

## 第二次作业

3.张羽

2018 年 3 月 25 日

1

2

3 (40分)

早期的静电加速器中电击穿现象是妨碍加速电压提高的重要原因。如图所示的是人们曾经采用的一种加速器设计方案的模型。把加速器放在一个接地的耐压容器里并充以高压的气体(这样可以大大提高击穿场强), 图中中心的内球面为高压电极, 中间球面是与内电极同心的中间电极。外面是接地的同心钢制容器。已知外面钢制容器的半径为 $R$ 以及高压气体的击穿场强为 $E_0$ 。(1) 试简单解释为什么使用中间电极会比不使用中间电极可以获得更高的电压, 以及使用中间电极越多, 则可以获得越高的电压。(2) 试计算, 如图所示的有 $N$ 个中间电极的情况, 加速器所能得到的最高电压以及所对应的内电极以及中间电极的半径 $r_0, \dots, r_i, \dots, r_N$ 。(要求, 先考虑 $N = 2, N = 3$ 两种特殊情况的结果, 最后计算一般情况 $N$ )

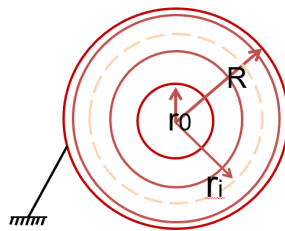


图 1: question 3

参考答案：（1）高压气体击穿场强的存在限制了加速电压的提高。对给定的高压电极半径 $R_0$ ，当高压气体某处达到击穿场强时，加速器的加速电压应为最高。

设内电极刚球面带电 $Q$ ，气体的介电常数为 $\varepsilon$ ，则电场分布

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

（1）当只有内电极时，在 $r = r_0$ 处，电场场强最大，即当内电极电压达到一定高度时，在高电压电极附近最先发生电击穿。而此时，如果击穿，只在高压电极附近达到击穿场强 $E_0$ ，而其他地方都小于 $E_0$ 。如果添加一些中间电极，通过适当的电压分配，使中间电极处的电场强度尽可能高的也达到击穿场强 $E_0$ ，这就能使得使用中间电极会比不使用中间电极可以获得更高的电压，且能使用中间电极越多，获得的电压越高。当然，保证中间电极与高压电极附近的电场强度相等，且能同时达到击穿场强时，可以使加速电压尽可能高。

（2）由（1）中分析可得，中间电极电场强度应与高压电极附近电场强度相等且都为 $E_0$

因为是中心对称的，所以只考虑径向分量。

$r_N$ 附近：

$$E_N(r_N) = \frac{Q_N}{4\pi\varepsilon r_N^2} = E_0 \quad (2)$$

$r_N$ 上的电压：

$$U_N = \int_{r_N}^R \frac{Q_N}{4\pi\varepsilon r_N^2} dr = \frac{Q_N}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{r_N} - \frac{1}{R} \right) = E_0 r_N^2 \left( \frac{1}{r_N} - \frac{1}{R} \right) \quad (3)$$

同理， $r_i$ 附近：

$$E_i(r_i) = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon r_i^2} = E_0 \quad (4)$$

$r_i$ 上的电压：

$$U_i = U_{i+1} + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon r_i^2} dr = U_{i+1} + E_0 r_i^2 \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) \quad (5)$$

高压电极上的电压：

$$U_0 = E_0 r_N^2 \left( \frac{1}{r_N} - \frac{1}{R} \right) + \sum_{i=0}^{N-1} E_0 r_i^2 \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) \quad (6)$$

令 $U_0$ 对 $r_i$  ( $r = 0, 1, 2 \dots N$ ) 等于零得:

$$\frac{\partial U_0}{\partial r_0} = E_0 \left( 1 - \frac{2r_0}{r_1} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial r_i} = E_0 \left( 1 - \frac{2r_i}{r_{i+1}} + \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 \right) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial r_N} = E_0 \left( 1 - \frac{2r_N}{R} + \left( \frac{r_{N-1}}{r_N} \right)^2 \right) = 0 \quad (9)$$

得

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$1 - \frac{2r_i}{r_{i+1}} + \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right)^2 = 0 \quad (11)$$

$$1 - \frac{2r_N}{R} + \left( \frac{r_{N-1}}{r_N} \right)^2 = 0 \quad (12)$$

$N = 0, 1, 2, 3$  的解

```

In[61]:= U0 = E0 * r0^2 * (1 / r0 - 1 / R)

Out[61]= E0  $\left( -\frac{1}{R} + \frac{1}{r0} \right) r0^2$ 

In[62]:= sol1 = Solve[ {D[U0, r0] == 0}, {r0}]
           解方程  偏导

Out[62]=  $\left\{ \left\{ r0 \rightarrow -\frac{R}{2} \right\} \right\}$ 

In[63]:= U0 /. sol1

Out[63]=  $\left\{ \frac{E0 R}{4} \right\}$ 

```

图 2:  $N = 0$

```

In[64]:= U0 = E0 * r1^2 * (1 / r1 - 1 / R) + E0 * r0^2 * (1 / r0 - 1 / r1)

Out[64]= E0 r0^2  $\left( \frac{1}{r0} - \frac{1}{r1} \right) + E0 \left( -\frac{1}{R} + \frac{1}{r1} \right) r1^2$ 

In[65]:= sol1 = Solve[ {D[U0, r0] == 0, D[U0, r1] == 0}, {r0, r1}]
           解方程  偏导          偏导

Out[65]=  $\left\{ \left\{ r0 \rightarrow \frac{5 R}{16}, r1 \rightarrow \frac{5 R}{8} \right\} \right\}$ 

In[66]:= U0 /. sol1

Out[66]=  $\left\{ \frac{25 E0 R}{64} \right\}$ 

```

图 3:  $N = 1$

```

In[67]:= U0 = E0 * r2^2 * (1 / r2 - 1 / R) + E0 * r1^2 * (1 / r1 - 1 / r2) + E0 * r0^2 * (1 / r0 - 1 / r1)
Out[67]= E0 r0^2  $\left(\frac{1}{r0} - \frac{1}{r1}\right)$  + E0 r1^2  $\left(\frac{1}{r1} - \frac{1}{r2}\right)$  + E0  $\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{r2}\right)$  r2^2

In[68]:= sol1 = Solve[{D[U0, r0] == 0, D[U0, r1] == 0, D[U0, r2] == 0}, {r0, r1, r2}]
Out[68]= {{r0 ->  $\frac{445 R}{2048}$ , r1 ->  $\frac{445 R}{1024}$ , r2 ->  $\frac{89 R}{128}$ }}

In[69]:= U0 /. sol1
Out[69]=  $\left\{\frac{7921 E0 R}{16384}\right\}$ 

```

图 4:  $N = 2$

```

In[70]:= U0 = E0 * r3^2 * (1 / r3 - 1 / R) + E0 * r2^2 * (1 / r2 - 1 / r3) + E0 * r1^2 * (1 / r1 - 1 / r2) +
E0 * r0^2 * (1 / r0 - 1 / r1)
Out[70]= E0 r0^2  $\left(\frac{1}{r0} - \frac{1}{r1}\right)$  + E0 r1^2  $\left(\frac{1}{r1} - \frac{1}{r2}\right)$  + E0 r2^2  $\left(\frac{1}{r2} - \frac{1}{r3}\right)$  + E0  $\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{r3}\right)$  r3^2

In[71]:= sol1 = Solve[{D[U0, r0] == 0, D[U0, r1] == 0, D[U0, r2] == 0, D[U0, r3] == 0}, {r0, r1, r2, r3}]
Out[71]= {{r0 ->  $\frac{10815725 R}{67108864}$ , r1 ->  $\frac{10815725 R}{33554432}$ , r2 ->  $\frac{2163145 R}{4194304}$ , r3 ->  $\frac{24305 R}{32768}$ }}

In[72]:= U0 /. sol1
Out[72]=  $\left\{\frac{590733025 E0 R}{1073741824}\right\}$ 

```

图 5:  $N = 3$