

第四次作业

1.王哲 2.汪家俊 3.张羽

2018 年 4 月 25 日

1

2

3 (40分)

二维 解

假设软管的先对介电系数为 ϵ_r ，铁钉长度为 l ，铁钉的半径、橡皮管的内外半径、易拉罐的半径分别为 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 。

(a)若铁钉带电 Q_N ，则在软管内 r 处，电场强度为

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{Q_N}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r l} \hat{r} \quad (1)$$

极化强度为

$$\mathbf{P}_2(\mathbf{r}) = \frac{(\epsilon_r - 1)Q_N}{2\pi\epsilon_r r l} \hat{r} \quad (2)$$

在软管和铁钉间 r 处，电场强度为

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{Q_N}{2\pi\epsilon_0 r l} \hat{r} \quad (3)$$

极化强度为

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{r}) = 0 \quad (4)$$

所以，软管内表面极化电荷面密度为极化强度为

$$\sigma'_{in} = -\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n} = -\frac{(\epsilon_r - 1)Q_N}{2\pi\epsilon_r r_2 l} \quad (5)$$

故软管内表面单位面积受到径向的压力为

$$\mathbf{F}_1 = \sigma'_{in} \cdot \frac{Q_N}{2\pi\epsilon_0 r_2 l} \hat{r} = -\frac{(\epsilon_r - 1)Q_N^2}{4\pi^2\epsilon_0\epsilon_r r_2^2 l^2} \hat{r} \quad (6)$$

同理，可以求得软管外表面单位面积受到径向压力

$$\mathbf{F}_2 = \frac{(\epsilon_r - 1)Q_N^2}{4\pi^2\epsilon_0\epsilon_r r_3^2 l^2} \hat{r} \quad (7)$$

所以，软管受到径向合力为

$$\mathbf{F}_{tot} = -\frac{(\epsilon_r - 1)Q_N^2}{4\pi^2\epsilon_0\epsilon_r l^2} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \hat{r} \quad (8)$$

(b)若铁钉不带电，而是外面的易拉罐带电，则在内部没有电场分布，所以橡皮管受到的力为0。

(c)设铁钉上带有电荷 Q_N ，若铁钉与易拉罐之间保持恒定的电势差 ΔV ，电势差为

$$\Delta V = \frac{Q_N}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right] + \frac{Q_N}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) \quad (9)$$

故

$$\Delta Q_N = \frac{2\pi\epsilon_0 l \Delta V}{\left[\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right] + \frac{1}{\epsilon_r} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} \quad (10)$$

则软管受到的径向合力为

$$\mathbf{F}_{tot} = -\frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \cdot \frac{(\Delta V)^2}{\left[\ln\left(\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\right) + \frac{1}{\epsilon_r} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) \right]^2} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_3^2} \right) \hat{r} \quad (11)$$

三维 解 设铁钉为均匀圆柱体，长度为 d ，在橡皮管外长度为 x ，所以在橡皮管内部分长度为 $d - x$ ，软管的先对介电系数为 ϵ_r ，铁钉长度为 l ，铁钉的半径、橡皮管的内外半径、易拉罐的半径分别为 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 ，忽略边界效应。

(a)设橡皮内铁钉电荷线密度为 λ_1 ，软管外为 λ_2 。

根据电荷守恒

$$\lambda_1(d - x) + \lambda_2(x) = Q_N \quad (12)$$

根据高斯定理和电场强度在介质中的表达形式

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda_m}{2\pi r \epsilon_n} \hat{r} \quad (13)$$

其中

$$\lambda_m = \begin{cases} \lambda_1 & \text{橡胶管内铁钉对应部分} \\ \lambda_2 & \text{橡胶管外对应部分} \end{cases}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{场点不在橡胶管上} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_r & \text{场点在橡胶管上} \end{cases}$$

因为铁钉和易拉罐为等势体

$$\int_{r_1}^{r_4} |\mathbf{E}| dr = \int_{r_1}^{r_4} |\mathbf{E}| dr \quad (14)$$

$$\int_{r_1}^{r_4} \frac{\lambda_2}{2\pi r \varepsilon_0} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0} dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0 \varepsilon_r} dr + \int_{r_3}^{r_4} \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0} dr \quad (15)$$

得

$$\lambda_2 \ln \frac{r_4}{r_1} = \lambda_1 \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_r} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_4}{r_3} \right) \quad (16)$$

令 $\ln \frac{r_4}{r_1} = b$, $\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_r} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_4}{r_3} = a$ 得

$$\lambda_1 a = \lambda_2 b \quad , \quad b > a > 0 \quad (17)$$

忽略易拉罐外电场能

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (18)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (\lambda_2^2 b x + \lambda_1^2 a (d-x)) \quad (19)$$

$$= \frac{abQ_N^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(b(d-x) + ax)} \quad (20)$$

对 x 偏导

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{abQ_N^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{(b(d-x) + ax)^2} > 0 \quad (21)$$

随着 x 变大电场能变大，所以电场阻止 x 变大，软管会受到向下的力，大小即为

$$|\mathbf{F}| = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{abQ_N^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{(b(d-x) + ax)^2} \quad (22)$$

(b)若铁钉不带电，而是外面的易拉罐带电，则在内部没有电场分布，所以软管受到的力为0。

(c)由(a)得

$$\int_{r_1}^{r_4} \frac{\lambda_2}{2\pi r \varepsilon_0} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0} dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0 \varepsilon_r} dr + \int_{r_3}^{r_4} \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0} dr = \Delta V \quad (23)$$

得

$$\lambda_2 \ln \frac{r_4}{r_1} = \lambda_1 \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_r} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_4}{r_3} \right) = 2\pi \varepsilon_0 \Delta V \quad (24)$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi \varepsilon_0 \Delta V}{a} \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi \varepsilon_0 \Delta V}{b} \quad (26)$$

$$\lambda_1(d-x) + \lambda_2(x) = Q'_N \quad (27)$$

所以铁钉上的电荷量是随 x 改变而改变的。

对于这个易拉罐内的这个体系而言，边界条件和(a)中的边界条件并无本质区别，只是铁钉带电量 Q_N 这一个参数的改变。所以软管的受力情况也应该和(a)中类似。软管会受到向下的力，大小即为

$$|\mathbf{F}| = \frac{ab(Q'_N)^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{b-a}{(b(d-x) + ax)^2} \quad (28)$$

$$= \pi \varepsilon_0 (\Delta V)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (29)$$

和之前版本的答案在数值上巧合地相同，方向是相反的。

之前版本答案错误的原因是，要维持铁钉与易拉罐的电势差维持恒定，必定有外电源对铁钉做功，使铁钉上的电荷 Q_N 满足电势差恒定这一条件，所以虚功原理是不适用的。