta t)=\left(1-\frac{\Delta t}{\tau}\right)\left(v(t)+\frac{F}{m}\Delta t\right)\Rightarrow\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{F}{m}-\frac{v(t)}{\tau}-\frac{F}{m\tau}\Delta t\right)=\frac{F}{m}-\frac{v(t)}{\tau}$,即$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}-\frac{v(t)}{\tau}$,又因漂移达到稳定状态,故$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}-\frac{v(t)}{\tau}=0\Rightarrow\forall t,v(t)=\frac{F}{m}\tau$.以材料中电子漂移为例:设长方体材料长为$L$,横截面积为$A$,载流子带电荷为$q$,体积密度为$n$,两端电势差为$V$,电流$I=\frac{Q}{dt}=\frac{qnAvdt}{dt}=qnAv=qnA\frac{qV}{mL}\tau$,电阻$R=\frac{V}{I}=\frac{mL}{q^2nA\tau}$,电阻率$\rho=\frac{RA}{L}=\frac{m}{q^2n\tau}$,电导率$\sigma=\frac{1}{\rho}=\frac{q^2n\tau}{m}=q^2n\mu$.

扩散粒子流(单位时间内通过单位面积的粒子个数):$J_x=-D\frac{dn}{dx}=-\frac{1}{3}lv\frac{dn}{dx}=\mu k_BT\frac{dn}{dx}$,其中$D$为扩散系数,$l$为平均自由程,$v$为粒子无规运动的平均速率,$l=v\tau$.证明:首先定性推出决定扩散粒子流的物理参数及其关系$J_x=-D\frac{dn}{dx}$,然后推导待定系数D的值,dt时间间隔内,向右通过截面A的粒子数为$\frac{1}{2}n_{左}Av_xdt$(注意到$\frac{1}{2}$代表体积元Av_xdt中的粒子只有一半运动方向是向右的,下同理),向左通过截面A的粒子数为$\frac{1}{2}n_{右}Av_xdt$,则通过截面A的净粒子数为$\frac{1}{2}(n_{左}-n_{右})Av_xdt$,扩散粒子流$J_x=\frac{\frac{1}{2}(n_{左}-n_{右})Av_xdt}{Adt}=\frac{1}{2}\left(n_{左}-n_{右}\right)v_x\left(n_{左}-n_{右}\right)\xlongequal{\text{不妨取正负}x\text{轴方向平均自由程}\pm l_x\text{上的粒子体积密度差}}\frac{1}{2}v_x\left(l_x-(-l_x)\right)\left(-\frac{dn}{dx}\right)=-v_xl_x\frac{dn}{dx}=-\frac{v}{\sqrt{3}}\frac{l}{\sqrt{3}}\frac{dn}{dx}=-\frac{1}{3}vl\frac{dn}{dx}\Rightarrow D=\frac{1}{3}vl=\frac{1}{3}v^2\tau=\frac{1}{3}mv^2\mu=mv_x^2\mu=k_BT\mu$.

七、热力学第一、二、三定律和熵

热力学第一定律:能量守恒,即ΔU(系统内能的改变,正代表内能增加,负代表内能减少)$=\Delta Q$(系统和外界热量交换,正代表吸收热量,负代表释放热量)$-W$(系统对外界做功,正代表对外界做正功,负代表对外界做负功).热力学第三定律:晶体在绝对零度处熵为零/不可通过有限步骤达到绝对零度.

热力学第二定律:不能从单一热源吸热转化为功,而不引起其他变化/热量不可自发从低温处传递到高温处/所有热机中,可逆(卡诺)热机效率最高,效率$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}$.证明:可逆热机$A$和不可逆热机$B$均从高温热源$T_1$处吸热$Q_1$,在低温热源$T_2$处放热$Q_2$,同时分别对外做功$W,W'$,假设不可逆热机$B$效率高于可逆热机$A$即$\eta_A<\eta_B$,即$W<W'$,则用不可逆热机$B$对可逆热机$A$做功$W$反向驱动可逆热机$A$,可在热源$T_1,T_2$间无净能量交换的前提下实现对外做功$W'-W$,违背热力学第一定律,故假设错误,任何不可逆热机的效率都无法超过可逆热机.$A\to B$,从高温热源T_1处吸热等温膨胀,$B\to C$,绝热膨胀,$C\to D$,在低温热源T_2处放热等温收缩,$D\to A$,绝热收缩,$Q_1=\int_A^BPdV=\int_A^B\frac{Nk_BT_1}{V}dV=Nk_BT_1\ln\frac{V_B}{V_A}$,$Q_2=-\int_C^DPdV=-\int_C^D\frac{Nk_BT_2}{V}dV=Nk_BT_2\ln\frac{V_C}{V_D}$,$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_2}=\frac{Nk_BT_1\ln\frac{V_B}{V_A}-Nk_BT_2\ln\frac{V_C}{V_D}}{Nk_BT_1\ln\frac{V_B}{V_A}}=\frac{T_1\ln\frac{V_B}{V_A}-T_2\ln\frac{V_C}{V_D}}{T_1\ln\frac{V_B}{V_A}}$,根据绝热气体状态方程$PV^\gamma=const$和理想气体状态方程$PV=Nk_BT$,$TV^{\gamma-1}=\frac{const}{Nk_B}=const$,故$(\frac{V_B}{V_C})^{\gamma-1}=\frac{T_2}{T_1}$,$(\frac{V_A}{V_D})^{\gamma-1}=\frac{T_2}{T_1}$,故$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}$.

熵:$S=\frac{Q}{T}$(定义式,由可逆热机特例中引出的守恒量).$S=k_B\ln\Omega$(决定式),其中Ω为体系呈现某种宏观状态时对应的微观状态数,熵直接刻画了体系的混乱程度.

克劳修斯不等式:对任意一个循环$\oint\frac{dQ}{T}\leq 0$.$\Delta S=\oint\frac{dQ}{T}$仅适用于可逆过程且可逆过程体系总熵$\Delta S=\oint\frac{dQ}{T}=0$.所有绝热不可逆过程体系总熵增加$\Delta>\oint\frac{dQ}{T}$.